

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

В. Г. РОГОВ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до вивчення курсу
"ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ"

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв • НУК • 2018

УДК 519.86(076)

Р 59

Автор В. Г. Рогов, викладач

Рецензент С. М. Марущак, канд. екон. наук, доцент

Рекомендовано Методичною радою НУК

Рогов В. Г.

Р 59 Методичні вказівки до вивчення курсу "Оптимізаційні методи та моделі" / В. Г. Рогов. – Миколаїв : НУК, 2018. – 58 с.

Вміщено основні питання щодо організації самостійної роботи студентів з дисципліни "Оптимізаційні методи та моделі".

Призначено для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей "Економіка", "Підприємництво, торгівля та біржова діяльність", "Фінанси, банківська справа та страхування", "Облік та оподаткування". Можуть бути використані студентами інших спеціальностей, а також у системі перепідготовки та підвищення кваліфікації.

УДК 519.86(076)

© Рогов В. Г., 2018

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

ВСТУП

Сьогодні значна частина існуючої літератури з економіко-математичного моделювання або застаріла і не враховує розвиток інформаційних технологій, або використовує занадто складний понятійний апарат. Тому дані методичні вказівки автор намагався зробити якомога доступнішими для сприйняття студентами, не забуваючи при цьому наводити приклади розв'язування економіко-математичних задач за допомогою комп'ютера.

Видання структурно виконано згідно з навчальною програмою дисципліни "Оптимізаційні методи та моделі", містить основні теоретичні положення курсу та приклади розв'язування задач. Розраховано на студентів економічних спеціальностей "Економіка", "Підприємництво, торгівля та біржова діяльність", "Фінанси, банківська справа та страхування", "Облік та оподаткування" освітньо-кваліфікаційного рівня "бакалавр".

Перша частина курсу присвячена побудові лінійних оптимізаційних моделей, друга – нелінійним оптимізаційним моделям і прийняттю економічних рішень в умовах невизначеності та ризику.

Змістовий модуль 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МЕТОДІВ І МОДЕЛЕЙ. ЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ

Тема 1. Предмет, особливості та сфери застосування оптимізаційних моделей в економіці. Класифікація оптимізаційних методів та моделей

На практиці часто трапляються ситуації, коли потрібно прийняти економічне рішення, найкраще з точки зору певного критерію в умовах жорстких обмежень. Такі задачі називаються *оптимізаційними*. Метою їх є знайти такі значення змінних, щоб цільова функція набувала оптимального (максимального чи мінімального) значення.

Об'єкт вивчення дисципліни "Оптимізаційні методи та моделі" – економічні системи. Характерними властивостями економічних систем є цілісність, емерджентність, динамічність, невизначеність щодо розвитку економічних процесів, активна реакція на появу нових чинників.

Розділ математики, що присвячений теорії та методам розв'язування задач оптимізації, називається *математичним програмуванням*.

Задачі математичного програмування поділяють на лінійні та нелінійні. У задачах *лінійного* програмування цільова функція та обмеження є лінійними функціями. У задачах *нелінійного* програмування або цільова функція, або обмеження, або те й інше нелінійні.

Також розрізняють дискретні та неперервні задачі математичного програмування. *Дискретними* є задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають значення, обмеженого певною умовою. Наприклад, вони можуть приймати лише цілі значення – у цьому випадку маємо задачу цілочислового програмування. Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в інтервалах числової осі, то задача є *неперервною*.

Окрім того, оптимізаційні задачі бувають детерміновані та стохастичні. *Детермінованими* є задачі, які не містять випадкових змінних і параметрів, що набувають значень згідно функції розподілу. В стохастичних задачах змінні, цільова функція або обмеження випадкові.

Дослідники В.С. Григорків та М.В. Григорків наводять наступну класифікацію оптимізаційних задач (моделей) залежно від таких критеріїв:

1) за кількістю керованих (шуканих) змінних:
одновимірні задачі оптимізації, якщо x – скалярна змінна ($n = 1$);

багатовимірні задачі оптимізації, якщо x – n -вимірний вектор ($n > 1$);

2) за наявністю обмежень:
задачі безумовної оптимізації, якщо множина допустимих розв'язків $X = R^n$ ($n \geq 1$) збігається з відкритою областю існування функції і не має ніяких додаткових обмежень;

– задачі умовної оптимізації, якщо допустима множина $X \subset R^n$, тобто є власною підмножиною простору R^n ($n \geq 1$), яка задається прямими або функціональними обмеженнями у формі рівностей або нерівностей, кількість і вигляд яких залежить від конкретної задачі;

3) за характером обмежень:

- задачі умовної оптимізації з прямим обмеженням;
- задачі умовної оптимізації з обмеженнями-рівностями;
- задачі умовної оптимізації з обмеженнями-нерівностями;

– задачі умовної оптимізації зі змішаними обмеженнями (типу рівності та нерівності);

– загальні задачі умовної оптимізації (із прямим обмеженням і обмеженнями-рівностями та обмеженнями-нерівностями);

4) за типом критерію оптимізації та обмежень:

- задачі лінійного програмування;
- задачі нелінійного програмування;
- задачі цілочислового програмування, якщо всі або деякі змінні задовольняють умову цілочисельності;

– задачі дробово-лінійного програмування, якщо цільова функція – відношення двох лінійних функцій, а обмеження містить лінійні функції;

– задачі опуклого програмування, якщо цільова функція та допустима множина опуклі;

– задачі квадратичного програмування, якщо цільова функція є квадратичною, а функції обмежень – лійними;

– задачі сепарабельного програмування, якщо цільова функція і функції обмежень є лійними комбінаціями функцій однієї змінної, тобто сепарабельними;

– задачі геометричного програмування, якщо цільова функція і функції обмежень є поліномами;

– задачі параметричного програмування, якщо цільова функція або коефіцієнти системи обмежень залежать від деяких параметрів;

– задачі стохастичного програмування;

– задачі динамічного програмування, якщо вони є багатоетапними задачами оптимізації;

5) за кількістю екстремальних точок:

– однокстремальні задачі оптимізації, якщо цільова функція має в області допустимих значень єдиний екстремум;

– багатокстремальні задачі оптимізації, якщо цільова функція має в області допустимих значень більше одного екстремуму.

Методи оптимізації можуть бути *точними* (знаходження точних розв'язків) і *наближеними* (знаходження наближених розв'язків). Обидва зазначені типи методів поділяються на аналітичні, числові та графічні. Наприклад, якщо розв'язком задачі є функція, то вона може бути знайдена у вигляді точної чи наближеної аналітичної залежності, таблиці числових значень або графіка.

Числові методи поділяються на скінченні та ітераційні. *Скінченні* методи передбачають знаходження розв'язку задачі за скінченну кількість кроків (ітерацій), наприклад, симплекс-метод. Ітераційні методи (алгоритми) дозволяють будувати нескінченну послідовність точок у відповідному точковому просторі, яка збігається з шуканим розв'язком.

Прямі методи (нульового порядку) не використовують похідні від функцій, а непрямі – застосовують їх. Серед непрямих методів розрізняють *методи першого порядку* (градієнтні), які використовують перші похідні, та *методи другого порядку* (методи Ньютонa), що передбачають застосування других похідних.

Починати розв'язування оптимізаційних задач слід із побудови економіко-математичної моделі.

Приклад 1.1

Підприємство виготовляє деталі, які мають пройти послідовну обробку на трьох верстатах. Час використання першого верстата – 6 год, другого – 8 год, третього – 10 год. Тривалість обробки деталей наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Тривалість обробки деталей на верстатах, хв

Деталь	Верстат		
	1	2	3
<i>A</i>	20	8	12
<i>B</i>	15	18	14

Прибуток від реалізації однієї деталі кожного виду становить відповідно 30 та 40 ум. од. Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують прибуток підприємства. Записати економіко-математичну модель.

Розв'язання

По-перше, треба визначити, що брати за невідомі. Шуканими величинами у цій задачі є оптимальні обсяги виробництва деталей *A* та *B*. Позначаємо їх x_1 та x_2 . За умовою потрібно максимізувати загальний прибуток, який визначається як добуток прибутку від реалізації однієї деталі на кількість деталей. Тому цільова функція (загальний прибуток, який прямує до максимуму) знаходиться за формулою

$$30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max.$$

Можливі обсяги виробництва деталей обмежуються максимальним часом роботи верстатів. Перший верстат використовується $20x_1 + 15x_2$ хв, але не більше 6 год (360 хв). Таким чином, $20x_1 + 15x_2 \leq 360$.

Аналогічно знаходимо обмеження за другим та третім верстатами:

$$8x_1 + 18x_2 \leq 480;$$

$$12x_1 + 14x_2 \leq 600.$$

Обсяги виробництва деталей не можуть бути від'ємними, тому $x_1 \geq 0$ та $x_2 \geq 0$.

Отже, економіко-математична модель задачі матиме вигляд

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 \leq 360, \\ 8x_1 + 18x_2 \leq 480, \\ 12x_1 + 14x_2 \leq 600, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Отриману модель можна розв'язати за допомогою пошуку розв'язку в Excel, симплекс-методом або графічно.

Зустрічаються також оптимізаційні задачі, коли цільова функція прямує до мінімуму. Наприклад, потрібно знайти мінімальну собівартість продукції, визначити найменшу вартість перевезення тощо.

Питання для самостійного вивчення

- Задача визначення оптимального розподілу виробничих потужностей;
- задача про розкрій;
- задача про дієту;
- задача про призначення;
- задача комівояжера;
- задача оптимального розподілу капіталовкладень.

Тема 2. Загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язування

Якщо цільова функція та обмеження оптимізаційної задачі містять змінні в першому або нульовому степені, то вона називається *лінійною*, або *задачею лінійного програмування* (ЗЛП):

$$\begin{cases} Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min), \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{\leq, \geq, =\} b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{\leq, \geq, =\} b_m. \end{cases}$$

Задачу лінійного програмування можна представити у канонічній формі, коли обмеження є рівностями, а всі $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Приклад 2.1

Записати в канонічній формі задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 15, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -90, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 160, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язання

Перше обмеження вже має вигляд рівняння, тому його залишаємо. У другого права частина (-90) від'ємна ($b_i \leq 0$), відповідно, цю нерівність множимо на (-1) . У результаті всі коефіцієнти і знак нерівності змінюються на протилежні

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 90.$$

Тепер потрібно перетворити його на рівняння. Оскільки є знак нерівності ($\leq$), то додаємо до лівої частини додаткову змінну $x_4 \geq 0$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 90.$$

У третього обмеження знак (≥ 0), тому від нього додаткову змінну $x_5 \geq 0$ треба відняти

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_5 = 160.$$

Отже, ЗЛП прийме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 15, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 90, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_5 = 160. \end{cases} \end{aligned}$$

Будь-яку задачу лінійного програмування можна розв'язати за допомогою надбудови "Поиск решения" в Excel, симплекс-методом, а якщо кількість невідомих дорівнює двом (задача є двовимірною), то ще й графічним методом.

Приклад 2.2

Розв'язати ЗЛП, використовуючи Excel.

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Розв'язання

Підготуємо в Excel наступну форму (рис. 2.1), заповнивши її нашими даними.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Змінні						
2	Ім'я	X1	X2	X3	X4			
3	Значення							
4	Нижня межа	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значення	Напрямок	
6	Коеф. ЦФ	8	10	0	-5		max	
7								
8		Обмеження						
9		2	3	4	2	<=		450
10		3	2	1	2	<=		380

Рис. 2.1

Комірки B3:E3 залишаємо порожніми, це значення змінних, їх потім підрахує комп'ютер. У F6 вставляємо формулу =СУММПРОИЗВ(B3:E3;B6:E6). Це значення цільової функції, яка прямує до максимуму. У F9 вводимо =СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$E\$3;B9:E9). Натискаємо на нижній правий кут цієї комірки і тягнемо мишу до себе, не відпускаючи її ліву кнопку, заповнивши комірку F10.

У меню зверху обираємо "Данные → Поиск решения". Якщо надбудову "Поиск решения" не вдається знайти, її можна

встановити, натиснувши "Настройка панели быстрого доступа → Надстройки → Поиск решения → Перейти". Заповнюємо діалогове вікно пошуку розв'язку (рис. 2.2).

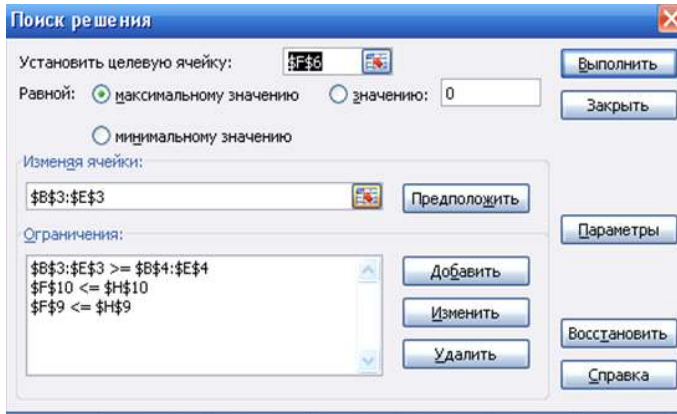


Рис. 2.2

Коли заповнюємо обмеження, не забуваємо, що масив обов'язково порівнюється з масивом ($\$B\$3:\$E\$3 \geq \$B\$4:\$E\4), а комірка з коміркою ($\$F\$9 \leq \$H\9). Натискаємо "Выполнить" (рис. 2.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Змінні						
2	Ім'я	X1	X2	X3	X4			
3	Значення	48	118	0	0			
4	Нижня межа	0	0	0	0	ЦФ		
5						Значення	Напрямок	
6	Коеф. ЦФ	8	10	0	-5	1564	max	
7								
8		Обмеження						
9		2	3	4	2	450 <=		450
10		3	2	1	2	380 <=		380

Рис. 2.3

Як бачимо, оптимальний план: $x_1 = 48$, $x_2 = 118$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, що забезпечує максимальне значення цільової функції $Z = 1564$.

Приклад 2.3

Розв'язати ЗЛП графічним методом:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 - x_2 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

Побудуємо графіки кожної прямої і позначимо штриховою півплощини, задані нерівностями (рис. 2.4).

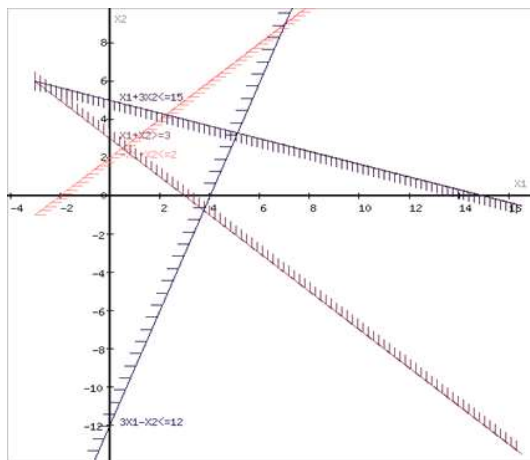


Рис. 2.4

Визначимо область допустимих значень (багатокутник $ABEDC$). Прирівняємо цільову функцію задачі до $(2x_1 + 3x_2 = 0)$ і побудуємо графік цієї прямої. Так як цільова функція прямує до мінімуму, будемо рухати пряму $(x_1 + 3x_2 = 0)$ паралельно, до першого дотику з багатокутником $ABEDC$ (рис. 2.5, точка C).

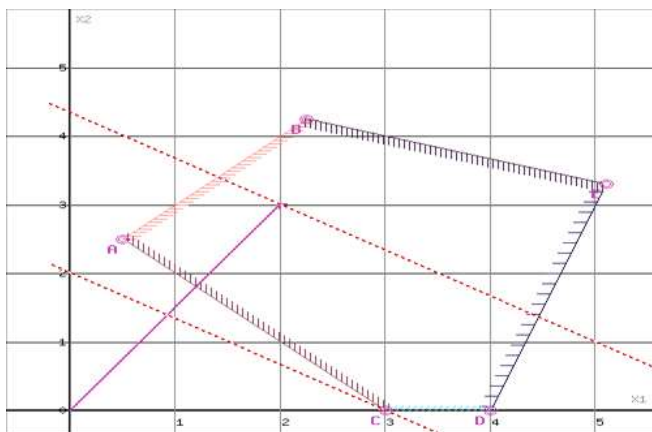


Рис. 2.5

Оскільки точка C отримана в результаті перетину прямих $(x_2 = 0)$ та $(x_1 + x_2 \geq 3)$, розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Отримаємо розв'язки

$$x_1 = 3; x_2 = 0$$

Мінімальне значення цільової функції

$$Z = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6.$$

Приклад 2.4

Розв'язати ЗЛП симплекс-методом

$$Z = -x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Для побудови першого опорного плану приведемо систему обмежень до канонічного вигляду шляхом введення додаткових змінних

$$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 2, \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 8. \end{cases}$$

Перший опорний план задачі

$$x_0 = (0; 0; 0; 2; 8).$$

Для цього початкового плану значення цільової функції дорівнює

$$Z_0 = -1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 8 = 0.$$

Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Застосування симплекс-методу – перша ітерація

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	-1	-1	3	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	0	2	1	-1	1	1	0	2
x_5	0	8	2	1	3	0	1	$2 \frac{2}{3}$
$Z_j - C_j \geq 0$		0	1	1	-3	0	0	-

Поточний опорний план неоптимальний, оскільки в індексному рядку знаходиться від'ємне значення (-3) . У ролі розв'язувального обираємо стовпчик, що відповідає змінній x_3 .

Визначимо симплексні відношення θ , поділивши кожен елемент стовпчика "План" на відповідне значення розв'язувального стовпчика (враховуються тільки додатні значення розв'язувального стовпчика). Серед них обираємо найменше (2). Таким чином, перший рядок буде розв'язувальним (напрямним). Розв'язувальний елемент (1) знаходиться на перетині розв'язувальних стовпчика та рядка. Змінну x_4 виключаємо з базису. Замість неї вводимо x_3 .

Треба зробити так, щоб на місці розв'язувального елемента стояла одиниця, а замість усіх інших значень розв'язувального стовпчика були нулі. Для цього здійснюємо перетворення за методом Жордана–Гаусса. Ділимо всі елементи напрямного рядка на значення розв'язувального елемента. Записуємо отримані значення в нову симплекс-таблицю. Від усіх інших елементів старої симплекс-таблиці віднімаємо відповідні значення тільки що отриманого рядка, помножені на елементи розв'язувального стовпчика (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Застосування симплекс-методу – друга ітерація

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	-1	-1	3	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	3	2	1	-1	1	1	0	–
x_5	0	2	-1	4	0	-3	1	$\frac{1}{2}$
$Z_j - C_j \geq 0$		6	4	-2	0	3	0	–

Поточний опорний план неоптимальний, оскільки в індексному рядку знаходиться від'ємне значення (-2) . У ролі розв'язувального обираємо стовпчик, що відповідає змінній x_2 .

Визначимо симплексні відношення θ . Оскільки у першому рядку міститься від'ємний елемент, рахувати для нього симплексне відношення не будемо. Для другого рядка, який буде розв'язувальним, симплексне відношення дорівнює $\frac{2}{4}$, тобто $\frac{1}{2}$.

Ділимо всі елементи другого рядка на 4. Від першого старого рядка віднімаємо другий новий, помножений на (-1) . Отримаємо нову симплекс-таблицю (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Застосування симплекс-методу – третя ітерація

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	-1	-1	3	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	3	$2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_2	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$Z_j - C_j \geq 0$		7	$3\frac{1}{2}$	0	0	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Оскільки індексний рядок не містить від'ємних елементів, знайдений оптимальний план:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 2\frac{1}{2}, x_4 = 0, x_5 = 0.$$

Питання для самостійного вивчення

- загальна та векторно-матрична форми ЗЛП;
- розв'язування ЗЛП симплекс-методом із штучними змінними (M).

Тема 3. Теорія двоїстості та двоїсті оцінки в аналізі розв'язків лінійних оптимізаційних моделей. Аналіз лінійних моделей економічних задач

До кожної задачі лінійного програмування можна скласти двоїсту. Значення цільових функцій прямої та двоїстої задачі обов'язково збігаються, однак вони протилежно направлені (перша теорема двоїстості).

Спочатку треба перевірити, що пряма задача приведена до стандартного вигляду. Якщо цільова функція прямої задачі прямує до максимуму, потрібно, щоб усі обмеження мали знаки " $\leq$ " або " $=$ ", а якщо до мінімуму, то " $\geq$ " або " $=$ ". Інакше необхідно помножити відповідне обмеження на (-1) .

Якщо пряма ЗЛП має вигляд

[illegible]

то двоїстою до неї буде

[illegible]

Приклад 3.1

Скласти двоїсту до задачі лінійного програмування

$$Z = 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

Помножимо другу нерівність на (-1) , щоб звести задачу до стандартного вигляду. Для зручності можна написати цільову функцію після системи обмежень. Стовпчики прямої задачі стануть рядками двоїстої, а рядки – стовпчиками. Знаки нерівностей в обмеженнях зміняться на протилежні

$$Z = 6x_1 - 4x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -8. \end{cases}$$

Двоїста задача виглядатиме наступним чином:

$$F = 2y_1 - 8y_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -7y_1 - y_2 \leq 6, \\ y_1 - 2y_2 \leq -4, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Існують симетричні та несиметричні двоїсті пари задач лінійного програмування. У симетричних задачах усі обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть мати лише невід'ємні значення. Якщо хоча б одне

обмеження прямої задачі є рівнянням, пара задач є несиметричною. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі можуть приймати будь-яке значення. Розглянемо економічну інтерпретацію двоїстої задачі.

Приклад 3.2

Підприємство виготовляє чотири види продукції, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3 (табл. 3.1). Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід. Ціна одиниці продукції становить відповідно 7, 4, 2 та 1 ум. од. Записати економіко-математичні моделі прямої та двоїстої задач, симплекс-методом визначити їх оптимальні плани, провести економічний аналіз.

Таблиця 3.1

Норми витрат ресурсів на одиницю продукції та їх запаси

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції, за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	2	2	1	300
2	2	0	1	1	100
3	2	2	1	0	250

Розв'язання

Складемо економіко-математичну модель прямої задачі

$$Z = 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 300, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \leq 100, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 250, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}$$

Остання симплекс-таблиця прямої задачі має наступний вигляд (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Застосування симплекс-методу – остання ітерація

Базис	$C_{\text{баз}}$	План	7	4	2	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	4	75	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0
x_1	7	50	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
x_7	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1
$Z_j - C_j \geq 0$		650	0	0	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0

Отже, підприємству доцільно виготовляти 50 од. продукції А та 75 од. продукції В, що забезпечить дохід 650 ум. од.

Економіко-математична модель двоїстої задачі наступна:

$$F = 300y_1 + 100y_2 + 250y_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 7, \\ 2y_1 + 2y_3 \geq 4, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ y_1 + y_2 \geq 1. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Змінна y_1 двоїстої задачі пов'язана з x_5 прямої, y_2 – з x_6 , y_3 – з x_7 .

Таким чином, оптимальний план двоїстої задачі

$$y_1 = 2, \quad y_2 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = 0.$$

Третя сировина не повністю використовується у виробництві, тому є недефіцитною.

Оптимальні значення цільових функцій прямої та двоїстої задач однакові, тому мінімальна вартість ресурсів, що використовуються для виробництва продукції становить 650 ум. од.

Питання для самостійного вивчення

- двоїсті оцінки і дефіцитність ресурсів;
- інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

Тема 4. Транспортна задача. Цілочислові задачі лінійного програмування. Задачі дробово-лінійного програмування

Особливим видом задач лінійного програмування є транспортна задача (ТЗ). Класична *транспортна задача* передбачає визначення плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів, щоб витрати на транспортування були мінімальними.

Якщо в транспортній задачі сумарні пропозиція та попит збігаються, то її називають *збалансованою* (закритою). Інакше задача є *незбалансованою* (відкритою), і її необхідно збалансувати. Якщо пропозиція більше ніж попит, то потрібно ввести фіктивного споживача, а у разі перевищення попиту над пропозицією – фіктивного виробника.

Приклад 4.1

Підприємство має три філії A1, A2, A3, які можуть виготовляти відповідно 30, 20 та 15 тис. од. продукції на місяць. Укладено договори з чотирма замовниками B1, B2, B3, B4 на поставку продукції в кількості відповідно 10, 20, 25 та 30 тис. од. Витрати на виробництво та транспортування тисячі одиниць продукції замовникам із кожної філії наведено в табл. 4.1. Визначити оптимальний план перевезення продукції до замовників, щоб загальна вартість виробництва і транспортування була мінімальною.

Таблиця 4.1

Витрати на виробництво та транспортування

Філії	Замовники			
	B1	B2	B3	B4
A1	4	5	3	7
A2	7	6	2	5
A3	2	3	9	8

Розв'язання

Задача є незбалансованою, оскільки сумарний попит становить 75 тис. од., а загальна пропозиція – 65 тис. од. Тому потрібне введення додаткового фіктивного виробника (A4) з пропозицією 10 тис. од. продукції (75–65). Вважаємо, що вартість виробництва і транспортування від нього до кожного замовника дорівнює 0.

Виконуємо в Excel таблицю з умови задачі, додаємо підприємство A4. У рядок знизу вводимо значення попиту кожного замовника, у стовпчик справа – пропозиції філій (рис. 4.1). Оскільки маємо 4 виробники та 4 замовники, виділяємо нижче масив 4×4 (B11:E14), який буде містити оптимальний план задачі.

У комірку B15 вставляємо формулу =СУММ(B11:B14) і протягуємо її до E15. У F11 вводимо =СУММ(B11:E11) і продовжуємо до F14.

Комірка F15 буде містити цільову функцію, вводимо в неї формулу =СУММПРОИЗВ(B4:E7;B11:E14).

	A	B	C	D	E	F
1		Вартість виробництва і транспортування				
2		1000 од. продукції за замовниками				
3	Філії	B1	B2	B3	B4	
4	A1	4	5	3	7	30
5	A2	7	6	2	5	20
6	A3	2	3	9	8	15
7	A4	0	0	0	0	10
8		10	20	25	20	
9						
10		B1	B2	B3	B4	
11	A1					0
12	A2					0
13	A3					0
14	A4					0
15		=СУММ(B11:B14)			0	0

Рис. 4.1

Обираємо в меню "Данные → Поиск решения". Встановлюємо цільову комірку $\$F\15 , що прямує до мінімуму. Вводимо обмеження $\$B\$11:\$E\$14 \geq 0$; $\$B\$15:\$E\$15 = \$B\$8:\$E\8 ; $\$F\$11:\$F\$14 = \$F\$4:\$F\7 (рис. 4.2). Натискаємо "Выполнить" (рис. 4.3).

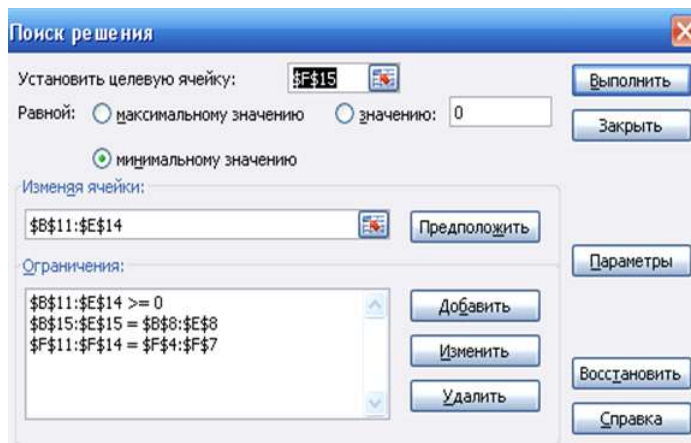


Рис. 4.2

	A	B	C	D	E	F
1		Вартість виробництва і транспортування				
2		1000 од. продукції за замовниками				
3	Філії	B1	B2	B3	B4	
4	A1	4	5	3	7	30
5	A2	7	6	2	5	20
6	A3	2	3	9	8	15
7	A4	0	0	0	0	10
8		10	20	25	20	
9						
10		B1	B2	B3	B4	
11	A1	10	5	15	0	30
12	A2	0	0	10	10	20
13	A3	0	15	0	0	15
14	A4	0	0	0	10	10
15		10	20	25	20	225

Рис. 4.3

Як бачимо, філія А1 має продати 10 тис. од. продукції замовнику В1, 5 тис. – В2 і 15 тис. – В3. Філія А2 постачатиме по 10 тис. од. продукції підприємствам В3 та В4, а А3 – 15 тис. од. підприємству В2. Частина попиту замовника В4 (10 тис. од.) залишиться незадоволеною.

Розглянуту модель можна буде застосовувати для розв'язання інших задач, наприклад, розподілу робіт між працівниками, оптимального розміщення сільськогосподарських культур тощо. При цьому цільова функція може прямувати до максимуму.

Серед задач лінійного програмування часто зустрічаються такі, де одна або кілька змінних можуть приймати лише цілі значення. Якщо цілих значень набувають не всі змінні, а тільки деякі, задача є частково цілочисловою. Існують також задачі цілочислового програмування, де змінні можуть дорівнювати лише 0 або 1 (бульові, або бінарні).

Задачі цілочислового програмування легко розв'язуються за допомогою Excel. Для цього потрібно в надбудові "поиск решения" створити додаткове обмеження, виділити потрібні комірки або масив і обрати знак "целое", а у разі наявності булевих змінних – використати знак "двоич" (рис. 4.4).

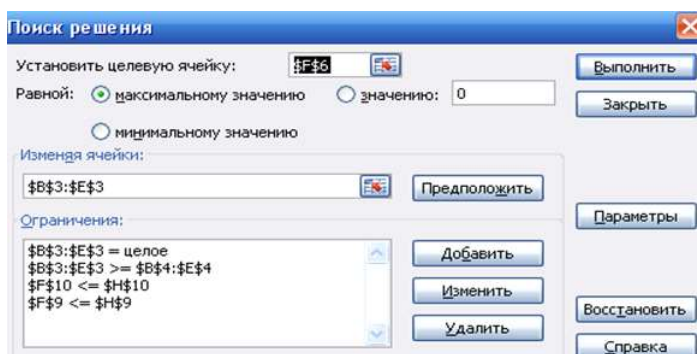


Рис. 4.4

Розв'язуючи економічні задачі, часто як критерії оптимальності беруть рівень рентабельності, продуктивність праці тощо. Ці показники математично виражаються дробово-лінійними функціями. Загальну економіко-математичну модель у цьому разі записують так (розглянемо задачу визначення оптимальних обсягів виробництва продукції): позначимо через c_j прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції, тоді загальний прибуток можна виразити формулою:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j;$$

якщо d_j – витрати на виробництво одиниці j -го виду про-

дукції, то $\sum_{j=1}^n d_j x_j$ – загальні витрати на виробництво. У разі

максимізації рівня рентабельності виробництва цільова функція має вигляд

$$\max Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j},$$

за умов виконання обмежень щодо використання ресурсів

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} \overline{b_i} (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n}).$$

Передбачається, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

Позначимо

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = y_0,$$

і введемо заміну змінних $y_j = y_0 x_j$ ($j = \overline{1, n}$). Тоді цільова функція матиме вигляд

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^n c_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \sum_{j=1}^n c_j x_j y_0 = \sum_{j=1}^n c_j y_j.$$

Отримали цільову функцію, що виражена лінійною залежністю.

Оскільки $y_j = y_0 x_j$ ($j = \overline{1, n}$), то звідси маємо: $x_j = \frac{y_j}{y_0}$.

Підставимо виражені через нові змінні значення x_j в систему обмежень:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i &\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = \overline{1, m}). \end{aligned}$$

Крім того, з початкової умови

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = y_0 \Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^n d_j x_j}{1} =$$

$$= \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j=1}^n d_j x_j y_0 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n d_j y_j = 1.$$

Умова стосовно невід'ємності змінних набуває вигляду

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_0 \geq 0.$$

Виконані перетворення приводять до такої моделі задачі:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j y_j,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \\ \sum_{j=1}^n d_j y_j = 1. \end{cases}$$

$$y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_0 \geq 0.$$

У результаті отримується звичайна задача лінійного програмування, яку можна розв'язувати симплексним методом.

Питання для самостійного вивчення

- метод потенціалів;
- метод північно-західного кута;
- метод мінімальної вартості;
- метод апроксимації Фогеля;
- метод подвійної переваги,
- метод "гілок і меж".

Змістовий модуль 2

НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ. ПРИЙНЯТТЯ ЕКОНОМІЧНИХ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Тема 5. Задачі нелінійного програмування. Задачі динамічного програмування

Якщо цільова функція або обмеження задачі математичного програмування містить змінні в степені 2 чи більше, то маємо справу із *задачею нелінійного програмування*.

Задачі нелінійного програмування можна розв'язати за допомогою пошуку рішення в Excel, однак необхідно враховувати, що вони можуть містити більше одного розв'язку, тоді як пошук розв'язку показує лише один з них.

Для вирішення задач нелінійного програмування з обмеженнями у вигляді рівнянь можна застосовувати метод множників Лагранжа.

Приклад 5.1

Для виготовлення квасу, попит на який становить 250 пляшок на день, можна використовувати дві виробничі лінії. Витрати при використанні першої лінії становлять $5x_1 + 2x_1^2$ грн,

другої $-7x_2 + x_2^2$ грн. Визначити, скільки пляшок квасу необхідно виготовляти на кожній виробничій лінії, щоб сукупні витрати були мінімальними.

Розв'язання

Економіко-математичну модель задачі можна представити у наступному вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 250, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

Складемо функцію Лагранжа, де λ – невизначений множник Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 5x_1 + 2x_1^2 + 7x_2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 250).$$

Знайдемо частинні похідні функції Лагранжа за змінними x_1, x_2 і λ та прирівняємо їх до 0

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \lambda + 4x_1 + 5 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda + 2x_2 + 7 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 250 = 0. \end{cases}$$

Цю систему можна розв'язати методом Крамера або Жордана–Гаусса.

Отримуємо розв'язки: $x_1 \approx 84$; $x_2 \approx 166$; $\lambda \approx -340$.

Отже, на першій лінії доцільно виробляти 84 пляшки квасу, а на другій – 166.

Розв'яжемо цю ж задачу за допомогою Excel (рис. 5.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Змінні						
2	Ім'я	X1	X2	X1^2	X2^2		
3	Значення						
4	Нижня межа	0	0			ЦФ	
5						Значення Напрямок	
6	Коеф. ЦФ	5	7	2	1	0 min	
7							
8	Обмеження						
9		1	1	0 =		250	

Рис. 5.1

Комірка F6 містить формулу =СУММПРОИЗВ(B3:E3;B6:E6). Викликаємо надбудову "поиск решения" (рис. 5.2). Натискаємо "Выполнить" (рис. 5.3).

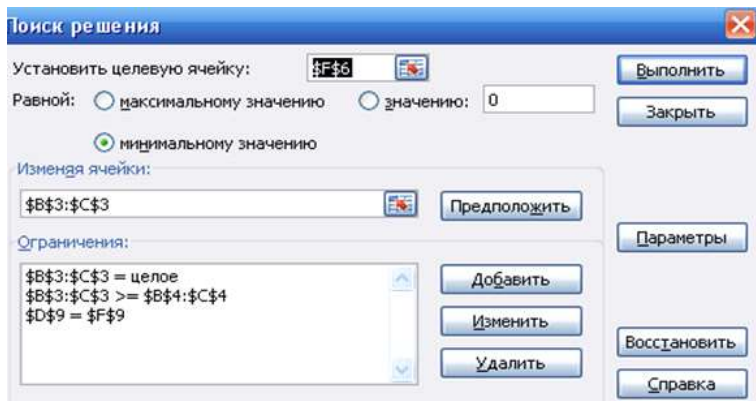


Рис. 5.2

	A	B	C	D	E	F	G
1	Змінні						
2	Ім'я	X1	X2	X1^2	X2^2		
3	Значення	84	166	7056	27556		
4	Нижня межа	0	0			ЦФ	
5						Значення	Напрямок
6	Коеф. ЦФ	5	7	2	1	43250	min
7							
8	Обмеження						
9		1	1	250 =		250	

Рис. 5.3

Як бачимо, розв'язки задачі, знайдені за допомогою різних методів, збігаються.

На відміну від статичних, незалежних від часу моделей, що описують стани об'єктів, *динамічні моделі* описують економічні або управлінські процеси, тобто поведінку систем у русі, динаміці, в залежності від часових періодів, що були, є чи будуть. Динамічні моделі дозволяють прогнозувати розвиток процесу на майбутнє, щоб заздалегідь мати уявлення про його результати і відповідно реагувати на певні наслідки цього розвитку.

Динамічне програмування – багатокроковий процес, кожен крок відповідає поведінці економічної системи у певний часовий період. Кожен поточний i -й крок отримує результати попереднього $(i - 1)$ -го кроку, за певними правилами визначає i -й результат і формує дані для наступного $(i + 1)$ -го кроку.

На відміну від термінів "лінійне програмування", "нелінійне програмування" тощо, які належать до певного типу задач, термін "динамічне програмування" належить до обчислювального методу, а не певного типу задач.

Задачі, для яких можливе застосування методу динамічного програмування (ДП), утворюють певні класи, для яких характерно:

- можливість розбиття початкової задачі на окремі підзадачі, кожна з яких містить меншу кількість змінних;
- однотипність виділених підзадач;
- вимірювання ефекту від ухваленого рішення (на основі розв'язку кожної з підзадач) в однакових одиницях виміру;
- обчислення загального ефекту як суми ефектів окремих підзадач.

Динамічне програмування використовується для розв'язання таких задач: розподіл дефіцитних капітальних вкладень між новими напрямками їх використання; розробка сценаріїв управління попитом чи запасами; розробка принципів календарного планування виробництва і вирівнювання зайнятості в умовах нестабільного попиту на продукцію; складання календарних планів поточного та капітального ремонту устаткування, його заміни; формування послідовності розвитку комерційної операції тощо.

В основі методу ДП лежить принцип оптимальності Белмана:

- оптимальне управління у довільний момент часу (або період часу для дискретного процесу) не залежить від передісторії системи і визначається виключно станом системи у цей момент часу та метою управління;
- яким би не був стан системи перед наступним кроком, управління потрібно здійснювати так, щоб сума ефективності процесу на цьому кроці й оптимальної ефективності процесу на всіх наступних кроках була максимальною.

Нехай процес оптимізації розбитий на n кроків. На кожному кроці потрібно визначити два типи змінних – змінну стану S та змінну управління x . Змінна стану S визначає,

в яких станах може бути система на k -му кроці. Залежно від S на цьому кроці можна використати деякі управління, які характеризуються змінною x . Використання управління x на k -му кроці дає результат $f_k(S, x_k)$ і переводить систему в деякий новий стан $S'(S, x_k)$. Для кожного можливого стану на k -му кроці (з усіх можливих управлінь) обирається таке управління x_k^* , щоб результат, який отримаємо з k -го по n -й крок був оптимальним. Числова характеристика цього результату має назву *функція Беллмана* $F_k(S)$ та залежить від номера кроку k і стану системи S .

На першому етапі знаходять функцію Беллмана й оптимальне управління для всіх можливих станів на кожному кроці, починаючи з першого. Подальші розрахунки проводять згідно з рекурентним співвідношенням, яке пов'язує функцію Беллмана на кожному кроці з тією ж функцією, обчисленою на попередньому кроці. Цей максимум чи мінімум знаходиться за всіма можливими для k і S значеннями управляючої змінної x_k . Після того як функція Беллмана і відповідне оптимальне управління знайдені для всіх кроків з першого до n -го (на першому кроці $k = 1$ стан системи рівний її початковому стану S_0), переходимо до другого етапу, що здійснюється згідно з алгоритмом зворотної прогонки. Знаючи оптимальне управління на n -му кроці x_n , шукаємо оптимальне управління на $(n - 1)$ кроці доти, доки не дійдемо до першого.

Питання для самостійного вивчення

- теорема Куна–Таккера;
- сідлові точки;
- задача заміни обладнання;
- метод прямої та зворотної прогонки.

Тема 6. Моделі та методи стохастичного програмування. Оптимізація за умов невизначеності

Будь-яке економічне рішення має бути прийняте на підставі інформації щодо внутрішніх та зовнішніх чинників, які впливають на ефективність виробництва, збуту та фінансовий стан підприємства. Однак, як правило, така інформація не може бути остаточною, тому що одним із визначальних чинників у економічних задачах є зовнішнє середовище (або природа), яка може знаходитись в одному із станів, невідомих особі, що приймає рішення (ОПР (особа, що приймає рішення), суб'єкт ризику). Така невизначеність породжує різноманітні економічні ризики. Тому боротьба з ризиками дуже часто стає задачею боротьби з невизначеністю. Також до виникнення ризиків призводять конфлікти інтересів економічних суб'єктів.

Існують різні погляди на таку економічну категорію, як ризик. Деякі дослідники розуміють під ним можливість втрат, інші – неможливість отримання бажаних результатів, треті – міру відхилення від сподіваної мети.

Ризику зовсім уникнути не можна, оскільки коли підприємство відмовляється від реалізації проекту, воно стикається з ризиком втрачених можливостей.

Основні чинники, що призводять до ризику (джерела ризику) можна класифікувати за ознакою джерела виникнення. До *зовнішніх чинників* відносяться: зміни законодавства, непередбачувані дії державних органів, нестабільність економічної політики, несподівані зміни кон'юнктури ринку, непередбачувані дії конкурентів, зміни у взаємовідносинах із господарськими партнерами, стихійні лиха, корупція та рекет тощо. Прикладами *внутрішніх чинників* можуть бути: непередбачувані зміни у процесі виробництва (вихід із ладу

техніки тощо), нестача бізнес-інформації на підприємстві, можливі помилки при реалізації ризикових рішень, фінансові проблеми на підприємстві.

Об'єктом ризику є економічна система, на яку впливають зазначені чинники.

Існують такі *методи управління ризиком*, як уникнення, попередження, прийняття, зниження (оптимізація). Зниження ступеня ризику може відбуватися зовнішніми і внутрішніми способами. До *зовнішніх* способів оптимізації ризику відносяться розподіл ризику, зовнішнє страхування, використання деривативів, а до *внутрішніх* – диверсифікація, створення резервів чи запасів, отримання додаткової інформації та лімітування (обмеження грошових чи товарних потоків, спрямованих у зовнішнє по відношенню до підприємства середовище).

Стохастичне програмування являє собою сукупність методів планування розв'язання оптимізаційних завдань із врахуванням випадкового (стохастичного) проходження процесів зміни в часі стану певного елементу системи у відповідності з імовірними закономірностями. Завдання лінійного і деяких інших видів програмування стають завданнями стохастичного програмування, якщо параметри цільової функції та/або системи обмежень розглядаються як випадкові величини. До таких завдань можна віднести проблеми оптимального розподілу ресурсів, транспортна задача, завдання управління запасами тощо. Розв'язання подібних завдань у стохастичній постановці будуть точніше і коректніше відображати економічний характер процесів, що відбуваються, підвищувати надійність досягнення поставленої мети виробництва.

При розв'язанні завдань у стохастичній постановці зазвичай використовують два підходи.

Перший підхід, як більш простий, полягає в знаходженні середнього значення всіх даних випадкових параметрів і зводиться до завдань відповідного програмування. Водночас такий підхід не завжди може виявитися ефективним. Це відбувається тому, що при деяких параметрах (випадкових величинах) може бути прийнято рішення зовсім далеке від оптимального через синергетичні явища чи може привести до ускладнень або навіть відсутності бажаного розв'язку поставленого завдання.

Сутність *другого підходу* полягає в багатоступеневому, поетапному наближенні до бажаного результату. Наприклад, на першому етапі встановлюється попередній оптимальний план при розв'язанні детермінованого завдання на основі максимізації чи мінімізації цільової функції. Далі на другому ступені він коректується згідно з реально встановленими статистичними показниками і параметрами.

Таких ступенів (етапів) може бути декілька: скільки необхідно для досягнення оптимального рішення. Зокрема, таким чином діють при необхідності досягнення оптимального розподілу ресурсів з урахуванням імовірних умов розв'язання задачі. При такому підході так само успішно розв'язуються транспортні задачі при невизначеному попиті на розподілену продукцію, сировину, матеріали тощо.

Стохастична постановка цільової функції може бути двох видів: *М*-постановка і *Р*-постановка.

При *М*-постановці випадкова величина замінюється її математичним очікуванням

$$\max (\min) L = \sum_{j=1}^n \overline{c_j} x_j,$$

де $\overline{c_j}$ – математичне очікування випадкової величини c_j .

Для розв'язання завдання стохастичного програмування в P -постановці з імовірними обмеженнями переходять до детермінованого еквівалента. Тут максимізація цільової функції означає максимізацію можливості того, що випадкова величина буде не менше певного значення r

$$\max L = P \left[\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq r \right].$$

Відповідно мінімізація цільової функції передбачає максимізацію ймовірності того, що випадкова величина буде не більше r

$$\min L = P \left[\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq r \right].$$

Питання для самостійного вивчення

- метод аналогій;
- аналіз чутливості;
- імітаційне моделювання;
- аналіз ризику збитків.

Тема 7. Елементи теорії ігор

Для прийняття рішень в умовах невизначеності існують спеціальні математичні методи. Вибір оптимальної стратегії відбувається на підставі критеріїв Вальда (Уолда), Гурвіца, Лапласа, Байєса та Севіджа. Для розрахунків треба отримати дані щодо витрат або ефективності за кожною стратегією при кожному стані природи або сценарію розвитку подій.

Приклад 7.1

Щоденний попит на тістечка у кав'ярні може бути 100, 150, 200, 250 або 300 штук. Свіжі тістечка продаються за ціною 49 грошових одиниць (гр. од.). Якщо тістечко не реалізовано за день, воно може бути продано у вечорі за ціною 15 гр. од. Витрати кав'ярні на одне тістечко складають 25 гр. од. Треба визначити, скільки тістечок доцільно замовляти щоденно.

Перш за все визначимо прибуток ($49 - 25 = 24$) і збиток ($15 - 25 = -10$). Тепер складемо платіжну матрицю (табл. 7.1), у якій стани природи b_j визначають кількість тістечок, що будуть продані, тоді як стратегії a_i – кількість тістечок у замовленні. Елементи матриці – значення прибутку або збитку.

Таблиця 7.1

Платіжна матриця

a_i	b_j				
	B1	B2	B3	B4	B5
	100	150	200	250	300
100	$100 \cdot 24$	$100 \cdot 24$	$100 \cdot 24$	$100 \cdot 24$	$100 \cdot 24$
150	$100 \cdot 24 - 50 \cdot 10$	$150 \cdot 24$	$150 \cdot 24$	$150 \cdot 24$	$150 \cdot 24$
200	$100 \cdot 24 - 100 \cdot 10$	$150 \cdot 24 - 50 \cdot 10$	$200 \cdot 24$	$200 \cdot 24$	$200 \cdot 24$
250	$100 \cdot 24 - 150 \cdot 10$	$150 \cdot 24 - 100 \cdot 10$	$200 \cdot 24 - 50 \cdot 10$	$250 \cdot 24$	$250 \cdot 24$
300	$100 \cdot 24 - 200 \cdot 10$	$150 \cdot 24 - 150 \cdot 10$	$200 \cdot 24 - 100 \cdot 10$	$250 \cdot 24 - 50 \cdot 10$	$300 \cdot 24$

Підрахуємо значення кожної комірки, отримавши матрицю прибутку (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Матриця прибутку

a_i	b_j				
	B1	B2	B3	B4	B5
	100	150	200	250	300
100	2400	2400	2400	2400	2400
150	1900	3600	3600	3600	3600
200	1400	3100	4800	4800	4800
250	900	2600	4300	6000	6000
300	400	2100	3800	5500	7200

Розрахуємо критерій Вальда. Для цього в кожному рядку знайдемо найменше значення і в матриці, яку отримаємо таким чином, знайдемо найбільше значення. Саме воно і визначить оптимальну стратегію за критерієм Вальда (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

Застосування критерію Вальда

A1	A2	A3	A4	A5
2400	1900	1400	900	400

Отже, за критерієм Вальда слід зупинитися на стратегії A1.

Критерій Гурвіца дозволяє обирати стратегію, яка знаходиться в інтервалі між надзвичайно песимістичною і найоптимістичнішою. Для розрахунку за критерієм Гурвіца знадобиться показник песимізму $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, де $\lambda = 1$ відповідає найбільшому песимізму, а $\lambda = 0$ – надзвичайному оптимізму. Значення показника песимізму особа, що приймає рішення, визначає сама, виходячи із суб'єктивних міркувань відносно ризику. При рівні песимізму λ ступінь оптимізму становитиме $1 - \lambda$. В такому разі критерій Гурвіца виглядатиме так:

$$\max_{a_i \in A} [\lambda \min_{b_j \in B} C_{ij} + (1 - \lambda) \max_{b_j \in B} C_{ij}].$$

Іноді λ інтерпретують як коефіцієнт схильності до ризику. Тоді в вищезазначеній формулі λ та $1 - \lambda$ потрібно змінити місцями.

За правилом Гурвіца необхідно для кожного можливого рішення знайти найбільшу і найменшу ефективність, помножити її відповідно на λ і на $1 - \lambda$, потім обрати той варіант, для якого середньозважена ефективність максимальна.

Нехай показник песимізму $\lambda = 0,6$ (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

Застосування критерію Гурвіца

a_i	$\min C_{ij}$	$\max C_{ij}$	$\lambda \min C_{ij} + (1 - \lambda) \max C_{ij}$
A1	2400	2400	$0,6 \cdot 2400 + 0,4 \cdot 2400 = 2400$
A2	1900	3600	$0,6 \cdot 1900 + 3600 \cdot 0,4 = 2580$
A3	1400	4800	$0,6 \cdot 1400 + 4800 \cdot 0,4 = 2760$
A4	900	6000	$0,6 \cdot 900 + 6000 \cdot 0,4 = 2940$
A5	400	7200	$0,6 \cdot 400 + 7200 \cdot 0,4 = 3120$

Керуючись критерієм Гурвіца, ми маємо обрати п'яту стратегію.

Критерій Лапласа припускає, що імовірність настання кожного стану природи однакова. Згідно з цим критерієм, треба знайти середнє арифметичне значення у кожному рядку (M_i), серед них обирається найбільше (табл. 7.5). Проте, варто зазначити, що в реальних економічних умовах імовірність появи одних подій більша, ніж імовірність появи інших.

Таблиця 7.5

Застосування критерію Лапласа

a_i	M_i
A1	$(2400 + 2400 + 2400 + 2400 + 2400)/5 = 2400$
A2	$(1900 + 3600 + 3600 + 3600 + 3600)/5 = 3260$
A3	$(1400 + 3100 + 4800 + 4800 + 4800)/5 = 3780$
A4	$(900 + 2600 + 4300 + 6000 + 6000)/5 = 3960$
A5	$(400 + 2100 + 3800 + 5500 + 7200)/5 = 3800$

У нашому випадку згідно з критерієм Лапласа треба обрати четверту стратегію.

Якщо для застосування критеріїв Вальда, Гурвіца, Севіджа та Лапласа немає потреби в інформації про вірогідність станів природи, то критерій Байєса діє за умов наявності неповної інформації про таку вірогідність. Вибір стратегії здійснюється за наступною формулою:

$$\max \sum P_i C_{ij},$$

де P_i – вірогідність i -го стану природи. Сума всіх значень P_i має дорівнювати 1.

Припустимо, що вірогідність попиту в 100 штук становить 0,2; 150 – 0,25; 200 – 0,3; 250 – 0,15, а 300 – 0,1 (табл. 7.6).

Таблиця 7.6

Застосування критерію Байєса

a_i	$\max \sum P_i C_{ij}$
A1	$2400 \cdot 0,2 + 2400 \cdot 0,25 + 2400 \cdot 0,3 + 2400 \cdot 0,15 + 2400 \cdot 0,1 = 2400$
A2	$1900 \cdot 0,2 + 3600 \cdot 0,25 + 3600 \cdot 0,3 + 3600 \cdot 0,15 + 3600 \cdot 0,1 = 3260$
A3	$1400 \cdot 0,2 + 3100 \cdot 0,25 + 4800 \cdot 0,3 + 4800 \cdot 0,15 + 4800 \cdot 0,1 = 3695$
A4	$900 \cdot 0,2 + 2600 \cdot 0,25 + 4300 \cdot 0,3 + 6000 \cdot 0,15 + 6000 \cdot 0,1 = 3620$
A5	$400 \cdot 0,2 + 2100 \cdot 0,25 + 3800 \cdot 0,3 + 5500 \cdot 0,15 + 7200 \cdot 0,1 = 3290$

Як бачимо, за критерієм Байєса треба обрати стратегію A3.

Використання критерію Севіджа передбачає, що особа, яка приймає рішення, повинна мінімізувати свої втрати (жалкування). Таким чином, ОПР мінімізує потенційну помилку від прийняття невірної рішення. Для використання критерію передусім розраховуються втрати окремо для кожного стану природи, а далі в новій матриці втрат (жалкувань) обирається та стратегія, яка мінімізує максимальні втрати. Отже, потрібно знайти у кожному стовпчику найбільше значення і від нього відняти інші. В отриманій матриці

жалкувань треба в кожному рядку знайти найбільше значення і серед них обрати найменше (табл. 7.7).

Таблиця 7.7

Застосування критерію Севіджа

a_i	b_j					
	B1	B2	B3	B4	B5	$\max S_{ij}$
A1	0	1200	2400	3600	4800	4800
A2	500	0	1200	2400	3600	3600
A3	1000	500	0	1200	2400	2400
A4	1500	1000	500	0	1200	1500
A5	2000	1500	1000	500	0	2000

У крайньому правому стовпчику, де обчислені максимальні втрати (жалкування) при найгіршому стані природи, треба знайти мінімальне значення, тобто стратегію, що забезпечує найменші втрати. У даному випадку це буде стратегія A4.

Отже, у нашому прикладі за різними критеріями слід обрати різні стратегії замовлення тістечок, а саме за критерієм Вальда – стратегію A1; за критерієм Гурвіца – A5; за критеріями Лапласа і Севіджа – A4; за критерієм Байєса – A3.

Застосування критерію Вальда доцільно, коли інформація про вірогідність станів природи відсутня, приймається дуже важливе рішення і навіть мінімальний ризик неприпустимий, існує невелика кількість можливих рішень.

Якщо інформація про вірогідність станів природи відсутня, певний ризик можна припустити, застосування найбільш вірогідних значень коефіцієнта песимізму λ призводить до однакових результатів, то слід використовувати критерій Гурвіца.

Якщо певний ризик можна припустити, і керівництво підприємства готове інвестувати в проект стільки коштів, скільки необхідно, аби не жалкувати потім щодо втраченого зиску, варто зупинитися на критерії Севіджа.

Використання критерію Байєса доцільно, коли є інформація про вірогідність кожного стану природи, вона не залежить від часу та можна припустити певний ризик.

Питання для самостійного вивчення

- критерій Ходжеса–Лемана;
- критерій Паретто.

Тема 8. Оптимізаційні моделі управління запасами

Управління запасами являє собою складний комплекс заходів, спрямований на забезпечення максимально високого рівня обслуговування покупців при мінімізації поточних витрат, пов'язаних із утримуванням запасів.

Із зростанням розмірів запасів витрати на їхнє утримання збільшуються. З іншого боку, через нестачу запасів підприємство матиме збитки у вигляді недоотриманого доходу від продажу, втрат внаслідок простоїв або понаднормативних витрат в результаті заміни потрібних ресурсів дорожчими, штрафних санкцій за несвоєчасну поставку продукції замовником, збільшення витрат на доставку продукції тощо.

Існує декілька об'єктивних причин необхідності створення запасів:

- розбіжність ритмів постачання (виробництва) матеріальних запасів з ритмами їх споживання;
- випадкові коливання попиту за період між поставками, обсягів поставок, інтервалів між поставками;
- територіальна віддаленість постачальників від споживачів, що унеможливує доставку потрібної сировини, матеріалів або товарів саме у той час і в тому обсязі, коли виникатиме потреба у них;
- сезонність видобутку або виготовлення певних видів сировини, матеріалів або продукції та неперервність попиту на них, а також неперервність виготовлення інших продуктів, що утворюють запас, при сезонному попиті на ці продукти;
- ризик несприятливої зміни ринкових цін на сировину, матеріали або кінцеву продукцію.

Водночас існує ряд істотних передумов, які сприяють зменшенню запасів:

- плата за зберігання;

- втрачений економічний виграш внаслідок зв'язування обігових коштів у запасах;
- втрати у якості та кількості матеріалів, що знаходяться в запасах;
- старіння (моральний знос), що приводить до зниження попиту.

Запаси можуть поповнюватися безперервно або окремими партіями через певні проміжки часу. У випадку безперервного поповнення запасів інтенсивність надходження продуктів, які утворюватимуть запас, вища, ніж інтенсивність споживання запасів цих продуктів.

Основними елементами задачі управління запасами є:

- система постачання;
- попит на предмети постачання;
- можливість поповнення запасів;
- функції витрат;
- обмеження, які впливають на обсяги запасів;
- прийнята стратегія управління запасами, тобто зазначена лінія поведінки постачальника, що визначає його дії у моделі.

Нормативним є запас, що дозволяє забезпечити ритмічність виробництва на конкретному наперед заданому інтервалі.

Страховий запас – запас, зменшення рівня якого може викликати небажані процеси на виробництві, що знижують ефективність його функціонування.

Розрізняють наступні моделі управління запасами:

1) *Базова модель* EOQ (Economic order quantity) – це модель оптимального економічного розміру замовлення, який забезпечує мінімальну величину сумарних витрат та дає можливість мінімізувати видатки на зберігання запасу та допомагає визначити ефективну площу складських приміщень. Уся кількість одиниць замовлення надходить одночасно. Модель

використовується більшістю підприємств розвинених країн як основа для прийняття рішень по управлінню запасами.

Як правило, розрахунок EOQ доцільно проводити для обмеженої кількості найбільш істотних у вартісному відношенні номенклатурних позицій, для виявлення яких варто здійснити структурування запасів за допомогою ABC-аналізу.

Величина EOQ обчислюється за формулою Вільсона

$$EOQ = \sqrt{\frac{2AC}{W}},$$

де A – витрати, пов'язані з виконанням замовлення, грн;
 C – потреба в замовленні продукту, од.; W – витрати на зберігання одиниці запасу, грн/од.

Недоліком цієї моделі є досить жорстка система вхідних передумов, зокрема, припущення про незмінність попиту, незалежність оптових цін від обсягу закупаваної партії товарів та інші гіпотези. Застосування цієї моделі на практиці обмежується тим, що витрати, пов'язані зі зберіганням продукції та витрати, пов'язані з транспортуванням партії продукції в чистому вигляді на підприємстві відсутні. Ці припущення в реальній практиці, особливо в умовах нестабільного ринкового середовища України, не завжди виконуються. Тому в кожному конкретному випадку, базова модель EOQ повинна бути доопрацьована у відповідності зі зміною вхідних допущень.

2) *Модель виробничого замовлення* – ця модель використовується, якщо запаси безперервно надходять і відновлюються через певний час, тобто вироби виготовляються і продаються одночасно. Якщо інтенсивність споживання ресурсу зі складу не є постійною та коливається на середньому рівні, тоді використання моделі є неможливим.

3) *Модель управління запасами з фіксованим розміром замовлення* – основним параметром цієї моделі є розмір замовлення, що має можливість визначити об'єм заповнення замовлення. Економія витрат на утримання запасів на складі за рахунок скорочення площ під запаси. Основний недолік даної моделі – необхідність здійснення постійного контролю наявності запасів на складі.

4) *Модель з фіксованим інтервалом часу між замовленнями* – фіксація інтервалу часу між замовленнями визначає момент, коли слід здійснити замовлення на поповнення запасу, відсутність постійного контролю наявності запасів на складі. Основний недолік даної моделі – високий рівень максимального запасу, збільшення витрат на утримання запасів на складі за рахунок збільшення площ під запаси.

5) *Модель зі встановленою періодичністю поповнення запасів до постійного рівня* – дана модель є універсальною і включає в себе елементи попередніх моделей. Її сутність полягає в тому, що замовлення на матеріали здійснюються не тільки залежно від часу, а й з урахуванням точки замовлення. Тобто вона дає можливість реагувати на значні коливання попиту на матеріали. Основний недолік даної моделі – необхідність відстежувати рівень запасів. Вимагаються додаткові витрати на організацію постійного спостереження за кількістю запасів.

6) *Модель "мінімум-максимум"* – в даній моделі замовлення виконуються не через кожен заданий інтервал часу, а тільки за умови, що запаси на складі у цей момент виявилися рівними або менше встановленого мінімального рівня. Основний недолік даної моделі полягає в тому, що ця система працює лише з двома рівнями запасів – мінімальним і максимальним.

Різноманітність моделей і методів управління запасами визначається характером попиту: детермінований або стохастичний. *Детермінований попит* може бути статичним, якщо інтенсивність споживання залишається незмінною з часом, або динамічним, коли попит відомий достовірно, але змінюється в залежності від часу. *Стохастичний попит* є стаціонарним, якщо функція щільності імовірності попиту незмінна в часі, та нестаціонарним, коли функція щільності попиту змінюється в часі.

Іншими факторами, що впливають на вибір типу моделі, є наступні:

- запізнення надходжень виконання замовлень;
- поповнення замовлення;
- інтервал, протягом якого здійснюється зміна запасу;
- кількість пунктів накопичення запасу;
- кількість видів продукції.

Знижка на розмір замовлення буває двох видів:

- "оптова" знижка;
- диференціальна знижка.

"Оптова" знижка поширюється на кожну одиницю за куповуваного товару залежно від загального обсягу партії. Диференціальна знижка поширюється на кожну наступну одиницю за куповуваного товару, що перевищує певний обсяг замовлення.

Обмежений строк зберігання товару характерний для більшості товарів роздрібної торгівлі. Це можуть бути товари, які поступово, за час зберігання гублять свої споживчі якості (наприклад фрукти), так і товари, які не будучи реалізованими за певний строк повністю втратять споживчі якості (наприклад газети).

Управління запасами товарів з обмеженим строком придатності відбувається в такий спосіб:

– визначається оптимальний розмір замовлення (з урахуванням витрат на зберігання, на дефіцит і списання застарілих товарів) і здійснюється замовлення на поповнення запасу;

– весь обсяг продукту, що прибув вважається новим;

– відпускання товару виконується за принципом "перший прибув – перший вибув";

– продукт, не реалізований протягом строку зберігання, списується.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Григорків, В. С.** Оптимізаційні методи та моделі [Текст] : підручник / В. С. Григорків, М. В. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2016. – 400 с.
2. **Загоруйко, В. Л.** Методи прийняття управлінських рішень [Текст] : навч. посіб. / В. Л. Загоруйко. – Луцьк : Вежа, 2014. – 214 с.
3. **Кабаченко, Д. В.** Конспект лекцій з дисципліни "Обґрунтування господарських рішень і оцінювання ризиків" [Текст] / Д. В. Кабаченко – Дніпро : НГУ, 2017. – 128 с.
4. **Карагодова, О. О.** Дослідження операцій [Текст] : навч. посіб. / О. О. Карагодова, В. Р. Кігель, В. Д. Рожок. – К. : Центр учбової літератури, 2007 – 256 с.
5. **Кузьмичов, А. І.** Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel [Текст] : навч. посіб. / А. І. Кузьмичов. – К. : Ліра-К, 2017. – 215 с.
6. **Flouras, C.** Encyclopedia of Optimization [Text] / C. Flouras, P. Pardalos (eds.). – Springer, 2009. – 4626 p.
7. **Grygorkiv, V.** Legal and Shadow Economies Interaction Model: Analysis of Phase Trajectory Projection [Text] / V. Grygorkiv, I. Vinnychuk // Business Systems and Economic. – Vilnius, 2015. – Vol. 5 (1). – P. 61–72.

8. **Hryhorkiv, M. V.** Some issues of time dimension agreement in economic dynamics models [Text] / M. V. Hryhorkiv, V. S. Hryhorkiv // Науковий вісник Чернівецького університету : збірник наук. праць. Вип. 773–774. Економіка. – Чернівці : ЧНУ, 2016. – С. 173–177.

9. **Vinnychuk, O.** The Dynamic Model of Optimal Economic Growth in Terms of Ecological Balance: Models Construction and Results Analysis [Text] / Olena Vinnychuk, Vasyl Grygorkiv, Ruslan Biloskurskii // Business Systems and Economic. – Vilnius, 2015. – Vol. 5 (1). – P. 36–45.

ЗМІСТ

Вступ	3
Змістовий модуль 1. Теоретичні основи оптимізаційних методів і моделей. Лінійні оптимізаційні моделі	4
Тема 1. Предмет, особливості та сфери застосування оптимізаційних моделей в економіці. Класифікація оптимізаційних методів та моделей	4
Тема 2. Загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язування	10
Тема 3. Теорія двоїстості та двоїсті оцінки в аналізі розв'язків лінійних оптимізаційних моделей. Аналіз лінійних моделей економічних задач	19
Тема 4. Транспортна задача. Цілочислові задачі лінійного програмування. Задачі дробово-лінійного програмування	24
Змістовий модуль 2. Нелінійні оптимізаційні моделі. Прийняття економічних рішень в умовах невизначеності	32
Тема 5. Задачі нелінійного програмування. Задачі динамічного програмування	32
Тема 6. Моделі та методи стохастичного програмування. Оптимізація за умов невизначеності	38
Тема 7. Елементи теорії ігор	42
Тема 8. Оптимізаційні моделі управління запасами	48
Список літератури	54

Навчальне видання

РОГОВ В'ячеслав Георгійович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до вивчення курсу
"ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ"**

Редактор С. А. Яременко

Комп'ютерне складання та верстання В. В. Москаленко

Макетування А. Д. Сорочинська

Коректор М. О. Паненко

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 3,3. Тираж 100 прим. Вид № 46. Зам. № 114.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ДЛЯ ЗАДАТОК

ДЛЯ ЗАДАТОК

ДЛЯ ЗАДАТОК