

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О. М. ДУДЧЕНКО, С. О. КАРПОВА

**ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ
В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ.
АПРОКСИМАЦІЯ ТАБЛИЧНИХ ФУНКЦІЙ
ЗА ДОПОМОГОЮ ПК**

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

Рекомендовано Методичною радою НУК



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2026

УДК 519.6(076)

Д81

Автори: О. М. Дудченко, канд. техн. наук, професор НУК;
С. О. Карпова, старший викладач

Рецензенти: П. Й. Гучек, д-р техн. наук, доцент;
М. Б. Літвінова, д-р пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, професор

Рекомендовано Методичною радою НУК імені адмірала Макарова

Дудченко О. М.
Д81 Чисельні методи в інженерних розрахунках. Апроксимація табличних функцій за допомогою ПК : методичні вказівки до виконання лабораторних робіт / О. М. Дудченко, С. О. Карпова. – Миколаїв : НУК, 2026. – 38 с.

Наведені короткі відомості з теорії, тексти програм, написаних на мові програмування Fortran з використанням компіляторів Compaq Visual Fortran та Fortran Power Station у вільному форматі, а також для online-компіляторів. Також наведені варіанти завдань для виконання лабораторних робіт.

Призначено для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти галузі знань F Інформаційні технології, спеціальності F2 Інженерія програмного забезпечення, а також для здобувачів вищої освіти інших галузей та спеціальностей, які вивчають курси «Чисельні методи», «Обчислювальна техніка, програмування та математичне моделювання» або споріднені курси, пов'язані з чисельними методами.

УДК 519.6(076)

© О. М. Дудченко, С. О. Карпова, 2026
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2026

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Апроксимація функцій за методом найменших квадратів.....	5
Тексти програмних модулів.....	11
Послідовність виконання лабораторних робіт.....	15
Гармонічний аналіз.....	17
Розкладання тільки по косинусах або тільки по синусах.....	21
Тексти програмних модулів.....	23
Послідовність виконання лабораторних робіт.....	25
Тригонометричне інтерполювання.....	26
Текст програми для розрахунку коефіцієнтів Фур'є табличної функції.....	28
Текст програми для розрахунку коефіцієнтів Фур'є для парних та непарних функцій.....	31
Послідовність виконання лабораторних робіт.....	34
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	36

ВСТУП

Сучасний розвиток науки та техніки тісно пов'язаний з використанням обчислювальної техніки. Комп'ютери давно вже стали робочим інструментом для вченого, інженера, конструктора та студента. Вони використовуються для дослідження реальних складних об'єктів, процесів та явищ, при створенні систем управління цими об'єктами та процесами. І тут на перший план виступає їх математична модель, тобто опис об'єктів, явищ та процесів на математичній мові за допомогою функцій, рівнянь (диференціальних, інтегральних тощо), нерівностей, логічних відношень. Для таких задач розроблені алгоритми та методи рішень, існує цілий ряд програм для їх рішення на ЕОМ. Однак постійний розвиток обчислювальної техніки та зміни в стандартах мов, що застосовуються в інженерній практиці, потребує вдосконалення програм, що існують, та створення нових програм. Особливо актуальна ця задача для студентів, які в період воєнного стану навчаються в режимі online і використовують для виконання лабораторних робіт online-компілятори.

У цих методичних вказівках наведені короткі теоретичні відомості щодо апроксимації функцій за методом найменших квадратів, гармонічного аналізу, тригонометричного інтерполювання та відповідні тексти програм. Також наведені варіанти завдань та вказівки до виконання лабораторних робіт.

Апроксимація функцій за методом найменших квадратів

В інженерній та науковій практиці звичайно доводиться мати справу з великими масивами чисел, представленими у вигляді таблиць або графіків функцій. Це викликає необхідність в ефективній обробці числової інформації. Одним із математичних методів обробки масивів чисел є метод апроксимації.

Апроксимація (лат. Approximate – наближати) – наближене вираження будь-яких величин (або геометричних/математичних об'єктів) через інші, відоміші (близькі за значенням) або простіші величини, наприклад, кривих ліній – ламаними, ірраціональних чисел – раціональними, неперервних функцій – багаточленами.

Існують два основних підходи до апроксимації табличних даних кривими. При одному з них вимагають, щоб апроксимуюча крива проходила через усі точки, задані таблицею. Це вдається зробити за допомогою методів інтерполяції. При іншому підході дані апроксимують простою функцією, що застосовується у всьому діапазоні табличних даних, але не обов'язково проходить через усі точки (рис. 1).

Такий підхід називають підгонкою кривої, яку прагнуть провести так, щоб її відхилення від табличних даних були мінімальними. Звичайно прагнуть звести до мінімуму суму квадратів різниць між значеннями функції, що визначаються вибраною кривою і таблицею. Такий метод підгонки називається методом найменших квадратів.

Згідно з цим методом за міру відхилення полінома

$$Q_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

від даної функції $f(x)$ на безлічі точок $x_0, x_1, \dots, x_n$ приймають величину

$$S_m = \sum_{i=0}^n [Q_m(x_i) - f(x_i)]^2,$$

рівну сумі квадратів відхилень полінома $Q_m(x)$ від функції $f(x)$ на заданій системі точок. Очевидно, що S_m є функцією коефіцієнтів a_i . Ці коефіцієнти треба підібрати так, щоб величина S_m була найменшою. Отриманий поліном називають апроксимуючим для даної функції, а процес побудови цього полінома – точковою квадратичною апроксимацією, або точковим квадратичним апроксимуванням функції.

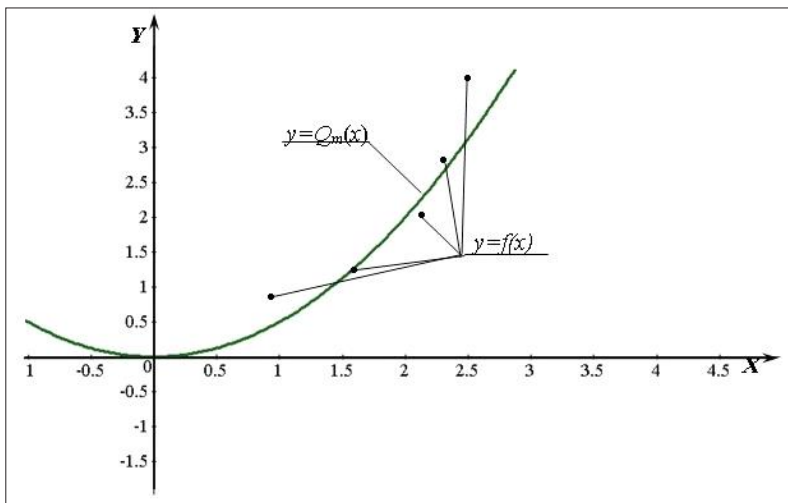


Рис. 1. Наближення табличної функції методом найменших квадратів

Для розв'язання задачі точкового квадратичного апроксимування скористаємося загальним прийомом диференціального числення [1–5], [8–11]. Знайдемо частинні похідні від величини:

$$S_m = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i)^2.$$

Прирівнюючи частинні похідні до нуля, отримаємо для визначення невідомих коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_m$ систему $m+1$ рівнянь з $m+1$ невідомими:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_0} &= \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_1} &= \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i = 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_m}{\partial a_m} &= \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_m x_i^m - y_i) x_i^m = 0 \end{aligned} \right.$$

Введемо позначення:

$$S_k = x_0^k + x_1^k + \dots + x_n^k (k = 0, 1, 2, \dots, 2m) \text{ або } S_k = \sum_{i=0}^n x_i^k$$

$$t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + \dots + x_n^k y_n (k = 0, 1, 2, \dots, m) \text{ або } t_k = \sum_{i=0}^n x_i^k y_i.$$

Перетворюючи отриману систему з використанням введених позначень, будемо мати:

$$\begin{cases} a_0 S_0 + a_1 S_1 + a_2 S_2 + \dots + a_m S_m = t_0 \\ a_0 S_1 + a_1 S_2 + a_2 S_3 + \dots + a_m S_{m+1} = t_1 \\ \dots \\ a_0 S_m + a_1 S_{m+1} + a_2 S_{m+2} + \dots + a_m S_{2m} = t_m \end{cases}, \quad (1)$$

де $S_0 = n$, m – заданий порядок полінома $Q_m(x)$; n – число заданих точок.

Для складання системи (1) можна скористатися табличною формою.

Наприклад, при $m = 2$ та $n = 5$ можна скористатися таблицею 1.

Таблиця 1

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	y	$x \cdot y$	$x^2 \cdot y$
1	x_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	y_0	$x_0 y_0$	$x_0^2 y_0$
1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$
1	x_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	y_3	$x_3 y_3$	$x_3^2 y_3$
1	x_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	y_4	$x_4 y_4$	$x_4^2 y_4$
S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	t_0	t_1	t_2

Приклад. Використовуючи метод найменших квадратів, вивести емпіричну формулу вигляду $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ для табличної (експериментальної) функції (табл. 2) та обчислити середнє квадратичне відхилення:

Таблиця 2

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	2,1299	2,1532	2,1611	2,1516	2,1282	2,0807	2,0266	1,9594	1,8799	1,7723

Розв'язання. У прикладі, що розглядається, $n = 10$, $m = 2$. Для того, щоб отримати нормальну систему, тобто систему, в якій число невідомих відповідає числу рівнянь, треба за заданими x , y обчислити 7 сум:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2, \quad S_3 = \sum_{i=1}^{10} x_i^3, \quad S_4 = \sum_{i=1}^{10} x_i^4,$$

$$t_0 = \sum_{i=1}^{10} y_i, \quad t_1 = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i, \quad t_2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 y_i.$$

Для обчислення сум скористаємося формою таблиці 1.

x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	y	xy	x^2y
1	0,1	0,01	0,001	0,0001	2,1299	0,21299	0,021299
1	0,2	0,04	0,008	0,0016	2,1532	0,43064	0,086128
1	0,3	0,09	0,027	0,0081	2,1611	0,64833	0,194499
1	0,4	0,16	0,064	0,0256	2,1516	0,86064	0,344256
1	0,5	0,25	0,125	0,0625	2,1282	1,06410	0,532050
1	0,6	0,36	0,216	0,1296	2,0807	1,24842	0,749052
1	0,7	0,49	0,343	0,2401	2,0266	1,41862	0,993034
1	0,8	0,64	0,512	0,4096	1,9594	1,56752	1,254016
1	0,9	0,81	0,729	0,6561	1,8799	1,69191	1,522719
1	1	1	1	1	1,7723	1,7723	1,7723
10	5,5	3,85	3,025	2,5333	20,4429	10,91547	7,469353

Шукана нормальна система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 10a_0 + 5,5a_1 + 3,85a_2 = 20,4429 \\ 5,5a_0 + 3,85a_1 + 3,025a_2 = 10,91547 \\ 3,85a_0 + 3,025a_1 + 2,5333a_2 = 7,469353 \end{cases}.$$

Розв'язавши систему, знаходимо коефіцієнти полінома:

$$a_0 = 2,095431 \quad a_1 = 0,4403161 \quad a_2 = -0,7618579.$$

Отже, шукане рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = 2,095431 + 0,4403161 \cdot x - 0,7618579 \cdot x^2.$$

Для оцінки похибки можна скористатися залежністю

$$\sum_{i=0}^m y^2 = a_0 \cdot t_0 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2 + \sum_{i=1}^n \delta^2,$$

де $\delta = y_{\text{розрах.}} - y_{\text{експер.}}$

Для даного випадку

$y_{\text{розрах.}}$	$y_{\text{експер.}}$	δ	δ^2
2,1318	2,1299	0,0019	0,00000378
2,1530	2,1532	-0,0002	0,00000003
2,1590	2,1611	-0,0021	0,00000458
2,1497	2,1516	-0,0019	0,00000376
2,1251	2,1282	-0,0031	0,00000946
2,0854	2,0807	0,0047	0,00002164
2,0303	2,0266	0,0037	0,00001401
1,9601	1,9594	0,0007	0,00000048
1,8746	1,8799	-0,0053	0,00002797
1,7739	1,7723	0,0016	0,00000253
Σ			0,00008825

$$\sum_{i=0}^{10} y^2 = 41,95245, \quad \sum_{i=1}^{10} \delta^2 = 0,00008825,$$

$$a_0 \cdot t_0 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_2 + \sum_{i=1}^n \delta^2 = 41,95253.$$

Виконаємо розрахунок для наведеного прикладу з використанням програми.

Тексти програмних модулів

Нижче наведені тести програмних модулів на мові FORTRAN у вільному форматі. При створенні програми використана підпрограма SIMQ. SUBROUTINE SIMQ – це класична підпрограма мовою FORTRAN з пакета SSP (Scientific Subroutine Package), призначена для вирішення систем лінійних рівнянь алгебраїчних рівнянь методом Гауса.

```
PROGRAM MNK
! Метод найменших квадратів
  DIMENSION XY(50,2),S(15,15),C(15)
! Ведення ступеня полінома та кількості пар вихідних даних
  PRINT 2
2 FORMAT(2X,'Enter the polynomial degree and specify the number &
of initial data pairs')
  READ(5,*)N,KD
  N=N+1
  PRINT 3
3 FORMAT(2X,' Enter the data values: X1,Y1,X2,Y2...')
  READ(5,*)((XY(I,J),J=1,2),I=1,KD)
  CALL MK(S,C,KD,XY,N)
  CALL SIMQ(S,C,N,IER)
  print *, ' Calculation result'
  print *, 'Polynomial coefficients: A0,A1,...,AN'
  print *,(C(I),I=1,N)
    sko=0
    do 50 i=1,kd
      sr=c(1)
      do 40 j=2,N
        sr=sr+c(j)*xy(i,1)**(j-1)
40    continue
      sko=sko+(sr-xy(i,2))**2
50    continue
```

```

! Середньоквадратичне відхилення
      print 60,sko
60   format('Root mean square deviation:',e12.4)
END

```

```

      SUBROUTINE MK(S,C,KD,XY,N)
      DIMENSION S(N,N),C(N),XY(50,2)
      DO 30 K=1,N
      DO 15 L=1,N
      S(L,K)=0.
      DO 15 I=1,KD
      IF(XY(I,1).EQ.0)GO TO 15
      S(L,K)=S(L,K)+XY(I,1)**(L+K-2)
15   CONTINUE
      C(K)=0.
      DO 30 J=1,KD
      IF(XY(J,1).EQ.0.)GO TO 30
      C(K)=C(K)+XY(J,2)*XY(J,1)**(K-1)
30   CONTINUE
      END

```

```

      SUBROUTINE SIMQ(A,B,N,KS)
      DIMENSION A(*),B(*)
      TOL=0.; KS=0;JJ=-N
      DO 65 J=1,N
      JY=J+1;JJ=JJ+N+1;BIGA=0.;IT=JJ-J
      DO 30 I=J,N
      IJ=IT+I; AA=ABS(A(IJ))
      IF(ABS(BIGA)-AA)20,30,30
20   BIGA=A(IJ)
      IMAX=I
30   CONTINUE
      IF(ABS(BIGA)-TOL)35,35,40

```

```

35 KS=1
   RETURN
40 I1=J+N*(J-2)
   IT=IMAX-J
   DO 50 K=J,N
   I1=I1+N
   I2=I1+IT
   SAVE=A(I1)
   A(I1)=A(I2)
   A(I2)=SAVE
50 A(I1)=A(I1)/BIGA
   SAVE=B(IMAX)
   B(IMAX)=B(J)
   B(J)=SAVE/BIGA
   IF(J-N)55,70,55
55 IQS=N*(J-1)
   DO 65 IX=JY,N
   IXJ=IQS+IX
   IT=J-IX
   DO 60 JX=JY,N
   IXJX=N*(JX-1)+IX
   JJX=IXJX+IT
60 A(IXJX)=A(IXJX)-(A(IXJ)*A(JJX))
65 B(IX)=B(IX)-(B(J)*A(IXJ))
70 NY=N-1
   IT=N*N
   DO 80 KY=1,NY
   IA=IT-KY;IB=N-KY;I0=N
   DO 80 K=1,KY
   B(IB)=B(IB)-A(IA)*B(I0)
   IA=IA-N
80 I0=I0-1
   END

```

Результати розрахунку

Enter the polynomial degree and specify the number of initial data pairs
2 10

Enter put the data values: X1,Y1,X2,Y2...

0.1 2.1299 0.2 2.1532 0.3 2.1611 0.4 2.1516 0.5 2.1282 0.6 2.0807
0.7 2.0266 0.8 1.9594 0.9 1.8799 1. 1.7723

Calculation result

Polynomial coefficients: A0,A1,...,AN

2.095431 0.4403161 -0.7618579

Root mean square deviation: 0.8825E-04

Результати відповідають контрольним розрахункам, наведеним вище, які виконані без використання комп'ютера.

Для поліпшення апроксимації початкову таблицю даних іноді розбивають на декілька частин і підбирають окрему апроксимуючу криву для кожної частини. Такий підхід виправданий у тих випадках, коли є підстави вважати, що дані, які апроксимуються, відповідають різним фізичним станам системи. Інколи достатньо змінити ступінь апроксимуючого полінома.

Наприклад, якщо для розглянутого вище прикладу використати поліном третього ступеню, то результат розрахунку буде таким:

Enter the polynomial degree and specify the number of initial data pairs
3 10

Enter the data values: X1,Y1,X2,Y2...

0.1 2.1299 0.2 2.1532 0.3 2.1611 0.4 2.1516 0.5 2.1282 0.6 2.0807
0.7 2.0266 0.8 1.9594 0.9 1.8799 1. 1.7723

Calculation result

Polynomial coefficients: A0,A1,...,AN

2.090226 0.4864828 -0.8619562 6.0665593E-02

Root mean square deviation: 0.7694E-04

Шукане рівняння буде мати такий вигляд:

$$y = 2,090226 + 0,4864828 \cdot x - 0,8619562 \cdot x^2 + 0,060665593 \cdot x^3$$

Порівнюючи отримані результати для апроксимації табличної функції поліномом другого та третього ступенів, ми бачимо, що середньоквадратичне відхилення для полінома третього ступеня менше, ніж для полінома другого ступеня, тобто він краще підходить для апроксимації заданої табличної функції.

Послідовність виконання лабораторних робіт

1. З таблиці 3 вибрати варіант, що відповідає номеру за списком журналу відвідування занять групи.
2. За наведеними зразками скласти програму та виконати апроксимацію табличної функції поліномами другого та третього ступенів.
3. Записати шукані рівняння, зробити висновки про доцільність їхнього використання.
4. Скласти звіт про виконану роботу, зробити висновки про застосування та ефективність методу.

Таблиця 3. Варіанти завдань

X_i	Y_i														
	№ варіанта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2,05	2,09	2,02	1,99	2,23	2,07	2,18	-0,10	-0,16	2,09	2,15	0,10	0,17	0,80	2,15
0,1	1,94	2,05	1,98	2,03	2,29	2,17	2,43	-0,21	0,01	2,31	2,41	-0,01	0,07	0,29	2,41
0,2	1,92	2,19	1,67	2,20	2,27	2,21	2,40	0,01	0,10	2,72	2,58	-0,19	0,17	0,52	2,58
0,3	1,87	2,18	1,65	2,39	2,62	2,31	2,43	0,05	0,16	2,77	2,84	-0,11	0,05	0,77	2,84
0,4	1,77	2,17	1,57	2,19	2,72	2,10	2,65	-0,13	0,05	2,78	3,28	-0,31	0,12	0,93	3,28
0,5	1,88	2,27	1,42	2,61	2,82	2,09	2,75	-0,23	0,35	2,97	3,46	-0,78	0,00	1,20	3,46
0,6	1,71	2,58	1,37	2,35	3,13	2,12	2,67	-0,21	0,19	3,00	4,02	-0,64	0,01	1,20	4,02
0,7	1,60	2,73	1,07	2,60	3,49	1,63	2,66	-0,43	0,50	3,51	4,11	-0,85	-0,05	1,35	4,11
0,8	1,56	2,82	0,85	2,55	3,82	1,78	2,63	-0,57	0,74	3,43	4,61	-1,18	-0,21	1,39	4,61
0,9	1,40	3,04	0,48	2,49	3,95	1,52	2,75	-0,44	1,03	3,58	5,03	-1,39	-0,50	1,48	5,03
1,0	1,50	3,03	0,35	2,50	4,22	1,16	2,41	-0,44	1,06	3,58	5,34	-1,79	-0,50	1,52	5,34
1,1	1,26	3,45	-0,30	2,52	4,48	1,07	2,24	-0,83	1,49	3,54	5,86	-2,02	-0,89	1,71	5,86
1,2	0,99	3,62	-0,61	2,44	5,06	0,85	2,12	-0,78	1,79	3,82	6,33	-2,48	-1,24	1,72	5,76
1,3	0,97	3,85	-1,20	2,35	5,50	0,56	1,74	-0,81	2,03	3,90	6,81	-2,93	-1,47	1,87	5,50
1,4	0,91	4,19	-1,39	2,26	5,68	0,10	1,57	-1,06	2,22	3,77	7,21	-3,26	-1,79	1,86	5,68
1,5	0,71	4,45	-1,76	2,19	6,19	-0,25	1,17	-1,41	2,50	3,81	7,67	-3,91	-2,25	1,89	6,25
1,6	0,43	4,89	-2,28	2,24	6,42	-0,65	0,96	-1,40	2,88	4,00	8,23	-4,41	-2,55	2,04	6,42
1,7	0,54	5,06	-2,81	2,34	7,04	-1,06	0,63	-1,70	3,21	3,97	8,68	-4,91	-3,18	1,73	7,24
1,8	0,19	5,63	-3,57	1,96	7,57	-1,66	0,25	-1,96	3,63	4,08	9,35	-5,30	-3,60	2,04	7,57
1,9	0,01	5,91	-4,06	2,19	8,10	-2,01	-0,01	-1,91	3,90	4,08	9,93	-6,00	-3,93	2,03	8,20

Гармонічний аналіз

Гармонічний аналіз (англ. harmonic analysis, нім. harmonische Analyse) – розділ математики, в якому вивчаються способи представлення функцій однієї чи багатьох змінних за допомогою рядів Фур'є за тригонометричною та іншими системами функцій, чи за допомогою інтегралів Фур'є, а також різноманітні застосування цих представлень.

Витоки гармонічного аналізу пов'язують з іменем Жозефа Фур'є.

Гармонічний аналіз широко застосовують при описанні та вивченні коливальних процесів.

У науці і техніці часто доводиться мати справу з періодичними явищами, тобто такими, які відтворюються в колишньому вигляді через певний проміжок часу T , званий періодом (наприклад, сталий рух парової машини, явище змінного струму тощо). Різні величини, пов'язані з періодичним явищем, що розглядається, по закінченню періоду T повертаються до своїх колишніх значень і представляють періодичні функції від часу t , що характеризуються рівністю

$$\varphi(t + T) = \varphi(t).$$

Найпростішою з періодичних функцій є синусоїдальна величина:

$$A \sin(\omega t + \alpha),$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – частота; A – амплітуда; α – початкова фаза.

З подібних найпростіших періодичних функцій можуть бути складені і більш складні. Складові синусоїдальної величини повинні бути різних частот, так як складання синусоїдальної величини однієї і тієї ж частоти приводить знову до синусоїдальної величини тієї ж частоти. Якщо скласти декілька величин вигляду (2),

$$y_0 = A_0, \quad y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2),$$

$$y_3 = A_3 \sin(3\omega t + \alpha_3), \quad (2)$$

які мають частоти $\omega, 2\omega, 3\omega$, кратні найменшій з них – ω , і періоди $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T$, то вийде періодична функція з періодом T , але яка істотно відрізняється від величин типу (2) (рис. 2 [6; 7]).

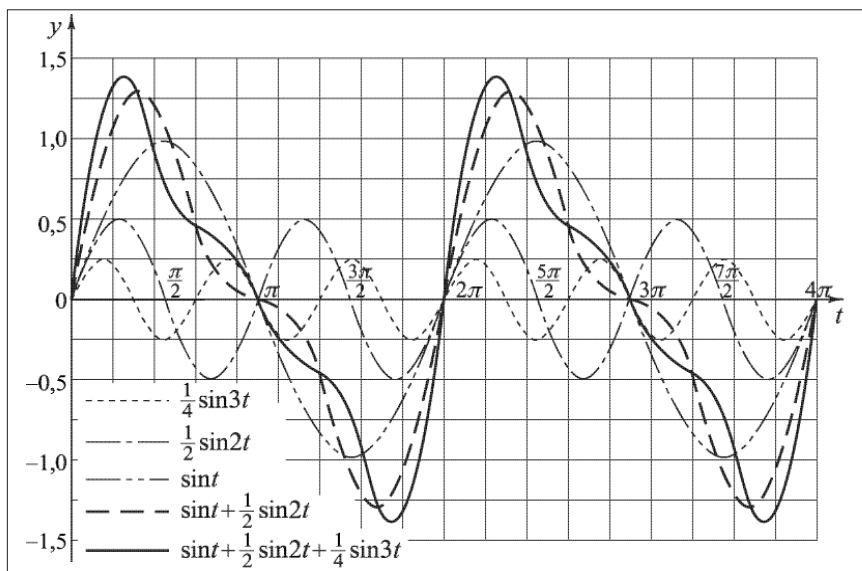


Рис. 2. Складання трьох синусоїдальних величин

Тепер природно поставити зворотнє питання: «Чи можна дану періодичну функцію періоду T представити у вигляді кінцевої суми або хоча б нескінченної безлічі синусоїдальних величин вигляду (2)?». На це питання можна дати позитивну відповідь, якщо залучити всю нескінченну послідовність величин (2). Для функцій цього класу має місце розкладання в «тригонометричний ряд»:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k),\end{aligned}\tag{3}$$

де $A_0, A_1, \alpha_1, A_2, \alpha_2$ – постійні, що мають різні значення.

Геометрично це означає, що графік періодичної функції виходить шляхом накладання ряду синусоїд. Якщо витлумачити кожен синусоїдальну величину механічно як таку, що являє собою гармонічний коливальний рух, то можна сказати, що тут складне коливання, яке характеризується функцією $\varphi(t)$, розкладається на окремі гармонічні коливання. У зв'язку з цим окремі синусоїдальні величини, що входять до складу останнього розкладання, називають гармонічними складовими або просто його гармоніками (першою, другою і т. д.). Сам же процес розкладання періодичної функції на гармоніки носить назву гармонічного аналізу.

Якщо за незалежну змінну вибрати $x = \omega t = \frac{2\pi t}{T}$, то виходить функція від x : $f(x) = \varphi\left(\frac{x}{\omega}\right)$ також періодична, але зі стандартним періодом 2π . Розкладання прийме вигляд

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= A_0 + A_1 \sin(x + \alpha_1) + A_2 \sin(2x + \alpha_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \alpha_k).\end{aligned}$$

Розвернувши члени цього ряду по формулі для синуса суми і поклавши

$$A_0 = a_0, \quad A_k \sin \alpha_k = a_k, \quad A_k \cos \alpha_k = b_k, \quad \text{де } (k = 1, 2, 3 \dots),$$

ми прийдемо до остаточної форми тригонометричного розкладання:

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad \text{або}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (4)$$

Тригонометричний ряд (4) називається рядом Фур'є. Коефіцієнти ряду обчислюються за формулами Ейлера–Фур'є:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (5)$$

Для обчислення коефіцієнтів можна використати будь-які квадратурні формули.

При використанні квадратурних формул треба пам'ятати, що зі збільшенням частоти коливань зменшується точність розрахунку, так як зменшується розрахункова кількість ординат на кожній півхвилі (рис. 3).

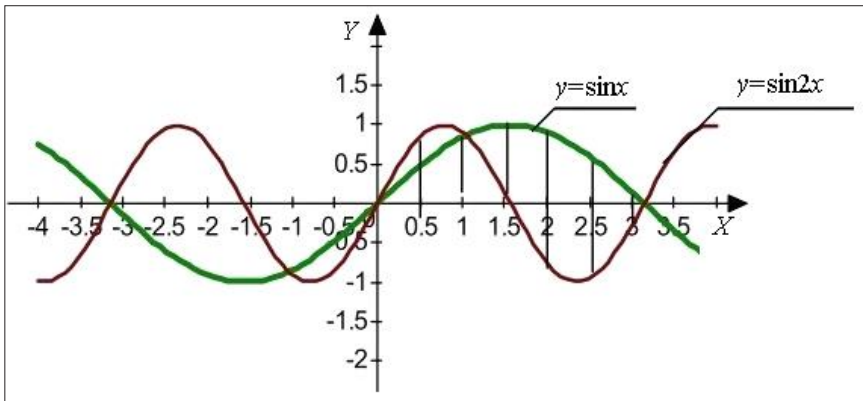


Рис. 3. Розрахункова кількість ординат для різних частот коливань

Розкладання тільки по косинусах або тільки по синусах

Якщо задана в проміжку $[-\pi, \pi]$ функція $f(x)$, що інтегрується, буде непарною, то для неї

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

У цьому легко пересвідчитися, представивши $\int_{-\pi}^{\pi}$ у вигляді суми інтегралів $\int_0^{\pi} + \int_{-\pi}^0$ і замінивши у другому з них x на $-x$.

Таким же шляхом встановлюємо, що у разі парної функції $f(x)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Нехай тепер $f(x)$ буде парна функція, що інтегрується в проміжку $[-\pi, \pi]$. Тоді добуток $f(x) \sin kx$ виявиться непарною функцією, і по сказаному раніше:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0, \text{ де } (k = 1, 2, \dots).$$

Таким чином, ряд Фур'є парної функції містить лише тільки косинуси:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

Оскільки $f(x) + \cos kx$ у цьому випадку також буде парною функцією, то, виходячи із сказаного вище, можемо коефіцієнти a_k розкладання написати у вигляді

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \text{ де } (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Якщо ж функція $f(x)$ буде непарною, то непарною буде і функція $f(x) + \cos kx$, так що

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0, \text{ де } (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Тоді ряд Фур'є непарної функції містить одні лише синуси:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

При цьому, у зв'язку з парністю добутку $f(x)\sin kx$, можна записати формулу для коефіцієнтів b_k у вигляді

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \text{ де } (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Випадок довільного проміжку.

Якщо функція $f(x)$ задана в проміжку $[-l, l]$ довільної довжини $2l$ ($l > 0$), то розкладання $f(x)$ в тригонометричний ряд може бути представлене у вигляді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right). \quad (6)$$

Тут косинуси і синуси беруться від кутів, кратних не x , а $\frac{\pi x}{l}$. Формули для визначення коефіцієнтів цього розкладання можна записати у наступному вигляді:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \text{ де } (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \text{ де } (k = 1, 2, \dots).$$

Як приклад розглянемо розрахунок коефіцієнтів Фур'є функції $f(x) = \sin^3 x - 2 \cos x - 3$ з використанням наведених нижче програм.

Тексти програмних модулів

```
FUNCTION F(X)
F=SIN(X)**3-2*COS(X)-3
END
```

```
PROGRAM L11
! Гармонічний аналіз
PRINT *, '    Harmonic analysis'
PRINT *, 'Enter the integration limits A, B and the number of ordinates N'
READ(5,*)A,B,N
PI=ACOS(-1.)
PRINT *, '    Calculation results'
H=(B-A)/(N-1)
DO K=0,5
AK=0
BK=0
DO X=A,B+0.001*H,H
AK=AK+F(X)*COS(K*X)
BK=BK+F(X)*SIN(K*X)
ENDDO
AK=(AK-(F(A)*COS(K*A)+F(B)*COS(K*B))/2.)*H/PI
BK=(BK-(F(A)*SIN(K*A)+F(B)*SIN(K*B))/2.)*H/PI
if(k==0)then
PRINT 20,K,AK
Else
PRINT 20,K,AK,K,BK
20 FORMAT(5X,'AK(',I1,')=' ,E13.6,':, ' BK(',I1,')=' ,E13.6)
endif
ENDDO
END
```

Результати виконання програми

Harmonic analysis

Enter the integration limits A, B and the number of ordinates N

-3.141593 3.141593 21

Calculation results

AK(0)=-0.600000E+01

AK(1)=-0.200000E+01 BK(1)= 0.750000E+00

AK(2)=-0.238419E-07 BK(2)= 0.150653E-07

AK(3)= 0.584126E-06 BK(3)=-0.250000E+00

AK(4)=-0.357628E-06 BK(4)= 0.239452E-07

AK(5)= 0.309944E-06 BK(5)= 0.556329E-07

Для побудови тригонометричного багаточлена за результатами розрахунку скористаємося формулою (4):

$$\begin{aligned} Q_m(x) = & -3,0 - 2,0 + \cos(x) + 0,75 + \sin(x) - 0,238 + 10^{-7} + \\ & + \cos(2x) + 0,151 \cdot 10^{-7} + \sin(2x) - 0,584 \cdot 10^{-6} + \cos(3x) - 0,250 + \\ & + \sin(3x) - 0,358 + 10^{-6} + \cos(4x) + 0,239 + 10^{-7} + \sin(4x) + \\ & + 0,310 + 10^{-6} + \cos(5x) + 0,556 + 10^{-7} + \sin(5x). \end{aligned}$$

Послідовність виконання лабораторних робіт

1. З таблиці 4 вибрати варіант, що відповідає номеру за списком журналу відвідування занять групи.
2. Використовуючи програму, обчислити перші шість пар коефіцієнтів Фур'є на проміжку $[0, 2\pi]$ функції $f(x)$.
3. За результатами розрахунку побудувати тригонометричний багаточлен.

Таблиця 4. Варіанти завдань

№ варіанта	$f(x)$	a	b
1	$f(x) = e^{a + \sin x}$	1,1	—
2	$f(x) = e^{a + \cos x}$	1,2	—
3	$f(x) = \arctg(a + \sin x + b)$	2,87	-1,29
4	$f(x) = a + \sin(x^2 - \pi) + b$	2,88	-0,87
5	$f(x) = e^{a + \sin x}$	2,15	—
6	$f(x) = e^{a + \cos x}$	1,32	—
7	$f(x) = \arctg(a + \sin x + b)$	3,87	-1,28
8	$f(x) = a + \sin(x^2 - \pi) + b$	2,75	-0,85
9	$f(x) = e^{a + \sin x}$	2,95	—
10	$f(x) = e^{a + \cos x}$	1,42	—
11	$f(x) = \arctg(a + \sin x + b)$	4,87	-1,27
12	$f(x) = a + \sin(x^2 - \pi) + b$	2,73	-0,83
13	$f(x) = \arctg(a \cdot \sin x + b)$	5,87	-1,25
14	$f(x) = a + \sin(x^2 - \pi) + b$	2,66	-0,67
15	$f(x) = \operatorname{ch}(\cos x) + a$	1,1	—

Тригонометричне інтерполювання

Тригонометричне інтерполювання, тобто наближення до функції $f(x)$, може бути здійснене за допомогою тригонометричного багаточлена (полінома) [6; 7]:

$$Q_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (7)$$

значення якого в ряді точок співпадають з відповідними значеннями функції (зазначимо, що зовні інтерполяційний багаточлен схожий на ряд Фур'є. Можна сказати, що інтерполяційний багаточлен «у границі» якби переходить у ряд Фур'є).

Для того, щоб квадратичне відхилення полінома від функції $f(x)$ було мінімальним, коефіцієнти a_0 , a_k , b_k повинні бути коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$ відносно тригонометричної системи.

Як і для ряду Фур'є, в найпростіших випадках коефіцієнти тригонометричного полінома Фур'є даної функції обчислюються безпосередньо за формулами (5). Якщо обчислення інтегралів громіздке або функція $f(x)$ задана табличною, то для обчислення коефіцієнтів можуть бути використані формули квадратур. Якщо функція має парність, то розрахункові формули спрощуються.

Функція $f(x)$ парна, тоді коефіцієнти $b_k = 0$, де $(k = 1, 2, \dots, m)$;

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \text{ де } (k = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Використовуючи правило трапецій і враховуючи, що $\cos 0 = \cos \pi = 1$, дістаємо формулу

$$a_k = \frac{2}{n} \left(\sum_{i=0}^n y_i \cos kx - \frac{y_0 + y_n}{2} \right), \quad (8)$$

де $y_i = f(x_i)$, $x_i = \frac{\pi \cdot i}{n}$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$,

Формула для $Q_m(x)$ приймає вигляд

$$Q_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos kx. \quad (9)$$

Якщо $f(x)$ непарна, то коефіцієнти $a_k = 0$, де $(k = 0, 1, 2, 3, \dots, m)$,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \text{ де } (k = 1, 2, \dots, m),$$

або з урахуванням того, що $\sin 0 = \sin \pi = 0$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} y_i \sin kx, \quad (10)$$

$$\text{де } y_i = f(x_i), \quad x_i = \frac{\pi \cdot i}{n}.$$

Формула для $Q_m(x)$ приймає вигляд

$$Q_m(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin kx. \quad (11)$$

Тут n – число відрізків на інтервалі від 0 до π ; m – число гармонік, не враховуючи нульової.

Якщо функція $f(x)$ не володіє парністю, то очевидно, що

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$$

Перший член правої частини парний, а другий – непарний. Іншими словами, тригонометричний поліном функції складається з двох тригонометричних поліномів парної і непарної функції. Коефіцієнти першого полінома знаходяться по формулах для парної функції, а другого – для непарної функції.

Текст програми для розрахунку коефіцієнтів Фур'є табличної функції

```
PROGRAM L12
DIMENSION F(21),AK(0:5),BK(0:5)
! Тригонометричне інтерполювання
PRINT *, '    Trigonometric interpolation'
PRINT *, ' Enter the integration limits A, B and the number of ordinates N'
READ(5,*)A,B,N
PRINT *, ' Enter the values of the function f(x)'
READ(5,*)(F(I),I=1,N)
PI=ACOS(-1.)
PRINT *, '    Calculation results:'
H=(B-A)/(N-1)
DO K=0,5
  AK(k)=0; BK(k)=0; X=A
  DO I=1,N
    AK(K)=AK(K)+F(I)*COS(K*X)
    BK(K)=BK(K)+F(I)*SIN(K*X)
    X=X+H
  ENDDO
  AK(k)=(AK(k)-(F(1)*COS(K*A)+F(N)*COS(K*B))/2.)*H/PI
  BK(k)=(BK(k)-(F(1)*SIN(K*A)+F(N)*SIN(K*B))/2.)*H/PI
  if(k==0)then
    PRINT 20,K,AK(k)
  else
    PRINT 20,K,AK(k),K,BK(k)
  20 FORMAT(5X,'AK(',I1,')=',E13.6,':, ' BK(',I1,')=',E13.6)
  endif
ENDDO
! Перевірка розрахунків
PRINT 25
25 FORMAT(' Verification of calculations' / &
5x, 'X      F(X)tabl F(x)rozrax')
```

```

x=a
do j=1,n
  ry=ak(0)/2.
  do k=1,5
    ry=ry+ak(k)*cos(k*x)+bk(k)*sin(k*x)
  enddo
  print 26,x,f(j),ry
26 FORMAT(F9.5,2F12.7)
  x=x+h
enddo
END

```

Результати виконання програми

Trigonometric interpolation

Enter the integration limits A, B and the number of ordinates N

-3.141593 3.141593 21

Enter the values of the function f(x)

-5., -4.88554, -4.47372, -3.76908, -2.92406, -2.15783, -1.62831,
 -1.35048, -1.211923, -1.11638, -1.01903, -1.02565, -1.27974, -1.84857,
 -2.64951, -3.48161, -4.14109, -4.53731, -4.72488, -4.83123, -4.93675

Calculation results:

AK(0)=-0.580243E+01

AK(1)= 0.204427E+01 BK(1)=-0.461960E+00

AK(2)=-0.822407E-01 BK(2)= 0.567799E-01

AK(3)=-0.783243E-01 BK(3)= 0.206204E+00

AK(4)=-0.308855E-02 BK(4)=-0.202629E-01

AK(5)= 0.297530E-02 BK(5)= 0.875843E-02

Verification of calculations

X	F(X)tabl	F(x)rozraz
-3.14159	-5.0000000	-4.9554701
-2.82743	-4.8855400	-4.8856111
-2.51327	-4.4737201	-4.4816999
-2.19911	-3.7690799	-3.7647057
-1.88496	-2.9240601	-2.9204926

-1.57080 -2.1578300 -2.1626580
 -1.25664 -1.6283100 -1.6296715
 -0.94248 -1.3504800 -1.3443584
 -0.62832 -1.2119230 -1.2157199
 -0.31416 -1.1163800 -1.1174535
 0.00000 -1.0190300 -1.0176206
 0.31416 -1.0256500 -1.0235920
 0.62832 -1.2797400 -1.2823820
 0.94248 -1.8485700 -1.8500799
 1.25664 -2.6495099 -2.6454892
 1.57080 -3.4816101 -3.4814703
 1.88496 -4.1410899 -4.1468930
 2.19912 -4.5373101 -4.5340710
 2.51327 -4.7248802 -4.7167239
 2.82743 -4.8312302 -4.8481617
 3.14159 -4.9367499 -4.9554701

Для побудови інтерполяційного тригонометричного багаточлена за результатами розрахунку скористаємося формулою (7):

$$\begin{aligned}
 Q_m(x) = & 2,9012 + 2,0443 + \cos(x) - 0,4620 + \sin(x) + 0,0822 + \\
 & + \cos(2x) + 0,0568 + \sin(2x) - 0,0783 + \cos(3x) + \\
 & + 0,2062 + \sin(3x) - 0,0031 + \cos(4x) - 0,0203 + \sin(4x) + \\
 & + 0,0030 + \cos(5x) + 0,0088 + \sin(5x).
 \end{aligned}$$

Розглянемо приклад побудови тригонометричного полінома Фур'є для парної функції, заданої наступними даними:

x_i	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f(x_i)$	9,55	9,46	9,25	8,96	8,58	8,10	7,59	7,00	6,34	5,56	4,80	4,21	4,00

Текст програми для розрахунку коефіцієнтів Фур'є для парних та непарних функцій

```
PROGRAM L12_  
  DIMENSION F(21),AK(0:5),BK(0:5)  
  CHARACTER R  
  ! Тригонометричне інтерполювання парних та непарних функцій  
  PRINT *, '    Trigonometric interpolation'  
  PRINT *, ' Enter the integration limits A, B and the number of ordinates N'  
  READ(5,*)A,B,N  
  PRINT *, 'Enter the values of the function F(X)'  
  READ(5,*)(F(I),I=1,N)  
  PRINT *, 'Is F(X) even? Y/N'  
  
  READ(5,1) R  
  1 FORMAT(A1)  
  IF(R.EQ.'Y'.OR.R.EQ.'y')THEN  
    KR=1  
  ELSE  
    KR=0  
  ENDIF  
  PI=ACOS(-1.)  
  DO I=0,5  
    AK(I)=0; BK(I)=0  
  ENDDO  
  PRINT *, '    Calculation results:'  
  H=(B-A)/(N-1)  
  DO K=0,5  
    AK(K)=0; BK(K)=0; X=A  
    DO I=1,N  
      if(kr==1)then  
        AK(K)=AK(K)+F(I)*COS(K*X)  
      else  
        BK(K)=BK(K)+F(I)*SIN(K*X)  
      endif  
    END DO  
  END DO
```

```

    X=X+H
ENDDO
if(kr==1)then
AK(k)=(AK(K)-(F(1)*COS(K*A)+F(N)*COS(K*B))/2.)*H/PI*2
    else
BK(k)=(BK(K)-(F(1)*SIN(K*A)+F(N)*SIN(K*B))/2.)*H/PI*2
    endif
    if(k==0) then
PRINT 20,K,AK(k)
    else
PRINT 20,K,AK(K),K,BK(K)
20 FORMAT(5X,'AK(',I1,')=' ,E13.6,;,' BK(',I1,')=' ,E13.6)
    endif
ENDDO
PRINT 25
25 FORMAT(' Verification of calculations'/ &
5X,'X',7X,'F(X)tabl',2X,'F(x)rozrax')
    x=a; ry=0
    do j=1,n
    if(kr==1)ry=ak(0)/2.
    do k=1,5
        if(kr==1)then
            ry=ry+ak(k)*cos(k*x)
        else
            ry=ry+bk(k)*sin(k*x)
        endif
    enddo
    print 26,x,f(j),ry
26 FORMAT(F9.5,2F12.7)
    x=x+h
enddo
END

```


Результати виконання програми

Trigonometric interpolation

Enter the integration limits A, B and the number of ordinates N

0 3.141593 13

Enter the values of the function F(X)

9.55 9.46 9.25 8.96 8.58 8.1 7.59 7 6.34 5.56 4.8 4.21 4

Is F(X) even? Y/N

y

Calculation results:

AK(0)= 0.144375E+02

AK(1)= 0.258480E+01 BK(1)= 0.000000E+00

AK(2)=-0.414736E+00 BK(2)= 0.000000E+00

AK(3)= 0.177556E+00 BK(3)= 0.000000E+00

AK(4)=-0.425004E-01 BK(4)= 0.000000E+00

AK(5)= 0.972311E-02 BK(5)= 0.000000E+00

Verification of calculations

X	F(X)tabl	F(x)rozrax
0.00000	9.5500002	9.5335884
0.26180	9.4600000	9.4631176
0.52360	9.2500000	9.2627115
0.78540	8.9600000	8.9565516
1.04720	8.5799999	8.5670719
1.30900	8.1000004	8.1095076
1.57080	7.5900002	7.5909853
1.83260	7.0000000	7.0038371
2.09440	6.3400002	6.3276649
2.35619	5.5599999	5.5659509
2.61799	4.8000002	4.8025551
2.87979	4.2100000	4.2135406
3.14159	4.0000000	3.9894409

Для побудови інтерполяційного тригонометричного багаточлена за результатами розрахунку скористаємося формулою (9):

$$Q_m(x) = 7,2188 + 2,5848 + \cos(x) - 0,41478 + \cos(2x) + \\ + 0,1776 + \cos(3x) - 0,04250 + \cos(4x) + 0,00972 + \cos(5x).$$

Послідовність виконання лабораторних робіт

1. З таблиці 5 вибрати варіант, що відповідає номеру за списком журналу відвідування занять групи.

2. Використовуючи програму, обчислити перші шість пар коефіцієнтів Фур'є та побудувати інтерполяційний тригонометричний багаточлен, апроксимуючий функцію, задану

в точках $x_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}$, де $(i = 1, 2, \dots, 2N+1)$, $N = 10$.

3. За результатами розрахунку побудувати інтерполяційний тригонометричний багаточлен.

Таблиця 5. Варіанти завдань

№ варіанта	Таблиця значень функції
1	2
1	1,00; 1,80; 3,09; 4,78; 6,43; 7,35; 7,03; 5,65; 3,89; 2,38; 1,35; 7,42; 0,42; 0,26; 0,18; 0,14; 0,15; 0,16; 0,21; 0,34; 0,55
2	7,38; 6,76; 5,22; 3,47; 2,07; 1,16; 0,64; 0,36; 0,23; 0,16; 0,13; 0,14; 0,16; 0,23; 0,37; 0,64; 1,16; 2,08; 3,48; 5,22; 6,76
3	-1,24; -1,17; -1,08; -0,96; -0,84; -0,79; -0,82; -0,93; -1,12; -1,21; -1,02; -1,28; -1,32; -1,34; -1,36; -1,37; -1,37; -1,36; -1,35; -1,33; -1,30

Продовж. табл. 5

1	2
4	-3,01; -3,58; -4,12; -4,56; -4,86; -4,99; -4,94; -4,73; -4,36; -3,86; -3,30; -2,72; -2,13; -1,64; -1,26; -1,05; -1,02; -1,13; -1,43; -1,87; -2,43
5	-2,01; -2,58; -3,12; -3,56; -3,86; -3,99; -3,94; -3,73; -3,36; -3,86; -3,30; -1,72; -1,13; -0,64; -0,26; -0,05; -0,02; -0,13; -0,43; -0,87; -1,43
6	5,38; 4,76; 3,22; 1,47; 1,07; 1,16; 0,65; 0,38; 0,21; 0,15; 0,12; 0,14; 0,16; 0,25; 0,38; 0,66; 1,36; 3,08; 4,48; 5,22; 6,76
7	1,03; 1,34; 1,75; 2,18; 2,53; 2,71; 2,65; 2,37; 1,97; 1,54; 1,16; 0,86; 0,64; 0,52; 0,42; 0,37; 0,36; 0,39; 0,45; 0,56; 0,74
8	2,71; 2,62; 2,28; 1,86; 1,44; 1,07; 0,82; 0,46; 0,42; 0,41; 0,37; 0,38; 0,43; 0,48; 0,65; 0,82; 1,07; 1,44; 1,86; 2,28; 2,46
9	-1,32; -1,28; -1,27; -1,26; -1,25; -1,24; -1,25; -1,26; -1,27; -1,29; -1,30; -1,33; -1,34; -1,35; -1,36; -1,37; -1,37; -1,36; -1,35; -1,34; -1,37
10	-4,01; -4,21; -4,52; -4,70; -4,90; -5,02; -4,93; -4,86; -4,63; -4,12; -3,80; -3,50; -3,15; -3,05; -3,02; -3,00; -3,10; -3,20; -3,41; -3,72; -3,82
11	1,00; 2,41; 5,40; 10,41; 16,30; 19,91; 18,62; 13,41; 7,72; 3,65; 1,62; 0,64; 0,27; 0,13; 0,07; 0,05; 0,05; 0,07; 0,09; 0,18; 0,43
12	20,00; 17,52; 11,92; 6,42; 2,90; 1,22; 0,25; 0,22; 0,15; 0,06; 0,05; 0,05; 0,06; 0,15; 0,52; 1,05; 1,22; 2,90; 6,45; 7,93; 9,52
13	-1,11; -0,82; -0,30; 0,35; 0,73; 0,82; 0,71; 0,52; 0,40; 0,25; 0,12; -1,10; -1,27; -1,32; -1,35; -1,37; -1,37; -1,36; -1,34; -1,32; -1,22
14	-2,00; -2,80; -3,71; -4,32; -4,72; -4,93; -4,92; -4,52; -4,11; -3,35; -2,42; -1,52; -0,62; -0,04; 0,61; 0,92; 0,99; 0,79; 0,34; 0,32; 0,65
15	-2,02; -2,85; -3,51; -4,22; -4,62; -4,83; -4,92; -4,50; -4,21; -3,25; -2,32; -1,42; -0,42; -0,03; 0,51; 0,95; 1,00; 0,85; 0,44; 0,38; 0,65

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б., Чирун Л. В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник. – Львів: Вид-во «Новий світ – 2000», 2020. – 470 с.
2. Комп'ютерне моделювання процесів та систем. Чисельні методи: підручник / С. П. Вислоух, О. В. Волошко, Г. С. Тимчик, М. В. Філіппова. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2021. – 228 с.
3. Практикум із чисельних методів: навч. посіб. / Н. І. Полтораченко, С. А. Теренчук, Ю. Н. Убайдуллаєв. – Київ: КНУБА, 2023. – 160 с. ISBN 978-966-627-251-8
4. О. М. Самборська, Б. Г. Шелестовський Чисельні методи. Навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів. – Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2010. – 164 с.
5. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. – Київ: Видавнича група ВНУ, 2006. – 480 с.: іл. ISBN 966-552-155-1
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. лит-ры, 1970. – 656 с.
7. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення. Переклад небайдужих до математики й України: Сергій Зінов'єв. Одеса. 2022-02-24 – 2026-01-12 v3.0.24n, 2389 с.
8. Чисельні методи: навчальний посібник / Л. О. Волонтир, О. В. Зелінська, Н. А. Потапова, І. А. Чіков, Вінницький

національний аграрний університет. – Вінниця: ВНАУ, 2020. – 322 с.

9. Чисельні методи розв'язання прикладних задач: навч. посіб. / О. А. Гончаров, Л. В. Васильєва, А. М. Юнда. – Суми: Сумський державний університет, 2020. – 142 с.

10. Чисельні методи : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, С. І. Тищенко, І. І. Хилько, В. О. Крайній. – Миколаїв: МНАУ, 2023. – 100 с.

11. Chapra, Steven C. Numerical methods for engineers / Steven C. Chapra, Berger chair in computing and engineering, Tufts University, Raymond P. Canale, professor emeritus of civil engineering. University of Michigan. – Seventh edition, 2020. 987 p.

Інформаційні ресурси в Інтернет

1. <https://studfile.net/preview/14027073/page:6/>
2. <https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net/%D0%A4%D1%96%D1%85%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D1%86/Download>
3. <https://uk.wikipedia.org/wiki/Апроксимація>

Навчальне видання

ДУДЧЕНКО Олег Миколайович
КАРПОВА Світлана Олегівна

**ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ.
АПРОКСИМАЦІЯ ТАБЛИЧНИХ ФУНКЦІЙ
ЗА ДОПОМОГОЮ ПК**

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

Комп'ютерна правка й коректура *О. Є. Вакула*
Комп'ютерне верстання *Ю. С. Семенченко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 2,21. Вид. № 11. Зам. № 1706-57.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54007
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.