

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Український державний морський технічний університет
імені адмірала Макарова

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання контрольних завдань з теми
"Елементи векторної та лінійної алгебри"

*Рекомендовано Методичною радою УДМТУ
як методичні вказівки*

Миколаїв 2002

УДК 658.5.044.18

Зоріна І.А., Літвінова М.Б. Методичні вказівки для виконання контрольних завдань з теми "Елементи векторної та лінійної алгебри". – Миколаїв: УДМТУ. – 2002. – 28 с.

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки можуть бути використані студентами вечірньо-заочної форми навчання для виконання контрольних робіт з теми "Елементи векторної та лінійної алгебри," а також студентами денної форми навчання для індивідуальної роботи та контролю якості знань.

Рецензент д-р фіз.-мат. наук, професор В.К. Баженов

© Український державний
морський технічний
університет, 2002

© Видавництво УДМТУ, 2002

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ ТА ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

У цьому розділі подаються поняття визначника, різні способи його обчислення, методи розв'язання систем лінійних рівнянь. Крім того, розділ містить важливі відомості з векторної алгебри.

Визначники, їх обчислення.

Системи лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Правило Крамера

Нехай маємо числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Таблиця, яка має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

зветься *матрицею другого порядку*, числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ її *елементами*, причому перший індекс у записі числа вказує на номер рядка, в якому стоїть цей елемент, а другий на номер стовпця.

Число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називається *визначником матриці (1)* або *визначником другого порядку* і позначається:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Цілком аналогічно, розглядаючи таблицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) – деякі числа, маємо *матрицю третього порядку*, визначник якої позначається:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

У цьому випадку число Δ знаходять за формулою

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (3)$$

Визначник третього порядку можна виразити через визначники другого порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Основні властивості визначника

1. Величина визначника не зміниться, якщо рядки та стовпці його поміняти місцями, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо у визначнику поміняти місцями лише два рядки або два стовпці, то знак визначника змінюється на протилежний.

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) помножити на те саме число, то значення визначника також помножиться на те саме число. Звідси зрозуміло, що спільний множник всіх елементів рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника.

4. Якщо визначник містить два пропорційних рядки (стовпці), то значення його дорівнює нулю. Отже, якщо елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

5. Величина визначника не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати елементи другого рядка (стовпця), помножені на те саме число.

Нехай задано систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad (5)$$

де $a_{11}, \dots, a_{33}$ – коефіцієнти при невідомих; b_1, b_2, b_3 – вільні члени. Назвемо визначником системи (5) число Δ , яке має вигляд (2) і обчислюється за правилом (3) або (4). Тоді, знайшовши визначники:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

розв'язок системи (5) запишемо у вигляді

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (6)$$

Система (5) має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник Δ системи відмінний від нуля. Тоді в цьому разі формули (6) називають *формулами Крамера*. Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ відмінні від нуля, то (5) розв'язку не має. Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то (5) має безліч розв'язків.

Приклади

1. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$\text{а) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot (-8) = 10 + 32 = 42.$$

$$\text{б) } \Delta = \begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 \cdot 6 + 7 \cdot 0 \cdot (-8) + 0 \cdot (-3) \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-8) -$$

$$-(-3) \cdot 0 \cdot (-4) - 0 \cdot 7 \cdot 6 = -48 + 48 = 0$$

або

$$\begin{vmatrix} -4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & 3 \\ -8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y + 3z = 9; \\ x - 2y + z = -2; \\ 3x + 2y + 2z = 7. \end{cases}$$

Маємо : а)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 14 - 27 = -13;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 21 = -13.$$

$$\text{Отже, } x = \frac{13}{5}; \quad y = \frac{3}{5}.$$

б)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

$$\text{Отже, } x = -1; \quad y = 2; \quad z = 3.$$

Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь з трьома невідомими

Якщо маємо систему лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (7)$$

то її можна записати у вигляді $AX = B$ (матрична форма запису), де A , X і B – матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

При множенні матриць елементи кожного рядка першої матриці попарно перемножуємо з елементами кожного стовпчика другої матриці. Отже, в нашому випадку система лінійних рівнянь (7) може мати більш короткий, матричний, запис: $AX = B$.

Але, з огляду на правила дій з матрицями, ми можемо, якщо тільки $\det A = |A| \neq 0$, знайти до матриці A обернену матрицю A^{-1} . Тоді рівняння (матричне) $AX = B$ зміниться на рівняння (також матричне) $A^{-1}AX = A^{-1}B$, тобто $X = A^{-1}B$. Але ж це буде розв'язком системи. Отже, для того, щоб розв'язати систему рівнянь (7), треба лише вміти знаходити матрицю, обернену до матриці A .

Існує простий алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислимо визначник матриці A , він дорівнює $\det A = |A| \neq 0$.
2. Обчислимо всі алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A .

Згадаємо, що алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$, де M_{ij} – матриця, яка знайдена з матриці A викресленням i -го рядка і j -го стовпчика.

3. Побудуємо матрицю A^v , яка називається *приєднаною* до матриці A . Всі елементи A^v – це алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці A .

4. Розділимо кожен елемент матриці A^v на $\det A$.

5. Транспонуємо матрицю $\frac{1}{\det A} \cdot A^v$ (тобто поміняємо місцями рядки і стовпчики). Оце й буде обернена матриця A^{-1} , тобто

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^v \right)^T.$$

Приклад

Знайти A^{-1} , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 1. \det A = |A| &= (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0 + (-1) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \cdot (10 - 2) - 2 \cdot (-2 - 8) = -24 + 20 = -4 \neq 0. \end{aligned}$$

$$2. A_1 = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

3. Будуємо приєднану матрицю A^v :

$$A^v = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$4. \frac{1}{\det A} \cdot A^v = \begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{9}{4} & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

5. Отже,

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^v \right)^T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{4} & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Приклад

Розв'язати матричним методом систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Випишемо матрицю системи A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, то маємо матричний запис системи:

$AX = B$. Рішення її буде $X = A^{-1}B$.

Знайдемо A^{-1} . В першу чергу обчислимо $\det A = -2 \neq 0$. Далі обчислимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=5; \quad A_{12}=-11; \quad A_{13}=-3; \quad A_{21}=-17; \quad A_{22}=37;$$

$$A_{23}=11; \quad A_{31}=1; \quad A_{32}=-3; \quad A_{33}=-1.$$

Складемо матрицю A^v :

$$A^v = \begin{pmatrix} 5 & -11 & -3 \\ -17 & 37 & 11 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поділимо кожен елемент на $\det A = -2$:

$$\frac{1}{\det A} \cdot A^v = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{11}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{17}{2} & -\frac{37}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

І нарешті, транспонуючи останню матрицю, маємо:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{37}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Повернемось до розв'язання системи:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{37}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \cdot 16 + \frac{17}{2} \cdot 6 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 16 \\ \frac{11}{2} \cdot 16 + \left(-\frac{37}{2}\right) \cdot 6 + \frac{3}{2} \cdot 16 \\ \frac{3}{2} \cdot 16 + \left(-\frac{11}{2}\right) \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -40+51-8 \\ 88+(-111)+24 \\ 24+(-33)+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$.
Систему розв'язано.

Лінійні операції над векторами. Координати вектора. Довжина вектора. Скалярний добуток двох векторів

Будемо називати *вектором* напрямлений прямолінійний відрізок. Довжину відрізка, який зображує вектор, називають *модулем* або *довжиною вектора*. Якщо модуль вектора дорівнює нулю, то вектор буде *нульовим* і напрям його невизначений.

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають *колінеарними*. Якщо ж до цього вони мають однаковий напрям, то їх називають *співнаправленими*. Колінеарні вектори, що мають протилежні напрями, називають *протилежно напрямленими*. Вектори, що лежать в одній або в паралельних площинах, називають *компланарними*. Якщо вектори співнаправлені і мають однакові модулі, то такі вектори називають *рівними*. Якщо вектори мають однакові модулі, але протилежно напрямлені, то їх називають *протилежними*.

Сумою n -векторів, розміщених послідовно (тобто кінець першого вектора є початком другого), називають вектор, який сполучає початок першого вектор-доданка з кінцем останнього вектор-доданка. Якщо два вектори мають спільний початок, то для знаходження суми таких двох векторів необхідно побудувати на них двох паралелограм. Вектор, який збігається з діагонально побудованого паралелограма, що має спільний початок із заданими векторами, буде сумою цих векторів. Це правило додавання двох неколінеарних векторів називають *правилом паралелограма*.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий третій вектор $\vec{c}$, який треба додати до вектора $\vec{b}$, щоб дістати вектор $\vec{a}$, отже $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, якщо $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Неважко зрозуміти, що для того, щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, досить до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число (скаляр) t називають такий вектор $\vec{b}$, модуль якого дорівнює $|\vec{a}| \cdot |t|$ і який колінеарний з вектором $\vec{a}$ і однаково напрямлений з ним при $t > 0$ та протилежно напрямлений при $t < 0$ і є нуль-вектором при $t = 0$.

Розділити вектор $\vec{a}$ на дійсне число $t \neq 0$ означає помножити вектор $\vec{a}$ на число $\frac{1}{t}$, тобто $\vec{a} = \vec{a} \cdot \frac{1}{t}$.

Одиничним вектором (або *ортом* вектора) називають вектор, довжина якого дорівнює 1 і який співнаправлений з даним вектором. Очевидно, щоб знайти одиничний вектор заданого вектора, потрібно поділити вектор на його довжину.

Якщо маємо вектор у системі координат, то це означає, що задано його координати, тобто алгебраїчні проекції вектора на відповідні осі координат. Нехай маємо прямокутну декартову систему координат у просторі. Координати вектора позначимо через x, y, z . Тоді будемо записувати $\vec{a} = (x, y, z)$. Очевидно, що

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (8)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, взяті відповідно за осями координат. Зауважимо, що трійка векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ утворює координатний базис, якщо вектор $\vec{i}$ належить осі Ox , вектор $\vec{j}$ – осі Oy , вектор $\vec{k}$ – осі Oz . Кожен з векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ має напрям, що збігається з додатним напрямом відповідної осі, якій він належить. Подання вектора $\vec{a}$ у вигляді (8) є розкладом вектора $\vec{a}$ за координатним базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати x, y, z , то його модуль визначається за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

тоді орт вектора $\vec{a}$ позначимо через $\vec{a}_0$ і, отже,

$$\vec{a}_0 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Якщо маємо дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$, то координати вектора $\overrightarrow{AB}$ записуємо в такий спосіб:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Нехай задано вектори $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, ..., $\vec{a}_n = (x_n; y_n; z_n)$. Тоді в координатній формі маємо:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n = (x_1 + \dots + x_n, y_1 + \dots + y_n, z_1 + \dots + z_n);$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 - \dots - \vec{a}_n = (x_1 - \dots - x_n, y_1 - \dots - y_n, z_1 - \dots - z_n);$$

$$\vec{a} = \lambda \vec{a}_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні. Усе вище сказане має місце для координатної прямої та площини.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число $(\vec{a}, \vec{b})$, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, і записують:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

або

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a},$$

де $\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$ – проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

Скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{a})$ називають *скалярним квадратом* вектора $\vec{a}$, він дорівнює квадрату модуля вектора $\vec{a}$: $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Якщо вектори задано своїми координатами, тобто $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Очевидно, що $\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ або

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Напрямними кутами вектора $\vec{a}$ називають кути, які він утворює з координатними осями, а косинуси напрямних кутів називають *напрямними косинусами* і записують:

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{i}}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos(\hat{\vec{a}, \vec{j}}) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos(\hat{\vec{a}, \vec{k}}) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

де $\vec{a} = (x, y, z)$, $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Якщо під дією сили $\vec{F}$ точка переміщується з положення B в положення C , то виконана при цьому робота A чисельно буде визначатися скалярним добутком вектора сили $\vec{F}$ і вектора переміщення $\vec{BC}$, отже,

$$A = (\vec{F}, \vec{BC}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{BC}| \cos(\hat{\vec{F}, \vec{BC}}).$$

Приклад

Якщо відомо, що точки $M(3;1;-1)$, $N(3;-2;3)$, $P(1;0;4)$ – вершини трикутника, знайти кут $\angle MPN$.

Спочатку запишемо координати двох векторів, які виходять з точки P , це $\vec{PM}$ і $\vec{PN}$.

$$\vec{PM} = \{2;1;-5\}; \quad \vec{PN} = \{2;-2;-1\};$$

$$\cos \angle MPN = \cos(\overline{MP}, \overline{PN}) = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-1)}{\sqrt{4+1+25} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{7}{3\sqrt{30}} = \frac{7\sqrt{30}}{90}.$$

$$\text{Тобто } \angle MPN = \arccos \frac{7\sqrt{30}}{90}.$$

Векторний добуток двох векторів. Площа трикутника. Мішаний добуток трьох векторів. Об'єм тетраедра

Векторним добутком $[\vec{a}, \vec{b}]$ ($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$) є такий вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, утворює з ними праву трійку векторів і модуль якого визначається за формулою

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\hat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Зауважимо, що $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, а модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесених до спільного початку, тобто площі трикутника ABC , у якого $AB = \vec{a}$, $AC = \vec{b}$, може бути визначена таким чином:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]|. \quad (9)$$

У координатній формі векторний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ можна записати у вигляді

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \quad (10)$$

Мішаним або скалярно-векторним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, скалярно по-

множений на вектор $\vec{c}$, тобто

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} \text{ або } \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Чисельно мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Якщо вектори компланарні, їх мішаний добуток дорівнює нулю. Для мішаного добутку справедливі рівності:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}.$$

У координатній формі мішаний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ має вигляд

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо маємо тетраедр, заданий вершинами $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, $D = (x_4, y_4, z_4)$, то його об'єм визначається за формулою

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right\|. \quad (11)$$

Приклад

1. Трикутник задано вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Обчислити довжину висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .

Знаходимо вектори $\overrightarrow{AB} = (4, -5, 0)$ і $\overrightarrow{AC} = (0, 4, -3)$, тоді, згідно з формулами (9) і (10), дістанемо

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}^2 = \frac{1}{2} \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \frac{25}{2} \text{ кв.од.}$$

Крім того, $S = \frac{AC \cdot h}{2}$, тобто $h = \frac{2S}{AC}$. Отже, знаходячи $AC = \sqrt{16+9} = 5$, маємо

$$h = \frac{2 \cdot 25}{2 \cdot 5} = 5 \text{ лін. од.}$$

2. Три вершини тетраедра знаходяться у точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D , яка належить осі OY , якщо об'єм тетраедра дорівнює 3 куб. од.

Оскільки D належить осі OY , то її координати $(0; y; 0)$; тоді, згідно з формулою (11), маємо

$$3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & - & 4 \\ -2 & y-1 & 1 \end{vmatrix} \text{ або } 18 = |-4y+2|.$$

Розв'язуючи це рівняння, дістанемо $y_1 = -4$, $y_2 = 5$, отже, $D_1(0; -4; 0)$, $D_2(0; 5; 0)$.

Приклад

Знайти площу грані ABC , об'єм піраміди $SABC$ і довжину висоти SO , якщо вершини піраміди мають такі координати:

$$A(3;2;4), B(2;4;3), C(4;3;-2), S(-2;-4;-3).$$

Знайдемо площу трикутника ABC , як половину площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1; 2; -1\}, \overrightarrow{AC} = \{1; 1; -6\}.$$

Площа паралелограма дорівнює довжині векторного добутку цих векторів. А векторний добуток

$$\vec{\sigma} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k};$$

$$|\vec{\sigma}| = \sqrt{121 + 49 + 9} = \sqrt{179}.$$

Звідси маємо, що $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{179}$ кв. од.

Далі, об'єм піраміди $SABC$ є $\frac{1}{6}$ частина об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AS}$, де $\overline{AB} = (-1; 2; -1)$; $\overline{AS} = (-5; -6; -7)$.

Знайдемо мішаний добуток цих векторів, а це і буде, з точністю до знаку, об'єм паралелепіпеда:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AS} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \\ -5 & -6 & -7 \end{vmatrix} = 108.$$

Отже, об'єм піраміди дорівнює $V_{SABC} = \frac{1}{6} \cdot 108 = 18$ куб.од.

Щоб знайти довжину висоти SO , застосуємо формули $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO$.

Але нам відомо, що $V_{SABC} = 18$, $S_{ABC} = \sqrt{179}$; отже,

$$SO = \frac{3 \cdot 18}{\sqrt{179}} = \frac{54}{\sqrt{179}} = \frac{54\sqrt{179}}{179}.$$

Розділ 2. ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1

Розв'язати систему рівнянь матричним методом і за формулами Крамера.

Варіанти

$$1. \begin{cases} 2X + 3Y + 2Z = 9; \\ X + 2Y - 3Z = 14; \\ 3X + 4Y + Z = 16. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3X + 4Y + 2Z = 5; \\ 2X - Y - 3Z = 4; \\ X + 5Y + Z = 5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} X - 4Y - 2Z = 1; \\ 3X + Y + Z = 4; \\ -3X + 5Y + 6Z = 4. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} X - Y - Z = 2; \\ 4X - 3Y + Z = -1; \\ 2X + Y = 4. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} X + 2Y + Z = 4; \\ 3X - 5Y + 3Z = -10; \\ 2X + 7Y - Z = 11. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3X + 2Y - Z = 2; \\ 5X - Y + 3Z = -10; \\ 4X + Y - 2Z = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} X - 4Y - 2Z = -7; \\ 3X + Y + Z = 6; \\ -3X + 5Y + 6Z = 14. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 5X - Y + 3Z = 4; \\ 2X + 3Y + 6Z = 7; \\ X - 2Y + 5Z = -9. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3X - Y - Z = 7; \\ 2X + Y + 2Z = 3; \\ X + 3Y - 2Z = -1. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3X - 2Y - Z = 3; \\ 5X - 3Y + Z = 10; \\ 2X + Y - 2Z = -3. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 3X + 4Y - 2Z = -2; \\ X - Y + 3Z = 9; \\ 4X + 2Y - Z = 4. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} X - Y + Z = 6; \\ 2X + Y + Z = 3; \\ X + Y + 2Z = 5. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} X - Y + Z = 5; \\ 2X + Y + Z = 6; \\ X + Y + 2Z = 4. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2X + 3Y + 2Z = 0; \\ X + 2Y - 3Z = 5; \\ 3X + 4Y + Z = 1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 3X + 4Y + 2Z = 4; \\ 2X - Y - 3Z = -14; \\ X + 5Y + Z = 6. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3X + 4Y + Z = 16; \\ X + 2Y - 3Z = 14; \\ 2X + 3Y + 2Z = 9. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} X + 5Y + Z = 5; \\ 2X - Y - 3Z = 4; \\ 3X + 4Y + 2Z = 5. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 3X + Y + Z = 4; \\ 3X - 5Y - 6Z = -4; \\ X - 4Y - 3Z = 1. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 4X - 3Y + Z = -1; \\ 2X + Y = 4; \\ X + Y - Z = 2. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 2X + 7Y - Z = 11; \\ 3X - 5Y + 3Z = -10; \\ X + 2Y + Z = 4. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 4X + Y - 2Z = 0; \\ 3X + 2Y - Z = 2; \\ 5X - Y + 3Z = -10. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3X - 5Y - 6Z = -14; \\ 3X + Y + Z = 6; \\ X - 4Y - 2Z = -7. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} X - 2Y + 5Z = -9; \\ 2X + 3Y + 6Z = 7; \\ 5X - Y + 3Z = 4. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} X + 3Y - 2Z = -1; \\ 3X - Y - Z = 7; \\ 2X + Y + 2Z = 3. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 2X + Y - 2Z = -3; \\ 3X - 2Y - Z = 3; \\ 5X - 3Y + Z = 10. \end{cases}$$

Завдання 2

Дано координати вершин піраміди: A_1, A_2, A_3, A_4 . Потрібно методами векторної алгебри знайти: кут між ребрами A_1A_2 і A_3A_4 ; площу грані $A_1A_2A_3$; об'єм піраміди і висоту A_4O , опущену на грань $A_1A_2A_3$.

Варіанти

1. $A_1(1; -1; 6), A_2(4; 5; -2), A_3(-1; 3; 0), A_4(6; 1; 5)$.

2. $A_1(1; -3; 1), A_2(-3; 2; -3), A_3(-3; -3; 3), A_4(-2; 0; -4)$.

3. $A_1(1; 1; 1), A_2(3; 4; 0), A_3(-1; 5; 6), A_4(4; 0; 5)$.

4. $A_1(0;0;0), A_2(5;2;0), A_3(2;5;0), A_4(1;2;4).$
5. $A_1(7;1;2), A_2(-5;3;-2), A_3(3;3;5), A_4(4;5;-1).$
6. $A_1(-2;3;-2), A_2(2;-3;2), A_3(2;2;0), A_4(1;5;5).$
7. $A_1(3;1;1), A_2(1;4;1), A_3(1;1;7), A_4(3;4;-1).$
8. $A_1(4;-3;-2), A_2(2;2;3), A_3(2;-2;-3), A_4(-1;-2;3).$
9. $A_1(5;1;0), A_2(7;0;1), A_3(2;1;4), A_4(5;5;3).$
10. $A_1(4;2;-1), A_2(3;0;4), A_3(0;0;4), A_4(5;-1;-3).$
11. $A_1(1;1;1), A_2(-1;2;4), A_3(2;0;6), A_4(-2;5;-1).$
12. $A_1(0;5;0), A_2(2;3;-4), A_3(0;0;-6), A_4(-3;1;-1).$
13. $A_1(0;0;6), A_2(4;0;-4), A_3(1;3;-1), A_4(4;-1;-3).$
14. $A_1(-5;6;-1), A_2(6;-5;2), A_3(6;5;1), A_4(0;0;2).$
15. $A_1(2;-5;3), A_2(3;2;-5), A_3(5;-3;-2), A_4(-5;3;2).$
16. $A_1(6;0;4), A_2(0;6;4), A_3(4;6;0), A_4(0;-6;-4).$
17. $A_1(3;2;4), A_2(2;4;3), A_3(4;3;-2), A_4(-2;-4;-3).$
18. $A_1(6;3;5), A_2(5;-6;3), A_3(3;5;6), A_4(-6;-1;2).$
19. $A_1(5;-2;-1), A_2(4;0;0), A_3(2;5;1), A_4(1;2;5).$
20. $A_1(4;2;5), A_2(3;0;4), A_3(0;0;3), A_4(5;-2;-4).$
21. $A_1(1;2;7), A_2(4;2;10), A_3(2;3;5), A_4(5;3;7).$
22. $A_1(0;5;0), A_2(2;3;-4), A_3(0;0;6), A_4(-3;1;-1).$
23. $A_1(0;0;6), A_2(4;0;-4), A_3(1;3;-1), A_4(4;-1;-3).$
24. $A_1(-5;6;-1), A_2(6;-5;2), A_3(6;5;1), A_4(0;0;2).$
25. $A_1(2;-5;3), A_2(3;2;-5), A_3(5;-3;-2), A_4(-5;3;2).$

Завдання 3

Варіанти

1. Дано вершини трикутника: $A(-12;-3), B(12;-10), C(-6;14).$
Знайти довжину висоти $AD.$
2. Дано вершини трикутника: $A(-12;-3), B(12;-10), C(-6;14).$
Знайти довжину висоти $AD.$
3. Дано вершини трикутника: $A(-12;-3), B(12;-10), C(-6;14).$
Скласти рівняння медіани $AE.$
4. Дано вершини трикутника: $A(-12;-3), B(12;-10), C(-6;14).$
Скласти рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно стороні $BP.$
5. Дано вершини трикутника $A(-12;-3), B(12;-10), C(-6;14).$
Скласти рівняння середньої лінії, що проходить через середини сторін BC і $BA.$
6. Знайти проекцію точки $P(4;-3)$ на пряму $4X + 3Y + 12 = 0.$

7. Скласти рівняння прямої, якщо точка $P(2;3)$ служить основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

8. У точках перетину прямої $2X - 5Y + 10 = 0$ з осями координат проведені перпендикуляри до прямої. Скласти їх рівняння.

9. Показати, що точки $M_1(2;1), M_2(-3;3), M_3(7;-1)$ лежать на одній прямій. Знайти її рівняння.

10. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M_0(2;-3)$ і складають із прямою $2X - 3Y + 6 = 0$ кут 45° .

11. Дано сторону прямокутника $3X - 4Y + 5 = 0$ і дві його вершини $A(1;3)$ і $C(1;2)$. Знайти рівняння інших сторін прямокутника.

12. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $M_0(1;4)$:

а) паралельно прямій $2X + Y + 1 = 0$;

б) перпендикулярно до цієї прямої.

13. Дано середини сторін трикутника: $M_1(2;1), M_2(5;3), M_3(3;-4)$. Скласти рівняння сторони, що проходить через точку M_1 .

14. Дано вершини трикутника: $A(3;2), B(5;-2), C(1;0)$. Скласти рівняння медіани BD .

15. Визначити кут, утворений прямими $3X - Y + 5 = 0$ і $2X + Y - 7 = 0$.

16. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5X - 12Y - 65 = 0$, $5X - 12Y + 26 = 0$. Обчислити його площу.

17. Дано вершини трикутника $A(-20;1), B(4;-6), C(-14;18)$. Знайти довжину висоти AD .

18. Дано вершини трикутника: $A(-20;1), B(4;-6), C(-14;18)$. Скласти рівняння висоти AD .

19. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $X + 2Y + 1 = 0$, $2X + Y + 2 = 0$ і утворює кут 135° з віссю абсцис.

20. Знайти проекцію точки $P(-8;12)$ на пряму, яка проходить через точки $A(2;-3)$ і $B(-5;1)$.

21. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $X + 2Y + 3 = 0$, $2X + 3Y + 4 = 0$ і паралельну прямій $5X + 8Y = 0$.

22. Дано сторони трикутника: $X + 2Y + 5 = 0(AB)$, $3X + Y + 1 = 0(BC)$, $X + Y + 7 = 0(AC)$. Скласти рівняння висоти, опущеної на сторону AC .

23. Дано сторони трикутника $X + 3Y - 7 = 0(AB)$, $4X - Y - 2 = 0(BC)$, $6X + 8Y - 35 = 0(AC)$. Знайти довжину висоти, проведеної з вершини B .

24. Дано точки $A(-20;1), B(4;-6), C(-14;18)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно прямій BP .

25. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;5)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b = 7$.

Завдання 4

Варіанти

1. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{X-2}{2} = \frac{Y+3}{-1} = \frac{Z+1}{5}$ перпендикулярно до площини $2X - 3Y + 5Z + 6 = 0$.

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases} X - 2Y + Z - 3 = 0 \\ X + Y - Z + 2 = 0 \end{cases}$.

3. Знайти точку перетину прямої $\frac{X-1}{1} = \frac{Y+1}{-2} = \frac{Z}{6}$ і площини $2X + 3Y + Z - 1 = 0$.

4. Знайти проекцію точки $P(5;2;-1)$ на площину $2X - Y + 3Z + 23 = 0$.

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;2;-3)$ паралельно прямим $X^2 + 3Z + 3 = 0$, $\frac{X+5}{3} = \frac{Y-2}{-2} = \frac{Z+3}{-1}$.

6. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $X = 2t + 1$, $Y = -3t + 2$, і точку $M_0(2;-2;1)$.

7. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{X-2}{3} = \frac{Y+1}{2} = \frac{Z-3}{-2}$, $\frac{X-1}{3} = \frac{Y-2}{2} = \frac{Z+3}{-2}$.

8. При якому значенні C пряма $\begin{cases} 3X - 2Y + Z + 3 = 0 \\ 4X - 3Y + 4Z + 1 = 0 \end{cases}$ паралельна площині $2X - Y + C_Z - 2 = 0$?

9. Скласти параметричне рівняння прямої $\begin{cases} X+3Y+Z=0 \\ X-Y-3Z-2=0 \end{cases}$.
10. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(3;-1;2)$ паралельно прямій $\frac{X-1}{2} = \frac{Y+2}{-1} = \frac{Z-3}{2}$.
11. Довести, що прямі $\frac{X-1}{2} = \frac{Y+2}{-3} = \frac{Z-5}{4}$ і $X=3t+7$, $Y=2t+2$, $Z=-2t+1$ лежать в одній площині, і скласти рівняння цієї площини.
12. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $X=3t+1$, $Y=2t+3$, $Z=-t-2$ паралельно прямій $\frac{X+1}{-2} = \frac{Z+2}{2} = \frac{Z-1}{1}$.
13. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-3;1)$ паралельно векторам $\vec{a}=(-3;2;-1)$ і $\vec{b}=(1;2;3)$.
14. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-15;1)$, $M_2(3;1;2)$ перпендикулярно до площини $3X-Y-4Z=0$.
15. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(-1;1;-1)$ паралельно до прямої, обумовленої точками $A(5;-2;3)$ і $B(6;1;0)$.
16. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(3;-2;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$.
17. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;1;1)$ і $M_2(-1;1;-1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(1;3;-3)$.
18. Знайти точку перетину прямої $\frac{X-12}{4} = \frac{Y-9}{3} = \frac{Z-1}{1}$ і площини $3X+5Y-Z-2=0$.
19. Знайти кут між прямою $\frac{X+1}{2} = \frac{Y}{2} = \frac{Z+5}{5}$ і площиною $X-3Y+Z+5=0$.
20. Знайти проекцію точки $A(4;-3;1)$ на площину $X+2Y-Z-3=0$.

21. Скласти рівняння площини, що проходить через дві паралельні прямі $\frac{X-1}{2} = \frac{Y}{3} = \frac{Z+2}{1}$ і $\frac{X+1}{2} = \frac{Y+3}{3} = \frac{Z}{1}$.

22. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{X-1}{1} = \frac{Y+1}{2} = \frac{Z+1}{-1}$ і точку $M_0(2;0;1)$.

23. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;1;3)$ і $M_2(2;4;5)$ паралельно осі OX . Побудувати площину.

24. Знайти кут між прямими $\begin{cases} X+3Y+Z+2=0 \\ X-Y-3Z-2=0 \end{cases}$ і $\frac{X-3}{-1} = \frac{Y+2}{2} = \frac{Z-1}{1}$.

25. Скласти рівняння площини, що проходить через перпендикуляри, опущені з точки $M(-1;2;5)$ на площини $4X+Y-3Z+13=0$ і $X-2Y+Z-11=0$.

Завдання 5

Знайти, які поверхні визначаються даними рівняннями. Зробити схематичне креслення.

Варіанти

1. а) $Z^2 - 2X^2 - Y^2 = 2$; б) $Z = X^2 + 1$; в) $2X + Y = 1$.
2. а) $2X^2 + Y + 3Z^2 = 6$; б) $X^2 - 2Y^2 = 2$; в) $3X + Z = 6$.
3. а) $Z = X^2 + 2Y^2$; б) $Y = -X^2$; в) $2X + Y + 3Z = 6$.
4. а) $Z = 4 - X^2 - Y^2$; б) $Y^2 = Z + 2$; в) $X - 2Y = 4$.
5. а) $Z^2 = X^2 + 2Y^2 + 1$; б) $X^2 + Y = 0$; в) $X + 3Z = 3$.
6. а) $2X^2 + 3Y^2 - Z^2 = 6$; б) $Y^2 - 2Z = 0$; в) $2X + Z + 2 = 0$.
7. а) $Z = 3X^2 + 4Y^2$; б) $X^2 + 3Z + 3 = 0$; в) $Z + 2Y - 2 = 0$.
8. а) $Y = 2X^2 + Z^2$; б) $X^2 + 2Z^2 = 2$; в) $2Y + Z - 3 = 0$.
9. а) $Z^2 = \frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9}$; б) $X^2 + Y^2 = 4$; в) $Z - Y = 0$.
10. а) $X = \frac{Y^2}{2} + \frac{Z^2}{8}$; б) $X = 2Y^2$; в) $X + 2Y + Z - 4 = 0$.

11. a) $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} - Z^2 = 1$; б) $Y = X^2$; в) $Y + Z = 2$.
12. a) $Z = 4 - X^2 - 4Y^2$; б) $Z = 1 - X^2$; в) $3X + 2Y - 6 = 0$.
13. a) $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} - \frac{Z^2}{16} = 1$; б) $Z = 2Y^2$; в) $3X + 4Y = 12$.
14. a) $Z = 9X^2 + Y^2$; б) $Z = 4 - Y^2$; в) $3X + 2Y - 6 = 0$.
15. a) $Z = 3 - 2X^2 - 6Y^2$; б) $X = 3Y^2$; в) $5X + Z = 15$.
16. a) $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{9} - Z^2 = 1$; б) $Y = 1 - Z^2$; в) $Y - X = 0$.
17. a) $\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{9} - Z^2 = -1$; б) $Z = 9 - Z^2$; в) $X + 6Y - 6 = 0$.
18. a) $Z = 3 - 2X^2 - 3Y^2$; б) $Z = \frac{1}{4}X^2$; в) $X + 3Y - 6 = 0$.
19. a) $Z = 2X^2 + 3Y^2$; б) $Z = X^2$; в) $2X + 3Y = 6$.
20. a) $Z = \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4}$; б) $Z = Y^2$; в) $X + 2Y + 3Z = 6$.
21. a) $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} - \frac{Z^2}{2} = 1$; б) $Z = 4 - X^2$; в) $X - 2Y + 3Z = 6$.
22. a) $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{2} = 1$; б) $X^2 + 2Y^2 = 2$; в) $Z = X$.
23. a) $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} - \frac{Z^2}{16} = 1$; б) $X = 16 - Z^2$; в) $8X + Y = 8$.
24. a) $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{16} = 1$; б) $Y = 16 - Z^2$; в) $X + 2Z = 2$.
25. a) $Z = 5 - X^2 - Y^2$; б) $Y = 2X^2$; в) $4Y + Z = 8$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. – М: Наука, 1989.
2. *Ильин В.А., Позняк Е.Г.* Основы математического анализа. – М: Наука, 1982.
3. *Смирнов В.И.* Курс вищої математики. – М: Державне видавництво технічної літератури УРСР, 1954. – Т.1.
4. *Шестаков А.А., Мальшева И.А., Полозков Д.П.* Курс высшей математики. – М: Высшая школа, 1987.
5. *Шиманський І.Є.* Математичний аналіз. – К: Вища школа, 1972.

ІРІНА АНАТОЛІЇВНА ЗОРІНА
МАРИНА БОРИСІВНА ЛІТВІНОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для виконання контрольних завдань з теми
"Елементи векторної та лінійної алгебри"

Редактор О.В. Забава
Комп'ютерна правка і верстка Т.В. Митрохіна, М.О. Постніков
Коректор Н.О. Шайкіна

Підписано до друку 27.09.02. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Ум.друк. арк. 1,6.
Обл.-вид. арк. 1,7. Тираж 200 прим. Вид. № 7. Зам. № 238. Ціна договірна.

Видавництво УДМТУ. 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5