

УДК 517.9: 532.2

DOI [https://doi.org/10.15589/znp2023.2-3\(491-492\).4](https://doi.org/10.15589/znp2023.2-3(491-492).4)BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A BIHARMONIC EQUATION
WITH AN EXTREME BOUNDARY CONDITIONКРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ
З ЕКСТРЕМАЛЬНОЮ ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ

Svitlana B. Syvash

rusboris@ukr.net

ORCID: 0000-0002-9726-7865

С. Б. Сиваш,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

*Odessa National Maritime University, Odessa**Одеський національний морський університет, м. Одеса*

Abstract. Heat exchange processes in various environments lead to problems of minimizing quadratic functionals. The work investigates problems of stationary thermal conductivity for a strip with an extreme boundary condition, in which convective heat exchange with the external environment is minimized.

Goal. Investigate the solvability of boundary-value problems for the biharmonic equation with an extreme condition on the band boundary, which are reduced to the solution of the Riemann matrix problem on the real axis. To establish the equivalence of the considered boundary value problems and the corresponding Riemann problems. Based on the study of the obtained Riemann problems, establish the conditions for the non-zeroity of these extremal problems and construct their solutions.

Method. The work uses the Fourier transform method, the properties of design operators and the theory of the Riemann matrix problem, functional analysis and the theory of boundary value problems for analytical functions, as well as the constructive theory of functions. The subject of research is boundary value problems for a biharmonic equation in a strip with an extreme boundary condition.

The results. Two extremal problems for the biharmonic equation in the strip were studied. An algorithm for reducing these and similar problems to a Riemannian matrix problem of the third order on the real axis has been constructed. The obtained Riemann problem was studied, the conditions for the existence of its solutions were established. Based on the equivalence of the boundary value problem and the corresponding Riemann problem, the conditions for the solvability of the extreme boundary value problem are formulated and its solutions in the normal and exceptional cases are constructed.

Scientific novelty. In earlier studies, either equations of other types or other boundary conditions were considered. The construction of the theory of solvability of the problems studied in the work allows to expand the range of its applications for other types of partial differential equations and applied problems, which are reduced to the solution of such equations.

Practical significance. The obtained results can be used in solving applied problems of water engineering, the theory of elasticity and thermoelasticity, thermal conductivity, and others.

Key words: boundary value problem, Riemann problem, Fourier transform.

Анотація. Процеси теплообміну у різних середовищах приводять до задач мінімізації квадратичних функціоналів. В роботі досліджуються задачі стаціонарної теплопровідності для смуги з екстремальною умовою на границі, у яких мінімізується конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем.

Мета. Дослідити розв'язність крайових задач для бігармонічного рівняння з екстремальною умовою на границі смуги, які зводяться до розв'язання матричної задачі Рімана на дійсній осі. Встановити еквівалентність розглянутих крайових задач та відповідних задач Рімана. На основі дослідження отриманих задач Рімана встановити умови нетеровості цих екстремальних задач та побудувати їх розв'язки.

Методика. У роботі використано метод перетворення Фур'є, властивості операторів проектування та теорія матричної задачі Рімана, функціональний аналіз та теорія крайових задач для аналітичних функцій, а також конструктивна теорія функцій. Предмет дослідження – крайові задачі для бігармонічного рівняння у смугі з екстремальною граничною умовою.

Результати. Досліджено дві екстремальні задачі для бігармонічного рівняння у смугі. Побудовано алгоритм

зведення цих та подібних задач до матричної задачі Рімана третього порядку на дійсній осі. Досліджено отриману задачу Рімана, встановлено умови існування її розв'язків. На основі еквівалентності крайової задачі та відповідної задачі Рімана сформульовано умови розв'язності екстремальної крайової задачі та побудовано її розв'язки у нормальному та винятковому випадках.

Наукова новизна. У проведених раніше дослідженнях розглянуто або рівняння інших типів, або інші граничні умови. Побудова теорії розв'язності досліджених у роботі задач дозволяє розширити коло її застосувань для інших типів диференціальних рівнянь у частинних похідних та прикладних задач, що зводяться до розв'язання таких рівнянь.

Практична значимість. Отримані результати можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач водної інженерії, теорії пружності та термопружності, теплопровідності та інших.

Ключові слова: крайова задача, задача Рімана, перетворення Фур'є.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Досліджуються задачі стаціонарної теплопровідності для смуги з екстремальною умовою на границі, у яких мінімізується конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ.

Широке коло прикладних задач, що виникають у технічних наукових напрямках, теорії механізмів, у системах регулювання та ін. приводить до розв'язання задач мінімізації квадратичних функціоналів виду

$$\| (Au)(x) - g(x) \|^2 = \int_{R_n} \rho(x) |(Au)(x) - g(x)|^2 dx \rightarrow \inf,$$

у тому числі з операторами згортки

$$(Au)(x) = \int_G k(x-s) u(s) ds, \quad D \in R_n.$$

Задачі, пов'язані з теплообміном у різних середовищах, де екстремальні умови задаються на границі, є актуальними для деяких напрямів водної інженерії, зокрема гідротехніки та суднобудування.

Вагомі теоретичні результати дослідження крайових задач для рівнянь математичної фізики з використанням інтегральних перетворень та метода факторизації належать Ю. Черському [13]. Некоректні задачі для лінійних рівнянь $Au = g$, що виникають зокрема при проектуванні композиційних матеріалів, також приводяться до задач мінімізації функціоналів нев'язки. Дослідження деяких екстремальних задач для лінійних рівнянь проводилося в роботі [2]. Методу Вінера–Гопфа та деяким пов'язаним питанням теорії інтегральних рівнянь присвячена робота [8]. Дослідження задачі Карлемана для смуги з аналітичним продовженням у верхню півплощину проводилося в роботі [4]. Деякі задачі термопружності, що зводяться до матричної задачі Рімана, вивчалися в роботі [6].

ВИДОКРЕМЛЕННЯ НЕВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

Проведені раніше дослідження носять в основному теоретичний характер або ж ставляться для

інших типів рівнянь. Тому значний практичний інтерес представляють питання розв'язності та побудови розв'язків екстремальних задач для смуги, в яких шукана функція задовольняє бігармонічне рівняння. Встановлення умов нетеровості та розв'язності цих задач дозволяє розширити коло їх застосувань.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Дослідити розв'язність задач для бігармонічного рівняння з екстремальною умовою на границі смуги, що зводяться до розв'язання матричної задачі Рімана на дійсній осі. Встановити умови нетеровості цих екстремальних задач та побудувати їх розв'язки.

МЕТОДИ, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

У роботі використано метод перетворення Фур'є та теорія матричної задачі Рімана, функціональний аналіз та теорія крайових задач для аналітичних функцій, а також конструктивна теорія функцій. Об'єктом дослідження є процеси теплообміну у різних середовищах. Предмет дослідження – крайові задачі для бігармонічного рівняння у смугі з екстремальною граничною умовою.

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

Нехай R – дійсна вісь і $x \in R$. Позначимо $D^+ = \{z \in C : \text{Im } z > 0\}$ – верхню, а $D^- = \{z \in C : \text{Im } z < 0\}$ – нижню півплощини комплексної площини C . Через $L_2[-m; -n]$, де m, n – цілі невід'ємні числа, позначимо простір функцій $\phi(x)$, заданих на дійсній осі R , для яких

$$\left(\frac{d}{dx} + 1 \right)^n [(x+i)^m \phi(x)] \in L_2.$$

Вважаємо, що $L_2[0; 0] = L_2$. Позначимо $L_{2+}[-m; -n]$ ($L_{2-}[-m; -n]$) – простір функцій $\phi_+(x)$ ($\phi_-(x)$) $\in L_2[-m; -n]$, таких, що $\phi_+(x) \equiv 0$ при $x < 0$ ($\phi_-(x) \equiv 0$ при $x > 0$). Через $L_2^\pm[-m; -n]$ позначимо простір функцій $\Phi^\pm(x) \in L_2[-m; -n]$, які аналітично продовжуються в область $D^\pm$. Нехай $H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, – простір функцій $\phi(x)$, що диференційовні r разів на множині R , для яких похідна порядку r задовольняє умову Гельдера.

Позначимо $P^\pm = 0,5(I \pm S)$ – оператор проектування Рісса, де I – одиничний

оператор, а $(S\varphi)(x) = \frac{1}{\pi i} \int_R (t-x)^{-1} \varphi(t) dt$ – оператор Коші. $P^\pm : L_2 \rightarrow L_2^\pm$ та має такі властивості: $(P^\pm)^2 = P^\pm$, $P^+ P^- = P^- P^+ = 0$.

Задача 1. Знайти в області $0 < y < 1$, $-\infty < x < +\infty$ функцію $u(x, y)$, яка задовольняє рівняння

$$\Delta^2 u = 0 \quad (1)$$

та умови

$$u(x, 1) = 0, \quad u_{yy}(x, 1) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad x < 0, \quad (3)$$

$$\int_0^\infty \left| \alpha u_y(x, 0) + \beta u_{yy}(x, 0) - g(x) \right|^2 dx + \int_0^\infty \left| \gamma u_y(x, 0) + \delta u_{yy}(x, 0) - h(x) \right|^2 dx \rightarrow \inf, \quad (4)$$

де $g(x), h(x) \in L_{2+}[0; -2]$ – відомі функції, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – відомі сталі.

Функцію $u(x, y)$, що є розв'язком екстремальної задачі 1, будемо шукати у просторі $L_2[0; -4]$ рівномірно по $0 < y < 1$.

Застосуємо до рівняння (1) інтегральне перетворення Фур'є [6]. У інтегралах Фур'є воно набуває вигляду

$$U_{yyyy}(x, y) - 2x^2 U_{yy}(x, y) + x^4 U(x, y) = 0. \quad (5)$$

Загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$U(x, y) = (C_1(x) + C_2(x)y) \cdot e^{xy} + (C_3(x) + C_4(x)y) \cdot e^{-xy}, \quad (6)$$

де $U(x, y) \in L_2[-4; 0]$ – перетворення Фур'є за змінною x функції $u(x, y)$, $C_j(x)$ – невідомі функції, що залежать від x .

Введемо до розгляду невідому функцію

$$u_+(x) = \begin{cases} u_y(x, 0), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Легко бачити, що функція $u_+(x) \in L_{2+}[0; -3]$. Тоді умову (3) можна записати у вигляді

$$u_y(x, 0) = u_+(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (8)$$

Далі застосуємо перетворення Фур'є до граничних умов (2), (8), отримаємо:

$$U(x, 1) = 0, \quad U_{yy}(x, 1) = 0,$$

$$U(x, 0) = 0, \quad U_y(x, 0) = U_+(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (9)$$

де $U_+(x) \in L_{2+}[-3; 0]$ – перетворення Фур'є функції $u_+(x)$.

Підпорядкувавши функцію $U(x, y)$ умовам (9), для визначення функцій $C_j(x)$ отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (C_1(x) + C_2(x)) \cdot e^x + (C_3(x) + C_4(x)) \cdot e^{-x} = 0, \\ 2xC_2(x)e^x - 2xC_4(x)e^{-x} + x^2(C_1(x) + C_2(x)) \cdot e^x + x^2(C_3(x) + C_4(x)) \cdot e^{-x} = 0, \\ C_1(x) + C_3(x) = 0, \\ xC_1(x) + C_2(x) - xC_3(x) + C_4(x) = 0, \end{cases}$$

З якої маємо

$$C_1(x) = -\frac{U_+(x)}{2(shx \cdot chx - x)}, \quad C_2(x) = \frac{e^{-x} shx U_+(x)}{2(shx \cdot chx - x)},$$

$$C_3(x) = \frac{U_+(x)}{2(shx \cdot chx - x)}, \quad C_4(x) = \frac{e^x shx U_+(x)}{2(shx \cdot chx - x)}.$$

Тоді з рівності (6) отримаємо

$$U(x, y) = \frac{y shx \cdot ch(1-y)x - shxy}{shx \cdot chx - x} U_+(x). \quad (10)$$

Оскільки $0 < y < 1$, то функція $\frac{y shx \cdot ch(1-y)x - shxy}{shx \cdot chx - x} \in L_2$. Тоді розв'язок рівняння (1), який задовольняє граничні умови (2), (3), можна записати у вигляді

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_y(s, 0) v(x-s, y) ds, \quad (11)$$

$$x \in R, \quad 0 < y < 1$$

де

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \frac{y \cdot sht \cdot ch(1-y)t - shy t}{sht \cdot cht - t} e^{-ixt} dt, \quad (12)$$

$$x \in R.$$

З рівності (11) випливає, що для побудови розв'язку екстремальної задачі 1 достатньо знайти функцію $u_y(x, 0)$ при $x > 0$, тобто функцію $u_+(x)$. Для цього використаємо умову (4). З рівності (10) випливає, що

$$U_y(x, 0) = U_+(x), \quad U_{yy}(x, 0) = -\frac{2x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} U_+(x). \quad (13)$$

Введемо до розгляду функції $g_+(x)$, $h_+(x)$, позначивши $g_+(x) = g(x)$, $h_+(x) = h(x)$ при $x > 0$, $g_+(x) = h_+(x) \equiv 0$ при $x < 0$. Легко переконатися, що $g_+(x)$, $h_+(x) \in L_{2+}[0; -2]$. Отже, умову (4) можна записати у вигляді

$$\int_0^\infty \left| \alpha u_+(x, 0) + \beta u_{yy}(x, 0) - g_+(x) \right|^2 dx + \int_0^\infty \left| \gamma u_+(x, 0) + \delta u_{yy}(x, 0) - h_+(x) \right|^2 dx \rightarrow \inf.$$

Використовуючи рівність Парсеваля, цю умову можна подати у вигляді

$$\int_0^\infty \left| \alpha U_+(x, 0) + \beta U_{yy}(x, 0) - G^+(x) \right|^2 dx + \int_0^\infty \left| \gamma U_+(x, 0) + \delta U_{yy}(x, 0) - H^+(x) \right|^2 dx \rightarrow \inf, \quad (14)$$

де $G^+(x)$, $H^+(x) \in L_2[-2; 0]$ – перетворення Фур'є відповідно функцій $g_+(x)$, $h_+(x)$. Враховуючи рівності (13), умову (14) можна записати у вигляді

$$\int_R \left| \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) - G^+(x) \right|^2 dx + \int_R \left| \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) - H^+(x) \right|^2 dx \rightarrow \inf. \quad (15)$$

Далі, використовуючи властивості проектора Рісса P^+ , умову (15) можна записати у вигляді

$$\int_R \left| P^+ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) P^+ U^+(x) - P^+ G^+(x) \right|^2 dx + \int_R \left| P^+ \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) P^+ U^+(x) - P^+ H^+(x) \right|^2 dx \rightarrow \inf. \quad (16)$$

На підставі необхідної та достатньої умови існування екстремуму функціоналу [3], умова (16) еквівалентна наступній:

$$\int_R q(t) P^+ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) P^+ \left[P^+ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) P^+ U^+(x) - P^+ G^+(x) \right]^2 dx + \int_R q(x) P^+ \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) P^+ \left[P^+ \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) P^+ U^+(x) - P^+ H^+(x) \right]^2 dx = 0$$

будь-якої функції $q(x) \in L_2$. Звідки згідно з властивостями оператора P^+ маємо:

$$P^+ \left\{ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) \left[P^+ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) - G^+(x) \right] + \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) \left[P^+ \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) - H^+(x) \right] \right\} = 0. \quad (17)$$

Тоді згідно з означенням та властивостями оператора Рісса P^+ з рівності (17) випливає, що

$$\left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) \left[P^+ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) - G^+(x) \right] + \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) \left[P^+ \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) - H^+(x) \right] = U^-(x), \quad (18)$$

де невідома функція $U^-(x) \in L_2^-[-1; 0]$. Позначимо

$$P^+ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) = \Phi^+(x),$$

$$P^+ \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) = \Psi^+(x), \quad (19)$$

де $\Phi^+(x)$, $\Psi^+(x) \in L_2^+[-2; 0]$ – невідомі функції.

Використовуючи формули Сохоцького та властивості оператора Рісса P^+ , з рівності (19) отримаємо:

$$\left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x),$$

$$\left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) U^+(x) = \Psi^+(x) - \Psi^-(x), \quad (20)$$

де $\Phi^-(x)$, $\Psi^-(x) \in L_2^-[-2; 0]$ – невідомі функції. Розглянемо нові невідомі функції, позначивши

$$F_1^+(x) = (x+i)^2 U^+(x), \quad F_1^-(x) = U^-(x),$$

$$F_2^+(x) = (x+i) \Phi^+(x), \quad F_2^-(x) = (x-i) \Phi^-(x),$$

$$F_3^+(x) = (x+i) \Psi^+(x), \quad F_3^-(x) = (x-i) \Psi^-(x). \quad (21)$$

Легко бачити, що функції $F_j^\pm(x) \in L_2[-1; 0]$. Тоді рівності (18), (20) з урахуванням позначень (21) можна записати у вигляді наступної задачі Рімана:

$$\lambda(x) B(x) F^+(x) - F^-(x) = b(x), \quad x \in R, \quad (22)$$

$$\text{де } F^\pm(x) = \{F_1^\pm(x); F_2^\pm(x); F_3^\pm(x)\}^T,$$

$$\lambda(x) = \text{diag} \left\{ 1; \frac{x-i}{x+i}; \frac{x-i}{x+i} \right\},$$

$$b(x) = \left\{ \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) G^+(x) + \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) H^+(x); 0; 0 \right\}^T,$$

а матриця $B(x)$ має такі елементи: $b_{11} = b_{23} = b_{32} = 0$,

$$b_{22} = b_{33} = 1, \quad b_{12} = -b_{21} = \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) \frac{1}{x+i},$$

$$b_{13} = -b_{31} = \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) \frac{1}{x+i}.$$

Тут та нижче знак « T » означає транспонування. Зауважимо, що якщо припустити рівняння (1) та граничні умови (2), (3) неоднорідними, то структура задачі Рімана (22) не зміниться. Зміниться лише перша компонента вектора $b(x)$. Оскільки усі перетворення були тотожними, то екстремальна задача (1) та задача Рімана (22) є еквівалентними в тому сенсі, що вони є водночас розв'язними або ні. При цьому розв'язок екстремальної задачі (1) виражається через розв'язок задачі Рімана (22) за формулами (11), (12), де згідно з рівностями (21) та (7)

$$u_y(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R (t+i)^{-2} F_1^+(t) e^{-ixt} dt, \quad x > 0. \quad (23)$$

Задача 2. Знайти в області $0 < y < 1$, $-\infty < x < +\infty$ функцію $u(x, y)$, яка задовольняє рівняння (1), умови (2) та

$$u_y(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

$$\int_{-\infty}^0 |\alpha u_y(x, 0) + \beta u_{yy}(x, 0) - g(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^0 |\gamma u_y(x, 0) + \delta u_{yy}(x, 0) - h(x)|^2 dx \rightarrow \inf$$

Нехай $u_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ -u_y(x, 0), & x \leq 0. \end{cases}$ Використовуючи

перетворення Фур'є та властивості проектора Рисса P^- , розв'язання екстремальної задачі 2 за наведеною вище схемою зводиться до розв'язання наступної задачі Рімана:

$$F^+(x) - \lambda^{-1}(x)B(x)F^-(x) = b(x), \quad x \in R, \quad (24)$$

де матриці $\lambda(x)$ та $B(x)$ такі ж, як у задачі Рімана (22), а

$$b(x) = \left\{ \left(\frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} - \alpha \right) G^-(x) + \left(\frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} - \gamma \right) H^-(x); 0; 0 \right\}^T.$$

Функції $G^-(x)$, $H^-(x) \in L_2[-2; 0]$ – перетворення Фур'є відповідно функцій $g(x)$, $h(x) \in L_2[0; -2]$. Зауважимо, що розв'язок екстремальної задачі 2 виражається через розв'язок задачі Рімана (24) наступним чином:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u_y(s, 0) v(x-s, y) ds, \quad x \in R, \quad 0 < y < 1,$$

де функція $v(x, y)$ визначена рівністю (12), а

$$u_y(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R (t-i)^{-2} F_1^-(t) e^{-ixt} dt, \quad x > 0.$$

Визначимо тепер умови розв'язності екстремальних задач 1 та 2. Розглянемо спочатку задачу 1. Для встановлення умов її розв'язності дослідимо задачу Рімана (22). Вона є нетеровою або нормальною розв'язною тоді й тільки тоді, коли $\det B(x) \neq 0$ на R . Встановлено, що ця умова виконується, якщо

$$\Delta(x) = \left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right)^2 + \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right)^2 \neq 0, \quad x \in R. \quad (25)$$

Ця умова реалізується, якщо виконується принаймні одна з умов

$$\alpha \neq 3\beta, \quad \gamma \neq 3\delta. \quad (26)$$

Якщо ж $\alpha = 3\beta$, $\gamma = 3\delta$, то в точці $x = 0$ $\det B(x)$ має нуль другого порядку. Таким чином, доведена

Теорема 1. Екстремальна задача 1 є нетеровою тоді й тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов (26).

Нехай виконується одна з умов (26). Оскільки часткові індекси матриці $\lambda(x)$ дорівнюють $\chi_1^\lambda = 0$, $\chi_2^\lambda = \chi_3^\lambda = 1$, то для встановлення умов розв'язності задачі Рімана (22) достатньо обчислити часткові індекси матриці $B(x)$. Оскільки $\det B(x) \neq 0$ на R , то існує невідроджена матриця $T(x)$ така, що $T^{-1}(x) \cdot B(x) \cdot T(x) = C(x)$, де $C(x) = \text{diag} \{a^0(x), a^+(x), a^-(x)\}$. Оскільки часткові індекси матриць $T^{-1}(x)$, $T(x)$ протилежні за знаком та рівні за абсолютною величиною, то часткові індекси матриць $B(x)$ та $C(x)$ дорівнюють індексам діагональних елементів матриці $C(x)$. Маємо:

$a^0(x) = 1$, $a^\pm(x) = 0, 5 \left(1 \pm \sqrt{1 + 4(x+i)^{-2} \Delta(x)} \right)$, де $\Delta(x)$ визначається рівністю (25). Тепер можна обчислити, що $\text{inda}^0(x) = \text{inda}^\pm(x) = 0$, тобто часткові індекси матриці $B(x)$ дорівнюють нулю. Тоді задача Рімана (22) має недодатну систему часткових індексів $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = \chi_3 = -1$. У цьому випадку однорідна задача Рімана (22) має лише тривіальний розв'язок, а неоднорідна задача Рімана (22) буде мати розв'язок лише при виконанні певних умов розв'язності. Встановимо ці умови.

Оскільки $\det B(x) \neq 0$ на R , $B(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $0 < \alpha < 1$, де r – довільне натуральне число, та часткові індекси матриці $B(x)$ дорівнюють нулю, то справедлива факторизація $B(x) = [X^-(x)]^{-1} X^+(x)$, де $\det X^\pm(x) \neq 0$ на R , матриці $X^\pm(x) \in H_\alpha^{(r)}$ та є аналітично продовжуваними відповідно до областей $D^\pm$. Нехай $X_{ij}^-(x)$ – елементи матриці $X^-(x)$. Тоді для існування розв'язків задачі Рімана (22) мають виконуватися умови

$$\int_R \left[\left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) G^+(x) + \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) H^+(x) \right] \frac{X_{ij}^-(x)}{x+i} dx = 0, \quad (27)$$

$$l = 2, 3.$$

При виконанні умов (27) неоднорідна задача Рімана (22) має єдиний розв'язок, який визначається рівністю

$$F^+(x) = [X^+(x)]^{-1} \Psi^+(x), \quad F^-(x) = \lambda^{-1}(x) X^-(x) \Psi^-(x),$$

$$\text{де } \Psi^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} X^{-1}(x) b(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{X^-(x) b(x)}{t-x} dt, \quad x \in R.$$

Вектори $\Psi^\pm(x) = \{\Psi_1^\pm(x), \Psi_2^\pm(x), \Psi_3^\pm(x)\}^T$ належать просторам $L_2^\pm[-1; 0]$ відповідно. Нехай $\omega_{ij}^+(x)$ – елементи матриці $[X^+(x)]^{-1}$. Тоді

$$F_1^+(x) = \omega_{11}^+(x) \Psi_1^+(x) + \omega_{12}^+(x) \Psi_2^+(x) + \omega_{13}^+(x) \Psi_3^+(x). \quad (28)$$

Легко бачити, що функція

$$\Omega_l(x) = X_{li}^-(x) \left[\left(\alpha - \frac{2\beta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) G^+(x) + \left(\gamma - \frac{2\delta x \cdot sh^2 x}{shx \cdot chx - x} \right) H^+(x) \right]$$

належить простору $L_2[-1; 0]$. Позначимо їх обернені перетворення Фур'є $\omega_l(x)$. Тоді згідно з узагальненою рівністю Парсеваля для інтегралів Фур'є умови (27) можна записати [7] у вигляді

$$\int_0^\infty \omega_l(x) e^{-x} dx = 0, \quad l = 2, 3. \quad (29)$$

Теорема 2. Нехай виконується хоча б одна з умов (26). Тоді однорідна ($g(x) = h(x) \equiv 0$) екстремальна задача 1 має лише тривіальний розв'язок, а неоднорідна екстремальна задача 1 буде мати розв'язки лише при виконанні умов (29). У цьому випадку екстремальна задача 1 має єдиний розв'язок, який визначається формулами (28), (23), (11), (12).

Аналогічно проводиться дослідження екстремальної задачі 1 і в її винятковому випадку. Зауважимо, що дослідження екстремальної задачі 2 проводиться за вказаною вище схемою.

ОБГОВОРЕННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ВИСНОВКИ

Побудова теорії розв'язності розглянутих екстремальних задач дає можливість досліджувати нові

класи задач для диференціальних рівнянь у частинних похідних з екстремальними граничними умовами вказаних типів. Отримані результати можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач водної інженерії, теорії пружності та термопружності, теплопровідності та інших.

REFERENCES

- [1] Berezanskyi, Yu.M., Us, H. F., i Sheftel, Z.F. (2014). *Funktsionalnyi analiz*. [Functional analysis]. Lviv. [in Ukrainian].
- [2] Hryhoriev, Yu. A., & Grygoriev, A. Yu., (2020). Extremum problem in convolutions with additional conditions on the axis. *International Journal of Applied Mathematics*, 2, Vol. 33, pp. 355 – 367. [in English]. DOI: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v33i2.13>
- [3] Dubovoi V. M., Kvietnyi R. N., Mykhalov O. I., i A.V. Usov A. V. (2017). *Modeliuvannia ta optymizatsiia system*. [Modeling and optimization of systems]. Vinnytsia: PP «TD Edelveis». [in Ukrainian].
- [4] Kereksha D. P. (2005). Do teorii zadachi Karlemana dlia smuhy z analitychnym prodovzhenniam u verkhniyu pivploshchynu. [To the theory of the Karleman problem for a strip with an analytic extension into the upper half-plane. Boundary value problems for differential equations]. *Kraiovi zadachi dlia dyferentsialnykh rivnian. Zb. nauk. prats. Chernivtsi. – Boundary value problems for differential equations. Coll. of science works*, Vol. 12, pp. 129–136. [in Ukrainian].
- [5] Kereksha, P. V. (2002). Zadacha teorii pruzhnosti z konvektyvnym teploobminom na hraniakh pry naiavnosti dzherel tepla. [The problem of the theory of elasticity with convective heat exchange at the edges in the presence of heat sources]. *DAN Ukrainy. No 8*, pp. 47–55. [in Ukrainian].
- [6] O. F. Kryvyi, O. Yu. Morozov. (2020). The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecwise homogeneous transversely isotropic elastic space. *Doslidzhennia v matematytsi i mekhanitsi. Vol. 25, № 1*, pp. 16–30. [in English].
- [7] Leniuk M. P. (2004). *Hibrydni intehrалni peretvorennia (Furie, Besselia, Lezhandra). Chastyna 1* [Hybrid integral transformations (Fourier, Bessel, Legendre). Part 1]. Ekonomichna dumka. Ternopil. [in Ukrainian].
- [8] Masujima, M. (2005). Wiener-Hopf method and Wiener-Hopf integral equation. *Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim*, pp. 177–247. [in English].
- [9] Perestiuk M. O., Marynets V. V. (2006). *Teoriia rivnian matematychnoi fizyky*. [Theory of equations of mathematical physics]. Lybid. Kyiv. [in Ukrainian].
- [10] Pikh, S. S., Popel, O. M., Rovenchak, A. A., i Talianyskyi, I. I. (2011). *Metody matematychnoi fizyky*. [Methods of mathematical physics]. Lviv: Lvivskiy natsionalnyi universytet im. I. Franka.
- [11] Saitoh, S., & M. Yamamoto, M. (1999). Integral transforms involving smooth functions. *Reproducing Kernels and Their Applications, Springer, Boston, MA*, pp. 149–164. [in English].
- [12] Cherskyi Yu. Y. (1988). Bahatomirne parne rivniannia na uzgodzhennykh mnozhynakh. [Multivariate pairwise equation on consistent sets]. *Dopovidi AN URSS – Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Ser. A, № 6*, pp.24–25. [in Ukrainian].
- [13] Cherskyi Yu. Y., Kereksha P.V., i Kereksha D. P. (2010). Metod sopriazheniya analytycheskykh funktsyi s prylozheniyamy. [Method of conjugation of analytic functions with applications]. Odessa: Astroprint. [in Russian].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Березанський, Ю.М., Ус, Г.Ф., і Шефтель, З.Ф. (2014). *Функціональний аналіз*. Львів.
- [2] Hryhoriev, Yu. A., & Grygoriev, A. Yu., (2020). *Extremum problem in convolutions with additional conditions on the axis*. International Journal of Applied Mathematics, 2, Vol. 33, pp. 355 – 367. DOI: <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v33i2.13>
- [3] Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. И., и А.В. Усов А. В. (2017). *Моделирование та оптимізація систем*. Вінниця: ПП «ТД Едельвейс».
- [4] Керекеша, Д. П. (2005). До теорії задачі Карлемана для смуги з аналітичним продовженням у верхню півплощину. *Крайові задачі для диференціальних рівнянь. Зб. наук. праць. Чернівці: Прут. Вип. 12. С. 129 – 136.*
- [5] Керекеша, П. В. (2002). *Задача теорії пружності з конвективним теплообміном на гранях при наявності джерел тепла*. ДАН України. № 8. С. 47 – 55.
- [6] Kryvyi, O. F., & Morozov, O. Yu. (2020). *The fundamental solution of the problem of thermoelasticity for a piecwise homogeneous transversely isotropic elastic space*. Дослідження в математиці і механіці. Том 25 № 1(35). С. 16–30.
- [7] Ленюк, М. П. (2004). *Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1*. Тернопіль : Економ. Думка.
- [8] Masujima, M. (2005). *Wiener-Hopf method and Wiener-Hopf integral equation*. Applied Mathematical Methods in Theoretical Physics, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 177–247.
- [9] Перестюк, М.О., Маринець, В. В. (2006). *Теорія рівнянь математичної фізики*. Київ: Вид. Либідь.

- [10] Піх, С. С., Попель, О. М., Ровенчак, А. А., і Тальянський, І. І. (2011). *Методи математичної фізики*. Львів: Львівський національний університет ім. І. Франка.
- [11] Saitoh, S., & M. Yamamoto, M. (1999). *Integral transforms involving smooth functions*. In: *Reproducing Kernels and Their Applications*, Springer, Boston, MA, 149–164.
- [12] Черський, Ю. Й. (1988). *Багатомірне парне рівняння на узгоджених множинах*. Доповіді АН УРСР, серія А. № 6. С. 24–25.
- [13] Черский Ю. И., Керекеша П.В., і Керекеша Д. П. (2010). *Метод сопряжения аналитических функций с приложениями*. Одесса: Астропринт.

© Сиваш С. Б.

Дата надходження статті до редакції: 03.06.2023

Дата затвердження статті до друку: 19.06.2023