

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет кораблебудування  
імені адмірала Макарова

**Т. А. Юрченко, Л. Т. Саприкіна**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання типових розрахунків та індивідуальних завдань  
з вищої математики**

**В двох частинах**

**Частина II**

*Рекомендовано Методичною радою НУК*

Миколаїв 2006

УДК 517:681.3

**Юрченко Т.А., Саприкіна Л.Т.** Методичні вказівки до виконання типових розрахунків та індивідуальних завдань з вищої математики: В 2 ч. – Миколаїв: НУК, 2006. – Ч. 2. – 56 с.

*Кафедра вищої математики*

Методичні вказівки містять завдання типових розрахунків та індивідуальних завдань з розділів курсу вищої математики, що вивчаються студентами на другому курсі.

Завдання подано для 25 варіантів. До типових розрахунків запропоновано зразки їх виконання.

*Рецензент* канд. фіз.-мат. наук, доц. О.М. Шихватов

© Видавництво НУК, 2006

## Розділ I

### Типовий розрахунок № 3

#### КРАТНІ І КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

**Завдання 1.** Обчислити за допомогою подвійного або потрійного інтеграла об'єм тіла, що обмежене заданими поверхнями. Зробити рисунок даного тіла та його проекції на площину  $xOy$ .

| Варіант | Рівняння                                                                        | Варіант | Рівняння                                                             |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------------------------------|
| 1       | $x^2 + y^2 = R^2;$<br>$z = 0; z = y (z \geq 0)$                                 | 2       | $x = 2y^2;$<br>$x + 2y + z = 4;$<br>$z = 0; y = 0$                   |
| 3       | $y = x^2;$<br>$z = 0; y + z = 2$                                                | 4       | $z = 1 - x^2 (x \geq 0);$<br>$3x + 2y = 6;$<br>$x = 0; y = 0; z = 0$ |
| 5       | $y = 2x^2;$<br>$y + z = 2; z = 0$                                               | 6       | $z = 2y^2;$<br>$3x + 4y = 12;$<br>$x = 0; z = 0$                     |
| 7       | $z = \frac{16}{9} - y^2 (y \geq 0);$<br>$3x + 2y = 6;$<br>$x = 0; y = 0; z = 0$ | 8       | $x = 3y^2;$<br>$5x + z = 15;$<br>$z = 0$                             |
| 9       | $y = 1 - z^2;$<br>$y = x; y = -x$                                               | 10      | $x^2 + y^2 = 1;$<br>$z = 2 - x - y;$<br>$z = 0$                      |
| 11      | $z = y^2;$<br>$x + y = 2;$<br>$z = 0; x = 0$                                    | 12      | $z = x^2 + y^2;$<br>$y = x^2;$<br>$z = 0; y = 1$                     |

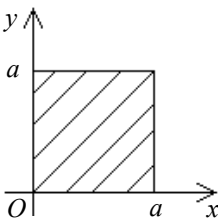
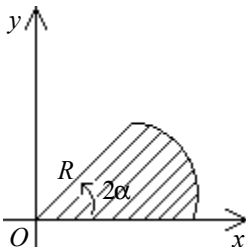
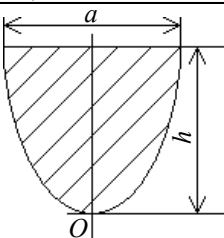
## Продовження

| Варіант | Рівняння                                                             | Варіант | Рівняння                                                                      |
|---------|----------------------------------------------------------------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------|
| 13      | $z = 0,5x^2;$<br>$3x + 2y = 6;$<br>$y = 0; z = 0$                    | 14      | $z = 4 - x^2 (x \geq 0);$<br>$3x + 4y = 12;$<br>$x = 0; y = 0; z = 0$         |
| 15      | $y = \sqrt{3x}; y = 2\sqrt{3x};$<br>$x + 2z = 3;$<br>$z = 0$         | 16      | $z = \sqrt{25 - y^2};$<br>$z = x; z = 0;$<br>$y = 0; y = 4$                   |
| 17      | $z = 16 - y^2 (y \geq 0);$<br>$8x + y = 8;$<br>$x = 0; y = 0; z = 0$ | 18      | $z = \frac{1}{4}x^2;$<br>$x + 3y = 6;$<br>$y = 0; z = 0$                      |
| 19      | $z = 9 - x^2 (x \geq 0);$<br>$x + 6y = 6;$<br>$x = 0; y = 0; z = 0$  | 20      | $z = \frac{1}{9} - y^2 (y \geq 0);$<br>$x + 2y = 2;$<br>$x = 0; y = 0; z = 0$ |
| 21      | $x = 3y^2;$<br>$2x + z = 5;$<br>$z = 0$                              | 22      | $z = 1 - y^2 (y \geq 0);$<br>$2x + 3y = 6;$<br>$x = 0; y = 0; z = 0$          |
| 23      | $y = 2x^2;$<br>$4y + z = 8;$<br>$z = 0$                              | 24      | $z = x^2;$<br>$x + y = 2;$<br>$y = 0; z = 0$                                  |
| 25      | $x^2 + y^2 = 4;$<br>$z = 4 - x - y;$<br>$z = 0$                      |         |                                                                               |

## Завдання 2. Розв'язати задачі.

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                            |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Визначити момент інерції відносно площини $xOy$ однорідної ( $\gamma = 1$ ) піраміди, обмеженої площинами $x + y + z = 1$ , $x = 0$ , $y = 0$ , $z = 0$ |
| 2       | Знайти координати центра мас однорідного тіла, що обмежене параболоїдом $z = 3 - x^2 - y^2$ і площиною $z = 0$                                          |

# Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                            |                                                                                                                                     |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3       | Знайти статичний момент однорідного ( $\gamma = 1$ ) півкруга радіуса $R$ відносно його діаметра                                        |                                                                                                                                     |
| 4       |  <p>Рис. 1</p>                                         | Знайти момент інерції квадрата відносно вершини $O(0; 0)$ , якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює ординаті точки (рис. 1) |
| 5       | Знайти момент інерції однорідної ( $\gamma = 1$ ) кулі радіуса $R = 1$ відносно її центра                                               |                                                                                                                                     |
| 6       |  <p>Рис. 2</p>                                         | Знайти координату $x$ центра мас однорідного ( $\gamma = 1$ ) кругового сектора радіуса $R$ з центральним кутом $2\alpha$ (рис. 2)  |
| 7       | Знайти центральний момент інерції однорідної ( $\gamma = 1$ ) пластини, що обмежена лемніскою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ |                                                                                                                                     |
| 8       |  <p>Рис. 3</p>                                       | Знайти момент інерції однорідного ( $\gamma = 1$ ) параболічного сегмента відносно його осі (рис. 3)                                |
| 9       | Знайти центр мас однорідного тіла, що обмежене конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і площиною $z = 2$                                        |                                                                                                                                     |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                  |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10      | Знайти координати центра мас однорідної піраміди, що обмежена площинами $x + y + z = 1$ , $x = 0$ , $y = 0$ , $z = 0$                                                                         |
| 11      | Знайти момент інерції однорідного параболічного сегмента відносно його основи (див. рис. 3)                                                                                                   |
| 12      | Знайти момент інерції відносно осі $Ox$ однорідної ( $\gamma = 1$ ) піраміди, що обмежена площинами $x + y + z = 1$ , $x = 0$ , $y = 0$ , $z = 0$                                             |
| 13      | Знайти координати центра мас однорідного тіла, що обмежене параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 2$                                                                                    |
| 14      | Знайти координати центра мас однорідної пластини, що обмежена параболою $2x = y^2$ і прямою $x = 2$                                                                                           |
| 15      | Знайти момент інерції однорідного ( $\gamma = 1$ ) циліндра з висотою $H$ і радіусом основи $R$ відносно його осі                                                                             |
| 16      | Знайти статичний момент відносно координатної площини $xOy$ однорідного ( $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене циліндром $y = x^2$ і площинами $z = 0$ , $z + 2y = 2$                             |
| 17      | Знайти момент інерції прямокутника $OACB$ із сторонами $OA = a$ , $OB = b$ відносно сторін $OA$ і $OB$ , якщо поверхнева густина в кожній точці чисельно дорівнює відстані її до сторони $OB$ |
| 18      | Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного ( $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 4$                                               |
| 19      | Знайти момент інерції відносно осі $Oz$ однорідного ( $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене площинами $x = 0$ , $y = 0$ , $y = 2$ , $z = 0$ , $x + z = 2$                                          |
| 20      | Знайти статичний момент відносно площини $xOy$ однорідного ( $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і площиною $y = z$ ( $z \geq 0$ )                                     |
| 21      | Знайти момент інерції відносно осі $Ox$ однорідного ( $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене площинами $x = 0$ , $x = 1$ , $y = 0$ , $z = 0$ , $y + z = 3$                                          |
| 22      | Знайти момент інерції відносно осі $Oz$ однорідного ( $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене циліндром $y = x^2$ і площинами $z = 0$ , $z + 2y = 2$                                                 |
| 23      | Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного ( $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене площинами $x = 0$ , $y = 0$ , $y = 2$ , $z = 0$ , $x + z = 2$                                 |
| 24      | Знайти координати центра мас півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , $z \geq 0$ , якщо густина в кожній точці обернено пропорційна відстані точки від початку координат                          |
| 25      | Знайти момент інерції однорідного сегмента параболоїда обертання з густиною $\gamma$ , радіусом основи $R$ і висотою $H$ відносно його осі обертання                                          |

*Примітка.*  $\gamma$  – густина (поверхнева або об'ємна).

### Завдання 3. Обчислити.

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                   |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | За формулою Гріна $\oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$ , де $C$ – контур трикутника з вершинами в точках $A(1; 1)$ , $B(2; 2)$ і $C(1; 3)$ |
| 2       | $\int_L x^2 dx + y^2 dy$ , де $L$ – верхня половина кола $x^2 + y^2 = 4$ (обхід за годинниковою стрілкою)                                      |
| 3       | $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , де $L$ – коло $x^2 + y^2 = ax$                                                                                 |
| 4       | $\int_L y dl$ , де $L$ – дуга параболи $y^2 = 4x$ , що відтинається параболою $x^2 = 4y$                                                       |
| 5       | За формулою Гріна $\oint_C (x + y) dx - 2x^2 dy$ , де $C$ – контур трикутника $x = 0$ , $y = 0$ , $x + y = 2$                                  |
| 6       | $\int_L y^2 dx + x^2 dy$ , де $L$ – верхня половина еліпса $x = 2\cos t$ , $y = 3\sin t$ (обхід за годинниковою стрілкою)                      |
| 7       | $\int_L (x + y) dy$ , де $L$ – дуга параболи $y = \frac{x^2}{2}$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(2; 2)$                                        |
| 8       | $\int_L xy dl$ , де $L$ – контур прямокутника з вершинами $O(0; 0)$ , $A(4; 0)$ , $B(4; 2)$ і $C(0; 2)$                                        |
| 9       | $\int_L \cos y dx - \sin x dy$ , де $L$ – відрізок прямої, що сполучає точки $A(2; -2)$ і $B(-2; 2)$                                           |
| 10      | $\int_L 2x dx - x^2 dy$ , де $L$ – дуга параболи $x = 2y^2$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(2; 1)$                                             |

# Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                            |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11      | $\int_L (x + y) dx$ , де $L$ – ламана $OBA$ , $O(0; 0)$ , $A(2; 2)$ , $B(2; 4)$                                                                                                         |
| 12      | За формулою Гріна $\oint_C y^2 dx + (x + y)^2 dy$ , де $C$ – контур трикутника $ABC$ з вершинами $A(a; 0)$ , $B(a; a)$ , $C(0; a)$                                                      |
| 13      | $\oint_C y dx + (x + y) dy$ , де $C$ – контур фігури, що обмежена лініями $y = x^2$ і $y = 4$ (обхід проти годинникової стрілки). Обчислення провести безпосередньо і за формулою Гріна |
| 14      | $\int_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$ , де $L$ – ламана $ABC$ , $A(1; 1)$ , $B(2; 1)$ , $C(2; 2)$                                                                                        |
| 15      | $\int_L x dy - y dx$ , де $L$ – астроїда $x = a \cos^3 t$ , $y = a \sin^3 t$ , $0 \leq t \leq 2\pi$ (обхід проти годинникової стрілки)                                                  |
| 16      | $\int_L xy dl$ , де $L$ – чверть кола $x^2 + y^2 = R^2$ , що лежить у першому квадранті                                                                                                 |
| 17      | $\oint_C x^2 y dx + x^3 dy$ , де $C$ – контур фігури, що обмежена параболою $y^2 = x$ , $x^2 = y$ (обхід проти годинникової стрілки)                                                    |
| 18      | $\int_L y dl$ , де $L$ – відрізок ланцюгової лінії $y = \operatorname{ch} x$ від точки з абсцисою $x_1 = 0$ до точки з абсцисою $x_2 = 1$                                               |
| 19      | За формулою Гріна $\oint_C \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$ , де $C$ – контур трикутника $ABC$ з вершинами $A(1; 1)$ , $B(3; 1)$ і $C(2; 2)$                                                |
| 20      | $\int_L (x + y) dx - x dy$ , де $L$ – ламана $OBA$ , $O(0; 0)$ , $A(4; 2)$ , $B(2; 0)$                                                                                                  |

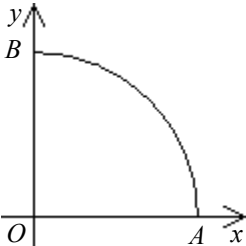
# Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                             |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 21      | $\int_L (x+y)dl$ , де $L$ – чверть кола $x^2 + y^2 = R^2$ , що лежить у першому квадранті                                                                |
| 22      | $\int_L xdy - ydx$ , де $L$ – дуга циклоїди $x = a(t - \sin t)$ , $y = a(1 - \cos t)$ від точки $A(2\pi a; 0)$ до точки $O(0; 0)$                        |
| 23      | $\oint_C \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$ , де $C$ – контур $\triangle ABC$ з вершинами $A(2; 2)$ , $B(3; 2)$ і $C(3; 3)$ (обхід проти годинникової стрілки) |
| 24      | $\int_L x^2 dl$ , де $L$ – дуга лінії $y = \ln x$ між точками $A(1; 0)$ і $B(e; 1)$                                                                      |
| 25      | $\int_L ydx + xdy$ , де $L$ – ламана $OBA$ , $O(0; 0)$ , $A(4; 2)$ , $B(2; 0)$                                                                           |

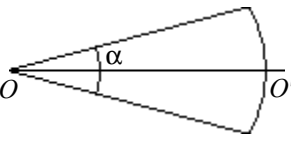
## Завдання 4. Розв'язати задачі.

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                 |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Знайти масу відрізка лінії $y = \ln x$ між точками з абсцисами $\sqrt{3}$ і $\sqrt{8}$ , якщо густина лінії в кожній точці дорівнює квадрату абсциси точки                   |
| 2       | Знайти масу відрізка однорідної ( $\gamma = 1$ ) ланцюгової лінії $y = \operatorname{ch} x$ між точками з абсцисами $x_1 = -1$ , $x_2 = 1$                                   |
| 3       | Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x+y)\vec{j}$ при переміщенні точки маси $m$ з початку координат в точку $A(1; 1)$ вздовж прямої $y = x$                           |
| 4       | Показати, що робота магнітного поля $\vec{H} = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y\vec{i} + x\vec{j})$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$ , $z = 0$ не залежить від радіуса кола              |
| 5       | Знайти масу чверті кола $x^2 + y^2 = R^2$ , що лежить у першому квадранті, якщо густина в кожній точці пропорційна її абсцисі (коефіцієнт пропорційності дорівнює $\alpha$ ) |
| 6       | Знайти ординату центра мас відрізка однорідної прямої $y = 2x + 4$ , що лежить між осями координат                                                                           |

# Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7       | Знайти момент інерції відносно координатних осей чверті однорідного ( $\gamma = 1$ ) кола $x = 2\cos t$ , $y = 2\sin t$ , що лежить у першому квадранті                                                                                                                            |
| 8       | Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$ вздовж першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$ , $y = a(1 - \cos t)$                                                                                                                                  |
| 9       | Знайти момент інерції відносно початку координат відрізка однорідної ( $\gamma = 1$ ) прямої $y = -2x + 1$ , що лежить між осями координат                                                                                                                                         |
| 10      | Знайти моменти інерції відносно координатних осей відрізка однорідної ( $\gamma = 1$ ) прямої $y = -2x + 1$ , що лежить між осями координат                                                                                                                                        |
| 11      | Знайти момент інерції однорідного ( $\gamma = 1$ ) кола $x^2 + y^2 = a^2$ відносно його діаметра                                                                                                                                                                                   |
| 12      | Знайти статичний момент відносно осі $Ox$ першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$ , $y = a(1 - \cos t)$ , лінійна густина $\gamma = 1$                                                                                                                                            |
| 13      | Знайти координати центра мас чверті однорідного кола радіуса $a$ , що лежить у першому квадранті                                                                                                                                                                                   |
| 14      | Знайти момент інерції однорідного півкола $x^2 + y^2 = R^2$ ( $x \geq 0$ ) відносно його діаметра, лінійна густина $\gamma$                                                                                                                                                        |
| 15      | Знайти масу півкола $x^2 + y^2 = R^2$ ( $y \geq 0$ ), якщо густина його в кожній точці пропорційна кубу ординати цієї точки (коефіцієнт пропорційності дорівнює $\beta$ )                                                                                                          |
| 16      | Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні точки маси $m$ з початку координат в точку $A(2; 4)$ вздовж параболи $y = x^2$                                                                                                                           |
| 17      |  <p>Відрізок однорідного дроту масою <math>M</math> і довжиною <math>L</math> зігнуто у вигляді чверті кола (рис. 4). Знайти його момент інерції відносно осі <math>OB</math></p> <p>Рис. 4</p> |
| 18      | Обчислити роботу сили $\vec{F} = \cos y\vec{i} - \sin x\vec{j}$ вздовж відрізка прямої, що з'єднує точки $A(2; -2)$ і $B(-2; 2)$                                                                                                                                                   |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 19      | Знайти абсцису центра мас дуги $AB$ однорідної кривої $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ( $A(0; a), B(b; h)$ )                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 20      | Знайти ординату центра мас дуги $AB$ однорідної кривої $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ( $A(0; a), B(b; h)$ )                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 21      | Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - (y + x^2)\vec{j}$ вздовж дуги параболи $y = 2x - x^2$ ( $y \geq 0$ ) (рух відбувається за годинниковою стрілкою)                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 22      | <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>Відрізок однорідного дроту довжиною <math>L</math>, масою <math>M</math> зігнуто у вигляді дуги кола з центральним кутом <math>\alpha</math> (рис. 5). Знайти його момент інерції відносно осі <math>OO'</math></p> </div> </div> <p style="text-align: center;">Рис. 5</p> |
| 23      | Знайти координати центра мас півкола $x^2 + y^2 = R^2$ ( $y \geq 0$ ), якщо густина в кожній його точці пропорційна ординаті точки (коефіцієнт пропорційності дорівнює $\beta$ )                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 24      | Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ вздовж чверті кола $x^2 + y^2 = 4$ , що лежить у першому квадранті (рух відбувається за годинниковою стрілкою)                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 25      | Знайти момент інерції однорідного ( $\gamma = 1$ ) кола радіуса $R$ відносно дотичної                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

*Примітка.*  $\gamma$  – лінійна густина.

## Зразок виконання типового розрахунку № 3

**Завдання 1.** Обчислити за допомогою подвійного або потрійного інтеграла об'єм тіла, що обмежене заданими поверхнями:  $x^2 = 2y$ ,  $2y + z = 2$ ,  $z = 0$ . Зробити рисунок даного тіла і його проєкції на площину  $XOY$ .

*Розв'язок*

Тіло обмежене знизу площиною  $XOY$  ( $z = 0$ ), зверху площиною  $2y + z = 2$ , що паралельна осі  $OX$ , а збоку – поверхнею параболічного

циліндра з твірними, паралельними осі  $OZ$  (рис. 6). Проектується тіло на площину  $XOY$  в область  $D$ , що обмежена параболою  $x^2 = 2y$  і прямою  $y = 1$  (прямою перетину площин  $2y + z = 2$  і  $z = 0$ ) (рис. 7).

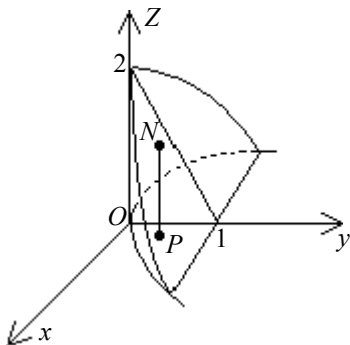


Рис. 6

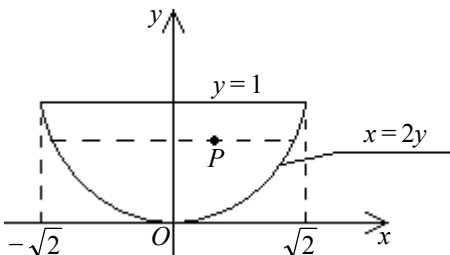


Рис. 7

Об'єм тіла обчислюємо за формулою

$$V = \iiint_V dx \, dy \, dz.$$

Розставимо межі інтегрування. Перше інтегрування будемо вести за змінною  $z$ . Для визначення меж її зміни проведемо через довільну точку  $P(x; y; 0)$  області  $D$  пряму, паралельну осі  $OZ$ . Апліката точки входу в область  $V$  дорівнює нулю (точка  $P$  і є точкою входу), а апліката виходу  $N$  визначається з рівняння площини  $2y + z = 2$ . Отже, в області  $V$  апліката  $z$  змінюється від 0 до  $2(1 - y)$ , а тому

$$V = \iint_D dx \, dy \int_0^{2(1-y)} dz.$$

В області  $D$  зручно внутрішнє інтегрування вести за змінною  $x$ , яка змінюється від  $x = -\sqrt{2y}$  на лівій вітці параболи до  $x = \sqrt{2y}$  на правій. Змінна  $y$  в цій області змінюється в межах  $0 \leq y \leq 1$ . Отже,

$$V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx \int_0^{2(1-y)} dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx \cdot z \Big|_0^{2(1-y)} = 2 \int_0^1 (1-y) dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 (1-y) 2\sqrt{2y} dy = 4\sqrt{2} \int_0^1 (\sqrt{y} - y\sqrt{y}) dy = 4\sqrt{2} \left( \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 = \\
&= 4\sqrt{2} \cdot 2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16\sqrt{2}}{15} \text{ куб. од.}
\end{aligned}$$

**Завдання 2.** Знайти момент інерції відносно осі  $Oz$  однорідного (густина  $\gamma = 1$ ) тіла, що обмежене параболоїдом обертання  $z = 4 - x^2 - y^2$  та площиною  $z = 0$  (рис. 8).

*Розв'язок*

Виділимо нескінченно малий елемент тіла  $dV$ , який можна прийняти за матеріальну точку  $M(x; y; z)$ , маса якої

$$dm = \gamma(x; y; z) dV,$$

де  $\gamma(x; y; z)$  – густина. В нашій задачі  $\gamma = 1$ . Момент інерції цього елемента відносно осі  $Oz$  такий:  $dI_z = r^2 dm = r^2 dV$ , де  $r$  – відстань точки  $M$  від осі  $Oz$ , а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

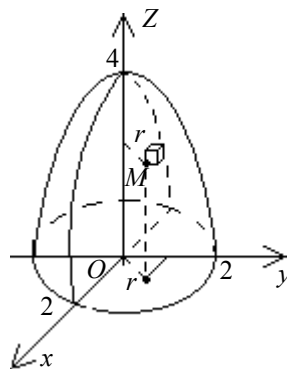


Рис. 8

Отже, момент інерції всього тіла буде  $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) dV$ .

Обчислення цього інтеграла зручно вести в циліндричних координатах.

Рівняння параболоїда матиме вигляд  $z = 4 - \rho^2$ , елемент об'єму  $dV = \rho d\rho d\varphi dz$ . Тоді

$$\begin{aligned}
I_z &= \iiint_V \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{4-\rho^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 (4 - \rho^2) d\rho = \\
&= \varphi \Big|_0^{2\pi} \left( \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left( 16 - \frac{64}{6} \right) = \frac{32}{3} \pi.
\end{aligned}$$

**Завдання 3.** Обчислити криволінійний інтеграл  $\oint_C (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy$ , де  $C$  – контур трикутника з вершинами  $A(0; 0)$ ;  $B(1; 0)$ ;  $C(0; 1)$  (обхід проти годинникової стрілки) безпосередньо та за формулою Гріна.

*Розв'язок*

Контур інтегрування зображено на рис. 9.

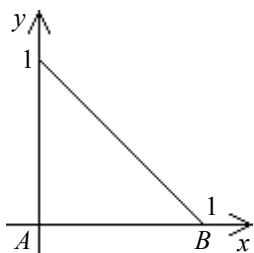


Рис. 9

Обчислимо інтеграл за кожною із сторін трикутника, зберігаючи напрям інтегрування, а результати складемо.

На стороні  $AB$  маємо

$$y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq 1.$$

Тоді

$$\int_{AB} (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy = 3 \int_0^1 x^2 dx = 1.$$

На стороні  $BC$   $y = 1 - x$ ,  $dy = -dx$ , точці  $B$  відповідає значення  $x = 1$ , а точці  $C$  – значення  $x = 0$ . Отже,

$$\begin{aligned} \int_{BC} (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy &= \int_1^0 [3x^2 + (1 - x) - x + 2(1 - x)^2] dx = \\ &= \int_1^0 (5x^2 - 6x + 3) dx = \left( \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 3x \right) \Big|_1^0 = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

На стороні  $CA$   $x = 0$ ,  $dx = 0$ ,  $y$  змінюється від 1 до 0. Тоді маємо

$$\int_{CA} (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy = - \int_1^0 2y^2 dy = \frac{2}{3}.$$

Таким чином,

$$\oint_{ABCA} (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy = 1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = 0.$$

За формулою Гріна

$$\oint_C P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

де  $D$  – область, що обмежена заданим контуром  $C$ .

В нашому випадку  $P(x; y) = 3x^2 + y$ ,  $Q(x; y) = x - 2y^2$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

$$\text{Отже, маємо } \oint_C (3x^2 + y) dx + (x - 2y^2) dy = \iint_D (1 - 1) dx dy = 0.$$

**Завдання 4.** Знайти координати центра мас чверті кола радіуса  $a$ , що лежить у першому квадранті, якщо лінійна густина в кожній точці кривої чисельно дорівнює ординаті точки (рис. 10).

*Розв'язок*

Координати центра мас кривої  $L$  обчислюємо за такими формулами:

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\int_L x\gamma(x; y) dl}{\int_L \gamma(x; y) dl};$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\int_L y\gamma(x; y) dl}{\int_L \gamma(x; y) dl},$$

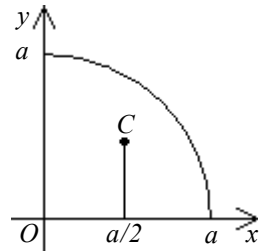


Рис. 10

де  $S_x$  і  $S_y$  – статичні моменти лінії  $L$  відносно осей  $Ox$  і  $Oy$ ;  $m$  – маса лінії;  $\gamma(x; y)$  – лінійна густина.

В нашому випадку  $\gamma(x; y) = y$ . Лінію  $L$  запишемо в параметричному вигляді:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = a dt;$$

$$S_x = \int_L x \gamma dl = \int_L x y dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \sin t \cdot a dt =$$

$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t d(\sin t) = \frac{a^3 \sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{2};$$

$$S_y = \int_L y \gamma dl = \int_L y^2 dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot a dt =$$

$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{a^3}{2} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3 \pi}{4};$$

$$m = \int_L \gamma dl = \int_L y dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin t \cdot a dt = a^2 (-\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Отже, одержуємо

$$x_c = \frac{a^3/2}{a^2} = \frac{a}{2}; \quad y_c = \frac{\pi a^3/4}{a^2} = \frac{\pi a}{4}.$$

Центр мас – точка  $C(a/2; \pi a/4)$ .

# Типовий розрахунок № 4

## І. РЯДИ ФУР'Є

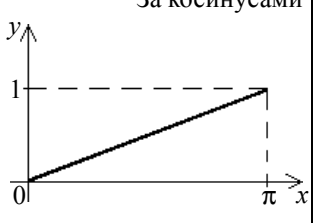
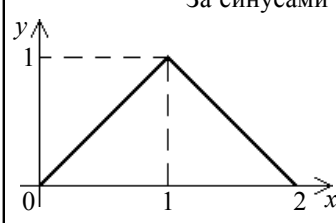
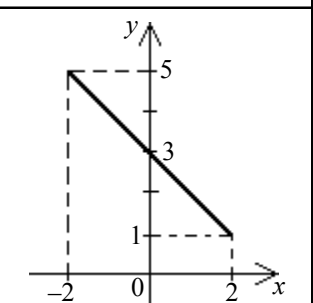
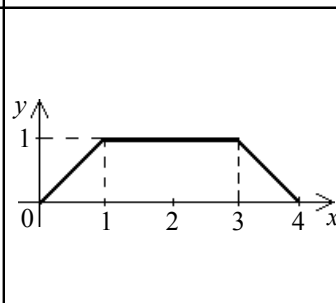
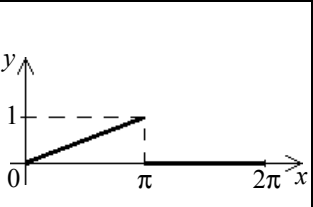
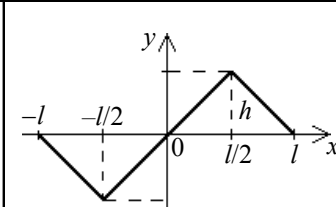
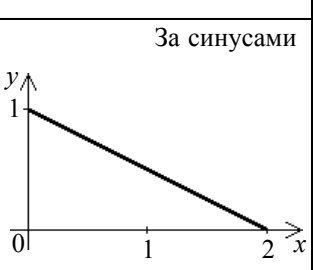
**Завдання 1.** Розкласти в ряд Фур'є функцію  $f(x)$ , що задана графіком.

| Варіант | Графік функції    | Варіант | Графік функції    |
|---------|-------------------|---------|-------------------|
| 1       |                   | 2       |                   |
| 3       | За косинусами<br> | 4       |                   |
| 5       |                   | 6       |                   |
| 7       |                   | 8       | За косинусами<br> |

Продовження

| Варіант | Графік функції    | Варіант | Графік функції |
|---------|-------------------|---------|----------------|
| 9       |                   | 10      |                |
| 11      |                   | 12      |                |
| 13      |                   | 14      |                |
| 15      | За косинусами<br> | 16      |                |
| 17      |                   | 18      |                |

Продовження

| Варіант | Графік функції                                                                                    | Варіант | Графік функції                                                                    |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|         | За косинусами                                                                                     |         | За синусами                                                                       |
| 19      |                  | 20      |  |
| 21      |                  | 22      |  |
| 23      |                  | 24      |  |
| 25      | За синусами<br> |         |                                                                                   |

## Зразок виконання типового розрахунку № 4 (I)

**Завдання 1.** Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функцію  $f(x)$ , що задана графіком (рис. 11).

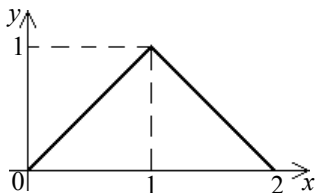


Рис. 11

*Розв'язок*

Запишемо задану функцію в аналітичному вигляді:  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Ряд Фур'є шукаємо у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{2} x.$$

Коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2-x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left( 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1;$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx.$$

Застосовуємо метод інтегрування частинами:

$$a_n = \left[ \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right] \Big|_0^1 + \left[ (2-x) \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right] \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos \frac{n\pi}{2} - 1) - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2} \left( 2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ непарному;} \\ \frac{8}{n^2\pi^2} (\cos \frac{n\pi}{2} - 1) & \text{при } n \text{ парному.} \end{cases}$$

Шуканий ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} \left( \cos \frac{2m\pi}{2} - 1 \right) \cos \frac{2m\pi x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1)\pi x.$$

## II. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

**Завдання 1.** Обчислити значення функції  $f(z)$  в заданій точці  $z_0$ , знайти його модуль, дійсну і уявну частини.

| Варіант | Функція $f(z)$                           | Точка $z_0$                   | Варіант | Функція $f(z)$          | Точка $z_0$               |
|---------|------------------------------------------|-------------------------------|---------|-------------------------|---------------------------|
| 1       | $e^{2iz+1}$                              | $i-1$                         | 2       | $ze^{3z}$               | $1-i$                     |
| 3       | $\sin \frac{z}{3}$                       | $\pi-3i$                      | 4       | $\sin \frac{i}{z}$      | $4-i$                     |
| 5       | $\sin \left( iz - \frac{\pi}{4} \right)$ | $1 + \frac{\pi}{4}i$          | 6       | $e^{\frac{2z+3i}{z}}$   | $1-i$                     |
| 7       | $\operatorname{ch} iz$                   | $\frac{\pi}{4} + 2i$          | 8       | $e^{\frac{z}{z+i}}$     | $2+i$                     |
| 9       | $\operatorname{tg} z$                    | $\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}$ | 10      | $\frac{e^z}{z}$         | $1 + \sqrt{3}i$           |
| 11      | $ze^{-z}$                                | $1 - \sqrt{3}i$               | 12      | $ie^{2z}$               | $3-4i$                    |
| 13      | $\operatorname{ch} z$                    | $2-3i$                        | 14      | $e^{\frac{1+iz}{1-iz}}$ | $2+i$                     |
| 15      | $e^{\frac{1}{z}}$                        | $1 + \sqrt{3}i$               | 16      | $\sin \frac{z+i}{z-i}$  | 1                         |
| 17      | $z \cos \frac{1}{z-2}$                   | $i$                           | 18      | $\operatorname{ctg} z$  | $\frac{\pi}{4} - i \ln 2$ |
| 19      | $\operatorname{tg} z$                    | $\ln 3 + \frac{\pi}{4}i$      | 20      | $ze^{-iz}$              | $\frac{\pi}{2} - i$       |
| 21      | $\left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)^{10}$  | $-2-i$                        | 22      | $e^{-\frac{i}{2}}$      | $\sqrt{3}-i$              |

## Продовження

| Варіант | Функція $f(z)$                          | Точка $z_0$                     | Варіант | Функція $f(z)$ | Точка $z_0$ |
|---------|-----------------------------------------|---------------------------------|---------|----------------|-------------|
| 23      | $\frac{z \operatorname{Im} z^2}{ z ^3}$ | $\sqrt{3} + 3i$                 | 24      | $z^3 e^{-iz}$  | $1 - i$     |
| 25      | $\sin \frac{z}{\operatorname{Im} z}$    | $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} i$ |         |                |             |

### Завдання 2. Знайти:

область диференційованості функції  $f(z)$  і похідну, якщо вона існує, використовуючи умови Коші–Рімана (варіанти 1–12);

| Варіант | Функція $f(z)$            | Варіант | Функція $f(z)$            |
|---------|---------------------------|---------|---------------------------|
| 1       | $e^{2z+3i}$               | 2       | $z \operatorname{Im} z^2$ |
| 3       | $\frac{1}{z}$             | 4       | $z \operatorname{Re} z$   |
| 5       | $e^{2iz}$                 | 6       | $\sin iz$                 |
| 7       | $z \operatorname{Re} z^2$ | 8       | $ie^{2z}$                 |
| 9       | $\sin \frac{z}{3}$        | 10      | $ze^{-z}$                 |
| 11      | $\cos iz$                 | 12      | $\frac{i}{z}$             |

коефіцієнт розтягу  $k$  і кут повороту  $\theta$  при відображенні  $W = f(z)$  в точці  $z_0$  (варіанти 13–18);

| Варіант | Функція $f(z)$      | Точка $z_0$        | Варіант | Функція $f(z)$  | Точка $z_0$    |
|---------|---------------------|--------------------|---------|-----------------|----------------|
| 13      | $z^3$               | $1 + i$            | 14      | $ie^{2z}$       | $2\pi i$       |
| 15      | $\frac{1+iz}{1-iz}$ | $i$                | 16      | $\frac{z-1}{z}$ | $\sqrt{3} - i$ |
| 17      | $z^2 - 2z$          | $1 + \frac{1}{2}i$ | 18      | $\frac{i}{z}$   | $\sqrt{3} + i$ |

множину точок  $z$  комплексної площини, в яких при відображенні  $W = f(z)$  коефіцієнт розтягу  $k = 1$  (варіанти 19–21);

| Варіант | Функція $f(z)$      | Варіант | Функція $f(z)$ |
|---------|---------------------|---------|----------------|
| 19      | $(z-1)^2$           | 20      | $z^2 - iz$     |
| 21      | $\frac{1+iz}{1-iz}$ |         |                |

яка частина комплексної площини розтягується, а яка стискається при відображенні  $W=f(z)$  (варіанти 22–25).

| Варіант | Функція $f(z)$  | Варіант | Функція $f(z)$ |
|---------|-----------------|---------|----------------|
| 22      | $e^{z-1}$       | 23      | $z^2 + 2z$     |
| 24      | $-z^2 + 3z + 8$ | 25      | $\frac{2}{z}$  |

**Завдання 3.** Розкласти функцію  $f(z)$  в степеневий ряд в околі точки  $z_0$  і вказати область збіжності одержаного ряду.

| Варіант | Функція $f(z)$                 | Точка $z_0$ | Варіант | Функція $f(z)$             | Точка $z_0$ |
|---------|--------------------------------|-------------|---------|----------------------------|-------------|
| 1       | $\frac{1}{(z-1)^2}$            | $i$         | 2       | $\frac{z}{(z+1)(z-2)}$     | 2           |
| 3       | $\frac{1}{z^2 - 5z + 6}$       | 2           | 4       | $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$   | 0           |
| 5       | $\frac{3}{(4-z)^2}$            | 1           | 6       | $\frac{1}{(z-1)^2}$        | 0           |
| 7       | $\frac{1}{z^2 - 7z + 6}$       | 1           | 8       | $\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$   | 1           |
| 9       | $\frac{1}{z^2 + 6z + 5}$       | -1          | 10      | $\frac{z}{z^2 - z - 2}$    | -1          |
| 11      | $\frac{1}{(z-1)(z^2 + z - 2)}$ | -2          | 12      | $\frac{z+1}{z^2 + 1}$      | 0           |
| 13      | $\frac{z+1}{z(z-1)}$           | 0           | 14      | $\frac{z+3}{z^2 - 1}$      | 0           |
| 15      | $\frac{z}{z^2 + 1}$            | 0           | 16      | $\frac{z+2}{z^2 + 2z - 3}$ | 1           |
| 17      | $\frac{z-1}{z(z+1)}$           | 0           | 18      | $\frac{z+1}{z(z-1)}$       | 1           |
| 19      | $\frac{z+3}{z^2 - 1}$          | -1          | 20      | $\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}$   | -3          |

Розкласти функцію  $f(z)$  в ряд за степенями  $z$  в заданій області.

| Варіант | Функція $f(z)$           | Область       | Варіант | Функція $f(z)$           | Область       |
|---------|--------------------------|---------------|---------|--------------------------|---------------|
| 21      | $\frac{1}{z^2 - 7z + 6}$ | $1 <  z  < 6$ | 22      | $\frac{z-1}{z(z+1)}$     | $ z  > 1$     |
| 23      | $\frac{1}{(z-1)(z-6)}$   | $ z  < 1$     | 24      | $\frac{1}{z^2 - 5z + 6}$ | $2 <  z  < 3$ |
| 25      | $\frac{1}{z^2 + 1}$      | $ z  < 1$     |         |                          |               |

**Завдання 4.** Обчислити контурний інтеграл  $\oint_C f(z) dz$  за допомогою

інтегральної формули Коші та за допомогою лишків.

| Варіант | Функція $f(z)$                      | Рівняння контуру $C$ | Варіант | Функція $f(z)$                             | Рівняння контуру $C$ |
|---------|-------------------------------------|----------------------|---------|--------------------------------------------|----------------------|
| 1       | $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$          | $ z-1-i =2$          | 2       | $\frac{z+1}{(z^2+4)(z+2i)}$                | $ z-2i =1$           |
| 3       | $\frac{\cos z}{(z-i)^2(z+1)}$       | $ z+1 =\frac{1}{2}$  | 4       | $\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}$                 | $ z =4$              |
| 5       | $\frac{1}{(z+1)(z-1)^3}$            | $ z-1 =1$            | 6       | $\frac{z+1}{(z^2+4)(z+2i)}$                | $ z+2i =1$           |
| 7       | $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$          | $ z-1 =\frac{1}{2}$  | 8       | $\frac{\sin z}{z^2(z-i)}$                  | $ z-i =3$            |
| 9       | $\frac{\operatorname{sh} z}{z^2-1}$ | $ z =2$              | 10      | $\frac{z}{(z-2)^2(z+4)}$                   | $ z-2 + z+4 =8$      |
| 11      | $\frac{e^z}{z(1-z)^3}$              | $ z-1 =\frac{1}{2}$  | 12      | $\frac{\operatorname{sh} z}{(z-1)^2(z+1)}$ | $ z-1 =1$            |
| 13      | $\frac{e^z}{z^2(z+1)}$              | $ z =3$              | 14      | $\frac{\sin z}{z^2(z-i)}$                  | $ z =\frac{1}{2}$    |
| 15      | $\frac{\sin z}{z(z+1)}$             | $ z =2$              | 16      | $\frac{\sin z}{(z+i)^3}$                   | $ z+i =1$            |
| 17      | $\frac{\cos z}{(z-i)^3}$            | $ z-1 =1$            | 18      | $\frac{e^z}{z(1-z)^2}$                     | $ z + z-1 =2$        |

## Продовження

| Варіант | Функція $f(z)$                          | Рівняння контуру $C$ | Варіант | Функція $f(z)$               | Рівняння контуру $C$ |
|---------|-----------------------------------------|----------------------|---------|------------------------------|----------------------|
| 19      | $\frac{1}{z^2 + 2z}$                    | $ z  = 3$            | 20      | $\frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}$ | $ z - \pi  = 1$      |
| 21      | $\frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z^2 + 1}$ | $ z - i  = 1$        | 22      | $\frac{\cos z}{(z - i)^3}$   | $ z  = 3$            |
| 23      | $\frac{e^z - 1}{z^2(z + 1)}$            | $ z - 1  = 3$        | 24      | $\frac{z}{(z + 1)^2(z - 3)}$ | $ z + i  = 4$        |
| 25      | $\frac{z - 2}{z(z^2 + 4)}$              | $ z - i  = 2$        |         |                              |                      |

### Зразок виконання типового розрахунку № 4 (II)

**Завдання 1.** Обчислити значення функції  $f(z) = \sin\left(iz + \frac{\pi}{2}\right)$  в точці

$z_0 = 2 - \frac{\pi}{4}i$ , знайти його модуль, дійсну і уявну частини.

*Розв'язок*

$$\begin{aligned}
 f(z_0) &= \sin\left(i\left(2 - \frac{\pi}{4}i\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2i\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + 2i\right)} - e^{-i\left(\frac{3}{4}\pi + 2i\right)}\right) = \\
 &= -\frac{i}{2}\left(e^{-2 + \frac{3}{4}\pi i} - e^{2 - \frac{3}{4}\pi i}\right) = -\frac{i}{2}\left(e^{-2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i\sin \frac{3}{4}\pi\right) - e^2\left(\cos \frac{3}{4}\pi - \right. \right. \\
 &\left. \left. - i\sin \frac{3}{4}\pi\right)\right) = -\frac{i}{2}\left[\cos \frac{3}{4}\pi(e^{-2} - e^2) + i\sin \frac{3}{4}\pi(e^2 + e^{-2})\right] = -i\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} 2 + \right. \\
 &\left. + i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch} 2\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch} 2 - i\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} 2; \operatorname{Re} W_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch} 2; \operatorname{Im} W_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sh} 2; \\
 |W_0| &= \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2 2 + \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\operatorname{ch} 4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{e^4 + e^{-4}}{2}} = \frac{1}{2e^2}\sqrt{e^8 + 1}.
 \end{aligned}$$

**Завдання 2.** Знайти коефіцієнт розтягу  $k$  і кут повороту  $\theta$  при відображенні  $W = ie^{2z}$  в точці  $z_0 = \frac{\pi}{4}i$ .

*Розв'язок*

Коефіцієнт розтягу при відображенні, що здійснює аналітична функція, дорівнює модулю похідної, а кут повороту – аргументу похідної. Продиференціюємо функцію

$$W' = 2ie^{2z}; \quad W'(z_0) = 2ie^{\frac{\pi}{2}i}; \quad |W'(z_0)| = \left| 2ie^{\frac{\pi}{2}i} \right| = 2|i| \cdot \left| e^{\frac{\pi}{2}i} \right| = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2;$$

$$\arg W'(z_0) = \arg \left( 2ie^{\frac{\pi}{2}i} \right) = \arg 2 + \arg i + \arg e^{\frac{\pi}{2}i} = 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Отже, коефіцієнт розтягу  $k = 2$ , а кут повороту  $\theta = \pi$ .

**Завдання 3.** Розкласти функцію  $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}$  в степеневий ряд в околі точки  $z_0 = -2$  та вказати область збіжності одержаного ряду.

*Розв'язок*

Оскільки точка  $z_0 = -2$  – ізольована особлива точка для заданої функції, то в її околі  $f(z)$  можна розкласти в ряд Лорана. Для цього розкладемо задану функцію на елементарні дроби:

$$\frac{z}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+2};$$

$$A(z+2) + B(z-1)(z+2) + C(z-1)^2 = z;$$

$$\text{при } z = -2 \quad 9C = -2 \Rightarrow C = -\frac{2}{9};$$

$$\text{при } z = 1 \quad 3A = 1, \quad A = \frac{1}{3}, \quad B + C = 0 \Rightarrow B = +\frac{2}{9}.$$

Одержуємо

$$\frac{z}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{(z-1)} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+2}.$$

Кожний з одержаних дробів подамо у розкладі за степенями  $z + 2$ :

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z+2)-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{z+2}{3}} = -\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{z+2}{3} + \frac{(z+2)^2}{3^2} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)^2} &= -\left( \frac{1}{z-1} \right)' = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(z+2) + \frac{3}{3^3}(z+2)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{3^2} \left( 1 + \frac{2}{3}(z+2) + \frac{3}{3^2}(z+2)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z-1)^2(z+2)} &= \frac{1}{3^3} \left( 1 + \frac{2}{3}(z+2) + \frac{3}{3^2}(z+2)^2 + \dots \right) + \frac{2}{9} \left( -\frac{1}{3} \right) \times \\ &\times \left( 1 + \frac{z+2}{3} + \frac{1}{3^2}(z+2)^2 + \dots \right) - \frac{2}{9} \frac{1}{z+2} = -\frac{2}{9} \frac{1}{z+2} + \left( \frac{1}{3^3} - \frac{2}{3^2} \right) + \\ &+ \left( \frac{2}{3^4} - \frac{2}{3^4} \right) (z+2) + \left( \frac{3}{3^5} - \frac{2}{3^5} \right) (z+2)^2 + \dots = -\frac{2}{9} \frac{1}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{3^{n+3}} (z+2)^n. \end{aligned}$$

Область збіжності одержаного ряду є кільце  $0 < |z+2| < 3$ .

**Завдання 4.** Обчислити контурний інтеграл  $\oint_{|z-1-i|=2} \frac{e^z - 1}{z(z-2)^2} dz$  за

допомогою інтегральної формули Коші та за допомогою лишків.

*Розв'язок*

Підінтегральна функція має особливі точки:  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 2$ .

За теоремою Коші для багатозв'язної області

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z(z-2)^2} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^z - 1}{z(z-2)^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^z - 1}{z(z-2)^2} dz,$$

де  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  – довільні контури, що охоплюють точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 2$  і зна-

ходяться всередині контура  $C$  (рис. 12):

$$\oint_{\gamma_1} \frac{e^z - 1}{z(z-2)^2} dz = 2\pi i \left( \frac{e^z - 1}{(z-2)^2} \right) \Big|_{z=0} = 2\pi i \cdot 0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_2} \frac{e^z - 1}{z(z-2)^2} dz &= 2\pi i \left( \frac{e^z - 1}{z} \right) \Big|_{z=2} = 2\pi i \frac{e^z z - e^z + 1}{z^2} \Big|_{z=2} = 2\pi i \frac{e^2 2 - e^2 + 1}{4} = \\ &= \frac{\pi i}{2} (e^2 + 1). \end{aligned}$$

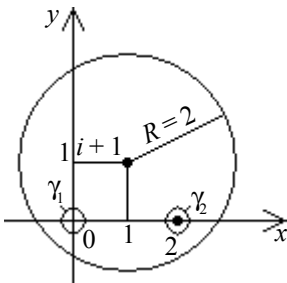


Рис. 12

$$\operatorname{res}[f(z), 2] = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z - 1}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z z - e^z + 1}{z^2} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Звідси

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z(z-2)^2} dz = 2\pi i \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{\pi i}{2} (e^2 + 1).$$

### III. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

**Завдання 1.** Знайти ймовірності подій, використовуючи класичне означення ймовірності (схему випадків).

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Серед кандидатів до студентської ради факультету три першокурсники, п'ять другокурсників і сім третьокурсників. З цієї ради навмання вибирають п'ять студентів на майбутню конференцію. Знайти ймовірність того, що буде обрано наступний склад: один першокурсник, два другокурсники і два третьокурсники |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2       | За круглим столом сидять п'ять хлопців та п'ять дівчат. Знайти ймовірність того, що два лиця однієї статі не сидять поруч, якщо місця займаються випадково                                                                                                               |
| 3       | У лотереї випущено 1000 білетів, з яких половина виграшних. Куплено два білети. Яка ймовірність того, що один виграшний; два виграшних?                                                                                                                                  |
| 4       | У першій урні знаходяться кулі з номерами від 1 до 5, а в другій – від 6 до 10. З кожної урни витягли по одній кулі. Яка ймовірність того, що сума номерів вийнятих куль не менше 7; дорівнює 11; не більше 11?                                                          |
| 5       | Навмання вибирається п'ятизначне число. Яка ймовірність наступних подій: $A = \{\text{Число однаково читається як ліворуч-праворуч, так і праворуч-ліворуч (наприклад, 13531)}\}$ ; $B = \{\text{Число кратне 5}\}$ ; $C = \{\text{Число складається з непарних цифр}\}$ |
| 6       | Є п'ять відрізків, довжина яких відповідно 1; 3; 5; 7 і 9. Визначити ймовірність того, що за допомогою взятих навмання трьох відрізків з даних п'яти можна побудувати трикутник                                                                                          |
| 7       | Пристрій містить сім елементів, три з яких зношені. При ввімкненні пристрою випадково включаються два елементи. Знайти ймовірність того, що включеними виявляться незношені елементи                                                                                     |
| 8       | На восьми однакових картках написані відповідно числа 2; 4; 6; 7; 8; 11; 12 і 13. Навмання беруться дві картки. Знайти ймовірність того, що утворений з двох отриманих чисел дріб скоротний                                                                              |
| 9       | З 60 питань, що входять в екзаменаційні білети, студент підготував 50. Яка ймовірність того, який витягнутий квиток, що містить два питання, буде складатися з підготовлених питань?                                                                                     |
| 10      | В коробці 15 однакових виробів, причому п'ять з них пофарбовані. Навмання витягнуто три вироби. Знайти ймовірність того, що серед трьох витягнутих виробів виявиться три пофарбовані вироби; один пофарбований виріб                                                     |
| 11      | Серед 12 студентів, з яких сім дівчат, розігрується п'ять квитків. Яка ймовірність того, що серед власників квитків виявиться три дівчини, якщо кожен студент може зробити тільки одну спробу?                                                                           |
| 12      | З колоди карт (36 штук) навмання виймаються три карти. Знайти ймовірність того, що серед них з'явиться один туз                                                                                                                                                          |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 13      | У групі з 30 студентів на контрольній роботі з математики 6 студентів отримали оцінку "відмінно", 10 – "добре", 9 – "незадовільно". Яка ймовірність того, що всі три студенти, яких викликали до дошки, одержали незадовільні оцінки з контрольної роботи?                 |
| 14      | З послідовності цілих чисел від 1 до 10 навмання вибирають два числа. Яка ймовірність того, що одне з них менше 6, а друге більше 6?                                                                                                                                       |
| 15      | З колоди карт (52 карти) навмання виймають 3 карти. Знайти ймовірність того, що цими картами будуть трійка, семірка і туз                                                                                                                                                  |
| 16      | З партії, що містить десять виробів, серед яких три браковані, навмання виймають три вироби для контролю. Знайти ймовірність наступних подій: $A = \{\text{В отриманій вибірці усі вироби браковані}\}$ ; $B = \{\text{В отриманій вибірці рівно два бракованих вироби}\}$ |
| 17      | Десять книг на полиці розставлено навмання. Знайти ймовірність того, що при цьому три конкретні книги стоять поруч                                                                                                                                                         |
| 18      | Хтось вибирає навмання шість клітин "Спортлото" (6 з 49). Знайти ймовірність того, що він правильно вгадає з шести номерів, що виграли: $A = \{\text{Рівно три}\}$ ; $B = \{\text{Усі шість}\}$                                                                            |
| 19      | У партії є 20 коробок цукерок, при цьому в чотирьох з них – цукерки шоколадні. Товарознавець бере навмання одну за одною 3 коробки. Яка ймовірність того, що усі взяті коробки виявляться з нешоколадними цукерками?                                                       |
| 20      | Монета підкидається п'ять разів. Знайти ймовірність того, що після її падіння з'явиться усі п'ять разів герб; рівно два рази герб; хоча б один раз герб                                                                                                                    |
| 21      | З десяти білетів виграшними є два. Знайти ймовірність того, що серед взятих навмання п'яти білетів один виграшний; обидва виграшні                                                                                                                                         |
| 22      | Визначити ймовірність того, що обране навмання однозначне ціле число $N$ при піднесенні до квадрату (а), піднесенні до четвертого степеня (б), множенні на довільне з чисел $N$ (в) дасть число, що закінчується одиницею                                                  |
| 23      | У скриньці знаходиться 10 кульок: 2 білі, 3 червоні і 5 блакитних. Навмання беруть 3 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору                                                                                                                              |
| 24      | З 15 білетів виграшними є чотири. Яка ймовірність того, що серед взятих навмання шести білетів два будуть виграшними?                                                                                                                                                      |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                       |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 25      | Знайти ймовірність того, що при підкиданні трьох гральних кубиків шість очок випаде на одному з них (байдуже на якому), а на гранях двох інших випаде різна кількість очок, але відмінна від шести |

**Завдання 2.** При знаходженні ймовірності події використовувати теореми додавання і множення ймовірностей, формули повної ймовірності, Байеса, Бернуллі.

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | У групі спортсменів 20 лижників, шість велосипедистів і чотири бігуни. Ймовірність виконати кваліфіковану норму дорівнює для лижника – 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що викликаний на навмання спортсмен виконає норму                                                                                                                |
| 2       | На полиці в бібліотеці у випадковому порядку розставлено 15 підручників, причому 5 з них – з математики. Бібліотекар навмання бере 3 підручника. Знайти ймовірність того, що хоча б один із узятих підручників виявиться з математики                                                                                                                                             |
| 3       | Два баскетболісти роблять по три кидки м'ячем у кошик. Ймовірності влучення м'яча при кожному кидку дорівнюють відповідно 0,6 і 0,7. Знайти ймовірність того, що у кожного з них буде рівна кількість влучень                                                                                                                                                                     |
| 4       | Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирав її на навмання. Визначити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більш ніж у три місяці. Як зміниться ймовірність, якщо відомо, що остання цифра непарна?                                                                                                                                                    |
| 5       | Ймовірність того, що даний прилад пропрацює 150 годин дорівнює $\frac{5}{7}$ , а 400 годин – $\frac{4}{7}$ . Прилад пропрацював 150 годин. Яка ймовірність того, що він пропрацює ще 250 годин?                                                                                                                                                                                   |
| 6       | Студент виконує контрольну роботу в класі контролюючих машин. Робота складається з трьох задач. Щоб одержати позитивну оцінку, досить вирішити дві. Для кожної задачі зашифровано п'ять різних відповідей, з яких одна правильна. Студент Іванов погано знає матеріал і тому вибирає відповіді кожної задачі на навмання. Яка ймовірність того, що він одержить позитивну оцінку? |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7       | Електричний ланцюг складається з двох послідовно з'єднаних елементів 1 і 2. Різні елементи ланцюга виходять з ладу незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу цих елементів відповідно дорівнює $p_1 = 0,1$ і $p_2 = 0,2$ . Визначити ймовірність перерви постачання електричного струму                                                                                                                                                          |
| 8       | На збиральний конвеєр надходять деталі з трьох верстатів, продуктивність яких неоднакова: перший дає 50 % плану, другий – 30 % і третій – 20 %. Ймовірність одержання придатного вузла дорівнює 0,92, якщо деталь зроблена на першому верстаті; 0,95 і 0,82 – для деталей відповідно другого і третього верстатів. Визначити ймовірність того, що на зборку потрапила деталь, виготовлена на першому верстаті, якщо вузол, що сходить з конвеєра, придатний |
| 9       | Схема, що складається з трьох елементів, може працювати в двох режимах, які настають з ймовірністю 0,6 і 0,4. Надійність елементів в першому режимі відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7, а в другому – 0,8; 0,6; 0,5. Визначити надійність схеми при послідовному з'єднанні елементів                                                                                                                                                                         |
| 10      | Ймовірність влучення в першу мішень для даного стрілка дорівнює $2/3$ . Якщо при першому пострілі зафіксовано влучення, то стрілок одержує право на другий постріл по іншій мішені. Ймовірність влучення у дві мішені при двох пострілах дорівнює 0,5. Визначити ймовірність влучення у другу мішень                                                                                                                                                        |
| 11      | Для сигналізації про те, що режим роботи автоматичної лінії відхиляється від нормального, використовується індикатор. Він належить з ймовірністю 0,2; 0,3 і 0,5 до одного з трьох типів, для яких імовірності спрацювання при порушенні нормальної роботи лінії дорівнюють відповідно 1,0; 0,75; 0,4. Від індикатора отримано сигнал. До якого типу найімовірніше належить індикатор?                                                                       |
| 12      | Яка ймовірність влучення стрілком у ціль при одному пострілі, якщо ймовірність хоча б одного влучення в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984?                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 13      | Імовірність того, що лампа залишиться справною після 1000 год роботи, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що з п'яти ламп не менше трьох залишаться справними після 1000 год роботи?                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 14      | Товариство, що складається з п'яти чоловіків і десяти жінок, навмання розбивається на п'ять груп по три людини. Знайти ймовірність того, що в кожній групі буде по одному чоловіку                                                                                                                                                                                                                                                                          |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 15      | Вершкове масло фасується на двох технологічних лініях молокозаводу. Ймовірність виходу кондиційної продукції з першої лінії дорівнює 0,88, а з другої – 0,95. Навмання взятий пакет виявився кондиційним. Яка ймовірність того, що він розфасований на першій лінії? На другій лінії?                                  |
| 16      | Стріляють по трьох мішенях: п'ять разів по мішені № 1; три рази – по мішені № 2; два – по мішені № 3. Ймовірність влучення в мішень № 1 дорівнює 0,4; у мішень № 2 – 0,1; у мішень № 3 – 0,12. Знайти ймовірність одного влучення                                                                                      |
| 17      | Для виконання вправи спортсмену на змаганнях даються три спроби. Ймовірність успішного виконання вправи в першій спробі дорівнює 0,8; у другій – 0,7; у третій – 0,4. Знайти ймовірність того, що спортсмен виконає успішно цю вправу                                                                                  |
| 18      | Знайти ймовірність того, що обраний навмання виріб є першосортним, якщо відомо, що 4 % усієї продукції є браком, а 75 % не бракованих виробів задовольняють вимогам 1-го сорту                                                                                                                                         |
| 19      | Мисливець вистрілив три рази по цілі, що віддаляється. Ймовірність влучення в неї на початку стрілянини дорівнює 0,8, а після кожного пострілу зменшується на 0,1. Знайти ймовірність того, що він влучить у ціль два рази                                                                                             |
| 20      | Ймовірність того, що кожний з трьох друзів прийде в домовлене місце, відповідно дорівнює: $p_1 = 0,8$ ; $p_2 = 0,4$ ; $p_3 = 0,7$ . Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо для цього досить з'явитися двом з трьох друзів                                                                               |
| 21      | Бібліотека має книги тільки з техніки і математики. Ймовірність того, що будь-який читач візьме книгу з техніки та математики, дорівнюють відповідно 0,7 і 0,3. Визначити ймовірності того, що п'ять читачів підряд візьмуть книги чи тільки з техніки, чи тільки з математики, якщо кожний з них бере лише одну книгу |
| 22      | Робітник обслуговує два верстати. Протягом восьми годин кожний з верстатів простоє з різних причин 0,5 год, причому їх зупинки у будь-який момент часу однаково можливі. Визначити ймовірність того, що в даний момент часу працює тільки один верстат; працюють обидва верстати                                       |
| 23      | Розрив електричного ланцюга може відбутися внаслідок виходу з ладу елемента $K$ чи двох елементів – $K_1$ і $K_2$ , що виходять з ладу незалежно один від одного відповідно з ймовірністю 0,3; 0,2 і 0,2. Визначити ймовірність розриву електричного ланцюга                                                           |

### Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 24      | В урні 18 білих і 2 чорні кулі. Навмання одну за одною виймають дві кулі без повернення. Знайти ймовірність наступних подій: обидві кулі одного кольору; кулі різних кольорів                                                                                         |
| 25      | Ймовірність того, що при одному вимірі деякої фізичної величини буде допущена похибка, що перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Зроблено три незалежних виміри. Знайти ймовірність того, що тільки в одному з них допущено помилку, яка перевищить задану точність |

**Завдання 3.** Знаходження числових характеристик і законів розподілу випадкових величин дискретного і неперервного типів.

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | Деталі, що випускаються цехом, за розміром діаметра розподіляються відповідно до нормального закону з параметрами: математичне сподівання $m_x = 5$ см; дисперсія $D_x = 0,81$ . Знайти ймовірність того, що діаметр навмання взятої деталі від 4 см до 7 см; відрізняється від $m_x$ не більше ніж на 2 см                                                      |
| 2       | З партії, що складає 20 виробів, серед яких п'ять бракованих, вибрали випадковим чином три вироби для перевірки їх якості. Побудувати ряд розподілу випадкової величини $X$ – числа бракованих виробів, знайти математичне сподівання і дисперсію                                                                                                                |
| 3       | Неперервна випадкова величина $X$ задана інтегральною функцією $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ Знайти диференціальну функцію; математичне сподівання; середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X$ . Побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$                                                         |
| 4       | Випадкова величина $X$ має щільність розподілу $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ A \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$ Знайти коефіцієнт $A$ ; побудувати графік функції $f(x)$ ; знайти інтегральну функцію $F(x)$ і побудувати її графік; знайти ймовірність попадання випадкової величини $X$ в інтервал $(0; \pi/4)$ |

Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5       | Три рази стріляють по мішені. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,7. Побудувати ряд розподілу для кожної випадкової величини ( $X$ – різниця між числом влучень і числом промахів; $Y$ – сума числа влучень і числа промахів). Знайти їх математичне сподівання і дисперсію               |
| 6       | Вимірюють довжину стрижня без систематичних похибок (тобто одного знака). Випадкові похибки виміру $X$ розподілені за законом Гаусса з середнім квадратичним відхиленням 50 мм. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде зроблено з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною 75 мм           |
| 7       | За яких значень $a$ функція $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ ( $-\infty < x < \infty$ ) є щільністю ймовірності випадкової величини $X$ ? Знайти функцію розподілу випадкової величини $X$ ; ймовірність попадання випадкової величини $X$ в інтервал $(-1; 1)$                                                    |
| 8       | При середній вазі деякого виробу в 8,4 кг знайдено, що відхилення за абсолютним значенням, які перевищують 50 г, зустрічаються в середньому три рази на кожну сотню виробів. Допускаючи, що вага виробу $X$ розподілена за нормальним законом, знайти її середнє квадратичне відхилення $\sigma$           |
| 9       | Неперервна випадкова величина $X$ задана інтегральною функцією $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань величина $X$ три рази прийме значення, що належить інтервалу $(1/4; 3/4)$ |
| 10      | Ймовірність виявлення затонулого судна за час пошуку $t$ задається формулою $p(t) = 1 - e^{-\alpha t}$ ( $\alpha \geq 0$ ). Визначити середній час пошуку, необхідний для виявлення судна.                                                                                                                 |
| 11      | Дано функцію розподілу випадкової величини $X$ : $F(x) = a + b \operatorname{arctg} x/2$ ( $-\infty < x < \infty$ ) (закон Коші). Визначити постійні $a$ та $b$ ; щільність ймовірності; $p$ ( $\alpha \leq X \leq \beta$ )                                                                                |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 12      | Автомат штампує деталі і контролюється довжина $X$ , що є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з математичним сподіванням (проектна довжина) 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менше 32 мм і не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі більше 55 мм |
| 13      | Неперервна випадкова величина $X$ задана інтегральною функцією $F(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi/4, \\ (1 + \sin 2x)/2, & -\pi/4 \leq x \leq \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$ Знайти диференціальну функцію $f(x)$ і побудувати графіки $F(x)$ ; $f(x)$ ; середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X$ |
| 14      | Дискретна випадкова величина $X$ набуває трьох можливих значень: $x_1 = 4$ з імовірністю $p_1 = 0,5$ ; $x_2 = 6$ з імовірністю $p_2 = 0,3$ та $x_3$ з імовірністю $p_3$ . Знайти $x_3$ і $p_3$ , знаючи що $M[X] = 8$                                                                                                   |
| 15      | Дискретна випадкова величина $X$ приймає тільки три можливі значення: $x_1 = 1$ ; $x_2$ і $x_3$ , причому $x_1 < x_2 < x_3$ . Імовірності того, що $X$ прийме значення $x_1$ і $x_2$ , дорівнює 0,3 і 0,2. Знайти закон розподілу величини $X$ , знаючи її математичне сподівання $m_x = 2,2$ і дисперсію $D_x = 0,76$  |
| 16      | Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $X$ , якщо відома функція розподілу цієї величини $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ Побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$                                                                            |
| 17      | Діаметр деталей, виготовлених цехом, є випадковою величиною $X$ , розподіленою за нормальним законом з дисперсією 0,0001 і математичним сподіванням – 2,5 см. В яких границях можна практично гарантувати діаметр деталі, якщо за достовірне приймається подія, ймовірність якої дорівнює 0,9973?                       |
| 18      | У партії з восьми деталей є шість стандартних. Навмання відібрано дві деталі. Побудувати ряд і функцію розподілу випадкової величини $X$ – числа стандартних деталей серед відібраних                                                                                                                                   |

Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 19      | Дискретна випадкова величина $X$ може приймати два можливих значення $x_1$ з імовірністю 0,3 і $x_2$ з імовірністю 0,7 ( $x_2 > x_1$ ). Знайти ці значення, якщо відомо, що $M[X] = 2,7$ і $D[X] = 0,21$                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 20      | <p>Неперервну випадкову величину <math>X</math> задано щільністю розподілу ймовірностей</p> $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ ax^2 & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$ <p>Знайти параметр <math>a</math>; функцію розподілу <math>F(x)</math>; математичне сподівання; ймовірність того, що неперервна випадкова величина <math>X</math> набуде значення з інтервалу <math>(1/2; 2)</math>; побудувати графіки <math>F(x)</math> та <math>f(x)</math></p> |
| 21      | Стріляють з точки $O$ вздовж прямої $Ox$ . Середня дальність польоту снаряда дорівнює $c = 1200$ м. Припускаючи, що дальність польоту $X$ розподілена за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 40$ м, знайти, який відсоток снарядів, що випускаються, дає переліт від 60 до 80 м                                                                                                                                                                                              |
| 22      | Гральний кубик кинуто три рази. Побудувати ряд і функцію розподілу випадкової величини $X$ – числа появи шісток                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 23      | <p>Неперервна випадкова величина <math>X</math> задана інтегральною функцією</p> $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (3/4)(x+1), & -1 < x \leq 1/3, \\ 1, & x > 1/3. \end{cases}$ <p>Знайти диференціальну функцію <math>f(x)</math>, а також ймовірність того, що в результаті випробування величина <math>X</math> прийме значення <math>x \in (0; 1/3)</math>. Побудувати графіки функцій <math>f(x)</math> та <math>F(x)</math></p>                                                              |
| 24      | Завод отримує сировину на машинах від трьох постачальників. Ймовірність того, що машина прибуде від першого постачальника, дорівнює 0,2; від другого – 0,5; від третього – 0,1. Скласти закон розподілу можливих результатів прибуття автомашин протягом дня                                                                                                                                                                                                                                              |
| 25      | Побудувати ряд і функцію розподілу випадкової величини $X$ – числа влучень м'ячем у кошик при двох кидках, якщо ймовірність влучення при одному кидку $p = 0,3$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

#### Завдання 4. Задачі з математичної статистики.

| Варіант                                                                                                                                    | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                            |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----|-----|-----|
| 1                                                                                                                                          | Нижче наведено результати вимірювань з росту, см, випадково відібраних 100 студентів:                                                                                                                                                                                                   |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
|                                                                                                                                            | Зріст                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 154–158 | 158–162 | 162–166 | 166–170 | 170–174 | 174–178 | 178–182 |     |     |     |
|                                                                                                                                            | Число студентів                                                                                                                                                                                                                                                                         | 10      | 14      | 26      | 28      | 12      | 8       | 2       |     |     |     |
| Знайти вибірккову середню і дисперсію зросту обстежених студентів, взявши середини інтервалів за варіанти                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
| 2                                                                                                                                          | Випадкова величина $X$ має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$ . Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання за вибірковою середньою $x_v = 4,1$ , якщо обсяг вибірки $n = 36$ і задана надійність $\gamma = 0,95$ |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
| 3                                                                                                                                          | Знайти вибірккову і виправлену дисперсії випадкової величини за вибіркою:                                                                                                                                                                                                               |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
|                                                                                                                                            | $x_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       |         |         |     |     |     |
|                                                                                                                                            | $n_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2       | 1       | 3       | 3       | 1       |         |         |     |     |     |
| 4                                                                                                                                          | У підсумку чотирьох вимірювань деякої фізичної величини одним приладом (без систематичних похибок) отримано наступні результати: 8; 9; 11; 12. Знайти вибірккову середню результатів вимірювань; вибірккову і виправлену дисперсії похибок приладу                                      |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
| 5                                                                                                                                          | З генеральної сукупності взято вибірку обсягом $n = 12$ :                                                                                                                                                                                                                               |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
|                                                                                                                                            | $x_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | -0,5    | -0,4    | -0,2    | 0       | 0,2     | 0,6     | 0,8     | 1,0 | 1,2 | 1,5 |
|                                                                                                                                            | $n_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1       | 2       | 1       | 1       | 1       | 1       | 1       | 1   | 2   | 1   |
| Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання $a$ нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
| 6                                                                                                                                          | Дано розподіл ознаки $X$ :                                                                                                                                                                                                                                                              |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |
|                                                                                                                                            | $x_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1       | 3       | 5       | 7       | 9       |         |         |     |     |     |
|                                                                                                                                            | $n_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 4       | 8       | 14      | 48      | 26      |         |         |     |     |     |
| Побудувати полігон частот, гістограму відносних частот і графік статистичної функції розподілу                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         |         |         |         |         |         |         |     |     |     |

# Продовження

| Варіант                                                                                                                          | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 7                                                                                                                                | Завантаження телефонної лінії між двома селищами за час з 9 до 16 год (одного дня) характеризується наступними даними:                                                                                                                                                                                                   |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | Час, год                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 9–10  | 10–11                                                                                     | 11–12 | 12–13 | 13–14 | 14–15 | 15–16 |
|                                                                                                                                  | Кількість викликів                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 10    | 21                                                                                        | 18    | 10    | 12    | 15    | 13    |
| Побудувати гістограму частот і визначити середню кількість викликів за 1 год, а також дисперсію і середнє квадратичне відхилення |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
| 8                                                                                                                                | Перевірено 200 приладів на термін безвідмовної роботи. В результаті отримано статистичний ряд, де $x_i$ – термін служби, год; $m_i$ – кількість приладів.                                                                                                                                                                |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | $x_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | $m_i$ | Визначити середній термін служби приладів, прийнявши в якості варіант середини інтервалів |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 0–50                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1     |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 50–100                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 7     |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 100–150                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 24    |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 150–200                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 30    |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 200–250                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 71    |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 250–300                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 31    |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 300–350                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 21    |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | 350–400                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 13    |                                                                                           |       |       |       |       |       |
| 400–500                                                                                                                          | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
| 9                                                                                                                                | Верстат автомат штампує валики. За вибіркою обсягом $n = 100$ обчислено вибірку середню діаметрів виготовлених валиків. Знайти з надійністю 0,95 точність $\delta$ , з якою вибіркова середня оцінює математичне сподівання діаметрів виготовлених валиків, знаючи, що їх середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$ мм |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | Знайти статистичний ряд простої статистичної сукупності з $n$ вимірювань ( $n = 10$ ): 5; 4; 1; 5; 7; 6; 6; 5; 4; 6                                                                                                                                                                                                      |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
| 11                                                                                                                               | Побудувати гістограму відносних частот за даним розподілом вибірки:                                                                                                                                                                                                                                                      |       |                                                                                           |       |       |       |       |       |
|                                                                                                                                  | $x_i - x_{i+1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 10–15 | 15–20                                                                                     | 20–25 | 25–30 | 30–35 |       |       |
|                                                                                                                                  | Сума частот варіант                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 4     | 8                                                                                         | 14    | 48    | 26    |       |       |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                    |     |     |     |    |    |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-----|-----|-----|----|----|
| 12      | Побудувати графік статистичної функції розподілу:                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                    |     |     |     |    |    |
|         | $x_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2                                                  | 3   | 4   | 5   | 6  | 7  |
|         | $n_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2                                                  | 3   | 8   | 4   | 2  | 1  |
| 13      | Розподіл врожайності двох сортів пшениці $A$ і $B$ відображено у таблиці:                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                    |     |     |     |    |    |
|         | $A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $x_i$ (врожай, ц/га)                               | 18  | 20  | 22  |    |    |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $v_i$ (частка посівної площі з врожайністю $x_i$ ) | 0,2 | 0,5 | 0,3 |    |    |
|         | $B$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $y_i$ (врожай, ц/га)                               | 18  | 20  | 22  |    |    |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $w_i$ (частка посівної площі з врожайністю $y_i$ ) | 0,1 | 0,7 | 0,2 |    |    |
|         | Знайти, який із сортів пшениці більш стійкий у даних умовах. Сорт, врожайність якого має меншу дисперсію вважається більш стійким                                                                                                                                                                                         |                                                    |     |     |     |    |    |
| 14      | Побудувати полігон і гістограму відносної частоти розподілу:                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                    |     |     |     |    |    |
|         | $x_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2                                                  | 4   | 6   | 8   | 10 | 12 |
|         | $n_i$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 6                                                  | 13  | 28  | 32  | 14 | 7  |
| 15      | Вибірка з великої партії електроламп містить 100 ламп. Середня тривалість горіння лампи вибірки виявилася рівною 1000 год. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для середньої тривалості $a$ горіння лампи всієї партії, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампи $\sigma = 40$ год. |                                                    |     |     |     |    |    |
| 16      | За даними 16 незалежних рівноточкових вимірів деякої фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів вимірювань $x_{\text{в}} = 42,8$ і виправлено середнє квадратичне відхилення $s = 8$ . Оцінити дійсне значення вимірюваної величини з надійністю $\gamma = 0,999$                                         |                                                    |     |     |     |    |    |
| 17      | При обробці даних шести випробувань спортивного катера було отримано наступні значення його максимальної швидкості: 27; 38; 30; 37; 35; 31 м/с. Визначити незміщені оцінки математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення максимальної швидкості катера                                                   |                                                    |     |     |     |    |    |

Продовження

| Варіант               | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                 |        |        |        |        |        |        |        |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-----|-----------------------|----|----|----|----|---|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| 18                    | Середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини $X$ дорівнює $\sigma = 4,5$ ; вибіркова середня $x_{\text{в}} = 15,6$ ; обсяг вибірки $n = 81$ . Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання $a$ з надійністю 0,99                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                 |        |        |        |        |        |        |        |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
| 19                    | Випадкова величина нормально розподілена з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$ . Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання $a$ за вибірковою середньою $\bar{x}$ , якщо обсяг вибірки $n = 64$ , надійність $\gamma = 0,95$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                 |        |        |        |        |        |        |        |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
| 20                    | <p>Зроблено <math>n = 100</math> вимірювань випадкової величини <math>X</math> (довжини волокон коробочки бавовни). Результати вимірювань зведені в статистичний ряд:</p> <table><tr><td><math>x_{i+1} - x_i</math></td><td>5; 10</td><td>10; 15</td><td>15; 20</td><td>20; 25</td><td>25; 30</td><td>30; 35</td><td>35; 40</td></tr><tr><td><math>n_i</math></td><td>4</td><td>6</td><td>16</td><td>36</td><td>24</td><td>10</td><td>4</td></tr><tr><td><math>P^*_i</math></td><td>0,04</td><td>0,06</td><td>0,16</td><td>0,36</td><td>0,24</td><td>0,10</td><td>0,04</td></tr></table> <p>Побудувати гістограму і статистичну функцію розподілу</p> | $x_{i+1} - x_i$ | 5; 10  | 10; 15 | 15; 20 | 20; 25 | 25; 30 | 30; 35 | 35; 40 | $n_i$ | 4   | 6                     | 16 | 36 | 24 | 10 | 4 | $P^*_i$ | 0,04 | 0,06 | 0,16 | 0,36 | 0,24 | 0,10 | 0,04 |
| $x_{i+1} - x_i$       | 5; 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 10; 15          | 15; 20 | 20; 25 | 25; 30 | 30; 35 | 35; 40 |        |        |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
| $n_i$                 | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 6               | 16     | 36     | 24     | 10     | 4      |        |        |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
| $P^*_i$               | 0,04                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,06            | 0,16   | 0,36   | 0,24   | 0,10   | 0,04   |        |        |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
| 21                    | <p>Час, витрачений на ремонт телевізорів однієї марки в телеательє, подано у таблиці:</p> <table><tr><td>Час, год</td><td>до 1</td><td>1–2</td><td>2–3</td><td>3–4</td><td>4–5</td><td>5–6</td><td>6–7</td><td>7–8</td><td>8–9</td></tr><tr><td>Кількість телевізорів</td><td>5</td><td>11</td><td>15</td><td>10</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table> <p>Побудувати гістограму частот і визначити за даними вибірки середню тривалість ремонту одного телевізора даної марки, а також дисперсію і середнє квадратичне відхилення</p>                                                                                   | Час, год        | до 1   | 1–2    | 2–3    | 3–4    | 4–5    | 5–6    | 6–7    | 7–8   | 8–9 | Кількість телевізорів | 5  | 11 | 15 | 10 | 4 | 3       | 2    | 2    | 1    |      |      |      |      |
| Час, год              | до 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1–2             | 2–3    | 3–4    | 4–5    | 5–6    | 6–7    | 7–8    | 8–9    |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
| Кількість телевізорів | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 11              | 15     | 10     | 4      | 3      | 2      | 2      | 1      |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |
| 22                    | За даними вибірки обсягу $n$ з генеральної сукупності нормально розподіленої кількісної ознаки знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $s$ . Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma$ з надійністю 0,999, якщо $n = 50$ , $s = 14$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                 |        |        |        |        |        |        |        |       |     |                       |    |    |    |    |   |         |      |      |      |      |      |      |      |

## Продовження

| Варіант | Умова задачі                                                                                                                                                                                                                                                                        |                   |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------|
| 23      | Є результати випробування на термін служби радіодеталей одного типу, що випускаються двома заводами. Визначити, чия продукція краще (порівняти продукцію за середнім терміном служби).                                                                                              |                   |           |
|         | Термін служби, год                                                                                                                                                                                                                                                                  | Кількість деталей |           |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Завод № 1         | Завод № 2 |
|         | до 600                                                                                                                                                                                                                                                                              | 12                | 8         |
|         | 600–1200                                                                                                                                                                                                                                                                            | 23                | 26        |
|         | 1200–1800                                                                                                                                                                                                                                                                           | 28                | 28        |
|         | 1800–2400                                                                                                                                                                                                                                                                           | 27                | 24        |
|         | 2400–3000                                                                                                                                                                                                                                                                           | 10                | 14        |
| 24      | Знайти мінімальний обсяг вибірки, за якого з надійністю 0,925 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковою середньою буде дорівнювати 0,2, якщо відомо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 1,5$ |                   |           |
| 25      | Зроблено десять вимірювань одним приладом (без систематичної похибки) деякої фізичної величини, причому виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових похибок вимірювань виявилось рівним 0,8. Знайти точність приладу з надійністю 0,95                                     |                   |           |

### Зразок виконання типового розрахунку № 4 (III)

**Завдання 1.** У цеху працюють десять чоловік та п'ять жінок. За табельними номерами навмання відібрано три працівника. Знайти ймовірність того, що серед відібраних осіб будуть дві жінки.

*Розв'язок*

Нехай подія  $A$  – серед трьох відібраних працівників будуть дві жінки.

З 15 працівників відбирають 3. Загальне число таких способів відбору дорівнює  $n = C_{15}^3$ . Число наслідків, що сприяють шуканій події дорівнює  $m = C_5^2 \cdot C_{10}^1$ .

За класичним означенням ймовірності  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91} \approx 0,22$ .

**Завдання 2.** З 30 білетів студент знає 25, у нього є дві можливості: взяти білет першим або, поступившись чергою, другим.

Знайти ймовірність успішного складання іспиту для першого і другого випадків.

*Розв'язок*

Нехай подія  $A$  – студент першим витягує білет. Тоді ймовірність складання іспиту знаходиться за класичною схемою:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Подія  $B$  – студент другим тягне білет. Висуваємо дві гіпотези:

$H_1$  – першого разу витягли білет, який студент знає, відповідно

$$P(H_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6};$$

$H_2$  – першого разу витягли білет, який студент не знає, відповідно

$$P(H_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

Ймовірність події  $B$  знаходимо за формулою повної ймовірності

$$P(B) = P(H_1) \cdot P(B/H_1) + P(H_2) \cdot P(B/H_2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{24}{29} + \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{29} = \frac{145}{6 \cdot 29} = \frac{5}{6}.$$

Отже, не має значення, яким за чергою студент витягує білет.

**Завдання 3.** Автомобіль повинен проїхати вулицею, на якій встановлено три світлофори, що дають незалежно один від одного зелений сигнал протягом 1,5 хв, жовтий – протягом 0,3 хв, червоний – протягом 1,2 хв. Написати закон розподілу величини  $X$  – числа зупинок автомобіля на цій вулиці.

*Розв'язок*

Оскільки час, протягом якого світлофор дозволяє проїзд (зелене світло), дорівнює часу, протягом якого проїзд заборонено (жовте і червоне світло), то ймовірності  $p$  і  $q$  того, що будь-який світлофор чи затримає, чи пропустить машину, однакові

$$p = q = 0,5.$$

Можливі значення випадкової величини  $X$  наступні:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 2$ ;  $x_4 = 3$ . Ймовірність  $p_i = p(X = x_i)$  того, що число зупинок буде дорівнювати даному окремому значенню, будемо обчислювати за фор-

мулою Бернуллі  $p_i = C_3^i p^i q^{3-i}$ :

$$p_1 = p(X=0) = q^3 = 0,5^3 = 0,125;$$

$$p_2 = p(X=1) = 3p \cdot q^2 = 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 = 0,375;$$

$$p_3 = p(X=2) = 3p^2 \cdot q = 3 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 = 0,375;$$

$$p_4 = p(X=3) = p^3 = 0,5^3 = 0,125.$$

Звідси одержуємо закон розподілу випадкової величини  $X$  у вигляді таблиці:

|       |           |           |           |           |                         |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------|
| $x_i$ | $x_1 = 0$ | $x_2 = 1$ | $x_3 = 2$ | $x_4 = 3$ | $\sum_{i=0}^3 p_i = 1.$ |
| $p_i$ | 0,125     | 0,375     | 0,375     | 0,125     |                         |

**Завдання 4.** З генеральної сукупності взято вибірку обсягом  $n = 10$ :

|                |    |   |   |   |   |   |
|----------------|----|---|---|---|---|---|
| Варіанта $x_i$ | -2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Частота $n_i$  | 2  | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

Оцінити з надійністю  $\gamma = 0,95$  математичне сподівання  $a$  нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за вибірковою середньою за допомогою довірчого інтервалу.

*Розв'язок*

Для оцінки математичного сподівання  $a$  при невідомому середньому квадратичному відхиленні  $\sigma$  служить довірчий інтервал

$$\overline{x}_B - t \cdot \sqrt{\overline{D}/n} < a < \overline{x}_B + t \cdot \sqrt{\overline{D}/n}.$$

Вибіркову середню  $\overline{x}_B$  і незміщену оцінку дисперсії  $\overline{D}$  знайдемо за формулами:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i}{n}; \quad \overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i (x_i - \overline{x}_B)^2}{n-1},$$

де  $n_i/n = p_i^*$  – відносна частота варіанти  $x_i$ .

Підставивши в ці формули дані задачі, одержимо

$$\overline{x}_B = 2 \text{ і } \overline{D} = 5,78.$$

Далі знаходимо  $t$  як значення аргументу функції Лапласа  $F(t)$ , при якому  $F(t) = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$ .

Відповідно до таблиці  $t = 1,96$ .

Остаточного маємо довірчий інтервал  $0,51 < a < 3,49$ , що покриває невідоме математичне сподівання із заданою надійністю  $\gamma = 0,95$ .

## Розділ II

### Індивідуальне завдання № 4

### ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

**Завдання 1.** Дослідити на збіжність числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ . Якщо

ряд збігається, визначити, яка збіжність має місце – абсолютна чи умовна.

| Варіант | $U_n$                                             | Варіант | $U_n$                                       |
|---------|---------------------------------------------------|---------|---------------------------------------------|
| 1       | $U_n = (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt[3]{n}}$            | 2       | $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}$       |
| 3       | $U_n = (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$               | 4       | $U_n = (-1)^n \frac{n-1}{n^3 + 3}$          |
| 5       | $U_n = (-1)^n \frac{n}{n^3 + 2}$                  | 6       | $U_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 + 1}$ |
| 7       | $U_n = \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$                    | 8       | $U_n = \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$       |
| 9       | $U_n = (-1)^n n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ | 10      | $U_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!}$               |
| 11      | $U_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^3 + 1}$                | 12      | $U_n = (-1)^n \frac{n^2}{n! 2^n}$           |
| 13      | $U_n = \frac{\cos n\pi}{\ln(1+n)}$                | 14      | $U_n = (-1)^n 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$     |
| 15      | $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 2}$                    | 16      | $U_n = (-1)^n \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 1}}$    |
| 17      | $U_n = \frac{(-1)^n n}{(n+1)(n+2)}$               | 18      | $U_n = \frac{\cos n\pi}{\sqrt[3]{2n+1}}$    |
| 19      | $U_n = (-1)^n \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$  | 20      | $U_n = \frac{(-1)^n (n^2 + 1)}{2^n}$        |
| 21      | $U_n = (-1)^n \frac{2n}{7n+3}$                    | 22      | $U_n = \frac{(-1)^n n}{2n^2 + 1}$           |

Продовження

| Варіант | $U_n$                              | Варіант | $U_n$                            |
|---------|------------------------------------|---------|----------------------------------|
| 23      | $U_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$ | 24      | $U_n = (-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$ |
| 25      | $U_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$        |         |                                  |

**Завдання 2.** Визначити область збіжності степеневого ряду  $\sum_{n+1}^{\infty} a_n x^n$ .

| Варіант | $a_n$                               | Варіант | $a_n$                               |
|---------|-------------------------------------|---------|-------------------------------------|
| 1       | $a_n = \frac{(-1)^n n}{2n^2+1}$     | 2       | $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$          |
| 3       | $a_n = \frac{1}{8^n (n+1)^3}$       | 4       | $a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$        |
| 5       | $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n-1)(n+1)!}$ | 6       | $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$          |
| 7       | $a_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$    | 8       | $a_n = \frac{3^n}{n!}$              |
| 9       | $a_n = \frac{(-1)^n}{5^n}$          | 10      | $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$         |
| 11      | $a_n = \frac{n+1}{2^n (n^2+1)}$     | 12      | $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$      |
| 13      | $a_n = \frac{3^{n-1}}{n}$           | 14      | $a_n = \frac{n+1}{n^2}$             |
| 15      | $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}$         | 16      | $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$      |
| 17      | $a_n = \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}$     | 18      | $a_n = \frac{(-1)^n n}{3n-1}$       |
| 19      | $a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n!}$    | 20      | $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{(2n-1)^3}}$ |

*Продовження*

| Варіант | $a_n$                                | Варіант | $a_n$                         |
|---------|--------------------------------------|---------|-------------------------------|
| 21      | $a_n = \frac{(n+1)^2}{2^n}$          | 22      | $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ |
| 23      | $a_n = \frac{2^{n-1}}{5^n}$          | 24      | $a_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$  |
| 25      | $a_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$ |         |                               |

**Завдання 3.** Обчислити з точністю до 0,001 визначений інтеграл за допомогою рядів.

| Варіант |                                                              | Варіант |                                                       |
|---------|--------------------------------------------------------------|---------|-------------------------------------------------------|
| 1       | $\int_0^{1/4} e^{-x^2} dx$                                   | 2       | $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x} dx$                     |
| 3       | $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^3}$                              | 4       | $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x} dx$ |
| 5       | $\int_0^{0.6} \sin(x^2) dx$                                  | 6       | $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3} dx$                        |
| 7       | $\int_0^1 x^2 \sin x^2 dx$                                   | 8       | $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^4}$                       |
| 9       | $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$ | 10      | $\int_0^{1/4} \sqrt[3]{1+x^2} dx$                     |
| 11      | $\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right) dx$                | 12      | $\int_0^{1/2} x^2 \cos(x^2) dx$                       |
| 13      | $\int_0^{0.5} x e^{-x^3} dx$                                 | 14      | $\int_0^1 e^{\frac{x^2}{3}} dx$                       |
| 15      | $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$                                  |         |                                                       |

Знайти чотири перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння  $y' = f(x, y)$ , що задовольняє початкову умову  $y(0) = y_0$ .

| Варіант |                                     | Варіант |                                       |
|---------|-------------------------------------|---------|---------------------------------------|
| 16      | $y' = \cos x + y^2;$<br>$y(0) = 1$  | 17      | $y' = e^{-x^2} + y^2;$<br>$y(0) = 3$  |
| 18      | $y' = 2e^y - xy;$<br>$y(0) = 0$     | 19      | $y' = \sin x + 0,5y^2;$<br>$y(0) = 1$ |
| 20      | $y' = x + x^2 + y^2;$<br>$y(0) = 5$ | 21      | $y' = x^2 + 0,2y^2;$<br>$y(0) = 1$    |
| 22      | $y' = e^x + y^{-2};$<br>$y(0) = 1$  | 23      | $y' = 2x - 0,1y^2;$<br>$y(0) = 1$     |
| 24      | $y' = xy + y^2$<br>$y(0) = 0,1$     | 25      | $y' = 2y^2 + ye^x;$<br>$y(0) = 1$     |

### Індивідуальне завдання № 5

#### ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

**Завдання 1.** Задано скалярне поле  $U(x, y, z)$  поверхню  $S$  і точку  $M$ . Обчислити похідну скалярного поля  $U$  в точці  $M$  за напрямком нормалі до поверхні  $S$ , що утворює гострий кут з додатнім напрямком осі  $Oz$ ; напрямок і величину найбільшої швидкості зростання функції поля  $U$  в точці  $M$ .

| Варіант | $U(x, y, z), S, M$                                                           | Варіант | $U(x, y, z), S, M$                                                                                  |
|---------|------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1       | $U = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz,$<br>$S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1,$<br>$M(1; 1; 1)$  | 2       | $U = x\sqrt{y} + y\sqrt{z},$<br>$S: 2x^2 - y^2 + 4z = 8,$<br>$M(2; 4; 4)$                           |
| 3       | $U = -2 \ln(x^2 - 5) - 4xyz,$<br>$S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1,$<br>$M(1; 1; 1)$ | 4       | $U = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2},$<br>$S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4,$<br>$M(-2; \frac{1}{2}; 1)$ |

*Продовження*

| Варіант | $U(x, y, z), S, M$                                                                                 | Варіант | $U(x, y, z), S, M$                                                               |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------------------------------------------|
| 5       | $U = xz^2 - \sqrt{x^3}y,$<br>$S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0,$<br>$M(2; 2; 4)$                         | 6       | $U = x\sqrt{y} - yz^2,$<br>$S: x^2 + y^2 = 4z + 9,$<br>$M(2; 1; -1)$             |
| 7       | $U = 7 \ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz,$<br>$S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7,$<br>$M(1; 1; 1)$ | 8       | $U = \arctg \frac{y}{x} + xz,$<br>$S: x^2 + y^2 - 2z = 10,$<br>$M(2; 2; -1)$     |
| 9       | $U = \ln(1 + x^2) - xy\sqrt{z},$<br>$S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16,$<br>$M(1; -2; 4)$                   | 10      | $U = \sqrt{x^2 + y^2} - z,$<br>$S: x^2 + y^2 = 24z + 1,$<br>$M(3; 4; 1)$         |
| 11      | $U = x\sqrt{y} - z\sqrt{x},$<br>$S: x^2 - y^2 + z^2 = 4,$<br>$M(1; 1; -2)$                         | 12      | $U = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2},$<br>$S: z = x^2 - y^2,$<br>$M(1; 1; 0)$         |
| 13      | $U = \ln(1 + y^2) - \sqrt{x^2 + z^2},$<br>$S: x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z - 9,$<br>$M(3; 0; 4)$     | 14      | $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$<br>$S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 7 = 0,$<br>$M(0; -3; 4)$ |
| 15      | $U = x + \ln(z^2 + y^2),$<br>$S: z^2 = x^2 + 4y^2 - 4,$<br>$M(-2; 1/2; 1)$                         | 16      | $U = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2},$<br>$S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1,$<br>$M(1; 1; 1)$     |
| 17      | $U = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2}),$<br>$S: x^2 + y^2 - 4z = 9,$<br>$M(2; 1; -1)$                      | 18      | $U = \ln(x^2 + y^2) + xyz,$<br>$S: x^2 + y^2 - 2z = 10,$<br>$M(2; 2; -1)$        |
| 19      | $U = x^2y - \sqrt{xy + z^2},$<br>$S: x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0,$<br>$M(2; 2; 4)$                     | 20      | $U = \ln(3 - x^2) + xy^2z,$<br>$S: 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7,$<br>$M(1; 1; 1)$      |

## Продовження

| Варіант | $U(x, y, z), S, M$                                                              | Варіант | $U(x, y, z), S, M$                                                         |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------------------------------------|
| 21      | $U = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2},$<br>$S: x^2 - y^2 + z^2 = 4,$<br>$M(1; 1; -2)$ | 22      | $U = xy - \frac{x}{z},$<br>$S: 4x^2 - y^2 + z^2 = 16,$<br>$M(1; -2; 4)$    |
| 23      | $U = x^2 - \arctg(y + z),$<br>$S: x^2 + y^2 - 24z = 1,$<br>$M(3; 4; 1)$         | 24      | $U = x^2 y^2 z - \ln(z - 1),$<br>$S: 2x^2 - y^2 + 4z = 8,$<br>$M(2; 4; 4)$ |
| 25      | $U = xy + \sqrt{x^2 + z^2},$<br>$S: z = x^2 - y^2,$<br>$M(1; 1; 0)$             |         |                                                                            |

**Завдання 2.** Дано векторне поле  $\vec{F}$  і площина  $(P)$ , яка разом з координатними площинами утворює піраміду  $V$ . Нехай  $\sigma$  – основа піраміди, яка належить площині  $(P)$ ;  $\lambda$  – контур, що обмежує  $\sigma$ ;  $\vec{n}$  – нормаль до  $\sigma$ , спрямована назовні піраміди  $V$ .

Обчислити потік векторного поля  $\vec{F}$  через поверхню піраміди  $V$  в напрямку зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо і за допомогою формули Остроградського–Гаусса та зробити рисунок; циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру  $\lambda$  безпосередньо і використовуючи формулу Стокса до контуру  $\lambda$  і обмеженої ним поверхні  $\sigma$  з нормаллю  $\vec{n}$ .

| Варіант |                                                                | Варіант |                                                                 |
|---------|----------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------|
| 1       | $\vec{F} = (2z + y + x) \vec{i},$<br>$P: 3x - 2y - 4z + 6 = 0$ | 2       | $\vec{F} = (2x - y + 2z) \vec{k},$<br>$P: 3x - 2y + 2z - 6 = 0$ |
| 3       | $\vec{F} = (x + y + 3z) \vec{j},$<br>$P: 2x + 3y + z - 6 = 0$  | 4       | $\vec{F} = (x - 2y - z) \vec{i},$<br>$P: 2x - y - z + 4 = 0$    |
| 5       | $\vec{F} = (x - 3y + 5z) \vec{k},$<br>$P: x + 4y + z - 4 = 0$  | 6       | $\vec{F} = (x - y - z) \vec{j},$<br>$P: x - 2y + 2z - 2 = 0$    |

Продовження

| Варіант |                                                                                       | Варіант |                                                                                       |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 7       | $\overline{F} = (x + y + z) \overline{k},$<br>$P: 2x + y + z - 2 = 0$                 | 8       | $\overline{F} = (2x - y + 2z) \overline{i},$<br>$P: x - 2y - 2z + 2 = 0$              |
| 9       | $\overline{F} = (2x + 3y - z) \overline{j},$<br>$P: x - y + z - 2 = 0$                | 10      | $\overline{F} = (3x + y + z) \overline{k},$<br>$P: x + y + 2z - 2 = 0$                |
| 11      | $\overline{F} = (x + 2y - z) \overline{i},$<br>$P: 2x + y - z - 2 = 0$                | 12      | $\overline{F} = (x + y - 2z) \overline{j},$<br>$P: 2x + 3y - z + 6 = 0$               |
| 13      | $\overline{F} = (-x + y + 2z) \overline{k},$<br>$P: x - 2y + z + 2 = 0$               | 14      | $\overline{F} = (x - y - z) \overline{i},$<br>$P: x + 2y + 2z - 2 = 0$                |
| 15      | $\overline{F} = (x + y + z) \overline{j},$<br>$P: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{4} = 1$  | 16      | $\overline{F} = (2x - y + z) \overline{k},$<br>$P: \frac{x}{2} + y + z = 1$           |
| 17      | $\overline{F} = (x - 2y + z) \overline{i},$<br>$P: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ | 18      | $\overline{F} = (-3x + 2y + z) \overline{j},$<br>$P: x + y + z = 1$                   |
| 19      | $\overline{F} = (-x - y + 3z) \overline{k},$<br>$P: x + y + 2z + 2 = 0$               | 20      | $\overline{F} = (x + 2y - z) \overline{j},$<br>$P: \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + z = 1$ |
| 21      | $\overline{F} = (2y - 3z) \overline{i},$<br>$P: 2x + \frac{y}{2} + z = 1$             | 22      | $\overline{F} = (3x - y + z) \overline{k},$<br>$P: 2x + 3y + z = 1$                   |
| 23      | $\overline{F} = (-x + y + 2z) \overline{j},$<br>$P: \frac{x}{2} + y + z = 1$          | 24      | $\overline{F} = (2x + 3y) \overline{i},$<br>$P: x + 2y + 3z = 1$                      |
| 25      | $\overline{F} = (2x - y + z) \overline{k},$<br>$P: x + y + z = 1$                     |         |                                                                                       |

### Рекомендована література

1. Гимпель Р.М., Сапрыкина Л.Т. Специальные разделы высшей математики с прикладными вопросами дисциплин кораблестроительного профиля. Элементы теории поля: Учебн. пособие. – Николаев: НКИ, 1990. – 52 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1975. – 333 с.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972. – 567 с.
4. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей: Справочное пособие к решению задач. – Минск, 1999. – 296 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. – М.: Высшая школа, 1974. – Ч. 1. – 464 с.
6. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посіб.: В 2-х ч. – К.: Вища школа, 1993. – Ч. 2. – 648 с.
7. Мартиненко М.А., Клименко Р.К., Лебедєва У.В. Теорія ймовірностей: Конспект лекцій і практичних занять. – К.: УДУХТ, 1999. – 241 с.
8. Юрченко Т.А. Методические указания к практическим занятиям по теории функций комплексной переменной. – Николаев: НКИ, 1992. – 36 с.
9. Юрченко Т.А., Иванова О.Г. Елементи теорії функцій комплексної змінної: Навч. посіб. – Миколаїв: УДМТУ, 1999. – 65 с.

## ЗМІСТ

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Розділ I .....                                                                  | 3  |
| Типовий розрахунок № 3. Кратні і криволінійні інтеграли .....                   | 3  |
| Зразок виконання типового розрахунку № 3 .....                                  | 11 |
| Типовий розрахунок № 4 .....                                                    | 17 |
| I. Ряди Фур'є .....                                                             | 17 |
| Зразок виконання типового розрахунку № 4 (I) .....                              | 20 |
| II. Функції комплексної змінної .....                                           | 21 |
| Зразок виконання типового розрахунку № 4 (II) .....                             | 25 |
| III. Теорія ймовірностей .....                                                  | 28 |
| Зразок виконання типового розрахунку № 4 (III) .....                            | 42 |
| Розділ II .....                                                                 | 45 |
| Індивідуальне завдання № 4. Числові та степеневі ряди .....                     | 45 |
| Індивідуальне завдання № 5. Поверхневі інтеграли. Елементи<br>теорії поля ..... | 48 |
| Рекомендована література .....                                                  | 52 |

Навчальне видання

ЮРЧЕНКО Тамара Акимівна  
САПРИКІНА Людмила Тихонівна

## **МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**до виконання типових розрахунків та індивідуальних завдань  
з вищої математики**

**В двох частинах**

**Частина II**

**(українською мовою)**

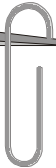
Редактор *В.А. Стеколыщикова*  
Комп'ютерна правка та верстка *О.М. Черевата*  
Коректор *М.О. Паненко*

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру  
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 14.12.06. Папір офсетний. Формат 60×84/16.  
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 3,3. Обл.-вид. арк. 3,5.  
Тираж 500 прим. Вид. № 21. Зам. № 335. Ціна договірна.

---

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,  
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5



**для нотаток**



ВИДАВНИЦТВО НАЦІОНАЛЬНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ



---

---

***Шановні панове!***

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника у повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізки на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату A3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати ***підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки***, – ми до Ваших послуг.

---

---

© Національний університет кораблебудування

✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5,  
видавництво НУК

☎ 8(0512) 37-33-42; 39-81-46, 39-73-39, факс 8(0512) 39-73-26;