

ЛОГАРИФМІЧНА СПІРАЛЬ ЯК ГЕОМЕТРИЧНА ФОРМА ТА ЇЇ ПРИРОДНЕ І ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Робота присвячена аналізу геометричних особливостей логарифмічної спіралі. Розглянуто теоретичні й практичні аспекти та природне і практичне застосування такої спіралі. Подано математичний опис логарифмічної спіралі та розроблено її геометричну модель: приведені рівняння спіралі в полярних координатах та в параметричній формі, побудовано плоскі геометричні моделі, досліджено її геометричні властивості, що дозволяють використання саме такої форми у різних технічних напрямках діяльності зокрема в машинобудуванні, а також в астрономії. В природі форму логарифмічної спіралі мають раковини молюсків; хвости морських коників, хамелеонів, скорпіонів, ігуан; кігті левів та кішок, а також дзьоби та кігті птахів; роги жуйних тварин тощо. У дослідженні відзначено, що в астрономії спіральна структура є найбільш яскравим елементом галактик, які можна спостерігати. Галактика Чумацький шлях, в якій розташовується наша Сонячна система, має чотири спіральні рукава, які сформовані у виді логарифмічної спіралі. Показано, що спіральний візерунок галактики характеризується числом спіралей (m) і кутом закрутки (α). Доведено, що саме завдяки своїм геометричним властивостям логарифмічна спіраль знайшла широке застосування в техніці: ножі в різних різучих машинах або фрези; підвідні та відвідні пристрої турбомашин; форма окреслення зубів шестерень у зачепленнях тощо. Зроблено висновок про можливість поширення сфер застосування логарифмічних спіралей.

Ключові слова: геометрична модель; логарифмічна спіраль; теоретичні аспекти; природні закономірності; практичне застосування.

Постановка проблеми. Людина існує у природному середовищі, яке уявляє собою сукупність геометричних форм, ліній і поверхонь. У всі часи вивчення геометрії явищ та виявлення закономірностей допомагало уявити процеси, що проходять поряд, отримати нові знання, які можуть бути використаними на благо людини. Спостереження за навколишнім середовищем, вміння узагальнювати отриману інформацію, розвиток комп'ютерних технологій дає можливість створювати математичні моделі і

втілювати їх у нові об'єкти різних галузей промисловості. Геометрична наука вивчає природні форми, лінії та поверхні, що дає можливість удосконалення існуючих та створення нових цікавих химерних об'єктів різного спрямування. Серед різноманіття природних форм окремо вирізняються спірале побідні форми, які є розповсюдженими у природі як у плоскому двовимірному варіанті, так і у просторовому. Вони є притаманними не тільки статичним формам, но і природним рухомих явищам. Тому дослідження властивостей різних видів спіралей є актуальним і необхідним особливо під час пошуку нових підходів для розв'язання наукових та практичних задач.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Питання дослідження математичних і геометричних властивостей кривих ліній та поверхонь зберігає свою актуальність упродовж тривалого часу. Постійно зростає потреба в удосконаленні наявних природних форм та впровадженні нових у діяльність людини. Об'єкти різноманітних геометричних форм, що нас оточують, потребують ґрунтовного вивчення та детального опису. Сучасні літературні джерела повною мірою відображають останні дослідження з цієї теми.

Так, наприклад, представники Київської школи прикладної геометрії (д. т. н., професор Ковальов С.М., д. т. н., професор Ботвіновська С.І. та інші) багато років досліджують властивості геометричних поверхонь різних форм, вивчають способи управління формою дискретних поверхонь [1, 2] з метою вдосконалення існуючих архітектурних конструкцій та створення нових сучасних форм архітектурних оболонок. У роботі [3] розглядаються властивості логарифмічної спіралі та її поява в мистецтві та природі. Автори описують зв'язок логарифмічних кривих з полігональними ланцюгами та згадують вплив кривих на астрономію, фізику, біологію та медицину. Пропонують використання логарифмічних спіралей як основи органічних тканин при закритті ран різноманітної складності. У [4] пропонується новий метод для аналізу спіралей, заснований на взаємозв'язку між змінною довжиною вздовж кривої та радіусом її локальної кривини. Автори вважають, що вихор потоку води є одним з найпоширеніших типів спіральних моделей до аналізу якого і залучають запропонований метод.

Представлений у роботі матеріал є продовженням низки досліджень Бідніченко О.Г., присвячених аналізу геометричних властивостей ліній та поверхонь різних класів [4, 6, 7], та їх математичному і геометричному опису [8, 9]. У роботах проілюстровано найбільш типові випадки застосування кривих ліній та поверхонь в різних галузях промисловості. Геометрична складова наукових досліджень спрямована на створення нових конструкцій та споруд [10, 11], зокрема в архітектурі. Сьогодні, значна кількість наукових праць, присвячених вивченню форм і властивостей спіралей, представлена у відкритих електронних джерелах [12-16].

Ціль статті. Провести аналіз геометричних особливостей логарифмічної спіралі, дослідити її математичні властивості та побудувати геометричну модель, підібрати приклади із природного середовища та визначити сфери можливого застосування в різних галузях.

Основна частина. Вивчення геометричних особливостей кривих ліній і криволінійних поверхонь стає більш важливим в сучасні часи, тому що з появою новітніх технологій час вимагає нових несподіваних перспективних форм для створення нових об'єктів виробництва. На зміну традиційним прямолінійним і циліндричним обрисам приходять більш цікаві, химерні і нетрадиційні форми, які людина спостерігає в природі, досліджує та втілює в свою діяльність.

До таких особливих кривих ліній відносять спіралі, названі від французького *spirale*, тобто завиток. Цю химерну форму використовують в різних галузях людської діяльності для різноманітних виробів, що мають господарче значення, або просто для краси (рис. 1).

Зі стародавніх часів, коли Архімед відкрив спіраль, як геометричну форму, не зник інтерес до дослідження цієї цікавої кривої. Пізніше вчені математики розвивали теоретичні основи спіралей та описали рівняннями дуже багато природних форм і явищ саме цією кривою. Спіраль має множину видів, які відрізняються геометричним описом і формою, але всі мають нескінченні закручені завитки.



Рис. 1. Приклади використання спіральних кривих

У роботі [9] автором було досліджено деякі види спіралей, а саме спіраль Архімеда, Ферма, гіперболічну спіраль та літуус. Продовжуючи дослідження в цій роботі розглянемо теоретичні та практичні аспекти логарифмічної спіралі.

Особливим видом спіралей є логарифмічна спіраль або ізогональна спіраль, яка є найбільш розповсюдженою в природі. Вона була досліджена багатьма відомими у всьому світі вченими-математиками. Вперше описав логарифмічну спіраль як механічну криву Рене Декарт, який визначив спіраль, як лінію, у якій відношення довжини дуги до відповідного радіус-вектору є величиною постійною. Пізніше Данило Бернуллі назвав логарифмічну спіраль «Дивовижна спіраль». А термін «логарифмічна спіраль» було надано П'єром Варіньоном.

Ще в XVI та XVII сторіччях судна перевозили товари через океан.

Мореплавці знали, що потрібно йти по найкоротшій відстані, тобто за дугою кола на поверхні Землі. Для цього потрібно було постійно змінювати напрям руху, тому такий оптимальний курс було замінено на інший. Обрали такий курс, щоб кут перетину кораблем всіх меридіанів був сталим. Оскільки моряки працювали не з Земною поверхнею (поверхнею сфери), а з плоскими мапами, то проекція оптимального шляху по океану на плоску мапу уявляє собою логарифмічну (рівнокутну) спіраль.

Особливості логарифмічної спіралі вражали не тільки математиків, а і біологів, які вважають саме цей вид спіралі стандартом біологічних об'єктів різної природи.

Логарифмічна спіраль є трансцендентною кривою [16], рівняння якої у полярних координатах має вид: $r = ae^{b\theta}$. Це рівняння можна переписати як: $\theta = \frac{1}{b} \ln r/a$, де θ – кут відхилення точки від нуля; r – радіус вектор точки; a – коефіцієнт, що відповідає за радіус витків; b – коефіцієнт, що відповідає за відстань між витками. Саме завдяки запису рівняння у такий формі крива отримала назву «логарифмічна» спіраль.

У параметричній формі рівняння спіралі може бути записано як

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos t = ae^{bt} \cos t, \\ y(t) &= r \sin t = ae^{bt} \sin t, \end{aligned}$$

де a, b – дійсні числа.

Довжина дуги логарифмічної спіралі пропорційна різниці довжин радіус-векторів, які проведені до кінцевих точок дуги. Це твердження можна записати як $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\cos \alpha}$. Таке математичне визначення довжин дуг вперше було використано італійським вченим Торрічеллі.

На сучасному етапі розвитку математичних наук логарифмічна спіраль вивчалась та досліджувалась багато разів, її властивості вражали вчених, тому дослідимо деякі геометричні та алгебраїчні властивості цієї дивовижної спіралі.

1. Кут між дотичною та радіус-вектором в довільній точці логарифмічної спіралі є постійною величиною, яка залежить тільки від значення параметра b (рис. 2).

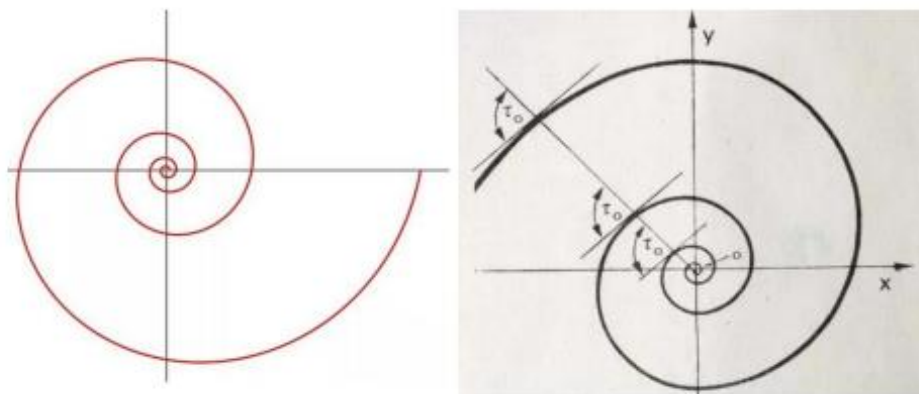


Рис. 2. Логарифмічна спіраль (нахил 10°).

Звідси випливає інша назва кривої «рівнокутна спіраль». У термінах диференціальної геометрії це можна записати таким чином:

$$\frac{\langle r(\theta), r'(\theta) \rangle}{\|r(\theta)\| \|r'(\theta)\|} = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \cos \varphi,$$

де $r(\theta)$ — радіус-вектор кривої у полярних координатах; $r'(\theta)$ — дотичний вектор до кривої (похідна радіус-вектору); $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначає скалярний добуток; $\|\cdot\|$ позначає норму (модуль, довжину) вектору; b — параметр з полярного рівняння логарифмічної спіралі $r(\theta) = a \cdot e^{b\theta}$; φ (ϕ) — постійний кут між радіус-вектором та дотичним вектором. Це рівняння виражає косинус постійного кута між радіус-вектором та дотичною до логарифмічної (рівнокутної) спіралі.

2. Похідна функції $r'(\theta)$ пропорційна параметру b , тобто параметр b визначає щільність витків та напрям закручування кривої. При $b=0$ (тобто коли $\varphi = \frac{\pi}{2}$) спіраль вироджується в коло радіуса a . У випадку, коли $b \rightarrow \infty$ (при цьому $\varphi \rightarrow 0$), спіраль наближається до прямої лінії. Нахил спіралі визначається кутом, який доповнює кут φ до 90° .

3. При збільшенні кута повороту радіус-вектору відстань між витками логарифмічної спіралі збільшується.

4. Форма витків спіралі є незмінною, але їх розмір постійно збільшується. Завдяки цієї властивості ця крива існує у природі у таких формах, що зростають, наприклад мушлі молюсків, квіток соняшників, листів рослин тощо.

5. При інверсії логарифмічна спіраль переходить в логарифмічну спіраль, тобто вона має властивість зберігати свою форму після різноманітних перетворень до яких чутливі інші криві. Стиснути або розтиснути цю спіраль щодо її полюса неможливо, бо отримаємо ту саму спіраль, але повернуту на деякий кут.

6. При обертанні логарифмічної спіралі навколо її полюса отримують криву, що буде гомотетична до вихідної кривої.

7. Радіус кривини в будь-якій точці спіралі пропорційний до довжини дуги спіралі від початку до цієї точки.

8. Відстані між послідовними витками логарифмічної спіралі збільшуються та утворюють геометричну прогресію, тому цей вид спіралі ще називають «геометрична спіраль».

9. Послідовність довжин радіусів, що утворюють однакові кути один з одним, також становить геометричну прогресію.

10. Утворені в процесі розширення сектори, відсікаються такими радіусами, що подібні один одному.

Природа має багато об'єктів, які відображають геометричні криві та різні геометричні фігури. Логарифмічна спіраль зокрема часто зустрічається в природі і пов'язана з певними видами зростання. У багатьох молюсків (рис. 3) послідовні витки раковини не однакові, а все більш і більш товщають. У багатьох випадках наближені значення

товщини послідовних витків утворюють геометричну прогресію.



Рис. 3. Мушля молюска у вигляді логарифмічної спіралі

Біологічний спосіб формування та зростання раковин молюсків організований природою таким чином, що призводить до утворення кривої, яка дуже близька до логарифмічної спіралі.

Серед тваринного світу існує дуже багато природних прикладів формування фрагментів тіла або елементів руху у вигляді логарифмічної спіралі. На рис. 4 представлено деякі приклади. Траєкторії розбігання переляканого

табуна північних оленів, кружляння хижих птахів, які наздоганяють свою здобич, уявляє собою логарифмічну спіраль. Хвости морських коників, хамелеонів, скорпіонів, ігуан закручені у формі логарифмічної спіралі. Кігті левів та кішок, а також дзьоби та кігті птахів являють собою логарифмічні спіралі. Роги жуйних тварин, за аналогією з раковинами молюсків, з геометричної точки зору уявляють собою об'ємні спіралі. Потрібно відзначити, що їхнє збільшення відбувається тільки з одного кінця. Саме така властивість повністю зберігає унікальну форму, що існує серед кривих ліній в математиці – форму логарифмічної спіралі.



Рис. 4. Приклади логарифмічної спіралі серед тваринного світу

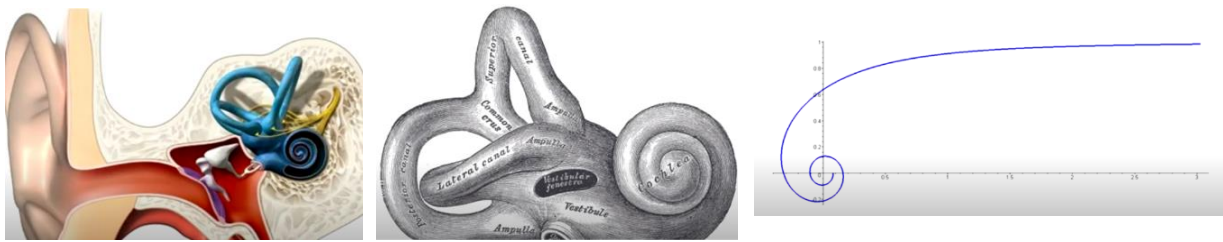


Рис.5. Будова внутрішнього вуха людини.

Людина, як природне творіння, у складі свого тіла також має форму у вигляді логарифмічної спіралі. Будова внутрішнього вуха (рис. 5) уявляє собою логарифмічну спіраль у 73 градусу.

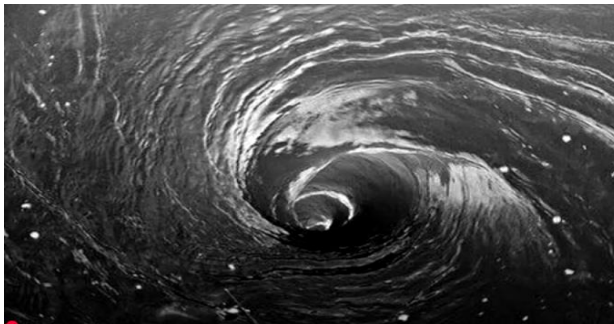


Рис.6. Спіралеподібні природні явища: *а* – вір на воді; *б* – повітряні маси циклона.

Геометричною моделлю руху за логарифмічною спіраллю можуть слугувати різноманітні природні явища (рис. 6), такі як вири на воді, повітряні маси циклонів і антициклонів тощо.

Серед рослинного світу логарифмічна спіраль є також розповсюдженою зокрема в розташуванні листів у алое багатolistого та броколі романеско (рис. 7).



Рис. 7. Приклади логарифмічної спіралі серед рослин

Говорячи про логарифмічну спіраль потрібно відзначити її широке застосування в астрономічній науці. Існує таке поняття як спіральні галактики. Вже давно відзначено, що спіральні гілки галактик добре описуються виразом для логарифмічної спіралі, яке в полярній системі координат має вигляд $R(\theta) = a^{(\theta - \theta_0)}$, де R – відстань від осі обертання

галактики, θ – галактоцентричний кут, θ_0 – початкова фаза спіралі, a – масштабний параметр.

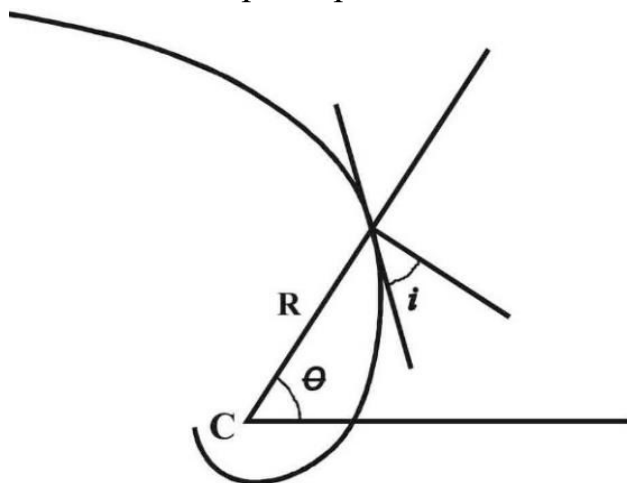


Рис.8. Логарифмічна спіраль та кут закрутки i

При цьому спіральний візерунок галактики характеризується числом спіралей m і кутом закрутки i (рис. 8). Кут між дотичною до спіралі в даній точці та перпендикуляром до радіусу, який проведено в точку дотику, є кутом закрутки спіралі. При зміні полярного кута, кут закрутки не змінюється, він залишається постійним по всій довжині спіралі. Тобто кут закрутки є характеристикою спіралі в цілому. Звичайно в

галактиках спостерігаються два рукава ($m = 2$) з невеликими кутами закрутки (приблизно $5...15^\circ$). Одна із спіральних гілок може бути описана рівнянням спіралі, а іншу гілку можна отримати зсувом на 180° .

Спіральна структура є найбільш яскравим елементом галактик, які можна спостерігати. Індикаторами спіральної структури є смуги пилу, блакитні та інколи червоні надгіганти, молоді розсіяні зоряні скупчення та зоряні асоціації. До спіральних гілок концентруються гігантські молекулярні хмари.

Прикладами спіральних галактик є Чумацький Шлях, галактики Андромеди, Трикутника, Вир, Вертушка (рис. 9). Чумацький Шлях також називають Молочний Шлях або Галактика – це спіральна галактика, в якій розташована наша Сонячна система.



Рис. 9. Приклади спіральних галактик: a – «Вертушка»; b – Чумацький Шлях

Майже всі зорі на небі, що можна бачити неозброєним оком належать до Чумацького Шляху. Таку назву Галактика отримала завдяки світлій туманній смузі в нічному небі, світіння якої створюється численними

тьманими зорями. Більшість зір скупчено в галактичному диску та у спіральних рукавах. Диск Чумацького Шляху оточений галактичним гало, в якому міститься невелика частка зір та велика кількість темної матерії. У центрі Галактики розташована масивна чорна діра. Наша Сонячна система розташована на відстані 8 кілопарсеків від центру Галактики і рухається навколо нього зі швидкістю 220 км/с.

Чумацький Шлях здавна мав культурне та релігійне значення у різних народів. Українська назва «Чумацький Шлях» виникла з тих часів, коли чумаки з України ходили в Крим за сіллю.

Останні наукові дослідження показали, що всі галактики мають три основні форми: еліптичні, неправильні та спіральні. Вчені припускають що більшість відомих спіральних галактик мають два рукави, які розгалужуються та розпадаються на менші. Але Чумацький Шлях має чотири спіральні гілки, що виходять із централізованої скупченості зірок (див. рис. 9, б). Завдяки цьому Галактика відрізняється дивною формою, яка повинна мати унікальні властивості. Саме тому вона наділена чотирьома головними рукавами-гілками.

Потрібно зробити висновок із вище викладеного, що в будь-якому місці, де є природне явище, в якому поєднується розширення та стискання разом з обертанням, саме там з'являється така унікальна форма, як логарифмічна спіраль. Природа на основі певних природних законів розрізняє особливості геометрії та із множини геометричних форм віддає перевагу саме спіральним. Викладена вище інформація підтверджує актуальність та необхідність геометричного дослідження властивостей різних видів спіралей з метою можливості поширення сфер їх застосування.

У техніці застосування логарифмічної спіралі засновано на властивості цієї кривої перетинати всі свої радіус-вектори, проведені із полюса, під одним і тим же кутом. Так, обертові ножі в різних ріжучих машинах або фрези (рис. 10) мають профіль, окреслений за дугою логарифмічної спіралі. Завдяки такому профілюванню кут різання (кут між лезом ножа θ і напрямком його швидкості обертання) залишається постійним уздовж всієї кромки рухомого ножа і дорівнює $\frac{\pi}{2} - \mu$, що забезпечує менший його знос.

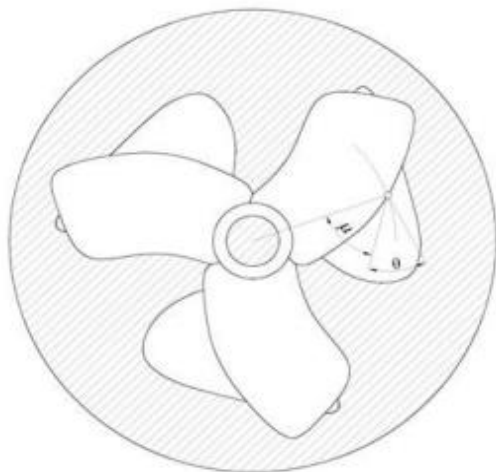


Рис. 10. Розташування ножів в ріжучих машинах

У залежності від якості матеріалу, що ріжеться, потрібен той чи інший кут різання, що забезпечується вибором параметра відповідної спіралі.

Логарифмічна спіраль використовується в теорії спіральних підведень до гідравлічної турбіни. Підвідний пристрій, що підводить струмінь води до лопатей турбінного колеса гідроелектростанції, має профіль, окреслений за дугою логарифмічної спіралі. Така конструкція дозволяє забезпечити мінімальні втрати енергії на зміну напрямку течії, тому натиск води використовується з максимальною продуктивністю.

Відцентрові турбомашини відрізняються тим, що для відведення робочої речовини мають спіральний равликоподібний пристрій, який моделюється за логарифмічною спіраллю (рис. 11).

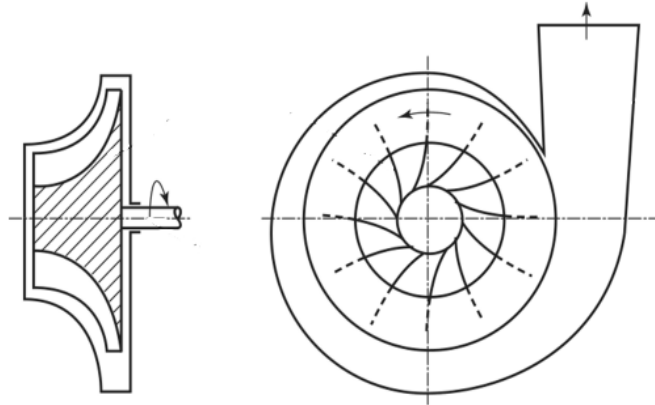


Рис. 11. Схема та фото відцентрового компресора

Такий відвідний пристрій збирає потік робочої речовини із робочого колеса, перетворює його кінетичну енергію в потенціальну енергію тиску та відводить речовину до нагнітального патрубку або робочого колеса наступного ступеня.

Потрібно відзначити, що такі відомі в теорії зубчастих передач криві, як еволюта, евольвента і каустика також є логарифмічними спіралями.

Евольвента (від латинського *evolvents* – така, що розгортає) – це крива лінія, що описується кінцем гнучкої закріпленої в деякій точці нитки, що змотується з плоскої кривої. Для параметрично заданої кривої $x(t), y(t)$ рівняння евольвенти має вигляд:

$$X(t) = x(t) - \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt ,$$

$$Y(t) = y(t) - \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt .$$

Спіралями також є евольвенти замкнених кривих. Наприклад, евольвента кола – є спіралеподібна крива лінія, яка описується кінцем нерозтяжної нитки, що змотується з кола заданого радіуса. Рівняння евольвенти кола мають вигляд:

$$x(t) = r(\cos t + \sin t) ,$$

$$y(t) = r(\sin t - \cos t) .$$

де t – кут розташування на колі точки дотику нитки до кола, r - радіус кола.

Для отримання евольвенти кола діаметром d (рис.12) поділяють коло на рівні частини (наприклад, 12). Із кожної точки проводять дотичні, які спрямовують в один бік. Вздовж кожній дотичній від точки дотику відкладають відстань, що дорівнює довжині дуги від першої точки до поточної. Отримавши множину точок евольвенти сполучають їх плавною кривою.

Довжина дуги між точками 1 і 2 може бути визначена за виразом: $a=nd/m$, де d – діаметр кола, m – число частин, на яке розділено коло.

Евольвента кола є розповсюдженою геометричною формою в техніці. Наприклад, профіль зуба для коліс зубчастої передачі; форма кожуха радіального вентилятора, насоса або компресора; вихори потоків у циклонах тощо моделюються евольвентою кола.

Евольвентне зачеплення (рис. 13) – це зубчасте зачеплення, в якому профілі зубів моделюються за евольвентою кола.

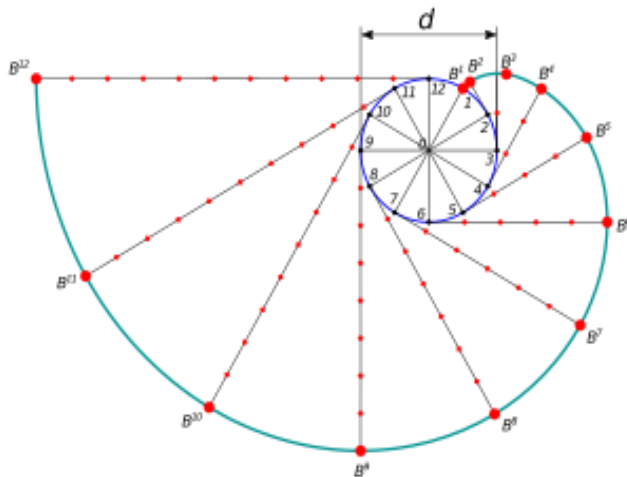


Рис. 12. Евольвента кола

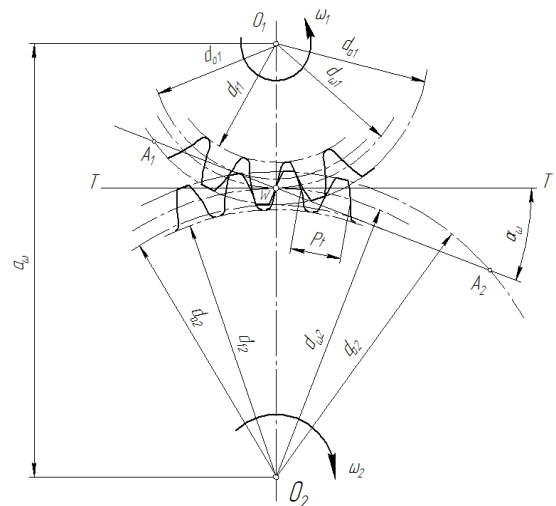


Рис. 13. Евольвентне зачеплення

Для отримання постійного передаточного відношення зачеплення повинна виконуватися умова, що зуби зубчастих коліс окреслені за кривою, у якій загальна нормаль, що проведена через точку дотику профілів зубів, завжди проходить через точку зачеплення.

Крім описаного евольвентного зачеплення в теорії зубчастих коліс використовується можливість кочення без ковзання однієї логарифмічної спіралі вздовж іншої (рис. 14). Ці дві спіралі є рівними, та одночасно обертаються навколо своїх полюсів в протилежних напрямках. Таки зубчасті передачі забезпечують змінне передаточне число.

Отже, досліджена крива, а саме логарифмічна спіраль, завдяки своїм геометричним особливостям широко використовуються у багатьох напрямках сучасної людської діяльності. З розвитком науки знаходяться нові сфери її використання, тому геометричне моделювання та вивчення властивостей різних видів спіралей є необхідною умовою для можливості їх застосування у нових створюваних об'єктах різних галузей промисловості та поширення діапазону їхнього використання.

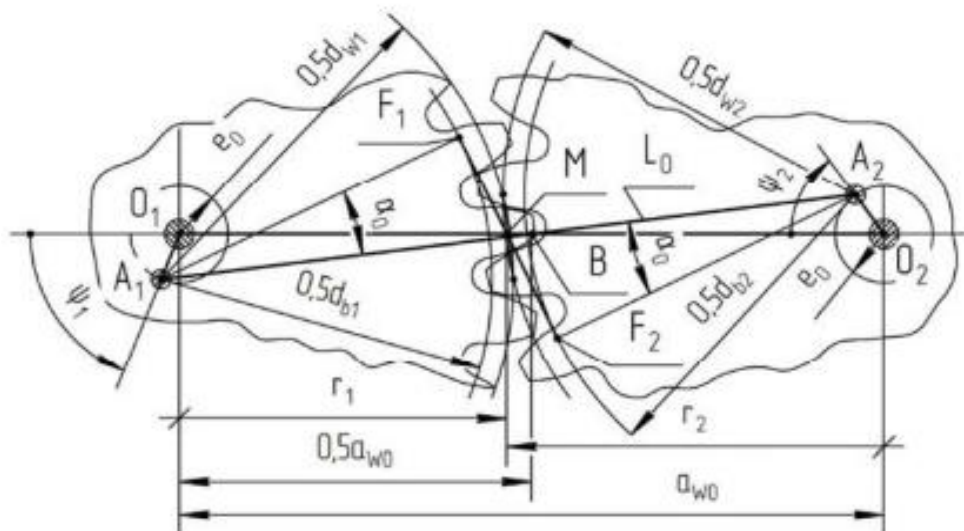


Рис. 14. Зачеплення коліс у зубчастій передачі із змінним передавальним відношенням

Висновки та перспективи. 1. У роботі проведено геометричне дослідження логарифмічної спіралі. Надано їх визначення, рівняння в полярних та параметричних координатах, сформовано геометричну модель, виконано аналіз геометричних особливостей. 2. Підібрано різноманітні приклади природних явищ і форм та доведено актуальність даного геометричного дослідження. 3. Проаналізовано сфери практичного використання у діяльності людини зокрема в машинобудуванні, підібрані найбільш яскраві та характерні приклади, наведені фотографічні та графічні зображення. 4. Зроблено висновок про доцільність геометричних досліджень з метою поширення сфер застосування логарифмічних спіралей.

Література

1. Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Мостовенко О.В. Властивості деяких параболоїдів n -го порядку / *Управління розвитком складних систем*. Київ : КНУБА, 2015. № 22. С. 134-137. {in Ukrainian}.
2. Ботвіновська С.І. Моделювання криволінійних поверхонь об'єктів дизайну та управління їх формою / *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. Київ : КНУБА, 2017. № 47. С.451 – 457. {in Ukrainian}.
3. Giuseppina Anatriello, Giovanni Vincenzi. Logarithmic spirals and continue triangles / *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Volume 296, April 2016, Pages 127-137.
4. R. Takaki, N. Ueda Analysis of spirals curves in traditional cultures *Forum*, 22 (2007), pp. 133-139. <https://surl.li/lbfurf>
5. Бідніченко О.Г. Криві та поверхні другого порядку в природі та архітектурних спорудах / Міжвідомчий науково-технічний збірник

- «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.103. Київ: КНУБА, 2022. С.3-15. DOI:10.32347/0131-579x.2022.103. {in Ukrainian}.
6. Бідніченко О.Г. Прямі лінії та лінійчаті поверхні в науці, природі та архітектурних спорудах / Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.104. Київ: КНУБА, 2023. С.3-15. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104). {in Ukrainian}.
 7. Бідніченко О.Г. Лінійчаті, але не плоскі поверхні в науці, техніці та архітектурних спорудах / Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.105. Київ: КНУБА, 2023. С.3-15. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105). {in Ukrainian}.
 8. Бідніченко О.Г. Геометричне моделювання гвинтових циліндричних поверхонь та їх практичне застосування / Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.106. Київ: КНУБА, 2023. С.3-14. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106). {in Ukrainian}.
 9. Бідніченко О.Г. Особливості геометрії спіралей та їх природне і практичне застосування / Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.107. Київ: КНУБА, 2024. С.3-20. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.107.3-20](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.107.3-20) {in Ukrainian}.
 10. Ковальов С.М., Ботвіновська, С.І., Золотова А.В. Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями у дизайні та архітектурі / *Управління розвитком складних систем*. Київ : КНУБА, 2016. № 25. С. 121 – 126. {in Ukrainian}.
 11. Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Золотова А.В. Формування дискретних каркасів купольних споруд / *Восточно Европейский научный журнал*. Варшава, Польща. Том. 1. № 12(64), 2020. Опубліковано: 2021-03-22. С. 13-17. <https://archive.eesa-journal.com/index.php/eesa/issue/view/9/38>
 12. https://epkznu.com/wp-content/uploads/2016/02/Logarifmichna_spiral_v_prirodi_pererobleny.pdf
 13. <https://uk.wikipedia.org/wiki/Спіраль>
 14. https://www.youtube.com/watch/Спіральні_форми
 15. https://elartu.tntu.edu.ua/Логарифмічна_спіраль_і_її_евольвента
 16. Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального та інтегрального числення. 2024. 2403с. (укр). {in Ukrainian}.

Referances

1. Botvinovska S.I., Kovalov S.M., Mostovenko O.V. Vlastysti deyakykh parabolydiv n-ho poryadku / *Upravlinnya rozvytkom skladnykh system*. Kyuyiv : KNUBA, 2015. № 22. S. 134-137. {in Ukrainian}.

2. Botvinovska S.I. Modelyuvannya kryvoliniynykh poverkhon' ob'yektiv dyzaynu ta upravlinnya yikh formoyu / *Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannya*. Kyiv : KNUBA, 2017. № 47. S.451 – 457. {in Ukrainian}.
3. Giuseppina Anatriello, Giovanni Vincenzi. Logarithmic spirals and continue triangles / *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Volume 296, April 2016, Pages 127-137.
4. R. Takaki, N. Ueda Analysis of spirals curves in traditional cultures *Forum*, 22 (2007), pp. 133-139. <https://surl.li/lbfurf>
5. Bidnichenko O.H. Kryvi ta poverkhni druhoho poryadku v pryrodi ta arkhitekturnykh sporudakh / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.103. Kyiv: KNUBA, 2022. C.3-15. DOI:10.32347/0131-579x.2022.103. {in Ukrainian}.
6. Bidnichenko O.H. Pryami liniyi ta liniychati poverkhni v nautsi, pryrodi ta arkhitekturnykh sporudakh / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.104. Kyiv: KNUBA, 2023. S.3-15. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104). {in Ukrainian}.
7. Bidnichenko O.H. Liniychati, ale ne ploski poverkhni v nautsi, tekhnitsi ta arkhitekturnykh sporudakh / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.105. Kyiv: KNUBA, 2023. S.3-15. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105). {in Ukrainian}.
8. Bidnichenko O.H. Heometrychne modelyuvannya hvyntovykh tsylindrychnykh poverkhon' ta yikh praktychne zastosuvannya / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.106. Kyiv: KNUBA, 2023. S.3-14. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106). {in Ukrainian}.
9. Bidnichenko O.H. Osoblyvosti heometriyi spiraley ta yikh pryrodne i praktychne zastosuvannya. *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.107. Kyiv: KNUBA, 2024. – S.3-20. [dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.107.3-20](https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.107.3-20) {in Ukrainian}.
10. Kovalov S.M., Botvinovska, S.I., Zolotova A.V. Heometrychne modelyuvannya poverkhon' iz zadanyamy vlastyvostyamy u dyzayni ta arkhitekturi / *Upravlinnya rozvytkom skladnykh system*. Kyiv : KNUBA, 2016. № 25. S. 121 – 126. {in Ukrainian}.
11. Botvinovska S.I., Kovalov S.M., Zolotova A.V. Formuvannya dyskretnykh karkasiv kupol'nykh sporud / *Vostochno Evropeysky nauchnyy zhurnal*. Varshava, Pol'sha. Tom. 1. № 12(64), 2020. Opublikovano: 2021-03-22. S. 13-17. <https://archive.eesa-journal.com/index.php/eesa/issue/view/9/38>
10. https://epkznu.com/wp-content/uploads/2016/02/Logarifmichna_spiral_v_pryrodi_pererobleny.pdf
11. <https://uk.wikipedia.org/wiki/spiral>
12. https://www.youtube.com/watch/Spiral'ni_formy

13. [https://elartu.tntu.edu.ua/Loharyfmichna spiral' i yiyi evol'venta](https://elartu.tntu.edu.ua/Loharyfmichna%20spiral%27%20i%20yiyi%20evol%27venta)
14. *Fikhtenhol'ts H.M.* Kurs dyferentsial'noho ta intehral'noho chyslennya. – 2024. – 2403s. (ukr). . {in Ukrainian}.

Ph Ph. D., assoc. prof. **Helen Bidnichenko**
helenbidnichenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0548-3481
Admiral Makarov National University of Shipbuilding (Mykolaiv)

LOGARITHMIC SPIRAL AS A GEOMETRIC FORM AND ITS NATURAL AND PRACTICAL APPLICATION

This work is devoted to the topical issue of analyzing the geometric features of the logarithmic spiral. Its theoretical and practical aspects and its natural practical application are considered. A mathematical description of the logarithmic spiral is given and its geometric model is developed: the spiral equations are given in polar coordinates and in parametric form, flat geometric models are constructed, and its geometric properties are investigated, which allow the use of this particular form in various technical areas of activity, in particular in mechanical engineering, as well as in astronomy. In nature, the shape of a logarithmic spiral is found in the shells of mollusks; the tails of seahorses, chameleons, scorpions, and iguanas; the claws of lions and cats, as well as the beaks and claws of birds; the horns of ruminants, etc. The study noted that in astronomy, spiral structure is the brightest element of galaxies that can be observed. The Milky Way galaxy, in which our solar system is located, has four spiral arms, which are formed in the form of a logarithmic spiral. It is shown that the spiral pattern of a galaxy is characterized by the number of spirals m and the twist angle i . It is proven that it is precisely due to its geometric properties that the logarithmic spiral has found wide application in technology: knives in various cutting machines or milling cutters; inlet and outlet devices of turbomachines; the shape of the outline of gear teeth in gears, etc. A conclusion was made about the possibility of expanding the scope of applications of logarithmic spirals.

Keywords: geometric model; logarithmic spiral; theoretical aspects; natural laws; practical application.