

## АЛЬТЕРНАТИВНІ МОДЕЛІ СКІНЧЕНО-ЕЛЕМЕНТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ СУДНОВИХ КОНСТРУКЦІЙ

Гучек Петро Йосипович, д.т.н., доцент<sup>1,2</sup>, Литвиненко Олена Іванівна, к.т.н, доцент<sup>2</sup>, Астіоненко Ігор Олександрович, к.ф.-м.н., доцент<sup>3</sup>, Дудченко Олег Миколайович, к.т.н., професор<sup>2</sup>, Карпова Світлана Олегівна<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Університет економіки та гуманітарних наук у Варшаві; <sup>2</sup> Херсонська філія Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова; <sup>3</sup> Херсонський національний технічний університет

<sup>1</sup> Польща, Варшава; <sup>2,3</sup> Україна, Херсон

<sup>1</sup> [phuchek@gmail.com](mailto:phuchek@gmail.com), <sup>2</sup> [kbnuos@gmail.com](mailto:kbnuos@gmail.com), <sup>3</sup> [mmkntu@gmail.com](mailto:mmkntu@gmail.com)

**Анотація.** Найбільш ефективним чисельним методом інженерного аналізу, що дозволяє найкращим чином оцінити напружено-деформований стан конструкції будь-якої форми і розміру, є метод скінченних елементів. В роботі представлено альтернативні моделі для біквадратичного та бікубічного скінченного елементів серендипової сім'ї та проведено тестування отриманих альтернативних моделей за допомогою завдання про кручення стержня некругового перерізу і порівняння отриманих результатів з точним рішенням.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, серендипові скінченні елементи, функції форми.

**Вступ.** В процесі експлуатації суден, наприклад, як плавкрани, земснаряди, баржі та судна спеціального призначення найчастіше виникає необхідність в їх модернізації для вирішення певних технічних завдань. Така модернізація пов'язана, як правило, з різними конструктивними змінами судна, що забезпечують монтаж і функціонування спеціалізованого обладнання, пристроїв і систем. Кожна конструктивна зміна унікальна, а її глибина і реалізація залежить від конкретного завдання, при цьому оцінка міцності нових конструктивних елементів і їх вплив на несучу здатність існуючих корпусних конструкцій можуть не передбачатися існуючими розрахунковими методиками. Ця проблема може бути вирішена за допомогою комп'ютерного моделювання. Розрахунок міцності конструкцій з урахуванням фізичної нелінійності матеріалу вимагає високої точності визначення всіх компонентів напружено-деформованого стану(НДС). Найбільш ефективним чисельним методом інженерного аналізу, що дозволяє найкращим чином оцінити НДС конструкції будь-якої форми і розміру, є метод скінченних елементів (МСЕ). В даний час МСЕ використовується при проектуванні судів як для оцінки загальної, так і місцевої міцності. Його застосування, в основному, регламентується відповідними вимогами Міжнародної асоціації класифікаційних товариств, проте більшість іноземних класифікаційних товариств в своїх правилах мають рекомендації щодо виконання перевірочних розрахунків корпусних конструкцій за допомогою МСЕ. Таким чином, пошук альтернативних моделей скінчено-елементної апроксимації які б дозволили зменшити розмірність задачі та поліпшити обчислювальні властивості є досить актуальним питанням сьогодення в суднобудуванні.

**Ціль роботи.** Розробка альтернативних моделей біквадратичного та бікубічного скінченних елементів(СЕ) серендипової сім'ї та тестування і порівняння отриманих результатів з точним рішенням [1].

**Основна частина.** Довгий час вважалося, що на кожному серендиповом скінченному елементі існує єдиний базис - стандартний, який був отриманий алгебраїчним способом [2]. Процедура систематичного генерування базису, яка була запропонована Тейлором у 1972 році, привела до вже відомих стандартних моделей на елементах серендипової сім'ї [3]. У 70-х роках минулого століття завдяки роботам Уачспреса з'явився метод "product of planes" для конструювання базисних функцій СЕ [4]. Але цей метод не застосовувався на

серендипових скінченних елементах (ССЕ). На початку 80-х років був запропонований *ймовірнісно-геометричний метод* конструювання базисів скінченних елементів різноманітної конфігурації [5]. Переваги цього метода найбільш виразно проявилися саме на серендипових моделях. Для конструювання серендипових елементів використовувався *геометричний метод* [6]. Нові методи значно спрощують процедуру побудови базису і дозволяють отримати альтернативні моделі ССЕ. Наявність “позавузлових” параметрів у моделях, що отримані за допомогою нових методів, дає можливість позбутися недоліків, які притаманні стандартним моделям (наприклад, від’ємних значень навантажень у вузлах). Але побудова систем базисних функцій цими методами не дає можливості будувати базиси на ССЕ з наперед заданими характеристиками. Для розв’язання на ССЕ задачі інтерполювання з умовами [7] був запропонований *аналітичний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій* [8].

За допомогою матричних методів на серендипових елементах отримані базиси, які називаються *стандартними*. Матричний метод був розвинений в працях Вандермонда, Коші, Лагранжа стосовно задач інтерполяції функцій одного аргументу. У МСЕ він вважається основним методом побудови інтерполяційних поліномів для функцій двох і трьох аргументів. Наприклад, процедура побудови базису для СЕ з 4-ма вузлами (рис.1) починається з вибору 4-параметричного поліному з двома аргументами:

$$\varphi(\xi, \eta) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta, \text{ де } |\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1 \quad (1)$$

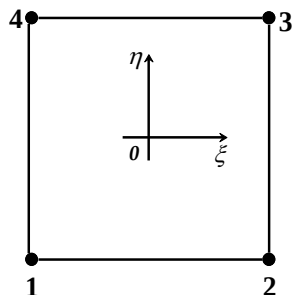


Рис.1. Елемент з білінійним базисом (СЕ-4)

Базисні функції білінійної інтерполяції  $N_i(\xi, \eta)$  ( $i=1,2,3,4$ ) повинні задовольняти інтерполяційній гіпотезі

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1,4}, \quad (2)$$

де  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера.

Використання (2) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь  $4 \times 4$  відносно параметрів  $\alpha_j$ :

$$\alpha_1 + \alpha_2\xi_k + \alpha_3\eta_k + \alpha_4\xi_k\eta_k = \delta_{ik}, \quad (3)$$

де  $i$  – номер базисної функції;  $k$  – номер вузла.

Знайдемо невідомі параметри  $\alpha_j$  і напишемо інтерполяційний поліном (1) у вигляді [2]:

$$\varphi(\xi, \eta) = N_1(\xi, \eta)\Phi_1 + N_2(\xi, \eta)\Phi_2 + N_3(\xi, \eta)\Phi_3 + N_4(\xi, \eta)\Phi_4 = [N_i][\Phi_i], \quad (4)$$

де  $[N_i]$  – матриця-рядок базисних функцій СЕ ( $i=1,2,3,4$ );  $\{\Phi_i\}$  – матриця-стовпець граничних значень функції, що інтерполюється.

Отримуємо білінійний базис на СЕ-4:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta), \quad i=1,2,3,4; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1. \quad (5)$$

Функції форми (базисні функції)  $N_i(\xi, \eta)$  виконують важливу роль в методі скінченних елементів – апроксимують поле в середині елемента. Від вибору апроксимуючих функцій та їх властивостей в значній мірі залежить точність розв’язку. Слід зауважити, що серендипові

моделі є унікальним прикладом одночасної інтерполяції та апроксимації – вони інтерполюють функцію на границі елемента та апроксимують всередині його.

У роботі розглядаються скінченні елементи серендипової сім'ї з біквадратичною та бікубічною інтерполяцією (рис. 2, рис. 3) [2,9].

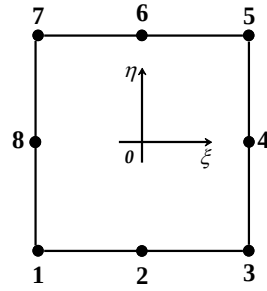


Рис.2. CSE-8  
( $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$ )

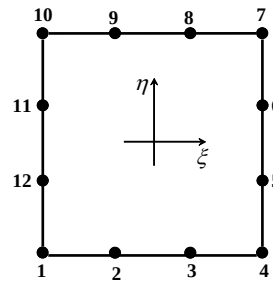


Рис.3. CSE-12  
( $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$ )

Використовуючи аналітичний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій, множину базисів CSE-8 можливо отримати додаванням до поверхні стандартного базису [8]:

$$N_1^{(s)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta), \quad (6)$$

$$N_2^{(s)} = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (7)$$

гіперболічного параболоїда з коефіцієнтом  $K$ :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta + K(1+\xi)(1+\eta)), \quad (8)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\left((1+\xi) - \frac{1}{2}K(1+\xi)(1+\eta)\right) \quad (9)$$

де  $N_1^{(s)}, N_2^{(s)}$  - стандартні базисні функції CSE-8,

$N_1, N_2$  - модифіковані базисні функції CSE-8.

Запишемо узагальнені формули для побудови альтернативних базисних функцій біквадратичного елемента:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(-1+\xi_i\xi+\eta_i\eta + K(1-\xi_i\xi)(1-\eta_i\eta)), \quad (10)$$

$i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1.$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta_i\eta)\left((1+\xi) - \frac{1}{2}K(1+\xi)(1-\eta_i\eta)\right), \quad i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1. \quad (11)$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\eta)(1+\xi_i\xi)\left((1+\eta) - \frac{1}{2}K(1+\eta)(1-\xi_i\xi)\right), \quad (12)$$

$i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1.$

Аналогічно використовуючи аналітичний метод побудови ієрархічних форм базисних функцій отримуємо множину базисів CSE-12 додаванням до поверхні стандартного базису [8]:

$$N_1^{(s)} = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10), \quad (13)$$

$$N_2^{(s)} = \frac{9}{32}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-9\xi), \quad (14)$$

гіперболічного параболоїда з коефіцієнтом  $K$ :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\left(\frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + K \cdot \frac{9}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta)\right), \quad (15)$$

$$N_2 = \frac{3}{8}(1-\xi)(1-\eta)\left(\frac{3}{4}(1+\xi)(1-3\xi) - K \cdot \frac{3}{4} \cdot (1+\xi)(1+\eta)\right), \quad (16)$$

де  $N_1^{(s)}, N_2^{(s)}$  - стандартні базисні функції CSE-12,

$N_1, N_2$  - модифіковані базисні функції CSE-12.

Запишемо узагальнені формули для побудови альтернативних базисних функцій бікубічного елемента:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \left( \frac{1}{8}(9\xi^2 + 9\eta^2 - 10) + K \cdot \frac{9}{4} \cdot (1 - \xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta) \right), \quad (17)$$

$i = 1, 4, 7, 10; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1;$

$$N_i = \frac{3}{8}(1 + 3\xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \left( \frac{3}{4}(1 - 3\xi_i \xi)(1 + 9\xi_i \xi) - K \cdot \frac{3}{4}(1 - 3\xi_i \xi)(1 - \eta_i \eta) \right), \quad (18)$$

$i = 2, 3, 8, 9, \quad \eta_i = \pm 1, \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}.$

$$N_i = \frac{3}{8}(1 + 3\eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \left( \frac{3}{4}(1 - 3\eta_i \eta)(1 + 9\eta_i \eta) - K \cdot \frac{3}{4}(1 - 3\eta_i \eta)(1 - \xi_i \xi) \right), \quad (19)$$

$i = 5, 6, 11, 12, \quad \xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm \frac{1}{3}.$

Отримані базисні функції відповідають всім властивостям, які притаманні функціям форми в MSE [2,8].

Для тестування альтернативних моделей розглянемо задачу про кручення стержня квадратного перерізу, яка приведена в [10]. Нехай дано: модуль зсуву  $\mu = 0,8 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$ ; відносний кут закручування (кут крутки)  $1^0 \text{ на } 100 \text{ см}$ ; площа поперечного перерізу  $1 \text{ см}^2$ ;  $K_{xx} = K_{yy} = 1$ . Знайти поверхню напружень і крутний момент, що виникають при вільному крученні стержня.

В математичній фізиці ця задача відома як задача Діріхле для рівняння Пуассона [11]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\mu\theta, \quad \varphi|_r = 0. \quad (20)$$

Варіаційне формулювання завдання про кручення стержня пов'язана з мінімізацією функціоналу:

$$\chi = \int_V \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - (2\mu\theta)\varphi \right) dV. \quad (21)$$

Функціонал може бути записаний у вигляді:

$$\chi = \int_V \left( \frac{1}{2} \{g\}^T [D] \{g\} - (2\mu\theta)\varphi \right) dV, \quad (22)$$

$$\text{де } \{g\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{matrix} \right\}, \quad [D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix}.$$

Мінімізація  $\chi$  по  $\{\Phi\}$  призводить до системи лінійних рівнянь:

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [g^{(e)}]^T [D^{(e)}] [g^{(e)}] dV = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T (2\mu\theta) dV, \quad (23)$$

$$\text{де } \{g^{(e)}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_r^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \dots \\ \Phi_r \end{Bmatrix},$$

$[N_i, N_j, \dots, N_r]$  – функції форми СЕ,

$\{\Phi_i, \Phi_j, \dots, \Phi_r\}$  – вузлові значення функції напружень.

Зсувні напруження, що виникають в стержні в результаті дії крутного моменту  $M$  щодо осі  $z$ , можуть бути обчислені в довільній точці за формулами:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (24)$$

Крутний момент пропорційний об'єму, охоплених поверхнею напружень:

$$M = 2 \iint_{\Omega} \varphi dx dy, \quad (25)$$

де  $\Omega$  – переріз стержня.

В силу симетрії області, розв'язання в [11] виконується на 1/8 частині квадрата, заштрихованої на рис. 4. Розбиття заштрихованої області проводиться методом триангуляції (рис. 5).

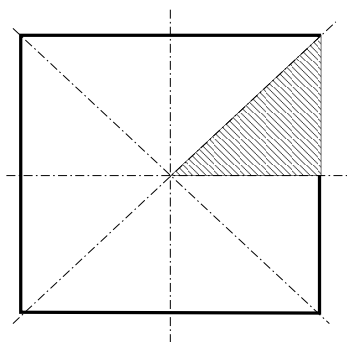


Рис. 4. Переріз квадратного стержня

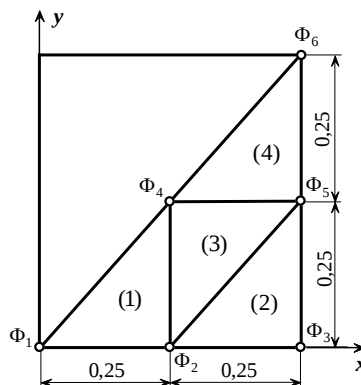


Рис. 5. Розбиття перерізу на трикутні

В результаті отримано наближене розв'язання, показане на рис. 6 [10].

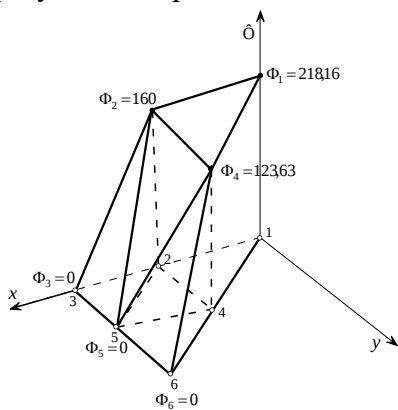


Рис. 6. Вузлові значення функції напружень при триангуляції

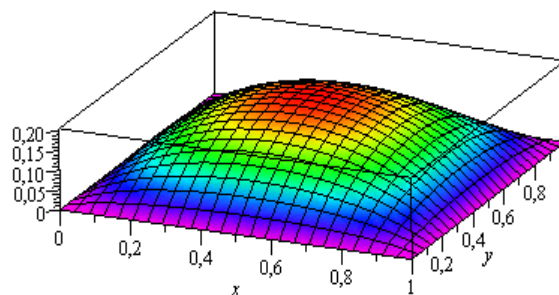


Рис. 7. Поверхня напружень, що задається формулою (26) (по вертикальній координаті масштаб 1:1000)

В [1] ця задача вирішувалася методом Рітца. На рис. 7 показана поверхня напружень, яка відповідає рішення для квадрата з площею перетину  $1 \text{ см}^2$ , якщо в якості апроксимуючої взяти функцію у вигляді нескінченного тригонометричного ряду [1]:

$$\varphi = \frac{32\mu\theta b^2}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m n (m^2 \alpha^2 + n^2)}; \quad (26)$$

$$M = \frac{32\mu\theta}{\pi^4} \frac{8ab^3}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 \alpha^2 + n^2)}; \quad (27)$$

Надалі розв'язання (26)-(27) будемо називати точним.

Навіть візуальне порівняння рис. 6 і рис. 7 говорить про погану точність розв'язку, отриманого за допомогою 4 трикутників. Недоліком застосування лінійних інтерполяційних поліномів є неможливість отримати градієнти як функції координат. Уточнити значення напружень всередині стержня можна наступним чином: 1) збільшити кількість трикутних елементів; 2) взяти трикутники з більшим числом вузлів на границі; 3) застосувати скінченні елементи в формі квадрату.

Для уточнення значень напружень застосуємо процедуру методу скінченних елементів з біквадратичними скінченними елементами (ССЕ-8) (рис. 8). Розбиття 1/4 частини перерізу стержня на квадрати показано на рис. 9.

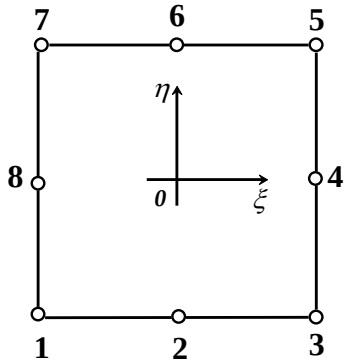


Рис. 8. ССЕ-8 ( $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$ )

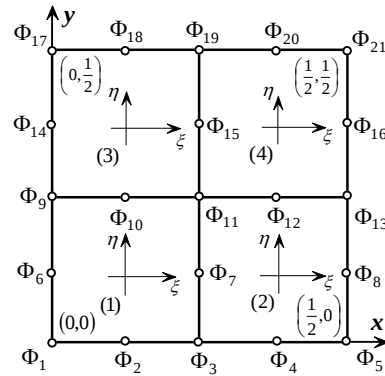


Рис. 9. Розбиття перерізу на біквадратичні СЕ

Для біквадратичного скінченного елемента будемо використовувати базисні функції з керуючим параметром  $p$ , які отримані комбінованим алгебро-геометричним методом [12]:

$$N_i = \frac{1}{16} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) [(36p - 1)(1 - \xi_i \xi - \eta_i \eta) + (36p + 3)\xi_i \xi \eta_i \eta], \quad (28)$$

$$i = 1, 3, 5, 7; \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16} (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) [(5 - 36p) + (36p + 3)\eta_i \eta], \quad (29)$$

$$i = 2, 6; \quad \eta_i = \pm 1.$$

$$N_i = \frac{1}{16} (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) [(5 - 36p) + (36p + 3)\xi_i \xi], \quad (30)$$

$$i = 4, 8; \quad \xi_i = \pm 1.$$

Наявність точного розв'язання дозволяє оцінити відносну похибку, яка отримана при розрахунку МСЕ з біквадратичними елементами. Відносна похибка для функції напружень обчислюється за формулою:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{n} \sum_i \frac{|\varphi_i - \Phi_i|}{\varphi_i} \cdot 100\%, \quad (31)$$

де  $\varphi_i$  – точне значення, отримане за допомогою формули (26);

$\Phi_i$  – наближене значення ( $i = 1; 2; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 14; 15$ ).

Відносна помилка при розрахунку крутного моменту обчислювалася за аналогічною формулою:

$$\Delta M = \frac{|M - M_p|}{M} \cdot 100\%, \quad (32)$$

де  $M$  – точне значення, отримане за допомогою формули (27);

$M_p$  – наближене значення.

Похибки для функції напружень і крутного моменту, які отримані МСЕ з використанням альтернативних функцій при різних значеннях параметра  $p$  приведені в таблиці 1.

Таблиця 1

| Значення параметру $p$        | Значення $M$   | Відносна похибка, $\Delta M$ , % | Відносна похибка, $\Delta \varphi$ , % |
|-------------------------------|----------------|----------------------------------|----------------------------------------|
| -0,50                         | 193,928        | 1,166                            | 3,950                                  |
| -0,375                        | 194,417        | 0,916                            | 3,449                                  |
| -0,25                         | 195,113        | 0,562                            | 2,559                                  |
| -0,20                         | 195,448        | 0,391                            | 1,989                                  |
| -0,125                        | 195,881        | 0,170                            | 0,704                                  |
| -0,105                        | <b>195,917</b> | <b>0,152</b>                     | 0,461                                  |
| -0,10                         | 195,914        | 0,153                            | 0,439                                  |
| Стандартний<br>-1/12=-0,08(3) | 195,855        | 0,183                            | 0,409                                  |
| -0,075                        | 195,789        | 0,217                            | 0,586                                  |
| -0,05                         | 195,362        | 0,435                            | 1,371                                  |
| -0,025                        | 194,377        | 0,937                            | 2,168                                  |
| 0                             | 192,423        | 1,933                            | 2,722                                  |
| 0,025                         | 189,091        | 3,631                            | 2,433                                  |
| 0,04                          | 186,540        | 4,931                            | 1,521                                  |
| 0,05                          | 184,819        | 5,808                            | 0,568                                  |
| 1/18=0,0(5)                   | 183,924        | 6,264                            | <b>0,110</b>                           |
| 0,065                         | 182,591        | 6,943                            | 1,219                                  |
| 0,075                         | 181,519        | 7,490                            | 2,485                                  |
| 0,10                          | 180,415        | 8,052                            | 5,177                                  |
| 0,125                         | 180,785        | 7,864                            | 6,808                                  |
| 0,25                          | 184,974        | 5,729                            | 8,062                                  |
| 0,375                         | 187,210        | 4,589                            | 7,571                                  |
| 0,50                          | 188,393        | 3,986                            | 7,180                                  |

На рис. 10 показана залежність відносної похибки при розрахунку крутного моменту  $M$  і функції напружень  $\varphi$  від параметра  $p$ . За графіком функції напружень (круглі точки на рис.10) видно, що при зміні параметра  $p \in [-0,5; 0,5]$  мінімум досягається двічі: при  $p = -1/12$ , що відповідає стандартному базису ССЕ-8 [10], і при  $p = 1/18$  (цьому базису відповідає матриця жорсткості з мінімальним слідом [13]). Розв'язок, отриманий при  $p = 1/18$ , в чотири рази точніше.

Для відносної похибки при обчисленні крутного моменту (крива, показана хрестиками на рис. 10) при зміні параметра  $p \in [-0,5; 0,5]$  мінімум досягається один раз: при  $p = -21/200 = -0,105$ . Стандартний базис дає рішення такого ж порядку точності.

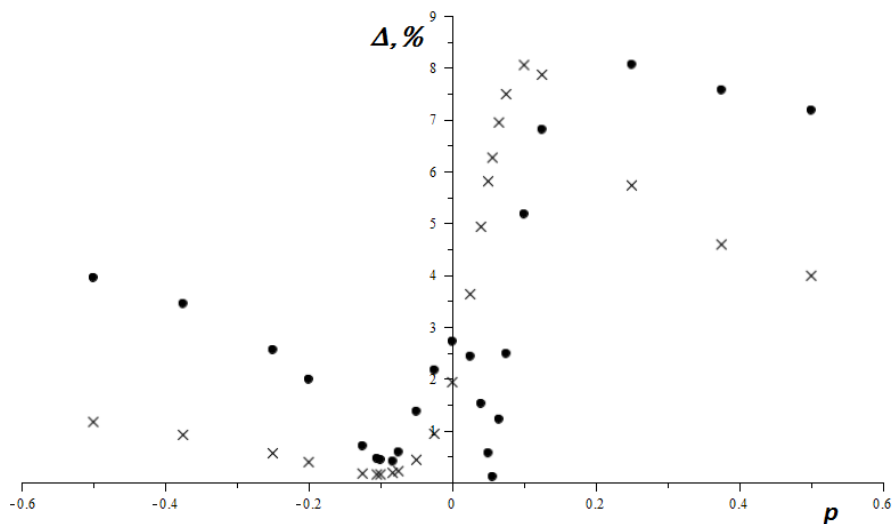


Рис. 10. Залежності похибки обчислень функції напружень і крутного моменту від параметра  $\rho$

Монотонне зростання відносної похибки крутного моменту в інтервалі від -0,1 до 0,1 бентежить, оскільки автори сподівалися виявити в цьому інтервалі другий мінімум. Причину такої поведінки похибки поки встановити не вдалося.

**Висновки.** В роботі представлено альтернативні моделі для біквадратичного та бікубічного скінченного елементів серендипової сім'ї та доведено, що в задачі кручення стержня квадратного перерізу методом скінченних елементів нові альтернативні моделі біквадратичного скінченного елемента дозволяють отримати більшу точність у порівнянні з відомим стандартним базисом цього елемента. Альтернативні базиси ССЕ-8 мають перевагу і перед традиційною процедурою триангуляції в МСЕ, тому що для отримання зазначеної точності необхідно використовувати більше трикутних скінченних елементів. Крім того, на відміну від трикутних СЕ альтернативні серендипові моделі дозволяють отримати дотичні напруження як функції координат.

### СПИСОК ДЖЕРЕЛ

- [1] Timoshenko S. P. (1972) Kurs teorii uprugosti. K. : Naukova dumka. (in Russian)
- [2] Zenkevich O. (1975) Metod konechnykh elementov v tehnikе. M. : Mir. (in Russian)
- [3] Taylor R. L. (1972) On the completeness of shape functions for finite element analysis. *Internat. J. Numer. Methods Eng.* V.4. № 1. (pp. 17-22).
- [4] Wachspress E.I. (1975) A rational finite element basis. Academic Press. New York.
- [5] Homchenko A.N. (1982) O veroyatnostnom postroenii bazisnykh funktsiy MKE. Ivano-Frankovs. in-t nefti i gaza. Ivano-Frankovsk, Dep. v VINITI 21.10.1982, 5264. (in Russian)
- [6] Homchenko A.N., Litvinenko E.I., Guchek P.I. (1996) Geometriya serendipoviykh approksimatsiy. *Prikl. geom. i inzh. grafika.* K. : BudIvelnik. Vyp. 59. (pp. 40-42). (in Russian)
- [7] Popov B.A., Tesler G.S. (1980) Priblizhenie funktsiy dlya tehnicheskikh prilozheniy. Kiev : Naukova dumka.. (in Russian)
- [8] Homchenko A.N., Litvinenko E.I., Astionenko I.A. (2009) Novyy podhod k postroeniyu bazisov serendipoviykh elementov. *Geometrichne ta komp'yuterne modelyuvannya.* Vyp. 23. (pp. 90-95). (in Russian)
- [9] Astionenko I.A. Guchek P.I., Litvinenko E.I., Homchenko A.N. (2010) Mnogoparametricheskie serendipoviy elementy v 2D. *Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnicheskogo universiteta.* Herson. Vol.3(39). (pp. 40-47). (in Russian)
- [10] Segerlind L. (1979) Primenenie metoda konechnykh elementov. M. : Mir. (in Russian)
- [11] Ilin V.P., Karpov V.P., Maslennikov A.M. (1990) Chislennyye metody resheniya zadach stroitelnoy mehaniki. Minsk : Vyisheyshaya shkola. (in Russian)

- [12] Astionenko I. A. Litvinenko E.I., Homchenko A.N. (2009) Obratnyie zadachi serendipovyyih approksimatsiy. Vestnik Hersonskogo natsionalnogo tehnikeskogo universiteta. Herson : HNTU. Vyp. 35. (pp. 36-42). (in Russian)
- [13] Sekulovich M. (1993) Metod konechnykh elementov. M. : Stroyizdat. (in Russian)

Petro Guchek, Olena Litvinenko, Igor Astionenko, Oleg Dudchenko, Svetlana Karpova  
**Alternative models of finite-element approximation for ship structures calculation**

**Abstract.** *The most effective numerical method of engineering analysis, which allows the best way to estimate the stress-strain state of a structure of any shape and size, is the finite element method. The paper presents alternative models for biquadratic and bicubic finite elements of the serendipity family and tests the obtained alternative models using the problem of torsion of a rod of non-circular cross-section and comparison of the obtained results with the exact solution.*

*Keywords:* finite element method, serendipity finite elements, form functions

**Аннотация.** *Наиболее эффективным численным методом инженерного анализа, позволяющий наилучшим образом оценить напряженно-деформированное состояние конструкции любой формы и размера, является метод конечных элементов. В работе представлены альтернативные модели для биквадратичного и бикубического конечного элементов серендипового семейства и проведено тестирование полученных альтернативных моделей с помощью задания о кручение стержня некругового сечения и сравнение полученных результатов с точным решением.*

**Ключевые слова:** *метод конечных элементов, серендиповые конечные элементы, функции формы.*