

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до курсового проєктування з дисципліни
«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ»

Рекомендовано Методичною радою НУК



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2021

УДК 681.5(076)

М54

Автори: І. С. Білюк, канд. техн. наук, доцент;
О. С. Кириченко, канд. техн. наук, доцент;
С. О. Гаврилов, канд. техн. наук;
О. В. Савченко, зав. лабораторії;
Г. А. Білюк, методист

Рецензент С. М. Новогрецький, канд. техн. наук, доцент

Рекомендовано Методичною радою НУК

Методичні вказівки до курсового проектування з дисципліни М54 «Дослідження операцій електромеханічних систем» / І. С. Білюк, О. С. Кириченко, С. О. Гаврилов, О. В. Савченко, Г. А. Білюк. — Миколаїв : НУК, 2021. — 68 с.

У методичних вказівках наведено методики розрахунку, які можуть бути використані під час курсового проектування для синтезу системи автоматичного керування з модальним регулятором та спостерігачем стану. Розглянуто опис стану лінійних систем у нормальній формі, поняття про простір стану та загальну постановку задачі оптимального керування. Також висвітлено питання синтезу оптимальних лінійних систем за квадратичним показником якості, питання керованості та спостережуваності лінійних систем, перетворення подібності і канонічних форм рівнянь стану, питання модального керування зі зворотним зв'язком за станом, стандартні характеристичні поліноми замкнутих систем, питання синтезу систем з модальними регуляторами та спостережними пристроями.

Призначено для студентів денної та заочної форм навчання за освітньою програмою «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» галузі знань 14 «Електрична інженерія».

УДК 681.5(076)

© Білюк І. С., Кириченко О. С., Гаврилов С. О.,
Савченко О. В., Білюк Г. А., 2021
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2021

1. ОПИС СТАНУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ У НОРМАЛЬНІЙ ФОРМІ

1.1. Нормальна форма рівнянь стану і виходу

Багато систем можуть бути описані векторним лінійним диференціальним рівнянням стану в нормальній формі Коші [1, 2, 11, 12, 16]:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

і рівнянням спостереження

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u},$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця об'єкта розміром $n \times n$;

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$ – матриця керування розміром $n \times m$;

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix}$ – матриця спостереження розміром $r \times n$;

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{pmatrix} \text{ – матриця зв'язку розміром } r \times m.$$

Матриця A , елементи якої визначаються структурною схемою системи та значенням її параметрів, характеризує динамічні властивості системи, її вільний рух. Матриця керування B – вплив зовнішніх дій на змінні стану системи, тобто визначає чутливість системи до зовнішніх дій як задавальних, так і збурювальних. Матриця спостереження C характеризує зв'язок вихідної величини системи з вектором стану. Зазвичай не всі складові вектора стану є спостережними сигналами, тобто можуть бути виміряні за допомогою будь-яких датчиків, у той час коли вихідний сигнал завжди є спостережним. Матриця зв'язку D встановлює зв'язок вихідної величини системи з зовнішніми діями.

На рис. 1.1 показано структурну схему системи керування, що відповідає матричним рівнянням стану. Подвійні лінії характеризують векторні зв'язки.

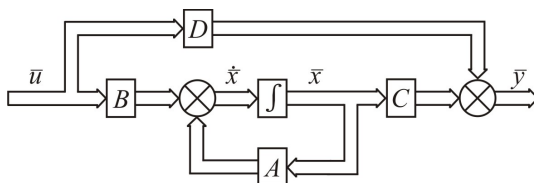


Рис. 1.1. Структурна схема системи в матричній формі

Розглянута модель системи у просторі стану буде основою для подальшого аналізу.

1.2. Перехід від структурної схеми системи до нормальних рівнянь стану

Для системи, заданої структурною схемою, процедура побудови математичної моделі у просторі стану складається з двох етапів:

1. Прийняти вихід кожної інтегральної та аперіодичної ланки за змінну стану.
2. Записати передавальні функції для кожної інтегральної та аперіодичної ланки і скласти диференціальні рівняння стану в нормальній формі Коші.

1.3. Матрична передавальна функція системи

Розглянемо об'єкт керування

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}; \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Означення. Вираз

$$W(p) = C(pI - A)^{-1} B + D\tag{1.2}$$

називається матричною передавальною функцією системи (1.1) від входу $\bar{u}$ до виходу $\bar{y}$. У ньому буквою I позначено одиничну матрицю.

Матриця $(pI - A)^{-1}$ називається *резольвентою*, а визначник $\det(pI - A)$ є *характеристичний поліном* даної розімкненої системи.

Зауважимо, що $W(p)$ має розмір $r \times m$ і є функцією комплексної змінної від оператора Лапласа p .

Скористаємося для виводу формули (1.2) інтегральним перетворенням Лапласа. Для цього при нульовій початковій умові $\bar{x}_0 = 0$ перейдемо до зображень за Лапласом:

$$\bar{x}(p) \doteq L\{\bar{x}(t)\}, \quad \bar{y}(p) \doteq L\{\bar{y}(t)\}, \quad \bar{u}(p) \doteq L\{\bar{u}(t)\}.$$

Тоді, коли визначник $\det(pI - A) \neq 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} \bar{x}(p) &= (pI - A)^{-1} B \bar{u}(p); \\ \bar{y}(p) &= (C(pI - A)^{-1} B + D) \bar{u}(p). \end{aligned}$$

Таким чином, маємо матричний множник, що зв'язує зображення за Лапласом вхідного $\bar{u}(p)$ та вихідного $\bar{y}(p)$ сигналів при нульовій початковій умові – *матричну передавальну функцію* (1.2) системи (1.1).

2. ВВЕДЕННЯ В ПРОСТІР СТАНУ. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

2.1. Загальні відомості

В теорії керування в загальному випадку розглядаються системи (об'єкти), на поведінку яких можна впливати (якими можна керувати) шляхом зміни параметрів керування. Останні обираються з урахуванням певних обмежень.

Теоретичний та практичний інтерес представляє оптимальне керування.

Метою теорії оптимального керування є розробка методу такого вибору параметрів керування, за якого буде досягнуто оптимум деякого функціоналу, наприклад: мінімум часу, максимум корисності, мінімум витрат і т. ін.

В електромеханіці, наприклад, задачі такого роду виникають при синтезі оптимальних режимів руху систем керування електроприводів різноманітного призначення.

Для їх вирішення застосовуються методи варіаційного числення і простору стану. Вони суттєво спрощують розв'язання оптимальних задач.

2.2. Поняття про простір стану

В загальному випадку об'єкт керування може бути представлений у вигляді структурної схеми (рис. 2.1) [7, 8, 10].

Уся сукупність параметрів, яка визначає стан об'єкта на даній структурній схемі, поділена на такі групи:

1. Вхідні параметри (зовнішні дії):

а) керуючі $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$;

б) випадкові збурювальні $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$.

2. Вихідні параметри:

а) спостереження $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)^T$;

б) проміжні $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

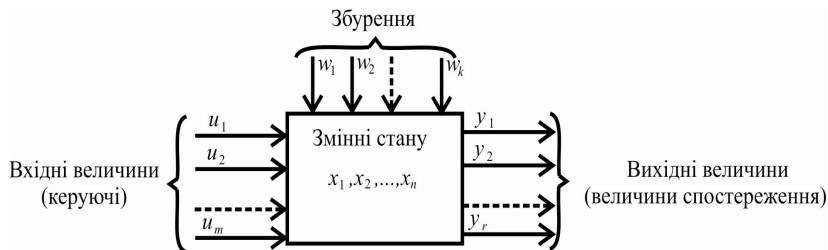


Рис. 2.1. Структурна схема об'єкта керування

Проміжні параметри однозначно визначають стан керуючого об'єкта. Їх також називають змінними стану, або *фазовими координатами*.

Множини всіх значень компонент, які мають вектори $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ та $\bar{y}$, утворюють відповідно простір стану (фазовий простір), простір керування, простір збурень (стохастичний простір) та простір спостережень.

Стан об'єкта в кожний момент часу можна зобразити у вигляді точки n -вимірного простору, яка є кінцем фазового вектора $\bar{x}$, що виходить з початку координат. Цю точку називають *зображувальною точкою*.

При русі об'єкта кінець фазового вектора описує в n -вимірному просторі деяку криву – *фазову траєкторію*. Для механічних об'єктів фазова траєкторія має бути неперервною функцією часу.

2.3. Загальна постановка задачі оптимального керування

Поведінка об'єкта керування для широкого класу задач може бути описана системою нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}[\bar{x}(t), \bar{u}(t), t], \quad (2.1)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n -вимірний вектор стану (фазовий вектор), який визначає становище системи; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$ – r -вимірний керуючий вектор; $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – n -вимірний векторна функція; t – час.

Звичайно задача оптимального керування формулюється таким чином.

Дано:

1. Рівняння стану об'єкта керування (2.1).
2. Системи граничних умов, які накладені на змінні стану в початковий t_0 та кінцевий t_f моменти часу:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(t_f) = \bar{x}_f, \quad (2.2)$$

де $\bar{x}_0, \bar{x}_f$ – задані множини.

Вектор $\bar{x}(t_0)$ називається *лівим*, а вектор $\bar{x}(t_f)$ – *правим кінцем фазової траєкторії*.

В залежності від вигляду граничних умов (2.2) розрізняють задачі з фіксованими кінцями (кожна множина $\bar{x}_0$ і $\bar{x}_f$ складається з однієї точки, а всі фазові координати в початковий і кінцевий моменти часу задані, тобто зафіксовані), рухомим правим кінцем (коли $\bar{x}_f$ складається більш ніж з однієї точки), з рухомим лівим кінцем ($\bar{x}_0$ складається більш ніж з однієї точки) і з рухомими кінцями (обидва кінці рухомі).

3. Система обмежень, яка накладена на змінні стану та керування:

$$\bar{x}(t) \in \bar{x}_t, \quad \bar{u}(t) \in \bar{U}_t, \quad (2.3)$$

де $\bar{x}_t, \bar{U}_t$ – деякі задані множини.

4. Показник якості (критерій оптимальності) або функціонал

$$F = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt, \quad (2.4)$$

де g_0, f_0 – скалярні функції.

Видно, що *функціонал* – це така функція, у якої незалежною змінною є інша функція.

Треба знайти таке допустиме керування $\bar{u}(t)$, при якому $F \rightarrow \max(\min)$.

Керування, що є розв'язком сформульованої задачі, називають оптимальним, а відповідну йому траєкторію оптимальною.

В залежності від вигляду показника якості F звичайно відрізняють три класи задач оптимального керування:

1) задача Майєра, або задача термінального керування:

$$F = F_1, \quad F_1 = g_0(\bar{x}(t_f), t_f);$$

2) задача Лагранжа:

$$F = F_2, \quad F_2 = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt;$$

3) задача Больца:

$$F = F_1 + F_2.$$

Задача (2.1)–(2.4) є так званою *неавтономною* задачею оптимального керування з незакріпленим часом, тому що підінтегральна функція в показнику якості (2.4) явно залежить від часу. Якщо вказана функція в (2.4) не залежить явно від часу, то задачу (2.1)–(2.4) називають *автономною*.

Неавтономна задача звичайно зводиться до автономної, якщо прийняти час t за змінну стану x_{n+1} [9].

Інтегрування в функціоналі Лагранжа або Больца може здійснюватися за різними інтервалами часу. В залежності від цього розрізняють задачі з фіксованим та нефіксованим часом. У задачах з фіксованим часом початковий t_0 і кінцевий t_f моменти часу зафіксовані, а в задачах з нефіксованим часом хоча б один з моментів часу t_0 і t_f не фіксований.

3. КЕРОВАНІСТЬ ТА СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Означення. Лінійний об'єкт з диференціальним рівнянням стану

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

називається *повністю керованим*, якщо існує таке необмежене керування $\bar{u}(t)$, що може перевести об'єкт з довільного початкового стану $\bar{x}(t_0)$ в будь-який інший заданий стан $\bar{x}(t_f)$ за кінцевий час $(t_f - t_0)$ [4, 12, 16].

Твердження. Лінійний n -вимірний об'єкт з постійними параметрами

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

є повністю керованим тоді й тільки тоді, коли ранг матриці керованості

$$P = (B \quad AB \quad A^2B \dots A^{n-1}B)$$

дорівнює n .

Зауважимо, що рангом матриці називають найбільший порядок її мінору, який відрізняється від нуля, причому всякий мінор більш вищого порядку дорівнює нулю.

Спостережуваність системи пов'язана з її здатністю оцінювати змінні стану.

Означення. Неперервна лінійна система

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t); \quad (3.1)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \quad (3.2)$$

називається *спостережною*, якщо її початковий вектор стану $\bar{x}(t_0)$ можна визначити, знаючи вихідний вектор $\bar{y}(t)$,

вимірюваний на деякому інтервалі часу $t \in [t_0; t_f]$ при заданому керуванні $\bar{u}(t)$. Якщо це справедливо для будь-якого t_0 , то система називається *повністю спостережною* [4, 12, 16].

Твердження. Система (3.1), (3.2) повністю спостережна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці спостережуваності

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

дорівнює n .

4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ. КАНОНІЧНІ ФОРМИ РІВНЯНЬ СТАНУ

4.1. Перетворення подібності

Нехай стан системи описується матричними рівняннями

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}; \quad (4.1)$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}. \quad (4.2)$$

Введемо новий вектор

$$\bar{v} = T \bar{x},$$

де T – матриця перетворення.

Якщо $\det T \neq 0$, то існує зворотнє перетворення

$$\bar{x} = T^{-1} \bar{v}. \quad (4.3)$$

Підставимо (4.3) в (4.1):

$$T^{-1} \dot{\bar{v}} = AT^{-1} \bar{v} + B\bar{u}.$$

Звідси

$$\dot{\bar{v}} = TAT^{-1}\bar{v} + TB\bar{u}. \quad (4.4)$$

Рівняння виходу (4.2) з урахуванням (4.3) приймає вигляд

$$\bar{y} = CT^{-1}\bar{v} + D\bar{u}. \quad (4.5)$$

Запишемо рівняння стану системи відносно вектора $\bar{v}$:

$$\dot{\bar{v}} = \tilde{A}\bar{v} + \tilde{B}\bar{u}; \quad (4.6)$$

$$\bar{y} = \tilde{C}\bar{v} + \tilde{D}\bar{u}. \quad (4.7)$$

У цих формулах хвиляста лінія над матрицями означає перетворення подібності.

Порівнюючи (4.6) з (4.4) та (4.7) з (4.5), знаходимо

$$\tilde{A} = TAT^{-1}; \quad \tilde{B} = TB; \quad \tilde{C} = CT^{-1}; \quad \tilde{D} = D.$$

Отримані вирази для перетворених матриць показують, що задача побудови математичної моделі в змінних стану не має однозначного розв'язку. Саме тому її приводять до тієї чи іншої канонічної форми.

Можна переконатися, що перетворення подібності не змінюють вид матричної передавальної функції, тобто

$$C(pI - A)^{-1} B + D = \tilde{C}(pI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} + \tilde{D}.$$

Звідси випливає, що $\det(pI - A) = \det(pI - \tilde{A})$.

4.2. Канонічна керована форма Луенбергера

При перетвореннях подібності було встановлено, що існує багато способів надання рівнянь стану системи. Саме тому уявляється доцільним вибрати кращий з них. Така форма запису рівнянь називається канонічною. Оскільки існують різноманітні системи, то є і багато канонічних форм. Тому розглянемо найбільш поширені з них – канонічні керовану та спостережену форми Луенбергера [3, 4, 12]. Ці форми запису застосовують для систем з одним входом та виходом.

Рівняння стану в канонічній формі Луенбергера має вигляд

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} + \tilde{B}u, \quad (4.8)$$

де

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} - \text{матриця Фробеніуса};$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u - \text{скаляр.}$$

Відмітимо, що матрицю Фробеніуса $\tilde{A}$ називають також *супровідною матрицею*.

Рівнянню (4.8) відповідає наступний характеристичний поліном:

$$\det(pI - \tilde{A}) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (4.9)$$

Таким чином, коефіцієнти характеристичного полінома (4.9), взяті з протилежним знаком, є елементами останнього рядка матриці Фробеніуса рівняння (4.8).

Твердження. Для того щоб рівняння стану

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu$$

неособливим перетворенням можна було представити в керовану форму Луенбергера, необхідно та достатньо, щоб пара (A, B) була повністю керованою.

4.3. Спостережна канонічна форма Луенбергера

Розглянемо рівняння об'єкта керування

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu; \\ \bar{y} &= C\bar{x}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Твердження. Якщо система (9.10) повністю спостережна, то вона може бути приведена шляхом перетворень до спостережної канонічної форми Луенбергера наступного виду:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} - \text{матриця Фробеніуса};$$

$$\tilde{C} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1).$$

У цьому випадку матриця перетворень може бути визначена за формулою

$$T = \tilde{N}^{-1}N,$$

де $\tilde{N}$, N – відповідно матриці спостережуваності канонічної та початкової моделей.

5. МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ ЗА СТАНОМ

5.1. Синтез регуляторів з бажаними показниками якості

Характер перехідних процесів у системі визначається розташуванням коренів її характеристичного рівняння. Тому забезпечити бажані перехідні процеси можна за рахунок відповідного розташування коренів на комплексній площині. Регулятори, побудовані таким чином, називаються модальними регуляторами [13–15, 19]. Виникнення терміна «модальне керування» пояснюється тим, що кореням відповідають складові вільного руху системи, які інколи називають «модами» [3–5, 12, 17].

Розглянемо задачу модального керування при повному вимірюванні вектора стану об'єкта $\bar{x}(t)$. Для спрощення викладу будемо вважати, що керування $u(t)$ є скалярним.

Нехай поведінка об'єкта керування визначається рівнянням

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu. \quad (5.1)$$

Розглянемо закон керування вигляду

$$u(t) = -K\bar{x}(t), \quad (5.2)$$

де $K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n)$ – невідома матриця коефіцієнтів регулятора.

Замкнута система «об'єкт-регулятор» описується рівнянням

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A - BK) \bar{x}(t). \quad (5.3)$$

Необхідно визначити такі коефіцієнти $k_1, k_2, \dots, k_n$ регулятора (елементи матриці K), щоб характеристичний поліном

$$D_6(p) = \det(pI - A + BK) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n$$

мав задані бажані коефіцієнти d_i .

Розглянемо процедуру синтезу більш детально.

Припустимо спочатку, що рівняння (10.1) відповідає канонічній керованій формі Луенбергера, тобто матриці A та B мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Тоді

$$\det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

При використанні регулятора (5.2) з матрицею K , як легко переконатися безпосередньою підстановкою, матриця $A - BK$ замкнутої системи (5.3) також має вигляд матриці Фробеніуса та її характеристичний поліном

$$\begin{aligned} \det(pI - A + BK) = \\ = p^n + (a_1 + k_n) p^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + k_2) p + a_n + k_1. \end{aligned}$$

Дорівнюючи коефіцієнти цього багаточлена до заданих значень d_i , отримаємо наступні вирази для параметрів регулятора:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = d_n - a_n; \\ k_2 = d_{n-1} - a_{n-1}; \\ \dots\dots\dots \\ k_{n-1} = d_2 - a_2; \\ k_n = d_1 - a_1, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

або

$$k_i = d_{n-i+1} - a_{n-i+1} \dots i = \overline{1, n}.$$

Нехай тепер рівняння стану системи записані в довільній, а не в канонічній формі, а об'єкт (5.1) є повністю керованим. У цьому випадку існує матриця T перетворень подібності, що приводить рівняння стану до керованої форми Луенбергера. Вона знаходиться, як було з'ясовано вище, за формулою

$$T = \tilde{P} P^{-1},$$

де $\tilde{P}, P$ – матриці керованості канонічної та початкової форм відповідно.

Отже, вважаємо, що матриці перетвореного об'єкта

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{B} = TB$$

мають вигляд (5.4), причому

$$\det(pI - A) = \det(pI - \tilde{A}).$$

Знайдемо для системи $(\tilde{A}, \tilde{B})$ коефіцієнти модального регулятора (елементи матриці $\tilde{K}$) за формулою (5.5). Далі виконаємо перехід до початкового базису. Для цього помітимо, що оскільки

$$\bar{v}(t) = T \bar{x}(t),$$

то

$$u(t) = -\tilde{K} \bar{v}(t) = -\tilde{K} T \bar{x}(t),$$

звідси

$$K = \tilde{K} T.$$

Таким чином, для повністю керованої системи зі скалярним керуванням отримані коефіцієнти зворотного зв'язку модального регулятора.

5.2. Алгоритм розрахунку коефіцієнтів модального регулятора

1. Складаємо рівняння стану об'єкта у векторній формі:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t).$$

2. Обчислюємо матрицю керованості

$$P = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

та перевіряємо повну керованість системи за рангом цієї матриці. Він повинен збігатися з розмірністю системи.

3. Знаходимо вираз для характеристичного полінома розімкнутої системи та нормуємо його за коефіцієнтами за старшим ступенем оператора Лапласа:

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

4. Задаємо бажаний характеристичний поліном

$$D_{\delta}(p) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n.$$

5. Розраховуємо коефіцієнти модального регулятора перетвореної системи:

$$\tilde{k}_i = d_{n-i+1} - a_{n-i+1} \quad i = \overline{1, n}.$$

6. Обчислюємо матрицю перетворень

$$T = \tilde{P} P^{-1},$$

або за формулою Аккермана

$$T = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ P_1 A^2 \\ \dots \\ P_1 A^{n-1} \end{pmatrix}, \quad P_1 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) P^{-1}.$$

7. Розраховуємо коефіцієнти модального регулятора початкової системи:

$$K = \tilde{K} T.$$

5.3. Формула Аккермана

Для системи з одним входом і одним виходом матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом $K = (k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n)$, за допомогою якої формується керуючий сигнал $u(t) = -K\bar{x}(t)$, можна знайти за формулою Аккермана [12, 17].

Якщо задано бажаний характеристичний поліном замкнутої системи

$$D_6(p) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n,$$

то матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом

$$K = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)P^{-1}D_6(A),$$

де

$$D_6(A) = A^n + d_1 A^{n-1} + \dots + d_{n-1} A + d_n I;$$

$$P = (B \quad AB \quad A^2 B \quad \dots \quad A^{n-1} B).$$

Відмітимо, що елементи матриці K можуть бути розраховані безпосередньо при розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь, отриманої шляхом прирівнювання виразів для коефіцієнтів бажаного та дійсного характеристичного поліномів замкнутих систем. Цей метод зручно застосовувати при розрахунках вручну. В цьому випадку відпадає необхідність зведення рівнянь стану до канонічної форми.

6. СТАНДАРТНІ ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПОЛІНОМИ ЗАМКНУТИХ СИСТЕМ

При синтезі модального регулятора використовуються стандартні характеристичні поліноми [5, 6, 12, 18]. Для цих поліномів вивчені та побудовані криві перехідних процесів. Ці криві є оптимальними відносно деякого критерію якості та трактуються як *бажані характеристики перехідних процесів*.

Розглянемо основні види характеристичних поліномів та бажані характеристики перехідних процесів.

6.1. Характеристичні поліноми моделі, що оптимізовані за інтегральним критерієм якості

Інтегральний критерій якості описується виразом

$$F = \int_0^{\infty} t |l(t) - h(t)| dt,$$

де $l(t)$ – одинична ступінчаста функція; $h(t)$ – перехідна функція системи.

За результатами мінімізації цього інтеграла можна одержати оптимальні перехідні процеси для систем різного порядку. На рис. 6.1 такі процеси наведені для систем 2–6 порядків у залежності від безрозмірного часу $\tau = q_0 t$ (q_0 – базова частота або середньгеометричний корінь полінома, t – час).

У таблиці 6.1. наведені характеристичні поліноми, які відповідають графікам на рис. 6.1, а також відносний час перехідного процесу τ_n .

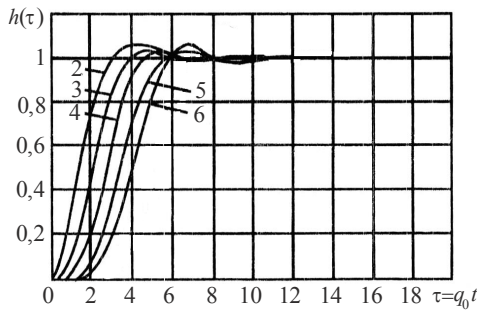


Рис. 6.1. Перехідні характеристики моделі,
що оптимізовані за критерієм $F = \int_0^{\infty} |l(t) - h(t)| dt$

Таблиця 6.1. Характеристичні поліноми моделей, що оптимізовані за критерієм $F = \int_0^{\infty} |l(t) - h(t)| dt$

Степінь полінома	Вид полінома	τ_{Π}
2	$p^2 + 1,41 q_0 p + q_0^2$	2,8
3	$p^3 + 1,75 q_0 p^2 + 2,15 q_0^2 p + q_0^3$	3,6
4	$p^4 + 2,1 q_0 p^3 + 3,4 q_0^2 p^2 + 2,7 q_0^3 p + q_0^4$	4,7
5	$p^5 + 2,8 q_0 p^4 + 5 q_0^2 p^3 + 5,5 q_0^3 p^2 + 3,4 q_0^4 p + q_0^5$	7,8
6	$p^6 + 3,25 q_0 p^5 + 6,6 q_0^2 p^4 + 8,6 q_0^3 p^3 + 7,45 q_0^4 p^2 + 3,95 q_0^5 p + q_0^6$	5,4

6.2. Характеристичні поліноми Бесселя–Томсона

Такі поліноми використовуються для усунення фазових викривлень сигналів, які будуть тим більше, чим більше фазова частотна характеристика системи відрізняється від лінійної характеристики.

Фільтри Бесселя–Томсона мають фазочастотну характеристику, близьку до лінійної.

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми моделі Бесселя–Томсона наведені відповідно на рис. 6.2 та в табл. 6.2.

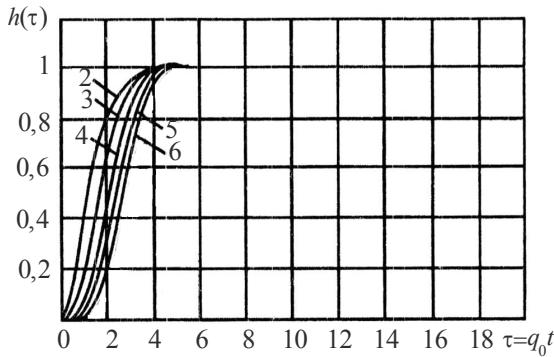


Рис. 6.2. Перехідні характеристики моделі Бесселя–Томсона

Таблиця 6.2. Характеристичні поліноми моделі Бесселя–Томсона

Степінь полінома	Вид полінома
2	$p^2 + 2,2 q_0 p + 1,62 q_0^2$
3	$p^3 + 3,42 q_0 p^2 + 4,87 q_0^2 p + 2,77 q_0^3$
4	$p^4 + 4,73 q_0 p^3 + 10,1 q_0^2 p^2 + 11,1 q_0^3 p + 5,26 q_0^4$
5	$p^5 + 6,18 q_0 p^4 + 17,8 q_0^2 p^3 + 29,4 q_0^3 p^2 + 27,2 q_0^4 p + 11,2 q_0^5$
6	$p^6 + 7,77 q_0 p^5 + 28,7 q_0^2 p^4 + 63,8 q_0^3 p^3 + 88,5 q_0^4 p^2 + 72 q_0^5 p + 26,6 q_0^6$

6.3. Характеристичні поліноми Баттерворта

Дані поліноми використовуються для усунення амплітудних викривлень, за яких амплітудно-частотна характеристика системи є плоскою в робочому діапазоні частот.

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми Баттерворта наведені відповідно на рис. 6.3 та в табл. 6.3.

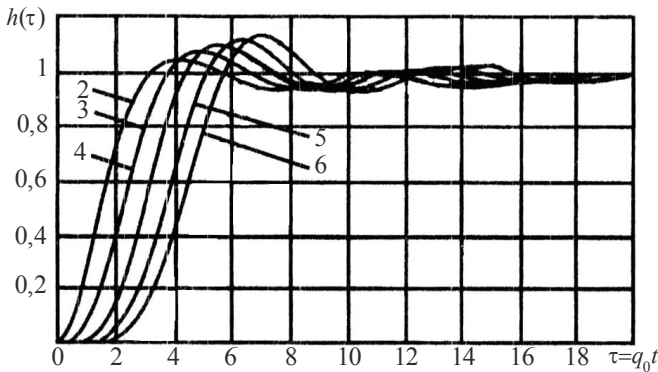


Рис. 6.3. Перехідні характеристики моделі Баттерворта

Таблиця 6.3. Характеристичні поліноми моделі Баттерворта

Степінь полінома	Вид полінома	τ_n
2	$p^2 + 1,41 q_0 p + q_0^2$	2,8
3	$p^3 + 2 q_0 p^2 + 2 q_0^2 p + q_0^3$	5,9
4	$p^4 + 2,6 q_0 p^3 + 3,6 q_0^2 p^2 + 2,6 q_0^3 p + q_0^4$	6,9
5	$p^5 + 3,24 q_0 p^4 + 5,24 q_0^2 p^3 + 5,24 q_0^3 p^2 + 3,24 q_0^4 p + q_0^5$	7,8
6	$p^6 + 3,86 q_0 p^5 + 7,46 q_0^2 p^4 + 9,13 q_0^3 p^3 + 7,46 q_0^4 p^2 + 3,86 q_0^5 p + q_0^6$	8,0

6.4. Характеристичні поліноми Еллерта

Забезпечують нульову швидкісну похибку та мінімальне перегулювання, що не перевищує 10 %.

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми моделі Еллерта наведені відповідно на рис. 6.4 та в табл. 6.4.

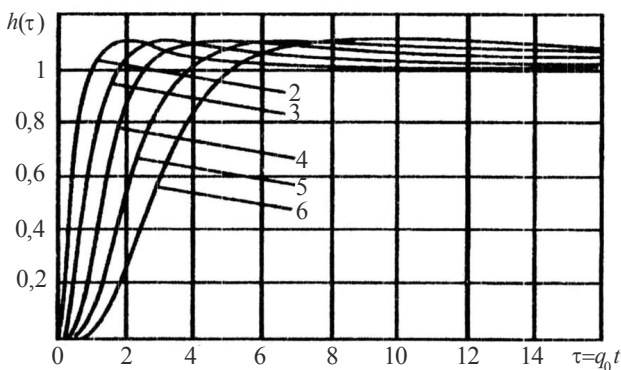


Рис. 6.4. Перехідні характеристики моделі Еллерта

Таблиця 6.4. Характеристичні поліноми моделі Еллерта

Степінь полінома	Вид полінома
2	$p^2 + 2,5 q_0 p + q_0^2$
3	$p^3 + 5,1 q_0 p^2 + 6,3 q_0^2 p + q_0^3$
4	$p^4 + 7,2 q_0 p^3 + 16 q_0^2 p^2 + 12 q_0^3 p + q_0^4$
5	$p^5 + 9 q_0 p^4 + 29 q_0^2 p^3 + 38,5 q_0^3 p^2 + 18 q_0^4 p + q_0^5$
6	$p^6 + 11 q_0 p^5 + 43 q_0^2 p^4 + 83 q_0^3 p^3 + 73 q_0^4 p^2 + 25 q_0^5 p + q_0^6$

6.5. Характеристичні поліноми біноміальної моделі

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми біноміальної моделі отримані на базі бінома Ньютона та наведені відповідно на рис. 6.5 і в табл. 6.5.

Стандартні характеристичні поліноми розглянутих моделей отримують з відповідних поліномів n -го степеня цих моделей:

$$D_0 p^n + D_1 p^{n-1} + \dots + D_i p^{n-i} + \dots + D_{n-1} p + D_n$$

шляхом ділення на D_0 з подальшим перетворенням до вигляду

$$D_6(p) = p^n + c_1 q_0 p^{n-1} + \dots + c_i q_0^i p^{n-i} + \dots + c_n q_0^n,$$

$$\text{де } q_0 = \sqrt[n]{\frac{D_n}{D_0}}; \quad c_i = \frac{D_i}{D_0 q_0^i}.$$

Відносний час перехідного процесу τ_{Π} визначається за перехідними характеристиками. Часом перехідного процесу t_{Π} зазвичай задаються.

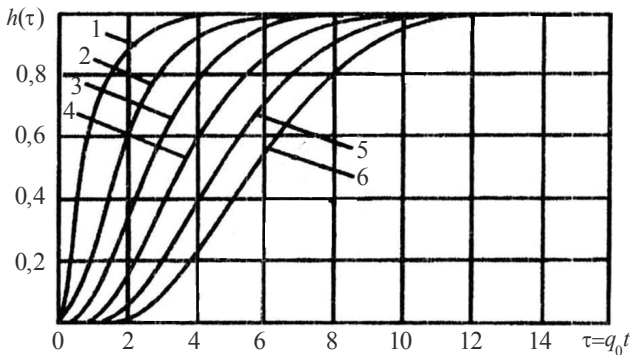


Рис. 6.5. Перехідні характеристики біноміальної моделі

Таблиця 6.5. Характеристичні поліноми біноміальної моделі

Степінь полінома	Вид полінома	τ_{Π}
2	$p^2 + 2 q_0 p + q_0^2$	4,8
3	$p^3 + 3 q_0 p^2 + 3 q_0^2 p + q_0^3$	6,3
4	$p^4 + 4 q_0 p^3 + 6 q_0^2 p^2 + 4 q_0^3 p + q_0^4$	7,5
5	$p^5 + 5 q_0 p^4 + 10 q_0^2 p^3 + 10 q_0^3 p^2 + 5 q_0^4 p + q_0^5$	9,1
6	$p^6 + 6 q_0 p^5 + 15 q_0^2 p^4 + 20 q_0^3 p^3 + 15 q_0^4 p^2 + 6 q_0^5 p + q_0^6$	—

7. СИНТЕЗ СПОСТЕРІГАЮЧИХ ПРИСТРОЇВ

При синтезі оптимальних систем зі зворотним зв'язком за станом та бажаними показниками якості перехідних процесів параметри керування приймаються пропорційними фазовим координатам. Але не всі фазові координати піддаються виміру. Доступними виміру (відновленню або спостереженню) є координати вихідного вектора. Вони функціонально пов'язані з фазовими координатами. Тому фазові координати зазвичай визначаються за вимірами значень вихідних змінних за допомогою спеціальних пристроїв – спостерігачів [3–5, 11, 12].

Розрізняють спостерігачі повного та зниженого порядку. Спостерігачі повного порядку повністю відновлюють вектор стану, а зниженого порядку – частково.

Емпірично встановлено, що спостерігач повинен мати швидкодію не менше ніж у 2...4 рази більшу за швидкодію об'єкта керування.

7.1. Спостерігач повного порядку

Перейдемо до задачі синтезу спостерігача повного порядку, який повністю відновлює поточні значення фазових координат (фазового вектора $\bar{x}(t)$). Відновлені значення цих координат називають оцінками. Позначимо їх фазовий вектор $\hat{\bar{x}}(t)$. Оцінки отримують за вимірами (спостереженнями) вектора керування $\bar{u}(t)$ та вихідного вектора $\bar{y}(t)$ на інтервалі часу $t_0 \leq t \leq t_f$.

Означення. Пристрій, що описується рівнянням

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = F\hat{\bar{x}} + G\bar{y} + H\bar{u}, \quad (7.1)$$

називається спостерігачем повного порядку для керованої системи

$$\dot{\hat{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}; \quad (7.2a)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}, \quad (7.2б)$$

якщо при $\hat{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$ виконується рівність $\hat{x}(t) = \bar{x}(t)$ при усіх $\bar{u}(t); t \geq t_0$.

Спостерігач (7.1) названо спостерігачем повного порядку, оскільки оцінка $\hat{x}$ має таку саме розмірність, що і вектор стану $\bar{x}$.

Теорема. Спостерігач повного порядку для керованої системи (8.2) має вигляд:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\bar{u} + G(\bar{y} - C\hat{x}), \quad (7.3)$$

де G – довільна матриця, яка може бути функцією від часу та яка називається матрицею коефіцієнтів підсилення.

Доведення. Підставимо (8.2б) у (8.1):

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + G\tilde{N}\bar{x} + H\bar{u}. \quad (7.4)$$

Віднімемо з (8.2а) рівняння (8.4):

$$\dot{\hat{x}} - \dot{\bar{x}} = (A - GC)\bar{x} - F\hat{x} + (B - H)\bar{u}.$$

Із цього рівняння випливає, що при початковій умові $\hat{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$ рівність $\hat{x}(t) = \bar{x}(t)$ буде виконуватися при усіх $\bar{u}(t); t \geq t_0$, якщо мають місце такі рівності:

$$A - GC = F, \quad B = H. \quad (7.5)$$

Оскільки в перше рівняння входять дві невідомі матриці G та F , одну з них, наприклад матрицю G , можна вважати

довільною. Підставивши вираз (7.5) для матриць F та H у рівняння (7.1), отримаємо вираз (7.3). Теорема доведена.

З рівняння (7.3) випливає, що спостерігач системи (7.2) включає в себе саму систему та додатковий доданок, пропорційний різниці $\bar{y} - \hat{y}$ вихідного вектора $\bar{y}$ та його оцінки $\hat{y} = C\hat{x}$.

Матрична структурна схема спостерігача повного порядку представлена на рис. 7.1.

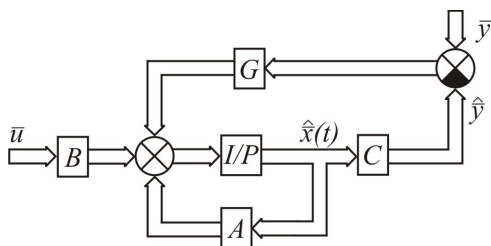


Рис. 7.1. Матрична структурна схема спостерігача повного порядку

З формули (7.3) видно, що спостерігач повного порядку можна також представити у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + B\bar{u} + G\bar{y}.$$

Звідси випливає, що стійкість спостерігача (7.3) визначається поведінкою матриці $A - GC$.

Рівняння для помилки $\Delta\bar{x} = \hat{x} - \bar{x}$ має вигляд

$$\Delta\dot{\bar{x}} = (A - GC)\Delta\bar{x}. \quad (7.6)$$

Звідси випливає, що помилка $\Delta\bar{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ незалежно від початкової помилки тоді й тільки тоді, коли спостерігач є асимптотично стійким. Тому вибір матриці ко-

ефіцієнтів G , до якої зводиться синтез спостерігача (7.3), повинен відбуватися згідно з умовами стійкості та заданими вимогами до його якості. Для детермінованих систем (усі матриці системи, в тому числі й G , постійні) це досягається відповідним розташуванням коренів характеристичного рівняння спостерігача при дотриманні критерію повної спостережуваності об'єкта керування.

7.2. Принцип роздільності

Розглянемо спостерігач сумісно з об'єктом керування і модальним регулятором:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\bar{u} + G(\bar{y} - C\hat{x}); \quad (7.7a)$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}; \quad \bar{y} = C\bar{x}; \quad (7.7б)$$

$$\bar{u} = \bar{v} - K\hat{x}, \quad (7.7в)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$; $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)^T$; A – квадратна матриця об'єкта керування розміром $n \times n$; B – прямокутна матриця розміром $n \times m$; G – матриця регулятора спостерігаючого пристрою розміром $n \times r$; C – матриця виходів, які доступні виміру, розміром $r \times n$; K – прямокутна матриця модального регулятора розміром $m \times n$.

Рівняння системи (7.7а) є рівнянням спостерігача, (7.7б) – об'єкта керування, (7.7в) – це рівняння замикання для модального регулятора.

Наведеній системі рівнянь відповідає матрична структурна схема системи, яка представлена на рис.7.2.

Запишемо характеристичний поліном спостерігача

$$D(p) = \det(pI - A + GC),$$

який впливає з рівняння (7.7а).

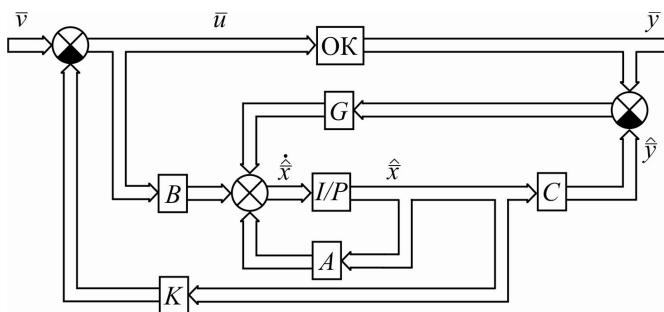


Рис. 7.2. Матрична структурна схема спостерігача повного порядку об'єкта керування (ОК) з модальним регулятором

Таким чином, спостерігач являє собою замкнуту систему, в якій зворотні зв'язки з матричним коефіцієнтом G виконують функцію модального регулятора спостерігача.

Запишемо рівняння (7.6) для помилки $\Delta\bar{x} = \hat{\bar{x}} - \bar{x}$ спостереження:

$$\Delta\dot{\bar{x}} = (A - GC)\Delta\bar{x}. \quad (7.8)$$

Із цього рівняння випливає, що при стійкому спостерігачі помилка спостереження в сталому режимі дорівнює нулю.

Система рівнянь (7.7) пов'язує між собою дві системи: об'єкт керування з модальним регулятором та спостерігач з об'єктом керування.

Припустимо, що у виразі (7.7в) $\bar{v} = 0$. Тоді отримаємо

$$\bar{u} = -K\hat{\bar{x}}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння системи (12.7а):

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = A\hat{\bar{x}} - BK\hat{\bar{x}} + G(\bar{y} - C\hat{\bar{x}}). \quad (7.9)$$

З виразу для помилки маємо

$$\hat{\bar{x}} = \bar{x} + \Delta\bar{x}. \quad (7.10)$$

Підставивши (8.10) у (8.9) та виконавши перетворення, отримаємо з урахуванням виразу (8.8) наступне рівняння:

$$\dot{\bar{x}} = (A - BK)\bar{x} - BK\Delta\bar{x}. \quad (7.11)$$

Рівняння (7.11) та (7.8) перепишемо в операторній формі:

$$(pI - A + BK)\bar{x}(p) + BK\Delta\bar{x}(p) = 0;$$

$$0 \cdot \bar{x}(p) + (pI - A + GC)\Delta\bar{x}(p) = 0.$$

Цій системі однорідних рівнянь відповідає характеристична матриця

$$\begin{pmatrix} pI - A + BK & BK \\ 0 & pI - A + GC \end{pmatrix}.$$

Її характеристичний поліном

$$D(p) = \det(pI - A + BK) \det(pI - A + GC).$$

Видно, що цей поліном складається з добутку двох характеристичних поліномів. Тому об'єкт керування, замкнутий за вектором стану, оціненим спостерігачем, можна розглядати незалежно від самого спостерігача. Цей *принцип роздільності* істотно спрощує синтез спостерігача та модального регулятора.

7.3. Алгоритм синтезу спостерігача повного порядку

Будемо вважати, що керування $u(t)$ є скалярним.

1. Складаємо рівняння стану та виходу об'єкта в векторній формі:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t);$$

$$\bar{y} = C\bar{x}.$$

2. Обчислюємо матрицю спостережуваності

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

та перевіряємо повну спостережуваність системи за рангом цієї матриці. Він повинен співпадати з розмірністю системи.

3. Знаходимо вираз для характеристичного поліному розімкнutoї системи та нормуємо його за коефіцієнтами по старшій степені оператора Лапласа:

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

4. За коефіцієнтами $D(p)$ записуємо пару матриць $(\tilde{A}, \tilde{C})$ у спостережній формі Луенбергера:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ — матриця Фробеніуса;}$$

$$\tilde{C} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1).$$

5. Задаємо бажаний характеристичний поліном

$$D_6(p) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n.$$

6. Розраховуємо елементи матриці коефіцієнтів підсилення $\tilde{G} = (\tilde{g}_1 \quad \tilde{g}_2 \quad \dots \quad \tilde{g}_n)^T$ канонічної моделі:

$$\tilde{g}_i = d_{n-i+1} - a_{n-i+1} \quad i = \overline{1, n}.$$

7. Обчислюємо матрицю перетворення

$$T = \tilde{N}^{-1}N,$$

де $N, \tilde{N}$ – матриця спостережуваності початкової і канонічної моделі.

8. Перетворимо елементи матриці $\tilde{G}$ в початковий базис:

$$G = T^{-1}\tilde{G}.$$

9. Перевіряємо елементи матриці G за формулою Аккермана

$$G = D_6(A)N^{-1}(0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T.$$

10. Будуємо структурну схему спостерігача.

7.4. Спостерігач пониженого порядку

Спостерігачі повного порядку оцінюють усі змінні стану, проте складні за виконанням, оскільки мають порівняно високий порядок.

Спостерігачі пониженого порядку (спостерігачі Луенберґера, або редуковані спостерігачі) оцінюють тільки ті змінні стану, які недоступні виміру. Змінні виходу, які доступні виміру, вимірюються датчиками. Такий спостерігач простіший у виготовленні.

Складемо математичну модель спостерігача пониженого порядку.

Нехай стан об'єкта керування визначається фазовим вектором

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T.$$

Вектор доступних виміру r вихідних змінних

$$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t))^T.$$

Вектор недоступних виміру $n-r$ змінних стану позначимо $\bar{w}(t)$, тоді

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ \bar{w}(t) \end{pmatrix}.$$

Запишемо рівняння об'єкта керування

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}; \\ \bar{y} &= C\bar{x}, \end{aligned}$$

де $C = (I \ O)$; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$; A – квадратна матриця розміром $n \times n$; B – прямокутна матриця розміром $n \times m$; I – одинична матриця розміром $r \times r$; O – нульова матриця розміром $r \times (n-r)$.

Виразимо рівняння об'єкта керування через блочні матриці:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}(t) \\ \dot{\bar{w}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ \bar{w}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \bar{u}(t);$$

$$\bar{y}(t) = (I \ O) \bar{x}(t),$$

де $A_{11}(r \times r)$, $A_{12}(r \times (n-r))$, $A_{21}((n-r) \times r)$, $A_{22}((n-r) \times (n-r))$ – матриці відповідних частин об'єкта керування; $B_1(r \times m)$, $B_2((n-r) \times m)$ – блоки матриці керування, що відповідають змінним $\bar{y}$ та $\bar{w}$.

Перепишемо це рівняння у вигляді двох матричних рівнянь:

$$\dot{\bar{y}}(t) = A_{11}\bar{y}(t) + A_{12}\bar{w}(t) + B_1\bar{u}(t); \quad (7.12a)$$

$$\dot{\bar{w}}(t) = A_{21}\bar{y}(t) + A_{22}\bar{w}(t) + B_2\bar{u}(t). \quad (7.12b)$$

У рівнянні системи (7.12а) величину

$$A_{12}\bar{w}(t) = \dot{\bar{y}}(t) - A_{11}\bar{y}(t) - B_1\bar{u}(t) \quad (7.13)$$

можна розглядати як вимірюваний змінний вектор, а величину $B_2\bar{u}(t) + A_{21}\bar{y}(t)$ у рівнянні (7.12б) – як вхідний вплив об'єкта спостереження порядку $n-r$.

Тоді, за аналогією з матричним рівнянням спостерігача повного порядку, можна записати наступне рівняння для спостерігача пониженого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}(t) = & A_{22}\hat{w}(t) + (B_2\bar{u}(t) + \\ & A_{21}\bar{y}(t)) + L(A_{12}\bar{w}(t) - A_{12}\hat{w}(t)). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Підставимо (7.13) у (7.14):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}(t) = & A_{22}\hat{w}(t) + (B_2\bar{u}(t) + A_{21}\bar{y}(t)) + \\ & + L(\dot{\bar{y}}(t) - A_{11}\bar{y}(t) - B_1\bar{u}(t) - A_{12}\hat{w}(t)). \end{aligned}$$

Це рівняння перетворимо до вигляду

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}(t) - L\dot{\bar{y}}(t) = & (A_{22} - LA_{12})\hat{w}(t) + \\ & + (A_{21} - LA_{11})\bar{y}(t) + (B_2 - LB_1)\bar{u}(t). \end{aligned}$$

Позначимо

$$\bar{z}(t) = \hat{w}(t) - L\bar{y}(t).$$

Тоді отримаємо рівняння спостерігача пониженого порядку у двох формах:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}(t) = & (A_{22} - LA_{12})\hat{w}(t) + \\ & + (A_{21} - LA_{11})\bar{y}(t) + (B_2 - LB_1)\bar{u}(t) \end{aligned} \quad (7.15)$$

та

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}(t) = & (A_{22} - LA_{12})z(t) + \\ & [A_{21} - LA_{11} + (A_{22} - LA_{12})L]\bar{y}(t) + (B_2 - LB_1)\bar{u}(t). \end{aligned} \quad (7.16)$$

При цьому

$$\hat{\bar{w}}(t) = \bar{z}(t) + L\bar{y}(t). \quad (7.17)$$

Рівнянням (7.15)–(7.17) відповідають матричні структурні схеми на рис. 7.3, де $\bar{u}_{\text{MP}}(t) = -K \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ \hat{\bar{w}}(t) \end{pmatrix}$ – керуючий вектор модального регулятора.

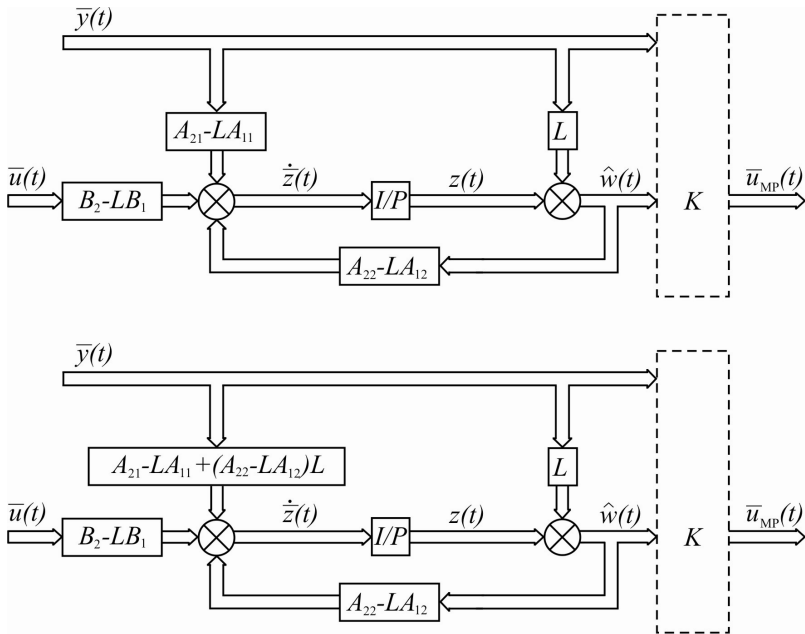


Рис. 7.3. Матричні структурні схеми спостерігача пониженого порядку

Серед важкодоступних для вимірювання можуть бути не тільки змінні стану, але й зовнішні дії на об'єкт спостереження (наприклад, моменти навантаження, флуктуація напруги, частоти енергетичного джерела живлення). Побудова спостерігача без обліку цих дій призводить до додаткових похибок в оцінках змінних стану. Виключити або принаймні послабити вплив дій, що не вимірюються, на похибку спостереження можна наступним чином:

1) створенням інваріантного редукованого спостерігача до дії, що не вимірюється, за умовою

$$B_2 - LB_1 = 0,$$

якщо при цьому при виборі L не порушуються вимоги до стійкості та динаміки;

2) включенням зовнішньої дії, яка незначно змінюється у динамічному режимі, що досліджується, у групу змінних стану за умовою $w_i(t) = \text{const}$, що відповідає рівнянню $\dot{w}_i(t) = 0$, яке доповнює рівняння стану об'єкта керування.

8. ПРИКЛАД СИНТЕЗУ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ЗІ СПОСТЕРІГАЧЕМ ДЛЯ КОМПЛЕКТНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДА

8.1. Приклад розрахунку параметрів модального регулятора

Виконаємо синтез модального регулятора за наступними вихідними даними: тип двигуна Д12 [20], момент інерції електропривода $J = 0,08 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; час перехідного процесу $t_{\pi} = 0,08 \text{ с}$; перерегулювання $\sigma = 0 \%$. Двигун отримує живлення від тиристорного перетворювача ТЕР4-63/230 з коефіцієнтом підсилення $k_{\text{тп}} = 46$ та постійною часу $T_{\text{тп}} = 0,006 \text{ с}$ [див.20]. Двигун з тахогенератором на валу. Передаточний коефіцієнт тахогенератора $k_{\text{тг}} = 0,032 \text{ (В} \cdot \text{с)/рад}$. Сумарний момент корисного і шкідливого опорів, приведений до осі якоря, будемо вважати постійним.

Розрахунок виконаємо за методикою, наведеною в [12].

Розрахуємо передаточний коефіцієнт двигуна $k_{\text{д}} = I/k_{\omega}$:

$$k_{\omega} = \frac{U_{\text{н}} - I_{\text{н}} R_{\text{я}}}{\pi \frac{n_{\text{н}}}{30}} = \frac{230 - 14 \cdot 1,63}{3,14 \cdot \frac{1230}{30}} = 1,608 \text{ (В} \cdot \text{с)/рад};$$

$$k_{\text{д}} = \frac{1}{k_{\omega}} = \frac{1}{1,608} = 0,622 \text{ рад/(В} \cdot \text{с)}.$$

Електромагнітна постійна часу якірного кола

$$T_{\text{е}} = \frac{L}{R}.$$

Індуктивність якірного ланцюга

$$L = L_{\text{я}} + 2 L_{\text{др}} + L_{\text{тп}}.$$

За формулою Уманського–Лінвілля індуктивність якірноюго кола двигуна

$$L_{\text{я}} = c_{\text{x}} \cdot \frac{30U_{\text{н}}}{\pi I_{\text{н}} \cdot n_{\text{н}} \cdot p_{\text{п}}},$$

де $c_{\text{x}} = 0,1 \dots 0,25$ – для машин з компенсаційною обмоткою; $c_{\text{x}} = 0,5 \dots 0,6$ – для машин без компенсаційної обмотки; $p_{\text{п}}$ – число пар полюсів; $n_{\text{н}}$ – номінальна частота обертання двигуна.

Індуктивність згладжувальних дроселів за додатком [20] $L_{\text{др}} = 0,505$ мГн, а індуктивність тиристорного перетворювача $L_{\text{др}} = 0,4$ мГн.

Таким чином,

$$L_{\text{я}} = c_{\text{x}} \frac{30U_{\text{н}}}{\pi I_{\text{н}} n_{\text{н}} p_{\text{п}}} = 0,5 \frac{30 \cdot 230}{3,14 \cdot 14 \cdot 1230 \cdot 2} = 0,032 \text{ Гн};$$

$$L = L_{\text{я}} + 2L_{\text{др}} + L_{\text{тп}} = 0,032 + 2 \cdot 0,505 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^{-3} = 0,033 \text{ Гн}.$$

Активний опір якірноюго ланцюга

$$R = R_{\text{я}} + 2R_{\text{др}} + R_{\text{тп}};$$

$$R_{\text{тп}} \approx \frac{0,08 \cdot U_{\text{тп}}}{I_{\text{н}}} = \frac{0,08 \cdot 230}{14} = 1,314 \text{ Ом};$$

$$R = R_{\text{я}} + 2R_{\text{др}} + R_{\text{тп}} = 1,63 + 2 \cdot 37 \cdot 10^{-3} + 1,314 = 3,018 \text{ Ом}.$$

Таким чином, електромагнітна постійна часу

$$T_{\text{е}} = \frac{L}{R} = \frac{0,033}{3,018} = 0,011 \text{ с}.$$

Механічна постійна часу

$$T_{\text{м}} = \frac{J \cdot R}{k_{\omega}^2} = \frac{0,08 \cdot 3,018}{1,608^2} = 0,093 \text{ с}.$$

На рис. 8.1 представлена структурна схема комплектного електропривода з модальним регулятором. На схемі позначено: П – безінерційний підсилювач; ТП – тиристорний перетворювач; ЕД – електродвигун; МР – модальний регулятор.

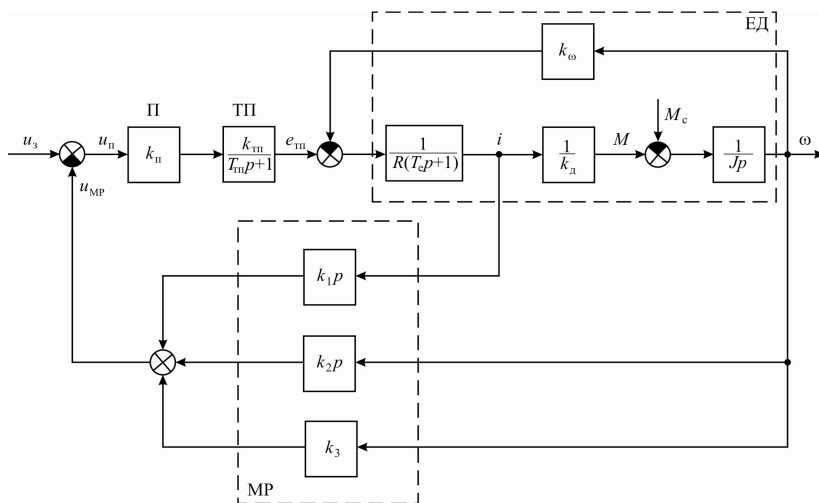


Рис. 8.1. Структурна схема електромеханічної системи з модальним регулятором

Згідно з наведеною структурною схемою електропривод описується системою рівнянь в операторній формі [11]:

$$(T_{\text{тп}}p + 1)e_{\text{тп}} = k_{\text{тп}}k_{\Pi}u_{\Pi};$$

$$(T_{\text{с}}p + 1)i = \frac{1}{R}(e_{\text{тп}} - k_{\omega}\omega); \quad (8.1)$$

$$Jp\omega = \frac{1}{k_{\text{д}}}i - M_{\text{с}},$$

де $e_{\text{тп}}$ – ЕРС тиристорного перетворювача; T_e – електромагнітна постійна часу; i – струм якоря електродвигуна; R – опір якірного кола; J – приведений до осі якоря момент інерції електропривода; $u_{\text{п}}$ – напруга на вході в безінерційний підсилювач; $k_{\text{тп}}$ – коефіцієнт підсилення тиристорного перетворювача; $k_{\text{п}}$ – коефіцієнт підсилення безінерційного підсилювача; $k_{\text{д}}$ – коефіцієнт передачі електродвигуна; ω – кутова швидкість якоря; $k_{\omega} = \frac{1}{k_{\text{д}}}$ – коефіцієнт ЕРС двигуна; $M_{\text{с}}$ – сумарний момент корисного і шкідливого опорів, приведений до осі якоря; p – символічний оператор Лапласа.

Обираємо змінні стану:

$$x_1 = \frac{di}{dt}; \quad x_2 = \frac{d\omega}{dt}; \quad x_3 = \omega. \quad (8.2)$$

Як з'ясовано в роботі [11], такий вибір змінних стану підвищує жорсткість механічної характеристики електропривода.

Складемо диференціальні рівняння розімкненого електропривода відносно кутової швидкості якоря. Для цього перепишемо рівняння стану (8.1) таким чином:

$$e_{\text{тп}} = \frac{k_{\text{тп}} k_{\text{п}} u_{\text{п}}}{T_{\text{тп}} p + 1};$$

$$i = k_{\text{д}} (Jp\omega + M_{\text{с}}); \quad (8.3)$$

$$(T_e p + 1)(Jp\omega + M_{\text{с}})k_{\text{д}} = \frac{1}{R} \left(\frac{k_{\text{тп}} k_{\text{п}} u_{\text{п}}}{T_{\text{тп}} p + 1} - \frac{1}{k_{\text{д}}} \omega \right).$$

Розкривши дужки у третьому рівнянні системи (8.3), одержуємо

$$\begin{aligned} & \left(RT_{\text{е}} T_{\text{тп}} k_{\text{д}}^2 J p^3 + R J k_{\text{д}}^2 (T_{\text{тп}} + T_{\text{е}}) p^2 + (R J k_{\text{д}}^2 + T_{\text{тп}}) p + 1 \right) \omega = \\ & = k_0 u_{\text{п}} - (T_{\text{е}} T_{\text{тп}} p^2 + (T_{\text{е}} + T_{\text{тп}}) p + 1) \frac{M_{\text{с}}}{\beta}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & (d_0 p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3) \omega = \\ & = k_0 u_{\text{п}} - (b_0 p^2 + b_1 p + b_2) \frac{M_{\text{с}}}{\beta}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

де

$$\begin{aligned} d_0 &= T_{\text{тп}} T_{\text{е}} T_{\text{м}}; & d_1 &= (T_{\text{тп}} + T_{\text{е}}) T_{\text{м}}; & d_2 &= T_{\text{тп}} + T_{\text{м}}; \\ d_3 &= 1; & b_2 &= 1; & b_1 &= T_{\text{тп}} + T_{\text{е}}; & b_0 &= T_{\text{тп}} T_{\text{е}}; \end{aligned}$$

$T_{\text{м}} = \frac{J}{\beta}$ – механічна постійна часу електропривода; β – жорсткість механічної характеристики розімкненого електропривода [11]; $k_0 = k_{\text{д}} k_{\text{тп}} k_{\text{п}}$ – передаточний коефіцієнт розімкненого електропривода.

Для того щоб отримати замкнену за змінними стану, тобто за гнучкими зв'язками, систему, вводимо рівняння замикання

$$u_{\text{п}} = u_{\text{з}} - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3). \quad (8.5)$$

Підставляємо рівняння (8.5) у (8.4). Тоді отримаємо рівняння замкненої за змінними стану системи:

$$(D_0 p^3 + D_1 p^2 + D_2 p + D_3) \omega = k_0 u_{\text{з}} - (B_0 p^2 + B_1 p + B_2) \frac{M_{\text{с}}}{\beta}, \quad (8.6)$$

де

$$D_0 = d_0; \quad D_1 = d_1 + k_{01} T_m; \quad D_2 = d_2 + k_{02}; \quad D_3 = 1 + k_{03};$$

$$B_0 = b_0; \quad B_1 = b_1 + k_{01}; \quad B_2 = b_2.$$

$$k_{01} = \frac{k_{\pi} k_{\text{тп}} k_1}{R}; \quad k_{02} = k_{\pi} k_{\text{тп}} k_d k_2; \quad k_{03} = k_{\pi} k_{\text{тп}} k_d k_3, \quad k_3 = \alpha k_{\text{тп}};$$

$k_{\text{тп}}$ – коефіцієнт передачі тахогенератора; α – невідомий коефіцієнт.

З рівняння (8.6) замкненої по фазовому вектору стану системи маємо характеристичний поліном

$$D(p) = p^3 + \frac{D_1}{D_0} p^2 + \frac{D_2}{D_0} p + \frac{D_3}{D_0}. \quad (8.7)$$

За даними розд. 6 або додатка збірника [5] вибираємо стандартний бажаний характеристичний поліном

$$D_{\delta}(p) = p^3 + c_1 q_0 p^2 + c_2 q_0^2 p + c_3 q_0^3. \quad (8.8)$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях оператора p поліномів (8.7) і (8.8):

$$c_1 q_0 = \frac{D_1}{D_0}; \quad c_2 q_0^2 = \frac{D_2}{D_0}; \quad c_3 q_0^3 = \frac{D_3}{D_0}. \quad (8.9)$$

З третього рівняння системи (7.9) знаходимо базову частоту

$$q_0 = \sqrt[3]{\frac{D_3}{c_3 D_0}} = \sqrt[3]{\frac{1 + k_{03}}{c_3 T_{\text{тп}} T_{\text{е}} T_m}}. \quad (8.10)$$

Вона залежить від коефіцієнта k_3 .

Прирівнявши вираз (8.10) до $q_0 = \frac{\tau_{\Pi}}{t_{\Pi}}$ (τ_{Π} визначається за бажаною характеристикою перехідного процесу [5]), будемо мати

$$k_{03} = c_3 \left(\frac{\tau_{\Pi}}{t_{\Pi}} \right)^3 T_{\Pi\Pi} T_e T_M - 1. \quad (8.11)$$

Знайдемо відношення жорсткості β_3 статичної характеристики замкненого електропривода до жорсткості β статичної характеристики розімкненого електропривода. Прийнемо в рівнянні (8.6) $p = 0$. Тоді одержимо для відношення жорсткостей наступний вираз:

$$\frac{\beta_3}{\beta} = k_{03} + 1 = c_3 \left(\frac{\tau_{\Pi}}{t_{\Pi}} \right)^3 T_{\Pi\Pi} T_e T_M.$$

Для забезпечення необхідної робастності системи, тобто зниженої чутливості до зміни параметрів при дії зовнішніх збурень, це відношення жорсткостей повинно бути визначено з урахуванням часу t_{Π} перехідного процесу.

Тепер з першого і другого рівняння системи (8.9) знаходимо коефіцієнти k_{01} , k_{02} :

$$k_{01} = \frac{1}{T_M} (c_1 d_0 q_0 - d_1); \quad k_{02} = c_2 d_0 q_0^2 - d_2. \quad (8.12)$$

Бажано, щоб коефіцієнти k_{01} , k_{02} , k_{03} , які визначаються за виразами (8.11) і (8.12), були позитивними. Ця умова накладає обмеження на значення базової частоти:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 > \frac{d_1}{c_1 d_0}; \\ q_0 > \sqrt{\frac{d_2}{c_2 d_0}}; \\ q_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{c_3 d_0}}, \end{array} \right. \quad (8.13)$$

які задовольняють нерівності $q_0 > \frac{d_1}{c_1 d_0}$.

Даній нерівності відповідає наступна умова для відношення жорсткостей статичних характеристик замкненого і розімкненого електропривода

$$\frac{\beta_3}{\beta} \geq \left(\frac{d_1}{c_1 d_0} \right)^3 T_{\text{тп}} T_{\text{е}} T_{\text{м}} = \left(\frac{T_{\text{тп}} + T_{\text{е}}}{c_1 T_{\text{тп}} T_{\text{е}}} \right)^3 T_{\text{тп}} T_{\text{е}} T_{\text{м}}.$$

Звичайно приймають значення $\frac{\beta_3}{\beta}$ таке, щоб забезпечити не тільки необхідне підвищення жорсткості механічної характеристики електропривода, а і задовольнити, як було з'ясовано вище, потрібне значення часу перехідного процесу.

Тепер знаходимо добуток $k_{\text{п}} \alpha$ та коефіцієнти k_1, k_2 модального регулятора:

$$k_{\text{п}} \alpha = \frac{k_{03}}{k_{\text{тп}} k_{\text{д}} k_{\text{тг}}}; \quad k_1 = \frac{k_{01} R k_{\text{тг}}}{k_{03}} \alpha;$$

$$k_2 = \frac{k_{02} k_{\text{тг}}}{k_{03}} \alpha.$$

При $k_{\pi} = 1$ остаточно знаходимо:

$$\alpha = \frac{k_{03}}{k_{\pi} k_d k_{\tau}}; \quad k_1 = \frac{k_{01} R k_d k_{\tau}}{k_{03}} \alpha, \quad k_2 = \frac{k_{02} k_{\tau}}{k_{03}} \alpha.$$

Згідно з умовою задачі за табл. 6.5 обираємо бажаний характеристичний поліном (8.8) з коефіцієнтами $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, а за рис. 6.5 – бажану характеристичну функцію біноміальної моделі.

Задаємося часом перехідного процесу електропривода з модальним регулятором $t_{\text{пе}} = 0,05$ с.

Знаходимо безрозмірний час перехідного процесу для обраної бажаної характеристики $\tau_{\pi} = 6,3$ та базову частоту

$$q_0 = \frac{\tau_{\pi}}{t_{\text{пе}}} = \frac{6,3}{0,05} = 126 \text{ с}^{-1}, \text{ яка задовольняє вимозі (8.13).}$$

Розраховуємо коефіцієнти

$$d_0 = T_{\pi} T_e T_M = 0,006 \cdot 0,011 \cdot 0,093 = 6,177 \cdot 10^{-6} \text{ с}^3;$$

$$d_1 = (T_{\pi} + T_e) T_M = (0,006 + 0,011) 0,093 = 1,59 \cdot 10^{-3} \text{ с}^2;$$

$$d_2 = T_{\pi} + T_M = 0,006 + 0,093 = 0,099 \text{ с};$$

$$\begin{aligned} k_{01} &= (c_1 d_0 q_0 - d_1) \frac{1}{T_M} = \\ &= \frac{(3 \cdot 6,177 \cdot 10^{-6} \cdot 126 - 1,59 \cdot 10^{-3})}{0,093} = 7,988 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \end{aligned}$$

$$k_{02} = c_2 d_0 q_0^2 - d_2 = 3 \cdot 6,177 \cdot 10^{-6} \cdot 126^2 - 0,09 = 0,195 \text{ с};$$

$$k_{03} = c_3 d_0 q_0^3 - 1 = 6,177 \cdot 10^{-6} \cdot 126^3 - 1 = 11,357 \text{ с}.$$

Відношення жорсткості розімкненого до жорсткості замкненого електропривода

$$\frac{\beta_3}{\beta} = k_{03} + 1 = 12,4,$$

що набагато більше граничного значення:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_3}{\beta} &= \left(\frac{T_{\text{тп}} + T_{\text{е}}}{3T_{\text{тп}}T_{\text{е}}} \right)^3 T_{\text{тп}} T_{\text{е}} T_{\text{м}} = \\ &= \left(\frac{0,006 + 0,011}{3 \cdot 0,006 \cdot 0,011} \right)^3 \cdot 0,006 \cdot 0,011 \cdot 0,093 = 3,9. \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнти модального регулятора

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{k_{01} R k_{\text{д}} k_{\text{тг}}}{k_{03}} \alpha = \\ &= \frac{7,988 \cdot 10^{-3} \cdot 3,018 \cdot 0,622 \cdot 0,032}{11,357} \alpha = 4,223 \cdot 10^{-5} \alpha \text{ Ом} \cdot \text{с}; \end{aligned}$$

$$k_2 = \frac{k_{02} k_{\text{тг}}}{k_{03}} \alpha = \frac{0,195 \cdot 0,032}{11,357} \alpha = 5,491 \cdot 10^{-4} \alpha \text{ (В} \cdot \text{с}^2\text{)/рад};$$

$$k_3 = k_{\text{тг}} \alpha = 0,032 \alpha \text{ (В} \cdot \text{с)/рад},$$

де

$$\alpha = \frac{k_{03}}{k_{\text{тп}} k_{\text{д}} k_{\text{тг}}} = \frac{11,357}{46 \cdot 0,622 \cdot 0,032} = 12,41.$$

8.2. Приклад синтезу спостерігача

Виконаємо синтез спостерігаючого пристрою (спостерігача), що відновлює вектор стану:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{di}{dt} & \frac{d\omega}{dt} & \omega \end{bmatrix}^T,$$

який був обраний нами для реалізації модального регулятора.

Змінні, які доступні вимірюванню: вхідна керуюча дія u_{π} ; кутова швидкість двигуна $x_3 = \omega$; напруга тахогенератора $y = u_{\text{тг}} = k_3 x_3 = k_{\text{тг}} \omega$.

Змінні, які неможливо виміряти: похідна струму $x_1 = \frac{di}{dt}$;

момент навантаження $x_4 = M_c \approx \text{const}$.

Рівнянням електропривода, що розглядалися вище, відповідає наступна система рівнянь спостерігача:

$$\frac{d\hat{e}_{\text{тг}}}{dt} = -\frac{1}{T_{\text{тг}}} \hat{e}_{\text{тг}} + \frac{k_{\pi} k_{\text{тг}}}{T_{\text{тг}}} u_{\pi} + g_{13} (u_{\text{тг}} - k_{\text{тг}} \hat{\omega});$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{1}{RT_{\text{е}}} \hat{e}_{\text{тг}} - \frac{1}{T_{\text{е}}} \hat{i} - \frac{1}{RT_{\text{е}} k_{\text{д}}} \hat{\omega} + g_{23} (u_{\text{тг}} - k_{\text{тг}} \hat{\omega});$$

$$\frac{d\hat{\omega}}{dt} = \frac{1}{Jk_{\text{д}}} \hat{i} - \frac{1}{J} \hat{M}_{\text{с}} + g_{33} (u_{\text{тг}} - k_{\text{тг}} \hat{\omega}); \quad \frac{d\hat{M}_{\text{с}}}{dt} = g_{43} (u_{\text{тг}} - k_{\text{тг}} \hat{\omega}).$$

Цій системі відповідає матриця-стовпець регулятора спостерігача

$$G = [g_{13} \quad g_{23} \quad g_{33} \quad g_{43}]^T.$$

Матриця-рядок змінних виходу, які можна виміряти,

$$C = [0 \quad 0 \quad k_{\text{тг}} \quad 0].$$

Матриця добутку

$$GC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{13}k_{\text{тг}} & 0 \\ 0 & 0 & g_{23}k_{\text{тг}} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33}k_{\text{тг}} & 0 \\ 0 & 0 & g_{43}k_{\text{тг}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця спостерігача

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{\text{тп}}} & 0 & -g_{13}k_{\text{тг}} & 0 \\ \frac{1}{RT_{\text{е}}} & -\frac{1}{T_{\text{е}}} & -\frac{1}{RT_{\text{е}}k_{\text{д}}} - g_{23}k_{\text{тг}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Jk_{\text{д}}} & -g_{33}k_{\text{тг}} & -\frac{1}{J} \\ 0 & 0 & -g_{43}k_{\text{тг}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристична матриця спостерігача

$$D_{\text{с}} = pI - A + GC = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{T_{\text{тп}}} & 0 & g_{13}k_{\text{тг}} & 0 \\ -\frac{1}{RT_{\text{е}}} & p + \frac{1}{T_{\text{е}}} & \frac{1}{RT_{\text{е}}k_{\text{д}}} + g_{23}k_{\text{тг}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{Jk_{\text{д}}} & p + g_{33}k_{\text{тг}} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & g_{43}k_{\text{тг}} & p \end{pmatrix}.$$

Даній матриці відповідає характеристичний поліном спостерігача:

$$\begin{aligned}
 D(p) &= \det D_c = \det(pI - A + GC) = \\
 &= p^4 + p^3(a + g_{33}k_{\text{тг}}) + p^2\left(b + ag_{33}k_{\text{тг}} + c + \frac{g_{23}k_{\text{тг}}}{k_d J} - \frac{g_{43}k_{\text{тг}}}{J}\right) + \\
 &+ p\left[bg_{33}k_{\text{тг}} + ck_d g_{13}k_{\text{тг}} + \frac{1}{T_{\text{тп}}}\left(c + \frac{g_{23}k_{\text{тг}}}{k_d J}\right) - a\frac{g_{43}k_{\text{тг}}}{J}\right] - b\frac{g_{43}k_{\text{тг}}}{J}, \quad (8.14)
 \end{aligned}$$

де

$$a = \frac{T_{\text{тп}} + T_{\text{е}}}{T_{\text{тп}} \cdot T_{\text{е}}} = \frac{0,006 + 0,011}{0,006 \cdot 0,011} = 257,3 \text{ c}^{-1};$$

$$b = \frac{1}{T_{\text{тп}} \cdot T_{\text{е}}} = \frac{1}{0,006 \cdot 0,011} = 1,511 \cdot 10^4 \text{ c}^{-2};$$

$$c = \frac{1}{T_{\text{м}} \cdot T_{\text{е}}} = \frac{1}{0,093 \cdot 0,011} = 971,3 \text{ c}^{-2}.$$

Для виконання синтезу спостерігача, тобто визначення коефіцієнтів матриці G , обирається біноміальний характеристичний поліном четвертого порядку (см. табл. 6.5) з перерегулюванням $\sigma = 0\%$:

$$D(p) = p^4 + c_1 q_0 p^3 + c_2 q_0^2 p^2 + c_3 q_0^3 p + c_4 q_0^4, \quad (8.15)$$

де $c_1 = 4$; $c_2 = 6$; $c_3 = 4$; $c_4 = 1$.

Значення базової частоти q_0 в цьому поліномі

$$q_0 = \frac{\tau_{\text{п}}}{t_{\text{пс}}} = \frac{7,5}{0,03} = 250 \text{ с}^{-1}, \text{ де } \tau_{\text{п}} \text{ знаходиться за рис. 6.5),}$$

$$\text{а } t_{\text{пс}} = t_{\text{п}} - t_{\text{пе}} = 0,03 \text{ с.}$$

Прирівнявши коефіцієнти поліномів (8.14) та (8.15) при однакових степенях символічного оператора p , знаходимо коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку спостерігача:

$$g_{43} = -\frac{Jc_4q_0^4}{k_{\text{гг}}b} = -\frac{0,08 \cdot 250^4}{0,032 \cdot 1,511 \cdot 10^4} = -6,464 \cdot 10^5 \text{ A};$$

$$g_{33} = \frac{c_1q_0 - a}{k_{\text{гг}}} = \frac{4 \cdot 250 - 257,3}{0,032} = 2,321 \cdot 10^4 \text{ рад/(B} \cdot \text{с}^2);$$

$$g_{23} = \frac{k_{\text{д}}J}{k_{\text{гг}}} \left(c_2q_0^2 - b - c - ag_{33}k_{\text{гг}} + \frac{g_{43}k_{\text{гг}}}{J} \right) = \frac{0,622 \cdot 0,08}{0,032} \times$$

$$\times \left(6 \cdot 250^2 - 1,514 \cdot 10^4 - 971,3 - 257,3 \cdot 2,321 \cdot 10^4 \cdot 0,032 - \frac{4,04 \cdot 10^5 \cdot 0,032}{0,08} \right) =$$

$$= -1,41 \cdot 10^5 \text{ A/(B} \cdot \text{с)};$$

$$g_{13} = \frac{1}{ck_{\text{д}}k_{\text{гг}}} \left(c_3q_0^3 - bg_{33}k_{\text{гг}} + a \frac{k_{\text{гг}}g_{43}}{J} - \frac{1}{T_{\text{гг}}} \left(c + \frac{k_{\text{гг}}g_{23}}{k_{\text{д}}J} \right) \right) = \frac{1}{971,3 \cdot 0,622 \cdot 0,032} \times$$

$$\times (4 \cdot 250^3 - 1,511 \cdot 10^4 \cdot 2,321 \cdot 10^4 \cdot 0,032 - \frac{257,3 \cdot 0,032 \cdot 4,04 \cdot 10^5}{0,08} -$$

$$- \frac{1}{0,006} (971,3 + \frac{0,032 \cdot (-8,814 \cdot 10^4)}{0622 \cdot 0,08})) = -1,497 \cdot 10^4.$$

Структурна схема синтезованого спостерігача, реалізуючого модальний регулятор електропривода, наведено на рис. 8.2.

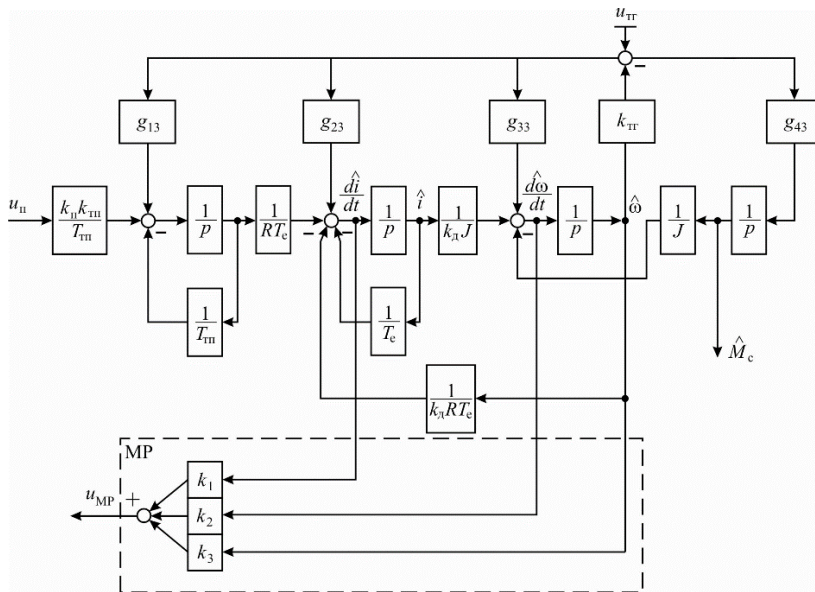


Рис. 8.2. Структурна схема спостерігача

Схема на рис. 8.2 складається з чотирьох інтеграторів і декількох підсилювачів. Така модель спостерігача дозволяє оцінити всі зміни стану фазового вектору, а також визначити момент опору без застосування датчика й апаратури для його вимірювання.

Час перехідного процесу можна приблизно оцінити за наступною формулою:

$$t_{пп} = J \frac{\pi n_H}{2,2 \cdot 30 M_H},$$

де $J = J_{\text{дв}} + 0,4J_{\text{дв}}$ – момент інерції електропривода;

$J_{\text{дв}}$ – момент інерції електродвигуна.

Схема моделювання перехідних процесів, що відбуваються в замкненій системі керування електроприводом, наведено на рис. 8.3. Вона створена за допомогою програмного продукту Simulink.

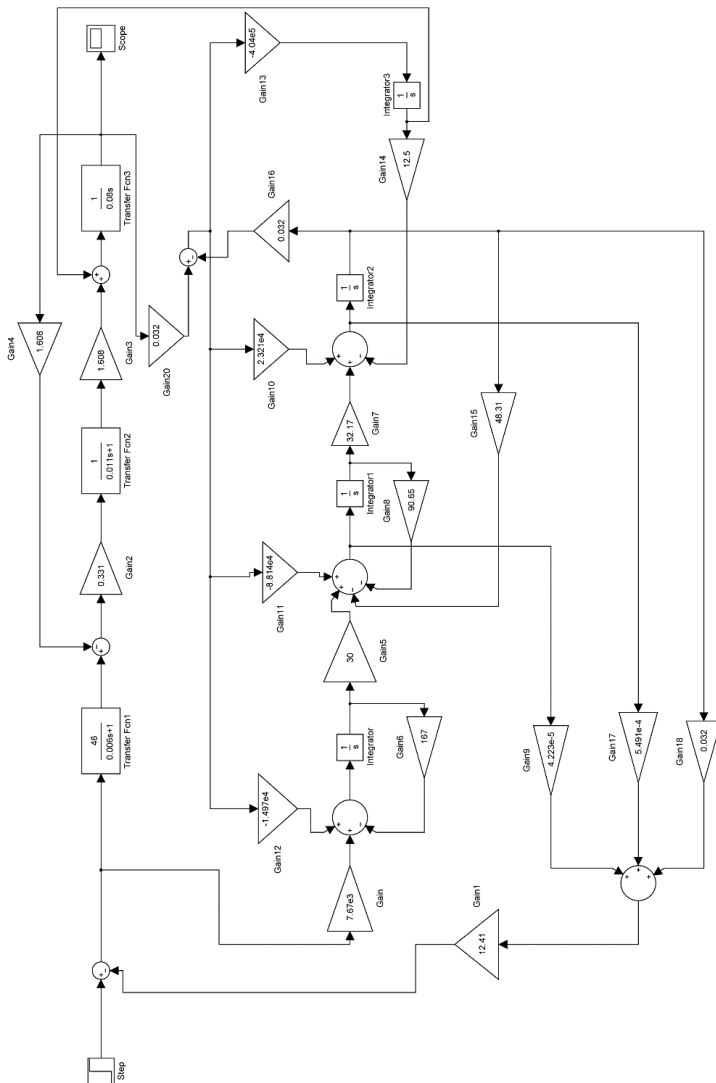


Рис. 8.3. Схема моделювання в Simulink перехідних процесів в електроприводі зі спостерігачем з модальним регулятором стану

За допомогою даної схеми побудовано графік перехідного процесу кутової швидкості, який наведено на рис. 8.4. Видно, що кутова швидкість у цьому процесі носить аперіодичний характер з тривалістю часу установлення біля 0,08 с і перерегулюванням 0 %. Ці значення співпадають з заданими за умовою задачі.

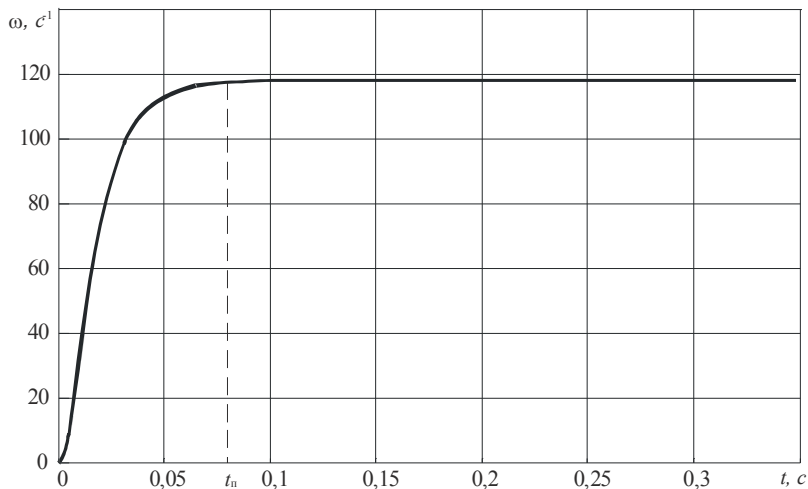


Рис. 8.4. Перехідний процес кутової швидкості електропривода

ВАРІАНТИ ЗАВДАНЬ НА КУРСОВЕ ПРОЄКТУВАННЯ

Провести синтез системи автоматичного керування з модальним регулятором та спостерігачем стану.

Основними вихідними даними для синтезу є:

- модель електродвигуна;
- коефіцієнт підсилення тиристорного перетворювача, $k_{\text{тп}}$;
- стала часу тиристорного перетворювача, $T_{\text{тп}}$.

Таблиця 1

№ варіанта	Модель двигуна	P_n , кВт	n_n , об/хв	$I_{ян}$, А	$J_{дв}$, кг·м ²	$R_{я}$, Ом	$k_{\text{тп}}$	$T_{\text{тп}}$, с
Тихохідні								
1	Д12	2,4	1230	14	0,05	1,63	46	0,002
2	Д21	3,6	1080	21	0,125	0,94	48	0,003
3	Д22	4,8	1150	26	0,15	0,57	50	0,004
4	Д31	6,8	880	37	0,3	0,42	52	0,005
5	Д32	9,5	800	57	0,425	0,28	54	0,006
6	Д41	13	720	70	0,8	0,16	56	0,007
7	Д806	17	710	84	1	0,11	58	0,008
8	Д808	24	630	112	2	0,054	60	0,002
9	Д810	35	600	148	3,65	0,035	62	0,003
10	Д812	47	565	192	7	0,023	64	0,004
11	Д814	70	560	280	10,2	0,013	66	0,005
12	Д816	85	535	350	16,3	0,0091	68	0,006
13	Д818	100	470	415	27,5	0,0066	70	0,007
Швидкохідні								
14	Д21	4,4	1500	24,5	0,125	0,356	60	0,002
15	Д22	6,5	1570	34	0,155	0,202	62	0,003
16	Д31	9,5	1420	50,5	0,3	0,137	64	0,004
17	Д32	13,0	1240	68	0,425	0,086	66	0,005
18	Д41	17,5	1160	90,5	0,8	0,043	68	0,006
19	Д806	21,0	1060	110	1,02	0,031	70	0,007
20	Д808	26,0	825	134	2,0	0,0185	72	0,008

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Блінцов В. С. Основні методи оптимального керування електромеханічних систем [Текст]: навчальний посібник / В. С. Блінцов, А. Т. Кінаш, М. Я. Хлопенко. – Миколаїв: УДМТУ, 2002. – 44 с.

2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления [Текст] / В. Г. Болтянский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 408 с.

3. Ким Д. П. Теория автоматического управления [Текст]: в 2 т. – Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Д. П. Ким. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

4. Крутько П. Д. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем [Текст] / П. Д. Крутько, А. И. Максимов, Л. М. Скворцов; под ред. П. Д. Крутько. – М.: Радио и связь, 1988. – 306 с.

5. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства [Текст] / Н. Т. Кузовков. – М.: Машиностроение, 1976. – 184 с.

6. Мирошник Н. В. Теория автоматического управления [Текст]: в 2 т. – Т. 1. Линейные системы / Н. В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2005. – 336 с.; Т. 2. Нелинейные и оптимальные системы / Н. В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с.

7. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления [Текст]: изд. 2-е, перераб. и доп. / Ю. П. Петров. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.

8. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1961. – 392 с.

9. Олейников В. А. Основы оптимального и экстремального управления [Текст]: учебное пособие для студентов /

В. А. Олейников, Н. С. Зотов, А. М. Пришвин. – М.: Высшая школа, 1969. – 296 с.

10. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление [Текст] / Я. Н. Ройтенберг. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 396 с.

11. Терехов В. М. Системы управления электроприводов [Текст]: учебник для студ. высш. учеб. заведений / В. М. Терехов, О. И. Осипов; под ред. В. М. Терехова. – 2 изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 304 с.

12. Хлопенко М. Я. Оптимальне керування системами [Текст]: навчальний посібник / М. Я. Хлопенко, І. С. Білюк, В. В. Шевченко. – Миколаїв: НУК, 2009. – 84 с.

13. Хлопенко Н. Я. Модальное управление плавным пуском электропривода с фрикционной муфтой [Текст] / Н. Я. Хлопенко, М. Е. Небесный, Бен Ахмед Мажди // Проблемы автоматизации та електрообладнання транспортних засобів : матеріали Міжнар. наук.-техн. конф. – Миколаїв: НУК, 2010. – С. 25–26.

14. Хлопенко Н. Я., Білюк І. С. Стабилизация движения исполнительного механизма электропривода [Текст] // Проблемы автоматизации та електрообладнання транспортних засобів : матеріали Міжнар. наук.-техн. конф. – Миколаїв: НУК, 2012. – С. 41–44.

15. Сеницын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачева [Текст]: учебное пособие / И. Н. Сеницын. – М.: Университетская книга, Логос, 2006. – 640 с.

16. Справочник по теории автоматического управления [Текст] / под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.

17. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью [Текст] / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.

18. Шаруда В. Г. Практикум з теорії автоматичного управління: навчальний посібник [Текст] / В. Г. Шаруда. – Дніпропетровськ: Національна гірнича академія України, 2002. – 414 с.

19. Хлопенко М. Я. Збірник задач для контрольних та самостійних робіт з дисципліни «Дослідження операцій електромеханічних систем» [Текст] / М. Я. Хлопенко, І. С. Білюк. – Миколаїв: НУК, 2008. – 24 с.

20. Хлопенко М. Я. Методичне керівництво до курсового проектування з дисципліни «Теорія автоматичного керування» [Текст] / М. Я. Хлопенко, Д. Ю. Шарейко, Д. Л. Кошкін. – Миколаїв: НУК, 2007. – 88 с.

ЗМІСТ

1. Опис стану лінійних систем у нормальній формі	3
1.1. Нормальна форма рівнянь стану і виходу	3
1.2. Перехід від структурної схеми системи до нормальних рівнянь стану	5
1.3. Матрична передавальна функція системи	5
2. Введення в простір стану. Загальна постановка задачі оптимального керування	7
2.1. Загальні відомості	7
2.2. Поняття про простір стану	7
2.3. Загальна постановка задачі оптимального керування	9
3. Керованість та спостережуваність лінійних систем	12
4. Перетворення подібності. Канонічні форми рівнянь стану	14
4.1. Перетворення подібності	14
4.2. Канонічна керована форма Луенбергера	15
4.3. Спостережна канонічна форма Луенбергера	17
5. Модальне керування зі зворотним зв'язком за станом.....	18
5.1. Синтез регуляторів з бажаними показниками якості	18
5.2. Алгоритм розрахунку коефіцієнтів модального регулятора	21
5.3. Формула Аккермана	22
6. Стандартні характеристичні поліноми замкнутих систем ..	24
6.1. Характеристичні поліноми моделі, що оптимізовані за інтегральним критерієм якості	24
6.2. Характеристичні поліноми Бесселя–Томсона	25
6.3. Характеристичні поліноми Баттерворта	26
6.4. Характеристичні поліноми Еллерта	27
7. Синтез спостерігаючих пристроїв	30
7.1. Спостерігач повного порядку	30
7.2. Принцип роздільності	33
7.3. Алгоритм синтезу спостерігача повного порядку	35
7.4. Спостерігач пониженого порядку	37

8. Приклад синтезу модального регулятора зі спостерігачем для комплектного електропривода	42
8.1. Приклад розрахунку параметрів модального регулятора	42
8.2. Приклад синтезу спостерігача	52
Додаток	60
Список рекомендованої літератури	61

ДЛЯ ЗАДАТОК

ДЛЯ ЗАДАТОК

Навчальне видання

БІЛЮК Іван Сергійович
КИРИЧЕНКО Олександр Сергійович
ГАВРИЛОВ Сергій Олексійович
САВЧЕНКО Олег Валерійович
БІЛЮК Ганна Анатоліївна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до курсового проєктування з дисципліни
«ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ»

Комп'ютерне складання та верстання *В. В. Москаленко*
Коректор *О. Є. Вакула*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 4,0. Тираж 100 прим. Вид. № 19. Зам. № 2705-42.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.