

*"Любой интеллектуальный дурак
может сделать явление большим,
более сложным и более искаженным.
Но только прикосновение исключительного гения –
и очень большая отвага –
могут повернуть все в обратном направлении..."*
Альберт Эйнштейн

*'Any intelligent fool
can make things bigger,
more complex, and more violent.
It takes a touch of genius –
and a lot of courage –
to move in the opposite direction...'*
Albert Einstein

National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Hydromechanics

National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Pulse Processes and Engineering

Ministry of Education and Science of Ukraine
Admiral Makarov National University of Shipbuilding

V. S. KRUTIKOV

**WAVES IN THE REGIONS
WITH MOBILE PERMEABLE BOUNDARIES.
CONTROL PROBLEMS**

MONOGRAPH

KIEV ♦ NAUKOVA DUMKA

Национальная академия наук Украины
Институт гидромеханики

Национальная академия наук Украины
Институт импульсных процессов и технологий

Министерство образования и науки Украины
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

В. С. КРУТИКОВ

**ВОЛНЫ В ОБЛАСТЯХ
С ПОДВИЖНЫМИ ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ.
ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ**

МОНОГРАФИЯ

КИЕВ ♦ НАУКОВА ДУМКА

УДК 534.222

ББК 22.311

К 84

Автор В. С. Крутиков, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, старший научный сотрудник по ВАК, действительный член Нью-Йоркской Академии наук

Рецензенты:

М. М. Лаврентьев, академик РАН; И. Д. Спасский, академик РАН, Герой Социалистического Труда; В. Т. Гринченко, академик НАН Украины; Ю. Е. Шамарин, доктор технических наук, Центральное конструкторское бюро гидроакустики

Утверждено Учеными советами

Национальной академии наук Украины

Института гидромеханики

(протоколы № 5 от 26.10.1995, № 34/8 от 21.11.1996,

№ 36-07/6 от 02.07.2008, публикаций автора 2006–2013 гг.)

Национальной академии наук Украины

Института импульсных процессов и технологий

(протокол № 11 от 22.12.2014 г.)

Национального университета кораблестроения

имени адмирала Макарова

(протокол № 1 от 30.01.2015 г.)

Крутиков В. С.

К 84 Волны в областях с подвижными проницаемыми границами. Вопросы управления : монография / В. С. Крутиков. – Николаев : НУК, 2015. – 392 с.

ISBN 978–966–321–304–0

Около трех столетий, с момента создания волнового уравнения, перед математической физикой стоят проблемы решения нелинейных задач, описываемых уравнениями в частных производных, сложнейшая из которых – проблема подвижных границ. Предложен и разработан нетрадиционный, авторский, подход решения проблем подвижных проницаемых границ – это методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов. Метод позволил сделать качественный шаг вперед, перейти от познания волновых процессов к более сложному и важному процессу управления волновыми явлениями. Определены функции управления волновыми процессами в областях с подвижными проницаемыми, подвижными излучающими границами.

Для научных работников, инженеров, разрабатывающих наукоемкие технологии, студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

For about three centuries, from the moment of creation of wave equation, mathematical physics has been facing the problems of solution of nonlinear problems described by equations in partial derivatives. The most complex of them is the problem of mobile boundaries. An alternative author's approach to mobile permeable problems solution was proposed and developed. The method allowed making a qualitative step forward, turning from the learning of wave processes to more complex and important process of wave processes control. The functions of wave processes control in the regions with mobile permeable boundaries, mobile radiating boundaries were defined.

Intended for scientists, engineers developing high technologies, students and post-graduates of related specialties.

УДК 534.222

ББК 22.311

© Крутиков В. С., 2015

© Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова, 2015

ISBN 978–966–321–304–0

*Нашим дорогим женщинам и, прежде всего,
Бабушке, матери, жене, дочерям
Ангелине Григорьевне, Ангелине Ивановне,
Жанне Павловне, Наташе и Ольге,
По судьбам которых тяжело, целое столетие
Прокатились результаты эксперимента
Социального управления:
Без знания точных функций управления и
Без осмысления всех возможных последствий
Такого управления.*

Отзывы и необходимые сведения о рецензентах

"Книга может считаться удачной и достигшей своей цели только в том случае, если она заслужила положительное к себе отношение и со стороны тех, кто этим естествознанием профессионально занимается на деле".

В. Л. Гинзбург, Нобелевский лауреат.
О физике и астрофизике. – М. : Наука, 1985
и [91, гл. VII].

Гринченко Виктор Тимофеевич

Академик НАН Украины.

Директор института гидромеханики НАН Украины.

Области научных интересов, в том числе: механика, акустика, количественный анализ волновых процессов, медицинская акустика, исследование свойств, порождающих различные типы волн и не имеющих аналогов в акустике и электродинамике, научный руководитель научного центра по изучению гидроаэродинамической природы возникновения шумов, по результатам исследований создан, не имеющий аналогов, электронный медицинский диагностический комплекс и т.д.

Лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники и премии им. М.К. Янгеля.

Главный редактор журналов "Акустический вестник", "Прикладная гидромеханика".

Спасский Игорь Дмитриевич

Академик РАН.

Председатель Научного совета по проблемам гидродинамики при Президиуме РАН.

Зам. председателя Научного совета по волновым процессам РАН.

Член Комиссии при Президенте РФ по Государственным премиям в области науки и техники.

Начальник и генеральный конструктор ЦКБ морской техники "Рубин".

Лауреат Ленинской и Государственной премий, выдающийся ученый, внесший существенный вклад в создание морского ракетно-ядерного потенциала и подводных сил Отечества.

Герой Социалистического Труда.

Ученая степень, ученое звание: академик по отделению энергетики, машиностроения, механики и процессов управления.

Лаврентьев Михаил Михайлович

Академик РАН.

Директор института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Лауреат Ленинской и Государственной премий.

Области научных интересов, в том числе: некорректные задачи математической физики, обратные задачи для дифференциальных уравнений, условно – корректные задачи для дифференциальных уравнений, некорректные задачи математической физики и анализа, одномерные обратные задачи математической физики и т. д.

Главный редактор "Сибирского математического журнала".

Рецензия на монографию В. С. Крутикова
"Волны в областях с подвижными проницаемыми границами.
Вопросы управления"

В монографии обобщаются многолетние исследования автора, выполненные в Институте импульсных процессов НАНУ. Изучение волновых явлений, процессов генерации волн и взаимодействия волн с препятствиями различного типа является ведущим научным направлением в Институте. Автор монографии принимал непосредственное участие в таких исследованиях. Я лично имел возможность наблюдать в течение многих лет рост научного потенциала В. С. Крутикова. В совете института гидромеханики проходила защита его докторской диссертации. К настоящему времени им накоплен огромный материал, составляющий базу для понимания сложных волновых явлений, разработке методов управления волновыми процессами и создания инженерных подходов к практическому использованию результатов. По моему мнению объем монографии, ее содержание и стиль изложения делают ее книгой, интересной для широкого круга читателей, интересующихся как фундаментальными аспектами волновых явлений, так и вопросами практического их использования.

Академик НАНУ



В.Т. Гринченко

**Review on the monograph by Krutikov V.S.
"Waves in the regions with mobile permeable boundaries.
Control problems"**

The long-term researches of the author, carried out in the Institute of pulse processes and technologies at NASU are summarized in the monograph. The study of the wave phenomena, processes of wave generation and wave cooperation with the obstacles of different types is the leading scientific direction of the Institute. The author of this monograph took a direct part in such researches. I had a possibility to observe the growth of Krutikov's scientific potential during many years. He defended his thesis in the board of the Hydromechanics institute. By now, he accumulated vast material that make up the basis for understanding the complicated wave phenomena, the development wave processes control methods and creation of engineering approaches for practical use of the results. In my opinion, the size of the monograph, its content and style make it to be an interesting book for a wide circle of readers concerning themselves with the fundamental aspects of wave phenomena, and problems of their practical use.

Academician
National Academy
of Sciences of Ukraine



V.T. Grinchenko

Рецензия на монографию В. С. Крутикова
"Волны в областях с подвижными проникаемыми границами.
Вопросы управления"

Монография В. С. Крутикова "Волны в областях с подвижными проникаемыми границами. Вопросы управления" содержит методы решения как прямых, так и обратных задач для волнового уравнения со специфическими крайними условиями. Основное внимание в монографии уделено симметричным нестационарным задачам газовой динамики, гидродинамики и акустики при импульсных воздействиях. Физические процессы, описываемые предлагаемой математической моделью, представляют весьма большой интерес не только при решении ряда прикладных технических задач, как, например, исследование движения продуктов взрыва и среды, в которой происходит взрыв, но и при изучении принципиальных вопросов современной физики. Так различные процессы, происходящие в мировом пространстве, например, образование звезд, галактик и т.д., связаны именно с неустановившимися движениями огромных газовых масс. В этом проявляется фундаментальность проблем, затронутых в монографии. Учет подвижности и проникаемости границ существенно расширяет класс задач, которые могут быть теоретически исследованы в рамках предложенного подхода.

Автор распространяет предложенный им метод учета подвижных и проникаемых границ не только на физические явления, описываемые уравнениями гиперболического типа (к которым относится волновое уравнение), но и на явления, описываемые уравнениями параболического типа. К таким математическим моделям могут быть сведены задачи теплопроводности, диффузии, нестационарных движений вязко-пластических сред.

Вместе с тем, следует отметить, что если предложенные автором аналитические методы решения рассматриваемых задач и являются новыми, то его тезис о том, что ранее были предложены лишь численные решения волнового уравнения с подвижными границами, по всей видимости, не совсем корректен. Здесь уместно вспомнить монографию А. И. Весницкого "Волны в системах с движущимися границами и нагрузками", М.: Физматлит, 2001 г., 320 с. с обширной библиографией по указанной проблематике, как на русском, так и на английском языках. А. И. Весницким были предложены методы нахождения точных и приближенных решений, а также указан общий класс нелинейных инвариантных преобразований волнового уравнения, позволяющий конструировать точные решения в форме, удобной для аналитического исследования. Позднее выяснилось, что такие же преобразования еще в 1910 году были предложены Н. А. Умовым, развившим идею инвариантности уравнений движения в специальной теории относительности. На основе точных решений А. И. Весницким был выявлен ряд общих свойств динамического поведения систем с движущимися границами, а также изучены особенности проявления их резонансных свойств.

Можно вспомнить книгу О. А. Горошко и Г. Н. Савина "Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины", Киев: Наукова думка,

1974 г., где также рассмотрены аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными границами.

При рассмотрении вопросов физики взрыва В. С. Крутиков с одной стороны всесторонне теоретически изучает указанное явление с учетом подвижности и проницаемости границ, а с другой не приводит конкретных расчетных методик физических процессов происходящих при взрыве, как это сделано, скажем, в монографии К. П. Станюковича "Неустановившиеся движения сплошной среды", М.: Наука, 1971 г., 855 с. Или в недавно изданной книге: Ю. Н. Кормилицин, С. Ю. Мельников, В. Т. Томашевский "Подводный взрыв и его взаимодействие со средами и преградами", СПб.: Наука, 2006 г., 244 с.

Особое место в монографии В. С. Крутикова занимают вопросы управления волновыми процессами для получения заранее заданных полей скоростей и давлений в интересующих точках, включая ближнюю зону и подвижные поверхности границ (где экспериментальное исследование затруднительно или невозможно), а также целенаправленное изменение их во времени. Как показал автор, подвижность и проницаемость границ могут рассматриваться в качестве принципа управления. Таким образом, предложенный автором метод решения волнового уравнения в областях с подвижными проницаемыми границами позволил перейти от процессов познания волновых явлений к более сложным и важным процессам управления волновыми явлениями.

В целом, предложенные автором методы решения задач математической физики в областях с подвижными проницаемыми границами являются новыми и заслуживают внимания специалистов занимающихся изучением волновых процессов в сплошных средах, а его монография может быть рекомендована к публикации.

Академик РАН, профессор



И.Д. Спасский

Кандидат

физико-математических наук



А.Л. Сухоруков

**Review on the monograph by Krutikov V. S.
"Waves in the regions with mobile permeable boundaries.
Control problems"**

The monograph by Krutikov V. S. "Waves in the regions with mobile permeable boundaries. Control problems" contains methods of a decision both direct as inverse problems for the wave equation with specific regional conditions. The main attention in the monograph is focused on symmetrical unstationary problems of gas dynamics, hydrodynamics and acoustics by impulsive influences. Physical processes, being described with the suggested mathematical model, present highly wide interest not only by decisions of a number of applied technical problems, as, for instance, investigation of movement of products of an explosion and media, in which the explosion takes place, but also by study of principal problems of a modern physics. So various processes, taking place in the world's space, for instance, formation of stars, Galaxies and so on, are exactly connected with unsettled movements of enormous gas masses. The fundamental nature of problems, affected in the monograph, is shown in it. The account of a mobility and permeability of the boundaries substantially extends the class of problems, which can be theoretically investigated in the bounds of a suggested approach.

The author popularizes his suggested method of the account of mobile and permeable bounds not only on physical phenomenon, being described with equations of a hyperbolic type (to which the wave equation concerns), but also on phenomenon being described with equations of a parabolic type. The problems of heat conductivity, diffusion, unstationary movements of tough-plastic media can come to such mathematic models.

At the same time, it should be marked, that if the analytical methods of decisions of considered problems suggested by the author are just new, then his thesis about that, what earlier were suggested only numeral decisions of wave equation with mobile boundaries, obviously, is not quite correct. Here it is appropriate to remember the monograph by Vesnitskiy A. I. "Waves in the systems with motive boundaries and loads", M.: Phizmatlit, 2001, 320 p. with a vast bibliography on the stated problems, both in Russian, as also in English languages. The methods of finding the exact and approximate decisions were suggested by Vesnitskiy A. I., and also there was stated the general class of nonlinear invariant transformations of wave equation, that allows to construct exact decisions in the form, convenient for the analytical investigation. Later it turned out, that the same transformations were still suggested in 1910 by Naumov N. A., who developed the idea of invariance of movement's equation in a special theory of relativity. On the basis of exact decisions a number of general characteristics of a dynamic conduct of systems with motive boundaries were exposed by Vesnitskiy A. I., and also the features of a manifestation of resonance characteristics were studied.

One can remember the book by Goroshko O. A. and Savin G. N. "Introduction to mechanics of deformable one-measured bodies of a variable length", Kiev: Scientific thought, 1974, where the analytical decisions of wave equation in the regions with mobile boundaries were also considered.

By the consideration of problems of the explosion's physics Krutikov V. S. from one side comprehensively studies in theory the stated phenomenon with the account of mobility and permeability of the boundaries and from the other side he doesn't adduce the concrete calculated methods of physical processes taking place by the explosion, as it is done, so to say, in the monograph by Stanyukovich K. P. "Unestablished movements of a solid medium", M: Science, 1971, 855 p. Or in the recently published book by Kormilitzin Y. N., Melnikov S. Y., Tomashevskiy V. T. "Underwater explosion and its interaction with media and obstacles", SPb: Science, 2006, 244 p.

The particular place in the monograph by Krutikov V. S. is assigned to the control problems of wave processes for the receiving of given beforehand fields of speeds and pressures in the interested points, including the near area and mobile surfaces of boundaries (where the experimental investigation is difficult or impossible), and also single-minded change of them in time. As the author showed, the mobility and permeability of the boundaries can be considered in the quality of control principles. In that way, suggested by the author method of the decision of wave equation in the regions with mobile permeable boundaries allowed to pass on the processes of wave phenomena cognition to more complicated and important processes of wave phenomena control.

In the whole, suggested by the author methods of a decision of the problems of the mathematical physics in the regions with mobile permeable boundaries are new and worth notice of specialists engaged in study of wave processes in solid media, and his monograph can be recommended for a publication.

Academician RAS, professor



Spasskiy I.D.

Candidate

of physico-mathematical sciences



Sukhorukov A.L.

Рецензия на монографию В. С. Крутикова
"Волны в областях с подвижными проницаемыми границами.
Вопросы управления"

Многолетние целенаправленные усилия, а также понимание физики волновых явлений, позволило В. С. Крутикову создать новые, авторские подходы – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов и решить фундаментальные физические проблемы подвижных границ (ПГ), подвижных проницаемых границ (ППГ), вопросы управления волновыми процессами, которые не решались с момента создания волнового уравнения.

Автору удалось решить, ранее нерешенные волновые задачи с ПГ обратные (задачи управления) и прямые, впервые поставить и решить сложные существенно нелинейные задачи с подвижными проницаемыми границами обратные и прямые, решить аналитически дважды нелинейные задачи (с ПГ и нелинейными дополнительными условиями) и многое другое, привести решение дважды нелинейных задач для уравнения в частных производных волнового к решению одного алгебраического (квадратного) уравнения.

Наиболее существенным является аналитическое определение начального радиуса и конечной длины цилиндрического плазменного поршня, расширяющегося в сжимаемой среде, а также функций управления по заданной форме функции воздействия (давлению или скорости) в точке волновой зоны. Разработанные методы позволяют решать новые классы нелинейных задач теоретической физики и математической физики, импульсной гидродинамики, акустики и т.д.

По роду своей работы – длительное время возглавлял Киевский государственный научно-исследовательский институт гидроприборов – знаю, что изучение волновых процессов чрезвычайно важно для развития науки и наукоемких технологий. КГНИИ гидроприборов занимался фундаментальными и прикладными исследованиями создания целого спектра акустических и гидроакустических комплексов и станций для самолетов и кораблей ВМС Украины и России, в т.ч. авианосцев. Например, радиогидроакустические буи различного назначения, гидроакустические станции по выявлению подводных диверсионных сил и средств (ПДСС), якорные системы подводной охранной сигнализации, гидроакустические антенны и преобразователи, системы акустического противодействия и т.д. Работая в тесном контакте с ведущими мировыми научными организациями (ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, ФГУП ЦКБ МТ "Рубин", ФГУП "Океан-прибор", Акустический институт РАН и т.д.), приходим к выводу, что никакая модернизация невозможна без новейших фундаментальных научных достижений. Именно к таким достижениям относятся материалы, изложенные в монографии.

По нашему мнению, рассматриваемую монографию следует опубликовать и это будет полезно для ученых и производителей.

Директор ЦКБ гидроакустики НПО "Кливер",
доктор технических наук, профессор,
Заслуженный изобретатель Украины,
Лауреат Государственной премии Украины
в области науки и техники

A stylized handwritten signature in black ink, consisting of several fluid, connected strokes.

Ю.Е. Шамарин

Review of monography
"Waves in domains with moving permeable boundaries.
Questions of control", author V. S. Krutikov

Long-term purposeful efforts, and also comprehension of wave physics allowed V. S. Krutikov to provide new author's approaches – methods of reverse tasks taking into account non-linear arguments interaction and to solve fundamental physical problems of moving boundaries (MB), moving permeable boundaries (MPB), questions of wave process control that remained unsolved from the moment when a wave equation emerged.

The author succeeded in solving previously unsolved wave tasks with MB both reverse (control tasks) and direct; for the first time stating and solving difficult principally non-linear tasks with moving permeable boundaries both reverse and direct; analytically solving twice non-linear tasks (with moving boundaries and non-linear additional conditions) and many other tasks; and also leading twice non-linear task solving for equation in separate derivatives of a wave equation to solving one algebraic (quadratic) equation.

Highly considerable is analytical determination of an initial radius and a finite length of a cylindrical plasma piston expanding in a compressible medium, and also control functions by a preset form of affection function (pressure or velocity) in a point within a wave domain. Developed methods enable solving new types of non-linear tasks of theoretical physics and mathematical physics, pulse hydrodynamics, acoustics, etc.

Following my occupational duties – for a long time being the head of Kiev State Scientific Research Institute of Hydrodevices (KSSRIH), – I have encountered the fact that study of wave processes is highly important for development of science and science intensive technologies. KSSRIH was long engaged in fundamental and applied researches for making of a whole range of acoustic and hydroacoustic complexes and stations for airplanes and ships of the Navy of Ukraine and Russia, including aircraft carriers. Thus, multipurpose radiohydroacoustical buoys, hydroacoustic stations for underwater warfare detection, anchor systems of underwater security alarm systems, hydroacoustic antennae and couplers, acoustic countermeasures, etc. Working in a tight contact with prominent world research organizations (Krylov Shipbuilding Research Institute, Central Design Bureau for Marine Engineering "Rubin", JSC "Oceanpribor", Andreyev Acoustics Institute, etc.), we came to a conclusion that modernization is in no way possible without novel fundamental scientific achievements. To these achievements refer the content laid in this monography.

In our opinion, the reviewed monography should be published and it will be of a certain use and favor of researches and makers.

Director of Central Design Bureau of
Hydroacoustics Science and
Production Association "Kliver" Co. Ltd.,
Honored Inventor of Ukraine,
Laureate of State Prize of Ukraine in Science
and Techniques,
Doctor of Technical Sciences

A handwritten signature in black ink, consisting of a series of loops and strokes, positioned to the right of the text block.

Yu. E. Shamarin

"... но нужен исключительный гений, чтобы установить законы (природы) на явлениях, которые всегда были у всех перед глазами и тем не менее ускользали от внимания философов".

Лагранж Ж.Л.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

(необходимые сведения)

к монографии В. С. Крутикова

**"Волны в областях с подвижными проницаемыми границами.
Вопросы управления"**

Волновые процессы важнейшая форма движения материи, присущая всем без исключения объектам материального мира, являются фундаментальной основой развития естествознания, современной техники и наукоемких технологий, могут происходить только в областях с подвижными границами. Абсолютно неподвижных, твердых границ нет. Учет движения границ, необходимый во многих важных в научном и прикладном планах случаях, связан с существенно нелинейными, фундаментальными проблемами теоретической и математической физики. О чрезвычайной сложности указанных проблем говорит тот факт, что они были неразрешимы (метод суперпозиции неприменим) многими поколениями ученых, с момента существования волнового уравнения, около трехсот лет. До настоящего времени не было методов точного аналитического решения не только обратных, но и прямых задач для волнового уравнения с подвижными и проницаемыми границами. Для обратных задач не было и приближенных. Кроме того, численная реализация обратных задач с подвижными границами затруднительна, они некорректны, что является препятствием для решения вопросов управления волновыми процессами. Изложенное предопределяет все: актуальность, теоретическую и практическую значимость, а также приоритетность проведенных В. С. Крутиковым исследований и полученных результатов.

Отличительной особенностью предлагаемой монографии есть глубокое проникновение в суть исследуемых физических явлений, позволившее автору осуществить впервые создание физико-математических моделей волновых процессов в областях с подвижными проницаемыми границами, а основным результатом – создание новых, нетрадиционных авторских подходов их решения – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов^{1,2,3}. Основное внимание уделено исследованиям и результатам, полученных лично автором.

* Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика. М.-Л. 1938. ГОНТИ НКТП СССР. Т.1. С.165.

¹ Крутиков В.С. // Доклады РАН. 1993. Т.333. № 4. С. 512–514. Представлено акад. А.С. Алексеевым.

² Крутиков В.С. // Доклады РАН. 1999. Т.364. № 1. С. 17–20. Представлено акад. М.М. Лаврентьевым.

³ Крутиков В.С. // Доклады РАН. 1999. Т.368. № 6. С. 755–758. Представлено акад. М.М. Лаврентьевым.

Принципиально новым в развитии математической физики является нетрадиционный подход решения волновых задач с подвижными границами – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов, в основе которого лежит физически очевидный, известный задолго до создания волнового уравнения и решения Даламбера задачи Коши факт распространения возмущений в сжимаемых средах с конечной скоростью. Он позволил решить ранее нерешенные волновые задачи с подвижными границами не только прямые, но и обратные; поставить и решить сложные существенно нелинейные задачи с подвижными проницаемыми границами прямые и обратные, решить аналитически дважды нелинейные задачи (с подвижными границами и нелинейными дополнительными условиями) и многое другое^{**}; привести решение дважды нелинейных задач к алгебраическому уравнению; он позволяет решать новые классы задач теоретической физики, математической физики, теоретической гидромеханики.

Кроме того, метод позволил сделать качественный шаг вперед: перейти от познания волновых явлений к более важному и сложному процессу управления волновыми явлениями. Показано, что корректное управление волновыми процессами возможно только при достижении определенного уровня знания процесса – знаний точных аналитических зависимостей функций управления. Особенно впечатляюще корректное (однозначное) определение функций управления для сферических волн⁴ и волн, индуцированных расширяющимся цилиндрическим плазменным поршнем конечной длины^{5, 6, 7}.

Удивительно необычайное число приложений волнового уравнения, в той или иной степени описывающее все богатство явлений Природы, как и непостижимая эффективность математики в естественных науках^{***}, многократно возрастающая теперь еще и наличием точных аналитических соотношений функций управления волновыми процессами в областях с подвижными и подвижными проницаемыми границами.

Монография иллюстрирована многими примерами, пригодными для различных технологий, будут и другие технологии на основе волновых процессов, но всегда будут востребованы точные аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными и подвижными проницаемыми границами и функции управления.

Надеюсь, что книга окажется полезной широкому кругу читателей, занимающихся и интересующихся современными проблемами управления волновыми процессами.

Академик РАН



М.М. Лаврентьев

^{**} Крутиков В.С. // ПММ 1991; МТТ 1992; Акуст. журн. 1996; ПЖТФ 1988–2005, и т.д.

⁴ Крутиков В.С. // Доклады РАН. Отослано в Редакцию 22.12.2005.

⁵ Крутиков В.С. // Доклады РАН. 2006. Т. 406. № 1. С. 1–5. Представлено акад. М.М. Лаврентьевым.

⁶ Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 2005. Т.31. Вып. 1. С. 9–16. Подписано в печать Нобелевским лауреатом академиком Ж.И. Алферовым.

⁷ Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 2005. Т.31. Вып. 12. С. 88–94. Подписано в печать Нобелевским лауреатом академиком Ж.И. Алферовым.

^{***} Вигнер Е. // УФН. 1968. Т.94. Вып. 3. С. 535–546.

"... but genius is necessary,
to determine the decrees of nature on phenomena,
which has ever been in front of our eyes, and,
nevertheless, escaped philosopher's attention".
Lagrange J.L.*

PREFACE

(necessary information)

for the monograph by V.S. Krutikov
"Waves in the regions with mobile permeable boundaries.
Control problems"

Wave processes are the major form of substance motion, peculiar to all objects of material world without exception. These processes are the fundamental basis of development of natural science, current technology and high-end technologies, and can take place in the regions with mobile boundaries only. There are no absolutely fixed, stable boundaries. The registration of boundaries movement, necessary in many important scientific and applied cases, is connected with substantially nonlinear, fundamental problems of theoretical and mathematical physics. The fact, that they were insoluble (superposition method is inapplicable) by many generations of scientists, from the moment of wave equation existence, i.e. about 300 years, tells us about the baffling complexity of stated problems. To present day there were no methods of exact analytical solution of both inverse and direct problems for the wave equation with mobile and mobile permeable boundaries; and there were no approximate ones for the inverse problems. Moreover, the numerical implementation of inverse problems with mobile boundaries is difficult, they are ill-posed, what is an obstacle for the solution of wave processes control problems. The foregoing predetermines everything: urgency, theoretical and practical significance, and also the priority of investigations conducted by V.S. Krutikov and results received by him.

The distinguishing feature of suggested monograph is the deep invasion into the heart of the investigated physical phenomena, that allowed the author to realize for the first time the creation of physico-mathematical models of wave processes in the regions with mobile permeable boundaries, and the primary result is the creation of new, non-traditional author's approaches of solution – methods of inverse problems taking into account the interaction of nonlinear arguments^{1, 2, 3}. The main attention is focused on the investigations and results, received by the author personally.

* Lagrange J.L. Analytical mechanics. M.-L. 1938. GONTI NKTP USSR. Vol.1. p.165.

¹ Krutikov V.S. // Dokl. Akad. Nauk. (Russia). 1993. Vol. 333. No. 4. p. 512–514. Represented by academician A.S. Alekseev.

² Krutikov V.S. // Dokl. Akad. Nauk. (Russia). 1999. Vol. 364. No. 1. p. 17–20. Represented by academician M.M. Lavrentiev.

³ Krutikov V.S. // Dokl. Akad. Nauk. (Russia). 1999. Vol. 368. No. 6. p. 755–758. Represented by academician M.M. Lavrentiev.

Fundamentally new in the development of mathematical physics is the off-centre approach to the solution of wave problems with mobile boundaries – the methods of inverse problems taking into account the interaction of nonlinear argument, which underlies a physically obvious fact of perturbances propagation in compressible media with finite speed, well-known long before the creation of the wave equation and d'Alembert's solution of Cauchy problem. It allowed to solve open wave problems with mobile boundaries, both direct and inverse; to set and solve the complicated, severely nonlinear problems with mobile permeable boundaries – direct and inverse, to solve analytically twice nonlinear problems (with mobile boundaries and nonlinear additional conditions) and lots of other**; to give the solution of twice nonlinear problems to the algebraic equation; it allows to solve new problems classes of theoretical physics, mathematical physics, theoretical hydromechanics.

Moreover, this method allowed to take a qualitative step forward: to turn from the learning of wave phenomena to more important and complicated wave phenomena control process. It is demonstrated that the correct wave processes control is possible only on reaching a definite level of process knowledge – the attainments of exact analytic dependences of control functions. The correct (unique) determination of control functions for spherical waves⁴ and for waves, induced by expanding cylindrical plasma piston of finite length is especially impressive^{5, 6, 7}.

The number of extraordinary applications of the wave equation is amazing. They describe in various degrees the richness of the phenomena of the Nature, like the inconceivable effectiveness of mathematics in the Natural Sciences*** being constantly replenished by now available accurate analytical relations of the control functions for the wave processes in regions with moving and moving permeable boundaries.

The monograph is illustrated with a great number of examples, suitable for various technologies. There will also be other technologies on the basis of wave processes, but exact analytical solutions of the wave equation in the regions with mobile and mobile permeable boundaries and control functions will always be essential.

We hope this book will be useful for a wide range of readers, engaged in and interested with contemporary problems of wave processes control.

Academician RAS



M.M. Lavrentiev

** Krutikov V.S. // PIMM 1991; MTT 1992; Acoust. journ. 1996; TPL 1988–2005, etc.

⁴ Krutikov V.S. // Dokl. Akad. Nauk. (Russia). Sent on 22.12.2005.

⁵ Krutikov V.S. // Dokl. Akad. Nauk. (Russia). 2006. Vol. 406. No. 1. p. 1–5. Represented by academician M.M. Lavrentiev.

⁶ Krutikov V.S. // Technical Physics Letters. 2005. Vol. 31. No. 1. p. 9–16. Add to press by the Nobel Prize laureate academician Zh.I. Alferov.

⁷ Krutikov V.S. // Technical Physics Letters. 2005. Vol. 31. No. 12. p. 88–94. Add to press by the Nobel Prize laureate academician Zh.I. Alferov.

*** Вигнер Е. // УФН. 1968. Т.94. Вып. 3. С. 535–546.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена проблеме уравнений математической физики для задач задания граничных условий на подвижных границах.

Развитие естествознания и современной техники в значительной степени зависит от прогресса в области фундаментальных точных наук математики и теоретической физики, ее разделов, в том числе механики. Поэтому важное значение имеет решение проблем уравнений математической физики, одной из которых, наиболее трудной, является проблема подвижных границ – граничные условия удовлетворяются на движущихся границах.

Уже более трех столетий, с момента создания волнового уравнения, перед математиками стоят проблемы решения нелинейных задач, описываемых уравнениями в частных производных, сложнейшая из которых – проблема подвижных границ. Даже в том случае, когда основное уравнение, описывающее исследуемый процесс, линейное, наличие подвижных границ делает задачу существенно нелинейной и, как известно [1, 2], в этом случае сумма двух решений не является решением. Это явилось причиной того, что до настоящего времени не было методов точного аналитического решения таких задач. Точные решения задач подобного рода, полученные в основном при помощи удачных догадок, известны лишь в очень ограниченном числе случаев, притом обычно лишь для какого-либо частного вида граничных условий [3–6], исследователям приходилось применять различные допущения: изменять граничные условия, сносить граничные условия на неподвижные границы, либо заменять действие движущихся границ системой особенностей. Это приводило к ограниченности решений, а в некоторых случаях и к неприемлемым результатам. Показательно, что еще Даламбером (1747 г.) [7, 8] было

получено решение волнового уравнения (задача Коши), в котором, естественно, вид функций, зависящий от граничных условий, оставался неизвестным. В известном обобщении общего метода конечных интегральных преобразований (Кошляков Н.С., Гринберг Г.А.) [9–23] используется разложение по "мгновенным" собственным функциям. Однако это приводит к решению бесконечной системы совокупных дифференциальных уравнений первого порядка.

Актуальность работы заключается в том, что решение проблемы позволяет:

- 1) построить аналитические решения сложных существенно нелинейных задач с одной подвижной границей;
- 2) с двумя подвижными границами;
- 3) прямых задач;
- 4) обратных задач – при произвольных величинах перемещений, законов изменения скоростей движения границ, начальных радиусов;
- 5) построить аналитические решения задач с подвижными границами, описываемыми уравнениями параболического типа;
- 6) перейти к решению нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дважды нелинейных задач (нелинейное уравнение и подвижные границы).

Необходимость решения этих вопросов и решения проблемы подвижных границ диктуется, в частности, их многочисленными приложениями в различных областях физики, механики, задачах управления движением границ, гидрогазодинамики, сейсмоакустики и акустики. Позволяет рассмотреть процессы плавления и отвердевания, фильтрации, нестационарных движений вязкопластических сред, диффузии, теплопроводности и т. д., описываемые уравнениями параболического типа с подвижными границами. Развитие численных методов [23], реализуемых на ЭВМ, не снимает остроты вопросов получения количественных результатов при решении задач с подвижными границами. Не противопоставляя аналитические методы численным, отметим известные преимущества точных аналитических решений при анализе исследуемых явлений, вычислениях, связанных с большими временами и расстояниями, а также многократными отражениями волн возмущения; при решении обратных задач; вопросов управления движением границ и во многих других случаях.

Основной целью работы является разработка нового подхода к решению проблемы подвижных границ уравнений математической физики и методов точного аналитического решения нелинейных прямых и обратных задач с одной и двумя подвижными границами, и на их основе решение вопросов управления волновыми процессами.

Автором сделана попытка, по-видимому, впервые разработать общий метод точного аналитического решения задач с подвижными границами, использующий общий для всех подобных задач факт распространения возмущений в сплошных средах с конечной скоростью. Не претендуя на полный охват этих направлений, автор стремился показать работоспособность и перспективность

предложенного метода решения проблемы подвижных границ уравнений математической физики. Основное внимание уделено гидродинамике импульсных процессов.

Общая методика исследований нетрадиционна, состоит в нахождении зависимостей между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в других точках, аргументы которых имеют сложную структуру. Аргументы взаимодействуют между собой и определяются с учетом реальных величин запаздываний.

Широкий круг вопросов, связанных с изучением и использованием решений задач с подвижными границами, отсутствие единого теоретического подхода к решению проблемы подвижных границ уравнений математической физики, отсутствие даже приближенных подходов к решению таких задач как с двумя подвижными границами, обратных и прямых, с нелинейными граничными условиями на подвижных границах, многочисленные технические применения полученных решений – всё это позволяет квалифицировать поставленную задачу как новое перспективное направление прикладной математики и механики.

Книга содержит семь глав, введение, послесловие.

В главе первой рассмотрены существующие общие методы характеристик, теории размерностей, малого параметра, а также приближенные методы Кирквуда – Бете, обобщение общего метода интегральных преобразований и другие приемы, основанные на тех или иных допущениях; отмечены их достоинства, возможности и недостатки, приведены методики и расчеты задач с подвижными границами.

Глава вторая посвящена разработке приближенного метода решения задач с подвижными границами с учетом запаздывания распространения реальных возмущений для случаев, когда существующие методы неприменимы либо их использование затруднительно. Суть метода состоит в следующем: в точные аналитические решения, полученные при условии снесения граничных условий на неподвижные границы, вводятся реальные величины запаздываний. Рассмотрены случаи движения двух границ для сферического, цилиндрического и плоского случаев симметрии, получены соотношения для вычисления величин запаздываний при движении двух границ, определены границы применимости метода в задачах импульсной гидродинамики. Предложенный метод ввода реальных величин запаздываний позволяет понять роль сложных аргументов исследуемых функций при анализе уравнений в частных производных.

В главе третьей применен новый подход к решению проблемы подвижных границ с целью разработки и экспериментальной проверки общего метода точного аналитического решения подобных задач. Подход основан на определении зависимостей между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в любых других точках с учетом реальных величин запаздываний. Рассмотрены виды запаздываний и их взаимодействия, обратные и прямые задачи при движении одной и двух границ с произвольной скоростью, дви-

жение одной границы вторая неподвижна. Исследованы наиболее характерные одномерные задачи, получено точное решение классической задачи расширения полости в замкнутом объеме, вызванном, например, электрическим разрядом, лазерным импульсом, взрывом взрывчатых веществ, при произвольных законах движения границ, величин перемещений и начальных радиусов. Рассмотрены вопросы аппроксимации функций, корректности решаемых обратных задач, дифференцирования и интегрирования разрывных функций с запаздываниями, определения радиуса подвижной границы по известному давлению, экспериментальной проверки полученных решений.

В главе четвертой рассмотрено применение полученных точных решений и исследовано распространение возмущений в сжимаемой, вязкой и теплопроводящей среде. Определены границы применимости волнового уравнения при решении гидродинамических задач, исследованы вопросы управления движением расширяющейся полости в жидкости, определения давления без внесения возмущений в среду при измерениях, влияния величины начального радиуса, а также решения волнового уравнения с учетом вязкости и теплопроводности на гидродинамические характеристики; определения исследуемых функций на больших расстояниях от подвижной границы. Определено влияние скорости испарения с внутренней поверхности расширяющегося плазменного поршня на гидродинамические характеристики и общего случая движения проницаемых границ, когда скорости частиц среды, соприкасающихся с подвижной границей, и изменение радиуса подвижной границы изменяются по различным произвольным законам.

В главе пятой произведено расширение возможностей применения предложенного метода к решению других задач с подвижными границами, даны решения волновых уравнений цилиндрического и плоских случаев симметрии с одной и двумя движущимися границами, прямых и обратных задач; предложены математические приемы, выполнение которых обеспечивает получение решений задач, описываемых уравнениями параболического типа с подвижными границами. Проведена оценка возможности получения заданных волн давления за счет выбора необходимого закона ввода энергии. Рассмотрены задачи с нелинейными граничными условиями и подвижными границами и нелинейными граничными условиями на подвижных границах.

В главе шестой на основе разработанных авторских методов решения проблем подвижных проницаемых границ решены вопросы управления волновыми процессами. Впервые определены функции управления волновыми явлениями для трех случаев симметрии. Определение функций управления первого и второго случаев имеет большое научное и прикладное значение. Оно позволяет, например, в приложениях, используя уравнение баланса энергии, определить закон ввода мощности в расширяющийся плазменный поршень лазерного импульса или электрического разряда в жидкости для получения заранее заданной формы функций давления и скорости в сжимаемой среде.

В главе седьмой методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [2, 24, 25] впервые получены точные аналитические

решения обратных и прямых волновых задач, величины начального радиуса и перемещений, законы изменения скорости подвижных границ могут быть произвольными. Показано, что полученные простые точные аналитические соотношения могут быть использованы при изучении физических процессов в сплошных, многофазных и многокомпонентных средах, скорость звука и плотность которых могут меняться при определенных условиях в широком диапазоне в зависимости от исходных составляющих. Параграф последний – послесловие, написанное по предложению выдающегося Редактора – Галины Павловны Торжевской. Здесь автором, по-видимому, впервые сделана попытка "осмислення місця зробленої роботи, серед того, що вже зроблено у цій галузі..., доведена логіка зробленого відкриття... ". Сформулированы основные выводы и результаты работы.

В книге большое внимание уделено определению границ применимости рассматриваемых уравнений и методов, для чего рассмотрены более сложные уравнения и системы дифференциальных уравнений в частных производных. Основное место занимают результаты исследований автора.

Автор выражает глубокую благодарность академику РАН Алексею А.С., член-корр. АН СССР Гринбергу Г.А., академику НАН Украины Гринченко В.Т., член-корр. НАН Украины Киту Г.С., академику РАН Лаврентьеву М.М., академику Уз. ССР Рахматулину Х.А., академику РАН Шемякину Е.И., академику РАН Тихонову А.Н., академику РАН Спасскому И.Д. за полезные обсуждения в разное время на семинарах отдельных положений, статей и проблем, изложенных в монографии.

1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Во многих важных для приложения случаях рассматриваемые задачи механики, даже математически сформулированные линейными дифференциальными уравнениями, строго говоря, нелинейны. Они должны описываться нелинейными дифференциальными уравнениями, а линеаризация их производится исключительно с той целью, чтобы избежать математических трудностей, связанных с решением нелинейных дифференциальных уравнений, а также воспользоваться хорошо развитой теорией линейных дифференциальных уравнений. Недостатки линейных теорий (линеаризованных уравнений), с одной стороны, в том, что они описывают действительные явления только приближенно и поэтому часто не удовлетворяют более высоким требованиям точности; с другой стороны, что более важно, линеаризация настолько меняет структуру некоторых дифференциальных уравнений, что многие интересные и важные явления не отражаются даже чисто качественно и, следовательно, с самого начала исключаются из комплекса возможных физических процессов [26]. В связи с этим правомочно начать рассмотрение задач с подвижными границами, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Кроме того, при использовании приближенных методов оценкой погрешности может служить сравнение приближенных решений наиболее типичных конкретных задач по возможности с наиболее точными решениями, полученными другими методами [22].

1.1. Метод характеристик

Решение задач, описываемых системами нелинейных уравнений в частных производных и при наличии движущихся поверхностей (дважды нелинейные задачи), представляет значительные трудности. В общем случае они могут быть решены численно одним из основных методов – методом характеристик. Приведем разработанную методику [27] решения самой характерной, имеющей большое практическое и теоретическое значение задачи

о поршне – задачу движения идеальной, сжимаемой, покоящейся при $t < 0$ жидкости, вызванного расширением поршня по закону $r_n = f(t)$, где $f(t)$ – произвольная функция. Стенка поршня считается непроницаемой (жесткой). Известны решения автомодельных задач, случаи постоянства скорости расширения поршня в воде [28, 29] и расширение поршни в газе без учета противодавления [30, 31]. Будем рассматривать расширение поршня в жидкости без указанных ограничений. Задачу о цилиндрическом и сферическом поршне можно рассматривать как модельную задачу о взрыве взрывчатых веществ (ВВ) или газовых смесей, электрическом разряде, лазерном импульсе в жидкости [32].

При внезапном возникновении движения сразу образуется расширяющаяся от поверхности поршня ударная волна [33]. Известно [34], что если в покоящейся и обладающей постоянной энтропией среде с переменной скоростью перемещается поверхность сильного разрыва, то после ее прохождения среда получит в разных точках разную энтропию. В соответствии с этим условие адиабатичности для воды $P = f(\rho, S)$, где P – давление, ρ – плотность, S – энтропия

$$\frac{P + C}{P^*} = \left(\frac{\rho}{\rho^*} \right)^{\chi(S)}.$$

Здесь C , P^* , ρ^* – постоянные, коэффициент χ зависит от энтропии S системы.

Учитывая небольшое изменение коэффициента χ (при $P = 3 \cdot 10^9$ Па $\chi = 5,55 - 5,45$), в указанном диапазоне изменения давления на фронте ударной волны процессы можно рассматривать как изоэнтропические и применить для расчетов более простое уравнение, где $P = f(\rho)$:

$$\frac{P + B}{\rho^n} = \frac{P_0 + B}{\rho_0^n}. \quad (1.1)$$

Здесь $B = 3,045 \cdot 10^8$ Па, $n = 7,15$, P_0 , ρ_0 – давление и плотность невозмущенной жидкости.

Уравнение (1.1) вместе с уравнениями движения и неразрывности для одномерных значений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (v - 1) \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (1.3)$$

составят замкнутую систему гиперболических квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка (v – скорость частиц жидкости; $v = 1, 2, 3$ для движений с плоской, цилиндрической и сферической симметриями; r – координата; t – время).

Условия на поверхности поршня запишем в виде

$$r_n = f(t); \quad v_n = f'_t. \quad (1.4)$$

Условия на ударной волне следующие: при переходе через поверхность сильного разрыва должны выполняться законы сохранения массы, количества движения и энергии. Для идеальной жидкости (аналогично как для газа [31]) с учетом (1.1) для воды при $dS = 0$ можно получить

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(v_0 - D) &= \rho_1(v_1 - D), \\ \rho_0(v_0 - D)^2 + P_0 &= \rho_1(v_1 - D)^2 + P_1, \\ \frac{1}{2}(v_0 - D)^2 + \frac{n}{n-1} \frac{P_0 + B}{\rho_0} &= \frac{1}{2}(v_1 - D)^2 + \frac{n}{n-1} \frac{P_1 + B}{\rho_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

где D – скорость ударной волны; индексы 1 и 0 относятся к значениям функций на фронте и в невозмущенной жидкости.

Система уравнений (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.4), (1.5) может быть проинтегрирована только численно. Применяются два основных метода расчета – методы характеристик и конечных разностей (метод введения искусственной вязкости). Сравнение этих методов [35] показало, что первый следует применять к задачам с малыми временами, когда требуется выяснение деталей движения волн, а второй – в задачах с большими временами, когда определяется конечное состояние материала. Преимущество метода характеристик в том, что он требует в три раза меньше машинного времени.

Преобразуем систему следующим образом. Из (1.1) имеем

$$P = A\rho^n - B, \quad A = \frac{P_0 + B}{\rho_0^n},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = a^2 = An\rho^{n-1}, \quad (1.6)$$

где a – скорость звука, $a = (An)^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{n-1}{2}}$.

$$\frac{\partial \ln a}{\partial r} = \frac{n-1}{2} \frac{\ln \rho}{\partial r} \quad \text{и} \quad \partial \ln \rho = \frac{2}{n-1} d \ln a, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \ln \rho}{\partial r} = \frac{2}{n-1} \frac{\partial \ln a}{\partial t} + \frac{2}{n-1} \frac{\partial \ln a}{\partial r} v. \quad (1.8)$$

Учитывая (1.7), (1.8), уравнения (1.2), (1.3) принимают вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial r} + \frac{n-1}{2} a \frac{\partial v}{\partial r} + (v-1) \frac{n-1}{2} \frac{a v}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{n-1} a \frac{\partial a}{\partial r} = 0.$$

Вычитая и складывая эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v+a) \right] + \frac{2}{n-1} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + (v+a) \frac{\partial a}{\partial r} \right] &= -(v-1) \frac{av}{r}, \\ \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v-a) \frac{\partial v}{\partial r} \right] - \frac{2}{n-1} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + (v-a) \frac{\partial a}{\partial r} \right] &= (v-1) \frac{av}{r}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Если принять $\frac{dr}{dt} = v \pm a$, то соответственно левые части уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2}{n-1} \frac{\partial a}{\partial t} &= -(v-1) \frac{av}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v+a, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2}{n-1} \frac{\partial a}{\partial t} &= (v-1) \frac{av}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v-a. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Такие же выражения можно получить, если систему преобразовать как в работе [36]. Уравнения (1.10) называются уравнениями характеристик первого и второго семейств: первое в строке называют дифференциальным соотношением на характеристике, второе – уравнением направления характеристики.

Полезны будут и следующие зависимости:

$$\begin{aligned} a &= \left(A^{\frac{1}{n}} \cdot n \right)^{\frac{1}{2}} (P+B)^{\frac{n-1}{2n}}, \\ P &= \left(n \cdot A^{\frac{1}{n}} \right)^{-\frac{n}{n-1}} \cdot a^{\frac{2n}{n-1}} - B. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Граничные условия на ударной волне преобразуются следующим образом. Согласно (1.1) и (1.6) запишем

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{P+B}{A} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \rho_1 = \left(\frac{P_1+B}{A} \right)^{\frac{1}{n}}, \\ a_1^2 &= \frac{dP}{d\rho} = n\rho^{n-1}A = \frac{n}{\rho_1} \left(\frac{P_1+B}{A} \right) A, \\ a_1^2 &= n \frac{P_1+B}{\rho_1}, \quad a_0^2 = n \frac{P_0+B}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в третье уравнение (1.5) при $v_0 = 0$ и решая относительно D , получаем

$$D = \frac{v_1}{2} + \frac{1}{n-1} \frac{a_1^2 - a_0^2}{v_1}. \quad (1.13)$$

Уравнения (1.5) при $v_0 = 0$ запишутся с учетом (1.12):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_0} &= \frac{-D}{v_1 - D}; \\ D^2 &= \frac{\rho_1}{\rho_0} (v_1 - D)^2 + \frac{P_1 - P_0}{\rho_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} (v_1 - D)^2 + \\ &+ \left[(P_1 + B) \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{n}{n} - (P_0 + B) \frac{\rho_0}{\rho_0} \frac{n}{n} \right] = \frac{\rho_1}{\rho_0} (v_1 - D)^2 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{a_1}{n} - \frac{a_0^2}{n}, \\ D^2 &= (v_1 - D)^2 + \frac{2}{n-1} (a_1^2 - a_0^2). \end{aligned}$$

Сравнивая второе и третье уравнения, и учитывая первое, получаем

$$\left(\frac{-D}{v_1 - D} \right) (v_1 - D)^2 - \left(\frac{-D}{v_1 - D} \right) \frac{a_1^2}{n} - \frac{a_0^2}{n} = (v_1 - D)^2 + \frac{2}{n-1} (a_1^2 - a_0^2),$$

преобразуя которое с учетом (1.13), имеем

$$v_1^4 + v_1^2 \frac{2}{n} (a_1^2 + a_0^2) - \frac{4}{n(n-1)^2} (a_1^2 - a_0^2)^2 = 0,$$

откуда

$$v_1 = [n(n-1)]^{-\frac{1}{2}} \left\{ [(a_1^2 + a_0^2)(n-1)^2 + 4n(a_1^2 - a_0^2)^2] - (a_1^2 + a_0^2)(n-1) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.14)$$

$$a_1 = \left\{ a_0^2 + v_1^2 \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 + v_1 \left(\frac{n-1}{2} \right) \left[v_1^2 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 4a_0^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1.15)$$

Приведем формулу для численного расчета [27] системы (1.10) с граничными условиями (1.4), (1.13)–(1.15).

1. Начальные условия: счет из точки ($r = r_0$; $t = 0$) при $t = 0$ $v = v(r_0, 0) = 0$; $P(r_0, 0) = P_0$; $a(r_0, 0) = a_0$; $\rho(r_0, 0) = \rho_0$.

Рассмотрим случай, когда ударная волна отходит из точки ($r_0, 0$), то есть возникает на поверхности поршня сразу с началом его движения. В плоскости (r, t) согласно (1.4) строится кривая, характеризующая движение поршня. Между поверхностями поршня и ударной волной строится расчетная сетка,

внешние узлы которой – соответственно точки пересечения поверхностей поршня и ударной волны с характеристиками первого семейства, а внутренние – точки пересечения характеристик первого и второго семейств.

2. Точки первого характеристического слоя при счете из точки $(r_0, 0)$, в которой ударная волна начинается на поршне. Из (1.15) видим, что $a_1 = F(v)$. Дифференцируем вдоль линии D (ударной волны)

$$\frac{\partial a}{\partial r} D + \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial F(v)}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial r} D + \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (1.16)$$

на поршне

$$\frac{dr_n}{dt} = v_n = f'_t, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = f''_{tt} \quad (1.17)$$

для частиц жидкости, лежащих на поршне.

Из системы (1.9), (1.16), (1.17) определяем значения $a'_r(r_0, 0)$, $a'_t(r_0, 0)$; $v'_r(r_0, 0)$; $v'_t(r_0, 0)$, так как значения функций P , a , v , D известны из начальных условий. Из точки $(r_0, 0)$ проводим прямую с угловым коэффициентом $v(r_0, 0)$. Из некоторой точки (r'_0, t'_0) , лежащей на этой прямой достаточно близко $(r_0, 0)$, проводим прямую с угловым коэффициентом $[v(r_0, 0) + a(r_0, 0)]$ до пересечения с прямой, проведенной из точки $(r_0, 0)$ с угловым коэффициентом $D(r_0, 0)$ в точке (r'_1, t'_1) .

Координаты точек (r'_0, t'_0) , (r'_1, t'_1) теперь можно определить по формулам

$$r'_1 - r'_0 = A_0(t'_1 - t'_0), \quad r'_1 - r_0 = A_1(t'_1 - 0), \quad t'_1 = \frac{A_0 t'_0 - r'_0}{A_0 - A_1}, \quad (1.18)$$

где $A_0 = [v(r_0, 0) + a(r_0, 0)]$, $A_1 = D(r_0, 0)$ из (1.4) при $t = t'_0$, $r'_0 = f(t'_0)$.

Значения функций в этих точках следующие:

$$a(r'_0, t'_0) = a(r_0, 0) + a'_r(r_0, 0)(r'_0 - r_0) + a'_t(r_0, 0)t'_0, \quad (1.19)$$

$$a(r'_1, t'_1) = a(r_0, 0) + a'_r(r_0, 0)(r'_0 - r_0) + a'_t(r_0, 0)t'_1,$$

$$v(r'_0, t'_0) = v(r_0, 0) + v'_r(r_0, 0)(r'_0 - r_0) + v'_t(r_0, 0)t'_0, \quad (1.20)$$

$$v(r'_1, t'_1) = v(r_0, 0) + v'_r(r_0, 0)(r'_0 - r_0) + v'_t(r_0, 0)t'_1,$$

в соответствии с которыми вычисляем

$$D = \frac{v}{2} + \frac{1}{n-1} \frac{a^2 - a_0^2}{v}, \quad P = P_0 + P'_t(r_0, 0)t'_0,$$

где P'_t получаем из (2.6).

$$P'_t = \left(\frac{1}{n A^n} \right) \frac{2}{n-1} a'_t a^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

В остальной области ведется счет по характеристическим слоям вдоль характеристик первого семейства следующим образом [27, 35–37]. Обозначим неизвестные величины в рассчитываемой точке индексом 4, индексами 2 и 3 – величины в точках, по которым ведется счет. В формулах учитываем пересчет для уточнения решения в узловых точках характеристической сетки.

Координаты точки (r_4, t_4) пересечения двух прямых, из которых одна проходит через точку (r_2, t_2) с угловым коэффициентом A_2 , а другая – через точку (r_3, t_3) с угловым коэффициентом A_3 , определим по формулам

$$t_4 = \frac{r_3 - r_2 + A_2 t_2 - A_3 t_3}{A_2 - A_3}, \quad r_4 = r_2 + A_2 (t_4 - t_2). \quad (1.21)$$

3. Координаты точек, лежащих на пересечении характеристик первого и второго семейств. Из формул (1.21) следует, что координаты рассчитываемой точки имеют вид

$$t_4 = \frac{r_3 - r_2 + A_2 t_2 - A_3 t_3}{A_2 - A_3}, \quad r_4 = r_2 + A_2 (t_4 - t_2). \quad (1.22)$$

Здесь $A_2 = 0,5[(v_4 - a_4) + (v_3 - a_3)]$, $A_3 = 0,5[(v_4 + a_4) + (v_2 + a_2)]$.

Значения функций $a(r_4, t_4)$, $v(r_4, t_4)$ определим по формулам

$$\begin{aligned} v_4 &= 0,5 \left[v_2 - v_3 + \frac{2}{n-1} (a_2 - a_3) + N_2 + N_3 \right], \\ a_4 &= 0,5 \left[(v_2 - v_3) \frac{n-1}{2} + (a_2 + a_3) + \frac{n-1}{2} (N_2 - N_3) \right], \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $N_2 = -(1-v) \frac{v_2 a_2}{r_2} (t_4 - t_2)$, $N_3 = \frac{v_3 a_3}{r_3} (t_4 - t_3)$.

Значение $P(r_4, t_4)$ найдем по формуле (1.11) по известным a_4 и v_4 .

4. Координаты точек и значения искоемых функций в точках пересечения первой характеристики с ударной волной. Согласно (1.21) запишем

$$t_4 = \frac{r_2 - r_3 + t_3 A_3 - t_2 A_2}{A_3 - A_2}, \quad r_4 = r_2 + A_2 (t_4 - t_2). \quad (1.24)$$

Здесь $A_3 = 0,5[(v_3 + a_3) + (v_4 + a_4)]$, $A_2 = 0,5(D_2 + D_4)$.

По известным значениям r_4, t_4 определим величины a_4, v_4, D_4 :

$$a_4 = \left\{ a_0^2 + v_4^2 \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 + v_4 \frac{n-1}{2} \left[v_4^2 \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 + 4a_0^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (1.25)$$

$$v_4 = v_3 - \frac{2}{n-1} (a_4 - a_3) - (v-1) \frac{v_3 a_3}{r_3} (t_4 - t_3), \quad (1.26)$$

$$D = \frac{v_4}{2} + \frac{1}{n-1} \frac{a_4^2 - a_0^2}{v_4}, \quad (1.27)$$

где a_0 – скорость звука в невозмущенной жидкости.

5. Координаты и значения искомых функций на поршне имеют вид

$$r_4 = r_2 + A_2(t_4 - t_2), \quad t_4 = \frac{r_3 - A_2 t_2 + A_3 t_3}{A_3 - A_2}. \quad (1.28)$$

Здесь $A_2 = 0,5(v_{n2} + v_{n4})$; $A_3 = 0,5[(v_{n3} + a_3) + (v_{n4} + a_4)]$.

По известным значениям координат находим значения искомых функций по формулам (1.10), где полные дифференциалы заменены конечными разностями

$$v_{n4} = v_3 - \frac{2}{n-1}(a_4 - a_3) - (v-1) \frac{v_3 a_3}{r_3}(t_4 - t_3). \quad (1.29)$$

Здесь v_{n4} – скорость движения частиц жидкости в точке (r_4, t_4) , которая на поверхности поршня равна скорости поршня (закон движения поршня задан); значение P_4 определим по формуле (1.11).

6. В работе [27] данная задача была запрограммирована на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 и оттранслирована с помощью транслятора ТА-1М на ЭЦВМ БЭСМ-4М. Вычисления были проведены для поршня, расширяющегося по закону

$$r_n(t) = r_0 + \sum_{m=1}^7 A_m t^m, \quad r_0 = 0,232 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$A_1 = 0,73 \cdot 10^3, \quad A_2 = -0,5 \cdot 10^8, \quad A_3 = 1,625 \cdot 10^{12}, \quad A_4 = 0,244 \cdot 10^{17},$$

$$A_5 = -0,33 \cdot 10^{22}, \quad A_6 = 0,95 \cdot 10^{26}, \quad A_7 = 0,11 \cdot 10^{31},$$

при $a_0 = 1450$ м/с, $\rho_0 = 102,5$ (кг·с²/м⁴), $P_0 = 10^4$ кг/м², $v = 2$, полученному при обработке результатов киносъемки подводного импульсного разряда. Счет проводился до $t = 15$ мкс, пока сохранялась приблизительно цилиндрическая симметрия. Время счета (до $t = 15$ мкс) составило 15 мин. Интегральный контроль точности расчета проводили проверкой закона сохранения массы. Точность расчета составила 0,3 %.

Результаты расчетов приведены на рисунках (рис. 1.1 и 1.2). Показано изменение (рис. 1.1) давления на подвижной границе канала подводного электрического разряда P_n и ударной волне P_1 от времени для указанного закона расширения, а также скорости движения частиц на поршне v_n и ударной волне v_1 , скорости ударной волны D , изменение радиуса канала r_n . Значения искомых функций при $t = 0$:

$$r_n \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,248; \quad v_n \cdot 10^{-3} = 0,728; \quad P_n \cdot 10^{-3} = 21,0;$$

$$v_1 \cdot 10^{-3} = 0,51; \quad D \cdot 10^{-3} = 2,83; \quad P_1 \cdot 10^{-3} = 15,7.$$

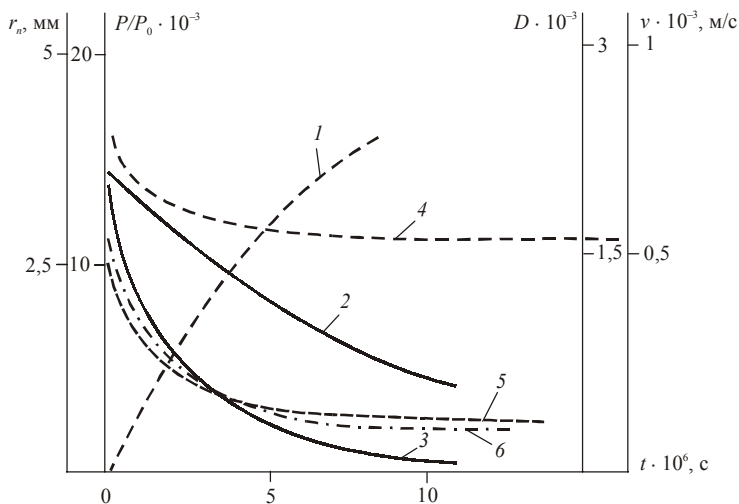


Рис. 1.1. Изменение исследуемых функций на подвижной границе поршня и ударной волне.
Зависимость функций r_n (1), v_n (2), P_n (3), D (4), v_l (5), P_l (6) от времени

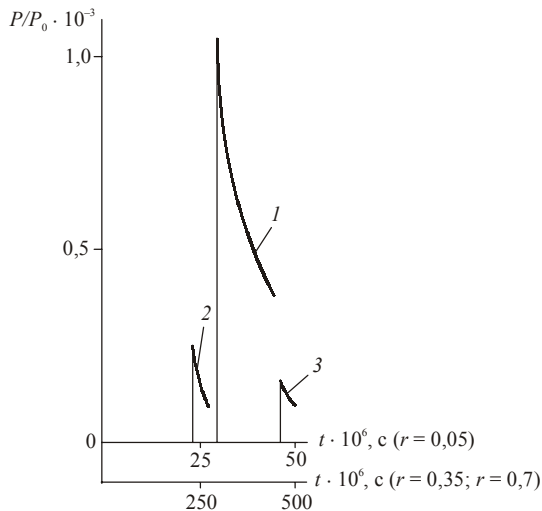


Рис. 1.2. Изменение давления в фиксированных точках.
Зависимость давления от времени r_1 (1), r_2 (2), r_3 (3)

Изменение (рис. 1.2) давления от времени в фиксированных точках $r_1 = 0,05$; $r_2 = 0,35$; $r_3 = 0,70$ м от оси симметрии.

Расчеты для постоянной скорости расширения поршня ($v_n/a_0 = 0,636$) показали хорошее совпадение с результатами работы [29] для установившегося режима расширения.

Приведенная методика численного решения гидродинамических задач с подвижными границами может служить одним из надежных способов определения гидродинамических характеристик потока при движении поршня, расширяющегося по произвольному закону. В дальнейшем результаты вычислений по приведенной методике будут использоваться для сравнения с результатами расчетов, проведенных другими методами.

1.2. Метод теории размерностей

Одномерные движения среды определяются как движения, все характеристики которых зависят от одной геометрической координаты r и времени t . Одномерные движения возможны только со сферической, цилиндрической и плоской симметриями. Эти задачи во многих случаях представляют значительный теоретический и практический интерес. Методы теории размерности позволяют найти точные решения некоторых задач об одномерном движении сжимаемой среды. К их числу относится задача расширения поршня с постоянной скоростью u . В работе [29] была численно решена автомодельная задача расширения цилиндра в воде. Автором рассмотрены три случая симметрии: сферической, цилиндрической и плоской [38]. Расчеты можно провести раз и навсегда, поскольку диапазон скоростей расширения $0 < u/a_0 \leq 1,1$ таков, что перекрывает возможные границы применимости автомодельных уравнений. Используя теорию размерностей [31], можно для этих задач подобрать такие безразмерные комбинации, что уравнения в частных производных (1.1)–(1.3), которым удовлетворяют ρ , v , P , могут быть заменены обыкновенными дифференциальными уравнениями, имеющими для случая расширения поршня с постоянной скоростью вид

$$\frac{dw}{dv} = \frac{2w}{v} \frac{[w - (v-1)(iv-1)]}{[vw - (1-v)^2]}, \quad (1.30)$$

$$\frac{d \ln \lambda}{dv} = - \frac{[w - (1-v)^2]}{v[vw - (1-v)^2]},$$

$$i = 1 + \frac{1}{2} (v-1)(\gamma-1). \quad (1.31)$$

Граничное условие на поверхности поршня

$$v = 1, \quad (1.32)$$

на фронте

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= (\sigma - 1)/\sigma_1, \\ w &= \frac{\gamma(\sigma_1 - 1)\sigma_1^{\gamma-1}}{\sigma_1^{\gamma-1}}, \\ D^2 &= \frac{A}{\rho_0} \frac{\sigma_1(\sigma_1^\gamma - 1)}{\sigma_1 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Здесь

$$v = (r/t)v(\lambda), \quad \rho = \rho_0 \sigma(\lambda), \quad \lambda = r/r_1 = r/D \cdot t, \quad P = \rho_0 (r^2/t^2) P(\lambda),$$

$$A = 3001, B = 3000, \gamma = 7, P = A(\rho/\rho_0)^\gamma - B.$$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений иногда можно получить в замкнутом виде [31] точно, в других случаях численно. Система (1.30), (1.31) с граничными условиями (1.32), (1.33) была численно решена для трех случаев симметрии v , равной 1, 2, 3 [38] в диапазоне скоростей расширения $u/a_0 \leq 1,1$ и $P \leq 3 \cdot 10^9$ Па, $u = \text{const}$. Результаты расчетов представлены на рисунках (рис. 1.3 и 1.4). Изображено (рис. 1.3) давление на движущейся с постоянной скоростью границе поршня и ударной волне. Показана (рис. 1.4) зависимость для следующих значений исследуемых функций:

$v = 1$	$u/a_0 = 0,106;$	$\rho/\rho_0 = \sigma = 1,1; \quad D = 1747 \text{ (1);}$
	$u/a_0 = 0,237;$	$\sigma = 1,2; \quad D = 2130 \text{ (4);}$
	$u/a_0 = 0,398;$	$\sigma = 1,3; \quad D = 2587 \text{ (7);}$
$v = 2$	$u/a_0 = 0,410;$	$\sigma = 1,1; \quad D = 1747 \text{ (2);}$
	$u/a_0 = 0,627;$	$\sigma = 1,2; \quad D = 2130 \text{ (5);}$
	$u/a_0 = 0,869;$	$\sigma = 1,3; \quad D = 2587 \text{ (8);}$
$v = 3$	$u/a_0 = 0,600;$	$\sigma = 1,1; \quad D = 1747 \text{ (3);}$
	$u/a_0 = 0,839;$	$\sigma = 1,2; \quad D = 2130 \text{ (6);}$
	$u/a_0 = 1,105;$	$\sigma = 1,3; \quad D = 2587 \text{ (9).}$

Рассмотрим границы применимости полученных решений. Система (1.1)–(1.3) применима до давлений, приблизительно равных $3 \cdot 10^9$ Па. При больших давлениях коэффициент $\chi(S)$ будет значительно зависеть от энтропии S системы; условие для воды будет иметь вид $P = f(\rho, S)$ и для замыкания системы потребуется еще уравнение, связывающее энтропию с искомыми функциями.

Система (1.30), (1.31), описывающая автомодельную задачу расширения поршня с постоянной скоростью, получена из (1.1)–(1.3) и применима также для давлений, приблизительно равных $3 \cdot 10^9$ Па. Однако, принятое допущение о постоянстве скорости расширения поршня, позволившее привести систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка к системе

обыкновенных уравнений, накладывает дополнительные ограничения. Необходимо отметить, что решение системы (1.1)–(1.3) неавтомодельной задачи при $v_n/a_0 = \text{const}$ методом характеристик описывает начальную картину движения жидкости: показано (рис. 1.5) изменение при $P_n, P_{y.b}, D$ при $v = 2$ и $v_n/a_0 = 0,636$. При $t \approx 1,5$ мкс после начала движения значения указанных величин приближаются к значениям при решении автомодельной задачи. Указанное обстоятельство, по-видимому, необходимо учитывать при моделировании задачи расширения поршня с постоянной скоростью реальных физических процессов. Поэтому заключение о том, что точное решение автомодельной задачи представляет и самостоятельный интерес при исследовании начальной стадии разряда [39] (имеется в виду импульсный разряд в жидкости), следует считать неточным. Видно (рис. 1.5), что давление на поршне и ударной волне в начальный период движения с постоянной скоростью может превышать в несколько раз соответствующие значения, полученные при решении автомодельной задачи (см. рис. 1.3). Это обстоятельство (большие начальные значения давления) требует определения верхней границы скорости расширения поршня, чтобы не выйти за пределы применимости уравнения состояния [40] для воды (1.1). Расчеты на ЭВМ [2, 27, 38] системы (1.1)–(1.3) с граничными условиями (1.4), (1.5) показали, что скорость расширения поршня не должна превышать 550 м/с. Время, за которое процесс входит в автомодельный режим, зависит от скорости расширения поршня и колеблется в пределах 0,5 – 1,5 мкс для $v = 2$.

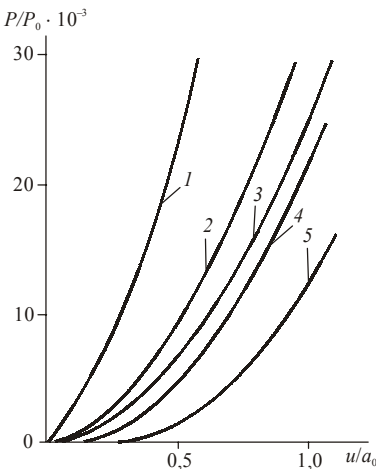


Рис. 1.3. Зависимость давлений на поршне и ударной волне от относительной скорости расширения поршня:
1 – $v = 1$; 2, 3 – $v = 2$; 4, 5 – $v = 3$

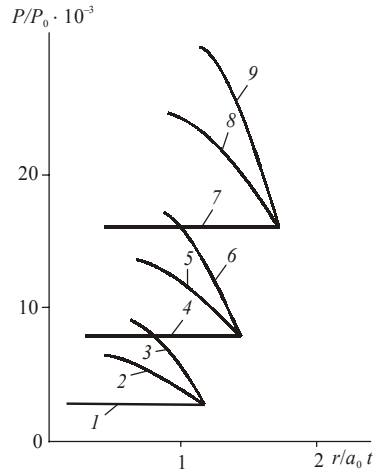
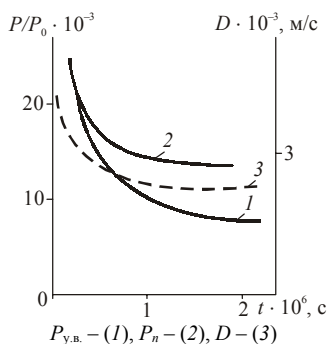


Рис. 1.4. Зависимость давления от величины $r/a_0 t$

Рис. 1.5. Изменение давления на движущейся границе поршня и ударной волне, скорости ударной волны при импульсном возникновении движения поршня с постоянной скоростью.
Случай цилиндрической симметрии $\nu = 2$



1.3. Метод малого параметра

Многие задачи, с которыми сегодня сталкиваются исследователи, пока не поддаются точному решению. Причинами, препятствующими получению точных решений, могут быть, например, нелинейные уравнения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на известных или неизвестных границах сложной формы. Для решения подобных задач используются различного рода приближения или численные методы. Одними из основных приближенных методов являются методы возмущений (асимптотических разложений) по большому или малому значениям параметра или координаты. Применим метод малого параметра [38, 41] к решению задачи с подвижными границами – расширению цилиндрического поршня в жидкости с постоянной скоростью. Метод дает хорошие результаты при правильном выборе малого параметра и если он в действительности мал. В этом параграфе будут установлены границы применимости этого метода для задач импульсного расширения полостей.

При внезапном возникновении движения образуется расширяющаяся от поверхности поршня ударная волна, отделяющая покоящуюся жидкость от движущейся между поршнем и ударной волной. Процессы, происходящие до $P = 3 \cdot 10^9 \text{ Па}$, можно считать изэнтропическими и для расчетов принять уравнение состояния в виде

$$\frac{P + B}{\rho^n} = \frac{P_0 + B}{\rho_0^n} = A. \quad (1.34)$$

Выражение (1.34) с уравнениями движения и неразрывности для одномерных течений (1.2), (1.3) составит замкнутую систему гиперболических квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

Граничные условия на поверхности поршня запишутся в виде

$$r_n = v_n \cdot t, \quad (1.35)$$

где r_n и v_n – радиус и скорость расширения поршня, $v_n = \text{const}$.

Условия на ударной волне следующие: при переходе через поверхность сильного разрыва должны выполняться законы сохранения массы, количества движения и энергии для идеальной жидкости

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 (v_0 - D) &= \rho_1 (v_1 - D), \\ P_0 + \rho_0 (v_0 - D)^2 &= \rho_1 (v_1 - D)^2 + P_1, \\ \rho_0 (v_0 - D) \left[\varepsilon_0 + \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{(v_0 - D)^2}{2} \right] &= \rho_1 (v_1 - D) \left[\varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{(v_1 - D)^2}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Здесь индексы 0 и 1 соответствуют величинам в невозмущенной жидкости и на ударной волне; ε – внутренняя энергия единицы объема.

Из уравнения (1.34) $P = \rho^n A - B$; $\rho = 1/V$, где V – удельный объем. Тогда $P = A/V^n - B$.

Если $d\varepsilon = T dS - P dV$, где T – абсолютная температура (по условию $S = \text{const}$), то $dS = 0$ и

$$d\varepsilon = -P dV = -\left(\frac{A}{V^n} - B \right) dV.$$

Интегрируя и учитывая, что $P + B = A/V^n$, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= - \int_0^V \left(\frac{A}{V^n} - B \right) dV = \frac{A}{n-1} \frac{1}{V^{n-1}} + BV = BV + \frac{P+B}{n-1} V = \\ &= \frac{B}{\rho} + \frac{P+B}{\rho} \frac{1}{n-1}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Таким образом, учитывая первое выражение (1.36) и уравнение (1.37) для воды, приходим к соотношениям (1.5), где обозначим

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 (v_0 - D) &= \rho_1 (v_1 - D) = m, \\ \rho_0 (v_0 - D)^2 + P_0 &= \rho_1 (v_1 - D)^2 + P_1 = N, \\ \frac{1}{2} (v_0 - D)^2 + \frac{n}{n-1} \frac{P_0 + B}{\rho_0} &= \frac{1}{2} (v_1 - D)^2 + \frac{n}{n-1} \frac{P_1 + B}{\rho_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Преобразуем граничные условия.

Из первого уравнения системы (1.38) находим

$$(v_0 - D) = \frac{m}{\rho_0} = mV_0, \quad (v_1 - D) = mV, \quad \frac{1}{\rho} = V, \quad (1.39)$$

а из второго, с учетом первого,

$$m(v_0 - D) - m(v_1 - D) = P_1 - P_0.$$

На основании выражения (1.38) запишем

$$m^2 = -\frac{P_0 - P_1}{v_0 - v_1}. \quad (1.40)$$

Из первого уравнения системы (1.38) имеем

$$\rho_0 (v_0 - D)(v_0 - D) = m(v_0 - D)$$

или

$$\rho_1 (v_1 - D)(v_0 - D) = m(v_0 - D).$$

Тогда, подставляя их в выражение $m(v_0 - D) - m(v_1 - D) = P_1 - P_0$, получаем

$$(v_0 - D)(v_1 - D) = \frac{P_1 - P_0}{\rho_1 - \rho_0} = \frac{P_0 - P_1}{\rho_0 - \rho_1}. \quad (1.41)$$

Из третьего уравнения системы (1.38), учитывая, что $n(P_0 + B)/\rho_0 = a_0$, и обозначая $\mu^2 = (n - 1)/(n + 1)$, $n = (\mu^2 + 1)/(-\mu^2 + 1)$, находим

$$\frac{1}{2}(v_0 - D)^2 + \frac{1 - \mu^2}{2\mu} a^2 = \frac{1}{2}(v_1 - D)^2 + \frac{1 - \mu^2}{2\mu^2},$$

$$(v_0 - D)^2 \mu + (1 - \mu^2) a_0^2 = (v_1 - D)^2 \mu^2 + (1 - \mu^2) a_1^2 = X. \quad (1.42)$$

Из второго уравнения системы (1.38) имеем

$$\mu^2 \rho_0 (v_0 - D)^2 + P_0 \mu^2 + \mu^2 B = \mu^2 N + (P_0 + B) - (P_0 + B).$$

Сравнивая последнее с (1.42), получаем

$$\begin{aligned} \mu^2 N + (P_0 + B) &= \rho_0 \left[(v_0 - D)^2 \mu^2 + (\mu^2 + 1) \frac{P_0 + B}{\rho_0} \right] = \\ &= \rho_0 [(v_0 - D)^2 + (1 - \mu^2) a_0^2] = \rho_0 X. \end{aligned}$$

Аналогично запишем

$$\mu^2 N + (P_1 + B) = \rho_1 [(v_1 - D)^2 \mu^2 + (1 - \mu^2) a_1^2] = \rho_1 X.$$

Вычитая из последнего предыдущее, имеем

$$\begin{aligned} (v_0 - D)(v_1 - D) &= (v_0 - D)^2 \mu^2 + (1 - \mu^2) a_0^2 = \\ &= (v_1 - D)^2 \mu^2 + (1 - \mu^2) a_1^2 = X, \end{aligned} \quad (1.43)$$

откуда

$$(v_1 - D) = \frac{(v_0 - D)^2 \mu^2 + (1 - \mu^2) a_0^2}{v_0 - D},$$

$$a_1^2 = \frac{X - (v_1 - D)^2 \mu^2}{1 - \mu^2}, \quad (1.44)$$

$$a_1 = \frac{(v_0 - D)^2 \mu^2 + (1 - \mu^2) a_0^2 - \frac{\mu^2 [(v_0 - D)^2 \mu^2 + (1 - \mu^2) a_0^2]}{(v_0 - D)^2}}{1 - \mu^2}. \quad (1.45)$$

Из равенства (1.43) находим

$$(v_1 - D) = \mu^2 (v_0 - D) + (1 + \mu^2) \frac{a_0^2}{v_0 - D},$$

$$(v_0 - D) = \mu^2 (v_1 - D) + (1 - \mu^2) \frac{a_1^2}{v_0 - D}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$v_1 - v_0 = \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \left(\frac{a_0^2}{v_0 - D} - \frac{a_1^2}{v_1 - D} \right). \quad (1.46)$$

Тогда с учетом зависимостей (1.44) и (1.45) определяем

$$\frac{a_1^2}{v_1 - D} = \frac{v_0 - D}{1 - \mu^2} - \frac{\mu^2 \mu^2 (v_0 - D)}{1 - \mu^2} - \frac{\mu^2 a_0^2}{v_0 - D}.$$

Подставляя полученное выражение в (1.46), находим граничное условие на ударной волне

$$v_1 - v_0 = (1 - \mu^2) \left[\frac{a_0^2}{v_0 - D} - (v_0 - D) \right] = (1 - \mu^2) a_0 \left(\frac{a_0}{v_0 - D} - \frac{v_0 - D}{a_0} \right). \quad (1.47)$$

Рассмотрим граничное условие на поршне. Пусть скорость расширения равна δa_0 , где δ – малый параметр. Поскольку скорость частиц среды на поверхности поршня равна скорости его расширения, запишем

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial r} = v_n, \quad R = u \cdot t = v_n \cdot t, \quad v_n = \delta a_0, \quad \frac{\partial \varphi(\delta a_0 t)}{\partial r} = \delta a_0. \quad (1.48)$$

Условие непрерывности потенциала φ при переходе через ударную волну, учитывая, что в покоящейся жидкости $\varphi = 0$, и обозначая безразмерную скорость распространения ударной волны $M = D/a_0$, имеет вид

$$\varphi(M a_0 t) = 0. \quad (1.49)$$

И, наконец, третье условие для потенциала скорости

$$\frac{\partial \varphi(M a_0 t)}{\partial r} - v_0 = \frac{2}{n+1} \left[\frac{a^2 - (v_0 - M a_0)^2}{v_0 - M a_0} \right]. \quad (1.50)$$

Преобразуем систему (1.2)–(1.34). Принимаем, что течение безвихревое и, следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0. \quad (1.51)$$

$$\text{Тогда уравнение движения } \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P \text{ или } \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P.$$

С учетом выражения (1.51) и соотношения $P = (\vec{v} \operatorname{grad} v; \vec{v} \operatorname{grad} u; \vec{v} \operatorname{grad} w) =$
 $= \operatorname{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}$ полученную зависимость можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{|\vec{v}|^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P. \quad (1.52)$$

Из формулы (1.51) следует, что есть такое значение φ , при котором $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$, поэтому $\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и зависимость (1.52) для одномерных движений примет вид

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \operatorname{grad} \frac{|v|^2}{2} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P = 0$$

или

$$\operatorname{grad} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |v|^2 \right] + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P = 0, \quad (1.53)$$

Записав полученное выражение в виде $d \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |v|^2 \right] + \frac{1}{\rho} dP = 0$ с учетом $v = \operatorname{grad} \varphi$, получим

$$\frac{dP}{\rho} = -d\varphi_t - d \left[\frac{1}{2} |\operatorname{grad} \varphi|^2 \right]. \quad (1.54)$$

Интегрируя уравнение (1.54) и учитывая, что

$$P + B = A\rho^n, \quad a^2 = \frac{dP}{d\rho} = An \frac{\rho^n}{\rho} = n \frac{P+B}{\rho},$$

$$2a \, da = n \frac{dP}{\rho} - n \frac{dP}{\rho} \cdot \frac{P+B}{\rho} = n \frac{dP}{\rho} - a^2 \frac{dP}{\rho},$$

$$d\rho = \frac{dP}{a^2}, \quad \frac{dP}{\rho} = \frac{2}{n-1} a \, da,$$

$$\varphi_t = - \left\{ \frac{|v|^2}{2} + \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} \right\} = - \left\{ \frac{|v|^2}{2} + \int_{a_0}^a \frac{2a}{n-1} da \right\} = \left\{ \frac{|v|^2}{2} + \frac{1}{n-1} (a^2 - a_0^2) \right\},$$

но $v = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, для одномерных движений окончательно получаем

$$a^2 - a_0^2 = -(n-1) \left[\varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_r)^2 \right]. \quad (1.55)$$

Из уравнения неразрывности находим

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial r} v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} = -(v-1) \frac{v}{r}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt} + \frac{\partial v}{\partial r} = -(v-1) \frac{v}{r}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} &= -a^2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{a^2 v}{r} (v-1). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Из уравнения движения (1.54) имеем

$$\left. \begin{aligned} d(\varphi_t) &= \varphi_{tt} dt + \varphi_{rt} dr, \quad \frac{d(\varphi_t)}{dt} = \varphi_{tt} + \varphi_{rt} v, \\ d\left(\frac{v^2}{2}\right) &= v dv = v \left(\frac{\partial v}{\partial r} dr + \frac{\partial v}{\partial t} dt \right), \\ \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial r} v^2 + \frac{\partial v}{\partial t} v, \\ \varphi_{tt} + \varphi_{rt} \frac{dr}{dt} &= - \left(v^2 \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{dP}{dt} \frac{1}{\rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

Если сравнить выражения (1.57) и (1.56), то с учетом $\partial v / \partial r = \varphi_{rr}$ можно получить волновое уравнение для потенциала скорости, где a^2 определяется формулой (1.55):

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + \varphi_{rt} v + \varphi_{rr} v^2 + \varphi_{rt} v &= a^2 \frac{v}{r} (v-1) + a^2 \varphi_{rr}, \\ \varphi_{tt} + 2v \varphi_{rt} + (v^2 - a^2) \varphi_{rr} &= a^2 \frac{v}{r} (v-1), \\ \varphi_{tt} + 2\varphi_r \varphi_{rt} + (\varphi_r^2 - a^2) \varphi_{rr} &= \varphi_r (v-1) \frac{a^2}{r}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

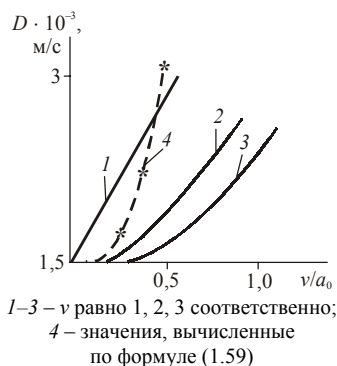
Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.58), где a определяется выражением (1.55) с граничными условиями (1.47)–(1.50). Опуская выкладки, аналогичные приведенным в работе [41], записываем зависимость между M и ε для цилиндрического поршня, полученную в результате решения задачи

$$\frac{D}{a_0} = M = 1 + \frac{3}{8}(n+1)^2 \delta^4 + 0(\delta^6), \quad (1.59)$$

где $\delta = \frac{v_n}{a_0}$.

Приведены графики (рис. 1.6), построенные по результатам точного решения автомодельных задач (система (1.30), (1.31), см. параграф 1.2). Расчетная кривая 4, вычисленная по формуле (1.59), проходит достаточно близко к кривой 2 до значений $\delta = 0,2$. Этим устанавливается граница применимости метода малого параметра при решении задачи расширения поршня в воде с постоянной скоростью.

Рис. 1.6. Зависимость скорости ударной волны от относительной скорости расширения поршня



1.4. Обобщение общего метода конечных интегральных преобразований (метод Г.А. Гринберга)

Метод был предложен Н.С. Кошляковым Н.С. [22], теория его разработана Г.А. Гринбергом [3, 10–21], наиболее полный перечень работ по применению метода к задачам, описанным уравнениями параболического типа, приведен в работе [9]. Искомые решения задач с подвижными границами ищутся в форме разложения по собственным функциям соответствующей задачи с неподвижными границами, совпадающими в каждый момент с положением истинных движущихся границ. Получающаяся при этом бесконечная система совокупных линейных дифференциальных уравнений первого порядка может быть решена на ЭВМ. Таким образом, решение нелинейной задачи находится как комбинация элементов решений линейных задач. Этим вводится

определенная погрешность, выявить которую можно только сравнением результатов с точным решением.

Общий метод интегральных преобразований применим к линейным уравнениям параболического и гиперболического типов. В качестве примера рассмотрим задачу о решении волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad V = \text{const}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = f_1(t), \quad u|_{x=a} = f_2(t)$$

и начальных

$$u|_{t=0} = \Psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Psi_2(x).$$

Умножим первое и третье уравнения на $\frac{2}{a} \sin \frac{\pi k x}{a} dx$, где k – целое число, и проинтегрируем от нуля до a :

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} + \left(\frac{k V \pi}{a} \right)^2 u_k = \frac{2 k \pi V^2}{a^2} [f_1(t) + (-1)^{k+1} f_2(t)],$$

$$u_k|_{t=0} = \frac{2}{a} \int_0^a \Psi_1(x) \sin \frac{k \pi x}{a} dx,$$

$$\frac{du_k}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{2}{a} \int_0^a \Psi_2(x) \sin \frac{k \pi x}{a} dx,$$

$$\text{где } u_k = \frac{2}{a} \int_0^a u \sin \frac{k \pi x}{a} dx.$$

Определив u_k из последних соотношений, получим

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin \frac{k \pi x}{a}.$$

Следуя данным работы [3, 14], рассмотрим теперь одномерную задачу, когда u зависит только от одной координаты x и времени t . Основное уравнение диффузии или теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (1.60)$$

где χ – постоянная, $g(x, t)$ – заданная функция.

Требуется найти решение (1.60) для случая, когда процесс разыгрывается в области, границы которой $x = \xi_1(t)$ и $x = \xi_2(t)$ перемещаются со временем, причем на этих движущихся границах заданы граничные условия первого или второго рода, то есть значения величин

$$u(\xi_1, t) = f_1(t), \quad u(\xi_2, t) = f_2(t),$$

или нормальных производных

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi_1} = \varphi_1(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi_2} = \varphi_2(t).$$

Если бы ξ_1 и ξ_2 не зависели от времени, то есть были неизменны, то решение задачи можно было бы искать в форме

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(i)}(t) V_k^{(i)}(x), \quad i = 1, 2,$$

$$V_k^{(1)} = \sin \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}, \quad V_k^{(2)} = \cos \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}. \quad (1.61)$$

Здесь $V_k^{(i)}(x)$ – собственные функции задачи, равные $V_k^{(1)}$, $V_k^{(2)}$ – для граничных условий первого и второго рода.

Коэффициенты разложения $U_k^{(i)}(t)$ определяются соотношением

$$U_k^{(i)}(t) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} V_k^{(i)}(x) u(x, t) dx \bigg/ \int_{\xi_1}^{\xi_2} V_k^{(i)^2}(x) dx =$$

$$= \frac{2}{\xi_2 - \xi_1} \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(x, t) V_k^{(i)}(x) dx. \quad (1.62)$$

Они могут быть найдены и из обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка, получающегося, если умножить уравнение (1.60) на $V_k^{(i)}(x)dx$, проинтегрировать полученное выражение по x от ξ_1 до ξ_2 и учесть соответствующие граничные и начальные условия [13]. Пусть теперь $\xi_1 = \xi_1(t)$ и $\xi_2 = \xi_2(t)$; ξ и $\xi_2(t)$ – заданные функции от t . Основная идея метода в том, что решение задачи ищем в той же самой форме (1.61), как и для неподвижных границ:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(1)}(t) \sin \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \quad (1.63)$$

для граничных условий первого рода, когда

$$u \Big|_{x=\xi_1(t)} = f_1(t), \quad u \Big|_{x=\xi_2(t)} = f_2(t), \quad (1.64)$$

либо

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(2)}(t) \cos \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \quad (1.65)$$

для граничных условий второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi_1(t)} = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi_2(t)} = \varphi_2(t) \quad (1.66)$$

но подразумевая здесь под ξ_1 и ξ_2 уже не постоянные, а заданные функции времени. Иначе говоря, величины $U_k^{(i)}(t)$ – коэффициенты разложения искомых функций u в каждый момент времени по тем функциям

$$V_k^{(1)}(x, t) = \sin \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi} \quad \text{или} \quad V_k^{(2)}(x, t) = \cos \frac{\pi k (x - \xi_1)}{\xi}, \quad \xi = \xi_2 - \xi_1,$$

которые можно назвать мгновенными "собственными функциями", соответствующими моменту t . Это те собственные функции, по которым следовало бы вести разложение u в ряды (1.61), если бы, начиная с этого момента, движение границ прекратилось. Существенным при этом будет то, что коэффициенты $U_k^{(i)}(t)$ по-прежнему будут определяться формулой (1.62), в которой только функции $V_k^{(i)}$ будут уже зависеть не только от x , но и от t . Вводя обозначения

$$W_k^{(i)}(t) = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} W(x, t) V_k^{(i)}(x, t) dx, \quad (1.67)$$

где $W(x, t)$ – какая-либо функция от x и t , запишем формулу для u в виде

$$u = \frac{2}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(i)}(t) V_k^{(i)}(x, t), \quad i = 1, 2. \quad (1.68)$$

Для нахождения $U_k^{(i)}(t)$, как и в случае постоянных ξ_1 и ξ_2 , умножим уравнение (1.60) на $V_k^{(i)}(x, t)$ и проинтегрируем полученное соотношение по x в пределах от $\xi_1(t)$ до $\xi_2(t)$; опуская выкладки, окончательно запишем:

$$\frac{du_k^{(1)}}{dt} + \left(\frac{\pi k \chi}{\xi} \right)^2 u_k^{(1)} = \frac{\pi k \chi^2}{\xi} [f_1(t) + (-1)^{k-1} f_2(t)] +$$

$$+ g_k^{(1)}(t) + \frac{k}{\xi} \sum_{m=1}^{\infty} [(-1)^{m+k} \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1] m \beta_{km} u_m^{(1)}(t), \quad (1.69)$$

$$\frac{du_k^{(2)}}{dt} + \left(\frac{\pi k \chi}{\xi} \right)^2 u_k^{(2)} = \chi^2 [(-1)^k \varphi_1(t) - \varphi_2(t)] + g_k^{(2)}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\xi} \sum_{m=0}^{\infty} [(-1)^{m+k} \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1] (k^2 \beta_{km} + 2) u_m^{(2)}(t), \quad (1.70)$$

$$\beta_{km} = \frac{2}{m^2 + k^2} \text{ при } m \neq k; \quad \beta_{km} = \frac{1}{2k^2} \text{ при } m = k.$$

Используя начальное условие $u|_{t=0} = F(x)$, $\xi_1(0) \leq x \leq \xi_2(0)$, из которого следует, что

$$u_k^{(i)}(0) = \int_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} V_k^{(i)}(x, 0) u|_{t=0} dx = \int_{\xi_1(0)}^{\xi_2(0)} V_k^{(i)}(x, 0) F(x) dx. \quad (1.71)$$

Получаем для функций $u_k^{(i)}(t)$ бесконечную систему совокупных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

1.5. Приближенные методы

Рассмотрим применение второй группы методов к решению задач с подвижными границами, обладающих меньшей общностью, чем методы, приведенные выше, однако получившие достаточно широкое распространение при решении задач. В основе каждого из них лежит то или иное допущение; часть методов применима для решения только линейных уравнений.

Метод Кирквуда-Бете

Для расчета волн, образующихся при взрыве ВВ, газовых смесей, электрическом разряде или лазерном импульсе в безграничной жидкости применяется метод Кирквуда-Бете, позволяющий решить задачу в более высоком приближении, чем акустическое.

Основой метода служит предположение, что величина $\Phi = r\varphi$ [42, 43] распространяется со скоростью $\bar{a} = a + v$, подобно тому, как распространяются

фиксированные значения давления и скорости в плоской римановой волне. Поэтому функция

$$\varphi(r, t) = -r \frac{\partial \varphi}{\partial t} = r \left(h + \frac{v^2}{2} \right),$$

где h – удельная энтальпия,

$$h = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho},$$

также распространяется со скоростью $\bar{a}$, то есть справедливо уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \bar{a} \frac{\partial G}{\partial r} = 0,$$

которое на поверхности сферы с учетом $r = R$, $v = u$, $h = H$, $\bar{a} = a + v$ приводится к виду

$$\frac{du}{dt} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + \frac{3}{2} \frac{u^2}{R} \left(1 - \frac{u}{3a} \right) = \left(1 + \frac{u}{a} \right) \frac{H}{R} + \left(1 - \frac{u}{a} \right) \frac{1}{a} \frac{dH}{dt}. \quad (1.72)$$

Решение задачи состоит из определения функции $G(\bar{t})$ на поверхности расширяющейся сферы ($\bar{t}$ – время, отсчитываемое на поверхности сферы) и определении $G(t, r)$, а значит и других гидродинамических характеристик в произвольной точке наблюдения.

Если $R = R(\bar{t})$ задано, то $u = \dot{R}$, а энтальпия h на поверхности сферы находится из (1.72), что и завершает определение $G(\bar{t})$ на поверхности сферы. Уравнение (1.72) решается численными методами.

Метод Кирквуда-Бете используется и для вычисления исследуемых функций в случае цилиндрической симметрии [42–44]. Как показало сравнение результатов расчетов методом характеристик и традиционным приближенным методом Кирквуда-Бете, последний дает большие погрешности. В работе В.В. Иванова (ФГВ, 1981, т. 17, № 3, с. 142–143) показано, что они могут достигать 50 % при вычислении полей скорости и до 25 % давления вблизи расширяющейся полости. Сведения о погрешности этого метода приведены и в работе [45]. В последнее время появились модификации подходов к решению таких задач, основанные на совместном использовании идей методов Кирквуда-Бете и характеристик [46], требующих также численного счета на ЭВМ.

Решение К.А. Наугольных задачи расширения поршня с постоянной скоростью

Излучение волны сжатия сферой, расширяющейся с постоянной скоростью в идеальной среде, рассмотрено в работе [47]: в уравнении (1.58) для потенциала скорости удерживаются, кроме линейных, еще квадратичные

члены. С помощью введения сопровождающей системы координат получено приближенное решение, показывающее, что на переднем фронте волны сжатия имеется слабый разрыв при любых, сколь угодно малых скоростях расширения. Произведено сравнение с результатами численного решения автомодельной задачи, полученной Дж. Тейлором [6]. Приведем последовательность оригинального аналитического решения этой дважды нелинейной задачи, описываемой нелинейным уравнением и имеющей подвижную границу [47]. Исходная система уравнений принимается в виде уравнений движения, непрерывности и состояния. Эта система после введения тепловой функции и некоторых преобразований, когда удерживаются линейные и квадратичные члены, приводится к следующему уравнению для потенциала

$$\begin{aligned} & a_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{2a_0^2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \\ & = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial t} + (\gamma - 1) \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + (\gamma - 1) \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Принимая $\Phi = u/r$ и новые переменные $y = t - r/a_0$, $z = \mu r$, где μ – малый параметр порядка M , как это сделано в работе [48], получаем после однократного интегрирования по y :

$$-\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\alpha}{2a_0 r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{a_0^3 r^2} u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u^3}{2a_0^2 r^3} + f(r), \quad (1.74)$$

где $f(r)$ – произвольная функция, $\alpha = (\gamma + 1)/2a_0^2$, $\gamma = C_p/C_V$, C_p и C_V – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме.

Принимается во внимание, что интересующие нас нелинейные эффекты наиболее существенны на переднем фронте волны, в области $y \approx 0$. Поэтому в правой части уравнения (1.74) удерживается лишь максимальный в этой области член. Кроме того, вместо граничного условия на поверхности сферы, принимается, что решение уравнения (1.74) переходит в следующее решение линейной акустики [6] при $r = R$

$$\Phi = -\frac{u^3}{1 - M^2} \frac{(t - r/a_0)^2}{r}.$$

Получаемые в результате исследования формулы представляют решение задачи о распределении скорости в волне сжатия, окружающей сферу. При малых значениях u , из которых следует, что гидродинамическая скорость v как функция u оказывается многозначной, что означает образование разрыва. Положение и величины его могут быть определены в рамках рассматриваемого приближения из условия равенства площадей, выражающего законы сохранения массы, импульса и энергии на разрыве [49]. Таким образом, при заданной

скорости расширения сферы распределение гидродинамической скорости в излучаемой сферой волне сжатия описывается формулой

$$\frac{v_S}{a_0} = 2M^2 \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1+M} e^{-\frac{(1-M^2)}{(\gamma+1)M^2}}, \quad (1.75)$$

дающей величину разрыва на переднем фронте волны в виде

$$y_S = -\alpha v_S r/2. \quad (1.76)$$

Согласие приближенного и точного решений [6] достаточно хорошее, а для $M = 0,203$ они практически совпадают. Согласие приближенного и точного решений по давлению, будучи хорошим в области переднего фронта волны, уменьшается с приближением к источнику возмущения, что объясняется пренебрежением вторым и третьим нелинейными членами в соотношении (1.74), роль которых при этом возрастает.

Отметим два момента: описанный метод решения пригоден только для задачи с одной подвижной границей и для случая движения подвижной границы с постоянной скоростью. Приведенное решение – одно из немногих аналитических решений задачи с подвижными границами, описываемой нелинейными уравнениями гиперболического типа. Аналитическое решение дважды нелинейной задачи (автомодельный случай), описываемой уравнением параболического типа, приведено в работе [50].

Допущение: $\varphi[R(t), t] = \varphi[R(t), t] \Big|_{p=\text{const}}$.

Определение гидродинамических характеристик при расширении поршня в жидкости по известной скорости движения поршня – прямая задача с подвижной границей, рассматривалась многими исследователями [6, 40, 41, 47, 49, 51–53]. Сложность решения задач с подвижными границами, какой является задача о расширении поршня (особенно при движении его с произвольной скоростью), вынуждает прибегать к некоторым искусственным приемам. По-видимому, наибольшее применение нашли соотношения, полученные на основании допущения $\varphi[R(t), t] = \varphi[R(t), t] \Big|_{p=\text{const}}$.

Рассмотрим волновое уравнение потенциала скорости для одномерного движения, $v = 3$.

Полагая $\varphi = \varphi^*/r$ и вводя переменные $\xi = r - a_0 t$, $\eta = r + a_0 t$ получаем уравнение, интегрируя которое, имеем

$$\varphi = \frac{\varphi^*}{r} = \frac{f_1(r - a_0 t) + f_2(r + a_0 t)}{r}.$$

Для расходящейся волны

$$\varphi = \frac{f(a_0 t - r)}{r}. \quad (1.77)$$

Рассмотрим случай, когда длина излучаемой волны λ велика по сравнению с размерами тела l [52], то есть $\lambda \gg l$. Тогда на расстояниях, малых по сравнению с длиной волны вблизи тела (но не на самом теле), в уравнении

можно пренебречь членом $\frac{1}{a_0^2} \Phi_{II}^*$, так как порядок этого члена $\frac{\omega^2}{a_0^2} \Phi \sim \frac{\Phi}{\lambda^2}$,

а порядок производных по координате в рассматриваемой области Φ/l^2 . Таким образом, в рассматриваемой области волновое уравнение переходит в уравнение Лапласа.

Решением уравнения Лапласа является $(1/r)$, r – расстояние от начала координат; решением является также градиент $\nabla \frac{1}{r}$ и следующие производные от $(1/r)$ по координате. Все эти решения и их линейные комбинации обращаются на бесконечности в нуль.

Потенциал $\Phi^* = -a/r$ дает скорость $v = -\text{grad } \Phi^* = a/r^2$. Поток жидкости через поверхность S сферы радиуса R $S(a/R^2)\rho = 4\pi\rho a$, $S = 4\pi R^2$. В несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) такой поток может иметь место за счет изменения общего объема жидкости, заключенной внутри замкнутой поверхности, то есть должно происходить изменение объема тела.

Таким образом, первый член решения уравнения Лапласа $(-a/r)$ присутствует, когда излучающее тело производит пульсации, сопровождающие изменение его объема. Объем $4\pi a$ жидкости, протекающей через замкнутую поверхность, должен быть равен изменению объема V тела в единицу времени, то есть производной dV/dt :

$$dV/dt = \dot{V} = 4\pi a, \quad a = \dot{V}/4\pi. \quad (1.78)$$

Подставляя (1.78) в решение уравнения Лапласа, где учитываем только первый член, получаем, что на расстояниях r , удовлетворяющих условию $l \leq r \leq \lambda$, движение жидкости будет описываться функцией

$$\Phi^* = -\frac{\dot{V}}{4\pi r}. \quad (1.79)$$

На расстояниях $r \gg \lambda$ в волновой зоне представим расходящуюся сферическую волну (1.77) в виде $\Phi = 1/r f_1(t - r/a_0)$. Тогда излучаемая волна на всех расстояниях, больших по сравнению с l размерами тела для $r \gg l$, будет иметь вид

$$\Phi = -\frac{\dot{V}(t - r/a_0)}{4\pi r}. \quad (1.80)$$

Полученный таким образом вид потенциала скорости нашел широкое применение.

Подставляя в интеграл Коши-Лагранжа значение (1.80), получаем

$$P - P_0 = \rho_0 \frac{\ddot{V}(t - r/a_0)}{4\pi r} - \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\dot{V}^2(t - r/a_0)}{(4\pi)^2 r^4}. \quad (1.81)$$

Вблизи сферы на расстояниях $r \leq a_0 t$ формула (1.81) переходит в выражение, полученное в приближении несжимаемой жидкости.

О границах применимости приведенных соотношений (1.80), (1.81) и возможных погрешностях будет сказано ниже.

Заключение по главе 1

Анализ существующих основных методов решения задач, описываемых уравнениями в частных производных при наличии подвижных границ, показывает их возможности и недостатки.

Метод характеристик, по-видимому, позволяет получить наиболее достоверные результаты с учетом нелинейности среды. Однако применение его для решения задач с двумя подвижными границами при многократном отражении волн возмущения, либо при распространении на большие расстояния и при больших временах затруднительно и достаточно дорого. Разработанная методика решения методом характеристик импульсных задач расширения поршня позволила определить границы применимости других методов и приближенных решений.

Метод теории размерностей позволяет понизить количество независимых переменных на единицу, что для двумерных задач равносильно переходу от системы уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод теории размерностей может быть применен для решения задачи расширения поршня с постоянной скоростью (автомодельная задача) с учетом нелинейности среды. Автором произведено численное решение задач расширения поршня с постоянной скоростью для трех случаев симметрии в диапазоне скоростей расширения поршня $0 \leq u/a_0 \leq 1,1$ и давлений до 30000 кгс/см^2 . Показано, что использование автомодельных решений для описания начальной стадии импульсных процессов в жидкости может привести к ошибкам (не описывается разгонный участок). Применить этот метод для случаев ненулевого начального радиуса и произвольных скоростей движения границ не представляется возможным, задача становится неавтомодельной.

Метод малого параметра – один из основных приближенных методов. Его можно применить и получить хорошие результаты, если правильно выбран малый параметр и если он в действительности мал. Произведено решение задачи расширения поршня в сжимаемой жидкости. Показано, что приемлемые результаты можно получить при $M = u/a_0 \approx 0,2$, этим определены границы применимости метода малого параметра в задачах гидродинамики полости. Применить его для случаев движения двух границ и обратных задач нельзя.

Метод Г.А. Гринберга (обобщение общего метода конечных интегральных преобразований) позволяет решать задачи с подвижными границами, описываемые линейными уравнениями в частных производных гиперболического и параболического типов. В основе метода определение решения в форме разложения по собственным функциям соответствующих задач с неподвижными границами, совпадающими в каждый момент с положением истинных движущихся границ. Решение задач такого типа этим методом приводится к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Применить к решению обратных задач и задач с проницаемой подвижной границей не представляется возможным.

Широкое распространение получил приближенный метод Кирквуда-Бете, позволяющий решить задачу в более высоком приближении, чем акустическое. Однако, как отмечено, применять его нужно осторожно, из-за значительных погрешностей при вычислении полей скорости и давления вблизи подвижной границы. Использование его для случая движения двух границ и обратных задач затруднительно. Из других приближенных подходов следует отметить нашедшее применение допущение о равенстве потенциала скорости на подвижной границе потенциалу скорости при несжимаемой жидкости. Получаемые при этом приближенные формулы применить для конечных величин начального радиуса, обратных задач и с двумя подвижными границами нельзя. Решение К.А. Наугольных задачи расширения поршня учитывает нелинейные члены в волновом уравнении, в качестве граничного условия принято решение линейной акустики Дж. Тейлора при движении границы с постоянной скоростью.

Весомый вклад в решение проблем подвижных границ (ПГ) для прямых задач с ПГ и в частности задач расширения полости в сжимаемой среде сделали сотрудники ИИПТ НАН Украины Бескаравайный Н.М., Поздеев В.А. Подход Дж. Тейлора, в котором он впервые ввел операцию преобразования времени [6], был использован Н.М. Бескаравайным и В.А. Поздеевым [60, 61]. При этом были получены решения прямых задач для случаев движения одной границы. Эти исследования были продолжены Поздеевым В.А. [57, 62]. Чрезвычайная сложность соотношения, связывающего закон движения границы с потенциалом скорости [62], позволило получить точное решение для случаев движения границы с постоянной скоростью $v = \text{const}$, $v = v_0 + c_0 t$. Для более сложных случаев требовалась численная реализация математического моделирования на ЭВМ. В [63, 64] рассмотрен плоский случай симметрии, проделан учет влияния движения границы раздела акустических сред на прохождение и отражение волны давления. В [64] подтверждено заключение Г.А. Гринберга и полученное ранее в [2, 65, 66] и т.д. о том, что метод суперпозиции (наложения) в задачах с ПГ недопустим. В [64, 67] рассмотрено наложение малых возмущений на постоянную скорость расширения. Точные аналитические решения (без наложений) показывают [68], что соотношения скачков (1^{II} больше 2^{I} , либо 1^{II} меньше 2^{I}) функции давления сохраняется во всех

точках поля и на ПГ. По заявлению авторов [54 – 64, 67] обратные задачи для основных случаев расширения сферы $\nu = 3$ и цилиндра $\nu = 2$ не рассматривались, функции управления не определялись. Наиболее точная постановка проблемы подвижных границ проведена в работах [2, рис. 9; 69–72]. Показано, что в подобных задачах когда энергия сжатия мала по сравнению с кинетической энергией, линеаризация уравнения движения (интеграла Коши-Лагранжа) не оправдана, что однако не препятствует линеаризации волнового уравнения для потенциала скорости. Применительно к теории упругости на неравноправность квадратичных членов с точки зрения роли в уравнениях указал В.В. Новожилов [72]. Подход преобразования времени (введенный Дж. Тейлором [6]) авторами [54–64, 67] применить не удалось для более сложных случаев $\nu = 2$, $\nu = 3$: произвольных законов изменения скорости ПГ и проницаемости ПГ, обратных задач, определений функций управления, движения двух границ, дважды нелинейных задач (с нелинейными дополнительными условиями и подвижными границами) и т.д. Эти и другие, более сложные, случаи решены для всех трех случаев симметрии $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$ методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов в [2, 25, 65, 69, 73, 74] и т. д.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Большинство из упомянутых в главе 1 методов применить для решения задач с двумя подвижными границами практически невозможно. Метод характеристик и обобщение общего метода конечных интегральных преобразований пригодны для решения этой задачи, но они реализуются на ЭВМ, что не совсем удобно. Поэтому большое значение приобретает хотя бы приближенная количественная оценка исследуемых явлений. Автором предложен новый приближенный метод учета движения границ – метод ввода реальных величин запаздывания [1–4]. Рассмотрим его на примерах решения задач с двумя подвижными границами.

Импульсные процессы в замкнутых объемах сопровождаются целой гаммой сложных физических процессов, для описания которых применяются различные математические модели. Характерной особенностью этих моделей является то, что граничные условия должны удовлетворяться на подвижных границах. Нахождение гидродинамических характеристик на поверхности движущейся с произвольной скоростью преграды может быть использовано, например, для определения внешних сил при штамповке, когда изделие получает большие конечные деформации. С точки зрения гидродинамики это приводит к сложным неустановившимся волновым процессам, точная количественная оценка которых еще не произведена.

Рассмотрим случай расширения полости в сосуде, заполненном сжимаемой идеальной жидкостью. Стенки полости и сосуда считаются непроницаемыми и перемещаются с произвольной скоростью. Если при этом на все время процесса среда остается акустической, то закон ее движения для одномерного случая будет описываться уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (v-1) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad a_0 = \text{const.} \quad (2.1)$$

На границах R_1 и R_2 заданы законы изменения скорости

$$v(R_1, t) = f_1(t), \quad v(R_2, t) = f_2(t). \quad (2.2)$$

В момент $t = 0$

$$\varphi_t(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0. \quad (2.3)$$

При движении границ с их поверхности излучаются потоки, скорость которых f_1 и f_2 . В общем случае эта задача представляет значительные математические трудности. Однако с некоторым приближением считая, что излучение f_1 и f_2 происходит с неподвижных границ $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$, математическое решение можно довести до конца известными методами. Это называется снесением граничных условий на неподвижную границу. Таким приемом решены многие задачи [5–11]. Это приемлемо, если перемещения невелики или характеристики потока определяются на достаточном удалении, где влияние конечных перемещений границ невелико. Если перемещения велики, и характеристики потока нужно определять вблизи и на поверхности движущейся границы, то прием снесения граничного условия на неподвижную поверхность приводит к большим погрешностям. Суть метода ввода реальных величин запаздываний [1–4] в следующем: в полученные точные аналитические решения уравнения (2.1) с условиями (2.2) и (2.3) для случая, когда граничные условия сносятся на неподвижные границы, то есть $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$, $v(R_1, t) = f_1(t)$, $v(R_2, t) = f_2(t)$ вводятся реальные величины запаздываний.

2.1. Плоский случай симметрии

Автор поставил себе задачу рассмотреть плоский случай [1, 4] симметрии, $v = 1$. Это задача о цилиндрической трубе, в которой двигаются два поршня R_1 и R_2 . Между ними находится сжимаемая жидкость. Применяя преобразование Лапласа к уравнению и учитывая начальные условия, получаем

$$\frac{d^2 \varphi(r, s)}{dr^2} - \frac{s^2}{a_0^2} \varphi(r, s) = 0, \quad (2.4)$$

решением которого будет

$$\varphi(r, s) = C_1(s) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right) + C_2(s) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right), \quad (2.5)$$

s – параметр преобразования.

Специфика преобразования Лапласа при традиционном подходе не позволяет корректно определить функции C_1 и C_2 в общем случае движения границ. Поэтому в первом приближении считаем $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$.

Тогда давление и скорость в любой точке будут иметь вид [11]:

$$P = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \bar{P} = \rho_0 [s \bar{\varphi} - \varphi(r, 0)] =$$

$$= \rho_0 s \left[C_1(s) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right) + C_2(s) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right) \right], \quad (2.6)$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = \frac{s}{a_0} \left[-C_1(s) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right) + C_2(s) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right) \right]. \quad (2.7)$$

Учитывая выражения (2.2) и (2.7), можно определить C_1 и C_2 :

$$C_1(s) = \left\{ \bar{f}_1(s) \frac{a_0}{s} \exp\left[-s \frac{(2R_2 - R_1)}{a_0}\right] - \right.$$

$$\left. - \bar{f}_2(s) \frac{a_0}{s} \exp\left(-s \frac{R_2}{a_0}\right) \right\} \left\{ 1 - \exp\left[-2s \frac{(R_2 - R_1)}{a_0}\right] \right\}^{-1}, \quad (2.8)$$

$$C_2(s) = \left\{ \bar{f}_1(s) \frac{a_0}{s} \exp\left(s \frac{R_1}{a_0}\right) - \right.$$

$$\left. - \bar{f}_2(s) \frac{a_0}{s} \exp\left[-s \frac{(R_2 - 2R_1)}{a_0}\right] \right\} \left\{ 1 - \exp\left[-2s \frac{(R_2 - R_1)}{a_0}\right] \right\}^{-1}. \quad (2.9)$$

Знаменатель уравнений (2.8) и (2.9) можно представить в виде

$$\left\{ 1 - \exp\left[-2s \frac{(R_2 - R_1)}{a_0}\right] \right\}^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-s \frac{(R_2 - R_1) 2n}{a_0}\right],$$

тогда

$$\bar{P} = \rho_0 a_0 \left\{ \bar{f}_1(s) \exp\left[-s \frac{(r - R_1)}{a_0}\right] \left[1 + \exp\left(-2s \frac{(R_2 - r)}{a_0}\right) \right] - \right.$$

$$\left. - \bar{f}_2(s) \exp\left[-s \frac{(R_2 - r)}{a_0}\right] \left[1 + \exp\left(-2s \frac{(r - R_1)}{a_0}\right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-s \frac{(R_2 - R_1) 2n}{a_0}\right] \right\}. \quad (2.10)$$

Окончательно давление получим в виде

$$\begin{aligned}
 P(r, t) = & \rho_0 a_0 \left\{ f_1 \left(t - \frac{r - R_1}{a_0} \right) + f_1 \left(t - \frac{2R_2 - R_1 - r}{a_0} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} f_1 \left[t - \frac{2nR_2 - (2n+1)R_1 + r}{a_0} \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} f_1 \left[t - \frac{(2n+2)R_2 - (2n+1)R_1 - r}{a_0} \right] - f_2 \left(t - \frac{R_2 - r}{a_0} \right) - \\
 & - f_2 \left(t - \frac{R_2 - 2R_1 + r}{a_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_2 \left[t - \frac{(2n+1)R_2 - 2nR_1 - r}{a_0} \right] - \\
 & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} f_2 \left[t - \frac{(2n+1)R_2 - (2n+2)R_1 + r}{a_0} \right] \right\}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Подставив выражения (2.8) и (2.9) в уравнение (2.7), после нахождения оригиналов получим соответствующее соотношение для скорости:

$$\begin{aligned}
 v(r, t) = & f \left(t - \frac{r - R_1}{a_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_1 \left[t - \frac{2nR_2 - (2n+1)R_1 + r}{a_0} \right] - \\
 & - f_1 \left(t - \frac{2R_2 - R_1 - r}{a_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_1 \left[t - \frac{(2n+2)R_2 - (2n+1)R_1 - r}{a_0} \right] + \\
 & + f_2 \left(t - \frac{R_2 - r}{a_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} f_2 \left[t - \frac{(2n+1)R_2 - 2nR_1 - r}{a_0} \right] - \\
 & - f_2 \left(t - \frac{R_2 - 2R_1 + r}{a_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} f_2 \left[t - \frac{(2n+1)R_2 - (2n+2)R_1 + r}{a_0} \right]. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Формулы (2.11) и (2.12) пригодны для произвольных скоростей излучения с поверхностей поршней R_1 и R_2 . Они точно переходят в известные формулы Харкевича А.А. [11] для случая постоянной скорости излучения с одного поршня и нулевой скорости другого. Действительно, если $v_1 = \text{const}$, $v_2 = 0$, то из уравнения (2.10) получаем давление на поршень [11]:

$$\bar{P}(R_1, s) = \rho_0 a_0 \left[\frac{v_0}{s} \frac{1 + \exp\left(-s \frac{2R_2}{a_0}\right)}{1 - \exp\left(-2s \frac{R_2}{a_0}\right)} \right] = \frac{\rho_0 a_0 v_0}{s} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-2ns \frac{R_2}{a_0}\right) \right],$$

$$P(0, t) = \rho_0 a_0 v_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0 \left(t - \frac{2n R_2}{a_0} \right) \right]. \quad (2.13)$$

При $r = R_2$, $f_2 = 0$, $f_1 = v_0 = \text{const}$ из уравнения (2.10) получаем давление на преграду

$$\bar{P}(R_2, s) = \rho_0 a_0 \left\{ 2 \frac{v_0}{s} \left[\exp\left(-s \frac{(R_2 - R_1)}{a_0}\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-s 2n \frac{(R_2 - R_1)}{a_0}\right) \right) \right] \right\},$$

$$P(R_2 = 0, R_2, t) = 2\rho_0 a_0 v_0 \left\{ \sigma_0 \left(t - \frac{R_2}{a_0} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0 \left[t - \frac{(2n+1)R_2}{a_0} \right] \right\}. \quad (2.14)$$

Если

$$f_1 = f_1(t), \quad f_2 = f_2(t), \quad r = R_2, \quad R_1 = 0,$$

то

$$P(R_2, t) = \rho_0 a_0 \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_1 \left[t - \frac{(2n-1)R_2}{a_0} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} f_2 \left(t - \frac{nR_2}{a_0} \right) \right\}. \quad (2.15)$$

Формулы (2.11)–(2.15) пригодны, если перемещения границ невелики либо точка, в которой определяются гидродинамические характеристики, находится на большом расстоянии от подвижных границ. Задача движения поршня в трубе с двумя закрытыми концами рассмотрена в работе [12]. Многие задачи, описываемые волновым уравнением (2.1) при $a(r, t)$ решены методом характеристик в работе [13].

2.2. Вычисление времени запаздывания в задачах с подвижными границами

Многие задачи механики сплошных сред – это задачи с подвижными границами. Известно [14], что реальное существование абсолютно жесткой границы для жидкостей и твердых сред невозможно. Абсолютно твердых тел в природе нет – речь может идти только о большей или меньшей жесткости

ограничивающей среды, по сравнению со средой, в которой распространяется возмущение. К таким задачам относятся математические модели электрического разряда, лазерного импульса или взрыва ВВ в замкнутом объеме жидкости, описываемые уравнениями гиперболического типа. Даже если основное уравнение, описывающее исследуемый процесс, линейное, наличие подвижных границ делает задачу существенно нелинейной, что вынуждает исследователей прибегать к допущению о снесении граничных условий на неподвижную границу. Оценка погрешности и границ применимости такого допущения представляет большое практическое и теоретическое значение. Рассмотрим один из существенных моментов предлагаемого подхода [3].

Пусть в момент t_0 излучается сигнал на R_1 , то есть на расстоянии $R_1(t_0)$ от начала координат. Сигнал распространяется со скоростью a_0 и встречается в момент t_1 с границей R_2 :

$$t_1 = \frac{R_2(t_1) - R_1(t_0)}{a_0}.$$

В момент t_1 от границы $R_2(t_1)$ отходит отраженная волна и встречается с границей R_1 через промежуток времени t_2 :

$$t_2 = \frac{R_2(t_1) - R_1\left(\sum_{m=1}^2 t_m\right)}{a_0}.$$

Если из первого соотношения определить t_1 , то используя второе, можно определить и t_2 и т. д.

В момент $\sum_{m=1}^2 t_m$ от границы $R_1\left(\sum_{m=1}^2 t_m\right)$ отходит волна и отражается от R_2 через промежуток времени t_3 :

$$t_3 = \frac{R_2\left(\sum_{m=1}^3 t_m\right) - R_1\left(\sum_{m=1}^2 t_m\right)}{a_0}.$$

Соответственно для последующего запаздывания имеем

$$t_4 = \frac{R_2\left(\sum_{m=1}^3 t_m\right) - R_1\left(\sum_{m=1}^4 t_m\right)}{a_0}.$$

В общем случае вычисление времени распространения возмущений приводит к формулам:

$$\left. \begin{aligned} t_{2n-1} &= \frac{R_2 \left(\sum_{m=1}^{2n-1} t_m \right) - R_1 \left(\sum_{m=1}^{2n-2} t_m \right)}{a_0}, \\ t_{2n} &= \frac{R_2 \left(\sum_{m=1}^{2n-1} t_m \right) - R_1 \left(\sum_{m=1}^{2n} t_m \right)}{a_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где $R_1(t)$ и $R_2(t)$ – координаты подвижных границ; t_{2n-1} , t_{2n} – последовательные времена пробега возмущений от внутренней подвижной границы к внешней и от внешней к внутренней соответственно. Если границы перемещаются с постоянной скоростью u_1 и u_2 , можно получить окончательно соотношения для вычисления времени запаздывания:

$$\left. \begin{aligned} t_{2n-1} &= \frac{(R_{02} - R_{01}) + (u_2 - u_1) \sum_{m=1}^{2n-2} t_m}{a_0 - u_2 \sigma_0}, \\ t_{2n} &= \frac{(R_{02} - R_{01}) + (u_2 - u_1) \sum_{m=1}^{2n-1} t_m}{a_0 + u_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Здесь R_{01} , R_{02} – начальное положение границ; σ_0 – единичная разрывная функция нулевого порядка.

При произвольных законах движения границ для определения времени запаздывания приходим к трансцендентным уравнениям, которые решаются известными методами. Например, при

$$v_1 = A_1 \exp(-\alpha_1 t), \quad v_2 = A_2 \exp(-\alpha_2 t),$$

$$R_1 = R_{01} + \frac{A_1}{\alpha_1} [1 - \exp(-\alpha_1 t)], \quad R_2 = R_{02} + \frac{A_2}{\alpha_2} [1 - \exp(-\alpha_2 t)] \sigma_0,$$

то

$$t_1 = \frac{R_{02} - R_{01}}{a_0}, \quad t_2 = \frac{R_2(t_1) - R_1 \left(\sum_{m=1}^2 t_m \right)}{a_0},$$

откуда

$$t_2 a_0 - (R_{02} - R_{01}) - \frac{A_2}{\alpha_2} [1 - \exp(-\alpha_2 t_1)] \sigma_0 \left(t_1 - \frac{R_{02} - R_{01}}{a_0} \right) + \\ + \frac{A_1}{\alpha_1} = \frac{A_1}{\alpha_1} \exp[-\alpha_1 (t_1 + t_2)].$$

Решая это трансцендентное уравнение, определяем t_2 , а потом также и последующие запаздывания.

Пусть $R_{01} = 0,0005$ м; $R_{02} = 0,1$ м; $a_0 = 1500$ м/с; $v_1 = u_1 = 300$ м/с; $v_2 = u_2 \sigma_0 \left(t - \frac{R_{02} - R_{01}}{a_0} \right)$; $u_2 = 100$ м/с. Тогда, согласно (2.17), получим

$$t_1 = 66,4; \quad t_2 = 48,0; \quad t_3 = 54,7; \quad t_4 = 36,5; \quad t_5 = 41,6; \\ t_6 = 27,8; \quad t_7 = 31,8 \text{ мкс.} \quad (2.18)$$

Если $u_1 = 3$ м/с, $u_2 = 1$ м/с, то

$$t_1 = 66,4; \quad t_2 = 66,2; \quad t_3 = 66,1; \quad t_4 = 66,0; \quad t_5 = 66,0 \text{ мкс.} \quad (2.19)$$

Сравнение запаздываний, вычисленных с учетом движения границ по формулам (2.16), (2.17) и когда границы неподвижны, позволяет сделать необходимые оценки до решения самих уравнений задачи. Расчеты показали, что для волновых задач допущение о снесении граничных условий на неподвижные границы приемлемо, если скорости движения границ малы (порядка десятков метров в секунду). Если скорости перемещения соответствуют сотне и более метров в секунду – учет движения границ необходим.

Описанный прием определения запаздываний является составной частью метода решения задач с подвижными границами.

2.3. Учет движения двух границ в плоском случае симметрии

Формулы (2.11)–(2.15) пригодны, если перемещения границ невелики, либо точка, в которой определяются гидродинамические характеристики, находится на большом расстоянии от подвижных границ. Теперь с некоторым приближением учтем конечность перемещений границ [1, 4].

В качестве примера рассмотрим нелинейные нестационарные колебания плоской симметрии. Пусть дана цилиндрическая труба, на одном конце которой с координатой R_{01} начинает двигаться с постоянной скоростью поршень.

Через промежуток времени $\left(\frac{R_{02} - R_{01}}{a_0} \right)$ ударная волна, распространяясь в сре-

де, заполняющей трубу, достигнет второго поршня с координатой R_{02} и приводит его в движение также с постоянной скоростью. Вычислим давление на второй поршень-преграду. При

$$f_1 = u_1, f_2 = u_2 \sigma_0 \left(t - \frac{R_{02} - R_{01}}{a_0} \right),$$

$$\bar{f}_1(s) = \frac{u_1}{s}, \bar{f}_2(s) = \frac{u_2}{s} \exp \left[-s \frac{(R_2 - R_1)}{a_0} \right], r = R_2. \quad (2.20)$$

Формулу (2.10) удобнее представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{P}(r, s) = \rho_0 a_0 \left\{ \bar{f}_1(s) \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-s \left(\frac{2n(R_2 - R_1)}{a_0} + \frac{r - R_1}{a_0} \right) \right] - \right. \\ \left. - \bar{f}_1(s) \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-s \left(\frac{(2n+2)(R_2 - R_1)}{a_0} - \frac{r - R_1}{a_0} \right) \right] - \right. \\ \left. - \bar{f}_2(s) \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-s \left(\frac{2n(R_2 - R_1)}{a_0} + \frac{R_2 - r}{a_0} \right) \right] - \right. \\ \left. - \bar{f}_2(s) \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-s \left(\frac{(2n+2)(R_2 - R_1)}{a_0} - \frac{R_2 - r}{a_0} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из (2.21) с учетом (2.20), переходя к оригиналам, получаем

$$\begin{aligned} P(R_2, t) = \rho_0 a_0 u_2 \left\{ \sigma_0 \left(t - \frac{R_2 - R_1}{a_0} \right) + 2 \left(\frac{u_1}{u_2} - 1 \right) \left[\sigma_0 \left(t - \frac{R_2 - R_1}{a_0} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_0 \left(t - 3 \frac{R_2 - R_1}{a_0} \right) + \sigma_0 \left(t - 5 \frac{R_2 - R_1}{a_0} \right) + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Как видим, через определенные промежутки времени, в данном случае соответствующие пробегу отраженных ударных волн между неподвижными границами, на поверхности преграды скачком изменяется давление. Способом усовершенствования решений послужит ввод запаздываний, методика вычислений которых изложена в подразделе 2.2.

Введем в (2.22) запаздывания, вычисленные с учетом распространения и отражения ударных волн между реально движущимися границами. Подставляя в (2.16)–(2.18) для воды следующие значения: $\rho_0 = 102 \text{ кгс}^2/\text{м}^4$; $a_0 = 1500 \text{ м/с}$;

$$R_{01} = 0,0005 \text{ м}; \quad R_{02} = 0,1 \text{ м}; \quad f_1 = u_1 = 300 \text{ м/с}; \quad f_2 = u_2 \sigma_0 \left(t - \frac{R_{02} - R_{01}}{a_0} \right);$$

$u_2 = 100 \text{ м/с}$, получаем

$$\begin{aligned} P(R_2, t) = \rho_0 a_0 u_2 \left\{ \sigma_0(t - t_1) + 2 \left(\frac{u_1}{u_2} - 1 \right) \left[\sigma_0 \left(t - \sum_{m=1}^1 t_m \right) + \sigma_0 \left(t - \sum_{m=1}^3 t_m \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma_0 \left(t - \sum_{m=1}^5 t_m \right) + \sigma_0 \left(t - \sum_{m=1}^7 t_m \right) + \dots \right] \right\} = \\ = 1530 \{ \sigma_0 [t - 66,4 \cdot 10^{-6} (66,4 \cdot 10^{-6})] + 4 \sigma_0 [t - 66,4 \cdot 10^{-6} (66,4 \cdot 10^{-6})] + \\ + 4 \sigma_0 [t - 169,1 \cdot 10^{-6} (198 \cdot 10^{-6})] + 4 \sigma_0 [t - 247,2 \cdot 10^{-6} (332 \cdot 10^{-6})] + \\ + 4 \sigma_0 [t - 306,8 \cdot 10^{-6} (465 \cdot 10^{-6})] + \dots \}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь в круглых скобках стоят величины запаздывания, соответствующие отражению от неподвижных границ, то есть, вычисленные по формуле (2.22).

Сравнивая результаты вычислений по формулам (2.22) и (2.23), видим (рис. 2.1), что даже на первых семи отражениях давление на преграде, вычисленное с учетом реального движения границ (2), местами почти в полтора раза превышает давление, вычисленное для случая, когда граничные условия сносятся на неподвижные границы (1).

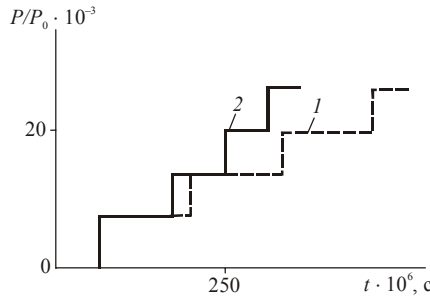


Рис. 2.1. Зависимость давления на преграде от времени:
1 – границы неподвижны; 2 – с учетом реального движения границ

2.4. Цилиндрический случай симметрии

Рассмотрим случай $\nu = 2$ [1, 2, 4].

Это задача о цилиндрической трубе, помещенной внутри другой трубы, оси труб совпадают. Между стенками их находится сжимаемая жидкость.

С началом расширения внутренней трубы от нее отходит ударная волна, которая через определенный промежуток времени достигает поверхности наружной трубы и приводит ее в движение. Волновые явления цилиндрической симметрии возникнут в среде в случае, когда длины труб будут стремиться к бесконечности.

Преобразуем (2.1) по Лапласу, с учетом начальных условий будем иметь:

$$\frac{d^2 \Phi(r, s)}{dr^2} - \frac{s^2}{a_0^2} \Phi(r, s) + \frac{1}{r} \frac{d\Phi(r, s)}{dr} = 0, \quad (2.24)$$

решение которого [15]

$$\bar{\varphi}(r, s) = c_1(s) J_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right) + c_2(s) N_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right). \quad (2.25)$$

Здесь J_0 , N_0 – бесселевы функции первого и второго рода нулевого порядка.

В первом приближении считаем $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$. Тогда давление и скорость в любой точке будут иметь вид

$$P = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$\bar{P} = \rho_0 [s \bar{\varphi} - \varphi(r, 0)] = \rho_0 s \left[c_1(s) J_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right) + c_2(s) N_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right) \right], \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2.26)$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \bar{v} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = c_1(s) \frac{is}{a_0} J_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right) + c_2(s) \frac{is}{a_0} N_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right). \quad (2.27)$$

Учитывая, что на границах полости $R_1 = \text{const}$ и сосуда $R_2 = \text{const}$ заданы законы изменения скорости $v_1(R_1, t) = f_1(t)$; $v_2(R_2, t) = f_2(t)$, из (2.27) можно получить $c_1(s)$ и $c_2(s)$:

$$c_1(s) = \frac{a_0}{is} \left[\frac{\bar{f}_1(s)}{J_0\left(i \frac{s}{a_0} R_1\right)} - \frac{\bar{f}_2(s) N_1\left(i \frac{s}{a_0} R_1\right)}{D} + \frac{\bar{f}_1(s) I_1\left(i \frac{s}{a_0} R_2\right) N_1\left(i \frac{s}{a_0} R_1\right)}{I_1\left(i \frac{s}{a_0} R_1\right) D} \right],$$

$$c_2(s) = \frac{a_0}{is} \left[\frac{\bar{f}_2(s) I_1\left(i \frac{s}{a_0} R_1\right)}{D} - \frac{\bar{f}_1(s) I_1\left(i \frac{s}{a_0} R_2\right)}{D} \right].$$

Здесь

$$D = I_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_1 \right) N_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_2 \right) - N_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_1 \right) I_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_2 \right). \quad (2.28)$$

Используя выражения c_1 и c_2 для давления и скорости в изображениях, можно записать

$$\begin{aligned} \bar{P}(r, s) = \rho_0 s \Phi(r, s) = \frac{a_0 \rho_0}{i} & \left[\frac{\bar{f}_1(s) I_0(kr)}{I_1(kR_1)} - \right. \\ & - \frac{\bar{f}_2(s) J_0(kr) N_1(kR_1)}{D} + \frac{\bar{f}_1(s) J_0(kr) I_1(kR_2) N_1(kR_1)}{I_1(kR_1) D} + \\ & \left. + \frac{\bar{f}_2(s) N_0(kr) I_1(kR_1)}{D} - \frac{\bar{f}_1(s) N_0(kr) I_1(kR_1)}{D} \right], \\ \bar{v}(r, s) = & \left[\frac{I_1(kr) \bar{f}_1(s)}{I_1(kR_1)} - \frac{\bar{f}_2(s) N_1(kR_1) I_1(kr)}{D} + \right. \\ & + \frac{\bar{f}_1(s) I_1(kR_2) N_1(kR_1) I_1(kr)}{I_1(kR_1) D} + \\ & \left. + \frac{\bar{f}_2(s) I_1(kR_1) N_1(kr)}{D} - \frac{\bar{f}_1(s) I_1(kR_2) N_1(kr)}{D} \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $k = i \frac{s}{a_0}$.

На границе $r = R_2$ имеем:

$$\begin{aligned} \bar{P}(R_2, s) = \frac{a_0 \rho_0}{i} & \left\{ \frac{\bar{f}_1(s) [J_0(kR_2) N_1(kR_2) - I_1(kR_2) N_0(kR_2)]}{D} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{f}_2(s) [N_0(kR_2) I_1(kR_1) - J_0(kR_2) N_1(kR_1)]}{D} \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Корни s_k функции, стоящей в знаменателе соотношений (2.30)

$$D = I_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_1 \right) N_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_2 \right) - N_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_1 \right) I_1 \left(i \frac{s}{a_0} R_2 \right) = 0$$

можно определить, например [16], в зависимости от отношения R_2/R_1 и порядка функций. Для $R_2/R_1 = 100$, $\nu = 1$, $\mu_k = 3,547$, тогда

$$s_k = \frac{3,547}{i(R_2 - R_1)/a_0} = \frac{\mu_k}{i(R_2 - R_1)/a_0}.$$

Оригинал соотношения (2.30) будет иметь вид

$$\begin{aligned} P(R_2, t) = & \frac{a_0 \rho_0}{i} \left\{ \int_0^t f_1(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{J_0\left(i \frac{s}{a_0} R_2\right) N_1\left(i \frac{s_k}{a_0} R_2\right)}{\lim_{s \rightarrow s_k} D'_s(s)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{I_1\left(i \frac{s_k}{a_0} R_2\right) N_0\left(i \frac{s_k}{a_0} R_2\right)}{\lim_{s \rightarrow s_k} D'_s(s)} \right] \exp[s_k(t - \tau)] d\tau + \int_0^t f_2(\tau) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{N_0\left(i \frac{s_k}{a_0} R_2\right) I_1\left(i \frac{s_k}{a_0} R_1\right)}{\lim_{s \rightarrow s_k} D'_s(s)} - \frac{J_0\left(i \frac{s_k}{a_0} R_2\right) N_1\left(i \frac{s_k}{a_0} R_1\right)}{\lim_{s \rightarrow s_k} D'_s(s)} \right] \exp[s_k(t - \tau)] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} D'_s = & i \frac{R_2}{2a_0} \left\{ \frac{R_1}{R_2} [J_0(k R_1) N_1(k R_2) - I_1(k R_1) N_1(k R_2)] + \right. \\ & + [N_0(k R_2) I_1(k R_1) - N_2(k R_2) I_1(k R_1)] - \\ & - \frac{R_1}{R_2} [N_0(k R_1) I_1(k R_2) - N_2(k R_1) I_1(k R_2)] - \\ & \left. - [J_0(k R_2) N_1(k R_1) - I_2(k R_2) N_1(k R_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для случая $f_1 = u_1 = \text{const}$, $f_2 = u_2 = \text{const}$, $r = R_2$ из (2.31) (учитывая, что физический смысл имеет только вещественная часть этого соотношения) получаем

$$P(R_2, t) = -\frac{2a_0^2 \rho_0}{R_2} \left\{ u_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(R_2^*) N_1(R_2^*) - I_1(R_2^*) N_0(R_2^*)}{s_k^* D_s^*(s_k)} \sin s_k^* t + \right. \\ \left. + u_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_0(R_2^*) I_1(R_1^*) - J_0(R_2^*) N_1(R_1^*)}{s_k^* D_s^*(s_k)} \sin s_k^* t \right\}, \quad (2.33)$$

где $s_k^* = s_k i$, $D_s^* = i \frac{R_2}{2a_0} D_s$, $R_1^* = \frac{\mu_k R_1}{R_2 - R_1}$, $R_2^* = \frac{\mu_k R_2}{R_2 - R_1}$.

Для случая $f_1 = A_1 \exp(\alpha_1 t)$, $f_2 = A_2 \exp(\alpha_2 t)$ из (2.31) получим

$$P(R_2, t) = -\frac{2a_0^2 \rho_0}{R_2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(R_2^*) N_1(R_2^*) - I_1(R_2^*) N_0(R_2^*)}{D_s^*(s_k)} \times \right. \\ \times \left[\frac{A_1 (\alpha_1 \exp(\alpha_1 t) - \alpha_1 \cos s_k^* t + s_k^* \sin s_k^* t)}{\alpha_1^2 + s_k^{*2}} \right] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_0(R_2^*) I_1(R_1^*) - J_0(R_2^*) N_1(R_1^*)}{D_s^*(s_k)} \times \\ \times \left[\frac{A_2 (\alpha_2 \exp(\alpha_2 t) - \alpha_2 \cos s_k^* t + s_k^* \sin s_k^* t)}{\alpha_2^2 + s_k^{*2}} \right] \Big\}. \quad (2.34)$$

Полученные решения (2.29)–(2.34) пригодны, если потоки f_1 и f_2 излучаются с неподвижных границ или если характеристики потока определяются на достаточном удалении от подвижных границ. При решении уравнения (2.24) никаких допущений, кроме снесения граничных условий на неподвижные границы не использовались. Однако вводить в полученные решения величины запаздываний неудобно.

2.5. Учет движения двух границ в цилиндрическом случае

Решим уравнение (2.24) в форме более наглядной и удобной с точки зрения введения запаздывания, вычисленного с учетом движения границ [2].

Решение уравнения (2.24) можно представить в виде [17]

$$\Phi(r, s) = c_1(s) J_0\left(\frac{s}{a_0} r\right) + c_2(s) K_0\left(\frac{s}{a_0} r\right), \quad (2.35)$$

где I_0 – бесселева функция нулевого порядка от чисто мнимого аргумента; K_0 – функция Макдональда.

Известно [8], что при $x \rightarrow \infty$

$$I_0(x) = J_0(ix) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \quad K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}.$$

В рассматриваемом случае эти приближения пригодны для малых значений времени, когда величина $\frac{S}{a_0} r$ при $R_1 \leq r \leq R_2$ велика. Это имеет место, например, при развальцовке труб в трубных досках с помощью электрогидравлического эффекта, когда процесс протекает в течение нескольких десятков микросекунд.

Определим $c_1(s)$ и $c_2(s)$ при неподвижных границах:

$$c_1 = \frac{\bar{f}_1(s) \frac{1}{A_1} \exp\left(-s \frac{R_1}{a_0}\right) - \bar{f}_2(s) \frac{1}{A_2} \exp\left(-s \frac{R_2}{a_0}\right) - \frac{1}{A_1} \bar{f}_1(s) \exp\left(-s \frac{R_1}{a_0}\right)}{1 - \left[\left(\frac{A_1 B_2}{A_2 B_1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-s \frac{(R_2 - R_1)}{a_0}\right) \right]^2},$$

$$c_2 = \frac{\bar{f}_1(s) \frac{1}{B_1} \exp\left(-s \frac{R_1}{a_0}\right) - \bar{f}_2(s) \frac{A_1}{B_1 A_2} \exp\left(-s \frac{(R_2 - 2R_1)}{a_0}\right)}{1 - \left[\left(\frac{A_1 B_2}{A_2 B_1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-s \frac{(R_2 - R_1)}{a_0}\right) \right]^2}. \quad (2.36)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \left(2\pi \frac{s}{a_0} r \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad B_0 = \left[\pi / \left(2 \frac{s}{a_0} r \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ A_1 &= \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1} \right) / \left(2\pi \frac{s}{a_0} R_1 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad B_1 = \left[\pi / \left(2 \frac{s}{a_0} R_1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1} \right), \\ A_2 &= \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2} \right) / \left(2\pi \frac{s}{a_0} R_2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad B_2 = \left[\pi / \left(2 \frac{s}{a_0} R_2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Функцию давления запишем в виде

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(r, s) &= \rho_0 s \bar{\varphi} = \\
 &= \rho_0 s \left\{ \bar{f}_1(s) \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{r} \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1} \right)} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[-\frac{s}{a_0} ((2nR_2 - (2n-1)R_1 - r)) \right] + \right. \\
 &\quad + \bar{f}_1(s) \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{r} \left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} E^n \exp \left[-\frac{s}{a_0} ((2nR_2 - (2n+1)R_1 + r)) \right] - \\
 &\quad - \bar{f}_2(s) \sqrt{\frac{R_2}{r}} \frac{1}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} E^n \exp \left[-\frac{s}{a_0} ((2n+1)R_2 - 2nR_1 - r) \right] - \\
 &\quad - \bar{f}_2(s) \sqrt{\frac{R_2}{r}} \frac{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1} \right)}{\left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1} \right) \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2} \right)} \times \\
 &\quad \times \left. \sum_{n=0}^{\infty} E^n \exp \left[-\frac{s}{a_0} ((2n+1)R_2 - (2n+2)R_1 + r) \right] \right\}, \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \left\{ 1 - \left[\left(\frac{A_1 B_2}{A_2 B_1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{s}{a_0} (R_2 - R_1) \right) \right] \right\}^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{A_1 B_2}{A_2 B_1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{s}{a_0} (R_2 - R_1) \right) \right]^{2n}, \\
 E &= \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1} \right) \left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1} \right) \bigg/ \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2} \right) \left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1} \right).
 \end{aligned}$$

Используя обратное преобразование Лапласа для рациональных алгебраических функций, теоремы свертки и сдвига аргумента [18] находим оригинал соотношения (2.38):

$$\begin{aligned}
 P(r, t) = & \rho_0 a_0 \left\{ \sqrt{\frac{R_1}{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_0^t f_{1t}' \left[t - \tau - \left(2nt^* + \frac{r-R_1}{a_0} \right) \right] D_1(\tau) d\tau + \right. \\
 & + \sqrt{\frac{R_1}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \int_0^t f_{1t}' \left[t - \tau - \left(2nt^* + \frac{r-R}{a_0} \right) \right] D_2(\tau) d\tau - \\
 & - \sqrt{\frac{R_2}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^2 \int_0^t f_{2t}' \left[t - \tau - \left(2nt^* + \frac{R_2-r}{a_0} \right) \right] D_3(\tau) d\tau - \\
 & \left. - \sqrt{\frac{R_2}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_0^t f_{2t}' \left[t - \tau - \left((2n+2)t^* - \frac{R_2-r}{a_0} \right) \right] D_4(\tau) d\tau \right\},
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

где

$$D(\tau) = \left[\frac{(s-s_j)^{m_j} \left(s - \frac{a_0}{2R_1} \right)^{l_1} \left(s + \frac{a_0}{2R_2} \right)^n \exp(s\tau)}{(m_j-1)! \left(s - \frac{a_0}{2R_2} \right)^{m_1} \left(s - \frac{a_0}{2R_1} \right)^{m_2}} \right]_{s=s_j}^{m_j-1},$$

$$t^* = \frac{R_2 - R_1}{a_0}, \quad s_1 = \frac{a_0}{2R_1}, \quad s_2 = \frac{a_0}{2R_2},$$

$$D_{1-4}(m_j; m_2; l_1), \quad D_1(n; n; n-1), \quad D_2(n; n+1; n), \quad D_3(n+1; n; n), \quad D_4(n+1; n+1; n+1).$$

Аналогично записывается и соотношение для скорости.

Определим давление на преграду, когда границы двигаются с постоянной скоростью. Подставляя в (2.38) $\bar{f}_1(s) = \frac{u_1}{s}$; $\bar{f}_2(s) = \frac{u_2}{s}$; $r = R_2$, получаем

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(R_2, s) = & \rho_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \left\{ \frac{E \exp(-st^*)}{\left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1}\right)} + \frac{E^2 \exp(-s3t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1}\right)} + \frac{E^3 \exp(-s5t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1}\right)} + \dots \right\} + \\
 & + \rho_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \left\{ \frac{\exp(-st^*)}{\left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1}\right)} + \frac{E \exp(-s3t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1}\right)} + \frac{E^2 \exp(-s5t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1}\right)} + \dots \right\} - \\
 & - \rho_0 u_2 \left\{ \frac{1}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2}\right)} + \frac{E \exp(-s2t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2}\right)} + \frac{E^2 \exp(-s4t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2}\right)} + \dots \right\} - \\
 & - \rho_0 u_2 \left\{ \frac{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1}\right) \exp(-s2t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1}\right) \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2}\right)} + \frac{\left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_1}\right) E \exp(-s4t^*)}{\left(\frac{s}{a_0} + \frac{1}{2R_1}\right) \left(\frac{s}{a_0} - \frac{1}{2R_2}\right)} + \dots \right\},
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

где E имеет такое же значение, как в (2.38).

Если преграда будет неподвижной, то члены с множителем $f_2 = u_2 = 0$ будут равны нулю:

$$\begin{aligned}
 P(R_2, t) = & = \rho_0 a_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \left\{ \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^{-1} \left[2 \exp\left(-\frac{a_0}{2R_2}(t-t^*)\right) + \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right) \exp\left(-\frac{a_0}{2R_1}(t-t^*)\right) \right] \right\} + \\
 & + \rho_0 a_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \frac{4 \exp\left(-\frac{a_0}{2R_2}(t-3t^*)\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^3} \times \\
 & \times \left\{ \left[(t-3t^*) \left(\frac{a_0}{2R_2} + \frac{a_0}{2R_1}\right) - 2 \right] \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) + \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho_0 a_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \frac{4 \exp \left[-\frac{a_0}{2 R_1} (t - 3 t^*) \right]}{\left(-\frac{R_2}{R_1} - 1 \right)^3} \left\{ \left[(t - 3 t^*) \left(-\frac{a_0}{2 R_1} - \frac{a_0}{2 R_2} \right) - 2 \right] \times \right. \\
 & \quad \times \left(-\frac{R_2^3}{2 R_1^3} + \frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_2}{2 R_1^2} \right) + \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{1}{4} - \frac{3 R_2}{2 R_1} \right) \left(-\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \Big\} + \\
 & + \rho_0 a_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \exp \left[-\frac{a_0}{2 R_1} (t - t^*) \right] + \rho_0 a_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \frac{2 \exp \left[-\frac{a_0}{2 R_1} (t - 3 t^*) \right]}{\left(-\frac{R_2}{R_1} - 1 \right)^2} \times \\
 & \times \left\{ \left[(t - 3 t^*) \left(-\frac{a_0}{2 R_1} - \frac{a_0}{2 R_2} \right) \right] \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \left(-\frac{3 R_2}{2 R_1} + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right\} - \dots \\
 & \dots - \rho_0 a_0 u_2 \left[\exp \left(\frac{a_0 t}{2 R_2} \right) \right] - \rho_0 a_0 u_2 \frac{2 \exp \frac{a_0}{2 R_2} (t - 2 t^*)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \times \\
 & \times \left\{ \left[(t - 2 t^*) \left(\frac{a_0}{2 R_2} + \frac{a_0}{2 R_1} \right) - 1 \right] \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) + \left(3 - \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{R_2}{R_1} \right) \right\} \dots \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

В (2.41) легко ввести запаздывания по формулам (2.16), (2.17) и, таким образом, приближенно учесть конечность величин перемещений границ:

$$\begin{aligned}
 & P(R_2(t), t) = \\
 & = \rho_0 a_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1(t_1)}{R_2(t_1)}} \exp \left[-\frac{a_0}{2 R_1(t_1)} (t - t_1) \right] + \rho_0 a_0 u_1 \sqrt{\frac{R_1(t_1)}{R_2(t_1)}} \left(1 + \frac{R_2(t_1)}{R_1(t_1)} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left\{ 2 \exp \frac{a_0}{2 R_2(t_1)} (t - t_1) + \frac{R_2(t_1)}{R_1(t_1)} \exp \left[-\frac{a_0}{2 R_1(t_1)} (t - t_1) \right] \right\} - \dots \\
 & \dots - \rho_0 a_0 u_2 \exp \frac{a_0 t}{2 R_2(t)} - \rho_0 a_0 u_2 \frac{2 \exp \left[\frac{a_0 (t - t_1 - t_2)}{2 R_2(t_1 - t_2)} \right]}{\left[1 + \frac{R_2(t_1 + t_2)}{R_1(t_1 + t_2)} \right]} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \left[(t-t_1-t_2) \left(\frac{a_0}{2R_2(t_1+t_2)} + \frac{a_0}{2R_1(t_1+t_2)} \right) - 1 \right] \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{R_2(t_1+t_2)}{R_1(t_1+t_2)} \right) + \left(3 - \frac{R_2(t_1+t_2)}{R_1(t_1+t_2)} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{R_2(t_1+t_2)}{2R_1(t_1+t_2)} \right) \right\} \dots \quad (2.42)$$

Следует отметить, что реальные значения гидродинамических характеристик, особенно вблизи и на поверхности движущихся преград для капельной жидкости можно получить только до момента первых отражений волн возмущения. Это объясняется тем, что в действительности при отражении ударных волн от препятствий, если они при этом начинают перемещаться, возникают кавитационные явления, и последующие волновые явления (отражения) нужно описывать другими уравнениями. Естественно, что последнее не относится к сосудам, заполненным не капельной жидкостью.

2.6. Сферический случай симметрии. Учет движения двух границ

Рассмотрим случай $\nu = 3$ [1, 3, 4]. Это задача расширения сферической полости в сферическом сосуде. Решение волнового уравнения (2.1) с граничными и начальными условиями (2.2), (2.3) и с учетом подстановки $\phi_1 = r\phi$ в изображениях по Лапласу имеет вид

$$\bar{\phi}(r, s) = c_1(s) \exp(-sr/a_0) + c_2(s) \exp(sr/a_0),$$

где $\bar{\phi}(r, s)/r = \bar{\phi}$ есть изображение потенциала скорости ϕ для случая $\nu = 3$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} &= \rho_0 [s \bar{\phi} - \phi(r, 0)] = \rho_0 \frac{s}{r} [c_1 \exp(-sr/a_0) + c_2 \exp(sr/a_0)], \\ \bar{v} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ [c_1 \exp(-sr/a_0) + c_2 \exp(sr/a_0)] \frac{1}{r} \right\} = \\ &= c_1 \exp(-sr/a_0) \left(\frac{s}{ra_0} + \frac{1}{r^2} \right) - c_2 \left(\frac{s}{ra_0} - \frac{1}{r^2} \right) \exp(sr/a_0), \\ \phi &= \frac{1}{r} [c_1 \exp(-sr/a_0) + c_2 \exp(sr/a_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Как и в предыдущей задаче, определим вначале искомые функции при неподвижных границах. При $r = R_1, r = R_2$ из выражения (2.43) находим

$$\bar{v}(R_1, s) = \bar{f}_1(s) = c_1 \exp\left(-\frac{s R_1}{a_0}\right) \left(\frac{s}{R_1 a_0} + \frac{1}{R_1^2}\right) - c_2 \exp\left(\frac{s R_1}{a_0}\right) \left(\frac{s}{R_1 a_0} - \frac{1}{R_1^2}\right),$$

$$\bar{v}(R_2, s) = \bar{f}_2(s) = c_1 \exp\left(-\frac{s R_2}{a_0}\right) \left(\frac{s}{R_2 a_0} + \frac{1}{R_2^2}\right) - c_2 \exp\left(\frac{s R_2}{a_0}\right) \left(\frac{s}{R_2 a_0} - \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Отсюда можно определить c_1 и c_2 , обозначив при этом

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{s}{R_1 a_0} + \frac{1}{R_1^2}\right), B_1 = \left(\frac{s}{R_1 a_0} - \frac{1}{R_1^2}\right), \\ A_2 &= \left(\frac{s}{R_2 a_0} + \frac{1}{R_2^2}\right), B_2 = \left(\frac{s}{R_2 a_0} - \frac{1}{R_2^2}\right), \\ t^* &= \frac{R_2 - R_1}{a_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

$$c_2 = \left[\bar{f}_2(s) - \bar{f}_1(s) \frac{A_2}{A_1} \exp(-s t^*) \right] \left\{ \frac{B_1 A_2}{A_1} \exp\left[-s \left(t^* - \frac{R_1}{a_0}\right)\right] - B_2 \exp\left(\frac{s R_2}{a_0}\right) \right\}^{-1},$$

$$c_1 = \bar{f}_1(s) \exp\left(s \frac{R_1}{a_0}\right) \frac{1}{A_1} +$$

$$+ \left\{ \frac{B_1}{A_1} \bar{f}_2(s) \exp\left(s \frac{2 R_1}{a_0}\right) - \bar{f}_1(s) \frac{A_2 B_1}{A_1 A_1} \exp\left[-s \left(t^* - \frac{2 R_1}{a_0}\right)\right] \right\} \times \quad (2.45)$$

$$\times \left\{ \frac{B_1 A_2}{A_1} \exp\left[-s \left(t^* - \frac{R_1}{a_0}\right)\right] - B_2 \exp\left(\frac{s R_2}{a_0}\right) \right\}^{-1}.$$

Знаменатель в формулах (2.45) представим следующим образом:

$$\left\{ \frac{B_1 A_2}{A_1} \exp\left[-s \left(t^* - \frac{R_1}{a_0}\right)\right] - B_2 \exp\left(\frac{s R_2}{a_0}\right) \right\}^{-1} = D =$$

$$= -\exp\left(-\frac{s R_2}{a_0}\right) \frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_2} \exp\left(-\frac{s R_2}{a_0}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_1 A_2}{B_2 A_1}\right)^n \exp(-s 2 n t^*). \quad (2.46)$$

Тогда формулу для давления в изображениях получим в виде:

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(r, s) = & \rho_0 \frac{s}{r} \left\{ \bar{f}_1(s) \left[\frac{1}{A_1} \exp\left(-s \left(\frac{r - R_1}{a_0} \right)\right) + \frac{A_2 B_1}{A_1^2 B_2} \exp\left(-s \left(\frac{2R_2 - 3R_1 + r}{a_0} \right)\right) \right] + \right. \\
 & + \frac{A_2 B_1}{A_1^2 B_2} \exp\left(-s \left(\frac{2R_2 - 3R_1 + r}{a_0} \right)\right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-s \frac{2nt^*}{a_0}\right) \left(\frac{B_1 A_2}{B_2 A_1} \right)^n + \\
 & + \frac{A_2}{A_1 B_2} \exp\left(-s \left(\frac{2R_2 - R_1 - r}{a_0} \right)\right) + \\
 & + \frac{A_2}{A_1 B_2} \exp\left(-s \left(\frac{2R_2 - R_1 - r}{a_0} \right)\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_1 A_2}{B_2 A_1} \right) \exp\left(-s 2n \left(\frac{R_2 - R_1}{a_0} \right)\right) \Bigg] - \\
 & - \bar{f}_2(s) \left[\frac{B_1}{A_1 B_2} \exp\left(-s \left(\frac{R_2 - 2R_1 + r}{a_0} \right)\right) \right] + \\
 & + \frac{B_1}{A_1 B_2} \exp\left(-s \left(\frac{R_2 - 2R_1 + r}{a_0} \right)\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B_1 A_2}{B_2 A_1} \right)^n \exp\left(-s 2n \left(\frac{R_2 - R_1}{a_0} \right)\right) + \\
 & + \frac{1}{B_2} \exp\left(-s \left(\frac{R_2 - r}{a_0} \right)\right) + \\
 & + \frac{1}{B_2} \exp\left(-s \left(\frac{R_2 - r}{a_0} \right)\right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-s 2n \left(\frac{R_2 - R_1}{a_0} \right)\right) \left(\frac{B_1 A_2}{B_2 A_1} \right)^n \Bigg\}. \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

Оригинал выражения (2.47) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 P(r, t) = & \frac{\rho_0}{r} \left\{ \int_0^t \exp\left[-\frac{a_0}{R_1}(t - \tau)\right] f'_{1t} \left(\tau - \frac{r - R_1}{a_0} \right) d\tau + 2R_1 a_0^2 \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \right) \times \right. \\
 & \times \int_0^t f'_{1t} \left(\tau - \frac{2R_2 - 3R_1 + r}{a_0} \right) \left\{ \frac{R_1}{a_0(R_1 + R_2)} \exp\left[-\frac{a_0}{R_1}(t - \tau)\right] \times \right. \\
 & \times \left[\exp\left(\left(\frac{a_0}{R_1} + \frac{a_0}{R_2} \right)(t - \tau)\right) - 1 \right] + \frac{(t - \tau)}{R_1} \exp\left[-\frac{a_0}{R_1}(t - \tau)\right] \Bigg\} d\tau +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a_0 R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \int_0^t f'_{1t} \left(\tau - \frac{2R_2 - R_1 - r}{a_0} \right) \left\{ \exp \left[-\frac{a_0}{R_1} (t - \tau) \right] + \frac{R_1}{R_2} \exp \left[\frac{a_0}{R_2} (t - \tau) \right] \right\} d\tau - \\
 & - \frac{R_2^2 a_0}{R_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)} \int_0^t f'_{1t} \left(\tau - \frac{2R_2 - R_1 - r}{a_0} \right) \left\{ \exp \left[-\frac{a_0}{R_1} (t - \tau) \right] - \exp \left[-\frac{a_0}{R_2} (t - \tau) \right] \right\} d\tau - \\
 & - \frac{R_2 a_0}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \int_0^t f'_{2t} \left(\tau - \frac{R_2 - 2R_1 + r}{a_0} \right) \left\{ 2 \exp \left[-\frac{a_0}{R_1} (t - \tau) \right] + \exp \left[\frac{a_0}{R_2} (t - \tau) \right] \left(\frac{R_1}{R_2} - 1 \right) \right\} d\tau - \\
 & - R_2 a_0 \int_0^t \exp \left[\frac{a_0}{R_2} (t - \tau) \right] f'_{2t} \left(\tau - \frac{R_2 - r}{a_0} \right) d\tau \dots \Bigg\}. \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

В формуле (2.48) для краткости взяты только первые члены разложения D . Если $f_1(t) = v_1 = \text{const}$; $f_2(t) = v_2 = \text{const}$, то формулы упрощаются:

$$\begin{aligned}
 \bar{P} = \rho_0 \frac{1}{r} \Bigg\{ & v_1 \left[\frac{1}{A_1} \exp \left(-s \left(\frac{r - R_1}{a_0} \right) \right) + \frac{A_2 B_1}{A_1^2 B_2} \exp \left(-s \left(\frac{2R_2 - 3R_1 + r}{a_0} \right) \right) + \right. \\
 & + \frac{A_2^2 B_1^2}{A_1^3 B_2^2} \exp \left(-s \left(\frac{4R_2 - 5R_1 + r}{a_0} \right) \right) + \frac{A_2}{A_1 B_2} \exp \left(-s \left(\frac{2R_2 - R_1 - r}{a_0} \right) \right) + \\
 & \left. + \frac{B_1 A_2^2}{A_1^2 B_2^2} \exp \left(-s \left(\frac{4R_2 - 3R_1 - r}{a_0} \right) \right) + \dots \right] - \\
 & - v_2 \left[\frac{B_1}{A_1 B_2} \exp \left(-s \left(\frac{R_2 - 2R_1 + r}{a_0} \right) \right) + \frac{B_1^2 A_2}{A_1^2 B_2^2} \exp \left(-s \left(\frac{3R_2 - 4R_1 + r}{a_0} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{B_2} \exp \left(-s \left(\frac{R_2 + r}{a_0} \right) \right) + \frac{B_1 A_2}{B_2^2 A_1} \exp \left(-s \left(\frac{3R_2 - 2R_1 - r}{a_0} \right) \right) + \dots \right] \Bigg\}. \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

На преграде $r = R_2$ формула (2.49) примет вид

$$\begin{aligned}
 \bar{P}(R_2, s) = \frac{\rho_0}{R_2} \left\{ v_1 \left[\frac{1}{A_1} \exp(-st^*) + \frac{A_2 B_1}{A_1^2 B_2} \exp(-3st^*) + \frac{A_2^2 B_1^2}{A_1^3 B_2^2} \exp(-5st^*) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{A_2}{A_1 B_2} \exp(-st^*) + \frac{B_1 A_2^2}{A_1^2 B_2^2} \exp(-3st^*) + \dots \right] - \right. \\
 \left. - v_2 \left[\frac{B_1}{A_1 B_2} \exp(-2st^*) + \frac{A_2 B_1^2}{A_1^2 B_2^2} \exp(-4st^*) + \dots \right. \right. \\
 \left. \left. \dots + \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_2} \exp(-2st^*) \left(\frac{B_1 A_2}{A_1 B_2} \right) + \dots \right] \right\}, \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

где многоточия обозначают последующие члены разложения D .

Следует отметить, что оригинал каждого последующего члена выписанных формул легко найти, если известен оригинал предыдущего члена. Оригинал соотношения (2.50) будет следующим:

$$\begin{aligned}
 P(R_2, t) = v_1 a_0 \rho_0 \frac{R_1}{R_2} \left\{ \exp \left[-\frac{a_0}{R_1} (t - t^*) \right] + \left[\frac{2 \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \exp \left(\frac{a_0}{R_2} (t - 3t^*) \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{2 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \left[(t - 3t^*) \left(-\frac{a_0}{R_1} - \frac{a_0}{R_2} \right) - 1 \right] + \left(\frac{3}{2} \frac{R_2^2}{R_1^2} + \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)^2} \exp \left(-\frac{a_0}{R_1} (t - 3t^*) \right) \right] + \right. \\
 \left. + \frac{\left[2 \exp \left(\frac{a_0}{R_2} (t - t^*) \right) - \frac{\left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \exp \left(-\frac{a_0}{R_1} (t - t^*) \right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)} \right]}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)} + \right. \\
 \left. + \frac{\left[(t - 3t^*) \left(-\frac{a_0}{R_1} - \frac{a_0}{R_2} \right) - 2 \right] \left(-2 + 4 \frac{R_1}{R_2} - 2 \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) + \left(5 - 6 \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \left(-1 - \frac{R_1}{R_2} \right)}{\left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right)^3} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \exp\left(-\frac{a_0}{R_1}(t-3t^*)\right) + \frac{\left[(t-3t^*)\left(\frac{a_0}{R_2} + \frac{a_0}{R_1}\right) - 2\right]\left(4 - 4\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)^3} \exp\left(\frac{a_0}{R_2}(t-3t^*)\right) + \\
 & + \frac{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)\left(8\frac{R_1}{R_2} - 4\frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)^3} \exp\left(\frac{a_0}{R_2}(t-3t^*)\right) + \dots \Bigg\} - \\
 & - \rho_0 v_2 a_0 \left\{ \frac{\left[2 \exp\left(-\frac{a_0}{R_1}(t-2t^*)\right) \exp\left(\frac{a_0}{R_2}(t-2t^*)\right)\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right)\right]}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} + \frac{\left[2 \exp\left(-\frac{a_0}{R_1}(t-2t^*)\right)\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right)\right]}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)} + \right. \\
 & \left. + \exp\left(\frac{a_0 t}{R_2}\right) + \frac{2 \exp\left(-\frac{a_0}{R_1}(t-2t^*)\right)\left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2} + \right. \\
 & \left. + 2 \exp\left(\frac{a_0}{R_2}(t-2t^*)\right) \left[\frac{\left[(t-2t^*)\left(\frac{a}{R_2} + \frac{a}{R_1}\right) - 1\right]\left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right)}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2} - \frac{\frac{3}{2} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2^2}{R_1^2}}{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2} \right] \dots \right\}. \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

Заметим, что формула (2.50) имеет такую же структуру, как и соответствующая формула для плоского случая симметрии, и можно легко ввести запаздывания в форме выражения (2.17), приближенно учитывая конечность величин перемещений подвижных границ. Используем только первый член оригинала формулы (2.51), поскольку последующие будут иметь аналогичную структуру:

$$\begin{aligned}
 P(R_2(t), t) = & \rho_0 a_0 v_1 \left\{ \frac{R_1(t-t_1)}{R_2(t-t_1)} \exp \left[-\frac{a_0}{R_1(t-t_1)} (t-t_1) \right] + \right. \\
 & + \frac{R_1(t-t_1)}{R_2(t-t_1)} \left[\frac{2 \exp \left(\frac{a_0}{R_2(t-t_1)} (t-t_1) \right)}{1 + \frac{R_2(t-t_1)}{R_1(t-t_1)}} - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\left(1 - \frac{R_2(t-t_1)}{R_1(t-t_1)} \exp \left(-\frac{a_0}{R_1(t-t_1)} (t-t_1) \right) \right)}{1 - \frac{R_2(t-t_1)}{R_1(t-t_1)}} \right] + \dots \right\}. \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

Подобным образом вводятся запаздывания и в формулу для скорости.

Представление о точности предложенного метода может дать сравнение с результатами решения задачи с одной подвижной границей, полученными точным численным решением автомодельной задачи расширения сферы с постоянной скоростью [19]; решением с учетом нелинейных членов волнового уравнения задачи расширения полости с постоянной скоростью [20], а также приближенными решениями, основанными на допущении $\varphi(R(t), t) = \varphi(R(t), t) \Big|_{p=\text{const}}$ [21]. Для скоростей расширения до 80 м/с расхождение составляет 5 %. Величина погрешности максимальная на границе, с увеличением расстояния от нее резко падает. С началом движения преграды для капельной жидкости возможны кавитационные явления, которые описываются другими уравнениями.

Заключение по главе 2

Задачи с двумя подвижными границами наиболее сложные. Получив решения с помощью допущения о снесении граничных условий на неподвижные границы, мы получили возможность оценивать исследуемые функции (для трех случаев симметрии), когда движение границ происходит со скоростями порядка десяти метров в секунду. Используя предложенный метод ввода реальных величин запаздываний, получены решения, позволяющие приближенно оценивать исследуемые функции, когда скорости движения границ порядка нескольких десятков метров в секунду. Однако основным итогом рассмотрения полученных в главе 2 решений необходимо считать следующее.

"Понять" – это значительно больше, чем знать числовой ответ или получить даже формулу [22]. Предложенный подход ввода реальных величин запаздываний и иллюстрация решений волнового уравнения позволяют понять

роль сложных аргументов исследуемых функций, построенных с учетом реальных величин запаздываний. Это позволило впервые получить без каких-либо допущений точное аналитическое решение основного уравнения математической физики волнового с подвижными границами.

3. НАХОЖДЕНИЕ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ И ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

Анализ существующих методов решения задач с подвижными границами, проведенный в I главе, и предложенного автором метода ввода реальных величин запаздываний (глава 2) показал их возможности и недостатки, а также границы применимости и возможные погрешности. Целые классы таких задач, как с двумя подвижными границами, обратные задачи и тому подобное, точно решить рассмотренными методами невозможно. Для их решения можно применить, например, метод характеристик или обобщение общего метода интегральных преобразований, требующих численного счета на ЭВМ, что не совсем удобно.

Ниже сделана попытка разработать общий метод точного аналитического решения задач с подвижными границами, позволяющий решать и прямые и обратные задачи с одной и двумя подвижными границами.

Известно [1], что волновой процесс – это одна из важнейших форм движения материи. В той или иной мере волновые движения присущи всем без исключения объектам материального мира. Волновые процессы, как линейные, так и нелинейные, интенсивно изучаются в электродинамике, физике плазмы, оптике, акустике, гидродинамике и др. Механизмы распространения возмущений, естественно, сильно отличаются друг от друга. Различие физических механизмов, реализующих волновой процесс, приводит к различным, сильно различающимся друг от друга системам уравнений. Однако для понимания наиболее фундаментальных явлений, свойственных волнам различной природы (интерференция, дифракция, дисперсия, отражения, преломления, рассеяния и т.д.) часто нет необходимости анализировать исходные, зачастую, сложные системы уравнений. Простые эффекты, как правило, описываются простыми и поэтому универсальными математическими моделями. Отсюда, по-видимому, можно сделать вывод, что целью исследования должно быть не только составление особо сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных и решение их на мощных ЭВМ, но и, по возможности,

сведение решения задачи к наиболее простой математической модели и получение аналитического решения, естественно, с определением границ ее (модели) применимости.

Такой универсальной математической моделью, описывающей многие физические процессы, является волновое уравнение. Переходим к его исследованию для случаев, когда граничные условия удовлетворяются на движущихся границах.

Основное внимание автором уделено следующему: вопросам решения волнового уравнения, когда граничные условия удовлетворяются на подвижных границах, случаи движения одной и двух границ, одна движется, другая неподвижна, прямых и обратных задач – в работах [2–7]; восстановления давления на движущейся границе плазменного поршня – в работах [8, 9]; управления импульсными процессами в жидкости – в работах [10–13]; определения влияния скорости испарения с внутренней поверхности поршня на гидродинамические характеристики – в работах [6, 9, 12] и параграфе 4.6; о распространении волн в вязкой и теплопроводящей среде при наличии подвижных границ в работе [14] и параграфе 4.1; движение проницаемых границ в параграфе 4.8; построение решения волнового уравнения с нелинейными граничными условиями на подвижных границах – в параграфе 5.5 [15, 16].

3.1. Понятие запаздывания. Виды аргументов с запаздываниями

В соотношениях, приведенных в предыдущей главе и полученных приближенным методом ввода реальных величин запаздываний [17–19], в формулах Тейлора [20, 21], в решении Даламбера [22] и некоторых других можно заметить, что аргументы исследуемых функций имеют сложную структуру. Эта структура – результат (возможно, и не совсем точного) отражения в решениях уравнений физически очевидного факта распространения возмущений в сплошных средах с конечной скоростью. Конечная скорость распространения возмущений связана с понятием запаздывания.

Рассмотрим запаздывания и виды аргументов исследуемых функций задачи, у которой распространение возмущений происходит в безграничной среде [6]. Возникнув в точке r_0 в момент времени t , возмущение, распространяясь в среде с конечной скоростью a_0 , достигнет точки r_1 в момент $t + (r_1 - r_0)/a_0$. Видим, что запаздывание равно $(r_1 - r_0)/a_0$, а, возникнув в точке r_0 в момент $t - (r_1 - r_0)/a_0$, достигнет точки r_1 в момент t . Теперь можем сделать очевидный вывод, что в будущем решении слева будет стоять исследуемая функция с аргументом t , а справа – функция или набор их, среди которых будут и функции с аргументом $t - (r_1 - r_0)/a_0$ (то есть с запаздыванием) или, наоборот, $t + (r_1 - r_0)/a_0$ справа t . Это первый вид аргумента с запаздыванием. Поскольку решение должно описывать исследуемую функцию в разных

точках, а не только в какой-либо точке r_1 , справа для общего случая следует ожидать функцию с аргументом $t - (r - r_0)/a_0$ (второй вид).

На подвижной границе $r = R(t)$ решение будет иметь функции с аргументом $t - [R(t) - r_0]/a_0$ (третий вид).

Решение в общем виде, описывающее исследуемую функцию в любых точках, имеет функции с аргументом $t - (r - r_0)/a_0$. Для его получения, например, при решении обратных задач, необходимо в решение уравнения (аргумент неизвестен) подставить вид функции в точке r_1 , то есть вид функции с запаздыванием $t - (r_1 - r_0)/a_0$. Нетрудно определить, что решение задачи будет иметь функции с аргументом $t - (r - r_1)/a_0$ (четвертый вид). Действительно,

$$t - \frac{r - r_1}{a_0} - \frac{r_1 - r_0}{a_0} = t - \frac{r - r_0}{a_0}.$$

В решении задачи Коши функция будет иметь аргумент $(t - r/a_0)$ (пятый вид). Как видим, запаздывания имеют несколько разновидностей и взаимодействуют между собой. Это позволит контролировать вид решения в процессе его получения, тогда как ранее запаздывание, появляясь в различных видах при различных математических выкладках, вводило исследователей в заблуждение относительно понятия запаздывания, особенно при конечных перемещениях границы.

3.2. Обратная задача для волнового уравнения с подвижными границами

Существенная нелинейность проблемы подвижных границ явилась причиной того, что до настоящего времени не было общего метода точного аналитического решения задач с подвижными границами. Исследователям приходилось вводить различные допущения: изменять граничные условия [20], сносить граничные условия на неподвижные границы [23, 24], либо получать приближенное решение, основанное на исследовании решений линеаризованной задачи с неподвижными границами, совпадающими в каждый данный момент с положением в этот момент истинных движущихся границ [25, 26], либо заменяя действие движущихся границ системой особенностей [27].

Это приводило к ограниченности решений, а в некоторых случаях и к неприемлемым результатам. Следует отметить, что для волнового уравнения еще Даламбером было получено решение (задачи Коши), в котором, естественно, вид функций, зависящий от граничных условий, остается неизвестным [22].

Предлагается новый метод получения точного аналитического решения краевых задач с подвижными границами, без каких-либо допущений, состоящий в нахождении зависимости между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в любых других точках, с учетом реальных величин запаздываний [4, 9]. Рассмотрим подробно самую характерную, имеющую боль-

шое практическое и теоретическое значение задачу о поршне, поршень расширяется в безграничной, сжимаемой, покоящейся при $t < 0$ жидкости. Стенки поршня считаются непроницаемыми [7, 16].

Для одномерных случаев движение жидкости наиболее полно описывается системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [28]: уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов с соответствующими граничными и начальными условиями. Эта система для потенциальных течений приводится к уравнению [29] относительно потенциала скорости φ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - a_0^2 \frac{1}{r} (v-1) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \\ & + \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + (n-1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (n-1) \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial r} (v-1) \right] + \\ & + \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \left(\frac{n+1}{2} \right) + (n-1)(v-1) \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Давление в любой точке, включая подвижную поверхность поршня, определяем следующим образом. Поскольку по условию движение потенциально, то уравнение движения полной системы опишется в виде

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \varphi_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (3.2)$$

Умножая (3.2) на dr и интегрируя, получаем интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} = F(t), \quad (3.3)$$

где $F(t)$ может быть без ограничения общности, принятой равной нулю [30].

При $\rho \approx \rho_0$, когда возмущения распространяются с постоянной скоростью, интеграл Коши (3.3) принимает вид:

$$P - P_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2. \quad (3.4)$$

Член $0,5\rho_0 v^2$ в волновой зоне весьма мал, но достигает больших значений, соизмеримых с членом $\rho_0 \partial \varphi / \partial t$, вблизи и на поверхности поршня.

Для нахождения давления необходимо в интеграле Коши знать функцию φ . Потенциал скорости в общем случае из уравнения (3.1) определить чрезвычайно сложно. В настоящее время (3.1) может быть решено методом малого параметра [31] для постоянной скорости расширения.

В работе [29] автором определена граница применимости этого метода (для такого класса задач примерно $M = 0,2$, что соответствует $\rho \approx \rho_0$). В работе [32] уравнение (3.1) рассматривалось с несколько других позиций, где, кроме линейных членов, учитывались члены второго порядка малости (члены в квадратных скобках уравнения (3.1)). Описанный в работе [32] метод применим для автомодельного случая расширения поршня. Поэтому в определенных границах изменения скорости и давления (очевидно при этом, плотность приближенно равна плотности среды в невозмущенном состоянии ρ_0) потенциал скорости ϕ в интеграле Коши для случая сферической симметрии будем определять из (3.1) [33], пренебрегая в нем членами второго и третьего порядков малости, то есть из уравнения [7]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - a_0^2 \frac{1}{r} (v-1) \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (3.5)$$

где v равно 1, 2, 3 для плоского, цилиндрического и сферического случаев, в момент времени $t = 0$

$$\phi_t(r, 0) = \phi(r, 0) = 0. \quad (3.6)$$

Известны условия на подвижных поверхностях поршня

$$R(t) = F(t), \quad (3.7)$$

или в точке r_1 волновой зоны

$$P(r_1, t) = \tilde{f}(t). \quad (3.8)$$

Если известны условия (3.7), то это прямая задача, если только (3.8) – обратная. Решение сформулированной задачи единственно и устойчиво, что будет показано ниже в п. 3.4.

Задача (3.5)–(3.8) нелинейна. Покажем это на примере расширения с постоянной скоростью сферической полости в безграничной жидкости, как это сделано в работе [34] для уравнений параболического типа. Если бы задача была линейной, то сумма двух каких-либо решений ее была бы опять решением.

Выпишем формулу для давления [21]

$$P - P_0 = 2\rho_0 \frac{a_0^2 M^3}{1 - M^2} \left(\frac{a_0 t}{r} - 1 \right) = F(r, t) \frac{a_0^2 M^3}{1 - M^2},$$

$$P - P_0 \Big|_{v_1=100} = 667F, \quad P - P_0 \Big|_{v_2=150} = 2280F, \quad P - P_0 \Big|_{v_1+v_2=250} = 10640F,$$

$$P - P_0 \Big|_{v_1=100} + P - P_0 \Big|_{v_2=150} \neq P - P_0 \Big|_{v_1+v_2=250},$$

где M – число Маха.

Вычислим теперь давление при излучении с поверхности сферы постоянного радиуса R . Применяя преобразование Лапласа к (3.5), используя граничное условие (3.7) при $R = \text{const}$ и условие (3.6), для $v(R, t) = \text{const}$ получаем

$$P - P_0 = \rho_0 \frac{a_0 R}{r} v \exp \left[-\frac{a_0}{R} \left(t - \frac{r - R}{a_0} \right) \right],$$

$$P - P_0 \Big|_{v=100} + P - P_0 \Big|_{v=150} = P - P_0 \Big|_{v_1+v_2=250}.$$

В первом случае, когда граница перемещалась, задача нелинейна, во втором, при $R = \text{const}$ – линейна. В некоторых случаях при решении нелинейных задач с подвижными границами определяют решение в виде суммы решений – потенциалов $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ [35–37]. Получаемые при этом количественные результаты, по-видимому, могут быть использованы в ограниченном диапазоне.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к (3.5), с учетом начальных условий (3.6), получаем операторное уравнение, для случая $v = 3$ и расширения поршня в безграничной жидкости решение его имеет вид

$$\bar{\varphi}(r, s) = \frac{1}{r} c_1(s) \exp \left(-s \frac{r}{a_0} \right), \quad \varphi(r, t) = \frac{1}{r} c_1 \left(t - \frac{r}{a_0} \right).$$

Для определения функции c_1 при решении прямой задачи можно использовать только условие (3.7). Выбранный для решения задачи операционный метод обладает многими преимуществами, однако специфика его такова, что он не позволяет решить прямую задачу традиционным путем, в чем непосредственно убеждаемся при попытке определить $c_1(s)$ по условию (3.7) на границе. Это одно из препятствий при решении задач с подвижными границами.

Для получения интересующих нас зависимостей между значениями исследуемых функций воспользуемся физически очевидным фактом появления возмущения в точке r_1 волновой зоны с запаздыванием $(r_1 - r_0)/a$: к примеру, давление в точке r_1 имеет вид

$$P(r_1, t) = f \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) = \tilde{f}(t).$$

Тогда компоненту давления, скорость и потенциал скорости получим в виде

$$\bar{P}(r, s) = \tilde{f}(s) \frac{r_1}{r} \exp \left[-\frac{s}{a_0} (r - r_1) \right], \quad P(r, t) = \frac{r_1}{r} f \left(t - \frac{r - r_1}{a_0} \right), \quad (3.9)$$

$$\bar{v}(r, s) = \tilde{f}(s) \frac{r_1}{\rho_0 s} \exp \left[-\frac{s}{a_0} (r - r_1) \right] \left[\frac{s}{a_0 r} + \frac{1}{r^2} \right],$$

$$v(r, t) = \frac{r_1}{\rho_0} \left[\frac{1}{a_0 r} f \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} \right) + \frac{1}{r^2} \int_0^t \left(t - \tau - \frac{r-r_1}{a_0} \right) f'_t(\tau) d\tau \right], \quad (3.10)$$

$$\varphi(r, t) = \frac{r_1}{r \rho_0} \int_0^t f(\tau) \sigma_0 \left(t - \tau - \frac{r-r_1}{a_0} \right) d\tau. \quad (3.11)$$

Соотношения (3.9)–(3.11) представляют точное аналитическое решение линеаризованного уравнения (3.5); подстановка их в уравнение (3.5) превращает его левую часть в нуль. Соотношения (3.9)–(3.11) позволяют определить гидродинамические характеристики в любой точке и в любое время, в том числе и на подвижной границе. Условие (3.8) может быть задано в любой точке. Решения представлены и в изображениях, поскольку для сокращения выкладок они чаще всего используются в таком виде.

Пусть давление в точке r_1 изменяется по экспоненциальному закону [16]

$$P(r_1, t) = A \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r}{a_0} \right) \right] \sigma_0 \left(t - \frac{r}{a_0} \right), \quad \bar{P}(r_1, s) = \frac{A}{s + \alpha} \exp \left(-s \frac{r_1}{a_0} \right), \quad (3.12)$$

где A и α – постоянные.

Тогда компонента давления в любой точке согласно (3.9) запишется в виде

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} A \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r}{a_0} \right) \right] \sigma_0 \left(t - \frac{r}{a_0} \right), \quad (3.13)$$

на поршне

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} A \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{R(t)}{a_0} \right) \right] \sigma_0 \left(t - \frac{R(t)}{a_0} \right). \quad (3.14)$$

Здесь для определения давления нужно знать $R(t)$, $A = \text{const}$.

Воспользуемся первой формулой (3.10) в изображениях и второй (3.12), тогда

$$\bar{v}(r, s) = \frac{r_1}{\rho_0 s} \left[\frac{s}{a_0 r} + \frac{1}{r^2} \right] \frac{A}{s + \alpha} \exp \left(-s \frac{r}{a_0} \right).$$

Учитывая, что [38]

$$\frac{s + a_0/r}{s^2 + s\alpha} \rightarrow \frac{a_0}{r\alpha} + \left(1 - \frac{a_0}{r\alpha} \right) \exp(-\alpha t),$$

получаем соотношение для скорости в любой точке

$$v(r, t) = \frac{r_1 A}{\rho_0 r a_0} \left\{ \frac{a_0}{r\alpha} + \left(1 - \frac{a_0}{r\alpha} \right) \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r}{a_0} \right) \right] \right\}. \quad (3.15)$$

На поршне

$$v(R(t), t) = \frac{dR(t)}{dt} = \frac{r_1 A}{\rho_0 a_0 R(t)} \left\{ \frac{a_0}{R(t)\alpha} + \left(1 - \frac{a_0}{R(t)\alpha} \right) \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{R(t)}{a_0} \right) \right] \right\}. \quad (3.16)$$

Решая это уравнение, определим $R(t)$, а по формуле (3.14) и компоненту давления на поршне. Полученные соотношения (3.12)–(3.16) позволяют точно восстановить всю картину движения жидкости при расширении поршня, включая подвижную границу.

Приведенный выше метод имеет достаточно общий характер. Полученные соотношения универсальны, так как позволяют решать и прямую задачу. Это легко проверить, используя известные соотношения [20, 21, 27, 31].

При решении обратных задач для определения $R(t)$ в общем случае приходится решать сложные уравнения типа

$$\dot{R}(t) = F \left(t - \frac{R(t)}{a_0} \right),$$

которое получается при $r = R(t)$ из уравнения

$$v(r, t) = F \left(t - \frac{r}{a_0} \right).$$

Покажем, как можно определить $R(t)$ с любой степенью точности. Запишем (3.15) в следующем виде:

$$\frac{v(r, t) r^2 \rho_0}{r_1} = \left\{ \frac{A}{\alpha} + A \left(\frac{r}{a_0} - \frac{1}{\alpha} \right) \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r}{a_0} \right) \right] \right\} = \frac{dr^3 \rho_0}{dt \cdot 3r_1},$$

интегрируя операционным методом и переходя на поршень $r = R(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{R_{i+1}^3(t) \rho_0}{3r_1} &= \frac{R_i(t) A}{a_0 \alpha} \left\{ 1 - \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{R_i(t)}{a_0} \right) \right] \right\} + \\ &+ \frac{A}{\alpha} \left\{ \left(t - \frac{R_i(t)}{a_0} \right) - \frac{1}{\alpha} \left[1 - \exp \left(-\alpha \left(t - \frac{R_i(t)}{a_0} \right) \right) \right] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь индексы i введены для того, чтобы решить последовательными приближениями это еще достаточно сложное уравнение. Для R_1 принято

$$\frac{R_1^3(t) \rho_0}{3r_1} = \frac{R_1(t) A}{a_0 \alpha} \{ 1 - \exp(-\alpha t) \} + \frac{A}{\alpha} \left\{ t - \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)] \right\}. \quad (3.18)$$

Формулы (3.17) и им подобные, которые будут приведены в дальнейшем для вычисления $R(t)$, обладают очень хорошей сходимостью. Уже $R_2(t)$ отличается от точного на доли процента. Обычно вычисления производятся всего

один раз, так как за $R_1(t)$ можно брать значение радиуса, вычисленное для предыдущего момента времени.

Применим полученные результаты для рассмотрения конкретного случая расширения сферы.

Известно давление в точке r_1

$$P(r_1, t) = A \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right) \right] \sigma_0 \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right), \quad (3.19)$$

$\alpha = 0,075 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $r_1 = 0,15 \text{ м}$, $A = 25 \cdot 10^4 \text{ кгс/м}^2$, $a_0 = 1500 \text{ м/с}$.

Тогда компонента давления в волновой зоне согласно (3.9) запишется в виде

$$P(r, t) = \frac{0,15}{r} 25 \exp \left[-0,075 \cdot 10^6 \left(t - \frac{r}{a_0} \right) \right]. \quad (3.20)$$

Компонента давления на поршне

$$P(R(t), t) = \frac{0,15}{R(t)} 25 \exp \left[-0,075 \cdot 10^6 \left(t - \frac{R(t)}{a_0} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Согласно (3.16) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dR(t)}{dt} = \frac{0,15 \cdot 25 \cdot 10^4}{102 \cdot 1500 \cdot R(t)} & \left\{ \frac{1500}{R(t) \cdot 0,075 \cdot 10^6} + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{1500}{R(t) \cdot 0,075 \cdot 10^6} \right) \exp \left[-0,075 \cdot 10^6 \left(t - \frac{R(t)}{a_0} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Решая соотношение (3.22) относительно $R(t)$, определяем изменение радиуса поршня, а по (3.21) и компоненту давления на подвижной поверхности поршня; $R(t)$ можно определить также по формуле (3.17).

Представляет интерес сравнить полученное точное решение с приближенным, описанным в работах [20, 27]. Для этого приравняем компоненты давления в волновой зоне по формулам (3.12) и (1.81)

$$\rho_0 \frac{\ddot{V} \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right)}{4\pi r_1} = A \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right) \right] \sigma_0 \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right),$$

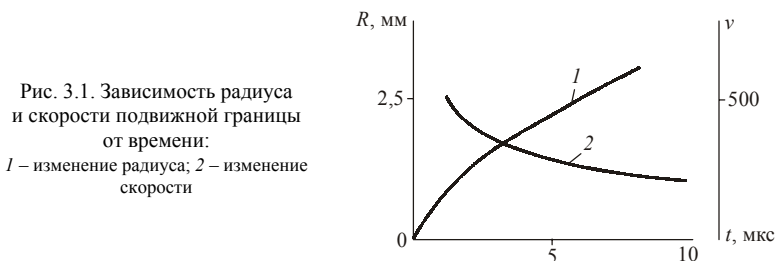
где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, откуда

$$R^3 \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right) = \frac{3r_1 A}{\rho_0 \alpha} \left\{ \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right) + \frac{1}{\alpha} \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r_1}{a_0} \right) \right] - \frac{1}{\alpha} \right\},$$

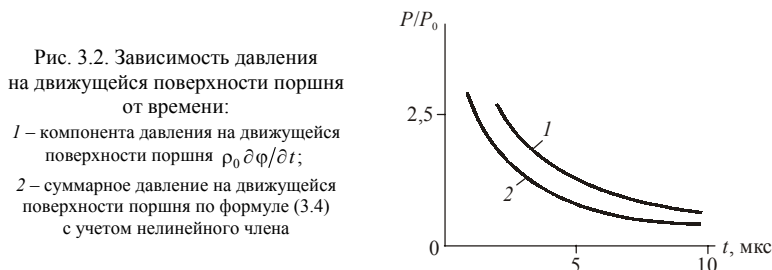
$$R^3(t) = \frac{3r_1 A}{\rho_0 \alpha} \left\{ t + \frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha t) - \frac{1}{\alpha} \right\} \sigma_0(t). \quad (3.23)$$

Значения $R(t)$, вычисленные приближенным способом, удовлетворяют точному уравнению (3.16) с точностью до $\sim 1\%$.

По формулам (3.12)–(3.23) построены кривые зависимости радиуса (кривая 1) и скорости (кривая 2) поршня по заданному изменению давления в точке r_1 (3.19) от времени (рис. 3.1).



Показана (рис. 3.2) зависимость компоненты давления $\rho_0 \partial \phi / \partial t$ на подвижной границе поршня (1) и суммарное давление по формуле (3.4) с учетом нелинейного члена $0,5\rho_0 v^2(R(t), t)$ (2) от времени. Сравнение кривых показало, как велика может быть погрешность определения давления на подвижной поверхности поршня, расширяющегося в сжимаемой жидкости, если не учитывать нелинейный член.



Показаны (рис. 3.3) реконструкция функции давления в точках $r = 0,05$ м, $r = 0,08$ м и заданное изменение давления в точке $r = 0,15$ м.

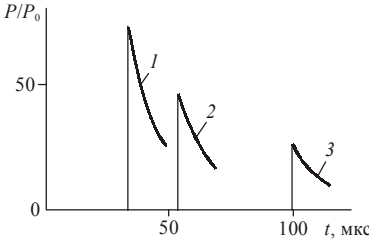


Рис. 3.3. Зависимость давления от времени в точках волновой зоны:
1 – $r = 0,05$ м; 2 – $r = 0,08$ м; 3 – $r = 0,15$ м

Вопрос вычисления функции $R(t)$ при решении обратных задач достаточно сложен. Рассмотрим несколько способов вычисления радиуса подвижной границы по известному давлению:

1. В первом приближении $R(t)$ можно определить, решая известное соотношение для несжимаемой жидкости [27]

$$P - P_0 = \rho_0 \left(\frac{3}{2} \dot{R}^2 + \ddot{R} R \right)$$

в общем случае произвольных законов $P(R(t), t)$ и $R(t)$ оно, по-видимому, может быть решено только численно. Даже при $P(R(t), t) = \text{const}$ оно еще достаточно сложное:

$$\int_0^t dR(t) = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P}{\rho_0}} \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{R(t)} \right)^3} dt.$$

2. Соотношение для скорости частиц среды на движущейся непроницаемой границе имеет вид (3.28)

$$\frac{v(R(t), t) \rho_0 R^2(t)}{r_1} = \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} = F_1(R(t), t),$$

$$\xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0},$$

откуда

$$\frac{dR^3(t) \rho_0}{3 dt r_1} = F_1(R(t), t)$$

последнее соотношение может быть решено численными методами.

3. Используем известную приближенную формулу (73.8) работы [20, с. 345]

$$\varphi = - \frac{\dot{V} \left(t - \frac{r}{a_0} \right)}{4 \pi r},$$

откуда

$$\frac{P - P_0}{\rho_0} = \frac{\ddot{V} \left(t - \frac{r}{a_0} \right)}{4\pi r}.$$

Сравнивая последнее соотношение с (3.39), получим при $r_0 = 0$

$$\frac{\rho_0 \ddot{V} \left(t - \frac{r}{a_0} \right)}{4\pi r} = \frac{r_1}{r} f \left(t - \frac{r}{a_0} \right),$$

где V – объем сферы, или

$$\frac{R^3 \rho_0}{3r_1} = \int_0^t \int_0^t f(t) dt dt,$$

в общем случае

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m,$$

$$\frac{R^3(t) \rho_0}{3r_1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} t^{m+2},$$

где A_m – коэффициенты аппроксимирующего полинома Лагранжа степени m , f – заданная функция давления в точке r_1 .

4. Можно попытаться определить функцию $R(t)$ с учетом сжимаемости с использованием следующего физического соображения. В пункте 2 соотношение

$$\frac{dR^3(t) \rho_0}{dt 3r_1} = F_1(R(t), t)$$

естественно, пригодно во всех точках волновой зоны и на подвижных границах, то есть

$$\frac{dr^3 \rho_0}{dt 3r_1} = F_1(r, t) = \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^m,$$

$$\xi = t - \frac{r - r_0}{a_0}.$$

Проинтегрируем его от 0 до t , тогда

$$\frac{(r^3 - r_0^3)\rho_0}{3r_1} = \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2},$$

переходим на подвижную границу $r = R(t)$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{[R^3(t) - r_0^3]\rho_0}{3r_1} = \\ & = \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left[t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right]^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \left[t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right]^{m+2}. \end{aligned}$$

Это соотношение позволяет с некоторым приближением определить функцию $R(t)$ при произвольных величинах r_0 , законах движения границ и вида функций давления в произвольной точке r_1 . Это соотношение точно переходит в известную формулу [27] для несжимаемой жидкости. Действительно, продифференцируем его дважды при $a_0 \rightarrow \infty$

$$\frac{R^2 \dot{R} \rho_0}{r_1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} t^{m+1},$$

$$\frac{(2R \dot{R}^2 + R^2 \ddot{R})\rho_0}{r_1} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m = f = P(r_1, t).$$

Как видим, выше использовалось физически очевидное понятие о том, что найденные в волновой зоне при решении обратных задач соотношения дают количественный результат, точно совпадающий в определенной точке и в определенное время с решением прямой задачи с подвижными границами. Это обстоятельство будет использовано в дальнейшем, в особенности при решении задач с проницаемой подвижной границей.

5. Объем расширяющейся полости имеет вид

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3(t),$$

приращение этого объема

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2(t) \dot{R}(t).$$

Соотношение для скорости подвижной границы имеет вид

$$v(R(t), t) = \dot{R}(t), \quad \frac{v(R(t), t) R^2(t) \rho_0}{r_1} = \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1},$$

сравнивая их, получаем

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right\}.$$

Последнее соотношение пригодно как на подвижной границе, так и в волновой зоне, т.е.

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right\}.$$

Интегрируем его от 0 до t , получаем

$$V - V_0 = 4\pi \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2} \right\},$$

на поршне $r = R(t)$ получим

$$\frac{R^3(t) - r_0^3}{3} = \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2} \right\}.$$

6. Воспользуемся известным физическим соображением [20, с. 345] о том, что объем жидкости, протекающей через замкнутую поверхность, должен быть равен изменению объема V тела в единицу времени, то есть производной dV/dt .

Объем среды, прошедшей через поверхность сферы постоянного радиуса r , равен

$$S_1 v(r, t) = 4\pi r^2 v(r, t),$$

где S_1 – площадь поверхности сферы; v – скорость частиц среды в точке r ; согласно вышеизложенному этот объем равен производной dV/dt , т.е.

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 v(r, t).$$

Запишем соотношение для скорости (3.26) в следующем виде

$$r^2 v(r, t) = \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right\}, \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a_0},$$

и подставим в предыдущую формулу, получим

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right\}.$$

Интегрируя это соотношение от 0 до t , получаем

$$V - V_0 = 4\pi \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2} \right\},$$

или

$$\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi r_0^3 = 4\pi \frac{r_1}{\rho_0} \left\{ \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2} \right\}.$$

Будем приближать точку r к началу координат, в точке r_2 вблизи подвижной границы соотношение будет иметь вид

$$\frac{(r_2^3 - r_0^3) \rho_0}{3 r_1} = \left\{ \frac{r_2}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2} \right\},$$

еще приближаем к подвижной границе и, наконец, в какой-то момент t r станет равным $R(t)$, для этого момента соотношение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{[R_{i+1}^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3 r_1} &= \frac{R_{i+1}(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left[t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0} \right]^{m+1} + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \left[t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0} \right]^{m+2}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Вычисление $R(t)$ из этого "кубического" уравнения можно производить методом последовательных приближений с любой степенью точности, принимая за R_1 значение, вычисленное для предыдущего момента времени. Сходимость процесса хорошая и для практических расчетов достаточно одного приближения. При $a_0 \rightarrow \infty$ эта формула точно переходит в известное соотношение для несжимаемой жидкости.

Как видим, в пунктах 4, 5, 6 с разных позиций приходим к одному и тому же соотношению, которое в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{[R^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3 r_1} &= \\ &= \left| \int_0^t \frac{r}{a_0} f \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) dt \right|_{r=R(t)} + \left| \int_0^t \int_0^t f \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) dt dt \right|_{r=R(t)}. \end{aligned}$$

3.3. Уточнение аппроксимации произвольных кусочно-непрерывных функций с использованием полиномов Лагранжа в случае прямых задач

Рассмотрим вопрос об аппроксимации функций [3, 4, 6, 7]. Решение, найденное в общем виде, может не привести к правильному результату, если будет неправильно выбрана аппроксимирующая функция. Представим себе следующее: из опыта известно, что при расширении полости в жидкости на некотором расстоянии от нее функция давления часто имеет вид экспоненты. Если мы при нахождении решения используем экспоненциальную функцию, то тем самым ограничим решение тем диапазоном скоростей расширения поршня, которые вызывают на этом расстоянии ударную волну в виде экспоненты. Для других скоростей расширения, вызывающих резко отличный от экспоненты вид функции давления, решение будет непригодно. Если выбрать другую элементарную функцию, то опять для определенных скоростей расширения поршня решение будет неприемлемо. Как выйти из этого положения? Необходимо найти такую аппроксимацию исследуемой функции, которая соответствовала бы любой произвольно заданной в данном случае скорости расширения поршня.

Часто неизвестную функцию представляют в виде ряда. Каждый член ряда может быть построен по определенному закону, то есть по виду общего члена. Для получения точного значения неизвестной функции в какой-либо момент времени нужны все члены ряда, для чего необходимо доказать его сходимости. Для определения неизвестных коэффициентов ряда приходят к системе уравнений, и, если ряд выбран неудачно, необходимо решать бесконечную систему уравнений, либо искать тот диапазон членов ряда, который будет удовлетворять с какой-то точностью решению задачи. Решение при этом получается приближенным. Поступим иначе: воспользуемся точечным соответствием. Ведь в решении (3.9)–(3.18) каждому значению в определенный момент t исследуемой функции (слева) соответствует конкретное значение функции с соответствующим запаздыванием (справа). Функцию, проходящую через произвольный набор точек, удобнее всего аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m . Коэффициенты Лагранжа вычисляются по конкретным значениям ординат точек, лежащих на аппроксимируемой кривой. Полином точно описывает исследуемую функцию в этих точках, а в промежуточных он дает уже некоторую погрешность: чем больше точек аппроксимации, тем она меньше. Если необходимо найти точное значение в других точках, то, чтобы не увеличивать степень m до ∞ , нужно просто взять другие значения времени, с учетом запаздывания легко вычисляемые, чтобы получить полином, описывающий точно исследуемую функцию в интересующих точках.

Таким образом, для произвольного закона расширения поршня функцию давления в произвольной точке волновой зоны принимаем в виде

$$\left. \begin{aligned} P(r_1, t) &= f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^m; \\ \bar{P}(r_1, s) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{S^{m+1}} \exp \left[-s \left(\frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

где A_m – коэффициенты Лагранжа; при $m = 0$

$$f(t) = A_0 \sigma_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right).$$

Приведем конкретное вычисление коэффициентов полинома Лагранжа [39] функции $f[t - (r_1 - r_0)/a_0]$, значения которой представлены в таблице (время t взято от момента прихода возмущения в точку $r_1 = 0,08$ м; $r_0 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м).

m	0	1	2	3
$t, \text{с}$	0	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$P, \text{кг/см}^2$	11,75	5,04	4,10	3,98

$$L_0^3 = \frac{(t - 1 \cdot 10^{-6})(t - 2 \cdot 10^{-6})(t - 3 \cdot 10^{-6})}{(0-1)(0-2)(0-3) \cdot 10^{-18}} = \frac{t^3 - 6 \cdot 10^{-6} t^2 + 11 \cdot 10^{-12} t - 6}{-6 \cdot 10^{-18}},$$

$$L_1^3 = \frac{(t-0)(t-2 \cdot 10^{-6})(t-3 \cdot 10^{-6})}{(1-0)(1-2)(1-3) \cdot 10^{-18}} = \frac{t^3 - 5 \cdot 10^{-6} t^2 + 6 \cdot 10^{-12} t}{2 \cdot 10^{-18}},$$

$$L_2^3 = \frac{(t-0)(t-1 \cdot 10^{-6})(t-3 \cdot 10^{-6})}{(2-0)(2-1)(2-3) \cdot 10^{-18}} = \frac{t^3 - 4 \cdot 10^{-6} t^2 + 3 \cdot 10^{-12} t}{-2 \cdot 10^{-18}},$$

$$L_3^3 = \frac{(t-0)(t-1 \cdot 10^{-6})(t-2 \cdot 10^{-6})}{(3-0)(3-1)(3-2) \cdot 10^{-18}} = \frac{t^3 - 3 \cdot 10^{-6} t^2 + 2 \cdot 10^{-12} t}{6 \cdot 10^{-18}},$$

$$\begin{aligned} & 11,75 \left\{ \frac{t^3 - 6 \cdot 10^{-6} t^2 + 11 \cdot 10^{-12} t - 6}{-2 \cdot 10^{-18}} \right\} + 3,98 \left\{ \frac{t^3 - 3 \cdot 10^{-6} t^2 + 2 \cdot 10^{-12} t}{6 \cdot 10^{-18}} \right\} + \\ & + 4,10 \left\{ \frac{t^3 - 4 \cdot 10^{-6} t^2 + 3 \cdot 10^{-12} t}{-2 \cdot 10^{-18}} \right\} + 5,04 \left\{ \frac{t^3 - 5 \cdot 10^{-6} t^2 + 6 \cdot 10^{-12} t}{2 \cdot 10^{-18}} \right\} = \\ & = -0,8216634 \cdot 10^{18} t^3 + 5,34998 \cdot 10^{12} t^2 - 11,2383 \cdot 10^6 t + 11,74998. \end{aligned}$$

Проверка: $P(r_1, t = 1 \cdot 10^{-6}) = 5,03999$.

Окончательный вид аппроксимирующего полинома, который будет использован в параграфе 5.1:

$$P(r_1 = 80 \cdot 10^{-3} \text{ м}, t) = -0,8216634 \cdot 10^{18} \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^3 + \\ + 5,34998 \cdot 10^{12} \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^2 - 11,2383 \cdot 10^6 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^1 + 11,74998.$$

Как видим, полином Лагранжа – это не ряд, где нужно определять его сходимости, и не частичная сумма ряда. В точках 0, 1, 2, $3 \cdot 10^{-6}$ с он точно описывает кривую, а в промежуточных – с некоторой погрешностью. Необходимо отметить [40, с.87], что экстраполяция для полинома Лагранжа дает большие ошибки, чем интерполяция, и применять ее надо весьма осторожно, ни в коем случае не выходя далеко за пределы крайних узловых точек.

В принципе возможны и другие способы аппроксимации, например, по участкам элементарными функциями и т. д., что автором и будет использоваться неоднократно.

Подставляя (3.24) в (3.9)–(3.11) в изображениях, после некоторых преобразований и перехода к оригиналам получаем компоненту давления и скорость в любой точке

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^m, \quad (3.25)$$

$$\frac{v(r, t) r^2 \rho_0}{r_1} = \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^{m+1} = \frac{dr^3}{dt} \frac{\rho_0}{3r_1}, \quad (3.26)$$

и на поршне $r = R(t)$

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^m, \quad (3.27)$$

$$\frac{v(R(t), t) \rho_0 R^2(t)}{r_1} = \\ = \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+1}. \quad (3.28)$$

Соотношения (3.25)–(3.28) – это зависимости между значениями исследуемых функций на подвижной поверхности поршня и в любых других точках с учетом реальных величин запаздываний. Следует обратить внимание на изменение запаздываний в формулах (3.9)–(3.11), (3.25)–(3.28), что характерно

для задач с конечной скоростью распространения возмущений и подвижными границами.

Используя (3.7), из (3.28) для конкретных значений времени приходим к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов Лагранжа A_m . Для практических расчетов достаточно брать $m = 4$. Решая систему, определяем A_m , а, значит, становится известной функция $P(r_1, t)$ согласно (3.24). По (3.25)–(3.27) определяем остальные гидродинамические характеристики, включая подвижные границы.

Рассмотрим пример решения прямой задачи [3–5, 8]. Пусть поршень расширяется по закону

$$R(t) = F(t) = r_0 + \frac{A}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)], \quad (3.29)$$

$$v(R(t), t) = A \exp(-\alpha t),$$

$$r_0 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad A = 200 \text{ м/с}; \quad \alpha = 0,005 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Задавая значения t_{1-4} ; $m = 0-3$; $r_1 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $a_0 = 1500 \text{ м/с}$, из (3.28) получаем систему четырех алгебраических уравнений, решая которую, определим коэффициенты Лагранжа:

$$A_0 = 21,39, \quad A_1 = 7,592 \cdot 10^6, \quad A_2 = -0,1052 \cdot 10^{12}, \quad A_3 = 0,0004576 \cdot 10^{18}. \quad (3.30)$$

Теперь, с учетом (3.30), становятся известными функции

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^m \quad (3.31)$$

давление в точке $r_2 = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Из (3.25)

$$P(r_2, t) = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{30 \cdot 10^{-3}} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{30 - 0,5}{1,5} \cdot 10^{-6} \right)^m. \quad (3.32)$$

Аналогично из (3.26) можно определить и скорость частиц в точке r_2 . Компоненту давления на поршне определим из (3.27) с учетом (3.29) и (3.30):

$$P(R(t), t) = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{R(t)} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{R(t) - 0,5 \cdot 10^{-3}}{a_0} \right)^m. \quad (3.33)$$

По соотношениям (3.29)–(3.33) построены кривые. Показано (рис. 3.4) изменение давления в точках $r_1 = 20 \text{ мм}$ и $r_2 = 30 \text{ мм}$. Звездочками показаны значения, вычисленные по формуле (1.81). Показано (рис. 3.5) изменение давления, вычисленного с учетом нелинейного члена $[0,5 \rho_0 v^2(R(t), t)]$ интеграла Коши-Лагранжа, на подвижной поверхности поршня – кривая 1. Кривая 2 по-

казывает изменение радиуса $R(t)$ поршня; кривая 3 – изменение давления на поршне, вычисленное по известной формуле

$$P - P_0 = \rho_0 \left(\frac{3}{2} \dot{R}^2 + R \ddot{R} \right). \quad (3.34)$$

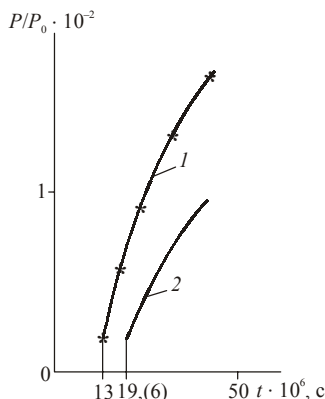


Рис. 3.4. Зависимость давления от времени:
1 – $r = 20$ мм; 2 – $r = 30$ мм

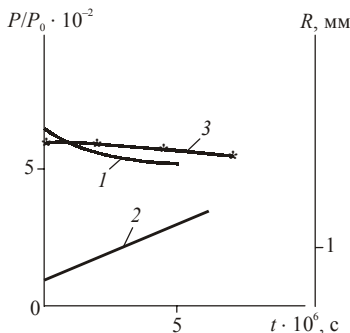


Рис. 3.5. Давление на подвижной поверхности поршня и изменение радиуса поршня:
1 – давление на подвижной границе;
2 – изменение радиуса поршня; 3 – значения по формуле (3.34)

Соотношения (3.25)–(3.28), представляющие точное аналитическое решение волнового уравнения (3.5) с условиями (3.6) и произвольной скоростью движения подвижной границы (3.7), полученные без каких-либо допущений, позволяют без ограничений определять гидродинамические характеристики в любой точке и в любое время, включая подвижную поверхность поршня. Эти соотношения универсальны, так как позволяют решать и обратную задачу.

Для решения обратной задачи возьмем за исходные значения P в точке $r_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 3.4, кривая 1). Для значений времени, равных 15; 23; 33; 43 мкс, при $a_0 = 1500$ м/с, возьмем соответствующие значения ординат кривой 1 и построим аппроксимирующий полином Лагранжа [39], коэффициенты которого приведены в (3.30). Аппроксимирующий полином проходит точно через точки, соответствующие значениям времени 15; 23; 33; 43 мкс, а промежуточные описывает с некоторой погрешностью. Расчеты показали, что для практических целей достаточно брать степень $m = 3$ для этой задачи.

При решении обратных задач по формулам (3.25), (3.26) можно восстановить давление и скорость в любых других точках. По формулам (3.27), (3.28) можно реконструировать давление и скорость на подвижной поверхности поршня, но для этого необходимо знать функцию $R(t)$, которую для этого случая определим с любой степенью точности следующим образом.

Интегрируя соотношение (3.26) операционным методом и переходя на поршень $r = R(t)$, получаем [16]

$$\begin{aligned} \frac{[R_{i+1}^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3r_1} = \frac{R_{i+1}(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+1} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} \left(t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+2}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь индексы i введены для того, чтобы решить последовательными приближениями это достаточно сложное "кубическое" уравнение.

Для R_1 принято

$$\frac{[R_1^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3r_1} = \frac{R_1(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} t^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} t^{m+2}. \quad (3.36)$$

Вычислим несколько приближений для значений R при $t = 20$ мкс. Подставляя значения A_m из (3.30) в (3.36), получаем $R_1 \approx 4,75$ мм. Используя (3.35) и полученное значение R_1 , вычислим $R_2 \approx 4,2 \cdot 10^{-3}$ м. Следующее приближение $R_3 \approx 4,275$ мм отличается от точного значения (3.29) $R = 4,306504$ мм на 0,58 %. Для практических расчетов значение R_2 вполне приемлемо.

Формулы (3.9)–(3.11), (3.24)–(3.28), (3.35), (3.36) получены для любого закона расширения поршня и любого изменения давления в точке r_1 . Не представляет труда получить соотношения, когда изменение давления в точке r_1 происходит по какому-либо определенному закону, например, экспоненциальному, закону $\sin$ и т. д. Однако необходимо найти диапазон изменения скоростей расширения поршня, который вызывает эти давления. Для определения этого диапазона нет принципиальных затруднений, хотя это и связано с некоторым объемом вычислений.

Сравним полученные результаты с другими решениями прямой задачи. В работе [32] рассмотрен случай расширения сферы с постоянной скоростью, причем в волновом уравнении (3.1) удерживались только линейные и квадратичные члены. В работе [21] показано, что главное качественное различие между решением в акустическом приближении и точным решением (здесь и далее в этой фразе под точным решением подразумевается автомодельный случай $v(R(t), t) = u = \text{const}$) заключается в том, что точное решение обнаруживает присутствие слабого разрыва на переднем фронте волны сжатия при любых, сколь угодно малых скоростях расширения сферы, в то время как в акустическом приближении ударные волны, естественно, отсутствуют. Особенно любопытно то обстоятельство, что это различие между точным решением (автомодельным) и решением в акустическом приближении имеет место в области переднего фронта волны, где избыточное давление и скорости чрезвычайно малы и где поэтому можно было бы ожидать наибольшей применимости

линейной теории. Указанные различия вынуждают пользоваться точным (автомодельным решением), получаемым путем численного интегрирования уравнений даже при сравнительно небольших скоростях расширения, что не представляется удобным. Это писалось, когда не было точного решения уравнения (3.5) с условиями (3.6)–(3.8). Необходимо сделать следующие уточнения. Точное аналитическое решение (3.9)–(3.17), (3.24)–(3.28), (3.35) волнового уравнения (3.5) с условиями (3.6) и условием на подвижной границе (3.7) описывает ударные волны; показывает наличие разрывов на переднем фронте волны при любых сколь угодно малых скоростях расширения сферы; решения (3.9)–(3.17), (3.24)–(3.25) описывают разгонный участок для задачи $v(R(t), t) = u = \text{const}$, чего не описывает автомодельное решение (этот вопрос подробно изложен в работе [29]), и пригодны для любого закона расширения поршня; они позволяют рассчитать влияние r_0 на гидродинамические характеристики, что будет показано в следующей главе в сравнении с данными работ [20, 27].

Точное аналитическое решение пригодно для решения как прямых, так и обратных задач.

3.4. Корректность решаемых обратных задач

Отметим некоторые (физические) вопросы единственности решений обратных задач, например, теплопроводности (Темкин А.Г. Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия, 1973, с. 464). Обратные задачи для этого случая, когда по измерениям во внутренних точках тела реконструируется всё температурное поле. Условия однозначности, заданные на границе тела (в его внутренних точках, на части его объема или во всем объеме) по существу являются условиями единственности решения.

Однако из того факта, что данным условиям однозначности соответствует единственное решение, совсем не следует, что заданному известному решению уравнения (переноса) соответствует только одна совокупность условий однозначности и никакая другая их комбинация. Наоборот, любому заданному полю тепло- или массосодержаний может соответствовать бесконечное количество совокупностей условий однозначности, при которых именно это решение имеет место.

Иначе, условия однозначности определяют единственное поле, но само поле не определяет единственным образом условие однозначности. Одно и то же поле температур или концентраций может быть получено при различных условиях однозначности, с помощью различных физических процессов.

Различные условия однозначности, соответствующие одному и тому же температурному полю, называются эквивалентными. Физически эквивалентность граничных условий означает только то, что при различных условиях воздействия среды на тело подводимый к поверхности тела поток энергии может быть одинаковым в течение всего процесса переноса. И если потоки энергии,

поступающие через границу тела, одинаковы, то независимо от внешних причин, породивших эти потоки, температурные поля при этих различных крайних условиях тождественны. Эквивалентные условия однозначности создают на поверхности тела один и тот же тепловой поток. Суть эквивалентных граничных условий в одинаковом подводе мощности. Таким образом, по любым данным граничным условиям или условиям однозначности всегда можно найти класс им эквивалентных граничных условий или условий однозначности, при которых температурное поле остается одним и тем же.

Подобные физические рассуждения могут быть проведены для случая решения обратных волновых задач: данному известному решению уравнения (волнового) соответствуют только одни эквивалентные условия однозначности, создающие на границе одинаковые условия – скорость частиц и давления (для задачи расширения полости). Теперь проведем обоснование корректности на случае сферической симметрии. Задача считается корректной, если можно доказать существование, единственность и устойчивость ее решения.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 2a_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad (3.37)$$

$$R(t) \leq r \leq \infty, \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi(r, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} &= 0, \quad R(0) = r_0, \\ -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{r=r_1} &= P = f \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

для случая одной подвижной границы соответствующие решения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) &= \frac{r_1}{r \rho_0} \int_0^t f \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) dt, \\ P(r, t) &= \frac{r_1}{r} f \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) = F_1(r, t), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$v(r, t) r^2 \rho_0 / r_1 = \frac{r}{a_0} f \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) + \int_0^t f \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) dt = F_2(r, t), \quad (3.40)$$

$$P(R(t), t) = F_1(R(t), t),$$

$$\frac{R^2(t) \rho_0}{r_1} v(R(t), t) = F_2(R(t), t), \quad (3.41)$$

для обратных задач при вычислениях по формулам, определяющим исследуемые функции на подвижных границах, понадобится знание величины $R(t)$, которая определится из следующего "кубического" уравнения

$$\begin{aligned} \left[R_{i+1}^3(t) - r_0^3 \right] \rho_0 / 3r_1 = \frac{R_{i+1}(t)}{a_0} \left[\int_0^t f \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) dt \right]_{r=R_i(t)} + \\ + \left[\int_0^t \int_0^t f \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) dt dt \right]_{r=R_i(t)}, \quad i=1, 2 \dots \end{aligned} \quad (3.42)$$

величины в квадратных скобках известны, так как функция f задана для обратных задач. За R_i берется значение, вычисленное для предыдущего момента времени. Таким способом $R(t)$ вычисляется с любой точностью.

Существование. Поскольку решение получено и его подстановка в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, то оно существует. Покажем, что решение единственно и устойчиво. Докажем соответствующие теоремы.

Теорема единственности 1. Возможно существование только одной функции $\varphi(r, t)$, определенной в области $R(t) \leq r \leq r_3(t)$, $t > 0$ и удовлетворяющей уравнению (3.37), если выполнены условия:

1) функция $\varphi(r, t)$ и производные, входящие в уравнение (3.37), а также и производная $\varphi_{r,t}$ непрерывны на отрезке $R(t) \leq r \leq r_3(t)$ при $t \geq 0$; $r_3(t)$ – координата волны возмущения.

Доказательство производим аналогично тому, как это сделано в [41], но с учетом движения границ. Допустим, что существует два решения обратной задачи $\varphi_1(r, t)$, $\varphi_2(r, t)$ и рассмотрим разность $\psi(r, t) = \varphi_1(r, t) - \varphi_2(r, t)$.

Очевидно, что функция $\psi(r, t)$ удовлетворяет однородному уравнению (3.37) и однородным дополнительным условиям

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2 \frac{1}{r} a_0^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \psi(r, 0)}{\partial r} = \frac{\partial \psi(r, 0)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} = 0. \quad (3.44)$$

Покажем, что $\psi(r, t)$ тождественно равна нулю. Полная энергия $E(t)$ возмущенной идеальной, сжимаемой, акустической среды, находящейся между

подвижной границей $R(t)$ и волной возмущения $r_3(t)$ для $\nu = 3$ будет иметь вид [42, с. 249]

$$E(t) = 4\pi \int_{R(t)}^{r_3(t)} \left(\rho_0 \frac{\nu^2}{2} + \beta \frac{P^2}{2} \right) r^2 dr, \quad \beta = \frac{1}{\rho_0 a_0^2}.$$

Продифференцируем $E(t)$ по t :

$$\frac{dE(t)}{dt} = 4\pi \rho_0 \left[\frac{\nu^2(r, t)}{2} + \frac{P^2(r, t)}{2\rho_0^2 a_0^2} \right] r^2 \frac{dr}{dt} \Big|_{R(t)}^{r_3(t)} + 4\pi \rho_0 \int_{R(t)}^{r_3(t)} \left(\nu \nu_t + \frac{P P_t}{\rho_0^2 a_0^2} \right) r^2 dr, \quad (3.45)$$

подчеркнутый член равен нулю ввиду (3.44): $P = \rho_0 \psi_t$, $\nu = -\psi_r$ выражение под интегралом непрерывно на отрезке $R(t) \leq r \leq r_3(t)$ при $t \geq 0$, так как $\psi(r, t)$ удовлетворяет условию (1) теоремы 1.

Интегрируем по частям первый интеграл в (3.45)

$$4\pi \rho_0 \int_{R(t)}^{r_3(t)} r^2 \psi_r \psi_{rt} dr = 4\pi \rho_0 \left\{ \left[\psi_r \psi_t r^2 \right]_{R(t)}^{r_3(t)} - \int_{R(t)}^{r_3(t)} \psi_t (2r \psi_r + r^2 \psi_{rr}) dr \right\},$$

подчеркнутый член равен нулю согласно (3.44). Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi \rho_0 \int_{R(t)}^{r_3(t)} \frac{r^2}{a_0^2} \psi_t (\psi_{tt} - a_0^2 \psi_{rr} - 2r^{-1} \psi_r) dr = 0$$

согласно (3.43). То есть $E(t) = \text{const}$, $E(t) = E(0)$, так как $\psi_r(r, 0) = \psi_t(r, 0) = 0$.

$$E(t) = E(0) = 4\pi \rho_0 \int_{R(t)}^{r_3(t)} \left[\frac{\psi_r^2(r, t)}{2} + \frac{1}{2a_0^2} \psi_t^2(r, t) \right] r^2 dr = 0.$$

Этот интеграл равен нулю и, поскольку ρ_0 и a_0 положительны, это возможно при $\psi_r(r, t) \equiv 0$, $\psi_t(r, t) \equiv 0$. Откуда следует тождество $\psi(r, t) = \text{const} = c$. Используя (3.44), находим $C = 0$, тем самым $\psi(r, t) \equiv 0$. Единственность решения доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Два возможных решения (различных) обратной задачи определены на одном и том же интервале $(R(t), r_3(t))$.

Допустим, существуют интервалы $(R_1(t), r_{13}(t))$ и $(R_2(t), r_{23}(t))$. Отметим, что если бы существовало второе решение уравнения (3.37), то оно имело бы вид (3.39)–(3.42). Необходимо учесть, что скорость распространения возмущений постоянна и поэтому $r_{13}(t) = r_{23}(t) = r_3(t)$, а также то, что

$$f_1\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right) = f_2\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right)$$

для обратной задачи по условию.

Запишем соотношение (3.42) в следующем виде:

$$F(R(t)) = R^3(t) - R(t) \cdot q_1 - q_2,$$

$$q_1 = \left\{ \frac{3r_1}{a_0 \rho_0} \left[\int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a_0}\right) dt \right]_{r=R(t)} \right\},$$

$$q_2 = \left\{ \frac{3r_1}{\rho_0} \left[\int_0^t \int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a_0}\right) dt dt \right]_{r=R(t)} + r_0^3 \right\}.$$

Если функция f представлена полиномом Лагранжа степени m , то

$$q_1 = \left\{ \frac{3r_1}{a_0 \rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right\}, \quad q_2 = \left\{ \frac{3r_1}{\rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} \xi^{m+2} + r_0^3 \right\}, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}.$$

Так как

$$\left[\frac{r_1}{r} \int_0^t f\left(t - \frac{r - r_0}{a_0}\right) dt \right]_{r=R(t)} = \int_0^t P(r, t) dt \Big|_{r=R(t)} > 0$$

для расширяющейся полости, то [43, с. 77]

$$Q = q_1^3/27 + q_2^2/4 > 0$$

и кубическое уравнение имеет один вещественный корень, который соответствует физике рассматриваемого явления, и два мнимых сопряженных.

Известно [39, 44], что

$$R_{n+1}(t) = R_n(t) - F(R_n(t)) / F'_R(R_n(t)), \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

если F'_R и F''_{RR} существуют и сохраняют постоянные знаки в рассматриваемом интервале $r_0 \leq R(t) \leq R_{\max}$, $R_{\max} < r_1$, содержащем корень $R(t)$, то итерационный процесс сходится $R(t)$. Отметим, что $F(R(t))$ – вещественная функция вещественного аргумента $R(t)$.

$$\text{а) } R_{1n+1}(t) = R_{1n}(t) - \frac{R_{1n}^3(t) - R_{1n}(t)q_1(R_{2n}(t)) - q_2(R_{2n}(t))}{3R_{1n}^2(t) + R_{1n}(t) \left\{ \frac{3r_1}{a_0 \rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[t - \frac{R_{1n}(t) - r_0}{a_0} \right]^m \left(\frac{1}{a_0} \right) \right\}},$$

$$\text{б) } R_{2n+1}(t) = R_{2n}(t) - \frac{R_{2n}^3(t) - R_{2n}(t)q_1(R_{2n}(t)) - q_2(R_{2n}(t))}{3R_{2n}^2(t) + R_{2n}(t) \left\{ \frac{3r_1}{a_0 \rho_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[t - \frac{R_{2n}(t) - r_0}{a_0} \right]^m \left(\frac{1}{a_0} \right) \right\}}.$$

Первое приближение: $n = 0$, принимаем за $R_{10}(t) = r_0$; $R_{20}(t) = r_0$, тогда правые части а) и б) равны, значит равны $R_{11}(t) = R_{21}(t)$.

Второе приближение: $n = 1$; $R_{12}(t) = R_{22}(t)$, поскольку равны правые части а) и б), так как $R_{11}(t) = R_{21}(t)$.

Продолжая таким образом, получим: $n = n - 1$, $R_{1n-1}(t) = R_{2n-1}(t)$, так как правые части а) и б) равны, поскольку $R_{1n-2}(t) = R_{2n-2}(t)$, $n = n$, $R_{1n}(t) = R_{2n}(t) = R(t)$, так как правые части а) и б) равны, поскольку $R_{1n-1}(t) = R_{2n-1}(t)$.

Таким образом, доказана единственность решения обратной задачи. Покажем, что решения (3.39)–(3.42) обратной задачи устойчивы.

Теорема 2. Каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε , найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0)$, что всякие два решения уравнения (3.37) $\varphi_1(r, t)$, $\varphi_2(r, t)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться между собой меньше, чем на ε :

$$|\varphi_1(r, t) - \varphi_2(r, t)| < \varepsilon, \quad (0 \leq t \leq t_0),$$

если только дополнительные условия отличаются друг от друга меньше, чем на δ :

$$|\rho_0 \varphi_{1t} - \rho_0 \varphi_{2t}| < \delta.$$

Рассмотрим устойчивость решений, когда заданы условия в точке r_1 (обратная задача):

$$\rho_0 \varphi_{1t}(r_1, t) = P_1(r_1, t) = f_1 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right),$$

$$\rho_0 \varphi_{2t}(r_1, t) = P_2(r_1, t) = f_2 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right),$$

$$\begin{aligned} & \left| \rho_0 \varphi_{1t}(r_1, t) - \rho_0 \varphi_{2t}(r_1, t) \right| < \delta, \\ & \left| f_1 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) - f_2 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \right| < \delta. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Учитывая, что функции $\varphi_1(r, t)$, $\varphi_2(r, t)$ связаны со своими начальными и граничными значениями формулами (3.39)–(3.42) так, что

$$\left| \rho_0 \varphi_{1t}(r_1, t) - \rho_0 \varphi_{2t}(r_1, t) \right| \leq \left| \frac{r_1}{r} \left[f_1 \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) - f_2 \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) \right] \right|,$$

переходя к $r = r_1$ и с учетом (3.46), получаем

$$\left| f_1 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) - f_2 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \right| \leq \delta,$$

что и доказывает наше утверждение, если положить $\delta = \varepsilon$. Решения обратной задачи устойчивы. Доказав, что решение задачи существует, единственно и устойчиво, тем самым обосновывается корректность решаемых обратных задач.

3.5. Точные решения волнового уравнения при наличии двух движущихся границ с произвольной скоростью

Поршень расширяется с произвольной скоростью в сосуде, заполненном идеальной сжимаемой, покоящейся при $t < 0$ жидкостью [7]. Стенки поршня и сосуда считаются непроницаемыми. Ударная волна, возникающая при движении поршня, достигнув преграды – стенок сосуда, и приводя их в движение с произвольной скоростью, отражается. Затем, достигая поверхности движущегося поршня, снова отражается и так далее. В моменты достижения ударными волнами движущихся границ или любых других точек на них скачком изменяются функции скорости v , давления P и плотности ρ . Для одномерных случаев движение жидкости описывается системой (1.1)–(1.3), которая для потенциальных движений приводится к уравнению (1.58). При $\rho \approx \rho_0$ плотность среды в невозмущенном состоянии, потенциал скорости φ в интеграле Коши-Лагранжа для случая сферической симметрии можно определять из (3.1), пренебрегая в нем членами второго и третьего порядков малости, то есть из линейного волнового уравнения (3.5).

Известны условия на подвижных поверхностях поршня

$$R_1(t) = F_1(t) \quad (3.47)$$

и преграды

$$R_2(t) = F_2(t), \quad (3.48)$$

или условия в точках, находящихся внутри сосуда,

$$P(r_1, t) = f_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) \sigma_0(t - \alpha_{k+1}) \right\}, \quad (3.49)$$

$$P(r_2, t) = f_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} B_m^k (t - \beta_k)^m \sigma_0(t - \beta_k) - \sum_{m=0}^{\infty} B_m^k (t - \beta_k)^m \sigma_0(t - \beta_k) \sigma_0(t - \beta_{k+1}) \right\}. \quad (3.50)$$

Здесь $\alpha_1 = \frac{r_1 - r_0}{a_0}$, $\beta_1 = \frac{r_2 - r_0}{a_0}$, σ_0 – единичная разрывная функция нуле-

вого порядка; A_m^k , B_m^k – коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа степени m (m – определяет число точных значений решения и может быть сколь угодно большим); α_k , β_k – характеризуют моменты появления ударных волн и могут быть точно вычислены [2, 17].

Решение сформулированной задачи единственно и устойчиво [41]. Если известны условия (3.47), (3.48), то это прямая задача, если только (3.49), (3.50) – обратная. Сформулированная задача обобщает широкий класс физических явлений. Она может служить математической моделью электрического разряда, лазерного импульса взрыва взрывчатых веществ или газовых смесей в замкнутых объемах жидкости. При больших перемещениях поршня и преграды условие $\rho \approx \rho_0$ может выполняться при истечении из объема, когда $\rho \neq \rho_0$ настолько, что применяемое волновое уравнение еще не дает больших погрешностей, а также в некоторых других случаях.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к волновому уравнению (3.5), с учетом нулевых начальных условий получаем операторное уравнение, решением которого будет

$$\varphi_1 = r \varphi, \quad \frac{\Phi(r, s)}{r} = \bar{\varphi},$$

$$\varphi(r, s) = c_1(s) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right), \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}\bar{P}(r, s) &= \rho_0 [s \bar{\varphi} - \varphi(r, 0)] = \\ &= \rho_0 \frac{s}{r} \left[c_1(s) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right) \right],\end{aligned}\quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}\bar{v}(r, s) &= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial r} = c_1(s) \frac{1}{r a_0} \left(s + \frac{a_0}{r} \right) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right) - \\ &- c_2(s) \frac{1}{r a_0} \left(s - \frac{a_0}{r} \right) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right),\end{aligned}\quad (3.53)$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\Phi(r, s)}{r} = \frac{1}{r} \left[c_1(s) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right) \right]. \quad (3.54)$$

С учетом (3.49), (3.50) и соотношений

$$\begin{aligned}\bar{f}_1(s) &= \rho_0 \frac{s}{r_1} \left[c_1(s) \exp\left(-s \frac{r_1}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(s \frac{r_1}{a_0}\right) \right], \\ \bar{f}_2(s) &= \rho_0 \frac{s}{r_2} \left[c_1(s) \exp\left(-s \frac{r_2}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(s \frac{r_2}{a_0}\right) \right],\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}c_1(s) &= \frac{\bar{f}_1(s) r_1}{\rho_0 s} \exp\left(s \frac{r_1}{a_0}\right) - \left[\frac{\bar{f}_1(s) r_1}{\rho_0 s} \exp\left(s \frac{r_1}{a_0}\right) - \frac{\bar{f}_2(s) r_2}{\rho_0 s} \exp\left(s \frac{r_2}{a_0}\right) \right] \times \\ &\quad \exp\left(2s \frac{r_1}{a_0}\right) \\ &\quad \times \overline{\left[\exp\left(2s \frac{r_1}{a_0}\right) - \exp\left(2s \frac{r_2}{a_0}\right) \right]},\end{aligned}\quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}c_2(s) &= \left[\frac{\bar{f}_1(s) r_1}{\rho_0 s} \exp\left(s \frac{r_1}{a_0}\right) - \frac{\bar{f}_2(s) r_2}{\rho_0 s} \exp\left(s \frac{r_2}{a_0}\right) \right] \times \\ &\quad \times \left[\exp\left(2s \frac{r_1}{a_0}\right) - \exp\left(2s \frac{r_2}{a_0}\right) \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Из (3.52) с учетом (3.55), (3.56) получаем компоненту давления:

$$\begin{aligned} \bar{P}(r, s) \left[\exp\left(2s \frac{r_1}{a_0}\right) - \exp\left(2s \frac{r_2}{a_0}\right) \right] = \\ = -\frac{r_1}{r} \bar{f}_1(s) \exp\left[-s \left(\frac{r-r_1-2r_2}{a_0}\right)\right] + \frac{r_2}{r} \bar{f}_2(s) \exp\left[-s \left(\frac{r-r_2-2r_1}{a_0}\right)\right] + \\ + \frac{r_1}{r} \bar{f}_1(s) \exp\left[s \left(\frac{r+r_1}{a_0}\right)\right] - \frac{r_2}{r} \bar{f}_2(s) \exp\left[s \left(\frac{r+r_2}{a_0}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.57)$$

после перехода к оригиналам имеем

$$\begin{aligned} P\left(r, t + \frac{2r_1}{a_0}\right) - P\left(r, t + \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_1(r, t) = -\frac{r_1}{r} f_1\left(t - \frac{r-r_1-2r_2}{a_0}\right) + \\ + \frac{r_2}{r} f_2\left(t - \frac{r-r_2-2r_1}{a_0}\right) + \frac{r_1}{r} f_1\left(t + \frac{r+r_1}{a_0}\right) - \frac{r_2}{r} f_2\left(t + \frac{r+r_2}{a_0}\right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Проведем проверку, для чего из всех аргументов соотношения (3.58) вычтем величину $2r_2/a_0$, тогда эту формулу можно представить в виде

$$\begin{aligned} P\left(r, t + \frac{2r_1-2r_2}{a_0}\right) - P(r, t) = \\ = -\frac{r_1}{r} f_1\left(t - \frac{r-r_1-2r_2}{a_0} - \frac{2r_2}{a_0}\right) + \frac{r_2}{r} f_2\left(t - \frac{r-2r_1}{a_0} - \frac{r_2}{a_0}\right) + \\ + \frac{r_1}{r} f_1\left(t + \frac{r+r_1}{a_0} - \frac{2r_2}{a_0}\right) - \frac{r_2}{r} f_2\left(t + \frac{r}{a_0} - \frac{r_2}{a_0}\right). \end{aligned}$$

При $r_2 \rightarrow \infty$ члены, содержащие r_2 в аргументе, исчезают, и таким образом приходим к соотношению (3.9).

Из (3.53) с учетом (3.55) и (3.56) получаем

$$\begin{aligned} \bar{v}(r, s) \left[\exp\left(2s \frac{r_1}{a_0}\right) - \exp\left(2s \frac{r_2}{a_0}\right) \right] = -\frac{\left(s + \frac{a_0}{r}\right) r_1}{r a_0 \rho_0 s} \bar{f}_1(s) \times \\ \times \exp\left[-s \left(\frac{r-r_1-2r_2}{a_0}\right)\right] + \frac{\left(s + \frac{a_0}{r}\right) r_2}{r a_0 \rho_0 s} \bar{f}_2(s) \exp\left[-s \left(\frac{r-r_2-2r_1}{a_0}\right)\right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{\left(\frac{s-a_0}{r}\right)r_1}{r a_0 \rho_0 s} \bar{f}_1(s) \exp\left[s\left(\frac{r+r_1}{a_0}\right)\right] + \frac{\left(\frac{s-a_0}{r}\right)r_2}{r a_0 \rho_0 s} \bar{f}_2(s) \exp\left[s\left(\frac{r+r_2}{a_0}\right)\right], \quad (3.59)$$

после перехода к оригиналам имеем

$$\begin{aligned} & \left[v\left(r, t + \frac{2r_1}{a_0}\right) - v\left(r, t + \frac{2r_2}{a_0}\right) \right] \rho_0 r^2 = \Phi_2(r, t) = \\ & = -r_1 \left[\frac{r}{a_0} f_1\left(t - \frac{r-r_1-2r_2}{a_0}\right) + \int_0^t f_1\left(t - \frac{r-r_1-2r_2}{a_0}\right) dt \right] + \\ & + r_2 \left[\frac{r}{a_0} f_2\left(t - \frac{r-r_2-2r_1}{a_0}\right) + \int_0^t f_2\left(t - \frac{r-r_2-2r_1}{a_0}\right) dt \right] - \\ & - r_1 \left[\frac{r}{a_0} f_1\left(t + \frac{r+r_1}{a_0}\right) - \int_0^t f_1\left(t + \frac{r+r_1}{a_0}\right) dt \right] + \\ & + r_2 \left[\frac{r}{a_0} f_2\left(t + \frac{r+r_2}{a_0}\right) - \int_0^t f_2\left(t + \frac{r+r_2}{a_0}\right) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Отметим симметричность конструкции полученных соотношений (3.57)–(3.60). Для решения обратных задач понадобится соотношение, которое получаем из (3.59), (3.60):

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_0}{3} \left\{ R^3 \left(t + \frac{2r_1}{a_0} \right) - R^3 \left(t + \frac{2r_2}{a_0} \right) - r_{0,00}^3 \left[\sigma_0 \left(t + \frac{2r_1}{a_0} \right) - \sigma_0 \left(t + \frac{2r_2}{a_0} \right) \right] \right\} = \\ & = \left| -r_1 \left\{ \frac{r}{a_0} \int_0^t f_1\left(t - \frac{r-r_1-2r_2}{a_0}\right) dt + \int_0^t \int_0^t f_1\left(t - \frac{r-r_1-2r_2}{a_0}\right) dt dt \right\} + \right. \\ & + r_2 \left\{ \frac{r}{a_0} \int_0^t f_2\left(t - \frac{r-r_2-2r_1}{a_0}\right) dt + \int_0^t \int_0^t f_2\left(t - \frac{r-r_2-2r_1}{a_0}\right) dt dt \right\} - \\ & \left. - r_1 \left\{ \frac{r}{a_0} \int_0^t f_1\left(t + \frac{r+r_1}{a_0}\right) dt - \int_0^t \int_0^t f_1\left(t + \frac{r+r_1}{a_0}\right) dt dt \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$+ r_2 \left\{ \frac{r}{a_0} \int_0^t f_2 \left(t + \frac{r+r_2}{a_0} \right) dt - \int_0^t \int_0^t f_2 \left(t + \frac{r+r_2}{a_0} \right) dt dt \right\} \Bigg|_{r=R_{1,2}(t)}, \quad (3.61)$$

где $r_{0,00}$ – начальные радиусы подвижных границ поршня и преграды – стенок сосуда. Подставляя в (3.61) заданные соотношения для f_1 и f_2 , проведя интегрирование и переходя на подвижную границу $r = R_1(t)$ либо $r = R_2(t)$, получаем зависимости для определения функций $R_{1,2}(t)$, необходимых при реконструкции давления и скорости при решении обратных задач. Определение $R_{1,2}(t)$ производится в той же последовательности, как и по формулам (3.17), (3.18), (3.35), (3.36).

3.6. Дифференцирование и интегрирование разрывных функций с запаздываниями

Рассмотрим вопрос согласования математической записи дополнительного условия [5, 6, 45]. Поскольку в основе подхода лежит использование факта распространения возмущений в сплошных средах с конечной скоростью, который описывается волновым уравнением, необходимо согласовать вид решения с внутренней структурой уравнения. Привычно было бы задавать дополнительные условия в виде $f(r_1, t)$ – аргументы простые. Однако при таком задании получить точное аналитическое решение волнового уравнения с подвижными границами невозможно. Необходимо согласовать математическую запись дополнительных условий со структурой уравнения. Откуда берутся сведения, соображения, которые позволяют это сделать? Известно, что знания алгоритма, последовательности действий недостаточно для получения решения, необходимо знание физической задачи, физики явления, которое описано математической моделью. Мера необходимых сведений различна для различных задач. Для волнового уравнения достаточно факта распространения возмущений в сплошных средах с конечной скоростью, с этим фактом связаны понятия запаздывания и время появления прямых и отраженных волн и вообще сложных аргументов. Поэтому математическая запись дополнительных условий, согласованная таким образом с внутренней структурой волнового уравнения, в самом общем виде будет иметь вид (3.49):

$$f(r_1, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) \sigma_0(t - \alpha_{k+1}) \right\}.$$

Как видим, в этой записи не используются никаких переопределяющих факторов, а только факт появления возмущений (прямых и отраженных волн) в точке, спустя время, необходимое на пробежку волной определенного расстояния.

Отметим, что записать дополнительное условие в виде $f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right)$,

например, для уравнения Лапласа или теплопроводности нельзя – оно будет несогласованным со структурой этих уравнений, которая вышеупомянутый факт распространения возмущений с конечной скоростью не описывает.

Откуда берется представление для $f_{1,2}$ и какие функции можно так представить? Поскольку волновое уравнение описывает факт распространения возмущений с конечной скоростью, то исследуемые функции, например, давление в точке r_1 , должно быть записано с учетом запаздывания – времени пробега волной возмущения расстояния $(r_1 - r_0)$ со скоростью a_0 , то есть $\frac{r_1 - r_0}{a_0} = \alpha_1$ – запаздывание. Это для задачи с одной подвижной границей. Для

задачи с двумя подвижными границами, при этом естественно появятся и отраженные волны, запись $P(r_1, t)$ должна учитывать и время появления в точке r_1 , находящейся между движущимися границами, и отраженных волн. Обозначим эти моменты через α_k . Таким образом, функция f естественным образом разбивается на участки между моментами появления волн в точке r_1 . Каждый участок (если решается обратная задача, то $P(r_{1,2}, t)$ заданы, известны, например, из эксперимента) аппроксимируется своим полиномом Лагранжа с коэффициентами A^k . Каким образом можно записать кусочно-непрерывную функцию с запаздываниями? Это можно сделать следующим образом, если каждый участок ее аппроксимировать своим полиномом

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} A_m^1 (t - \alpha_1)^m \sigma_0(t - \alpha_1) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^1 (t - \alpha_1)^m \sigma_0(t - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_2) + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^2 (t - \alpha_2)^m \sigma_0(t - \alpha_2) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^2 (t - \alpha_2)^m \sigma_0(t - \alpha_2) \sigma_0(t - \alpha_3) + \dots = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) \sigma_0(t - \alpha_{k+1}) \right\}. \end{aligned}$$

Для точки r_2 аналогично $P(r_2, t) = f_2(B, \beta_k)$. α_k, β_k – всегда могут быть вычислены согласно методике, описанной в гл. 2, раздел 2.2. Отметим, что подчеркнутая часть по достижении момента $t = a_2$ равна первому члену и будет сокращаться, а записываться будет второй участок, описываемый коэффициентами A^2 и т.д. Так представлять можно кусочно-непрерывные функции. В принципе функции $P(r_{1,2}, t) = f_{1,2}$ могут быть аппроксимированы различными способами (удобными для каждого конкретного случая) как кусочно-непрерывные функции между моментами α_k, β_k появления волн. При решении обратных задач, заданные функции $f_{1,2}$, например, могут быть записаны по

участкам не только полиномом Лагранжа, но и другими, в том числе элементарными функциями $\sin$, $\cos$, $\exp$ и т.д. Подобная запись позволяет естественным образом определять величину скачков исследуемых функций при вычислениях по соответствующим формулам (см. 3.7, 4.2), что до настоящего времени являлось проблемой [24, с. 110].

Подобная запись удобна при вычислениях, так как при этом в расчетах для конкретного значения времени t участвует только не большая часть точной формулы, легко определяемая по величинам α_k , β_k . Несколько увеличенный размер окончательных формул, получающихся из-за такой записи, полностью компенсируется удобством при вычислениях.

Интегрирование и дифференцирование разрывных функций с запаздываниями

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(t, \tau) &= f(t, \tau) \sigma_0(t - \tau), \\ f'_t(t, \tau) &= f'_t(t, \tau) \sigma_0(t - \tau) + f(\tau, \tau) \sigma_1(t - \tau), \end{aligned} \quad (3.62)$$

где τ – параметр, $\sigma_1(t - \tau)$ – функция Дирака и при $t = \tau$ $\sigma_1 \rightarrow \infty$, а при $t \neq \tau$ $\sigma_1 = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} f(t, \tau) \sigma_1(t - \tau) &= f(\tau, \tau) \sigma_1(t - \tau), \\ \int_0^t f(\tau, \tau) \sigma_1(t - \tau) dt &= f(\tau, \tau) \sigma_0(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Проинтегрируем соотношение (3.62)

$$\begin{aligned} \int_0^t f'_t(t, \tau) dt &= \int_0^t f'_t(t, \tau) \sigma_0(t - \tau) dt + \int_0^t f(\tau, \tau) \sigma_1(t - \tau) dt, \\ 1) \int_0^t f'_t(t, \tau) dt &= f(t, \tau) - f(0, \tau), \\ 2) \int_0^t f(\tau, \tau) \sigma_1(t - \tau) dt &= f(\tau, \tau) \sigma_0(t - \tau), \\ 3) \int_0^t f'_t(t, \tau) \sigma_0(t - \tau) dt &= \int_0^t d f(t, \tau) \sigma_0(t - \tau) dt = \\ &= f(t, \tau) \sigma_0(t - \tau) \Big|_0^t - \int_0^t f(t, \tau) d \sigma_0(t - \tau) = f(t, \tau) - f(\tau, \tau) \sigma_0(t - \tau), \end{aligned}$$

поскольку $d \sigma_0(t - \tau) = \sigma_1(t - \tau) dt$.

С учетом 1)–3) окончательно получаем

$$\int_0^t f'_t(t, \tau) \sigma_0(t - \tau) d\tau = f(t, \tau) \sigma_0(t - \tau) - f(\tau, \tau) \sigma_0(t - \tau). \quad (3.64)$$

Полезна будет и формула

$$\begin{aligned} & \int_0^t f'_t(t - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_2) d\tau = \\ & = f(t - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_2) - f(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_2). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Соотношения (3.64), (3.65) легко проверяются дифференцированием.

Подставляя в (3.58), (3.60), (3.61) вид функций $f_{1,2}$, из (3.49), (3.50) и с учетом дифференцирования и интегрирования разрывных функций с запаздываниями (3.64), (3.65), будем иметь для компоненты давления и скорости

$$\begin{aligned} & P\left(r, t + \frac{2r_1}{a_0}\right) - P\left(r, t + \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_1(r, t) = \\ & = -\frac{r_1}{r} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_{11}^m \sigma_0(t_{11}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_{11}^m \sigma_0(t_{11}) \sigma_0(t_{12}) \right\} + \\ & + \frac{r_2}{r} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_{21}^m \sigma_0(t_{21}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_{21}^m \sigma_0(t_{21}) \sigma_0(t_{22}) \right\} + \\ & + \frac{r_1}{r} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_{31}^m \sigma_0(t_{31}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_{31}^m \sigma_0(t_{31}) \sigma_0(t_{32}) \right\} - \\ & - \frac{r_2}{r} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_{41}^m \sigma_0(t_{41}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_{41}^m \sigma_0(t_{41}) \sigma_0(t_{42}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[v \left(r, t + \frac{2r_1}{a_0} \right) - v \left(r, t + \frac{2r_2}{a_0} \right) \right] \rho_0 r^2 = \Phi_2(r, t) = \\
 & = -r_1 \left\{ \frac{r}{a_0} \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} A_m^k t_{11}^m \sigma_0(t_{11}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} A_m^k t_{11}^m \sigma_0(t_{11}) \sigma_0(t_{12}) \right] + \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{11}^{m+1} \sigma_0(t_{11}) - \right. \\
 & - \left. \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{11}^{m+1} \sigma_0(t_{11}) \sigma_0(t_{12}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(t_{12}) \right\} + \\
 & + r_2 \left\{ \frac{r}{a_0} \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} B_m^k t_{21}^m \sigma_0(t_{21}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} B_m^k t_{21}^m \sigma_0(t_{21}) \sigma_0(t_{22}) \right] + \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{21}^{m+1} \sigma_0(t_{21}) - \right. \\
 & - \left. \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{21}^{m+1} \sigma_0(t_{21}) \sigma_0(t_{22}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(t_{22}) \right\} - \\
 & - r_1 \left\{ \frac{r}{a_0} \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} A_m^k t_{31}^m \sigma_0(t_{31}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} A_m^k t_{31}^m \sigma_0(t_{31}) \sigma_0(t_{32}) \right] - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{31}^{m+1} \sigma_0(t_{31}) + \right. \\
 & + \left. \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{31}^{m+1} \sigma_0(t_{31}) \sigma_0(t_{32}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(t_{32}) \right\} + \\
 & + r_2 \left\{ \frac{r}{a_0} \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} B_m^k t_{41}^m \sigma_0(t_{41}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} B_m^k t_{41}^m \sigma_0(t_{41}) \sigma_0(t_{42}) \right] - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{41}^{m+1} \sigma_0(t_{41}) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{41}^{m+1} \sigma_0(t_{41}) \sigma_0(t_{42}) - \right. \\
 & \left. - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(t_{42}) \right].
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= t - \frac{r - r_1 - 2r_2}{a_0} - \alpha_k, \quad t_{12} = t - \frac{r - r_1 - 2r_2}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\
 t_{21} &= t - \frac{r - r_2 - 2r_1}{a_0} - \beta_k, \quad t_{22} = t - \frac{r - r_2 - 2r_1}{a_0} - \beta_{k+1}, \\
 t_{31} &= t + \frac{r + r_1}{a_0} - \alpha_k, \quad t_{32} = t + \frac{r + r_1}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\
 t_{41} &= t + \frac{r + r_2}{a_0} - \beta_k, \quad t_{42} = t + \frac{r + r_2}{a_0} - \beta_{k+1}.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

Компонента давления и скорость на подвижных границах $r = R_{1,2}(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 & P\left(R_{1,2}(t), t + \frac{2r_1}{a_0}\right) - P\left(R_{1,2}(t), t + \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_1(R_{1,2}(t), t), \\
 & \left[v\left(R_{1,2}(t), t + \frac{2r_1}{a_0}\right) - v\left(R_{1,2}(t), t + \frac{2r_2}{a_0}\right) \right] \rho_0 R_{1,2}^2(t) = \Phi_2(R_{1,2}(t), t), \\
 & \left\{ R_{1,2}^3\left(t + \frac{2r_1}{a_0}\right) - R_{1,2}^3\left(t + \frac{2r_2}{a_0}\right) - r_{0,00}^3 \left[\sigma_0\left(t + \frac{2r_1}{a_0}\right) - \sigma_0\left(t + \frac{2r_2}{a_0}\right) \right] \right\} \frac{\rho_0}{3} = \\
 & = -r_1 \left\{ \frac{R_{1,2}(t)}{a_0} \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{11}^{m+1} \sigma_0(t_{11}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{11}^{m+1} \sigma_0(t_{11}) \sigma_0(t_{12}) + \right. \right.
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(t_{12}) \Bigg] + \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{11}^{m+2} \sigma_0(t_{11}) - \\
 & - \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{11}^{m+2} \sigma_0(t_{11}) \sigma_0(t_{12}) - \right. \\
 & - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+2} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(t_{12}) - \\
 & \left. - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) t_{12} \sigma_0(t_{12}) \right] \Bigg\} + \\
 & + r_2 \left\{ \frac{R_{1,2}(t)}{a_0} \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{21}^{m+1} \sigma_0(t_{21}) - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{21}^{m+1} \sigma_0(t_{21}) \sigma_0(t_{22}) + \right. \right. \\
 & + \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(t_{22}) \Bigg] + \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{21}^{m+2} \sigma_0(t_{21}) - \\
 & - \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{21}^{m+2} \sigma_0(t_{21}) \sigma_0(t_{22}) - \right. \\
 & - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{(m+1)(m+2)} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+2} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(t_{22}) - \\
 & \left. \left. - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} t_{22} \sigma_0(t_{22}) \right] \right\} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -r_1 \left\{ \frac{R_{1,2}(t)}{a_0} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{31}^{m+1} \sigma_0(t_{31}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_{31}^{m+1} \sigma_0(t_{31}) \sigma_0(t_{32}) + \right. \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(t_{32}) \left. \right] - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{31}^{m+2} \sigma_0(t_{31}) + \\
 & + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{31}^{m+2} \sigma_0(t_{31}) \sigma_0(t_{32}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+2} \sigma_0(t_{32}) - \right. \\
 & \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} t_{32} \sigma_0(t_{32}) \right] \right\} + \\
 & + r_2 \left\{ \frac{R_{1,2}(t)}{a_0} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{41}^{m+1} \sigma_0(t_{41}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_{41}^{m+1} \sigma_0(t_{42}) + \right. \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(t_{42}) \left. \right] - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{41}^{m+2} \sigma_0(t_{41}) + \\
 & + \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_m^k}{(m+1)(m+2)} t_{41}^{m+2} \sigma_0(t_{41}) \sigma_0(t_{42}) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_m^k}{(m+1)(m+2)} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+2} \sigma_0(t_{42}) - \right. \\
 & \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} t_{42} \sigma_0(t_{42}) \right] \right\}. \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= t - \frac{R_{1,2}(t) - r_1 - 2r_2}{a_0} - \alpha_k, \quad t_{12} = t - \frac{R_{1,2}(t) - r_1 - 2r_2}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\
 t_{21} &= t - \frac{R_{1,2}(t) - r_2 - 2r_1}{a_0} - \beta_k, \quad t_{22} = t - \frac{R_{1,2}(t) - r_2 - 2r_1}{a_0} - \beta_{k+1}, \\
 t_{31} &= t + \frac{R_{1,2}(t) + r_1}{a_0} - \alpha_k, \quad t_{32} = t + \frac{R_{1,2}(t) + r_1}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\
 t_{41} &= t + \frac{R_{1,2}(t) + r_2}{a_0} - \beta_k, \quad t_{42} = t + \frac{R_{1,2}(t) + r_2}{a_0} - \beta_{k+1}.
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

В формулах (3.67), (3.68), (3.70), (3.71) обозначено

$$\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \dots \right\}.$$

Кубическое уравнение (3.71) относительно $R_{1,2}(t)$ решается аналогично, как и упомянутые ранее (3.17), (3.18), (3.35), (3.36) и т.д.

Как видим, расчет гидродинамических характеристик сводится к элементарным вычислениям запаздываний типа (3.69) и (3.72).

Ударная волна, достигнув второй границы, приводит ее в движение. Расчеты показали, что движение ее даже с небольшими скоростями, примерно до десяти метров в секунду, для $v = 3$ вызывает большие отрицательные давления. Капельная жидкость кавитирует. Известно [24, 46], что вода при определенных условиях (чистота жидкости и поверхности преграды, степень удаления газов и т. д.) может выдерживать отрицательные давления всего $8 \div 37$ кгс/см². С началом кавитации волновые явления будут описываться уже другими уравнениями.

3.7. Точные решения волнового уравнения при наличии одной неподвижной границы и другой, движущейся с произвольной скоростью

Сосуд заполнен водой, изменение радиуса одной подвижной границы-полости происходит по закону [5, 7]:

$$R_1(t) = F(t), \tag{3.73}$$

где F – произвольная функция. Вторая граница-преграда – стенки оболочки неподвижна

$$r_2 = R_2 = \text{const}, \quad v(R_2) = 0. \quad (3.74)$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Давление на вторую границу обозначим для общего случая в следующем виде:

$$\begin{aligned} P(R_2, t) = f_2(t) = & \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) - \\ & - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) \sigma_0(t - \alpha_{k+1}). \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\text{Здесь } \sum_{m=0}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \dots \right\}.$$

Как и выше, применяя преобразование Лапласа к волновому уравнению (3.5), для $v = 3$ получаем операторное уравнение. Решая операторное уравнение, находим неизвестные коэффициенты c_1 и c_2 :

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_2(s) &= \rho_0 \frac{s}{r_2} \left[c_1(s) \exp\left(-s \frac{r_2}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(s \frac{r_2}{a_0}\right) \right], \\ \bar{v}(r_2, s) &= 0 = c_1(s) \frac{1}{r_2 a_0} \exp\left(-s \frac{r_2}{a_0}\right) \left(s + \frac{a_0}{r_2}\right) - \\ &\quad - c_2(s) \frac{1}{r_2 a_0} \left(s - \frac{a_0}{r_2}\right) \exp\left(s \frac{r_2}{a_0}\right), \\ c_1(s) &= \bar{f}_2(s) \frac{r_2}{2\rho_0 s^2} \left(s - \frac{a_0}{r_2}\right) \exp\left(s \frac{r_2}{a_0}\right), \\ c_2(s) &= \bar{f}_2(s) \frac{r_2}{2\rho_0 s^2} \left(s + \frac{a_0}{r_2}\right) \exp\left(-s \frac{r_2}{a_0}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

Соотношения для скорости и давления в любой точке имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{v}(r, s) = & \frac{\bar{f}_2(s) r_2 \left(s + \frac{a_0}{r} \right) \left(s - \frac{a_0}{r_2} \right)}{2 \rho_0 s^2 r a_0} \exp \left[-s \left(\frac{r - r_2}{a_0} \right) \right] - \\ & - \frac{\bar{f}_2(s) r_2 \left(s - \frac{a_0}{r} \right) \left(s + \frac{a_0}{r_2} \right)}{2 \rho_0 s^2 r a_0} \exp \left[s \left(\frac{r - r_2}{a_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(r, s) = & \frac{1}{r} \left\{ \bar{f}_2(s) \frac{r_2}{2s} \left(s - \frac{a_0}{r_2} \right) \exp \left(-s \frac{r - r_2}{a_0} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{f}_2(s) \frac{r_2}{2s} \left(s + \frac{a_0}{r_2} \right) \exp \left(s \frac{r - r_2}{a_0} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

и после перехода к оригиналам получаем

$$\begin{aligned} v(r, t) 2 \rho_0 r^2 / R_2 = & \frac{r}{a_0} \{ f(t_1) - f(t_2) \} + \left(1 - \frac{r}{R_2} \right) \left\{ \int_0^t f(t_1) dt + \int_0^t f(t_2) dt \right\} - \\ & - \frac{a_0}{R_2} \left\{ \int_0^t \int_0^t f(t_1) dt dt - \int_0^t \int_0^t f(t_2) dt dt \right\} = \Phi_2(r, t), \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$P(r, t) = \frac{R_2}{2r} \left\{ f(t_1) - \frac{a_0}{R_2} \int_0^t f(t_1) dt \right\} + \frac{R_2}{2r} \left\{ f(t_2) + \frac{a_0}{R_2} \int_0^t f(t_2) dt \right\} = \Phi_1(r, t), \quad (3.80)$$

$$\text{где } t_1 = t - \frac{r - R_2}{a_0}, \quad t_2 = t + \frac{r - R_2}{a_0},$$

на подвижной границе $r = R(t)$

$$\begin{aligned} P(R(t), t) = & \Phi_1(R(t), t) - 0,5 \rho_0 v^2(R(t), t), \\ v(R(t), t) = & \Phi_2(R(t), t). \end{aligned} \quad (3.81)$$

При решении обратных задач понадобится знание функции $R(t)$, которую можно получить из следующего "кубического" уравнения, если у проинтегрировать (3.77), (3.79):

$$\begin{aligned}
 [R_1^3(t) - r_0^3] 2\rho_0/3R_2 = & \left| \frac{r}{a_0} \left\{ \int_0^t f(t_1) dt - \int_0^t f(t_2) dt \right\} + \right. \\
 & + \left(1 - \frac{r}{R_2} \right) \left\{ \int_0^t \int_0^t f(t_1) dt dt + \int_0^t \int_0^t f(t_2) dt dt \right\} - \\
 & \left. - \frac{a_0}{R_2} \left\{ \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t_1) dt dt dt - \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t_2) dt dt dt \right\} \right|_{r=R(t)}. \quad (3.82)
 \end{aligned}$$

Подставляя в (3.79), (3.80), (3.81), (3.82) вид функции f из (3.75) и с учетом дифференцирования и интегрирования разрывных функций с запаздыванием (3.64), (3.65) будем иметь для компоненты давления и скорости

$$\begin{aligned}
 v(r, t) \frac{2\rho_0 r a_0}{r_2} = & \Phi_1(r, t) = \\
 = & \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right)^m \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right) - \right. \right. \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right)^m \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r - r_2}{a_0} \right) \Big] - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right)^m \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right)^m \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r - r_2}{a_0} \right) \right] \Big\} + \\
 & + \left(\frac{a_0}{r} - \frac{a_0}{r_2} \right) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r - r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r - r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r - r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r - r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r - r_2}{a_0} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) \Bigg] + \\
 & + \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \\
 & - \left[\sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) \right] \Bigg\} - \\
 & - \frac{a_0^2}{r r_2} \left\{ \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+2} \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+2} \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \\
 & - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+2} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \\
 & \left. - \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) \right\} - \\
 & - \left\{ \sum_{\substack{m=0 \\ k=1}}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+2} \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+2} \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+2} \sigma_0 (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0 (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \times \\
 & \quad \left. \times \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) \right] \Bigg\}, \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } \sum_{m=0}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \dots \right\}.$$

$$\begin{aligned}
 P(r, t) = & \frac{r_2}{2r} \left\{ \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right)^m \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \right. \right. \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right)^m \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \\
 & - \frac{a_0}{r_2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k - \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) + \\
 & \left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0 (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} - \frac{r-r_2}{a_0} \right) \right] \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} A_m^k \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right)^m \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) + \right. \\
 & + \frac{a_0}{r_2} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right) - \right. \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \alpha_k + \frac{r-r_2}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) + \\
 & \left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0 (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0 \left(t - \alpha_{k+1} + \frac{r-r_2}{a_0} \right) \right] \right\} = \\
 & = \Phi_2(r, t). \tag{3.84}
 \end{aligned}$$

Компоненту давления и скорость на поршне записываем в виде

$$P(R(t), t) = \Phi_2(R(t), t), \tag{3.85}$$

$$v(R(t), t) = \Phi_1(R(t), t). \tag{3.86}$$

Как видим, расчет сводится к вычислению элементарных величин запаздывания.

Соотношения (3.77)–(3.80), (3.81)–(3.86), как и (3.57)–(3.61), (3.67)–(3.70), являются точными аналитическими решениями уравнения (3.5) с граничными условиями, удовлетворяющимися на подвижных границах. Подстановка этих решений в уравнение (3.5) превращает его левую часть в нуль. Решения универсальны: они позволяют решать прямые и обратные задачи, а величины начальных радиусов могут быть произвольными.

В соответствии с (3.79)–(3.86) проведем расчет гидродинамических характеристик при

$$R(t) = 0,5 \cdot 10^{-3} + \frac{200}{0,005 \cdot 10^6} [1 - \exp(-0,005 \cdot 10^6 t)], \text{ м,}$$

$$\rho_0 = 102 \text{ кгс}^2/\text{м}^4, \quad R_2 = 50 \text{ мм}, \quad a_0 = 1500 \text{ м/с}, \quad m \text{ равно } 0, 1, 2, 3,$$

что соответствует четырем точным значениям решения и достаточно для практического расчета.

Последовательность расчета следующая [7]:

1. По формулам (2.16), (2.17) определяем моменты появления ударных волн в точках

$$\begin{array}{llll} r_1 = 20 \text{ мм}; & \gamma_1 = 13; & \gamma_2 = 53; & \gamma_3 = 65,3212 \text{ мкс}; \\ r_2 = 30 \text{ мм}; & \beta_1 = 19,6; & \beta_2 = 46,3; & \beta_3 = 72,00787 \text{ мкс}; \\ r_3 = 50 \text{ мм}; & \alpha_1 = 33; & \alpha_2 = 85,3412; & \alpha_3 = 129,2012 \text{ мкс}. \end{array}$$

2. Задавая несколько значений времени t по формуле (3.83) при $r = R(t)$, приходим к системе четырех алгебраических уравнений относительно A_m^k , решая которую определяем

$$\begin{aligned} A_0^1 &= 27,34298; \quad A_1^1 = 5,018265 \cdot 10^6; \quad A_2^1 = 0,06783747 \cdot 10^{12}; \\ A_3^1 &= 0,0002552448 \cdot 10^{18}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

3. По формуле (3.75) находим давление на преграде $P(R_2, t)$, где A_m^k из (3.87). Из формулы (3.84) определяем давление в точках $r = 20$ мм, $r = 30$ мм. A_m^k определим как (3.87), а по (3.83) – скорости частиц в этих точках.

4. По формуле (3.85) вычисляем компоненту давления на подвижной границе $P(R(t), t)$, A_m^k из (3.87).

Представлены (рис. 3.6 и рис. 3.7) результаты расчетов. Отметим, что давление на преграде (рис. 3.6, кривая 2) приблизительно в три раза больше давления в той же точке $r = 50$ мм (рис. 3.7, кривая 3), если бы преграда отсутствовала. Звездочками отмечены значения, вычисленные по (1.107) и (3.34).

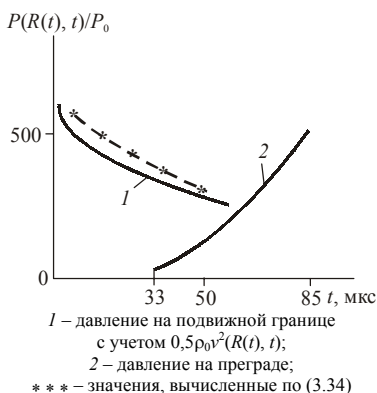


Рис. 3.6. Изменение давления на подвижной поверхности полости и преграде

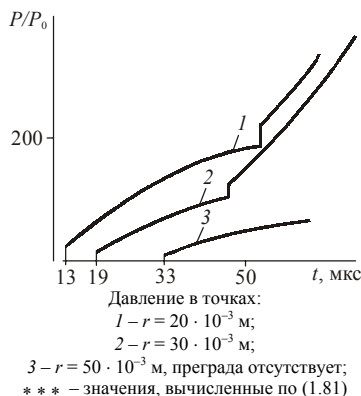


Рис. 3.7. Изменение давления в точках волновой зоны, лежащих между подвижной границей и стенкой сосуда

В работе [24, с. 110] отмечено, что недостатком численных методов при их формальном использовании является то обстоятельство, что они не позволяют выявить месторасположения и интенсивности фронтовых разрывов. Для выделения фронтовых разрывов (см., например, скачки функций $P(r, t)$ на рис. 3.7) требуется предварительный анализ решений, который в задачах гидроупругого взаимодействия является сложной самостоятельной проблемой. Как видим, предложенный метод решения задач с подвижными границами решает и эту проблему, при вычислениях по формулам (3.84), (3.85) и им подобным, представленным в работе, величины скачков функций при вычислениях получаются естественным образом. На кривых 1, 2, 3 (рис. 3.7) показано месторасположение и величина фронтовых разрывов.

3.8. Экспериментальная проверка полученных решений

Представляет интерес сравнить результаты вычислений по формулам, полученным в главе 3, и эксперимента, описанного в работе Ю.В. Сапрыкина [Прикладная механика, 1988. – Т. 24, № 4. – С. 82–86] и др. Проверка полученных соотношений приведена на рисунках (рис. 3.8–3.13).

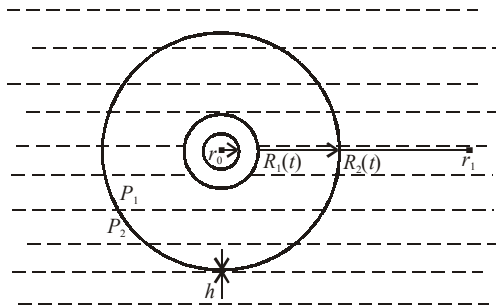


Рис. 3.8. Система "жидкость – сферическая оболочка – жидкость"

В стальной оболочке (рис. 3.8)

$$R = 0,225 \text{ м}, h = 2 \text{ мм}, \rho_1 = 800 \text{ кгс}^2/\text{м}^4, \mu = 0,3, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2,$$

где h, R – толщина стенки, радиус оболочки;

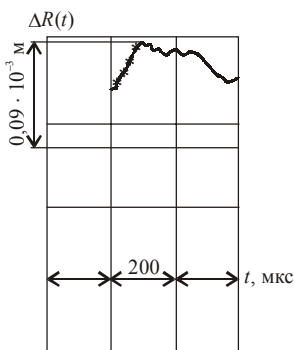
ρ_1, μ, E – плотность, коэффициент Пуассона, модуль упругости материала оболочки;

$P_{1,2}(t)$ – давление жидкости на внутренней и внешней стороне оболочки, заполненной и погруженной в идеальную сжимаемую жидкость, в центре жидкости внутри оболочки произведен электрический заряд [7, 47].

Регистрировалось перемещение оболочки u , давление в точке $r = 0,395$ м вне оболочки, давление на расстоянии 1 см от внутренней поверхности оболочки – сплошные линии на рис. 3.9, 3.10, 3.11, соответственно. Исходным для реконструкции принято давление в точке $r = 0,395$ м вне оболочки (рис. 3.10), которое приближенно аппроксимировалось по участкам элементарными функциями следующим образом:

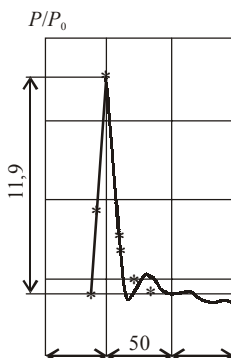
$$P(r_1, t) = B \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) - B \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \times \\ \times \sigma_0 \left[t - \left(\alpha_1 + \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \right] + A \exp \left[-\alpha \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \right], \quad (3.88)$$

где $\frac{r_1 - r_0}{a_0} = 113(3) \cdot 10^{-6}$ с; $r_1 = 0,395$ м; $a_0 = 1500$ м/с; $r_0 = R = 0,225$ м; $A = 11,9$ кгс/см²; $\alpha = 0,17 \cdot 10^6$; $\alpha_1 = 13,5 \cdot 10^6$ с; $B = \frac{11,9}{13,5 \cdot 10^{-6}} = 0,8814815 \times 10^6$ кгс/(см² · с).



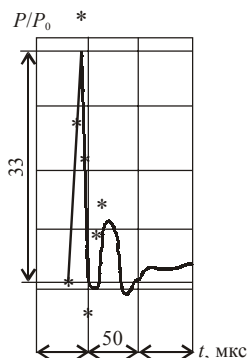
— — эксперимент;
* * * — расчет
по предложенному методу

Рис. 3.9. Перемещение сферической оболочки при воздействии на нее ударной волны, вызванной электрическим разрядом



— — эксперимент;
* * * — аппроксимация по (3.88)

Рис. 3.10. Изменение давления в точке волновой зоны вне оболочки



— — эксперимент;
* * * — реконструкция

Рис. 3.11. Изменение давления на расстоянии 1 см от внутренней поверхности оболочки

Подставляя (3.88) в (3.39)–(3.42), можно получить компоненту давления на внешней поверхности оболочки

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \{ B \cdot t_1 \cdot \sigma_0(t_1) - B \cdot t_1 \cdot \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + A \exp[-\alpha(t_1 - \alpha_1)] \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \}, \quad (3.89)$$

$t_1 = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}$, $0 < t < 63,5 \cdot 10^{-6}$ с, в этом промежутке работает формула (3.88),

на измеренное давление исключается влияние свободной поверхности, дна и стенок бассейна.

Скорость оболочки

$$\begin{aligned} v(R(t), t) \rho_0 R^2(t) / r_1 = \\ = \frac{R(t)}{a_0} \{ B \cdot t_1 \cdot \sigma_0(t_1) - B \cdot t_1 \cdot \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + A \exp[-\alpha(t_1 - \alpha_1)] \} + \\ + \left\{ \frac{B}{2} \cdot t_1^2 \cdot \sigma_0(t_1) - \left[\frac{B}{2} t_1^2 \cdot \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - \frac{B}{2} \alpha_1^2 \sigma_0(\alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \right] + \right. \\ \left. + \frac{A}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha(t_1 - \alpha_1))] \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

изменение радиуса оболочки

$$\begin{aligned} [R_{i+1}^3(t) - r_0^3] \rho_0 / 3 r_1 = \frac{R_{i+1}(t)}{a_0} \left\{ \frac{B}{2} \cdot t_1^2 \cdot \sigma_0(t_1) - \left[\frac{B}{2} t_1^2 \cdot \sigma_0(t_1) \cdot \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{B}{2} \alpha_1^2 \sigma_0(\alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \right] + \frac{A}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha(t_1 - \alpha_1))] \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \right\} + \\ + \left\{ \left\{ \frac{B}{6} \cdot t_1^3 \cdot \sigma_0(t_1) - \left[\frac{B}{6} t_1^3 \cdot \sigma_0(t_1) \cdot \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - \frac{B}{6} \alpha_1^3 \sigma_0(\alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B}{2} \alpha_1^2 \sigma_0(\alpha_1) (t_1 - \alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A}{\alpha} (t_1 - \alpha_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) - \left[\frac{A}{\alpha^2} (1 - \exp(-\alpha(t_1 - \alpha_1))) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) \right] \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$t_1 = t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0}, \quad i = 1, 2 \dots$$

Скорость частиц жидкости при движении одной подвижной границы в безграничной среде, в зависимости от давления в точке волновой зоны,

определяется по формуле (3.40), откуда можно определить ускорение частиц жидкости

$$v_t = \frac{r_1}{r^2 \rho_0} \left[\frac{r}{a_0} f'_t \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) + f \left(t - \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right], \quad (3.92)$$

где $f = P(r_1, t)$ из (3.88). Ускорение частиц жидкости на поверхности оболочки равно ускорению поверхности оболочки

$$\begin{aligned} v_t = \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{r_1}{\rho_0 R^2(t)} & \left\{ \frac{R(t)}{a_0} [B \sigma_0(t_1) - B \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + \right. \\ & + A(-\alpha) \exp(-\alpha(t - \alpha_1)) \sigma_0(t_1 - \alpha_1)] + [B t_1 \sigma_0(t_1) - B t_1 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_1 - \alpha_1) + \\ & \left. + A \exp(-\alpha(t_1 - \alpha_1)) \sigma_0(t_1 - \alpha_1)] \right\}, \\ t_1 = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Движение тонкой сферической оболочки опишется уравнением [54]

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \alpha_*^2 u = \beta_0 [P_1(t) - P_2(t)]. \quad (3.94)$$

$$\text{Здесь } \alpha_* = \frac{2E}{(1-\mu)\rho_1 R^2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{h\rho_1};$$

u – радиальное перемещение оболочки;

R – начальный радиус оболочки.

Из (3.94) с учетом (3.93) и (3.91) определяется давление на внутренней поверхности оболочки P_1 , а по формулам (3.70), (3.81) можно реконструировать скорость и давление на подвижной границе полости, расширяющейся в оболочке.

Реконструкция изменения радиуса (рис. 3.9) по формуле (3.91) и давления на внутренней поверхности оболочки по формуле (3.94) с учетом (3.93) и (3.91) (рис. 3.11) обозначены * * *. Скорости оболочки по формуле (3.90) (рис. 3.12) и давление на внешней поверхности оболочки по формуле (3.89) (рис. 3.13) – сплошными линиями.

Для восстановления изменения радиуса, скорости и давления на подвижной границе полости, расширяющейся в оболочке, за исходные данные возьмем давление на внутренней поверхности оболочки. Приближенно аппроксимируем его в следующем виде (рис. 3.14):

$$\begin{aligned} P(R_2, t) = D_1(t - \alpha_0) \sigma_0(t - \alpha_0) - D_1(t - \alpha_0) \sigma_0(t - \alpha_0) \sigma_0(t - \alpha_1) + \\ + [D_2 - D_3(t - \alpha_1)] \sigma_0(t - \alpha_1) - [D_2 - D_3(t - \alpha_1)] \sigma_0(t - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_2) + \\ + [-D_4 + D_5(t - \alpha_2)] \sigma_0(t - \alpha_2) - [-D_4 + D_5(t - \alpha_2)] \sigma_0(t - \alpha_2) \sigma_0(t - \alpha_3). \end{aligned} \quad (3.95)$$

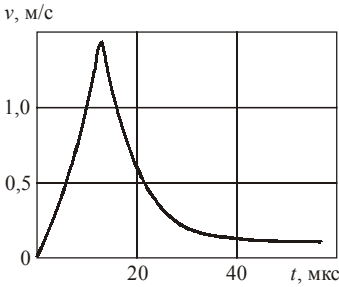


Рис. 3.12. Реконструкция изменения скорости подвижной границы оболочки

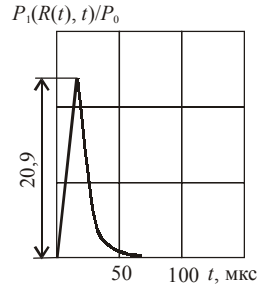
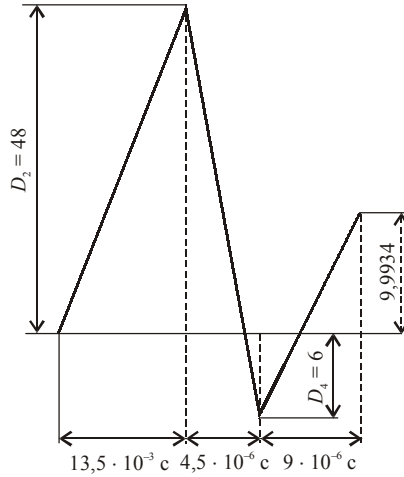


Рис. 3.13. Реконструкция изменения давления на внешней движущейся поверхности оболочки

Рис. 3.14. Реконструкция изменения давления на внутренней поверхности оболочки



Здесь

$$D_1 = \frac{48}{19.5 \cdot 10^{-6}} = 2, (5) \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}); D_2 = 48 \text{ кг}/\text{см}^2;$$

$$D_3 = \frac{48}{4 \cdot 10^{-6}} = 12 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с}); D_4 = 6 \text{ кг}/\text{см}^2;$$

$$D_5 = \frac{16}{9 \cdot 10^{-6}} = 1, (7) \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с});$$

$$\alpha_0' = \frac{R_2 - r_0}{a_0} = \frac{0,225 - 1}{1,46} \cdot 10^{-6} = 153,4247 \cdot 10^{-6} \text{ с};$$

$$\alpha_1' = 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}; \alpha_2' = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ с}; \alpha_3' = 9 \cdot 10^{-6} \text{ с};$$

$$\alpha_1 = \alpha_0' + \alpha_1' = 166,9247 \cdot 10^{-6} \text{ с};$$

$$\alpha_2 = \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2' = 171,4247 \cdot 10^{-6} \text{ с};$$

$$\alpha_3 = \alpha_0' + \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3' = 180,4247 \cdot 10^{-6} \text{ с}.$$

Из (3.82) с учетом (3.95) и дифференцирования и интегрирования разрывных функций с запаздыванием получаем следующее соотношение для определения радиуса полости $R(t)$, расширяющейся в оболочке:

$$\begin{aligned} \frac{[R^3(t) - r_0^3] 2\rho_0}{3R_2} = & \left| \frac{r}{a_0} \left[\left\{ \frac{D_1}{2} t_0^2 \sigma_0(t_0) - \frac{D_1}{2} t_0^2 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) + \right. \right. \right. \\ & + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_1) + D_2 t_1 \sigma_0(t_1) - \frac{D_3}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) - \\ & - D_2 t_1 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) + \\ & + \frac{D_3}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) + \\ & + D_4 t_2 \sigma_0(t_2) + \frac{D_5}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) + D_4 t_2 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) - \\ & - \frac{D_5}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) \Big\} - \\ & - \left\{ \frac{D_1}{2} t_4^2 \sigma_0(t_4) - \frac{D_1}{2} t_4^2 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_5) + \right. \\ & + D_2 t_5 \sigma_0(t_5) - \frac{D_3}{2} t_5^2 \sigma_0(t_5) - D_2 t_5 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) - \\ & - \frac{D_3}{2} t_5^2 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) - D_4 t_6 \sigma_0(t_6) + \\ & + \frac{D_5}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) + D_4 t_6 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) - \\ & \left. \left. - \frac{D_5}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) \right\} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 - \frac{R(t)}{R_2}\right) \left[\left\{ \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_0^3 \sigma_0(t_0) - \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_0^3 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) + \right. \right. \\
& + \frac{D_1}{2 \cdot 3} (\alpha_1 - \alpha_0)^3 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_1) + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) t_1 \sigma_0(t_1) + \\
& + \frac{D_2}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) - \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_1^3 \sigma_0(t_1) - \frac{D_2}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + \\
& + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_2 \sigma_0(t_2) + \\
& + \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_1^3 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) - \frac{D_3}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) - \\
& - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_2 \sigma_0(t_2) - \frac{D_4}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) + \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_2^3 \sigma_0(t_2) + \\
& + \frac{D_4}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) - \\
& - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) t_3 \sigma_0(t_3) - \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_2^3 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) + \\
& + \frac{D_5}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) t_3 \sigma_0(t_3) \left. \right\} + \\
& + \left\{ \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_4^3 \sigma_0(t_4) - \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_4^3 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) + \frac{D_1}{2 \cdot 3} (\alpha_1 - \alpha_0)^3 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_5) + \right. \\
& + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) t_5 \sigma_0(t_5) + \frac{D_2}{2} t_5^2 \sigma_0(t_5) - \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_5^3 \sigma_0(t_5) - \\
& - \frac{D_2}{2} t_5^3 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) + \\
& + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_6 \sigma_0(t_6) + \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_5^3 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \\
& - \frac{D_3}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) - \\
& - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_6 \sigma_0(t_6) - \frac{D_4}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) + \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_6^3 \sigma_0(t_6) + \\
& + \frac{D_4}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) - \\
& - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) t_7 \sigma_0(t_7) - \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_6^3 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{D_5}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (t_7) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_7 \sigma_0 (t_7) \Bigg] - \\
 & - \frac{a_0}{R_2} \left[\left\{ \frac{D_1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_0^4 \sigma_0 (t_0) - \frac{D_1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_0^4 \sigma_0 (t_0) \sigma_0 (t_1) + \right. \right. \\
 & + \frac{D_1}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\alpha_1 - \alpha_0)^4 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0 (t_1) + \frac{D_1}{2 \cdot 3} (\alpha_1 - \alpha_0)^3 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) t_1 \sigma_0 (t_1) + \\
 & + \frac{D_1}{2 \cdot 2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) t_1^2 \sigma_0 (t_1) + \frac{D_2}{2 \cdot 3} t_1^3 \sigma_0 (t_1) - \frac{D_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_1^4 \sigma_0 (t_1) - \\
 & - \frac{D_2}{2 \cdot 3} t_1^3 \sigma_0 (t_1) \sigma_0 (t_2) + \frac{D_2}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (t_2) + \\
 & + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_2 \sigma_0 (t_2) + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_2^2 \sigma_0 (t_2) + \\
 & + \frac{D_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_1^4 \sigma_0 (t_1) \sigma_0 (t_2) - \frac{D_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\alpha_2 - \alpha_1)^4 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (t_2) - \\
 & - \frac{D_3}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_2 \sigma_0 (t_2) - \frac{D_3}{2 \cdot 2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_2^2 \sigma_0 (t_2) - \\
 & - \frac{D_4}{2 \cdot 3} t_2^3 \sigma_0 (t_2) + \frac{D_5}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_2^4 \sigma_0 (t_2) + \frac{D_4}{2 \cdot 3} t_2^3 \sigma_0 (t_2) \sigma_0 (t_3) - \\
 & - \frac{D_4}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (t_3) - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_3 \sigma_0 (t_3) - \\
 & - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_3^2 \sigma_0 (t_3) - \frac{D_5}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_2^4 \sigma_0 (t_2) \sigma_0 (t_3) + \\
 & + \frac{D_5}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\alpha_3 - \alpha_2)^4 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (t_3) + \frac{D_5}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_3 \sigma_0 (t_3) + \\
 & + \frac{D_5}{2 \cdot 2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_3^2 \sigma_0 \left(t - \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_3 \right) \Bigg] - \\
 & - \left\{ \frac{D_1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_4^4 \sigma_0 (t_4) - \frac{D_1}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_4^4 \sigma_0 (t_4) \sigma_0 (t_4) + \right. \\
 & + \frac{D_1}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\alpha_1 - \alpha_0)^4 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0 (t_4) + \frac{D_1}{2 \cdot 3} (\alpha_1 - \alpha_0)^3 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) t_5 \sigma_0 (t_5) + \\
 & + \frac{D_1}{2 \cdot 2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) t_5^2 \sigma_0 (t_5) + \frac{D_2}{2 \cdot 3} t_5^3 \sigma_0 (t_5) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{D_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_5^4 \sigma_0(t_5) - \frac{D_2}{2 \cdot 3} t_5^3 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + \frac{D_2}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) + \\
 & + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_6 \sigma_0(t_6) + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_6^2 \sigma_0(t_6) + \\
 & + \frac{D_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_5^4 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \frac{D_3}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\alpha_2 - \alpha_1)^4 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) - \\
 & - \frac{D_3}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_6 \sigma_0(t_6) - \frac{D_3}{2 \cdot 2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) t_6^2 \sigma_0(t_6) - \\
 & - \frac{D_4}{2 \cdot 3} t_6^3 \sigma_0(t_6) + \frac{D_5}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_6^4 \sigma_0(t_6) + \frac{D_4}{2 \cdot 3} t_6^3 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) - \\
 & - \frac{D_4}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) t_7 \sigma_0(t_7) - \\
 & - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) t_7^2 \sigma_0(t_7) - \frac{D_5}{2 \cdot 3 \cdot 4} t_6^4 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) + \\
 & + \frac{D_5}{2 \cdot 3 \cdot 4} (\alpha_3 - \alpha_2)^4 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) + \frac{D_5}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) t_7 \sigma_0(t_7) + \\
 & + \frac{D_5}{2 \cdot 2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) t_7^2 \sigma_0(t_7) \Bigg\} \Bigg|_{r=R(t)}, \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 t_0 &= t + \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_0, \quad t_1 = t + \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_1, \\
 t_2 &= t + \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_2, \quad t_3 = t + \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_3, \\
 t_4 &= t - \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_0, \quad t_5 = t - \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_1, \\
 t_6 &= t - \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_2, \quad t_7 = t - \frac{R_2 - r}{a_0} - \alpha_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.97)$$

Как видим, расчет сводится к элементарным вычислениям величин запаздываний типа (3.97) и решению кубического уравнения (3.96), которое производится аналогично описанному в предыдущих параграфах.

Скорость движения полости, расширяющейся в оболочке, определится из следующего соотношения:

$$\begin{aligned}
 & \left| v \frac{2\rho_0 r^2}{R_2} = \frac{r}{a_0} \left[\{ D_1 t_0 \sigma_0(t_0) - D_1 t_0 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) + [D_2 - D_3 t_1] \sigma_0(t_1) - \right. \right. \\
 & - [D_2 - D_3 t_1] \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + [-D_4 + D_5 t_2] \sigma_0(t_2) - [-D_4 + D_5 t_2] \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) \} - \\
 & - \{ D_1 t_4 \sigma_0(t_4) - D_1 t_4 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) + [D_2 - D_3 t_5] \sigma_0(t_5) - [D_2 - D_3 t_5] \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + \\
 & + [-D_4 + D_5 t_6] \sigma_0(t_6) - [-D_4 + D_5 t_6] \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) \} \Big] + \\
 & + \left(1 - \frac{r}{R_2} \right) \left[\left\{ \frac{D_1}{2} t_0^2 \sigma_0(t_0) - \frac{D_1}{2} t_0^2 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_1) + \right. \right. \\
 & + D_2 t_1 \sigma_0(t_1) - \frac{D_3}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) - D_2 t_1 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) + \\
 & + \frac{D_3}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) - D_4 t_2 \sigma_0(t_2) + \\
 & + \frac{D_5}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) + D_4 t_2 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) - \\
 & \left. \left. - \frac{D_5}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) \right\} + \right. \\
 & + \left\{ \frac{D_1}{2} t_4^2 \sigma_0(t_4) - \frac{D_1}{2} t_4^2 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_5) + \right. \\
 & + D_2 t_5^2 \sigma_0(t_5) - \frac{D_3}{2} t_5^2 \sigma_0(t_5) - D_2 t_5 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) + \\
 & + \frac{D_3}{2} t_5^2 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) - D_4 t_6 \sigma_0(t_6) + \\
 & + \frac{D_5}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) + D_4 t_6 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) - \\
 & \left. \left. - \frac{D_5}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) \right\} \right] - \\
 & - \frac{a_0}{R} \left[\left[\left\{ \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_0^3 \sigma_0(t_0) - \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_0^3 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) + \frac{D_1}{2 \cdot 3} (\alpha_1 - \alpha_0)^3 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_1) + \right. \right. \right. \\
 & + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) t_1 \sigma_0(t_1) + \frac{D_2}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) - \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_1^3 \sigma_0(t_1) - \\
 & \left. \left. - \frac{D_2}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_2 \sigma_0 (t_2) + \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_1^3 \sigma_0 (t_1) \sigma_0 (t_2) - \\
 & - \frac{D_3}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (t_2) - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_2 \sigma_0 (t_2) - \\
 & - \frac{D_4}{2} t_2^2 \sigma_0 (t_2) + \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_2^3 \sigma_0 (t_2) + \frac{D_4}{2} t_2^2 \sigma_0 (t_2) \sigma_0 (t_3) - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \times \\
 & \times \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (t_3) - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_3 \sigma_0 (t_3) - \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_2^3 \sigma_0 (t_2) \sigma_0 (t_3) + \\
 & + \frac{D_5}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (t_3) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_3 \sigma_0 (t_3) \Big\} - \\
 & - \Big\{ \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_4^3 \sigma_0 (t_4) - \frac{D_1}{2 \cdot 3} t_4^3 \sigma_0 (t_4) \sigma_0 (t_5) + \frac{D_1}{2 \cdot 3} (\alpha_1 - \alpha_0)^3 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0 (t_5) + \\
 & + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0 (\alpha_1 - \alpha_0) t_5 \sigma_0 (t_5) + \frac{D_2}{2} t_5^2 \sigma_0 (t_5) - \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_5^3 \sigma_0 (t_5) - \\
 & - \frac{D_2}{2} t_5^2 \sigma_0 (t_5) \sigma_0 (t_6) + \frac{D_2}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (t_6) + \\
 & + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_6 \sigma_0 (t_6) + \\
 & + \frac{D_3}{2 \cdot 3} t_5^3 \sigma_0 (t_5) \sigma_0 (t_6) - \frac{D_3}{2 \cdot 3} (\alpha_2 - \alpha_1)^3 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (t_6) - \\
 & - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) t_6 \sigma_0 (t_6) - \\
 & - \frac{D_4}{2} t_6^2 \sigma_0 (t_6) + \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_6^3 \sigma_0 (t_6) + \frac{D_4}{2} t_6^2 \sigma_0 (t_6) \sigma_0 (t_7) - \\
 & - \frac{D_4}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (t_7) - \\
 & - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) t_7 \sigma_0 (t_7) - \frac{D_5}{2 \cdot 3} t_6^3 \sigma_0 (t_6) \sigma_0 (t_7) + \\
 & + \frac{D_5}{2 \cdot 3} (\alpha_3 - \alpha_2)^3 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (t_7) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 t_7 \sigma_0 (t_7) \Big\} \Bigg] \Bigg|_{r=R(t)}. \quad (3.98)
 \end{aligned}$$

Давление на подвижной границе полости, расширяющейся в оболочке, определится из соотношения

$$\left| P(r, t) \frac{2r}{R_2} = \left[\left\{ D_1 t_0 \sigma_0 (t_0) - D_1 t_0 \sigma_0 (t_0) \sigma_0 (t_1) + [D_2 - D_3 t_1] \sigma_0 (t_1) - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -[D_2 - D_3 t_1] \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + [-D_4 + D_5 t_2] \sigma_0(t_2) - [-D_4 + D_5 t_2] \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) \} - \\
 & - \{ D_1 t_4 \sigma_0(t_4) - D_1 t_4 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) + [D_2 - D_3 t_5] \sigma_0(t_5) - [D_2 - D_3 t_5] \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + \\
 & \quad + [-D_4 + D_5 t_6] \sigma_0(t_6) - [-D_4 + D_5 t_6] \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) \}] - \\
 & - \frac{a_0}{R} \left[\left[\left\{ \frac{D_1}{2} t_0^2 \sigma_0(t_0) - \frac{D_1}{2} t_0^2 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_1) + \right. \right. \right. \\
 & + D_2 t_1 \sigma_0(t_1) - \frac{D_3}{2} t_1^2 \sigma_0(t_1) - D_2 t_1 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) + \\
 & + \frac{D_3}{2} t_1^3 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_2) - D_4 t_2 \sigma_0(t_2) + \\
 & + \frac{D_5}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) + D_4 t_2 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) - \\
 & \quad \left. \left. - \frac{D_5}{2} t_2^2 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_3) \right\} - \right. \\
 & - \left\{ \frac{D_1}{2} t_4^2 \sigma_0(t_4) - \frac{D_1}{2} t_4^2 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) + \frac{D_1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 \sigma_0(\alpha_1 - \alpha_0) \sigma_0(t_5) + \right. \\
 & + D_2 t_5^2 \sigma_0(t_5) - \frac{D_3}{2} t_5^2 \sigma_0(t_5) - D_2 t_5 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + D_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) + \\
 & + \frac{D_3}{2} t_5^2 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \frac{D_3}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0(\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0(t_6) - D_4 t_6 \sigma_0(t_6) + \\
 & + \frac{D_5}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) + D_4 t_6 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) - D_4 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) - \\
 & \quad \left. \left. - \frac{D_5}{2} t_6^2 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) + \frac{D_5}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0(\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0(t_7) \right\} \right] \Bigg|_{r=R(t)} . \quad (3.99)
 \end{aligned}$$

Величину временного градиента давления на подвижной границе полости, расширяющейся в оболочке, можно определить по формуле

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{dP}{dt} = \frac{R_2}{2r} \left[\frac{a_0}{R_2} \left[f \left(t - \frac{R_2 - r}{a_0} \right) - f \left(t + \frac{R_2 - r}{a_0} \right) \right] + \right. \right. \\
 \left. \left. + f'_t \left(t - \frac{R_2 - r}{a_0} \right) + f'_t \left(t + \frac{R_2 - r}{a_0} \right) \right] \right|_{r=R(t)} , \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

которая с учетом (3.95) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{dP}{dt} = \frac{R_2}{2r} \left\{ \frac{a_0}{R_2} \right. \right. & \left. \left[D_1 t_4 \sigma_0(t_4) - D_1 t_4 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) + [D_2 - D_3 t_5] \sigma_0(t_5) - \right. \right. \\
 & - [D_2 - D_3 t_5] \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + [-D_4 + D_5 t_6] \sigma_0(t_6) - [-D_4 + D_5 t_6] \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) \left. \right] - \\
 & - \frac{a_0}{R_2} \left[[D_1 t_0 \sigma_0(t_0) - D_1 t_0 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) + [D_2 - D_3 t_1] \sigma_0(t_1) - \right. \\
 & - [D_2 - D_3 t_1] \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + [-D_4 + D_5 t_2] \sigma_0(t_2) - [-D_4 + D_5 t_2] \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) \left. \right] + \\
 & + \left[[D_1 \sigma_0(t_4) + D_1 t_4 \sigma_1(t_4) - D_1 \sigma_0(t_4) \sigma_0(t_5) - D_3 \sigma_0(t_5) - D_3 t_5 \sigma_1(t_5) - \right. \\
 & - D_2 \sigma_1(t_5) \sigma_0(t_6) - D_2 \sigma_0(t_5) \sigma_1(t_6) + D_3 \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) + \\
 & + D_3 t_5 \sigma_1(t_5) \sigma_0(t_6) + D_3 t_5 \sigma_0(t_5) \sigma_1(t_6) - \\
 & - D_4 \sigma_1(t_6) + D_5 \sigma_0(t_6) + D_5 t_6 \sigma_1(t_6) + D_4 \sigma_1(t_6) \sigma_0(t_7) + D_4 \sigma_0(t_6) \sigma_1(t_7) - \\
 & - D_5 \sigma_0(t_6) \sigma_0(t_7) - D_5 t_6 \sigma_1(t_6) \sigma_0(t_7) - D_5 t_6 \sigma_0(t_6) \sigma_1(t_7) - \\
 & - D_1 t_4 \sigma_1(t_4) \sigma_0(t_5) - D_1 t_4 \sigma_0(t_4) \sigma_1(t_5) + D_2 \sigma_1(t_5) \left. \right] + \\
 & + \left[[D_1 \sigma_0(t_0) + D_1 t_0 \sigma_1(t_0) - D_1 \sigma_0(t_0) \sigma_0(t_1) - D_1 t_0 \sigma_1(t_0) \sigma_0(t_1) - \right. \\
 & - D_1 t_0 \sigma_0(t_0) \sigma_1(t_1) + D_2 \sigma_1(t_1) - D_3 \sigma_0(t_1) - D_3 t_1 \sigma_1(t_1) - D_2 \sigma_1(t_1) \sigma_0(t_2) - \\
 & - D_2 \sigma_0(t_1) \sigma_1(t_2) + D_3 \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + D_3 t_1 \sigma_1(t_1) \sigma_0(t_2) + \\
 & + D_3 t_1 \sigma_0(t_1) \sigma_1(t_2) - D_4 \sigma_1(t_2) + D_5 \sigma_0(t_2) + D_5 t_2 \sigma_1(t_2) + \\
 & + D_4 \sigma_1(t_2) \sigma_0(t_3) + D_4 \sigma_0(t_2) \sigma_1(t_3) - D_5 \sigma_0(t_2) \sigma_0(t_3) - \\
 & \left. \left. - D_5 t_2 \sigma_1(t_2) \sigma_0(t_3) - D_5 t_2 \sigma_0(t_2) \sigma_1(t_3) \right] \right\} \Big|_{r=R(t)}. \quad (3.101)
 \end{aligned}$$

Формула (3.100) легко проверяется интегрированием.

По соотношениям (3.96), (3.98), (3.99), (3.101) построены кривые. Показаны (рис. 3.15) реконструкция изменения радиуса и скорости подвижной границы полости, а также (рис. 3.16) изменения давления и временного градиента давления на подвижной границе полости, расширяющейся в оболочке. Исходным для реконструкции принято изменение давления в точке волновой зоны, находящейся вне оболочки.

Проведенные выше расчеты позволяют продолжить реконструкцию. Известно [27, 48, 49], что для не слишком сильных электрических разрядов с небольшими по сравнению со скоростью звука скоростями расширения канала, можно приблизительно принять уравнение баланса энергии в виде

$$P(R(t), t) \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} [P(R(t), t) \cdot V] = N(t). \quad (3.102)$$

Здесь $P(R(t), t)$ – давление в канале электрического разряда в воде, V – объем, $V = 4/3\pi R^3(t)$;

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2(t) \frac{dR(t)}{dt};$$

γ – эффективный показатель адиабаты плазмы, $N(t)$ – мощность, выделяющаяся в канале.

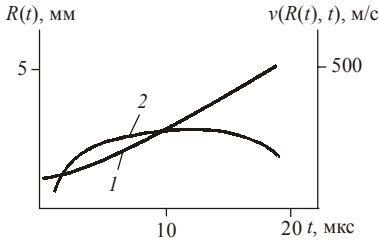


Рис. 3.15. Восстановление изменения радиуса и скорости подвижной границы полости, расширяющейся в оболочке, по давлению в точке вне оболочки:

1 – изменение радиуса подвижной границы;
2 – изменение скорости подвижной границы

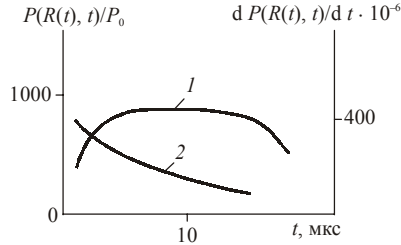


Рис. 3.16. Восстановление давления и временного градиента давления на движущейся границе полости, расширяющейся в оболочке, по давлению в точке вне оболочки:

1 – давление на подвижной границе полости;
2 – временной градиент давления

При этом считается, что энергия, выделившаяся в канале разряда, расходуется в основном на увеличение внутренней энергии плазмы и совершение работы расширяющимся каналом над окружающей средой. Подставляя в (3.102) найденные значения $P(R(t), t)$, V , $R(t)$ получаем возможность восстановить однозначно закон ввода мощности (а значит, и энергию). Показаны (рис. 3.17) расчеты по формуле (3.102) с учетом (3.96), (3.98), (3.99), (3.101) (рис. 3.15, 3.16), при $\gamma = 1,26$ [27, с. 72]. Нетрудно по известной функции $N(t)$ восстановить соответствующие функции тока J и напряжения U электрического разряда в воде [27, с. 102]

$$W + A = E, W = \frac{PV}{\gamma - 1},$$

$$A = \int_{V_0}^V P dV, E = \int_0^t J \cdot U dt. \quad (3.103)$$

Здесь E – энергия, выделившаяся в канале; τ – длительность разряда; C – емкость конденсатора; L – индуктивность разрядной цепи. В случае разрядов, близких к критическому, параметры τ и E приближенно определяются по формулам [27, с. 107]

$$\tau = \pi \sqrt{LC}, E \approx \frac{CU^2}{2}, \quad (3.104)$$

величины τ и L могут быть взяты на основании опыта для подобных разрядов и разрядной цепи.

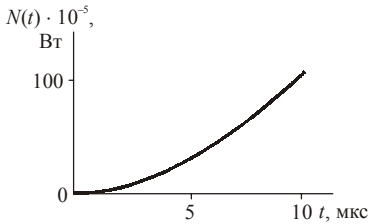


Рис. 3.17. Восстановление закона ввода энергии в полость, расширяющуюся в оболочке, по давлению в точке вне оболочки

Отметим следующее. Размеры выписанных соотношений, вызванные записью исследуемых функций типа (3.49), (3.50) и т. п., не должны приводить в смущение. Некоторое неудобство, создаваемое этим, компенсируется значительными преимуществами. Например, при вычислениях по этим окончательным формулам для каждого конкретного момента времени используется только небольшая ее часть; указанные соотношения являются точными аналитическими решениями.

В работах [27, 32, 48–51] развита теория импульсных акустогидродинамических явлений, в основе которых (с гидродинамической точки зрения) лежит процесс расширения полости в жидкости, и при их теоретическом описании развит весьма аффективный приближенный подход, основанный на поэтапном рассмотрении сначала – задачи о движении полости, затем – задачи об излучении интенсивной волны сжатия полостью, расширяющейся по известному закону. Выяснилось, что указанный подход позволяет точно описать генерацию слабых ударных волн при кавитации, импульсных электрических разрядах и оптическом пробое.

Представленная подробно в этом параграфе методика расчета комплекса обратных задач с подвижными границами имеет значительно большие, качественно новые возможности; позволяет решать целый класс задач управления, решить которые другими способами затруднительно или невозможно. Например, по заданной форме функции давления в точке волновой волны вне оболочки определение параметров оболочки, закона ввода энергии в полость, расширяющуюся в оболочке, оптимизация выбора импульсного источника [52, 53] и т. п.

Заключение по главе 3

Разработан новый, нетрадиционный подход решения задач с подвижными границами. Подход основан на учете распространения возмущений в сплошных средах с конечной скоростью, что приводит к рассмотрению сложных аргументов исследуемых функций, учитывающих реальные величины запаздываний, их получению и взаимодействию. Впервые получены точные аналитические решения волнового уравнения для случаев задания граничных усло-

вий на движущихся границах. Это позволило решить класс прямых задач, обратных задач, с одной движущейся границей, двумя движущимися границами, одна движущаяся граница – вторая неподвижна, при произвольных величинах начальных радиусов и перемещений, движение границ может происходить по произвольному закону. Перечисленные задачи имеют большое прикладное значение. Удовлетворительное согласование различных расчетных и экспериментальных данных свидетельствует о правомочности предложенного подхода к решению проблемы подвижных границ.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ И ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов [1]. Полученные точные аналитические решения (подстановка которых в уравнение (3.5) превращает его левую часть в нуль) также могут быть применены для определения исследуемых функций многих физических процессов. Однако при этом необходимо учитывать, что границы применимости, в каждом конкретном случае, для каждого исследуемого физического процесса будут свои. Рассмотрим границы применимости волнового уравнения и его точных решений в случаях применения их для описания гидродинамики расширяющейся полости в жидкости. Отсутствие точных решений волнового уравнения для случая удовлетворения граничных условий на подвижных границах не позволяло до настоящего времени однозначно это сделать.

4.1. Границы применимости волнового уравнения

Область применимости акустического приближения изучалась в работах [2–5]. В работе [3] показано, что акустический подход справедлив при давлениях, достигающих 350 кгс/см^2 , при этом максимальная погрешность в оценке скорости звука не превышает 5 %. Исходя из условий на фронте плоской волны, показано, что, допуская 5%-ную погрешность, можно использовать для воды акустическое приближение при давлениях, меньших 110 кгс/см^2 [4].

В работе [2] проведен качественный расчет, из которого следует, что акустический подход при $P \leq 520 \text{ кгс/см}^2$ и уравнения нелинейной акустики при давлении $P \leq 3000 \text{ кгс/см}^2$ дают погрешность в значении давления, не превышающую 5 %. Результаты исследования применимости акустического подхода в случае отражения волны от абсолютно жесткой стенки представлены в работе [5].

Несколько слов о границах применимости уравнения (3.5) [6]. Известно, что полная система (1.1)–(1.3) применима до давлений $3 \cdot 10^9 \text{ Па}$ [7]. Значение ρ

в интеграле Коши-Лагранжа из-за математических трудностей решения (3.1) для $v = 3$ определяем из линеаризованного уравнения (3.5). Для определения границ применимости (3.5) сравним результаты вычислений по формулам предыдущей главы, являющимися точными решениями волнового уравнения, и решением полной системы. Прделанные вычисления на ЭВМ [8] показали, что с достаточной для практических целей точностью уравнение (3.5), а значит и его точное решение, применимо при скоростях расширения поршня до 200 м/с. При бóльших скоростях влияние членов второго и третьего порядков малости в уравнении (3.1) становится существенным. В этих случаях пренебрегать отброшенными членами уже невозможно, необходимо обращаться к решению полной системы (1.1)–(1.3) или уравнению (3.1).

Необходимо отметить следующее. В работе впервые определены границы применимости волнового уравнения. Это сделано в другой, непривычной форме – в виде определения предельной величины скорости расширения полости (~ 200 м/с). Это сделано по следующей причине. Известно из литературы, что точного предела применимости уравнения (3.5) до настоящего времени не установлено: он колеблется по давлению от 350 кгс/см² до 3000 кгс/см² и более.

Как видим, границы неконкретны. Но допустим, мы остановились на 350 кгс/см². Возникает вопрос: где, в каких точках, на каком расстоянии от полости? Если взять расстояние $r_1 > 10$ м, то, реконструировав давление на подвижной поверхности, получим давление $P(R(t), t) > 30\,000$ кгс/см², то есть выйдем за пределы применимости уравнения состояния в форме Тэта. С другой стороны, этому давлению $P(R(t), t) = 350$ кгс/см² на поршне соответствует скорость расширения ~ 60 м/с, что значительно ниже действительной границы ~ 200 м/с. В этом состоит, по мнению автора, еще одна неопределенность, неоднозначность при назначении границ применимости по давлению. Такой неоднозначности не существует, если границы применимости определять по скорости расширения полости. При $v(R(t), t) < 200$ м/с ударная волна сразу отходит от поверхности поршня со скоростью $a_0 = 1460$ м/с – это и служит границей – а при несколько больших скоростях расширения – с несколько большей скоростью, чем a_0 , и приходит в точку r_1 несколько ранее. Это хорошо видно по сдвигу кривых (см. рис. 4.1) при сравнении результатов решения уравнения (3.5) и полной системы (1.1)–(1.3). Определение границ применимости уравнения (3.5) имеет важное значение, так как исключает возможные ошибки в гидродинамических расчетах импульсных процессов.

В некоторых случаях границы применимости полученных в третьей главе соотношений можно несколько расширить. Покажем это на примере сравнения результатов реконструкции с точным численным решением прямой задачи. Система (1.1)–(1.3) первой главы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка, с условиями на ударной волне (1.5), была решена численно методом характеристик [8, 9] со следующим условием на поверхности поршня:

$$v(R(t), t) = 350 \exp(-0,001 \cdot 10^6 t),$$

начальный радиус $r_0 = 1$ мм, при $t < 0$ жидкость покоилась. Сравнение результатов реконструкции (обозначены звездочкой *) с точным численным решением (сплошные линии) приводится (рис. 4.1 и 4.2). Хорошо виден (рис. 4.2) разгонный участок.

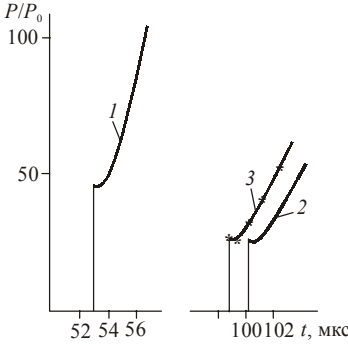


Рис. 4.1. Зависимость давления в точках волновой зоны от времени:
1 – $r = 0,08$ м; 2 – $r = 0,15$ м;
3 – $r = 0,15$ м, реконструкция по формуле (4.3)

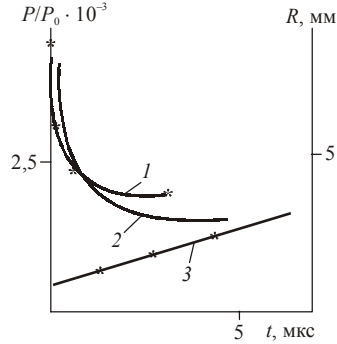


Рис. 4.2. Реконструкция давления на подвижной поверхности поршня и изменения радиуса подвижной границы:
1 – реконструкция по формуле (4.4) с учетом нелинейного члена $0,5\rho_0 v^2(R(t), t)$;
 $v(R(t), t)$ по формуле (4.5); 2 – расчет методом характеристик; 3 – реконструкция по формуле (4.6)

Возьмем для решения обратной задачи в качестве исходных данных значения изменения давления в точке $r = 0,08$ м (рис. 4.1, кривая 1) и приближенно аппроксимируем эту кривую полиномом Лагранжа

$$P(r = 0,08 \text{ м}, t) = A_0 \sigma_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) + \sum_{m=1}^n A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^m, \quad (4.1)$$

где

$$A_4 = 0,342831 \cdot 10^{24}; \quad A_3 = -4,06966 \cdot 10^{18}; \quad A_2 = 16,7101 \cdot 10^{12}; \\ A_1 = -12,953 \cdot 10^6; \quad A_0 = 49,40999; \quad a_0 = 1500 \text{ м/с}; \quad n = 4. \quad (4.2)$$

Тогда давление и скорость запишем в виде

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} \left[A_0 \sigma_0 \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right) + \sum_{m=1}^{n=4} A_m \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^m \right], \quad (4.3)$$

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \left[A_0 \sigma_0 \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right) + \sum_{m=1}^{n=4} A_m \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^m \right], \quad (4.4)$$

$$v(R(t), t) = \frac{dR(t)}{dt} = \frac{r_1}{\rho_0 a_0 R(t)} \left\{ A_0 \left[\sigma_0 \left(t - t^* \right) + \frac{a_0}{R(t)} \left(t - t^* \right) \right] + \sum_{m=1}^4 A_m \left[\left(t - t^* \right)^m + \frac{a_0}{R(t)} \frac{m!}{(m+1)!} \left(t - t^* \right)^{m+1} \right] \right\}, \quad t^* = \frac{R(t) - r_0}{a_0}, \quad (4.5)$$

$$\frac{[R_{i+1}^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3 r_1} = \frac{R_{i+1}(t)}{a_0} \sum_{m=0}^4 \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+1} + \sum_{m=0}^4 \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} \left(t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+2}, \quad (4.6)$$

где A_m берем из (4.2).

По соотношениям (4.1)–(4.6) построены реконструированные кривые, обозначены ***. Как видим (рис. 4.2), кривая 1 $P(R(t), t)$ достаточно хорошо описывает характер разгонного участка. При несколько меньших скоростях расширения полученные соотношения будут точно описывать его.

При реконструкции использовалось решение более точной математической модели (1.1)–(1.3). При этом давление в точке $r_1 = 0,08$ м возникало в момент времени, равный 52,9 мкс, а при решении уравнения (3.5) время возникновения ударной волны в этой точке равно 52,6 мкс. Разница Δt характеризуется структурой волнового уравнения и зависит только от закона расширения поршня. Для данного закона расширения она имеет всегда одно и то же значение и может всегда быть вычисленной. Таким образом, мы имеем возможность при реконструкции гидродинамических полей знать с достаточной точностью по данным опыта, на сколько и в какую сторону наши кривые сдвинуты по отношению к действительным значениям.

4.2. Управление движением расширяющейся полости в жидкости по кинематическим и динамическим параметрам

Для достижения наибольшей эффективности при импульсной обработке материалов, проведении морских сейсморазведочных работ, для подводной связи, в научных исследованиях и во многих других случаях необходимо получать в определенной точке r_1 среды заранее заданную форму функции давления $P(r_1, t)$ [10–14]. Одним из возможных способов достижения поставленной

цели может служить расширение полости в жидкости, вызванное, например, электрическим разрядом, лазерным импульсом [15–17], взрывом или схлопыванием шаровой молнии [18], взрывом конденсированных взрывчатых веществ или газовых смесей [19].

Список публикаций, посвященных гидродинамическим явлениям при замедленных взрывах, в том числе при электрическом разряде в жидкости, можно найти в [20] и обзоре [21]. Для описания акусто-гидродинамических явлений искрового подводного разряда К.А. Наугольных развил весьма эффективный приближенный подход [20, 22–28], основанный на поэтапном рассмотрении явления: сначала задачи о движении разрядного канала (плазменного поршня), затем – задачи об излучении волны сжатия расширяющимся каналом по известному из первой задачи закону. Первая задача для одномерного случая решалась в приближении несжимаемой жидкости [24, 26, 27], вторая – в акустическом приближении [23, 28, 29] или приближении Кирквуда-Бете [20, 25].

Метод точного аналитического решения задач с подвижными границами, разработанный в третьей главе, позволяет перейти от познания процесса расширения полости к управлению расширением полости, что более сложно и важно. На конкретном примере будет показано, как по любому, заранее заданному, исходя из технологических потребностей, профилю ударной волны в произвольной точке, определяется необходимая для получения его мощность $N(t)$, вводимая в расширяющуюся полость. Особый интерес представляет случай, когда профиль ударной волны имеет произвольное число скачков.

Решение сформулированной задачи разделим на два этапа. Первый: по какому закону должна расширяться полость, чтобы в нужной точке функция $P(r_1, t)$ имела определенную, заранее заданную форму? Второй: как заставить расширяться полость по определенному, заранее заданному закону?

Ответить на первый вопрос, обладая лишь решением прямой гидродинамической задачи [30], практически невозможно. Для этого необходимо решить обратную краевую гидродинамическую задачу с подвижными границами. В третьей главе разработана подробная методика решения подобных задач.

Рассмотрим случай расширения сферы в безграничной, сжимаемой, покоящейся при $t < 0$ жидкости. Стенки полости считаются непроницаемыми. При этом движение жидкости наиболее полно описывается системой (1.1)–(1.3). Эта система для потенциальных движений приводится к уравнению (3.1) относительно потенциала скорости ϕ . При $\rho \approx \rho_0$ плотность среды в невозмущенном состоянии, потенциал скорости в интеграле Коши-Лагранжа для случая сферической симметрии можно определять [31, 32] из (3.1), пренебрегая в нем членами второго и третьего порядков малости, то есть из линейного волнового уравнения. Величину $P(r_1, t)$ в общем случае произвольных движения границ и вида функции давления в точке r_1 удобно задавать в виде интерполяционного многочлена Лагранжа степени m [33–35]. Число m характеризует количество точных значений решения и может быть сколь угодно большим.

$$P(r_1, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) \sigma_0(t - \alpha_{k+1}) \right], \quad (4.7)$$

где α_k – моменты времени, в которых функция имеет скачки;

$$\alpha_1 = (r_1 - r_0)/a_0.$$

Решение сформулированной задачи единственно и устойчиво (см. § 3.4). Применяя одностороннее преобразование Лапласа к линейному волновому уравнению с учетом нулевых начальных условий, получаем операторное уравнение, решая которое, с учетом дифференцирования и интегрирования разрывных функций с запаздываниями (4.7) (см. (3.62)–(3.65)), и переходя к оригиналам, получаем интересующие нас зависимости с учетом реальных величин запаздываний.

Давление и скорость в точках волновой зоны имеют вид

$$\left. \begin{aligned} P(r, t) &= F_1(r, t) = \frac{r_1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k T_k^m \sigma_0(T_k) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k T_k^m \sigma_0(T_k) \sigma_0(T_{k+1}) \right], \\ T_k &= t - \alpha_k - \frac{r - r_1}{a_0}, \\ T_{k+1} &= t - \alpha_{k+1} - \frac{r - r_1}{a_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} v(r, t) &= F_2(r, t) = \\ &= \frac{r_1}{r^2 \rho_0} \left\{ \frac{r}{a_0} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k T_k^m \sigma_0(T_k) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k T_k^m \sigma_0(T_k) \sigma_0(T_{k+1}) \right] + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} T_k^{m+1} \sigma_0(T_k) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} T_k^{m+1} \sigma_0(T_k) \sigma_0(T_{k+1}) + \right. \\ &\left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(T_{k+1}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Компонента давления на поршне и скорость поршня приобретают вид

$$P(R(t), t) = F_1(R(t), t), \quad (4.10)$$

$$v(R(t), t) = F_2(R(t), t), \quad (4.11)$$

$$\text{где } T'_k = t - \alpha_k - \frac{R(t) - r_1}{a_0}, \quad T'_{k+1} = t - \alpha_{k+1} - \frac{R(t) - r_1}{a_0}.$$

Для определения давления на поршне и скорости поршня необходимо знать функцию $R(t)$, которую определим с любой степенью точности из соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{[R_{i+1}^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3 r_1} = \\ & = \frac{R_{i+1}(t)}{a_0} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (T'_k)^{m+1} \sigma_0(T'_k) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (T'_k)^{m+1} \sigma_0(T'_k) \sigma_0(T'_{k+1}) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(T'_{k+1}) \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} (T'_k)^{m+2} \sigma_0(T'_k) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} (T'_k)^{m+2} \sigma_0(T'_k) \sigma_0(T'_{k+1}) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_m^k}{(m+1)(m+2)} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+2} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(T'_{k+1}) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (T'_k)^1 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(T'_{k+1}) \right] \right\}. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Здесь

$$\sum_{m=0}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \dots \right\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$T'_k = t - \alpha_k - \frac{R_i(t) - r_1}{a_0}, \quad T'_{k+1} = t - \alpha_{k+1} - \frac{R_i(t) - r_1}{a_0}.$$

Индексы i введены для того, чтобы последовательными приближениями определить $R(t)$ из этого "кубического" уравнения.

Отметим быструю сходимость. Уже второе приближение $R_2(t)$ отличается от точного на доли процента.

Соотношения (4.8)–(4.12) являются точными аналитическими решениями волнового уравнения. Подстановка их в волновое уравнение превращает левую часть его в нуль. Они универсальны, так как позволяют решать и прямую задачу.

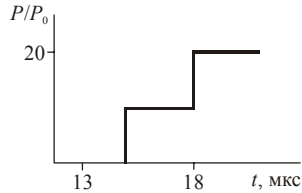
Формула (4.12) позволяет точно реконструировать функцию радиуса поршня $R(t)$ по произвольно заданной форме функции давления $P(r_1, t)$, которая может иметь произвольное число скачков.

Для практических расчетов достаточно брать $m = 4$. Пусть $m = 0, k = 1; 2$, давление $P(r_1, t)$ в виде двух ступенек (рис. 4.3).

$$P(r_1, t) = A_0^I \sigma_0(t - \alpha_1) - A_0^I \sigma_0(t - \alpha_1) \sigma_0(t - \alpha_2) + A_0^{II} \sigma_0(t - \alpha_2) - A_0^{II} \sigma_0(t - \alpha_2) \sigma_0(t - \alpha_3), \quad (4.13)$$

$$A_0^I = 10; \quad A_0^{II} = 20; \quad \alpha_1 = 13 \cdot 10^{-6} \text{ с}; \quad \alpha_2 = 18 \cdot 10^{-6} \text{ с}; \quad \alpha_3 = 23 \cdot 10^{-6} \text{ с}; \\ r_1 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad r_0 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Рис. 4.3. Исходная для реконструкции форма функции давления в точке r_1 ($r_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ м)



Задавая конкретные значения времени при $r = R(t)$, с учетом (4.12) определяем значения $R(t)$ из соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_0}{3 r_1} [R^3(t) - r_0^3] = \\ & = \frac{R(t)}{a_0} \left\{ A_0^I \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + \right. \\ & \quad + A_0^{II} \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) - \\ & \quad - A_0^I \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) - \\ & \quad \left. - A_0^{II} \left(t - \frac{R(t) - r_1}{a_0} - \alpha_2 \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_3 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + A_0^I (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + \\
 & + A_0^{II} (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 \left(t - \alpha_3 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \Bigg\} + \\
 & + \left\{ \frac{A_0^I}{2} \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right)^2 \sigma_0 \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + \right. \\
 & + \frac{A_0^{II}}{2} \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right)^2 \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) - \\
 & - \frac{A_0^{II}}{2} \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right)^2 \sigma_0 \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) - \\
 & - \frac{A_0^{II}}{2} \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right)^2 \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_3 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) - \\
 & - \frac{A_0^I}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + \\
 & + \frac{A_0^{II}}{2} (\alpha_3 - \alpha_2)^2 \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 \left(t - \alpha_3 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + \\
 & + \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \left[\frac{A_0^I}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 (\alpha_2 - \alpha_1) \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + \right. \\
 & \left. + \left(t - \alpha_3 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \left[\frac{A_0^{II}}{1} (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 (\alpha_3 - \alpha_2) \sigma_0 \left(t - \alpha_3 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \right] \right\}. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

По (4.14) построена кривая I (рис. 4.4). При $t_1 = 5,3$ мкс, $R = 1,015$ мм; при $t_2 = 5,35$ мкс, $R = 1,02$ мм. Таким образом, изменение функции $R(t)$ в промежутке времени t_1 и t_2 по своему значению будет меньше 0,005 мм и на рисунке не может быть замечено. Отсюда можем сделать вывод, что вычисление гидродинамических характеристик по результатам обработки только СФР-грамм расширения полости, которые не могут достаточно точно фиксировать такие малые изменения $R(t)$, может привести к ошибкам определения $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$, $P(r, t)$, $v(r, t)$.

Для более глубокого понимания происходящих процессов, большей наглядности и возможности сравнения с вычислениями по формуле (1.81), построим кривую ускорений $\ddot{R}(t)$. Определив $R(t)$, по (4.14) вычисляем значения $v(R(t), t)$

и строим кривую 2 (рис. 4.4). По точным значениям ординат кривой 2 функции $v(R(t), t)$, соответствующим моментам времени, равным 0; 1; 3; 5; 5,35; 6; 8; 10 мкс, строим два полинома Лагранжа, точно описывающих кривую $v(R(t), t)$ в указанных точках до и после скачка. В промежуточных точках полином описывает кривую $v(R(t), t)$ с некоторым приближением:

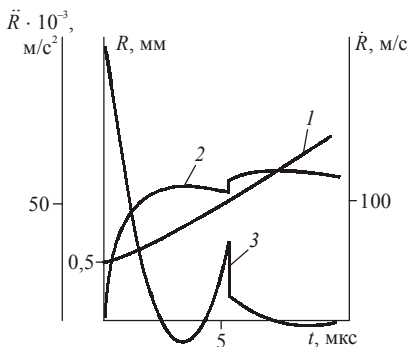
$$\begin{aligned} v(R(t), t) = & \left[3,855099 \cdot 10^{18} t^3 - 38,67502 \cdot 10^{12} t^2 + 118,7892 \cdot 10^6 t \right] \sigma_0(t) - \\ & - \left[3,855099 \cdot 10^{18} t^3 - 38,67502 \cdot 10^{12} t^2 + 118,7892 \cdot 10^6 t \right] \sigma_0(t) \sigma_0(t - 5,35 \cdot 10^{-6}) + \\ & + \left[0,352748 \cdot 10^{18} (t - 5,35 \cdot 10^{-6})^3 - 3,59589 \cdot 10^{12} (t - 5,35 \cdot 10^{-6})^2 + \right. \\ & \left. + 9,421179 \cdot 10^6 (t - 5,35 \cdot 10^{-6}) + 119,9889 \right] \sigma_0(t - 5,35 \cdot 10^{-6}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Взяв производную по времени от (4.15), получим функцию $\ddot{R}(t)$, кривая 3 (рис. 4.4):

$$\begin{aligned} \ddot{R}(t) = & \left[11,55297 \cdot 10^{18} t^2 - 77,35004 \cdot 10^{12} t + 118,7892 \cdot 10^6 \right] \sigma_0(t) - \\ & - \left[11,55297 \cdot 10^{18} t^2 - 77,35004 \cdot 10^{12} t + 118,7892 \cdot 10^6 \right] \sigma_0(t) \sigma_0(t - 5,35 \cdot 10^{-6}) + \\ & + \left[1,058244 \cdot 10^{18} (t - 5,35 \cdot 10^{-6})^2 - 7,19178 \cdot 10^{12} (t - 5,35 \cdot 10^{-6}) + \right. \\ & \left. + 9,421179 \cdot 10^6 \right] \sigma_0(t - 5,35 \cdot 10^{-6}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Рис. 4.4. Восстановление радиуса, скорости и ускорения подвижной границы по давлению в точке (рис. 4.3):

1 – радиус $R(t)$; 2 – скорость $v(R(t), t)$;
3 – ускорение $\ddot{R}(t)$



Для рассматриваемого примера компонента давления на поршне определяется из (4.10) при $m = 0$, $k = 1, 2$ следующим соотношением:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \left\{ A_0^I \sigma_0 \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) - A_0^I \sigma_0 \left(t - \alpha_1 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) + A_0^{\text{II}} \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) - \\ & - A_0^{\text{II}} \sigma_0 \left(t - \alpha_2 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \sigma_0 \left(t - \alpha_3 - \frac{R(t) - r_1}{a_0} \right) \Bigg\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

По (4.17) построена кривая давлений на подвижной поверхности поршня $P(R(t), t)$ (рис. 4.5). Следует отметить, что величины скачков исследуемых функций $P(R(t), t)$ кривая 1 (рис. 4.5) и $v(R(t), t)$ кривая 2 (рис. 4.4) получаются естественным образом при вычислениях по соответствующим формулам. Получение их другими известными способами до настоящего времени являлось сложной самостоятельной проблемой [36, с. 110].

Вид кривых $R(t)$, $\dot{R}(t)$, $\ddot{R}(t)$ (см. рис. 4.4) свидетельствует о том, что скорость плавно изменяется от нуля до 100 м/с за первую 1 мкс, ускорение при $t = 0$ имеет скачок порядка $120 \cdot 10^6$ м/с, что и является условием образования ударной волны. Для получения давления в точке r_1 вида (4.7) необходимо полость расширять по законам: скорость $v(R(t), t)$ – по (4.15) (рис. 4.4, кривая 3), ускорение $\ddot{R}(t)$ – по (4.16) (рис. 4.4, кривая 3), при этом давление на подвижной поверхности будет изменяться по закону $P(R(t), t)$ (4.17) (рис. 4.5, кривая 1).

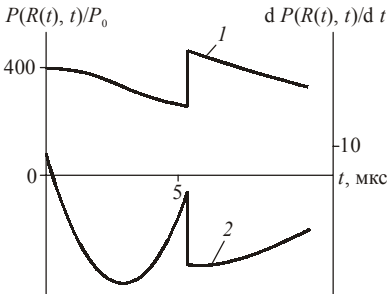


Рис. 4.5. Реконструкция давления и временного градиента давления на подвижной границе полости:
1 – давление на подвижной границе;
2 – временной градиент давления

Рассмотрим второй, наименее разработанный вопрос. Расширение полости в жидкости может быть вызвано различными химическими (горение, взрыв) и физическими (электрический разряд, лазерный импульс, взрыв или схлопывание шаровой молнии [18]) процессами, которые в настоящее время в различной степени поддаются контролю и управлению. Разработанный метод позволяет точно определять гидродинамические характеристики на движущейся с произвольной скоростью поверхности поршня с учетом конечных размеров начального радиуса r_0 , что весьма важно при изучении плазмы канала электрического разряда и шаровой молнии, имеющих конечные размеры (приближенное

решение [37] в этом случае непригодно). Это позволяет более реально строить физические и математические модели для изучения явлений, происходящих в плазме.

Рассмотрим подробнее электрический разряд в жидкости. Для не слишком сильных электрических разрядов с небольшими по сравнению со скоростью звука скоростями расширения канала, следуя данным работ [27, 28], приближенно примем уравнение баланса энергии в виде (3.102). Для вычисления по (3.102) определены все величины. Для определения dP/dt по точным значениям ординат функции $P(R(t), t)$ (рис. 4.5, кривая 1), соответствующим моментам времени, равным 0; 1; 3; 5,35; 6; 8; 10 мкс строим полиномы Лагранжа:

$$P(R(t), t) = \sum_{m=0}^3 A_m t^m \sigma_0(t) - \sum_{m=0}^3 A_m t^m \sigma_0(t) \sigma_0(t - 5,35 \cdot 10^{-6}) + \\ + \sum_{m=0}^3 B_m (t - 5,35 \cdot 10^{-6})^m \sigma_0(t - 5,35 \cdot 10^{-6}) - \\ - \sum_{m=0}^3 B_m (t - 5,35 \cdot 10^{-6})^m \sigma_0(t - 5,35 \cdot 10^{-6}) \sigma_0(t - 10,7 \cdot 10^{-6}) = F_1. \quad (4.18)$$

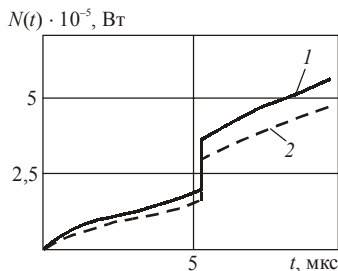
Дифференцируя (4.18), получаем соотношение

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dF_1}{dt}. \quad (4.19)$$

По (3.102) с учетом (4.14), (4.15), (4.17), (4.18), (4.19) строим кривую $N(t)$ (рис. 4.6), где показаны два случая: $\gamma = 1,2$ – кривая 1, $\gamma = 1,26$ – кривая 2.

Рис. 4.6. Реконструкция мощности, вводимой в канал разряда, для получения формы давления в точке r_1 в виде двойной ступеньки:

1 – $\gamma = 1,2$; 2 – $\gamma = 1,26$



Таким образом, для получения давления в точке r_1 в виде двойной ступеньки (см. рис. 4.3) необходимо в канал вводить мощность по закону, показанному на рис. 4.6. Полученные соотношения позволяют определять точно и однозначно закон расширения полости для получения любой наперед заданной функции давления в произвольной точке волновой зоны. Причем эта функция давления может иметь произвольное число скачков. С учетом (3.102)

можно определить вводимую в канал мощность, чтобы получить необходимый закон расширения канала.

По известной функции $N(t)$ можно определить соответствующие функции тока и напряжения.

4.3. Влияние величины начального радиуса на гидродинамические характеристики

Величина начального радиуса r_0 очень влияет на гидродинамику расширяющегося поршня [6]. Физически очевидно, что для расширения полости в жидкости с одной и той же скоростью с различных начальных радиусов потребуется существенно различная мощность. При этом давление на подвижной границе поршня будет существенно различаться.

Пусть поршень расширяется по закону

$$R(t) = r_0 + \frac{A}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)],$$

$$v(R(t), t) = A \exp(-\alpha t) \sigma_0(t), \quad (4.20)$$

где $\alpha = 0,005 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $A = 200 \text{ м/с}$; $r = 50 \text{ мм}$.

Используя соотношения для скорости (3.28) и моментов времени, равных 7; 12; 17; 25 мкс при $m = 0 \div 3$, $a_0 = 1500 \text{ м/с}$; $r_1 = 55 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, составляем систему четырех алгебраических уравнений, решая которую, определяем коэффициенты Лагранжа:

$$A_0 = 2778,0, \quad A_1 = -85,25 \cdot 10^6, \quad A_2 = 1,425 \cdot 10^{12}, \quad A_3 = -0,0125 \cdot 10^{18}. \quad (4.21)$$

Теперь известна компонента давления в точке $r_1 = 55 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^m. \quad (4.22)$$

Компонента давления в любой другой точке r_2 имеет вид

$$P(r_2, t) = \frac{55 \cdot 10^{-3}}{r_2} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{r_2 - r_0}{a_0} \right)^m. \quad (4.23)$$

Скорость частиц в точке r_2 запишем

$$\frac{\rho_0 r_2^2 v(r_2, t)}{r_1} = \frac{r_2}{a_0} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{r_2 - r_0}{a_0} \right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{r_2 - r_0}{a_0} \right)^{m+1}. \quad (4.24)$$

Компоненту давления на поршне находим

$$P(R(t), t) = \frac{55 \cdot 10^{-3}}{R(t)} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{R(t) - 50 \cdot 10^{-3}}{a_0} \right)^m. \quad (4.25)$$

В (4.22)–(4.25) коэффициенты Лагранжа A_m берем из (4.21). По соотношениям (4.20)–(4.25) построены кривые. Показано (рис. 4.7) кривая 1 изменения давления в точке $r_1 = 55 \cdot 10^{-3}$ м, которое вычислено с учетом нелинейного члена $0,5 \rho_0 v^2(r_1, t)$ интеграла Коши-Лагранжа, поскольку точка r_1 находится вблизи расширяющегося поршня и скорость частиц достаточно велика, изменение скорости частиц в точке r_1 – кривая 2.

По формуле (1.81) вычислить эти значения невозможно, поскольку в этой формуле аргумент $t - \frac{r = 55 \cdot 10^{-3}}{a_0}$ отрицателен в диапазоне времени 0–36,(6) мкс.

Показано (рис. 4.8) изменение давления на подвижной поверхности поршня, давление вычислено по (4.25) с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа, кривая 2 построена по значениям, вычисленным по формуле (3.34) [20] при $r = R(t)$. Она даже качественно не описывает изменение давления на поршне (пересекает горизонтальную ось).

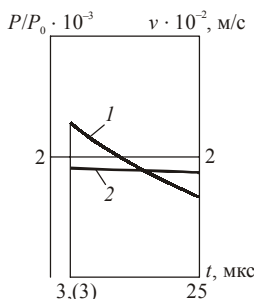


Рис. 4.7. Зависимость давления и скорости в точке $r_1 = 55 \cdot 10^{-3}$ м от времени:

1 – давление в точке вблизи расширяющейся оболочки $r_0 = 50 \cdot 10^{-3}$ м; 2 – скорость частиц

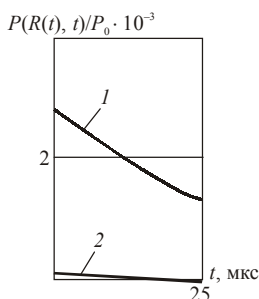


Рис. 4.8. Изменение давления на подвижной поверхности поршня (начальный радиус $r_0 = 50 \cdot 10^{-3}$ м):

1 – давление на подвижной границе (по методу); 2 – давление на подвижной границе по формуле (3.34)

Сравнивая вычисления по формулам (3.29)–(3.33), где $r_0 = 0,5$ мм, с вычислениями по формулам (4.20)–(4.25), где $r_0 = 50$ мм при одинаковых скоростях расширения поршня $v(R(t), t) = 200 \exp(-5 \cdot 10^3 t)$ видим, как велико влияние величины r_0 на гидродинамические характеристики. Большие значения величин r_0 на практике встречаются при расчетах взрывов газовых смесей в жидкости. Учет величины r_0 необходим и при расчетах канала электрического разряда, лазерного импульса и шаровой молнии, имеющих конечные размеры.

4.4. Распространение возмущений в сжимаемой, вязкой, теплопроводящей среде

Классическая задача определения гидродинамических характеристик по известной скорости расширения поршня в жидкости (прямая задача) рассматривалась в работах [20, 38–41]. Учет влияния вязкости и теплопроводности на распространение сферических волн произведен в работах [42, 43], при этом предполагалось, что размеры излучателя велики по сравнению с длиной волны, то есть всегда выполняется условие $kr \gg 1$, где k – волновое число, r – радиус сферы.

Цель настоящего исследования – получение решения, свободного от этого ограничения [6, 44].

Следуя данным работ [42, 45], запишем для сферической симметрии уравнения движения, сплошности и приближенное уравнение состояния

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \rho - \frac{\partial P}{\partial r} + b \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rv)}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} v \right], \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{\rho v}{r} = 0, \quad (4.27)$$

$$P = P_0 + a^2 (\rho - \rho_0) + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\rho_0}{a_0^2} (\rho - \rho_0)^2. \quad (4.28)$$

Здесь $b = \frac{4}{3} \eta + \zeta + \chi \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right)$;

η, ζ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей;

χ – коэффициент теплопроводности;

c_p, c_v – удельные теплоемкости.

Для газов $\gamma = c_p/c_v$. Для жидкостей

$$\gamma = \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right) \frac{\rho_0}{a_0^2} + 1,$$

индекс 0 обозначает равновесные значения величин.

Присутствие коэффициента χ в соотношении для b обусловлено объединением членов с вязкостью в уравнении Навье-Стокса с так называемыми тепловыми членами уравнения состояния, учитывающими неадиабатичность процесса. Такое объединение возможно при условии малости поглощения на длине волны [46].

Введем тепловую функцию

$$W = \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho},$$

$$dW = \frac{a^2 d\rho}{\rho} = \frac{a^2}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right] = \frac{\partial W}{\partial t} + v \frac{\partial W}{\partial r}.$$

С учетом (4.28) можно записать $(\partial P / \partial \rho)_S = a^2 = a_0^2 + (\gamma - 1)W$. Уравнение движения (4.26) после умножения на dr и интегрирования примет вид

$$W = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{2}{r} + \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}. \quad (4.29)$$

Преобразуем уравнение непрерывности, которое не зависит от η , ζ , χ . Умножая (4.27) на a^2 , с учетом тепловой функции и $v = \partial \varphi / \partial r$ получаем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial r} + a^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0. \quad (4.30)$$

Подставляя (4.29) в (4.30), с учетом $(\partial P / \partial \rho)_S = a^2 = a_0^2 + (\gamma - 1)W$ записываем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial r} + \left[a_0^2 + (\gamma - 1)W \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left[a_0^2 + (\gamma - 1)W \right] \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \\ & -\ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \left[(\varphi')^2 \right]'_t + \frac{b}{\rho_0} \frac{2}{r} \dot{\varphi}' + \frac{b}{\rho_0} \dot{\varphi}'' + \\ & + \dot{\varphi}' - \left\{ -\dot{\varphi}' - \frac{1}{2} \left[(\varphi')^2 \right]' + \frac{2b}{\rho_0} \left[\varphi' \frac{1}{r} \right]' + \frac{b}{\rho_0} \varphi''' \right\} + \\ & + \dot{\varphi}'' a_0^2 + (\gamma - 1) \varphi'' \left\{ -\dot{\varphi}' - \frac{1}{2} (\varphi')^2 + \frac{b}{\rho_0} \varphi' \frac{2}{r} + \frac{b}{\rho_0} \varphi'' \right\} + \\ & + \varphi' a_0^2 \frac{2}{r} + \frac{2}{r} (\gamma - 1) \varphi' \left\{ -\varphi' - \frac{1}{2} (\varphi')^2 + \frac{b}{\rho_0} \frac{2}{r} \varphi' + \frac{b}{\rho_0} \varphi'' \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Пренебрегая в (4.31) величинами второго и третьего порядка малости, как в (3.1), получаем

$$-\ddot{\varphi} + \frac{b}{\rho_0} \frac{2}{r} \dot{\varphi}' + \frac{b}{\rho_0} \dot{\varphi}'' + a_0^2 \varphi'' + a_0^2 \frac{2}{r} \varphi' = 0. \quad (4.32)$$

Применяя преобразование Лапласа к (4.32), с учетом нулевых начальных условий получаем

$$-s^2 \Phi + \frac{b}{\rho_0} s \Phi_{rr} + 2 \frac{1}{r} \frac{b}{\rho_0} s \Phi_r + a_0^2 \Phi_{rr} + \frac{2a_0^2}{r} \Phi_r = 0,$$

$$r \Phi_{rr} + 2 \Phi_r - \left[\frac{s^2}{a_0^2 \left(1 + \frac{b}{\rho_0} \frac{s}{a_0^2} \right)} \right] r \Phi = 0. \quad (4.33)$$

Решение (4.33) для расходящихся и сходящихся волн имеет вид [47]

$$r \bar{\varphi} = c_1 \operatorname{ch} r \frac{s}{a_0} F(s) + c_2 \operatorname{sh} r \frac{s}{a_0} F(s). \quad (4.34)$$

Здесь $F(s) = \left(1 + \frac{b}{\rho_0} \frac{s}{a_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$

Для расходящихся волн с учетом $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, получаем

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{r} c(s) \exp \left[-r \frac{s}{a_0} F(s) \right]. \quad (4.35)$$

Принимая в точке r_1 значение $P(r_1, t)$ в виде экспоненты с учетом вида решения (4.35), в изображениях $\bar{P}(r_1, s)$ можем записать в виде

$$\bar{P}(r_1, s) = \frac{A}{s + \alpha} \exp \left[-s \left(\frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) F(s) \right]. \quad (4.36)$$

Из (4.35) с учетом (4.36) находим

$$c(s) = \frac{A r_1}{(s + \alpha) \rho_0 s} \exp \left[s \left(\frac{r_0}{a_0} \right) F(s) \right].$$

Подставляя его в (4.35), получаем

$$\bar{\varphi} = \frac{A r_1}{(s + \alpha) r \rho_0 s} \exp \left[-s \left(\frac{r - r_0}{a_0} \right) F(s) \right], \quad (4.37)$$

$$\bar{P}(r, s) = \rho_0 s \bar{\varphi} = \frac{A r_1}{(s + \alpha) r} \exp \left[-s \left(\frac{r - r_0}{a_0} \right) F(s) \right], \quad (4.38)$$

$$\bar{\varphi}_r = -\frac{Ar_1}{(s+\alpha)\rho_0 s} \left(\frac{s}{r a_0} + \frac{1}{r^2} \right) \exp \left[-s \left(\frac{r-r_0}{a_0} \right) F(s) \right], \quad (4.39)$$

$$\bar{\varphi}_{rr} = \frac{Ar_1}{(s+\alpha)\rho_0 s r} \left(\frac{s^2 F^2}{a_0^2} + \frac{2s F}{a_0 r} + \frac{2}{r^2} \right) \exp \left[-s \left(\frac{r-r_0}{a_0} \right) F(s) \right]. \quad (4.40)$$

Для произвольного закона изменения давления в точке r_1 $P(r_1, t) = \tilde{f}(t)$, соответствующие функции будут иметь вид

$$\bar{P}(r, s) = \frac{r_1}{r} \tilde{f}(s) \exp \left[-s \left(\frac{r-r_0}{a_0} \right) F(s) \right], \quad (4.41)$$

$$\bar{\varphi}_r = -\frac{r_1}{r \rho_0 s} \tilde{f}(s) \left[\frac{1}{r} + \frac{s}{a_0} F(s) \right] \exp \left[-s \left(\frac{r-r_0}{a_0} \right) F(s) \right], \quad (4.42)$$

$$\bar{\varphi}_{rr} = \frac{r_1}{r \rho_0 s} \tilde{f}(s) \left[\frac{2}{r^2} + \frac{2s}{r a_0} F(s) + \frac{s^2}{a_0^2} F^2(s) \right] \exp \left[-s \left(\frac{r-r_0}{a_0} \right) F(s) \right]. \quad (4.43)$$

Из (4.38), переходя к оригиналам и с учетом

$$\exp(-x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m!}$$

получаем

$$\begin{aligned} P(r, t) = & \frac{Ar_1}{r} \left\{ \exp(-\alpha t) - \left(\frac{r-r_0}{a_0} \right) \left(1 - \frac{\alpha b}{\rho_0 a_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \times \left[(-\alpha) \exp(-\alpha t) \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\rho_0 a_0^2}{b}} - \alpha \sqrt{t} \right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\rho_0 a_0^2}{b} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{r-r_0}{a_0} \right)^2 (-\alpha)^2 \left(1 - \frac{\alpha b}{\rho_0 a_0^2} \right)^{-1} \left[\exp(-\alpha t) - \exp \left(-\frac{\rho_0 a_0^2}{b} t \right) \right] - \dots \right\}. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Аналогично записываются оригиналы (4.39)–(4.43). Соответствующие значения на поршне $r = R(t)$ имеют вид $\varphi_r(R(t), t)$, $P(R(t), t)$, $\varphi_{rr}(R(t), t)$.

Соотношения (4.35)–(4.40), (4.41)–(4.43) при $b \rightarrow 0$ переходят в соответствующие формулы (3.12)–(3.16), (4.23)–(4.26).

Подставляя найденные значения φ_r , φ_{rr} , φ_t в (4.29) при $\rho \approx \rho_0$ и сравнивая с соответствующими значениями при $b \rightarrow 0$, определяем величину $\Delta P/P_0$,

характеризующую влияние η , ζ , χ на распространение волн, и расстояние r^* , на котором это влияние существенно.

Для $b \rightarrow 0$ точные аналитические зависимости приведены в третьей главе. Рассмотрим пример.

Для воды $T = 15^\circ\text{C}$ [48, 49], $\frac{b}{\rho_0} a_0^2 = 2,0244 \cdot 10^{-12}$ с и для больших

значений времени $F(s) \approx 1$. Тогда при

$$\bar{P}(r_1, s) = \frac{A}{s + \alpha} \exp \left[-s \left(\frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) F(s) \right],$$

$$t = 1 + 10 \cdot 10^{-6} \text{ с}; \quad r_1 = 1 \text{ м}, \quad r = r_2 = 1500 \text{ м}; \quad a_0 = 1500 \text{ м/с};$$

$$\alpha = 0,025 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}; \quad A = 8 \text{ кгс/см},$$

$$\text{получаем } \left[\frac{2}{r} b \varphi_r \right] = -2,1 \cdot 10^{-14}; \quad [b \varphi_{rr}] = -2,63 \cdot 10^{-10} \text{ кгс/см}^2.$$

При этом $\Delta P/P_0 \approx 2,63 \cdot 10^{-10}$; $r^* = 1500 \text{ м}$; $P(r_2, t)/P_0 = 0,0052$.

Полученные соотношения позволяют определять поля скорости и давления с учетом диссипативных процессов, вызванных вязкостью и теплопроводностью, в любой точке и в любое время; включая подвижную поверхность поршня, при произвольных величинах начального радиуса и изменениях скорости расширения поршня.

Таким образом, предложенный метод имеет достаточно общий характер; полученные соотношения универсальны, так как позволяют решать прямые и обратные задачи.

4.5. Определение давления без внесения возмущений в среду

Поля давлений при импульсных возмущениях определяют либо помещая датчики давления в среду, либо вычисляя давление по результатам кинограмм расширения полости. В первом случае ввод датчиков в среду искажает поле давлений; датчик фиксирует сложное поле – результат взаимодействия набегающей волны с телом датчика, которое в свою очередь может деформироваться и перемещаться. Следует добавить проблемы тарировки и влияние волн возмущения на электрические цепи. Во втором случае фиксируется изменение радиуса. Как мы уже видели, при решении обратных задач с подвижными границами скачок функции давления в точке волновой зоны при восстановлении функции изменения радиуса скачка последней не дает. Скачков функции $R(t)$ нет и быть не может, ибо в любой момент времени t функция имеет одно и только одно значение (хотя функции $\dot{R}(t)$ и $\ddot{R}(t)$ скачки иметь могут, см. рис. 4.4). Восстановить скачки функций $\dot{R}(t)$ и $\ddot{R}(t)$ по кинограммам

изменения радиуса – сложная задача. В некоторых средах возможна значительная скорость испарения с внутренней поверхности полости. В этих случаях вычисление полей давлений по функции $R(t)$ может привести к ошибкам.

Для определения гидродинамических полей без внесения возмущений в среду можно воспользоваться формулами [6, 13], приведенными в третьей и четвертой главах.

1. Пусть известна скорость частиц среды в какой-либо точке r_1 волновой зоны. Измерить скорости частиц можно, например, гетеродинным лазерным доплеровским измерителем [50], при этом погрешность измерений за счет прохождения луча через зону ударной волны с максимальным давлением, не превышающим десять атмосфер, будет $\approx 0,2\%$. Тогда по формуле (3.15) или (3.26) для нескольких значений времени t составляем систему алгебраических уравнений и определяем коэффициенты A_m полинома Лагранжа. Для практических расчетов достаточно брать $m = 4$. Теперь становится известной функция давления в точке волновой зоны r_1 . По соотношениям (3.13), (3.25) определяем давление в других точках, по формулам (3.17), (3.35) – изменение радиуса подвижной границы, а по (3.14), (3.27) – давление на подвижной границе. Более подробно о количественной оценке поля скоростей, являющегося исходным для приведенного расчета, см. перечень работ, например, в [51]; визуализация течений может быть произведена с помощью мелких газовых пузырьков, создаваемых путем электролиза [52], фотографируя поток с фиксированной экспозицией, можно по длине трассы, прочерченной отдельным пузырьком, судить о величине и направлении скорости в месте его нахождения. Аналогичен метод, использующий введение в поток нерастворимых твердых и жидких частиц [53].

2. В третьей главе получены формулы для движения одной границы, вторая неподвижна. При расположении датчика давления заподлицо с неподвижной границей он будет фиксировать сложное поле давлений, являющееся результатом нелинейного взаимодействия только падающей волны, отошедшей от подвижной границы, и отраженной. Пусть известно $P(R_2, t)$ – давление на неподвижной границе. Тогда по формуле (3.84) определяем давление в других точках; по соотношениям (3.82) восстанавливаем функцию $R(t)$ – изменение радиуса полости, расширяющейся в оболочке, а по (3.81) определяем давление на подвижной границе поршня.

4.6. Влияние скорости испарения с внутренней поверхности расширяющегося плазменного поршня на гидродинамические характеристики

Оценку этого явления произведем, исходя из решений прямой задачи [54]. При электрическом разряде, а также при взрыве взрывчатых веществ или лазерном импульсе в жидкости образуется полость. По результатам съемки нестационарного движения полости в сжимаемой жидкости скоростным фоторегистратором (СФР) можно с достаточной точностью найти закон движения

границы полости. Используя численные методы (гл. 1), а в акустическом приближении и аналитические соотношения, по известному закону движения границы поршня можно определить все гидродинамические характеристики течения. При этом зачастую граница полости принимается непроницаемой. Известно [20], что при взрыве взрывчатых веществ и подводном электрическом разряде температура продуктов взрыва достигает нескольких тысяч градусов, а температура плазмы – несколько десятков тысяч градусов, что приводит к испарению жидкости со стенок полости. Сложность и малая изученность физических процессов, происходящих при этом, не позволяют пока создать приемлемую математическую модель для оценки влияния испарения на гидродинамические характеристики.

Предлагается следующий способ оценки влияния испарения:

$$v_n = \frac{d}{dt} [R(t) - r_u(t)], \quad (4.45)$$

где v_n – скорость излучения потока с поверхности поршня;

$R(t)$ – закон изменения радиуса поршня, полученный в результате обработки СФР-грамм;

$r_u(t)$ – закон изменения радиуса поршня, обусловленный испарением с внутренней стороны полости.

Задаваясь функцией $r_u(t)$, исходя из каких-либо физических соображений, можно, например, численными методами определить влияние испарения в самом общем случае.

Для оценки в акустическом приближении воспользуемся выражением для потенциала скорости ϕ , полученном для случая расширения сферы в сжимаемой жидкости (см. главу 3). Тогда при оценке влияния испарения, например, на величину давления получаем

$$\frac{P - P_0}{P' - P'_0} = \frac{\dot{\phi}(R(t), t)}{\dot{\phi}(R(t) - r_u(t))}. \quad (4.46)$$

При $R(t) = u \cdot t$; $u = \text{const}$; $r_u(t) = A \cdot t$; $A = \text{const}$ из (4.46) находим, с учетом (3) работы [39, 41], и того, что на радиусе $R(t)$ скорости частиц в случае непроницаемой границы равны u , а в случае испарения $(u - A)$:

$$\frac{P - P_0}{P' - P'_0} \approx \frac{u^3}{(u - A)^3}. \quad (4.47)$$

Если поставить условие, что давление не должно изменяться в результате испарения с внутренней поверхности поршня более чем на 5 %, то при $u = 300$ м/с скорость перемещения поверхности испарения $A = 4,87$ м/с.

Такая оценка позволяет определить толщину испаряемого слоя жидкости в любое мгновение, число частиц в канале разряда, а также оценить влияние

испарения, используя простейшие и наиболее достоверные физические соображения.

Следует отметить, что по соотношениям, приведенным в третьей главе, можно определить величину r_0 по заданным функциям P или v в произвольных точках волновой зоны.

4.7. Определение исследуемых функций на большом расстоянии от подвижной границы

Оценка погрешности, которая образуется при определении функции φ из уравнения (3.5), а не из (3.1), при расчете ударных волн на больших расстояниях от места взрыва, требует использования для сравнения точного аналитического решения (3.1) или надежных экспериментальных данных. Точное решение уравнения (3.1) еще не получено. Поэтому воспользуемся расчетами С.А. Христиановича [55], весьма близкими к экспериментальным данным Р. Коула [5]. Представлено (рис. 4.9) изменение давления от взрыва одного килограмма тротила в точках $r = 2,12 \text{ м} - 1$; $r = 12,72 \text{ м} - 2$, вычисленное по формуле

$$P = P_m \exp(-\Delta t / \Theta),$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0}; P_m = 250; \Theta = 0,1270548 \text{ мс},$$

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0} = 240; P_m = 29,2; \Theta = 0,185137 \text{ мс},$$

обозначения и величины взяты из таблицы 1 [55]; $r_0 = 0,054 \sqrt[3]{q}$, $q = 1$, Δt мс и результаты реконструкции – кривая 3 давления в точке $r = 12,72 \text{ м}$, вычисленная по формуле (3.25). Исходные значения для восстановления – кривая 1 приближенно аппроксимирована полиномом Лагранжа

$$P(r_1 = 2,12 \text{ м}, t) = \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right)^m,$$

где

$$r_0 = 0,053 \text{ м}; a = 1460 \text{ м/с};$$

$$A_0 = 250; A_1 = -1742,964; A_2 = 4062,932; A_3 = -2572,873.$$

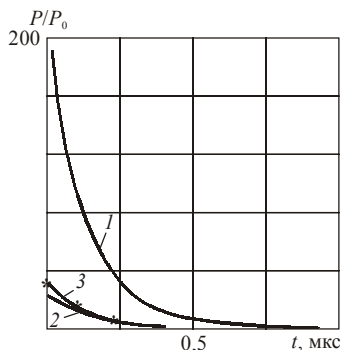


Рис. 4.9. Изменение давления на больших расстояниях от подвижных границ:

1, 2 – расчет по таблице 1 [144]; 3 – расчет по предлагаемому методу

Удовлетворительное согласование различных расчетных и экспериментальных данных свидетельствуют о правомочности предложенного подхода к решению задач с подвижными границами.

4.8. Решение волнового уравнения при наличии проницаемых и излучающих подвижных границ

Автор поставил себе задачу учесть влияние того факта, что законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающейся с ней, могут быть произвольны и различны [13, 56]. В параграфе 4.6 с помощью решений прямой задачи рассмотрено влияние скорости испарения с внутренней поверхности расширяющейся полости. Математически это означает, что на подвижной границе, изменяющейся по закону $R(t)$, скорость частиц среды, соприкасающихся с подвижной границей, не равна $dR(t)/dt$, то есть

$$v(R(t), t) \neq \frac{dR(t)}{dt}.$$

Такую границу, для случая $v(R(t), t) < dR(t)/dt$ назовем проницаемой подвижной границей. Случай $v(R(t), t) > dR(t)/dt$ назовем излучающей подвижной границей. Примером проницаемой подвижной границы может служить движение в среде поршня с отверстиями. Примером излучающей подвижной границы служит движение в среде поршня, с поверхности которого происходит истечение среды, таким образом, скорость частиц, соприкасающихся с подвижной границей, будет больше скорости движения границы.

Рассмотрим движение среды, вызванное перемещением проницаемой границы в безграничной жидкости. Возмущение, возникшее в результате движения проницаемой границы, будет распространяться в среде, и ее распространение будет описываться волновым уравнением (среда не изменилась). При этом скорость распространения возмущений будет также равна $a_0 = \text{const}$, включая точки вблизи подвижной границы. Пусть известно в какой-либо точке волновой зоны r_1 давление $P(r_1, t) = f$. Для общего случая запишем его в виде

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^m. \quad (4.48)$$

Вся информация о том, что возмущения распространяются от проницаемой подвижной границы, содержится в коэффициентах Лагранжа A_m . Применяя преобразование Лапласа к волновому уравнению с учетом нулевых начальных условий, получим операторное уравнение, решая которое с учетом (4.48), получим для точек волновой зоны

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^m,$$

$$v(r, t) \frac{r^2 \rho_0}{r_1} = \frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^{m+1} = \frac{dr^3 \rho_0}{3 dt r_1}. \quad (4.49)$$

Как видим, полученные соотношения точно соответствуют полученным ранее, когда граница была непроницаемой (см. гл. 3). Различие заключается в той информации, которую несут коэффициенты Лагранжа A_m . Эти соотношения пригодны для всех точек волновой зоны. На подвижных границах эти соотношения будут иметь вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^m, \quad (4.50)$$

$$\frac{v(R(t), t) R^2(t) \rho_0}{r_1} = \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1},$$

$$\xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}, \quad (4.51)$$

где $v(R(t), t)$ – скорость частиц среды на проницаемой подвижной границе, при этом $v(R(t), t) \neq dR(t)/dt$.

Изменение объема в единицу времени dV/dt по "наблюдаемому" изменению радиуса подвижной границы в рассматриваемом случае будет иметь две составляющие:

$$dV/dt = dV_1/dt + dV_2/dt,$$

где dV_1/dt – изменение объема, которое обуславливает изменение скорости частиц среды, соприкасающихся с подвижной границей;

dV_2/dt – изменение объема, вызванное испарением с внутренней поверхности подвижной границы наблюдаемого радиуса.

Известно физическое свойство [37, стр. 345] – объем жидкости, протекающий через замкнутую поверхность, равен изменению объема в единицу времени, т.е. $dV_1/dt = 4\pi r^2 v(r, t)$, где v – второе соотношение из (4.49). Оно имеет место в любой точке, включая подвижные границы. Тогда из соотношения для dV/dt можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{[R^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3r_1} = \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+1} + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+2} + \frac{V_2 \rho_0}{4\pi r_1}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где A_m несут информацию о движении проницаемой границы. Вычисление $R(t)$ из этого "кубического" уравнения производится аналогично, как и по соответствующим формулам глав 3 и 4.

Подобные рассуждения можно привести и для случая излучающей подвижной границы.

Вышеизложенное позволяет сделать важный вывод: полученные решения волнового уравнения универсальны не только в смысле того, что позволяют решать как прямые, так и обратные задачи, они универсальны и в смысле пригодности для случаев проницаемых и излучающих подвижных границ.

Проведем решение задачи для случая движения проницаемого сферического поршня, изменение радиуса поршня происходит по закону [13]

$$R(t) = r_0 + \frac{A}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha)t], \quad (4.53)$$

где $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м; $A = 350$ м/с; $\alpha = 0,0001 \cdot 10^6$ с $^{-1}$.

Изменение скорости частиц среды, соприкасающихся с движущейся границей, происходит по закону

$$v(R(t), t) = B \exp(-\alpha t), \quad (4.54)$$

где $B = 175$ м/с.

Из (4.51) для $m = 3$ получаем

$$\begin{aligned} v(R(t), t) = \frac{r_1 \cdot 10^4}{\rho_0 R^2(t)} \left\{ A_0 \left[\frac{R(t)}{a_0} \xi^0 + \xi^1 \right] + A_1 \left[\frac{R(t)}{a_0} \xi^1 + \frac{1}{2} \xi^2 \right] + \right. \\ \left. + A_2 \left[\frac{R(t)}{a_0} \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^3 \right] + A_3 \left[\frac{R(t)}{a_0} \xi^3 + \frac{1}{4} \xi^4 \right] \right\}, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

С учетом (4.53) и (4.54), из (4.55) для $r_1 = 0,08$ м, $t = 1; 2; 3; 4 \cdot 10^{-6}$ с приходим к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_{0-3} , решая которую, получаем возможность вычислить исследуемые функции в любых точках, включая подвижную проницаемую границу:

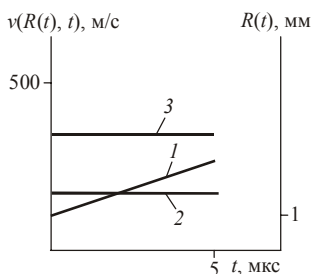
$$\begin{aligned} A_0 = 28,34256; \quad A_1 = -10,7496 \cdot 10^6; \quad A_2 = 6,39029 \cdot 10^{12}; \\ A_3 = -0,8778444 \cdot 10^{18}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

В (4.56) коэффициенты Лагранжа A_{0-3} несут информацию о том, что $dR(t)/dt \neq v(R(t), t)$.

Показаны результаты:

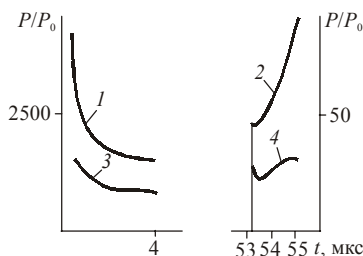
а) решения методом характеристик (см. гл. 1) полной системы (1.1)–(1.3) (кривые 1, 2, рис. 4.11) движения непроницаемой границы по закону (4.53) (кривые 1, 3, рис. 4.10), когда $dR(t)/dt = v(R(t))$;

б) вычислений по формулам (4.49)–(4.56), когда (рис. 4.10, кривая 1) вычислена по (4.53); (рис. 4.10, кривая 2) по (4.54); (рис. 4.11, кривая 3) по (4.50) с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа, где A_{0-3} из (4.56); (рис. 4.11, кривая 4) по (4.48), где A_{0-3} из (4.56).



1 – изменение радиуса проницаемой и непроницаемой подвижных границ; 2 – скорость частиц среды на движущейся проницаемой границе; 3 – скорость частиц среды на движущейся непроницаемой границе

Рис. 4.10. Изменение радиуса и скорости частиц среды, соприкасающихся с проницаемой и непроницаемой границами



Движение непроницаемой границы:

1 – давление на подвижной границе;

2 – давление в точке $r_1 = 0,08$ м.

Движение проницаемой границы:

3 – давление на подвижной проницаемой границе; 4 – давление в точке $r_1 = 0,08$ м, вызванное движением подвижной проницаемой границы

Рис. 4.11. Изменение давления на подвижной границе и в точке волновой зоны (движение проницаемой и непроницаемой границ)

Видим, сколь существенно различаются исследуемые функции при одинаковом законе изменения подвижной границы $R(t)$ (4.53) и различных скоростях частиц, соприкасающихся с подвижной границей.

Таким образом, разработанный новый подход решения задач с подвижными границами и полученные решения волнового уравнения позволяют определять исследуемые функции в любых точках, включая подвижные границы, при этом законы изменения радиуса $R(t)$ и скорости частиц среды, соприкасающихся с подвижными границами, могут быть произвольными и различными, т.е. $dR(t)/dt \neq v(R(t), t)$.

Заключение по главе 4

Разработанный подход для исследования задач с подвижными границами имеет важные приложения. Полученные решения позволили впервые определить границы применимости волнового уравнения в задачах импульсной гидродинамики; решить вопросы управления движением расширяющейся полости в жидкости; определения давления без внесения возмущений в среду; влияния скорости испарения с внутренней поверхности расширяющегося плазменного поршня на гидродинамические характеристики; влияние величины начального радиуса; определения исследуемых функций на больших расстояниях от подвижных границ. Подход распространен и на более сложные уравнения, учитывающие влияние вязкости и теплопроводности, при распространении возмущений, индуцированных подвижными границами, при этом величины начальных радиусов, перемещений и законы движения границ могут быть произвольными. Решены задачи, прямые и обратные, для случаев проникаемых и излучающих подвижных границ.

5. РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ДРУГИХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ, ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦ

Разработан и изложен в работах автора, приведенных в главах 1–4 новый подход к решению задач с подвижными границами, в основе которого лежит учет распространения возмущений с конечной скоростью. Этот факт связан с понятием запаздывания. Рассмотрение и получение всех сложных аргументов с реальными запаздываниями (для задачи с одной подвижной границы их пять) и с учетом их взаимодействия позволяет найти последовательность математических операций, приводящих к точному аналитическому решению волнового уравнения с подвижными границами и более сложных уравнений, например (4.32). В главах 3 и 4 исследование распространялось на класс задач сферической симметрии с одной и двумя подвижными границами, одна движется – вторая неподвижна, прямых и обратных задач, произведен учет проницаемости границ. Представляет интерес рассмотрение других случаев симметрии, граничных условий и уравнений.

5.1. Волновое уравнение с подвижными границами при наличии цилиндрической симметрии

Число публикаций, посвященных использованию волновых уравнений (3.5) для описания физических процессов, велико. Однако до сих пор не было получено точного аналитического решения волнового уравнения, когда граничные условия удовлетворяются на подвижных границах, в работах [1–19], посвященных гидродинамическим аспектам применения волнового уравнения, подобное решение не приведено.

Рассмотрим волновое уравнение при $v = 2$ [20, 21]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - a_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (5.1)$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Известны условия на подвижных поверхностях $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$

$$R_{1,2}(t) = F_{1,2}(t), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R(t)} = \frac{dR(t)}{dt}, \quad (5.2)$$

или в точках, находящихся между подвижными границами

$$-\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = P(r_{1,2}, t) = \tilde{f}_{1,2}(t), \quad \rho_0 = \text{const}. \quad (5.3)$$

Если известны условия (5.2), то это прямая задача, если только (5.3) – обратная. Решение сформулированной задачи единственно и устойчиво [22] (см. гл. 3). Сформулированная задача (5.1)–(5.3) относится к классу нелинейных задач с подвижными границами [23–25]. Решение волнового уравнения цилиндрической симметрии рассматривалось многими исследователями [13, 15, 17, 26–28], однако вопрос границ применимости и возможные погрешности применения этого уравнения при описании процессов распространения возмущений в сжимаемой среде оставался открытым. Ниже рассматривается точное аналитическое решение волнового уравнения (5.1), а также возможность применения полученных результатов для оценки гидродинамических полей скорости и давления при расширении цилиндрической полости, при этом закон изменения скорости подвижной границы, величины перемещений и начального радиуса произвольны.

Применяя к (5.1) одностороннее преобразование Лапласа, с учетом начальных условий, получаем операторное уравнение

$$r \bar{\varphi}_{rr}(r, s) + \bar{\varphi}_r(r, s) - \frac{s^2}{a_0^2} r \bar{\varphi}(r, s) = 0, \quad (5.4)$$

решением которого будет [1]

$$\bar{\varphi} = c_1(s) J_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right) + c_2(s) Y_0\left(i \frac{s}{a_0} r\right), \quad (5.5)$$

где J_0 , Y_0 – бесселевы функции первого и второго рода.

С учетом (5.3) имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_1(r_1, s) &= -\rho_0 s \left[c_1 J_0\left(i \frac{s}{a_0} r_1\right) + c_2 Y_0\left(i \frac{s}{a_0} r_1\right) \right], \\ \bar{f}_2(r_2, s) &= -\rho_0 s \left[c_1 J_0\left(i \frac{s}{a_0} r_2\right) + c_2 Y_0\left(i \frac{s}{a_0} r_2\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned}
 c_2(s) = & -\frac{\bar{f}_2(s)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K} - \frac{\bar{f}_1(s)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K}, \\
 c_1(s) = & -\frac{\bar{f}_1(s)}{\rho_0 s J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)} - \\
 & -\left[-\frac{\bar{f}_2(s)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K} + \frac{\bar{f}_1(s)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K}\right]. \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 K = & Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right) - Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right), \\
 \bar{\varphi}(r, i) = & -\frac{\bar{f}_1(s)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)} + \frac{\bar{f}_2(s)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s K} - \\
 & -\frac{\bar{f}_1(s)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s K} - \\
 & -\frac{\bar{f}_2(s)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s K} - \frac{\bar{f}_1(s)I_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K}. \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Нули функции $K = J_0(x)Y_0(\lambda x) - Y_0(x)J_0(\lambda x)$ можно определить как в работе [29]:

$$\bar{P}(r, s) = \bar{f}_1(s) \left[\frac{J_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)}{J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)} + \frac{J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)}{K} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_2\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)}{K} \Bigg] + \\
 & + \bar{f}_2(s) \left[\frac{J_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)}{K} - \frac{J_0\left(i\frac{s}{a_0}r\right)Y_0\left(i\frac{s}{a_0}r_1\right)}{K} \right]. \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Аналогично записывается соотношение для $\bar{v}(r, s)$. Оригиналы слагаемых, входящих в формулы (5.8), (5.9), находятся по теореме разложения [30], так как они представляют собой отношение обобщенных полиномов.

Решение уравнения (5.4) можно представить в другом виде. Производя замену переменных $x = \frac{s}{a_0}r$ в (5.4), получаем [30, 31]:

$$\Phi_{xx} + \frac{1}{x}\Phi_x - \Phi = 0,$$

решением которого будет

$$\Phi = c_1 I_0\left(\frac{s}{a_0}r\right) + c_2 K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right), \quad (5.10)$$

где I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя [29].

С учетом (5.3) имеем:

$$\begin{aligned}
 c_1 = & -\frac{\bar{f}_1(s)}{\rho_0 s I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)} + \frac{\bar{f}_2(s)K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K} - \frac{\bar{f}_1(s)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K}; \\
 c_2 = & -\frac{\bar{f}_2(s)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K} + \frac{\bar{f}_1(s)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K}, \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } K = K_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right) - K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right).$$

Потенциал скорости и давления принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(r, s) = & -\frac{\bar{f}_1(s)I_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)} + \frac{\bar{f}_2(s)K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s K} - \\ & -\frac{\bar{f}_1(s)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s K} + \\ & +\frac{\bar{f}_2(s)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)}{\rho_0 s K} + \frac{\bar{f}_1(s)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}{\rho_0 s K}, \quad (5.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(r, s) = & -\rho_0 s \bar{\varphi}(r, s) = \bar{f}(s) \left[\frac{I_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)}{I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)} + \frac{I_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)}{K} - \right. \\ & \left. - \frac{I_0\left(\frac{s}{a_0}r_2\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}{K} \right] + \\ & + \bar{f}_2(s) \left[\frac{I_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)}{K} - \frac{I_0\left(\frac{s}{a_0}r\right)K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}{K} \right]. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Аналогично можно записать и соотношение для $\bar{v}(r, s)$.

Решение для безграничной среды. В этом случае $c_1 = 0$ поскольку исследуемые функции при $r \rightarrow \infty$ должны быть ограниченными. Поэтому из (5.10)–(5.13) получаем:

$$\Phi(r, s) = c(s)K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right), \quad (5.14)$$

$$c(s) = -\frac{\bar{f}_1(r_1, s)}{\rho_0 s K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}, \quad (5.15)$$

$$\Phi(r, s) = -\frac{\bar{f}_1(s, r_1)}{\rho_0 s} \frac{K_0\left(\frac{s}{a_0} r\right)}{K_0\left(\frac{s}{a_0} r_1\right)}, \quad (5.16)$$

$$\bar{P}(r, s) = -\rho_0 s \Phi = \frac{\bar{f}_1(r_1, s) K_0\left(\frac{s}{a_0} r\right)}{K_0\left(\frac{s}{a_0} r_1\right)}. \quad (5.17)$$

Перевести в оригиналы соотношения (5.16)–(5.17) можно, например, как в работе [32].

Полученные решения (5.11)–(5.17) являются точными для волнового уравнения. Подстановка их в волновое уравнение превращает левую часть его в нуль.

Рассмотрим применение полученных решений для расчета гидродинамических характеристик при расширении цилиндрической полости.

Известно [33, с. 768], что в противоположность случаю сферической симметрии динамика цилиндрической полости в безграничной несжимаемой жидкости не может быть описана точным уравнением из-за логарифмической особенности на бесконечности. Между тем наличие хотя бы приближенной модели весьма желательно, поскольку целый ряд практических задач подводного взрыва и взрыва в грунтах распределенных зарядов, где часто используется модель несжимаемой жидкости, связан с необходимостью получения простых оценок характера движения полости.

1. Для определения оригиналов соотношений (5.12), (5.13), (5.16), (5.17) можно воспользоваться разложениями изображений в окрестности $|s| = \infty$, что дает представление, удобное при малых значениях t (или асимптотическими методами – для определения оригиналов при $t \rightarrow \infty$). Функции Макдональда имеют следующие представления [34]:

$$\left. \begin{aligned} K_0(x) &\sim -\ln \frac{x}{2} & (x \rightarrow 0) \\ K_1(x) &\sim \frac{1}{x} & (x \rightarrow 0) \\ K_0(x) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 - \frac{1}{8x} + \dots\right) & (x \rightarrow \infty) \\ K_1(x) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + \frac{3}{8x} + \dots\right) & (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\}. \quad (5.18)$$

С учетом (5.18) из (5.16), (5.17) получаем

$$\Phi(r, s) = -\frac{\bar{f}_1(r_1, s)}{\rho_0 s} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \exp\left[-s\left(\frac{r-r_1}{a_0}\right)\right], \quad (5.19)$$

$$P(r, s) = \bar{f}_1(r_1, s) \sqrt{\frac{r_1}{r}} \exp\left[-s\left(\frac{r-r_1}{a_0}\right)\right], \quad (5.20)$$

$$v(r, s) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\bar{f}_1(r_1, s)}{s \rho_0} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \left(\frac{t}{2r} + \frac{s}{a_0}\right) \exp\left[-s\left(\frac{r-r_1}{a_0}\right)\right], \quad (5.21)$$

$$\varphi(r, t) = -\sqrt{\frac{r_1}{r}} \frac{1}{\rho_0} \int_0^t f(t-\tau) \sigma_0 \left(\tau - \frac{r-r_1}{a_0}\right) d\tau, \quad (5.22)$$

$$P(r, t) = \sqrt{\frac{r_1}{r}} f\left(t - \frac{r-r_1}{a_0}\right), \quad (5.23)$$

$$v(r, t) = \sqrt{\frac{r_1}{r}} \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{2r} \int_0^t f(t-\tau) \sigma_0 \left(\tau - \frac{r-r_1}{a_0}\right) d\tau + \frac{1}{a_0} f\left(t - \frac{r-r_1}{a_0}\right) \right]. \quad (5.24)$$

В общем случае произвольных вида функции в точке r_1 и закона расширения цилиндрической поверхности функцию f удобно представить в виде полинома Лагранжа степени m . Пусть $P = -\rho_0 \varphi_t$ в точке r_1 имеет вид

$$P(r_1, t) = f_1(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1-r_0}{a_0}\right)^m, \quad (5.25)$$

тогда значение функций в любой точке будет иметь вид

$$P(r, t) = \sqrt{\frac{r_1}{r}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r-r_0}{a_0}\right)^m, \quad (5.26)$$

$$v(r, t) = \frac{1}{\rho_0} \sqrt{\frac{r_1}{r}} \left[\frac{1}{2r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{r-r_0}{a_0}\right)^{m+1} + \frac{1}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r-r_0}{a_0}\right)^m \right], \quad (5.27)$$

на подвижных границах имеем

$$P(R(t), t) = \sqrt{\frac{r_1}{R(t)}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{R(t)-r_0}{a_0}\right)^m, \quad (5.28)$$

$$v(R(t), t) = \sqrt{\frac{r_1}{R(t)}} \frac{1}{\rho_0} \times \left[\frac{1}{2 R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+1} + \frac{1}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^m \right]. \quad (5.29)$$

Для решения обратных задач понадобится знание функции $R(t)$, которую определим из соотношения

$$\frac{2}{5} \frac{[R^{5/2}(t) - r_0^{5/2}]}{\sqrt{r_1}} \rho_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+2} + \frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+1}. \quad (5.30)$$

2. Уравнение (5.1) описывает многие физические процессы. Для определенности примем полученные результаты для расчета гидродинамических характеристик расширяющегося бесконечного цилиндра в сжимаемой среде.

Рассмотрим обратную задачу. Для определения границ применимости полученных решений проведем сравнение результатов расчетов по формулам (5.25)–(5.30) и точного численного решения методом характеристик полной системы (1.1)–(1.3) гл. 1, которая численно решена [35] для случая расширения поршня в воде при

$$R(t) = r_0 + \frac{A}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)], \quad v(R(t), t) = A \exp(-\alpha t), \quad (5.31)$$

где $\alpha = 0,045 \cdot 10^6$; $r_0 = 0,1$ мм; $a_0 = 1460$ м/с; $A = 30$ м/с.

Результаты расчета приведены сплошными линиями (рис. 5.1 и 5.2). Показано (рис. 5.1) изменение давления в точках $r_1 = 0,05$ м; $r_2 = 0,08$ м; $r_3 = 0,15$ м. Приведены (рис. 5.2) изменения радиуса и скорости поршня и давления на подвижной поверхности поршня.

За исходное для расчета обратной задачи примем давление в точке $r = 0,08$ м и приближенно аппроксимируем ее полиномом Лагранжа степени $m = 3$:

$$P(r_1 = 80 \cdot 10^{-3}, t) = \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0} \right)^m, \quad (5.32)$$

где $A_3 = -0,8216 \cdot 10^{18}$; $A_2 = 5,3499 \cdot 10^{12}$; $A_1 = -11,2383 \cdot 10^6$; $A_0 = 11,74998$.

Давление в точке $r = 0,05$ м определим согласно (5.26)

$$P(r = 0,05; t) = \sqrt{\frac{0,08}{0,05}} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{50 - 0,1}{1,46} \cdot 10^{-6} \right). \quad (5.33)$$

Давление в точке $r = 0,15$ м согласно (5.26)

$$P(r = 0,15 \text{ м}, t) = \sqrt{\frac{0,08}{0,15}} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{150 - 0,1}{1,46} \cdot 10^{-6} \right)^m. \quad (5.34)$$

В (5.33), (5.34) A_m принимаем из (5.32).

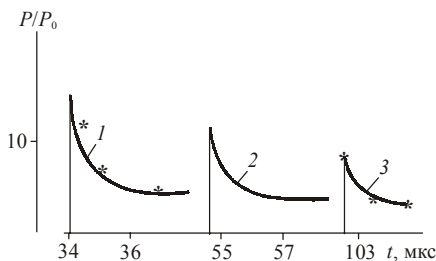
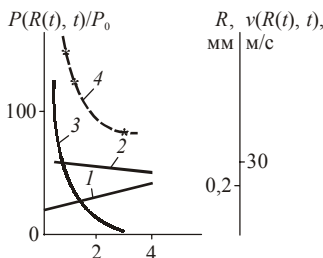


Рис. 5.1. Изменение давления в точках волновой зоны:

1 – $r = 0,05$ м; 2 – $r = 0,08$ м, исходное для реконструкции; 3 – $r = 0,15$ м;
*** – реконструкция

Рис. 5.2. Изменение радиуса, скорости и давления на подвижной поверхности поршня:

1 – радиус $R(t)$; 2 – скорость $v(R(t), t)$;
3 – давление $P(R(t), t)$;
4 – реконструкция $P(R(t), t)$ по формуле (5.28)



Звездочками (рис. 5.1) показаны вычисления, проведенные по формулам (5.33), (5.34). Как видим, формула (5.26) достаточно хорошо работает в волновой зоне при решении обратных задач. Вычисления показали, что восстановить по известному давлению в точке волновой зоны по формулам (5.28)–(5.30) функции $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$, $R(t)$ при решении обратных задач невозможно. Для примера показана (рис. 5.2) реконструкция $P(R(t), t)$ кривая 4, причем в качестве $R(t)$ взято точное значение по формуле (5.31).

Рассмотрим решение прямой задачи. Пусть известна функция изменения радиуса $R(t)$ (5.31). По формуле (5.29), задавая несколько значений времени

(0,5; 1; 2; 3 мкс), составляем систему четырех алгебраических уравнений, решая которую, определяем коэффициенты Лагранжа

$$\begin{aligned} A_3 &= -0,8687584 \cdot 10^{18}; \quad A_2 = 5,640596 \cdot 10^{12}; \\ A_1 &= -10,85267 \cdot 10^6; \quad A_0 = 6,700944. \end{aligned} \quad (5.35)$$

По формуле (5.28) вычисляем давление на поверхности движущегося поршня

$$P(R(t), t) = \sqrt{\frac{r_1 = 0,08}{R(t)}} \sum_{m=0}^3 A_m \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^m. \quad (5.36)$$

A_m берем из (5.35).

Из (5.36) получаем для $t = 0,3$ мкс $P(R(t), t) = 103(100)$ кгс/см²; $t = 1$ мкс $P(R(t), t) = 16,54(32)$ кгс/см² (в круглых скобках значения давления, вычисленные методом характеристик). Как видим, получить приемлемое значение давления на подвижной поверхности поршня удастся только в начальный момент движения. При решении прямой задачи определить по известной скорости расширения поршня давление и скорости в точках волновой зоны по формулам (5.26), (5.27) невозможно.

3. В предыдущих пунктах этого подраздела были получены приближенные формулы решения волнового уравнения цилиндрической симметрии и показаны их границы применимости в задачах расширения полости в жидкости. Следует остановиться подробнее на этом наиболее интересном и сложном случае, изложенном в работе автора [20], так как отсутствие точных решений (5.1) приводило к ошибочным заключениям [2, 32, 36], о чем будет сказано ниже.

Уравнение (5.1) в изображениях имеет вид

$$s^2 \bar{\varphi} - a_0^2 \bar{\varphi}_{rr} - a_0^2 r^{-1} \bar{\varphi}_r = 0.$$

Заменим переменные, для чего обозначим $x = \frac{s}{a_0} r$. Тогда

$$\bar{\varphi}_{xx} - \frac{1}{x} \bar{\varphi}_x - \bar{\varphi} = 0,$$

решение которого для случая одной подвижной границы и безграничной среды будет иметь такой вид

$$\bar{\varphi}(x, s) = c(s) K_0(x).$$

Учитывая, что

$$K'_0(x) = -K_1(x), \quad K'_1(x) = -\frac{1}{x} K_1(x) - K_0(x),$$

где K_0, K_1 — функции Макдональда, получим

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_x(x, s) &= -c(s)K_1(x), \quad \bar{\varphi}_{xx} = \frac{1}{x}c(s)K_1(x) + c(s)K_0(x), \\ \bar{\varphi} &= c(s)K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right), \quad \bar{\varphi}_r = \frac{s}{a_0}\bar{\varphi}_x = -\frac{s}{a_0}c(s)K_1\left(\frac{s}{a_0}r\right), \\ \bar{\varphi}_{rr} &= \frac{s^2}{a_0^2}\bar{\varphi}_{xx} = \frac{s}{a_0}\frac{c}{r}K_1\left(\frac{s}{a_0}r\right) + \frac{s^2}{a_0^2}c(s)K_0\left(\frac{s}{a_0}r\right).\end{aligned}$$

Пусть для обратной задачи известна функция $P(r_1, t) = f(r_1, t)$, тогда

$$c = -\frac{\bar{f}(r_1, s)}{s \rho_0 K_0\left(\frac{s}{a_0}r_1\right)}$$

и

$$\left. \begin{aligned}\bar{\varphi} &= -\frac{\bar{f}(r_1, s)K_0(\mu r)}{s \rho_0 K_0(\mu r_1)}, \quad \bar{\varphi}_r = \frac{\bar{f}(r_1, s)K_1(\mu r)}{a_0 \rho_0 K_0(\mu r_1)}, \\ \bar{\varphi}_{rr} &= -\frac{\bar{f}(r_1, s)K_1(\mu r)}{a_0 \rho_0 r K_0(\mu r_1)} - \frac{s \bar{f}(r_1, s)K_0(\mu r)}{a_0^2 \rho_0 K_0(\mu r_1)}, \\ s \bar{\varphi} &= \frac{\bar{f}(r_1, s)K_0(\mu r)}{\rho_0 K_0(\mu r_1)}, \quad s^2 \bar{\varphi} = -\frac{s \bar{f}(r_1, s)K_0(\mu r)}{\rho_0 K_0(\mu r_1)},\end{aligned}\right\} \quad (5.37)$$

где $\mu = \frac{s}{a_0}$.

Переход к оригиналам в (5.37) может быть произведен рациональным способом в каждом отдельном случае в зависимости от вида функции f .

Представим $P(r_1, t)$ в классе функций Бесселя.

Пусть для обратной задачи известно

$$P(r_1, t) = \tilde{f}(r_1, t) = A \left(t^2 - \frac{r_1^2}{a_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t > \frac{r_1}{a_0}, \quad (5.38)$$

$$[71] \quad \tilde{f}(r_1, s) = A K_0(\mu r_1), \quad r_0 = 0, \quad A = \text{const.}$$

Тогда с учетом (5.37) и перехода к оригиналам, получим значения исследуемых функций в любых точках и на подвижной поверхности $r = R(t)$:

$$P(r, t) = A \left(t^2 - \frac{r^2}{a_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t > \frac{r}{a_0}, \quad (5.39)$$

$$v(r, t) = \frac{A \cdot t}{r \rho_0} \left(t^2 - \frac{r^2}{a_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t > \frac{r}{a_0}, \quad (5.40)$$

$$P(R(t), t) = A \left(t^2 - \frac{R^2(t)}{a_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t > \frac{R(t)}{a_0}, \quad (5.41)$$

$$v(R(t), t) = \frac{A \cdot t}{R(t) \cdot \rho_0} \left(t^2 - \frac{R^2(t)}{a_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t > \frac{R(t)}{a_0}, \quad (5.42)$$

$$R(t) = \left\{ \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{2A}{\rho_0 a_0} \right)^2 + \sqrt{\left(\frac{2A}{\rho_0 a_0} \right)^4 + 4 \left(\frac{2A \cdot t}{\rho_0} \right)^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.43)$$

В общем случае произвольных величин перемещений, начального радиуса, закона изменения скоростей движения границ и вида функции

$f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right) \xrightarrow{\bullet} \bar{f}(s) \exp\left(-s \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right)$ исследуемые функции определяются сле-

дующим образом. Из (5.37), умножая на $K_0 \left(\frac{s}{a_0} r_1 \right) \exp\left(s \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right)$ и переходя к оригиналам, можно получить значения искомых величин в любых точках и на подвижных границах:

$$\left\{ \int_0^t \frac{P(r, t - \tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r_1}{a_0} \tau}} = \left[\int_0^t \frac{f(r_1, t - \tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r}{a_0} \tau}} \right]_{\exp\left(-s \frac{r - r_0}{a_0}\right)} \right\}_{r=R(t)}, \quad (5.44)$$

$$\left\{ \rho_0 \int_0^t \frac{r v(r, t - \tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r_1}{a_0} \tau}} = \left[\int_0^t \frac{f(r_1, t - \tau) \left(\tau + \frac{r}{a_0} \right)}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r}{a_0} \tau}} \right]_{\exp\left(-s \frac{r - r_0}{a_0}\right)} \right\}_{r=R(t)}. \quad (5.45)$$

Здесь посредством $\left[\dots \right]_{\exp \left(-s \frac{r-r_0}{a_0} \right)}$ обозначен ввод времени запаздывания

$(r - r_0)/a_0$ в аргумент t после проведения операции интегрирования в квадратных скобках. Переход $r = R(t)$ производится после проведения всех математических операций в фигурных скобках. Если функции P , v , f в (5.44), (5.45) аппроксимировать полиномами Лагранжа степени m , интегралы становятся табличными (например, (2.261), (2.262) [34]) и для определения неизвестных коэффициентов Лагранжа приходим к системе алгебраических уравнений.

При решении обратных задач для вычисления по (5.44), (5.45) необходимо определить функцию $R(t)$. Изменение радиуса подвижной поверхности можно найти, интегрируя соотношение, находящееся внутри фигурных скобок (5.45), и переходя на подвижную поверхность $r = R(t)$. В результате будем иметь:

$$\left\{ \rho_0 \int_0^t \frac{[s(t-\tau) - s_0] d\tau}{2\pi \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r_1}{a_0} \tau}} = \left[\int_0^t \frac{f(t-\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r}{a_0} \tau}} \right]_{r=R(t)} \exp \left(-s \frac{r-r_0}{a_0} \right) \right\}, \quad (5.46)$$

где $s = \pi r^2$, $s_0 = \pi r_0^2$.

Полученные с учетом нового подхода соотношения (5.37)–(5.46) являются точными аналитическими решениями волнового уравнения, когда граничные условия удовлетворяются на подвижных границах. Подстановка их в уравнение (5.1) превращает его левую часть в нуль. Они универсальны, так как позволяют решать как прямые, так и обратные задачи, на них распространяются выводы подраздела 4.8.

Волновое уравнение (5.1) является математической моделью многих физических процессов. Для примера рассмотрим расширение поршня-полости в идеальной сжимаемой жидкости. Изображены (рис. 5.3) результаты восстановления по формулам (5.38)–(5.43) радиуса $R(t)$, давления $P(R(t), t)$ на подвижной границе с учетом нелинейного члена $0,5\rho_0 v^2(R(t), t)$. Исходная для реконструкции форма функции давления в точке $r_1 = 0,08$ м по формуле (5.38), где $A = 3,712433 \cdot 10^{-6}$; $r_0 = 0$; $a_0 = 1460$ м/с.

Показаны (рис. 5.4) результаты расчета методом характеристик (сплошные линии) полной системы (1.1)–(1.3) расширения цилиндра по закону $v(R(t), t) = 30 \exp(-0,046 \cdot 10^6 t)$, $r_0 = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м, $a_0 = 1460$ м/с, давление в точке $r_1 = 0,08$ м. Кривая 3 взята для реконструкции и аппроксимирована полиномом Лагранжа (вычисление полинома проведено в подразделе 3.3), где

$$A_0 = 11,74998; A_1 = -11,2383 \cdot 10^6; A_2 = 5,3499 \cdot 10^{12};$$

$$A_3 = -0,8216 \cdot 10^{18}; m = 3, \quad (5.47)$$

результаты реконструкции по формулам (5.44)–(5.46), где A_m из (5.47) обозначены ***, совпадение результатов вполне удовлетворительное. Таким образом, заключение работы [36, с. 56] о том, что только в сферическом случае имеются правильные результаты для описания течения с учетом нелинейных эффектов, по-видимому, следует считать неточным. Как видим, потенциал скорости, входящий в интеграл Коши-Лагранжа, можно определять из решения волнового уравнения и в цилиндрическом случае симметрии.

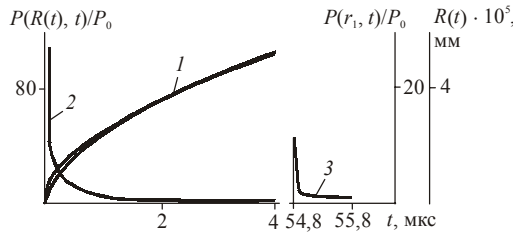


Рис. 5.3. Восстановление радиуса и давления на подвижной границе цилиндрической полости по давлению в точке r_1 :

1 – изменение радиуса $R(t)$, мм; 2 – изменение давления $P(R(t), t)/P_0$;
3 – исходное для реконструкции давление в точке $r_1 = 0,08$ мм

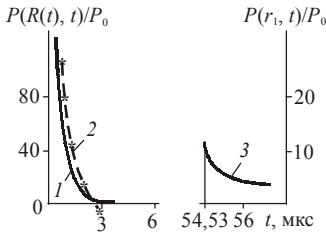


Рис. 5.4. Реконструкция давления на подвижной границе цилиндрического поршня:

1 – расчет методом характеристик;
2 – реконструкция по формуле (5.44) с учетом нелинейного члена $0,5\rho_0 v^2(R(t), t)$, $v(R(t), t)$ по (5.45); 3 – исходная для реконструкции форма функции давления $P(r_1, t)$ – метод характеристик, прямая задача

5.2. Волновое уравнение с подвижными границами при наличии плоской симметрии

Рассмотрим уравнение [21, 37, 38]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0. \quad (5.48)$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Известны условия на подвижных границах $r = R_1(t)$ и $r = R_2(t)$

$$R_{1,2}(t) = F_{1,2}(t), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R(t)} = \frac{dR}{dt} \quad (5.49)$$

или условия в точках, находящихся между подвижными границами,

$$-\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = P(r_{1,2}, t) = \tilde{f}_{1,2}(t), \quad \rho_0 = \text{const}. \quad (5.50)$$

Если известны условия (5.49), то это прямая задача, или только (5.50) – обратная. Решение сформулированной задачи единственно и устойчиво [22]. Сформулированная задача (5.48)–(5.50) относится к классу нелинейных задач с подвижными границами [23–25].

Применяя к (5.48) преобразование Лапласа, с учетом нулевых начальных условий получаем операторное уравнение, решением которого будет

$$\bar{\varphi}(r, s) = c_1(s) \exp\left(s \frac{r}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(-s \frac{r}{a_0}\right). \quad (5.51)$$

Для нахождения вида функций $c_1(s)$ и $c_2(s)$ используем (5.50)

$$\begin{aligned} -\bar{f}_1(s) &= \rho_0 s \left[c_1(s) \exp\left(s \frac{r_1}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(-s \frac{r_1}{a_0}\right) \right], \\ -\bar{f}_2(s) &= \rho_0 s \left[c_1(s) \exp\left(s \frac{r_2}{a_0}\right) + c_2(s) \exp\left(-s \frac{r_2}{a_0}\right) \right], \\ c_1(s) &= -\frac{1}{\rho_0 s} \bar{f}_1(s) \exp\left(-s \frac{r_1}{a_0}\right) - \left\{ \frac{1}{\rho_0 s} \bar{f}_1(s) \exp\left(-s \frac{3r_1}{a_0}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho_0 s} \bar{f}_2(s) \exp\left[-s \left(\frac{2r_1 + r_2}{a_0}\right)\right] \right\} \times \left[-\exp\left(-s \frac{2r_1}{a_0}\right) + \exp\left(-s \frac{2r_2}{a_0}\right) \right]^{-1}, \\ c_2(s) &= \left[\frac{\bar{f}_1(s)}{\rho_0 s} \exp\left(-s \frac{r_1}{a_0}\right) - \frac{1}{\rho_0 s} \bar{f}_2(s) \exp\left(-s \frac{r_2}{a_0}\right) \right] \times \\ &\quad \times \left[-\exp\left(-s \frac{2r_1}{a_0}\right) + \exp\left(-s \frac{2r_2}{a_0}\right) \right]^{-1}, \\ \bar{\varphi}(r, s) &= \left[\exp\left(-s \frac{2r_1}{a_0}\right) - \exp\left(-s \frac{2r_2}{a_0}\right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\rho_0 s} \left\{ \bar{f}_1(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0} \right) \right] - \bar{f}_2(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \bar{f}_1(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_1 + r}{a_0} \right) \right] + \bar{f}_2(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_2 + r}{a_0} \right) \right] \right\}, \\
 &\rho_0 \left[\varphi \left(r, t - \frac{2r_1}{a_0} \right) - \varphi \left(r, t - \frac{2r_2}{a_0} \right) \right] = \Phi_1(r, t) = \\
 &= \int_0^t f_1(\tau) \sigma_0 \left(t - \tau - \frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0} \right) d\tau - \int_0^t f_2(\tau) \sigma_0 \left(t - \tau - \frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0} \right) d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t f_1(\tau) \sigma_0 \left(t - \tau - \frac{r_1 + r}{a_0} \right) d\tau + \int_0^t f_2(\tau) \sigma_0 \left(t - \tau - \frac{r_2 + r}{a_0} \right) d\tau. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Из (5.50) с учетом (5.51) и выражений для $c_1(s)$ и $c_2(s)$ получаем

$$\begin{aligned}
 &\bar{P}(r, s) \left[\exp \left(-s \frac{2r_1}{a_0} \right) - \exp \left(-s \frac{2r_2}{a_0} \right) \right] = \\
 &= \bar{f}_1(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0} \right) \right] + \bar{f}_2(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0} \right) \right] + \\
 &\quad + \bar{f}_1(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_1 + r}{a_0} \right) \right] - \bar{f}_2(s) \exp \left[-s \left(\frac{r_2 + r}{a_0} \right) \right], \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

откуда, переходя к оригиналам, имеем

$$\begin{aligned}
 &P \left(r, t - \frac{2r_1}{a_0} \right) - P \left(r, t - \frac{2r_2}{a_0} \right) = \Phi_2(r, t) = -f_1 \left(t - \frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0} \right) + \\
 &\quad + f_2 \left(t - \frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0} \right) + f_1 \left(t - \frac{r_1 + r}{a_0} \right) - f_2 \left(t - \frac{r_2 + r}{a_0} \right). \quad (5.54)
 \end{aligned}$$

Из (5.51) получаем

$$\bar{v}(r, s) = \bar{\varphi}'_r = c_1(s) \frac{s}{a_0} \exp \left(s \frac{r}{a_0} \right) + c_2(s) \left(-\frac{s}{a_0} \right) \exp \left(-s \frac{r}{a_0} \right). \quad (5.55)$$

Из (5.55) с учетом (5.51) и переходя к оригиналам, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} v\left(r, t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - v\left(r, t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_3(r, t) = \frac{1}{\rho_0 a_0} \left\{ f_1\left(t - \frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0}\right) + \right. \\ \left. + f_1\left(t - \frac{r_1 + r}{a_0}\right) - f_2\left(t - \frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0}\right) - f_2\left(t - \frac{r_2 + r}{a_0}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Формулы (5.51), (5.52)–(5.54), (5.56) являются точными аналитическими решениями волнового уравнения (5.48) с граничными условиями, удовлетворяющимися на подвижных границах. Подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль. Эти соотношения универсальны, так как позволяют решать как прямые, так и обратные задачи, на них распространяются выводы подраздела 4.8. По формулам (5.54), (5.56) можно определить исследуемые функции в любых точках, включая подвижные границы $r = R_{1,2}(t)$:

$$P\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - P\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_2(R_{1,2}(t), t), \quad (5.57)$$

$$v\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - v\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_3(R_{1,2}(t), t). \quad (5.58)$$

Соотношения пригодны для любых движений границ и любого вида исследуемых функций в точках между подвижными границами, а также произвольных величин $r_{0,00}$.

Вид функций f_1 и f_2 может быть произволен. В общем случае движения границ функции f_1 и f_2 удобно аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m :

$$\begin{aligned} P(r_1, t) = f_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} A_m^k (t - \alpha_k)^m \sigma_0(t - \alpha_k) \sigma_0(t - \alpha_{k+1}), \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} P(r_2, t) = f_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} B_m^k (t - \beta_k)^m \sigma_0(t - \beta_k) - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1} B_m^k (t - \beta_k)^m \sigma_0(t - \beta_k) \sigma_0(t - \beta_{k+1}), \end{aligned} \quad (5.60)$$

где m определяет число точных значений решения и может быть сколь угодно большим; α_k, β_k – характеризуют моменты времени, в которых функции имеют скачки и могут быть точно вычислены [39, 40]; A_m^k, B_m^k – постоянные;

$$\sum_{m=0}^{\infty} \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \dots \right\}, \quad \alpha_1 = \frac{r_1 - r_0}{a_0}, \quad \beta_1 = \frac{r_2 - r_0}{a_0}.$$

Для решения обратных задач потребуется функция изменения радиуса $R_{1,2}(t)$, которую определим следующим образом. Из (5.56) с учетом $v = \frac{dr}{dt}$, $\bar{v}(s) = s\bar{r} - r_0$ имеем в изображениях:

$$\begin{aligned} & (s\bar{r} - r_0) \left[\exp\left(-s \frac{2r_1}{a_0}\right) - \exp\left(-s \frac{2r_2}{a_0}\right) \right] = \\ & = \frac{1}{\rho_0 a_0} \left\{ \bar{f}_1(s) \exp\left[-s \left(\frac{r_1 - 2r_2 - r}{a_0}\right)\right] + \bar{f}_1(s) \exp\left[-s \left(\frac{r_1 + r}{a_0}\right)\right] - \right. \\ & \quad \left. - \bar{f}_2(s) \exp\left[-s \left(\frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0}\right)\right] - \bar{f}_2(s) \exp\left[-s \left(\frac{r_2 + r}{a_0}\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Переходя к оригиналам, получаем при $r = R_{1,2}(t)$

$$\begin{aligned} & \left\{ R_{1,2}\left(t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - R_{1,2}\left(t - \frac{2r_2}{a_0}\right) - r_{0,00} \left[\sigma_0\left(t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - \sigma_0\left(t - \frac{2r_2}{a_0}\right) \right] \right\} \rho_0 a_0 = \\ & = \left| \int_0^t f_1(\tau) \sigma_0\left(t - \tau - \frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0}\right) d\tau + \int_0^t f_1(\tau) \sigma_0\left(t - \tau - \frac{r_1 + r}{a_0}\right) d\tau - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^t f_2(\tau) \sigma_0\left(t - \tau - \frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0}\right) d\tau - \int_0^t f_2(\tau) \sigma_0\left(t - \tau - \frac{r_2 + r}{a_0}\right) d\tau \right|_{r=R_{1,2}(t)}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

При распространении возмущений в безграничной среде $r_2 \rightarrow \infty$ получаем из (5.54), (5.56), (5.58):

$$P\left(r, t - \frac{2r_1}{a_0}\right) = f_1\left(t - \frac{r_1 + r}{a_0}\right)$$

или

$$P(r, t) = f_1 \left(t - \frac{r - r_1}{a_0} \right), \quad (5.63)$$

$$v \left(r, t - \frac{2r_1}{a_0} \right) = \frac{1}{\rho_0 a_0} f_1 \left(t - \frac{r_1 + r}{a_0} \right),$$

или

$$v(r, t) = \frac{1}{\rho_0 a_0} f_1 \left(t - \frac{r - r_1}{a_0} \right), \quad (5.64)$$

$$[R(t) - r_0] \rho_0 a_0 = \left| \int_0^t f(\tau) \sigma_0 \left(t - \tau - \frac{r - r_1}{a_0} \right) d\tau \right|_{r=R(t)}. \quad (5.65)$$

Подставляя значения f_1 и f_2 из (5.59), (5.60) в (5.54), (5.56), (5.57), (5.58), (5.62)–(5.65), для общего случая вида исследуемых функций с учетом интегрирования и дифференцирования разрывных функций с запаздываниями (см. 3.6), имеем

$$\begin{aligned} \left[\varphi \left(r, t - \frac{2r_1}{a_0} \right) - \varphi \left(r, t - \frac{2r_2}{a_0} \right) \right] \rho_0 = \Phi_1(r, t) = & \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_1^{m+1} \sigma_0(t_1) - \right. \\ & - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_1^{m+1} \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(t_2) \right] - \\ & - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_3^{m+1} \sigma_0(t_3) - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_3^{m+1} \sigma_0(t_3) \sigma_0(t_4) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(t_4) \right] \right] - \\ & - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_5^{m+1} \sigma_0(t_5) - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} t_5^{m+1} \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(t_6) \Bigg\} + \\
 & + \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_7^{m+1} \sigma_0(t_7) - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} t_7^{m+1} \sigma_0(t_7) \sigma_0(t_8) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(t_8) \right] \right\}, \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 t_1 &= t - \frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0} - \alpha_k, & t_2 &= t - \frac{r_1 + 2r_2 - r}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\
 t_3 &= t - \frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0} - \beta_k, & t_4 &= t - \frac{r_2 + 2r_1 - r}{a_0} - \beta_{k+1}, \\
 t_5 &= t - \frac{r_1 - r}{a_0} - \alpha_k, & t_6 &= t - \frac{r_1 - r}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\
 t_7 &= t - \frac{r_2 + r}{a_0} - \beta_k, & t_8 &= t - \frac{r_2 + r}{a_0} - \beta_{k+1},
 \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}
 & P\left(r, t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - P\left(r, t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_2(r, t) = \\
 & = - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k t_1^m \sigma_0(t_1) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k t_1^m \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} B_m^k t_3^m \sigma_0(t_3) - \sum_{m=0}^{\infty} B_m^k t_3^m \sigma_0(t_3) \sigma_0(t_4) + \\
 & + \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k t_5^m \sigma_0(t_5) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k t_5^m \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \\
 & - \sum_{m=0}^{\infty} B_m^k t_7^m \sigma_0(t_7) - \sum_{m=0}^{\infty} B_m^k t_7^m \sigma_0(t_7) \sigma_0(t_8). \quad (5.68)
 \end{aligned}$$

Здесь $t_1 \div t_8$, как в (5.67)

$$\begin{aligned} v\left(r, t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - v\left(r, t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_3(r, t) = \frac{1}{\rho_0 a_0} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_1^m \sigma_0(t_1) - \right. \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_1^m \sigma_0(t_1) \sigma_0(t_2) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_5^m \sigma_0(t_5) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_m^k t_5^m \sigma_0(t_5) \sigma_0(t_6) - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_3^m \sigma_0(t_3) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_3^m \sigma_0(t_3) \sigma_0(t_4) - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_7^m \sigma_0(t_7) + \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_m^k t_7^m \sigma_0(t_7) \sigma_0(t_8) \right\}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

где $t_1 \div t_8$, как в (5.67).

Значения функций φ , P , v на подвижных границах $r = R_{1,2}(t)$ определяются из соотношений:

$$\varphi\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - \varphi\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_1(R_{1,2}(t), t), \quad (5.70)$$

$$P\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - P\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_2(R_{1,2}(t), t), \quad (5.71)$$

$$v\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_1}{a_0}\right) - v\left(R_{1,2}(t), t - \frac{2r_2}{a_0}\right) = \Phi_3(R_{1,2}(t), t). \quad (5.72)$$

Здесь

$$\begin{aligned} T_1 = t - \frac{r_1 + 2r_2 - R_{1,2}(t)}{a_0} - \alpha_k, \quad T_2 = t - \frac{r_1 + 2r_2 - R_{1,2}(t)}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\ T_3 = t - \frac{r_2 + 2r_1 - R_{1,2}(t)}{a_0} - \beta_k, \quad T_4 = t - \frac{r_2 + 2r_1 - R_{1,2}(t)}{a_0} - \beta_{k+1}, \\ T_5 = t - \frac{r_1 + R_{1,2}(t)}{a_0} - \alpha_k, \quad T_6 = t - \frac{r_1 + R_{1,2}(t)}{a_0} - \alpha_{k+1}, \\ T_7 = t - \frac{r_2 + R_{1,2}(t)}{a_0} - \beta_k, \quad T_8 = t - \frac{r_2 + R_{1,2}(t)}{a_0} - \beta_{k+1}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Функции изменения радиуса подвижных границ определяем из (5.62)

$$\begin{aligned}
 & \left\{ R_{1,2} \left(t - \frac{2r_1}{a_0} \right) - R_{1,2} \left(t - \frac{2r_2}{a_0} \right) - r_{0,00} \left[\sigma_0 \left(t - \frac{2r_1}{a_0} \right) - \sigma_0 \left(t - \frac{2r_2}{a_0} \right) \right] \right\} \rho_0 a_0 = \\
 & = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} T_1^{m+1} \sigma_0(T_1) - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} T_1^{m+1} \sigma_0(T_1) \sigma_0(T_2) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(T_2) \right] \right\} - \\
 & - \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} T_3^{m+1} \sigma_0(T_3) - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} T_3^{m+1} \sigma_0(T_3) \sigma_0(T_4) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(T_4) \right] \right\} + \\
 & + \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} T_5^{m+1} \sigma_0(T_5) - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} T_5^{m+1} \sigma_0(T_5) \sigma_0(T_6) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0(T_6) \right] \right\} - \\
 & - \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} T_7^{m+1} \sigma_0(T_7) - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} T_7^{m+1} \sigma_0(T_7) \sigma_0(T_8) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^k}{m+1} (\beta_{k+1} - \beta_k)^{m+1} \sigma_0(\beta_{k+1} - \beta_k) \sigma_0(T_8) \right\}, \quad (5.74)$$

где $T_1 \div T_8$ из (5.73), r_0 и r_{00} характеризуют положение подвижных границ $R_{1,2}(t)$ при $t=0$.

Для случая распространения возмущений в безграничной среде соответствующие формулы будут иметь вид

$$P(r, t) = \Phi_2(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right)^m \sigma_0 \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right) - \\ - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right)^m \sigma_0 \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right) \sigma_0 \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_{k+1} \right), \quad (5.75)$$

$$v(r, t) = \Phi_3(r, t) = \frac{1}{\rho_0 a_0} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right)^m \sigma_0 \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right) - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^k \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right)^m \sigma_0 \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_k \right) \sigma_0 \left(t - \frac{r-r_1}{a_0} - \alpha_{k+1} \right) \right], \quad (5.76)$$

$$P(R(t), t) = \Phi_2(R(t), t), \quad (5.77)$$

$$v(R(t), t) = \Phi_3(R(t), t). \quad (5.78)$$

$$[R(t) - r_0] \rho_0 a_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \frac{R(t)-r_1}{a_0} - \alpha_k \right) \sigma_0 \left(t - \frac{R(t)-r_1}{a_0} - \alpha_k \right) - \\ - \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} \left(t - \frac{R(t)-r_1}{a_0} - \alpha_k \right)^{m+1} \sigma_0 \left(t - \frac{R(t)-r_1}{a_0} - \alpha_{k+1} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^k}{m+1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^{m+1} \sigma_0(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \sigma_0 \left(t - \frac{R(t)-r_1}{a_0} - \alpha_{k+1} \right) \right]. \quad (5.79)$$

Для случая распространения возмущений в безграничной среде, когда функция f не имеет скачков (кроме первого), с учетом $\alpha_1 = \frac{r_1 - r_0}{a_0}$, имеем

$$P(r, t) = \Phi_2(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^m, \quad (5.80)$$

$$v(r, t) = \Phi_3(r, t) = \frac{1}{\rho_0 a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r - r_0}{a_0} \right)^m, \quad (5.81)$$

$$[R(t) - r_0] \rho_0 a_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a_0} \right)^{m+1}, \quad (5.82)$$

$$P(R(t), t) = \Phi_2(R(t), t), \quad (5.83)$$

$$v(R(t), t) = \Phi_3(R(t), t). \quad (5.84)$$

Вычисления по формулам (5.82), (5.79), (5.74) производятся так же, как и по соответствующим формулам (3.35), (3.36).

Волновое уравнение (5.48) может описывать многие физические явления. Применим полученные решения его для расчета гидродинамических характеристик расширяющегося плоского поршня.

Решим прямую задачу. Пусть

$$R(t) = r_0 + \frac{A}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)], \quad v(R(t), t) = A \exp(-\alpha t), \quad (5.85)$$

где $r_0 = 0,5$ мм; $\alpha = 0,005 \cdot 10^6$ с⁻¹; $A = 200$ м/с; $a_0 = 1460$ м/с.

Тогда из (5.82) при m , равном 0, 1, 2, 3, задавая значения t , равные 1, 2, 3, 4 мкс, получаем систему четырех алгебраических уравнений, решая которую, определяем коэффициенты полинома Лагранжа

$$\begin{aligned} A_0 &= 31,75403 \cdot 10^2; \quad A_1 = 6,684075 \cdot 10^8; \quad A_2 = -4,154781 \cdot 10^{14}; \\ A_3 &= 0,7124424 \cdot 10^{20}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Теперь по формуле (5.83) становится известной компонента давления на подвижной поверхности поршня, а по (5.80) — и давление в других точках.

Сплошными линиями показаны результаты расчета (рис. 5.5 и 5.6) методом характеристик (см. первую главу) полной системы (1.1)–(1.3) при расширении поршня по закону (5.85) для трех случаев симметрии. Результаты расчетов по (5.80)–(5.86) показаны звездочками. Как видим, эти соотношения могут служить для оценки гидродинамических полей расширяющегося плоского поршня. Для получения более точных количественных результатов необходимо обращаться к уравнению (3.1) [41] или полной системе (1.1)–(1.3).

Следует обратить внимание на следующее (см. рис. 5.6): сплошными линиями показаны давления в точке $r = 0,020$ м для трех случаев симметрии (1–3). В этой точке ударные волны появляются в разное время:

для $\nu = 1$ запаздывание равно 11,3 мкс;

для $\nu = 2$ – 12,7 мкс;

для $\nu = 3$ – 13,288 мкс,

а по предлагаемому методу – 13,356 мкс. Таким образом, граница применимости уравнения (3.1) при $\rho \approx \rho_0$ для $\nu = 3$ примерно соответствует скоростям расширения поршня до 200 м/с, а для $\nu = 1$ и $\nu = 2$ границы несколько меньше.

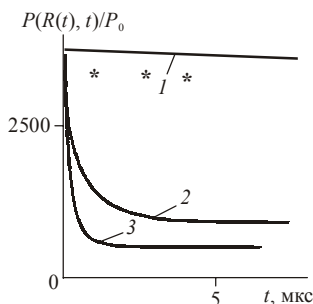


Рис. 5.5. Зависимость давления на подвижной поверхности поршня от времени:

1 – плоский случай; 2 – цилиндрический случай; 3 – сферический случай симметрии

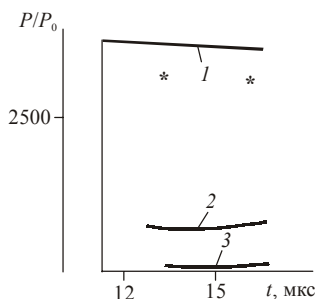


Рис. 5.6. Изменение давления в точке $r = 20 \cdot 10^{-3}$ м:

1 – плоский случай; 2 – цилиндрический случай; 3 – сферический случай

5.3. Решение уравнений параболического типа с подвижными границами

Математические задачи с подвижными границами, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа, имеют почти вековую историю и восходят к известной работе Стефана по исследованию полярных льдов, поэтому всю совокупность подобных задач называют проблемой Стефана [23, 25, 42].

В работах [24, 43], посвященных этой проблеме, приведен метод, являющийся в определенном смысле обобщением общего метода конечных интегральных преобразований [44]. Искомые решения дифференциальных уравнений задач стефановского типа представляли в виде рядов по собственным функциям аналогичных задач, но при условии как бы неподвижных границ. Таким образом, вводились "мгновенные" собственные функции задачи. Для нахождения коэффициентов рядов приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В первой – пятой главах настоящей книги рассматривался метод решения задач с подвижными границами, в основе которого лежит физически очевидный факт распространения возмущений с конечной скоростью. Этот факт описывается волновым уравнением и проявляется уже в решении задачи Коши – функции имеют аргумент с запаздыванием. Известно [45], что уравнения параболического типа описывают не этот факт, а распространение возмущений с бесконечной скоростью. Поэтому применить разработанный метод к этому классу задач в той форме, в которой он использовался выше, не представляется возможным. Речь может идти о тех математических приемах, выполнение которых обеспечивает получение искомого решения.

1. Наметим два подхода к решению подобных задач: приближенный [21, 46, 47] и прием перехода к уравнениям гиперболического типа. Задачи параболического типа с подвижными границами [44], описывающие процессы плавления и отвердевания, фильтрации, нестационарных движений вязкопластических сред, диффузии, теплопроводности и тому подобное, имеют вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{v}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad z < x < l, \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial T(x=l, t)}{\partial x} = f(T, t), \quad (5.88)$$

$$T(x=z, t) = T_L, \quad (5.89)$$

$$\frac{dz}{dt} = q \left(T, \frac{\partial T}{\partial x}, z, t \right) \Big|_{x=z, t>0}, \quad (5.90)$$

$$T(x, 0) = T_H, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0, \quad (5.91)$$

$v = 0, 1, 2$ для одномерных задач в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

Простейшей из этого класса задач с подвижными границами является задача Стефана, решение которой явится ключом для решения более сложных задач.

Задача Стефана:

$$T_t - a T_{xx} = 0, \quad (5.92)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad (5.93)$$

$$T(0, t) = f(t), \quad (5.94)$$

$$T(s(t), t) = 0, \quad (5.95)$$

$$-\lambda T_x = \chi s'(t), \quad (5.96)$$

где закон движения границы $s(t)$ – произвольная функция времени.

Предложен метод решения задач с подвижными границами: с помощью дополнительной математической модели (случай, когда процесс разыгрывается при фиксированных границах) определяется решение, которое будет давать наиболее точный результат только в одной точке и в одно мгновение t_i . Время t_i определяется той константой, для которой решалась задача дополнительной модели с фиксированными границами $s(t_i) = B = \text{const}$. Набор таких точных решений описывается компактной формулой: для этого достаточно опустить индекс i . Если при составлении уравнений учтена конечная скорость распространения "возмущений", время t_i нужно определять с учетом запаздывания. Операторное уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^2 \bar{T}(x, p)}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{T}(x, p) = 0, \quad (5.97)$$

его решение

$$\bar{T} = c_1 e^{-x\sqrt{p/a}} + c_2 e^{x\sqrt{p/a}}. \quad (5.98)$$

С учетом значений на фиксированной границе запишем

$$s(t_i) = B, \quad \left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t_i} = \dot{s}(t_i) = D. \quad (5.99)$$

Определим c_1 и c_2 :

$$c_1 = \bar{f}(p) + \frac{\frac{\chi}{\lambda} D \sqrt{a} p^{-\frac{3}{2}} \exp(-B \sqrt{p/a})}{1 + \exp(-2B \sqrt{p/a})} - \frac{\bar{f}(p) \exp(-2B \sqrt{p/a})}{1 + \exp(-2B \sqrt{p/a})},$$

$$c_2 = -\frac{\frac{\chi}{\lambda} D \sqrt{a} p^{-\frac{3}{2}} \exp(-B \sqrt{p/a})}{1 + \exp(-2B \sqrt{p/a})} + \frac{\bar{f}(p) \exp(-2B \sqrt{p/a})}{1 + \exp(-2B \sqrt{p/a})}.$$

Решение уравнения (5.92) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, p) = & \bar{f}(p) \exp(-x \sqrt{p/a}) + \frac{\chi}{\lambda} D \sqrt{a} p^{-\frac{3}{2}} \exp(-\sqrt{p/a} (B+x)) - \dots \\ & \dots - \bar{f}(p) \exp(-\sqrt{p/a} (2B+x)) - \dots \\ & \dots - \frac{\chi}{\lambda} D \sqrt{a} p^{-\frac{3}{2}} \exp(-\sqrt{p/a} (B-x)) + \dots + \bar{f}(p) \exp(-\sqrt{p/a} (2B-x)) \dots, \end{aligned} \quad (5.100)$$

где точками обозначены члены разложения $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$ при $x = \exp(-2B \sqrt{p/a})$ малой величине; оригиналы этого соотношения определяются легко.

Окончательно решение уравнения (5.92) с начальными и граничными условиями (5.93)–(5.96) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & \int_0^t f(t-\tau) \frac{x}{2\sqrt{a}\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) d\tau + \\
 & + \frac{\chi}{\lambda} \dot{s}(t) \sqrt{a} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{s(t)+x}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{4t}\right) - \left(\frac{s(t)+x}{\sqrt{a}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{s(t)+x}{2\sqrt{at}}\right) \right] - \dots \\
 & \dots - \int_0^t f(t-\tau) \frac{2s(t)+x}{2\sqrt{\pi a\tau^3}} \exp\left(-\left(\frac{2s(t)+x}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{4t}\right) d\tau - \dots \\
 & \dots - \frac{\chi}{\lambda} \dot{s}(t) \sqrt{a} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{s(t)-x}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{4t}\right) - \left(\frac{s(t)-x}{\sqrt{a}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{s(t)-x}{2\sqrt{at}}\right) \right] + \dots \\
 & \dots + \int_0^t f(t-\tau) \left(\frac{2s(t)-x}{\sqrt{a}}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau^3}} \exp\left(-\left(\frac{2s(t)-x}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{4t}\right) d\tau \dots \quad (5.101)
 \end{aligned}$$

Для примера рассмотрим случай $f(t) = T_0 = \text{const}$. Учитывая, что

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t^3}} \exp\left(-\frac{q}{t}\right) dt = - \int_{\infty}^{\sqrt{\frac{q}{t}}} \frac{2}{\sqrt{q}} \exp(-z^2) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{q}{t}}\right),$$

где $z^2 = q/t$, из (5.101) получаем

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) + \\
 & + \frac{\chi}{\lambda} \dot{s}(t) \sqrt{a} \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{s(t)+x}{\sqrt{a}}\right)^2 \frac{1}{4t}\right) - \left(\frac{s(t)+x}{\sqrt{a}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{s(t)+x}{2\sqrt{at}}\right) \right] - \dots \\
 & \dots - T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{2s(t)+x}{2\sqrt{at}}\right) - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots - \frac{\chi}{\lambda} \dot{s}(t) \sqrt{a} \left[2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp \left(- \left(\frac{s(t)-x}{\sqrt{a}} \right)^2 \frac{1}{4t} \right) - \left(\frac{s(t)-x}{\sqrt{a}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{s(t)-x}{2\sqrt{at}} \right) \right] + \dots \\ & \dots + T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{2s(t)-x}{2\sqrt{at}} \right) \dots \end{aligned} \quad (5.102)$$

Для случая $a = 1$; $T_0 = 1$; $\frac{\chi}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}$ (задача вытеснения газа жидкостью); $s(0) = 0$; $\alpha > 0$ можно [48], применяя теоремы сравнения, получить приближенное решение вида

$$T(x, t) = 1 - \frac{1-c}{s(t)} x + c \left[\frac{x}{s(t)} \right]^n, \quad (5.103)$$

где $s(t) = \sqrt{t} \cdot \sqrt{2\alpha(1+c-3c)}$, $\alpha = 1$, $n = 3$, $c = 0,1$.

Оценка точности расчета по формуле (5.103) $LT_{1,2} > 0$ при $x = 0$ примерно равна 8,3 %. При $x = 5$, $t = 10\,000$ расчет по формуле (5.102) $T_{11} = 0,865$; по формуле (5.103): $T_{12} = 0,957$. Разница между T_{11} и T_{12} составляет 9 %. Совпадение хорошее.

Следует отметить, что влияние последующих членов разложения, кроме первого члена, сказывается в четвертом-пятом знаке после запятой и не учитывается.

Подобным образом решаются и задачи (5.87)–(5.91). При этом полученные соотношения пригодны для любой скорости движения границ, а не только пропорциональной $\sqrt{t}$.

2. Гиперболическое уравнение теплопроводности [30].

В феноменологической теории теплопроводности предполагается, что скорость распространения тепла бесконечно велика (чего в действительности не может быть: все процессы протекают с конечной скоростью). Однако при высокointенсивных нестационарных процессах теплообмена необходимо учитывать, что тепло распространяется не бесконечно быстро, а с некоторой, хотя и очень большой, но конечной скоростью w_r :

$$w_r = \sqrt{\frac{\lambda}{c\gamma\tau_r}}, \quad (5.104)$$

где τ_r – постоянная времени или время релаксации; $c\gamma$ – объемная теплоемкость.

Для этих процессов перенос тепла описывается обобщенным законом Фурье, который для одномерного температурного поля имеет вид

$$g_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial q_x}{\partial \tau}, \quad (5.105)$$

где g – тепловой поток.

Уравнение баланса тепла для одномерного температурного поля запишем в форме

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} = c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (5.106)$$

Подставляя в (5.106) q_x из (5.105) и полагая λ и τ_r постоянными, имеем

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^2 q_x}{\partial x \partial \tau} = c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (5.107)$$

Дифференцируя (5.106) по τ , получаем

$$\frac{\partial^2 q_x}{\partial x \partial \tau} = c\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2}. \quad (5.108)$$

Уравнение (5.107) с учетом (5.108) запишем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.109)$$

или

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\lambda}{w_r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5.110)$$

где a – коэффициент температуропроводности, $a = \lambda/c\gamma$ [30].

Обобщенное уравнение распространения тепла (5.109) относится к уравнениям гиперболического типа, которые учитывают факт распространения возмущения с конечной скоростью. Для решения таких уравнений можно применить разработанный метод. Подобное уравнение, несколько более сложное (уравнение (4.32)), подробно рассмотрено в четвертой главе.

5.4. Оценка возможности получения заданных волн давления за счет выбора необходимого закона ввода энергии

Одним из возможных способов получения волн давления заданной формы (спектра) может служить расширение полости в жидкости по определенному закону. Расширение полости может быть вызвано различными импульсными источниками, например, взрывом взрывчатых веществ или газовых смесей, электрическим разрядом, лазерным импульсом, выхлопом сжатого газа, падением груза на поверхность среды и т.д.

Действие импульсных источников сопровождается перемещением границ, пренебречь которыми нельзя. Исследование гидродинамики полости связано

с анализом уравнений в частных производных, в частности волнового с граничными условиями, удовлетворяющимися на подвижных границах, вопросы управления связаны с решением обратных задач для волнового уравнения с подвижными границами – изложенное относится к сложным проблемам математической физики. Данное исследование посвящено установлению аналитических зависимостей между законом подвода энергии к источнику возмущений и формой (спектром) возбуждаемых им гидродинамических волн.

Решение поставленной задачи будем проводить в такой последовательности [49–53]: определение вида функции $P(r_1, t)$, имеющей заданный спектр; решение обратной гидродинамической задачи с подвижными границами – определение изменения радиуса полости $R(t)$, скорости $v(R(t), t)$, давления на подвижной границе $P(R(t), t)$ по заданному виду функции $P(r_1, t)$; определение закона ввода энергии $E(t)$, необходимой для расширения полости с заданной скоростью $v(R(t), t)$.

Рассмотрим первый этап: определение вида функции, имеющей заданный спектр. Этого можно достигнуть, например: 1) используя усовершенствованный метод дискретного быстрого преобразования Фурье [54]; 2) преобразуя функцию времени таким образом, чтобы спектр $P(r_1, t)$ переместился по шкале частот [55] и стал заданным; 3) используя спектр известных функций.

Второй этап. Для определения полей скорости и давления расширяющегося поршня по заданной функции $P(r_1, t)$ необходимо решить обратную краевую гидродинамическую задачу с подвижными границами. При этом движение жидкости наиболее полно описывается системой (1.1)–(1.3), которую в общем случае можно решить численными методами (см. главу 1). Эта система для потенциальных движений приводится к уравнению (3.1). При $\rho \approx \rho_0$ потенциал скорости в интеграле Коши-Лагранжа можно определять из (3.1), пренебрегая в нем членами второго и третьего порядков малости, то есть из линейного волнового уравнения (3.2). Сформулированная задача относится к классу существенно нелинейных задач с подвижными границами [24], методов точного аналитического решения подобных задач не было [24]. В предыдущих главах разработан новый подход к решению задач с подвижными границами, основанный на нахождении зависимости между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в других точках с учетом реальных величин запаздываний. По формулам (3.9)–(3.11), (3.42), (3.25)–(3.28), (3.35) для $v = 3$; (5.39)–(5.43), (5.44)–(5.46) для $v = 2$; (5.63)–(5.65), (5.76)–(5.79) для $v = 1$ можно реконструировать давление и скорость в любых точках, включая подвижные границы, по давлению в точке волновой зоны заданного спектра.

Третий этап. В общем случае сферического взрыва в покоящейся среде $P_0 = \text{const}$, $\rho \approx \rho_0$ и для движения среды, когда за ударной волной выполняется условие адиабатичности, имеет место интегральный закон сохранения энергии. Энергия, выделившаяся в среде в результате импульсного процесса (взрыв ВВ, газовых смесей, выхлоп сжатого газа) будет равна [55, 72] полной

энергии возмущенной среды между подвижной границей полости и ударной волной $r_2(t)$

$$E(t) = 4\pi \int_{R(t)}^{r_2(t)} \left(\rho_0 \frac{v^2}{2} + \beta P^2 \right) r^2 dr, \quad \beta = \frac{1}{\rho_0 a_0^2}.$$

Соотношение для мощности

$$N(t) = 4\pi \rho_0 \left[\frac{v^2(r, t)}{2} + \frac{P^2(r, t)}{2\rho_0^2 a_0^2} \right] r^2 \frac{dr}{dt} \Bigg|_{r=R(t)}^{r=r_2(t)} + 4\pi \rho_0 \int_{R(t)}^{r_2(t)} \left(v \cdot v_t + \frac{P \cdot P_t}{\rho_0^2 a_0^2} \right) r^2 dr.$$

Для случаев электрического разряда, лазерного импульса в жидкости, когда приближенно можно считать, что энергия, выделявшаяся в канале, расходуется в основном на увеличение внутренней энергии плазмы и совершение работы расширяющимся каналом над окружающей средой, можно воспользоваться уравнением баланса энергии [13]

$$N(t) = P(R(t), t) \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{dP}{dt} V + P \frac{dV}{dt} \right]_{r=R(t)}, \quad (5.111)$$

где $V = 4/3\pi R^3(t)$.

Для вычисления мощности $N(t)$ известны все величины P , v , $R(t)$, определяемые по упомянутым формулам.

Вопросы управления электрическим разрядом в жидкости рассматривались автором в работах [49, 53, 57, 58].

Определение вида функций, имеющих заданный спектр, можно производить, например, используя усовершенствованный метод дискретного быстрого преобразования Фурье [54]; преобразуя функцию времени таким образом, чтобы спектр $P(r_1, t)$ переместился по шкале частот [55]; используя спектр известных функций.

Пусть

$$P(r_1, t) = C \exp(-\alpha t_1) = f(t); \quad C, \alpha - \text{const}; \quad t_1 = t - \frac{r_1 - r_0}{a},$$

где a – скорость распространения возмущений; индекс при t_1 можно опустить, поскольку спектр функции не зависит от сдвига по шкале времен. Спектр этой функции

$$|S(\omega)| = \int_0^\infty C e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = [A^2(\omega) + B^2(\omega)]^{1/2};$$

$$A(\omega) = \frac{Ca}{a^2 + \omega^2}; \quad B(\omega) = \frac{C\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

Если требуется сместить вещественный спектр амплитуд $|S(\omega)|$, то новая функция, которая имела бы спектральную плотность $S(\omega)$ на частоте $\omega_0 + \omega$, с учетом [55]

$$f_1(t) = f(t) \cos \omega_0 t + f^*(t) \sin \omega_0 t,$$

где $f^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[A(\omega) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + B(\omega) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right] d\omega$, будет иметь вид

$$f_1(t) = C \exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t - \frac{1}{\pi} C \exp(-\alpha t) \bar{E}_i(\alpha t) \sin \omega_0 t,$$

где E_i – интегральная показательная функция.

Вид кривой f_1 близок к затухающей синусоиде. Для количественных оценок возможности получения формы функции давления заданного спектра в точке r_1 удобна аппроксимация затухающей синусоидой $P(r_1, t) = B \exp(-\alpha \times t_1) \sin \omega_1 t$, $B, \alpha, r_0, a - \text{const}$.

Рассмотрим пример. Пусть давление в точке r_1 изменяется по закону затухающей синусоиды [53]:

$$P(r_1, t) = B \exp\left[-\alpha \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right)\right] \sin \omega_1 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right) \sigma_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}\right), \quad (5.112)$$

спектр ее

$$|s(\omega)| = B \left\{ \frac{\omega_1^2}{[(\alpha^2 + \omega_1^2) - \omega^2]^2 + 4\alpha^2 \omega^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.113)$$

$$\left| s(\omega^2 = \omega_1^2 - \alpha^2) \right|_{\max} = \frac{B}{2\alpha}, \quad (5.114)$$

ω – частота.

С учетом (5.112) из (3.9)–(3.11), (3.42) получаем для давления и скорости в любых точках

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} \left\{ B \exp\left[-\alpha \left(t - \frac{r - r_0}{a_0}\right)\right] \sin \omega_1 \left(t - \frac{r - r_0}{a_0}\right) \right\} - \frac{1}{2} \rho_0 v^2(r, t), \quad (5.115)$$

$$\begin{aligned} v(r, t) \rho_0 \frac{r^2}{r_1} &= \frac{r}{a_0} \left\{ B \exp\left[-\alpha \left(t - \frac{r - r_0}{a_0}\right)\right] \sin \omega_1 \xi \sigma_0(\xi) \right\} + \\ &+ \left\{ \frac{B \exp(-\alpha \xi)}{\alpha^2 + \omega_1^2} [-\alpha \sin \omega_1 \xi - \omega_1 \cos \omega_1 \xi] \sigma_0(\xi) + \frac{B \omega_1}{\alpha^2 + \omega_1^2} \sigma_0(\xi) \right\}, \end{aligned}$$

$$\xi = t - \frac{r - r_0}{a_0}, \quad (5.116)$$

давление и скорость на подвижной границе

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \{ B \exp(-\alpha \xi) \sin \omega_1 \xi \sigma_0(\xi) \} - \frac{1}{2} \rho_0 v^2(R(t), t), \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} v(R(t), t) \rho_0 \frac{R^2(t)}{r_1} &= \frac{R(t)}{a_0} \{ B \exp(-\alpha \xi) \sin \omega_1 \xi \sigma_0(\xi) \} + \\ &+ \left\{ \frac{B \exp(-\alpha \xi)}{\alpha^2 + \omega_1^2} [-\alpha \sin \omega_1 \xi - \omega_1 \cos \omega_1 \xi] \sigma_0(\xi) + \frac{B \omega_1}{\alpha^2 + \omega_1^2} \sigma_0(\xi) \right\}, \\ \xi &= t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Для вычислений по формулам (5.117), (5.118) необходимо знание величины $R(t)$, которая определится из соотношения

$$\begin{aligned} &[R_{i+1}^3(t) - r_0^3] \rho_0 / 3 r_1 = \\ &= \frac{R_{i+1}(t)}{a_0} \left\{ \frac{B \exp(-\alpha \xi)}{\alpha^2 + \omega_1^2} [-\alpha \sin \omega_1 \xi - \omega_1 \cos \omega_1 \xi] \sigma_0(\xi) + \frac{B \omega_1}{\alpha^2 + \omega_1^2} \sigma_0(\xi) \right\} + \\ &+ \frac{B}{\alpha^2 + \omega_1^2} \left\{ \frac{-\alpha \exp(-\alpha \xi)}{\alpha^2 + \omega_1^2} [-\alpha \sin \omega_1 \xi - \omega_1 \cos \omega_1 \xi] \sigma_0(\xi) - \frac{\alpha \omega_1}{\alpha^2 + \omega_1^2} \sigma_0(\xi) - \right. \\ &\left. - \frac{\omega_1 \exp(-\alpha \xi)}{\alpha^2 + \omega_1^2} [-\alpha \cos \omega_1 \xi + \omega_1 \sin \omega_1 \xi] \sigma_0(\xi) - \frac{\omega_1 \alpha}{\alpha^2 + \omega_1^2} \sigma_0(\xi) - \omega_1 \xi \sigma_0(\xi) \right\}, \\ \xi &= t - \frac{R_i(t) - r_0}{a_0}. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Вычисление $R(t)$ из "кубического" уравнения (5.119) производится, как описано в главе 3. Представлено (рис. 5.7): спектр (5.113) и соответствующее ему изменение давления в точке $r_1 = 0,5$ м волновой зоны (5.112), где $B = 3$ кгс/см², $\alpha = 0,045 \cdot 10^{-3}$, $a_0 = 1460$ м/с, $\omega_1 = \alpha \sqrt{15}$ с⁻¹, $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Спектр имеет максимум при $\omega \approx 170$ с⁻¹.

Показаны (рис. 5.8) результаты реконструкции радиуса $R(t)$ по (5.119), скорости $v(R(t), t)$ по (5.118), ускорения $\ddot{R}(t)$, давления $P(R(t), t)$ по (5.117) подвижной границы. Величины ускорения подвижной границы можно определить по формуле

$$\ddot{R}(t) = \frac{r_1}{\rho_0 R^2(t)} \left\{ \frac{R(t)}{a_0} [B(-\alpha) \exp(-\alpha \xi) \sin \omega_1 \xi \sigma_0(\xi) + \right. \\ \left. + B \exp(-\alpha \xi) \omega_1 \cos \omega_1 \xi \sigma_0(\xi) + \right. \\ \left. + B \exp(-\alpha \xi) \sin \omega_1 \xi \sigma_1(\xi)] + B \exp(-\alpha \xi) \sin \omega_1 \xi \sigma_0(\xi) \right\}, \quad (5.120)$$

где $\xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}$, $\sigma_1(\xi)$ – функция Дирака, для контроля вычислено $P(R(t), t)$

по известной формуле $P - P_n = \rho_0 \left(\frac{3}{2} \dot{R}^2 + \ddot{R} R \right)$ – обозначено ***, совпадение результатов хорошее.

Рис. 5.7. Заданный спектр и соответствующий ему вид функции давления в точке r_1 :
1 – давление в точке $r_1 = 0,5$ м;
2 – спектр функции давления в точке r_1

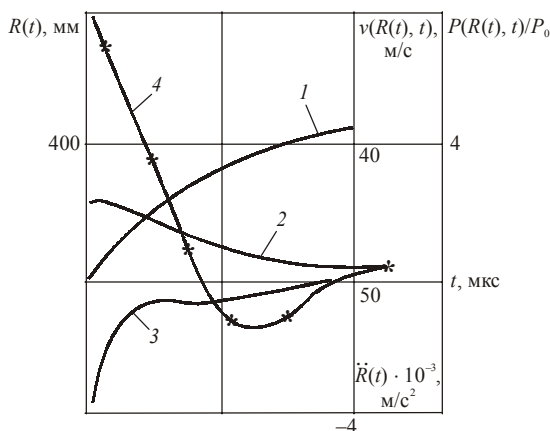
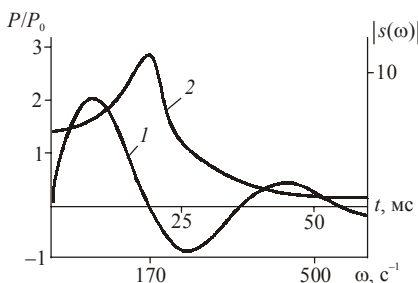


Рис. 5.8. Реконструкция радиуса, скорости, ускорения и давления подвижной границы по давлению в точке в виде затухающей синусоиды:

1 – радиус $R(t)$; 2 – скорость $v(R(t), t)$; 3 – ускорение $\ddot{R}(t)$; 4 – давление $P(R(t), t)$

Таким образом, для получения в точке r_1 функции давления заданного спектра (рис. 5.7, кривые 1, 2) необходимо иметь характеристики расширяющейся полости, показанные на рис. 5.8: изменение радиуса, скорости, ускорения и давления на подвижной границе кривые 1, 2, 3, 4 соответственно. Предположим, что мы хотим получить такие параметры расширения полости с помощью электрического разряда в жидкости. Тогда мощность $N(t)$, вводимую в канал, можно определить из соотношения (5.111) с учетом (5.118)–(5.119), при этом необходимую величину временного градиента давления $dP(R(t), t)/dt$ на подвижной границе можно определить по формуле

$$\frac{dP(R(t), t)}{dt} = \frac{r_1}{R(t)} \{ B [-\alpha \exp(-\alpha \xi) \sin \omega_1 \xi + \omega_1 \exp(-\xi \alpha) \cos \omega_1 \xi] \sigma_0(\xi) + \\ + B \exp(-\alpha \xi) \sin \omega_1 \xi \sigma_1(\xi) \} - \rho_0 v \dot{v}, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}. \quad (5.121)$$

Соответствующие вычисления представлены (рис. 5.9). Как видим, получить такие параметры изменения радиуса, скорости расширения полости, как показано (рис. 5.8), а также закон ввода энергии за такой промежуток времени, как изображено (рис. 5.9) с помощью электрического разряда в жидкости практически невозможно. Для рассмотренного случая нужно подбирать другой импульсный источник ввода энергии или их комбинацию.

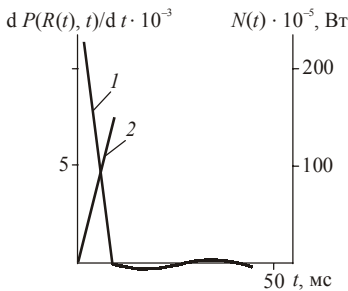


Рис. 5.9. Реконструкция временного градиента давления на подвижной границе и закона ввода мощности:

1 – временный градиент давления; 2 – закон ввода мощности в канал для получения заданного спектра функции давления в точке r_1

Полученные в этом подразделе соотношения, являющиеся точными аналитическими решениями волнового уравнения, позволяют в широком диапазоне изменений спектра – формы функции давления реконструировать параметры движения полости [69, 70], определять закон ввода энергии и оптимизировать выбор соответствующих импульсных источников [73], или дать более точные рекомендации по управлению импульсными процессами. К числу последнего можно отнести, например, получившие широкое распространение шунтирующие элементы, динамическое включение которых позволяет в определенном диапазоне изменять закон ввода энергии в канал [35, 74], различные добавки, изменяющие энергетические характеристики канала, например, водо-

наполненные экзотермические смеси и т. д., либо электрический разряд в химически активных конденсированных средах [59, 60, 68].

5.5. Построение решения волнового уравнения с нелинейными условиями на подвижных границах

Задачи с нелинейными граничными условиями и подвижными границами – современный раздел математической физики, прикладная важность их настолько велика, что они становятся в ряд актуальнейших проблем математики, физики, механики. В этом подразделе делается попытка применить изложенный в работах автора, приведенных в предыдущих главах, метод к этому классу задач.

В предыдущем подразделе рассмотрены случаи, когда с помощью импульсных процессов необходимо получить заданную форму функции давления (спектр) в точке волновой зоны (обратная задача). В определенных ситуациях требуется обеспечить заданную форму функции давления (спектр) на движущейся поверхности поршня. В этом случае необходимо решить следующую задачу с нелинейным граничным условием на подвижных границах:

$$\varphi_{tt} - a_0^2 \varphi_{rr} - a_0^2 r^{-1} (\nu - 1) \varphi_r = 0, \quad (5.122)$$

на подвижной границе задано давление

$$P(R(t), t) = -\rho_0 \left[\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_r^2 \right]_{r=R(t)}. \quad (5.123)$$

Начальные условия полагаем нулевыми.

Еще Декарт указывал на огромную роль математических методов при решении физических проблем и предложил такую схему решения различных задач:

первый шаг – задача любого вида сводится к математической задаче;

второй шаг – математическая задача любого вида сводится к алгебраической задаче;

третий шаг – любая алгебраическая задача сводится к решению одного единственного уравнения [61]. Применим эту схему к уже сформулированной задаче (5.122), (5.123).

1. В прикладной математике и механике одной из нерешенных до конца проблем является аппроксимация функций, то есть, пока нет возможности сделать удобную для проведения всех математических операций математическую запись произвольной функции, которая давала бы точное значение во всех точках ее определения [62]. В подразделе 3.3 показано, что для рассматриваемых задач при произвольных величинах начального радиуса, перемещений, законов движения границ и вида функции давления в точке волновой зоны произвольную функцию f можно представить в виде полинома Лагранжа степени m

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m,$$

где число m определяет количество точных значений функции – решения и может быть сколь угодно большим, показано, что эту запись нельзя путать с рядом. Полином точно описывает функцию в узлах аппроксимации, а промежуточные точки с некоторым приближением. Сделаем попытку применить вначале запись функций в виде полинома Лагранжа степени m для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Известно [63], что С.А. Чаплыгин предложил новый метод интегрирования дифференциальных уравнений. Метод основан на нахождении решений, являющихся приближениями "сверху" и "снизу" относительно точного решения. Нахождение этих приближенных решений предложенным методом требует большого искусства, оставляя значительное место интуиции, и весьма часто может оказаться чрезвычайно громоздким ввиду крайней сложности вычислений [63, с. 500]. Положительным, однако, является возможность решения нелинейных уравнений. С.А. Чаплыгин и М.В. Келдыш рекомендовали развивать дальше метод решения нелинейных уравнений.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y^3 - x^2 = 0 \quad (5.124)$$

при $x = 0, y = 0$ решение С.А. Чаплыгина

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{10}}{270} + \frac{x^{17}}{135 \cdot 153} - \dots \quad (5.125)$$

Представим искомое решение уравнения (5.124) в виде полинома Лагранжа

$$y = \sum_{m=1}^{n=4} A_m x^m = A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4, \quad (5.126)$$

$$y' = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3. \quad (5.127)$$

Тогда с учетом (5.126), (5.127) уравнение (5.124) запишется в виде

$$A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \sum_{\substack{m=1 \\ n=1 \\ l=1}}^4 A_n A_m A_l x^{n+m+l} = x^2,$$

или

$$\begin{aligned} & A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + 3 A_5 x^4 + 3 A_6 x^5 + 3 A_7 x^5 + \\ & + 6 A_8 x^6 + 3 A_9 x^7 + A_{10} x^6 + 3 A_{11} x^7 + 3 A_{12} x^8 + A_{13} x^9 = x^2, \end{aligned} \quad (5.128)$$

где

$$\begin{aligned} A_4 &= A_1 A_1 A_1; \quad A_5 = A_1 A_1 A_2; \quad A_6 = A_1 A_1 A_3; \quad A_7 = A_1 A_2 A_2; \\ A_8 &= A_1 A_2 A_3; \quad A_9 = A_1 A_3 A_3; \quad A_{10} = A_2 A_2 A_2; \quad A_{11} = A_2 A_2 A_3; \\ A_{12} &= A_2 A_3 A_3; \quad A_{13} = A_3 A_3 A_3. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему (5.128) алгебраических уравнений для определения коэффициентов Лагранжа A_m , решая которую в промежутке значений $x = 0 \div 1$, получим

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,3786 \cdot 10^{-3}; \quad A_2 = -0,211 \cdot 10^{-2}; \quad A_3 = 0,3341 \cdot 10^0; \\ A_4 &= 0,4116 \cdot 10^{-1}; \quad A_5 = -0,4933 \cdot 10^{-1}; \quad A_6 = 0,2059 \cdot 10^4; \\ A_7 &= -0,2059 \cdot 10^4; \quad A_8 = -0,1348 \cdot 10^1; \quad A_9 = -0,4455 \cdot 10^5; \\ A_{10} &= 0,7757 \cdot 10^1; \quad A_{11} = 0,4455 \cdot 10^5; \quad A_{12} = -0,3636 \cdot 10^{-1}; \\ A_{13} &= 0,1978 \cdot 10^{-1}. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Для сравнения с решением (5.125) возьмем первые три члена полинома Лагранжа

$$y = 0,3786 \cdot 10^{-3} x^1 - 0,211 \cdot 10^{-2} x^2 + 0,3341 \cdot 10^0 x^3 + \dots \quad (5.130)$$

y	по (5.125)	по (5.130)
$x = 0,5$	0,041666	0,0414243
$x = 1,0$	0,329678	0,3323686

Как видим, совпадение хорошее. Система (5.128) решалась в промежутке значений $x = 0 \div 1$ для $n = 4$, естественно, при уменьшении промежутка изменений x или увеличении числа n точность вычисления коэффициентов (5.129), а значит и решения, будет увеличиваться.

Рассмотрим еще одно нелинейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + y^2 - 1 - x = 0 \quad (5.131)$$

при $x = 0$; $y = 1$ решение С.А. Чаплыгина [63, с. 534]

$$y = 1 + 0,5 x^2 - \frac{1}{3} x^3 \dots \quad (5.132)$$

Представим искомое решение уравнения (5.131) в виде полинома Лагранжа

$$y = \sum_{m=0}^2 A_m x^m; \quad y' = \sum_{m=0}^2 m A_m x^{m-1}; \quad A_0 = 1. \quad (5.133)$$

С учетом (5.133) уравнение (5.131) запишется в виде

$$\sum_{m=0}^2 m A_m x^{m-1} + \sum_{\substack{n=0 \\ m=0}}^2 A_m A_n x^{m+n} - 1 - x = 0 \quad (5.134)$$

или

$$A_1(1+2x) + A_2(2x+2x^2) + A_3(x^2) + A_4(2x^3) + A_5(x^4) = x,$$

где $A_3 = A_1 A_1$; $A_4 = A_1 A_2$; $A_5 = A_2 A_2$.

Таким образом, получаем систему (5.134) алгебраических уравнений, решая которую для значений x , равных 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,7, получим

$$A_0 = 1; A_1 = 0,0009519; A_2 = 0,4912316; A_3 = -0,9145717; \\ A_4 = -0,03376905; A_5 = -0,0004590157.$$

Решение будет иметь вид для первых трех членов полинома Лагранжа

$$y = 1 + 0,0009519x + 0,4912316x^2 + \dots \quad (5.135)$$

Если записать решение (5.132) в виде

$$y = 1 + 0 \cdot x + 0,5x^2 + \dots,$$

то убеждаемся, что решения близки.

2. Используем аппроксимацию функций полиномом Лагранжа для решения задачи (5.122) при нелинейном граничном условии. Для простоты вначале рассмотрим задачи, когда дополнительное условие задается не в форме (5.123) на подвижной границе $r = R(t)$, а в точке $r = r_1$, находящейся насколько можно близко к движущейся границе, но таким образом, чтобы при движении границы последняя не достигала ее за рассматриваемый промежуток времени [64, 65]:

$$P = -\rho_0 \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_r^2 \right) \Big|_{r=r_1}. \quad (5.136)$$

В точке r_1 скорости частиц среды будут соизмеримы со скоростью движения границы и нелинейным членом $\frac{1}{2} \rho_0 v^2$ нельзя пренебрегать.

С учетом решений волнового уравнения (3.25), (3.26) запишем (5.136) в виде

$$P = \frac{r_1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho_0 \left\{ \frac{r_1}{r^2 \rho_0} \left[\frac{r}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right] \right\}^2, \\ \xi = t - \frac{r - r_0}{a_0}. \quad (5.137)$$

Соотношение (5.137) п. 2 можно решить так, как решены уравнения в п. 1: величина P – произвольная функция давления, известна; при $r = r_1$, задавая значения времени t , приходим к системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов Лагранжа A_m , после чего по формулам (3.25)–(3.28), (3.35) можно вычислить давление и скорость в любых точках и на подвижных границах.

Поступим иначе. Покажем, что решение задачи можно свести к решению одного алгебраического уравнения. Вычислим значение A_0 , когда решение,

аппроксимированное полиномом Лагранжа $\sum_{m=0}^0 A_m \xi^m$ представляет собой

прямую в точке $r = r_1$ для момента t_0 , это момент прихода ударной волны в точку r_1 . Из (5.137) имеем

$$P(r_1, t) = A_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \left\{ \frac{1}{r_1 \rho_0} \left[\frac{r_1}{a_0} A_0 + A_0 \xi \right] \right\}^2, \quad (5.138)$$

решая это квадратное уравнение, получаем

$$A_0 = \frac{1}{2 c_1 c_2^2 c_3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 c_1 c_2^2 c_3} \right)^2 - \frac{P(r_1, t_0)}{c_1 c_2^2 c_3}}, \quad (5.139)$$

где $c_1 = \frac{1}{2} \rho_0$; $c_2 = \frac{1}{r_1 \rho_0}$; $c_3 = \frac{r_1^2}{a_0^2}$; $t_0 = \frac{r_1 - r_0}{a_0}$; $\xi = 0$.

Расширим временной интервал на некоторую величину Δt и определим решение, которое аппроксимируем полиномом Лагранжа $\sum_{m=0}^1 A_m \xi^m$, проходящим через точку t_0 и вторую точку $t_1 = t_0 + \Delta t$. Тогда из (5.137) имеем

$$P(r_1, t_1) = A_0 + A_1 \xi - c_1 \left\{ c_2 \left[\frac{r_1}{a_0} (A_0 + A_1 \xi) + A_0 \xi^1 + \frac{A_1}{2} \xi^2 \right] \right\}^2. \quad (5.140)$$

Здесь P известно по условию, A_0 – из (5.139), тогда A_1 определится из решения квадратного уравнения (5.140)

$$A_1 = -\frac{1}{2} \left[\frac{c_1 c_2^2 c_4 - \xi}{c_1 c_2^2 c_3} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{c_1 c_2^2 c_4 - \xi}{c_1 c_2^2 c_3} \right]^2 - \frac{c_1 c_2^2 c_5 + P - A_0}{c_1 c_2^2 c_3}}, \quad (5.141)$$

где

$$c_3 = \left(\frac{r_1}{a_0} \xi + \frac{1}{2} \xi^2 \right)^2, \quad c_4 = 2 \left(\frac{r_1}{a_0} \xi + \frac{1}{2} \xi^2 \right) \left(\frac{r_1}{a_0} A_0 + A_0 \xi^1 \right);$$

$$c_5 = \left(\frac{r_1}{a_0} A_0 + A_0 \xi \right)^2; \quad \xi = t_1 - \frac{r_1 - r_0}{a_0}.$$

Расширим временной интервал еще на Δt и определим решение, которое аппроксимируем полиномом Лагранжа $\sum_{m=0}^2 A_m \xi^m$, проходящим через точки t_0 , t_1 и третью точку $t_2 = t_0 + 2\Delta t$. Тогда из (5.137) имеем

$$P(r_1, t_2) = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 -$$

$$- c_1 \left\{ c_2 \left[\frac{r_1}{a_0} (A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2) + A_0 \xi + \frac{A_1}{2} \xi^2 + \frac{A_2}{3} \xi^3 \right] \right\}^2. \quad (5.142)$$

Решая это квадратное уравнение, получим

$$A_2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^2}{c_1 c_2^2 c_4^2} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^2}{c_1 c_2^2 c_4^2} \right]^2 - \frac{c_1 c_2^2 c_3^2 - c_0}{c_1 c_2^2 c_4^2}}, \quad (5.143)$$

где

$$c_0 = -P(r_1, t_2) + A_0 + A_1 \xi; \quad c_3 = A_0 \left(\frac{r_1}{a_0} + \xi \right) + A_1 \left(\xi \frac{r_1}{a_0} + \frac{1}{2} \xi^2 \right);$$

$$c_4 = \frac{r_1}{a_0} \xi^2 + \frac{1}{3} \xi^3; \quad \xi = t_2 - \frac{r_1 - r_0}{a_0}.$$

Для определения следующего коэффициента A_3 при $t_3 = t + 3\Delta t$ имеем

$$P(r_1, t_3) = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 -$$

$$- c_1 \left\{ c_2 \left[\frac{r_1}{a_0} (A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3) + A_0 \xi + \frac{A_1}{2} \xi^2 + \frac{A_2}{3} \xi^3 + \frac{A_3}{4} \xi^4 \right] \right\}^2, \quad (5.144)$$

откуда

$$A_3 = -\frac{1}{2} \left[\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^3}{c_1 c_2^2 c_4^2} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^3}{c_1 c_2^2 c_4^2} \right]^2 - \frac{c_1 c_2^2 c_3^2 - c_0}{c_1 c_2^2 c_4^2}}, \quad (5.145)$$

где

$$c_0 = -P(r_1, t_3) + A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2;$$

$$c_3 = \frac{r_1}{a_0} (A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2) + \left(A_0 \xi + \frac{A_1}{2} \xi^2 + \frac{A_2}{3} \xi^3 \right);$$

$$c_4 = \frac{r_1}{a_0} \xi^3 + \frac{1}{4} \xi^4; \quad \xi = t_3 - \frac{r_1 - r_0}{a_0}.$$

Продолжая таким способом, можно получить необходимое количество коэффициентов полинома Лагранжа. Соотношение для определения m -го коэффициента Лагранжа будет иметь вид

$$A_m = -\frac{1}{2} \left[\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^m}{c_1 c_2^2 c_4^2} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{2c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \xi^m}{c_1 c_2^2 c_4^2} \right) \right]^2 - \frac{c_1 c_2^2 c_3^2 - c_0}{c_1 c_2^2 c_4^2}}, \quad (5.146)$$

где

$$c_0 = -P(r_1, t) + \sum_{n=0}^{m-1} A_n \xi^n; \quad c_1 = \frac{1}{2} \rho_0; \quad c_2 = \frac{1}{\rho_0 r_1};$$

$$c_3 = \frac{r_1}{a_0} \sum_{n=0}^{m-1} A_n \xi^n + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A_n}{n-1} \xi^{n-1}; \quad c_4 = \frac{r_1}{a_0} \xi^m + \frac{1}{m+1} \xi^{m+1}; \quad \xi = t - \frac{r_1 - r_0}{a_0}.$$

Как видим, решение задачи с нелинейным дополнительным условием (5.136) и движущейся с произвольной скоростью границей свелось к вычислению формулы типа (5.146); зная коэффициенты A_m , по (3.25)–(3.28), (3.35) определяются исследуемые функции в любых точках, включая подвижные границы, а также параметры ее движения.

Рассмотрим пример. Пусть известно в точке $r_1 = 55 \cdot 10^{-3}$ м, находящейся вблизи расширяющейся сферы $r_0 = 50 \cdot 10^{-3}$ м, в момент времени $\frac{r_1 - r_0}{a_0} = \frac{55 - 50}{1,5} \cdot 10^{-6} = 3,3$ мкс возникающее давление

$$P(r_1, t) = -\rho_0 \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_r^2 \right)$$

и изменяется по закону, изображенному на рисунке (рис. 5.10). По (5.139) определяем A_0 , где $\rho_0 = 102 \text{ кгс}^2/\text{м}^4$; $a_0 = 1500 \text{ м/с}$, $t_0 = 3,3$ мкс, а по (5.141), (5.143), (5.145), (5.146) последовательно и другие коэффициенты полинома Лагранжа $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_m$; для моментов времени $t = 3,3; 7; 12; 17$ мкс соответственно [64, 65]

$$\begin{aligned} A_0 &= 2778,0; \quad A_1 = -80,187 \cdot 10^6; \\ A_2 &= 0,0073 \cdot 10^{12}; \quad A_3 = -0,00511 \cdot 10^{18}. \end{aligned} \quad (5.147)$$

С учетом (5.147) из (3.25)–(3.28), (3.35) определяем скорости и давления в любых точках, а также на подвижных границах. Изображено (рис. 5.11)

изменение радиуса подвижной границы $R(t)$ и давления на движущейся границе. Необходимо отметить, что полином, коэффициенты которого (5.147) определялись для узловых точек в промежутке времени $3,(3) - 17 \cdot 10^{-6}$ с, может быть использован в указанном диапазоне времени (см. решение прямой задачи рис. 4.7, 4.8).

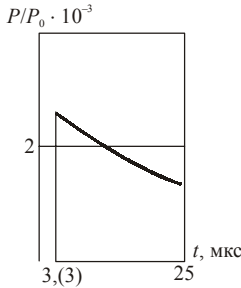


Рис. 5.10. Исходная для реконструкции нелинейная форма функции давления

$$P(r_1, t) = -p_0 \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_r^2 \right)$$

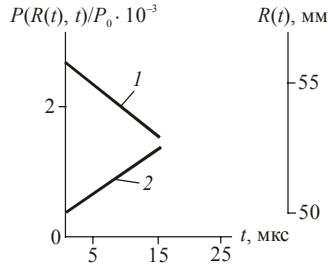


Рис. 5.11. Реконструкция изменения давления на подвижной границе и радиуса подвижной границы по заданному нелинейному условию:
1 – давление на подвижной границе;
2 – изменение радиуса подвижной границы

3. Рассмотрим задачи, когда дополнительное условие задается на подвижной границе, т.е. известно только

$$P(R(t), t) = -p_0 \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_r^2 \right) \Big|_{r=R(t)}, \quad (5.148)$$

при этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению, как и остальные исследуемые функции P и v . Подобные задачи могут возникнуть, например, в химических технологиях, когда на подвижной границе поршня необходимо иметь заданную функцию давления [66, 67], а также при обработке поверхностей материалов.

Решение проводим методом последовательных приближений. Последовательность расчета следующая:

1) Определяем точку r_1 . Выбор точки $r = r_1$ ясен из физического смысла. Это та ближайшая точка, которой не коснется подвижная граница расширяющейся полости за рассматриваемый период времени. Поскольку скорость движения границы неизвестна, ее требуется определить в процессе решения задачи, то r_1 ориентировочно можно определить с «запасом» в безопасную сторону при $v(R(t), t) = \text{const} = 200$ м/с.

2) Производим расчет первого приближения, ориентировочно принимая закон изменения давления на подвижной границе равным давлению в точке r_1 . По формулам (5.138)–(5.146) с учетом $P(r_1, t) \approx P(R(t), t)$ определяем коэффициенты Лагранжа A_m , а по (3.35) значения функции $R(t)$ первого приближения.

3) С учетом решений волнового уравнения (3.27), (3.28) запишем (5.148) в виде

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho_0 \left\{ \frac{r_1}{R^2(t) \rho_0} \left[\frac{R(t)}{a_0} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right] \right\}^2, \\ \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}. \quad (5.149)$$

Здесь $P(R(t), t)$ известно по условию, значения функции $R(t)$ берутся первого приближения, найденного выше, и методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа определяем A_m^I , отвечающие нелинейному граничному условию на подвижных границах. Соотношения для определения A_m в общем случае произвольных величин начального радиуса, законов движения границ и вида $P(R(t), t)$ имеют вид:

$$A_0 = \frac{1}{2} \frac{r_1}{R(t) c_1 c_2^2 c_3} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{r_1}{R(t) c_1 c_2^2 c_3} \right]^2 - \frac{P(R(t), t)}{c_1 c_2^2 c_3}}, \quad (5.150)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{2} \rho_0; \quad c_2 = \frac{r_1}{R^2(t) \rho_0}; \quad c_3 = \left[\frac{R(t)}{a_0} + \xi \right]^2.$$

Величину r_0 необходимо выбрать. Следует учесть, что заданный закон изменения $P(R(t), t)$ можно обеспечить с различного начального радиуса r_0 , но при этом закон движения границы будет существенно различным. Соотношение для m -го коэффициента Лагранжа

$$A_m = -\frac{1}{2} \frac{2 c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \frac{r_1}{R(t)} \xi^m}{c_1 c_2^2 c_4^2} \pm \\ \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2 c_1 c_2^2 c_3 c_4 - \frac{r_1}{R(t)} \xi^m}{c_1 c_2^2 c_4^2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2^2 c_3^2 - c_0}{c_1 c_2^2 c_4^2}}, \quad (5.151)$$

где

$$c_0 = -P(R(t), t) + \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{m-1} A_m \xi^m; \quad c_1 = \frac{1}{2} \rho_0; \quad c_2 = \frac{r_1}{R^2(t) \rho_0}; \\ c_3 = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{n=0}^{m-1} A_n \xi^n + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A_n}{n-1} \xi^{n-1}; \quad c_4 = \frac{r_1}{R(t)} \xi^m + \frac{1}{m+1} \xi^{m+1}.$$

4) Второе приближение: из (3.35) по известным A_m^I определяем уточненное значение $R(t)$ и по (5.149)–(5.151) методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа получим уточненные значения A_m^{II} второго приближения. Описанный процесс обладает хорошей сходимостью и, как правило, с приемлемой для практических целей точностью достаточно сделать одно приближение. По известным коэффициентам A_m^{II} и формулам (3.25)–(3.28), (3.35) определяются значения исследуемых функций в любых других точках.

Рассмотрим пример. Пусть необходимо обеспечить давление на подвижной границе $P(R(t), t) = \text{const} = 2851,9 \text{ кгс/см}^2$, тогда, принимая $r_0 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, ближайшую точку $r_1 = 55 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $a_0 = 1500 \text{ м/с}$ и $P(R(t), t) \approx P(r_1, t)$, $t_0 = \frac{r_1 - r_0}{a_0}$, $\xi = 0$ из (5.139) получаем:

$$A_0^I = \frac{1}{2c_1 c_2^2 c_3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2c_1 c_2^2 c_3}\right)^2 - \frac{P}{2c_1 c_2^2 c_3}} = 3055,25,$$

где $c_1 = 51 \cdot 10^{-4}$; $c_2 = 0,178253151 \cdot 10^{-4}$; $c_3 = 0,0013(4) \cdot 10^{-6}$.

Второе приближение получаем из (5.150) при $t = 0$, $R(t = 0) = r_0$

$$A_0^{II} = \frac{1}{2} \frac{r_1}{R(t)c_1 c_2^2 c_3} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{r_1}{R(t)c_1 c_2^2 c_3}\right)^2 - \frac{2851,9}{c_1 c_2^2 c_3}} = 2777,45,$$

где

$$c_1 = 51 \cdot 10^{-4}; \quad c_2 = \frac{r_1}{r_0^2 \rho_0} = 0,002156863 \cdot 10^6;$$

$$c_3 = \left[\frac{R(t)}{a_0} + \xi \right]^2 = \left(\frac{r_0}{a_0} \right)^2 = 0,00(1) \cdot 10^{-6}; \quad \xi = 0.$$

$A_0^{II} = 2777,45$, а точное значение 2778,0.

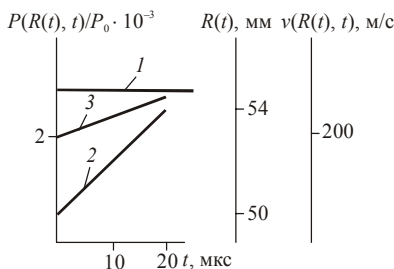
Зная A_m , по формулам (3.25)–(3.28) определяем параметры движения границы и P , v в других точках. Для $R(t)$ и $v(R(t), t)$ из (3.35) и (3.28) соответственно имеем:

$$[R^3(t) - r_0^3] \rho_0 / 3r_1 = \frac{R(t)}{a_0} A_0 \xi + \frac{A_0}{2} \xi^2;$$

$$v(R(t), t) = \frac{r_1}{\rho_0 R^2(t)} \left(\frac{R(t)}{a_0} A_0 + A_0 \xi \right); \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}.$$

Изображено (рис. 5.12) заданное давление на подвижной границе полости и параметры движения границы $v(R(t), t)$ и $R(t)$, обеспечивающие это давление.

Рис. 5.12. Определение изменения скорости и радиуса подвижной границы по заданному нелинейному условию на подвижной границе:
1 – заданное давление; 2 – изменение радиуса подвижной границы; 3 – закон изменения скорости подвижной границы



Закключение по главе 5

Показана возможность применения предложенного подхода к решению других задач с подвижными границами: описываемых волновым уравнением цилиндрической и плоской симметрий, прямых и обратных задач с одной и двумя подвижными границами. Особо следует отметить получение точного аналитического решения для цилиндрической симметрии, поскольку отсутствие точного аналитического решения приводило к ошибочным заключениям об использовании волнового уравнения в задачах импульсной гидромеханики. Намечены математические приемы, выполнение которых обеспечивает получение решений задач с подвижными границами, описываемых уравнениями параболического типа. Впервые установлены аналитические зависимости между законом ввода энергии к источнику возмущения и спектром возбуждаемых им гидродинамических волн. Это позволяет в широком диапазоне изменения спектра-формы функции давления в точке волновой зоны реконструировать кинематические и динамические параметры расширения полости, определять однозначно закон ввода энергии и оптимизировать выбор соответствующих импульсных источников. Построены решения волнового уравнения с нелинейными граничными условиями на подвижных границах, показана возможность сведения решения подобных задач к решению одного единственного алгебраического уравнения (метод последовательного определения коэффициентов Лагранжа).

6. УПРАВЛЕНИЕ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ. ПОДВИЖНОСТЬ И ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПОДВИЖНЫХ ГРАНИЦ КАК ПРИНЦИП УПРАВЛЕНИЯ

Волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов, необходимость управлять которыми возникает, как правило, одновременно с изучением этих явлений. Возможности управления обуславливаются как наличием точных аналитических решений обратных волновых задач (задач управления), так и в большей степени – формулировкой математических моделей, позволяющих теоретически описать практически все возможное многообразие, все мыслимые волновые поля. Такой важной математической моделью является волновое уравнение, реализуемое в областях с подвижными и подвижными проницаемыми границами.

Как известно, управление есть в общем случае функция организованных систем различной природы (биологических, физических, технических, социальных и т. д.), обеспечивающих сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. Задачей управления является определение функции управления. В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: первое – функция скорости (движения и проницаемости подвижной границы) или второе – функция давления (на подвижной границе). Целью исследований по вопросам управления является определение функций управления первого и второго случаев, которые обеспечивают получение заранее заданных волновых полей скорости и давления в интересующих точках, включая ближнюю зону и подвижные поверхности границ (где экспериментальное определение затруднительно или невозможно), а также целенаправленное изменение их в течение времени. Основными, главными понятиями, объясняющими свойства и возможности (управлять) упомянутой математической модели, является подвижность и проницаемость подвижных границ, что по определению и является принципом управления.

Волновые процессы в областях с подвижными границами (ПГ) относятся к наиболее сложным для изучения [1, 2]. До настоящего времени не было ме-

тодов решения обратных волновых задач с ПГ, подобные задачи в математической физике не рассматривались. Впервые предложен и разработан авторский подход решения проблемы подвижных границ для волнового уравнения – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [3–5]. Получены точные аналитические зависимости, связывающие значения исследуемых функций давления и скорости в произвольной фиксированной точке волновой зоны с функциями управления – т. е. с давлением на ПГ и скоростью движения подвижной границы. Определение функций управления 1 и 2 случаев имеет большое научное и прикладное значение. Оно позволяет, например, в приложениях, используя уравнение баланса энергии [6, 7], определить закон ввода мощности в расширяющийся плазменный поршень электрического разряда или лазерного импульса в жидкости для получения заранее заданной формы функции давления или скорости в сжимаемой среде.

6.1. Определение функций управления волновыми процессами сферической симметрии в областях с подвижными проницаемыми границами. Учет нелинейных дополнительных условий

1. Исследуется возможность управления волновыми процессами в областях с подвижными границами (ПГ). Величины начального радиуса и перемещений, а также законы изменения скорости и проницаемости подвижных границ (ППГ) могут быть произвольными, а граничные или дополнительные условия могут быть нелинейными. Как уже упоминалось, управление есть в общем случае функция организованных систем различной природы. Задачей управления является определение функции управления.

Рассмотрим задачу:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - (v-1) \varphi_r a^2 r^{-1} = 0, \quad r \geq R(t), \quad (6.1)$$

$$\varphi_t(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0, \quad R(0) = r_0, \quad (6.2)$$

$$P - P_0 \Big|_{r=r_1} = -\rho \varphi_t = f \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right), \quad (6.3)$$

$$P - P_0 \Big|_{r=r_1} = -\rho \varphi_t - 0,5 \rho \varphi_r^2, \quad (6.4)$$

$$P - P_0 \Big|_{r=R(t)} = -\rho \varphi_t - 0,5 \rho \varphi_r^2, \quad (6.5)$$

$$v \Big|_{r=R(t)} = -\varphi_r, \quad (6.6)$$

$$v(R(t), t) \neq dR(t)/dt, \quad (6.7)$$

здесь φ – потенциал скорости; v – показатель симметрии; t – время; $R(t)$, r_0 , r_1 , r – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны

соответственно; P_0 , ρ , a – давление, плотность, скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости; v – скорость; (6.7) – условие проницаемости подвижной границы. Условия в точке волновой зоны (6.3) или (6.4) определяют классы обратных задач, а на подвижной границе (6.5) или (6.6) – класс прямых. При решении обратных задач (а также случая условий (6.5)) необходимо реконструировать значения исследуемых функций в других точках, включая подвижные границы, при этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению и может быть нелинейным. Это традиционное определение обратных и прямых задач. Наличие проницаемости подвижных границ может вносить коррективы в эти понятия, о чем будет сказано ниже.

В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: 1 – функция скорости (движения и проницаемости подвижных границ) $v(R(t), t)$, $v_2(R(t), t)$ или 2 – функция давления (на подвижной границе) – $P(R(t), t)$. Целью работы является определение функций управления первого и второго случаев, которые обеспечивают получение заранее заданных волновых полей скорости и давления в интересующих точках, включая ближнюю зону и подвижные поверхности границ, а также целенаправленное изменение их в течение времени.

Существенная нелинейность проблемы подвижных границ, для уравнений параболического типа известная как проблема Стефана, показана в работах [1, 2]. Для нашего случая это рассмотрено в [8]. Методологически важным, примыкающим к понятию существенной нелинейности проблемы ПГ для волнового уравнения, является вопрос идентичности, равноценности эйлерова и лагранжева описания одной и той же задачи. Показано [8], что постановка волновых задач с учетом ПГ является корректной как в эйлеровом, так и лагранжевом описании, которые являются равноценными. Методов точного аналитического решения подобных задач не было [1, 2]. В известном методе [2] для решения прямых задач и случая движения непроницаемых границ используется разложение по "мгновенным" собственным функциям. Однако это приводит к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

2. Функции управления 1) и 2): условия $P - P_0|_{r=r_i} = -\rho\phi_i$.

Определять функции управления волновыми процессами первого и второго случаев для математических моделей (6.1)–(6.7) будем методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [3, 5]. Для определенности рассмотрим случай сферической симметрии $v = 3$. В соответствии с этими методами получим решение уравнения (6.1), которое удовлетворяет начальным условиям (6.2) и условию (6.3); функции управления при этом имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} f(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t),$$

$$v(R(t), t) \frac{R^2(t) \rho}{r_1} = \frac{R(t)}{a} f(\xi) \left[\int_0^t f(\xi) dt \right]_{r=R(t)}, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad (6.8)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \left[\int_0^t f(\xi) dt + \int_0^t \int_0^t f(\xi) dt dt \right]_{r=R(t)}. \quad (6.9)$$

Функция f в (6.8), (6.9) для обратных задач известна, она может быть аппроксимирована разными способами (гл. 3–5). "Кубическое" уравнение (6.9), а также подобные ему (6.13) и другие, решаются, например, как в [5, 9]. Следует отметить, что устойчивость обратных задач есть непосредственное следствие теоремы единственности [10]. Подобные теоремы доказаны, например, в [11]. Из (6.9) и подобных ему упомянутых соотношений видно, что малым изменениям исследуемых функций соответствуют малые изменения радиусов подвижной границы.

Для общего случая произвольных законов движения границ и видов функции f последнюю можно аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m . Число m характеризует количество точных значений функции и может быть сколь угодно большим [12]:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m, \quad A_m = \text{const}. \quad (6.10)$$

В этом случае, учитывая (6.8)–(6.10) функции управления имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad (6.11)$$

$$v(R(t), t) \cdot \rho R^2(t) / r_1 = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \quad (6.12)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{m+1} \xi^{m+2}. \quad (6.13)$$

Для ступенчатой функции в точке r_1 функции управления 1 и 2 имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} A_0 \sigma_0(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t);$$

$$v(R(t), t) = \frac{r_1}{R^2(t)\rho} \left[\frac{R(t)}{a} A_0 + A_0 \xi \right], \quad (6.14)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} A_0 \xi + \frac{A_0}{2} \xi^2, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}. \quad (6.15)$$

Это точное аналитическое решение обратной задачи с ПГ имеет важное значение. Оно служит для оценок, в том числе и при определении максимальных значений (скачков) исследуемых функций P и v .

3. Функции управления 1 и 2: нелинейные условия $P - P_0|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t - 0,5\rho\varphi_r^2$.

Условия (6.4), (6.5) возникают в тех случаях, когда функцию давления, например, необходимо обеспечить вблизи или на подвижной границе. При этом скорости частиц среды велики и соизмеримы или равны скорости движения границы и пренебрегать нелинейным членом интеграла Коши-Лагранжа нельзя [8, 13]. Задачи с нелинейными дополнительными условиями и подвижными границами представляют большой интерес, прикладная важность их настолько велика, что они становятся в ряд актуальнейших проблем математики, физики, механики. Подобные задачи в математической физике не рассматривались.

Показано, что решение задачи с нелинейным дополнительным условием (6.4) и движущейся с произвольным законом изменения скорости границей свелось к вычислению по формуле типа (2.7) [9]. Это не последовательные приближения, а метод последовательного определения коэффициентов Лагранжа. Зная коэффициенты A_m функции управления 1 и 2 определяются по формулам (6.11)–(6.13).

4. Функции управления волновыми процессами при наличии условия $v(R(t), t) \neq dR(t)/dt$. Возможности управления волновыми процессами могут быть существенно расширены использованием проницаемости (излучения) подвижной границы, условие (6.7). Скорость проницаемости $R_2^*(t)$ подвижной границы, можно определить, зная $R(t)$ и функцию f (с учетом ППГ) из следующего соотношения [4]:

$$R^2(t)R^*(t) = \frac{r_1}{\rho} \left\{ \frac{r}{a} f(\xi) + \int_0^t f(\xi) dt \right\}_{r=R(t)} + R^2(t)R_2^*(t), \quad (6.16)$$

где $R^*(t)$ – скорость изменения радиуса проницаемой подвижной границы.

Варируя скоростью проницаемости $R_2^*(t)$ и законом изменения радиуса $R(t)$ ППГ, можно в широком диапазоне изменения получать волновые поля.

И наоборот, зная $R(t)$ и f (смешанная задача), можно определять различные скорости проницаемости (излучения) $R_2^*(t)$, а по (6.8), (6.9) определять функции управления с учетом ППГ.

5. Функции управления: нелинейные условия на ПГ:

$$P - P_0|_{r=R(t)} = -\rho\phi_t - 0,5\rho\phi_r^2,$$

при этом закон движения границы неизвестен и может быть нелинейным и подлежит определению, как и остальные исследуемые функции P и v . Подобные задачи возникают, например, при исследовании плазмы канала, в химических технологиях, при обработке поверхностей материалов и так далее, когда на подвижной границе плазменного поршня необходимо иметь заданную функцию давления. Решение проводим методом последовательных приближений. Следует отметить, что в работе [14] рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений, без учета ПГ и нелинейных условий на подвижных границах. Последовательность расчета следующая: 1) определяем точку r_1 . Выбор r_1 ясен из физического смысла. Это ближайшая точка, которой не коснется ПГ за рассматриваемый период времени. Поскольку $v(R(t), t)$ неизвестно, ее требуется определить в процессе решения, то r_1 ориентировочно определяем с "запасом" в безопасную сторону при $v(R(t), t) = \text{const} = 200$ м/с [8]. Величину r_0 необходимо выбрать. Следует учесть, что заданный закон изменения $P(R(t), t)$ можно обеспечить с различного начального радиуса r_0 но при этом закон движения границы будет существенно различным. 2) Производим расчет первого приближения, ориентировочно принимая закон изменения давления на ПГ равным давлению в точке r_1 . По формулам (2.7) [5] с учетом $P(r_1, t) \approx P(R(t), t)$ определяем коэффициенты полинома Лагранжа A_m и значения функции $R(t)$ первого приближения. 3) С учетом (6.11), (6.12) и (6.5) запишем:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{r_1}{R^2(t)} \rho \left[\frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right] \right\}^2. \quad (6.17)$$

Здесь $P(R(t), t)$ известно по условию, значения функции $R(t)$ берутся первого приближения, найденного выше, и методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа определяем A_m^1 , отвечающего нелинейному граничному условию на подвижных границах. Соотношения для определения A_m в общем случае произвольных величин начального радиуса, законов движения

границ и вида $P(R(t), t)$ имеют вид:

$$A_m = N \pm (N^2 - M)^{1/2}; \quad N = -\frac{1}{2} \frac{2C_1 C_2^2 C_3 C_4 - \frac{r_1}{R(t)} \xi^m}{C_1 C_2^2 C_4};$$

$$M = \frac{C_1 C_2^2 C_3 - C_0}{C_1 C_2^2 C_4}, \quad (6.18)$$

где

$$C_0 = -P(R(t), t) + \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{m-1} A_m \xi^m, \quad C_1 = \frac{1}{2} \rho, \quad C_2 = \frac{r_1}{R^2(t) \rho},$$

$$C_3 = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{n=0}^{m-1} A_n \xi^n + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A_n}{n-1} \xi^{n-1}, \quad C_4 = \frac{r_1}{R(t)} \xi^m + \frac{1}{m+1} \xi^{m+1}.$$

4) Второе приближение: из соотношения (6.13) по известным A_m^1 определяем уточненное значение $R(t)$ и по (6.18) методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа получим уточненные значения второго приближения. Описанный процесс обладает хорошей сходимостью и, как правило, с приемлемой для практических целей точностью достаточно сделать одно приближение. По известным A_m функции управления 1 и 2 для этого случая имеют вид (6.11)–(6.13). Получены функции управления для условий (6.4), (6.5) при аппроксимации f элементарными функциями и их комбинациями. Решения п.п. 2–5 являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, они пригодны для обратных и прямых задач; при $a \rightarrow \infty$ переходят в известные решения для несжимаемой среды. Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с ПГ и ППГ определены в [8].

Пример 1 из п.п. 3. Пусть необходимо обеспечить давление в точке $r_1 = 55 \cdot 10^{-3}$ м как показано на рис. 6.1 кривая 1 при $a = 1500$ м/с; $\rho = 102$ кгс $\cdot$ с² $\cdot$ м⁻⁴; $r_0 = 50 \cdot 10^{-3}$ м. Методом последовательного определения коэффициентов полинома Лагранжа определяем по формулам (2.7) [5] коэффициенты:

$$A_0 = 2778; \quad A_1 = -80,187 \cdot 10^6; \quad A_2 = 0,0073 \cdot 10^{12};$$

$$A_3 = -0,00511 \cdot 10^{18}, \quad (6.19)$$

а по (6.11)–(6.13) с учетом (6.19) функции управления $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$ – кривые 2 и 4, рис. 6.1.

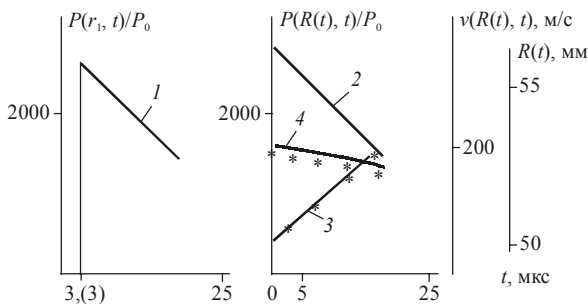


Рис. 6.1. Реконструкция функций управления:

а) кривые 2 и 4 сплошные линии по заданному нелинейному условию в точке r_1

$$P(r_1, t) = -\rho(\varphi_t + 0,5\varphi_r^2) \Big|_{r=r_1} - \text{кривая } 1;$$

б) по заданному нелинейному условию на подвижной границе

$$P(R(t), t) = -\rho(\varphi_t + 0,5\varphi_r^2) \Big|_{r=R(t)} - \text{кривая } 2, \text{ обозначено } *** \text{ первое приближение}$$

Пример 2 из п.п. 5. Пусть необходимо обеспечить давление на подвижной границе как показано на рис. 6.1, кривая 2 при a, ρ, r_0, r_1 из примера 1.

а) При $P(r_1, t) \approx P(R(t), t)$ по формулам (2.7) [5] определяем значения коэффициентов Лагранжа:

$$\begin{aligned} A_0^I &= 2727,86; & A_1^I &= -84,70 \cdot 10^6; & A_2^I &= -1,80 \cdot 10^{12}; \\ A_3^I &= -0,11167 \cdot 10^{18}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

и по формуле (6.13) определяем $R(t)$ первого приближения.

б) Вместо того, чтобы по (6.17), (6.18) и приближенного значения $R(t)$ из а) определять A_m^{II} , поступим иначе. С учетом приближенных значений $R(t)$ из а) и A_m из (6.20) определим функцию управления $v(R(t), t)$ по (6.12); соответствующие значения обозначены * . Как видим совпадение удовлетворительное, особенно для $R(t)$. Оно будет значительно лучшим, если после уточнения $R(t)$ значение точки r_1 брать ближе. Анализ результатов показывает, что корректно управлять можно только по достижении определенного уровня знаний процесса. В данном случае знания точных аналитических зависимостей функций управления первого и второго случаев (функций скорости и давления на ПГ). Без этого точного знания функций управления само управление превращается в серию попыток ощупью, с помощью проб и ошибок, чаще всего случайно определить желаемое (требуемое). Чаще всего это приводит к потерям времени и средств. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [1, 2] применить для обратных задач затруднительно.

6.2. Учет влияния проницаемости подвижной границы раздела фаз плазма-жидкость на генерирование слабых ударных волн

При решении вопросов управления импульсными процессами (например, электрический разряд, лазерный импульс и т. д.) в жидкости необходимо, исходя из технологических потребностей, по заранее заданной форме функции давления $P(r_1, t)$ в фиксированной точке r_1 волновой зоны определить закон ввода мощности $N(t)$ в расширяющуюся плазменную полость. Исследование гидродинамики полости связано с анализом уравнений в частных производных, в частности, волнового с граничными условиями, удовлетворяющимися на подвижных границах; вопросы управления связаны с решением обратных задач для волнового уравнения с подвижными границами – изложенное относится к сложным проблемам математической физики.

Здесь будут установлены аналитические зависимости между законом подвода энергии к источнику возмущений и формой (видом) возбуждаемой им гидродинамической волны давления, с учетом проницаемости подвижной границы раздела фаз плазма – жидкость.

Для умеренных электрических разрядов [7] и лазерных импульсов [6] в жидкости приближенно можно считать, что энергия, выделившаяся в канале, расходуется в основном на увеличение внутренней энергии плазмы и совершение работы расширяющимся каналом над окружающей средой. Тогда можно использовать известное [7] уравнение баланса энергии (сферическая симметрия):

$$N(t) = P(R(t), t) \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\gamma - 1} \left[\frac{dP}{dt} V + P \frac{dV}{dt} \right]_{r=R(t)}, \quad (6.21)$$

где $V = 4/3\pi R^3(t)$, γ – показатель адиабаты плазмы; $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$, $R(t)$ – законы изменения давления, скорости и радиуса подвижной границы плазменного поршня. Эти величины по заданной функции $P(r_1, t) = f \left[t - \left(\frac{r_1 - r_0}{a_0} \right) \right]$

(при этом закон изменения радиуса неизвестен и подлежит определению) могут быть определены при решении обратных задач. Ниже будет проведен вычислительный эксперимент по определению $N(t)$ с учетом проницаемости подвижной границы.

1. Рассмотрим обратную задачу для волнового уравнения в областях с подвижными непроницаемыми границами. Необходимость учета подвижности границ при изучении физических процессов приводит к существенному усложнению при получении решений. Даже если уравнение, описывающее исследуемый процесс, линейное, наличие подвижных границ делает задачу существенно нелинейной. Существенная нелинейность проблемы подвижных границ явилась причиной того, что до настоящего времени не было методов точного аналитического решения таких задач. В известном обобщении общего метода конечных интегральных преобразований (Кошляков Н.С., Гринберг Г.А. [2]) использу-

ется разложение по "мгновенным" собственным функциям. Однако это приводит к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Предложен новый нетрадиционный подход к решению проблемы подвижных границ уравнений математической физики – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [3, 9].

Точные аналитические решения обратной задачи для волнового уравнения в областях с подвижными границами имеют следующий вид [3, 5]. Значения исследуемых функций в любых точках таковы:

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} f(\xi), \quad v(r, t) \frac{r^2 \rho}{r_1} = \frac{r}{a} f(\xi) + \int_0^t f(\xi) dt, \\ \varphi(r, t) = \frac{r_1}{r \rho} \int_0^t f(\xi) dt, \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a}, \quad (6.22)$$

где r, t – координата и время, v – скорость частиц среды, φ – потенциал скорости, ρ – плотность невозмущенной среды, f – заданная функция давления в точке r_1 , a – скорость распространения возмущений в покоящейся среде, r_0 – начальный радиус.

На подвижной границе:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a} \right); \\ v(R(t), t) \frac{R^2(t) \rho}{r_1} = \frac{R(t)}{a} f \left(t - \frac{R(t) - r_0}{a} \right) + \left[\int_0^t f(\xi) dt \right]_{r=R(t)}; \\ \varphi(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t) \rho} \left[\int_0^t f(\xi) dt \right]_{r=R(t)}. \quad (6.23)$$

Для вычисления по формулам (6.23) при решении обратных задач необходимо знать величину $R(t)$. Изменение радиуса подвижной границы можно определить следующим образом. Известно [35], что объем жидкости, протекающей через замкнутую поверхность ($4\pi r^2$), равен изменению объема в единицу времени, то есть $dV/dt = 4\pi r^2 v(r, t)$, где v – второе соотношение из (6.22). Интегрируя от 0 до t и переходя на подвижную границу, можно получить следующее "кубическое" уравнение:

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \rho_0}{3r_1} = \left[\int_0^t \frac{r}{a} f(\xi) dt + \int_0^t \int_0^t f(\xi) dt dt \right]_{r=R(t)}. \quad (6.24)$$

Функция f в (6.24) для обратных задач известна. Произвольная функция f может быть аппроксимирована разными способами [3], элементарными функциями или их комбинациями, по участкам или целиком, что практически всегда возможно. Полученные при этом точные аналитические решения удобны для анализа и вычислений. Пусть, например,

$$P(r_1, t) = A \exp(-\alpha \xi_1) \sigma_0(\xi_1), \quad A, \alpha = \text{const},$$

$$\xi_1 = t - \frac{r_1 - r_0}{a}, \quad \sigma_0(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau; \\ 1, & t \geq \tau. \end{cases}$$

Тогда, при учете соотношений (6.22)–(6.24) можно получить формулы:

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} A \exp(-\alpha \xi) \sigma_0(\xi), \quad v(r, t) = \frac{r_1 A}{\rho r^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{r}{a} - \frac{1}{\alpha} \right) \exp(-\alpha \xi) \right\}, \quad (6.25)$$

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} A \exp(-\alpha \xi) \sigma_0(\xi),$$

$$v(R(t), t) = \frac{r_1 A}{\rho R^2(t)} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{R(t)}{a} - \frac{1}{\alpha} \right) \exp(-\alpha \xi) \right\}, \quad (6.26)$$

$$\frac{[R(t) - r_0^3] \rho}{3 r_1} = \frac{R(t)}{a} \frac{A}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha \xi)) + \frac{A}{\alpha} \left[\xi - \frac{1}{2} (1 - \exp(-\alpha \xi)) \right]. \quad (6.27)$$

В общем случае произвольных законов движения границ и вида функций f последнюю удобно аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m :

$$f = \sum A_m \xi_1^m, \quad A_m = \text{const}. \quad (6.28)$$

Выше и всюду далее, если не оговорить противное, суммирование ведется по m от нуля до бесконечности. Число m характеризует количество точных значений функций и может быть сколь угодно большим [12].

Последовательность расчета при решении обратных задач следующая: по формулам (6.24), (6.27) (функция f известна) определяем изменение радиуса подвижной границы, а по (6.23), (6.26) значения исследуемых функций P и v на подвижной границе. По формулам (6.22), (6.25) значение этих функций в других точках.

Пример. На рис. 6.2, 6.3 приведены результаты расчетов методом характеристик [3, 15] системы уравнений движения, сплошности и состояния для изэнтропических процессов в форме Тэта:

$$v_t - v v_r + \rho^{-1} P_r = 0, \quad \rho_t + (\rho v)_r + (v - 1) \rho v = 0, \\ (P + B)/(P_0 + B) = (\rho/\rho_0)^n, \quad (6.29)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями (B , n – постоянные, ν – показатель симметрии). Закон расширения сферы:

$$\nu(R(t), t) = 350 \exp(-10^3 t), \quad r_0 = 10^{-3} \text{ м}, \quad (6.30)$$

изменение радиуса $R(t)$, давления на подвижной границе и в точке волновой зоны $r_1 = 0,08$ м представлены кривыми (3) – рис. 6.3, (1), (2) – рис. 6.2 соответственно.

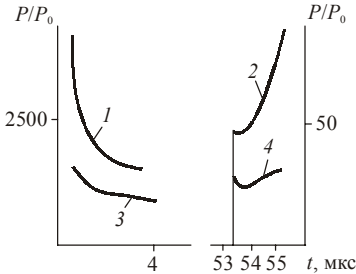


Рис. 6.2. Изменение во времени давления на подвижных границах, с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа [194] и в точке r_1 : непроницаемой (1, 2), проницаемой (3 – реконструкция, 4)

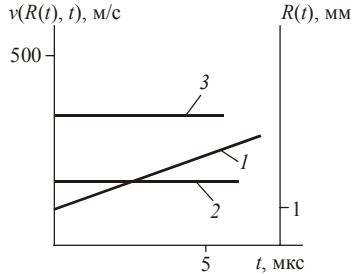


Рис. 6.3. Изменение скорости частиц среды на непроницаемой (1) и проницаемой (2) подвижных границах; (3) – общий закон изменения радиуса подвижных границ

По формулам (2.7) работы [9] способом последовательного определения коэффициентов полинома Лагранжа (6.28), с учетом нелинейного члена $1/2\rho_0 v^2$ интеграла Коши-Лагранжа [13], определяем A_0 , где исходным для реконструкции приняты значения $P(r_1, t)$ (кривая 2 рис. 6.2), при $\rho = 102 \text{ кгс}^2/\text{м}^4$, $a = 1500 \text{ м/с}$, $t = 52,7 - 55,7 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, и последовательно другие коэффициенты полинома A_m :

$$A_0 = 49,46; \quad A_1 = 3,56 \cdot 10^4; \quad A_2 = 3,46 \cdot 10^{12}; \quad A_3 = -6,355 \cdot 10^{16}. \quad (6.31)$$

Теперь из (6.23), (6.24) с учетом (6.28) определяем функции $P(R(t), t)$ и $\nu(R(t), t)$ по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\nu(R(t), t) R^2(t) \rho}{r_1} &= \frac{R(t)}{a} \sum A_m \xi_m + \sum \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \\ P(R(t), t) &= \frac{r_1}{R(t)} \sum A_m \xi_m^m - \frac{1}{2} \rho_0 v^2(R(t), t), \\ \frac{[R(t)^3 - r_0^3] \rho}{3 r_1} &= \frac{R(t)}{a} \sum \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum \frac{A_m}{(m+1)(m+2)} \xi^{m+2}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

где A_m из (6.31).

Результаты реконструкции $P(R(t), t)$ и $R(t)$ показаны темными точками на рис. 6.2, 6.3 (и рис. работы [9]). Из (6.21) с учетом (6.31), (6.32) и $\gamma = 1,26$ определяем мощность $N(t)$. На рис. 6.4 кривая 1 определяет необходимую мощность, вводимую в канал разряда, для получения функции давления $P(r_1, t)$ кривая 2 рис. 6.2, когда подвижная граница полости непроницаема.

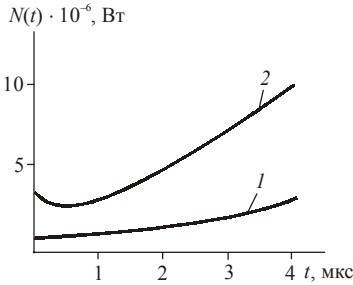


Рис. 6.4. Законы ввода мощности в плазменные полости, расширяющиеся по общему закону с непроницаемой (1) и проницаемой (2) границами

2. Рассмотрим обратную задачу для волнового уравнения в областях с подвижными проницаемыми границами. При более значительном вводе энергии температура плазмы может достигать нескольких десятков тысяч градусов, что приводит к испарению жидкости со стенок полости, а в некоторых случаях [7] среда сразу переходит в состояние плазмы, минуя стадию испарения. Границу, на которой законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающихся с ней, могут быть произвольными и различными, то есть

$$v(R(t), t) \neq dR(t)/dt,$$

называем проницаемой подвижной границей (ППГ). В этом случае восстановить исследуемые функции на подвижной границе плазменного поршня по кинограммам изменения радиуса при решении прямых задач (и по измеренным давлениям в точке r_1 волновой зоны при решении обратных задач), обычными методами не представляется возможным. Необходимо решить волновые задачи в областях с подвижными и проницаемыми границами. Подобные задачи поставлены и решены впервые автором в работах [4, 16], в которых учет проницаемости подвижных границ произведен следующим образом.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к волновому уравнению, с учетом нулевых начальных условий, получаем операторное уравнение, решая которое для случая движения границы в безграничной среде, при учете

условия $P(r_1, t) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right)$, получаем интересующие нас зависимости с учетом

реальных величин запаздываний [4]. На подвижной границе исследуемые функции будут иметь вид (6) [4], в которых однако вид функции f несет информацию теперь о том, что распространяющиеся возмущения, описываемые

волновым уравнением, индуцированы проницаемой подвижной границей. Для вычисления по этим формулам при решении обратных задач необходимо знание величины $R(t)$. Изменение радиуса подвижной проницаемой границы можно определить следующим образом.

Изменение объема в единицу времени $\frac{dV}{dt}$ по "наблюдаемому" измене-

нию радиуса подвижной границы в рассматриваемом случае будет иметь две составляющие:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt}, \quad (6.33)$$

где $\frac{dV_1}{dt}$ – изменение объема, которое обуславливает изменение функции $[-\phi_r]$,

$\frac{dV_2}{dt}$ – изменение объема, характеризующее проницаемость.

Придавая функции $[-\phi_r]$ физический смысл скорости частиц среды, воспользуемся известным физическим свойством. Объем среды, протекающий через замкнутую поверхность, равен изменению объема в единицу времени, т. е. $dV_1/dt = 4\pi r^2 v(r, t)$. Интегрируя от 0 до t и переходя на подвижные границы, получаем:

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \left[\int_0^t \frac{r}{a} f(\xi) dt + \int_0^t \int_0^t f(\xi) dt dt \right]_{r=R(t)} + \frac{V_2 \rho}{4\pi r_1}. \quad (6.34)$$

Вычисление $R(t)$ из (6.34) производится как и в случае непроницаемых подвижных границ [3, 9].

Скорость проницаемость $\dot{R}_2(t)$ подвижной границы можно определить, зная $R(t)$ и функцию f из соотношения (6.16):

$$R^2(t) \dot{R}(t) = \frac{r_1}{\rho} \left\{ \frac{r}{a} f(\xi) + \int_0^t f(\xi) dt \right\}_{r=R(t)} + R^2(t) \dot{R}(t), \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a},$$

где $\dot{R}(t)$ – скорость изменения радиуса подвижной границы.

Учет проницаемости добавляет к рассматриваемым еще одну неизвестную функцию – скорость $\dot{R}_2(t)$, входящую в (6.33). Поэтому в случае $v(R(t), t) \neq dR(t)/dt$ для вычисления по (6.23), (6.34), (6.16) должны быть известны две функции, например, $R(t)$ и $v(R(t), t)$, либо f и $R(t)$. Тогда как при $v(R(t), t) = dR(t)/dt$ достаточно знать одну: f или $R(t)$ [9].

Как видим, при задании функций $R(t)$ и $v(R(t), t)$ определение прямой задачи остается неизменным: обе функции заданы на подвижной границе. А при задании f и $R(t)$ определение обратной задачи видоизменяется: одно из двух условий задано на подвижной границе. Это смешанное задание (условий) обусловлено наличием дополнительной неизвестной функции $\dot{R}_2(t)$ на подвижной границе. Полученные решения являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, при отсутствии проницаемости они переходят в полученные ранее для непроницаемых границ [9], а при $a \rightarrow \infty$ переходят в известные решения для несжимаемой среды, они пригодны для произвольных законов изменения радиусов, скорости и проницаемости границ.

Вопрос о границах применимости решений волнового уравнения в областях с подвижными проницаемыми границами в задачах импульсной гидродинамики и акустики впервые и однозначно решен автором в работах [3, 8]. Определив исследуемые функции на подвижной проницаемой границе, можно, используя уточненное уравнение баланса энергии, а в случае когда вводимая энергия расходуется незначительно на другие потери (например, на излучение) порядка $10 \div 15\%$, приближенно по (6.21), определить вводимую мощность.

Пример. На рис. 6.2, 6.3 и 6.5 представлены результаты расчетов с единым законом изменения радиуса (кривая 3, рис. 6.3) и двух вариантов подвижных границ:

а) Проницаемой, реконструкция по формулам (6.22), (6.23), (6.33), (6.34), (6.16) давления на подвижной границе (кривая 3, рис. 6.2), давления в точке r_1 (кривая 4, рис. 6.2), аппроксимирована полиномом Лагранжа

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right)^m,$$

при $m = 0, 1, 2, 3$; $a = 1500$ м/с; $r_0 = 1$ мм; $r_1 = 0,08$ м;

$$A_0 = 28,34; \quad A_1 = -10,704 \cdot 10^6; \quad A_2 = 6,39 \cdot 10^{12}; \quad A_3 = -0,87 \cdot 10^{18},$$

скорость частиц среды на ППГ – кривая 2, рис. 6.3.

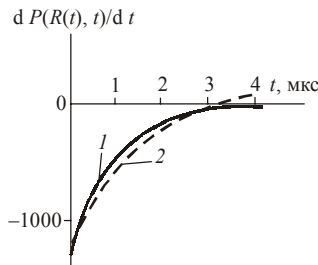
б) Непроницаемой, расчет методом характеристик [3, 15] системы (6.29), закон расширения поршня $v(R(t), t) = 350 \exp(-10^3 t)$ – кривая 1, рис. 6.3 при $v(R(t), t) = dR(t)/dt$, давление на подвижной границе и в фиксированной точке волновой зоны – кривые 1 и 2 рис. 6.2.

Анализ кривых на рис. 6.2 и 6.3 показывает, сколь велики могут быть погрешности определения исследуемых функций по наблюдаемому изменению радиуса подвижной границы. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [2] применить к обратным задачам затруднительно.

Таким образом, для получения формы функции давления $P(r_1, t)$ в точке r_1 в виде кривой 4, рис. 6.2 необходимо, чтобы полость расширялась по закону $R(t)$ кривая 3, рис. 6.3, при этом скорости частиц среды, соприкасающиеся с подвижной границей, будут изменяться по закону кривой 2, рис. 6.3, давле-

ние на ППГ будет изменяться по закону кривой 3, рис. 6.2. При этом с учетом (6.21) закон ввода мощности $N(t)$ в расширяющуюся плазменную полость будет соответствовать кривой 2, рис. 6.4 с учетом проницаемости подвижной границы.

Рис. 6.5. Реконструкция временного градиента давления на подвижной непроницаемой (1) и проницаемой (2) границах полости



Анализ кривых 1, 2 – рис. 6.4 показывает, что при одном и том же законе изменения радиуса $R(t)$ расширяющейся плазменной полости (с ПГ и ППГ) в сжимаемой среде учет проницаемости подвижной границы может приводить с одной стороны к существенному увеличению вводимой мощности в канал, а с другой – к уменьшению импульса давления в фиксированной точке волновой зоны (кривая 4, рис. 6.2). Увеличенное поступление энергии в канал при этом расходуется на увеличение внутренней энергии плазмы.

6.3. Точное аналитическое решение обратной задачи расширения цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде. Учет нелинейных дополнительных условий.

Цилиндрическая симметрия отличается особой сложностью, до настоящего времени не было ни одного точного аналитического решения обратной задачи для волнового уравнения в областях с подвижными границами.

Обычно при моделировании пробоя межэлектродного промежутка (что является отдельной сложной проблемой) и, как правило, численной реализации расширения плазменного поршня, в начальный момент времени плазменный канал с радиусом r_0 и температурой T_0 полагаются сформированным. Исходя из экспериментальных данных величины r_0 и T_0 принимают в определенном диапазоне изменения для импульсных процессов в воздухе [17–19] и в воде [6, 7]. Варьирование начальных условий в диапазоне разброса их экспериментально определенных значений оказывает несущественное влияние на результаты расчетов. Решения быстро выходят на близкие режимы.

Однако, как следует отметить, при этом из возможного рассмотрения исключаются изменения исследуемых функций давления, скорости частиц и т. д. в самые первые мгновения процесса, без которых невозможно, например, осмысление и моделирование пробоя межэлектродного промежутка и многих других физических процессов предпробойной и пробойной стадии.

Здесь делается попытка количественной оценки кинематических и динамических параметров расширяющегося цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде, в том числе и в самые первые, начальные мгновения импульсного процесса.

Ранее [20, 21] были получены аналитические решения для волнового уравнения в областях с подвижными границами для общего случая. При задании в точке волновой зоны дополнительного условия в классе функций Бесселя (в изображениях) при решении обратных задач получены точные аналитические решения, которые обладают особенностями в точке r_1 волновой зоны и на подвижной границе при $t \rightarrow 0$. Чрезвычайная сложность получения точных аналитических решений волновых задач с подвижными границами цилиндрической симметрии приводила к необходимости использования приближенных способов раскрытия этих математических неопределенностей [22, 23]. Здесь будет предпринята попытка точного аналитического решения указанных вопросов.

Волновое уравнение цилиндрической симметрии имеет вид:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - a^2 r^{-1} \varphi_r = 0. \quad (6.35)$$

Начальные условия полагаем нулевыми. Здесь φ – потенциал скорости, r – координата, t – время, a – скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости. Применяя одностороннее преобразование Лапласа, получаем операторное уравнение:

$$r \bar{\varphi}_{rr}(r, s) + \bar{\varphi}_r(r, s) - \frac{s^2}{a^2} r \bar{\varphi}(r, s) = 0. \quad (6.36)$$

Производим замену переменных в (6.36) $x = \frac{s}{a} r$, получаем:

$$\Phi_{xx} + \frac{1}{x} \Phi_x - \Phi = 0, \quad (6.37)$$

решением которого будет

$$\Phi = C_1 I_0 \left(\frac{s}{a} r \right) + C_2 K_0 \left(\frac{s}{a} r \right), \quad (6.38)$$

где I_0 , K_0 , K_1 – модифицированные функции Бесселя.

Для безграничной среды $C_1 = 0$, поскольку исследуемые функции при $r \rightarrow \infty$ должны быть ограниченными, получаем для случая задания в фиксированной точке волновой зоны произвольной функции давления $P(r_1, t) = f(r_1, t)$ (обратная задача) [20]:

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{f}(r_1, s) K_0(\mu, r)}{s \rho K_0(\mu, r_1)}, \quad \bar{\varphi}_r = \frac{f(r_1, s) K_1(\mu, r)}{s \rho K_0(\mu, r_1)},$$

$$s \bar{\varphi} = - \frac{\bar{f}(r_1, s) K_0(\mu, r)}{\rho K_0(\mu, r_1)}, \quad (6.39)$$

где $\mu = s/a$, s – параметр преобразования, $P = -\rho\varphi_t$, $v = -\varphi_r$, ρ – плотность. Переход к оригиналам в (6.39) может быть осуществлен рациональным способом в каждом конкретном случае в зависимости от формы функции f .

При задании в точке волновой зоны функции давления в изображениях в классе функций Бесселя необходимо учесть сразу два обстоятельства. Первое: учесть величину начального радиуса r_0 , то есть тот факт, что время появления волны в точке r_1 будет определяться с учетом r_0 . Второе: функции давления и скорости должны быть ограниченными, то есть иметь конечные значения в любые моменты времени. Тогда дополнительное условие для обратной задачи будет иметь вид:

$$P(r_1, t) = \frac{A}{\sqrt{\left(t + \alpha + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}}. \quad (6.40)$$

Опуская выкладки, в принципе подобные приведенным в [21], получим окончательные формулы. Значения исследуемых функций в любых точках таковы:

$$P(r, t) = \frac{A}{\omega}, \quad r_0 v(r, t) = \frac{A(t + \beta)}{r \rho \omega} r_0, \quad \omega = \sqrt{(t + \beta)^2 - \frac{r^2}{a^2}}. \quad (6.41)$$

На подвижной границе:

$$P(R(t), t) = \frac{A}{\omega} - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad v(R(t), t) = \frac{A(t + \beta)}{R(t) \rho \omega}, \quad (6.42)$$

$$R(t) = \left\{ r_0^2 + \frac{2A}{\rho} [\omega - \omega_1] + \frac{2A^2}{\rho^2 a^2} \left[\ln \left| \omega - \frac{A}{\rho a^2} \right| - \ln \left| \omega_1 - \frac{A}{a^2 \rho} \right| \right] \right\}^{1/2}, \quad (6.43)$$

где $\omega = \sqrt{(t + \beta)^2 - \frac{R^2(t)}{a^2}}$, $\omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}$, $\beta = \alpha + \frac{r_0}{a}$, $A, a, \rho, r_0, \alpha = \text{const}$.

$$\text{При } t \rightarrow 0 \quad P(R(t), t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}} - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), r), \quad (6.44)$$

$$t \rightarrow 0 \quad v(R(t), t) = \frac{A \left(\alpha + \frac{r_0}{a} \right)}{r_0 \rho \sqrt{\left(\alpha + \frac{r_0}{a} \right)^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}}, \quad (6.45)$$

$$\text{при } a \rightarrow \infty \quad R(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2At}{\rho}}. \quad (6.46)$$

Формулы (6.41)–(6.46) при $a \rightarrow 0$ и $r_0 \rightarrow 0$ переходят в полученные ранее (6.44)–(6.46) [21]. Вычисление $R(t)$ из (6.43) производится как в [8, 21], хорошим приближением, как правило, является формула (6.46) при $a \rightarrow \infty$. Приведенные точные аналитические решения обратной и прямой задач обеспечивают точные значения заданного профиля давления P или скорости v в фиксированной точке r_1 волновой зоны в момент появления, а также конкретные конечные величины $P(R(t), t)$ и $v(R(t), t)$ на подвижной границе плазменного поршня при $t \rightarrow 0$ в начале движения.

Для случая произвольных законов изменения скорости движения границы плазменного поршня и вида функции $P(r_1, t) = f(r_1, t)$ соответствующие решения представлены в [20, 21].

Соотношение (6.43) наглядно показывает, сколь существенно нелинейна связь между законом движения границы и исследуемыми функциями. Определить эту связь точно (6.43) и в общем случае [21] удается только на пути решения обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [8].

Нелинейные дополнительные условия

$$P(r_1, t) = -\rho \left(\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_r^2 \right). \quad (6.47)$$

Это дополнительное условие (6.47) используется в тех случаях, например, когда требуется обеспечить заданную форму функции давления вблизи или на движущейся поверхности. При этом скорости частиц среды соизмеримы или равны скорости подвижной границы и пренебрегать нелинейным членом интеграла Коши-Лагранжа нельзя [8, 13].

Из (6.47) с учетом (6.41) получаем:

$$A^2 a - Ab + c = 0, \quad (6.48)$$

$$\text{где } a = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{t + \beta}{r \rho g \omega} \right)^2; \quad b = \frac{1}{\omega}; \quad c = P(r_1, t) \quad c = P(r_1, t).$$

Зная $P(r_1, t)$, ρ , r_1 , β , можно из квадратного уравнения (6.48) определить A . По (6.41)–(6.43) и известному A определяем значения функций в других точках и на подвижной границе.

Эти точные аналитические решения обратной задачи с подвижными границами и нелинейными условиями имеют важное научное и прикладное значение. Они могут служить для оценок, в том числе и при определении максимальных значений (скачков) исследуемых функций.

В работе [24] приведены замечания относительно того, что раскрытие неопределенностей в решениях уравнения (6.35) при задании $P(r_1, t)$ в классе функций Бесселя (в изображениях) [22, 23] проделано приближенными способами. Как видим, полученные впервые точные аналитические решения обратной и прямой волновых задач цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами и нелинейными дополнительными условиями приводят к тому, что эти замечания теряют смысл.

На рис. 6.6–6.9 показаны результаты вычислений по формулам (6.41)–(6.46) при $A = 20 \cdot 10^6 \text{ кг} \cdot \text{с}/\text{см}^2$, $\rho = 102 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$, $a = 1460 \text{ м/с}$ и двух значениях величин начального радиуса $r_0 = 0,013 \text{ мм}$ и $r_0 = 0,1 \text{ мм}$; $r_1 = 0,08 \text{ м}$, значения давлений и скоростей при $t \rightarrow 0$ на подвижной границе плазменной полости определялись по формулам (6.44), (6.45). Величина α определяется из следующего соотношения:

$$10^{-6} = \sqrt{\left(t^0 + \alpha + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}, \quad (6.49)$$

где t^0 – время прихода волны в точку r_1 : $t^0 = \frac{r_1 - r_0}{a}$.

Рис. 6.6. Исходные для реконструкции изменения давления в точке волновой зоны в зависимости от времени для двух значений величин начального радиуса

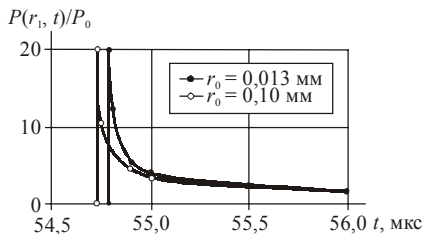
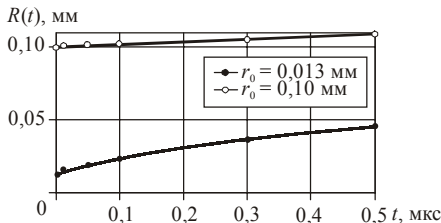


Рис. 6.7. Восстановление законов изменения радиуса подвижной границы плазменного поршня в зависимости от времени для различных величин начального радиуса



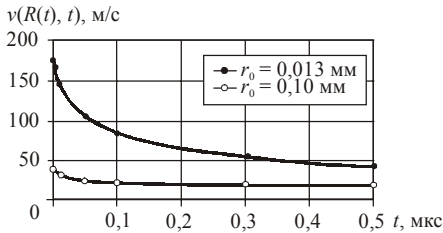


Рис. 6.8. Восстановление законов изменения скорости подвижной границы в зависимости от времени для различных величин начального радиуса

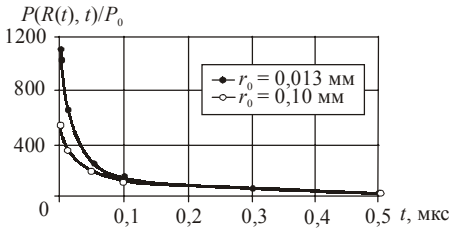


Рис. 6.9. Реконструкция законов изменения давления на подвижной границе плазменного поршня с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа [10] в зависимости от времени для различных значений начального радиуса по заданному давлению в точке волновой зоны рис. 6.6

Как видим, на рис. 6.8 и 6.9 в начальные мгновения $t = 0 \div 0,1$ мкс импульсного процесса значения давления и скорости на подвижной границе плазменного поршня, во-первых, существенно отличаются, а в некоторых случаях почти на порядок от значений для времен $t > 0,1$ мкс; во-вторых, $P(R(t), t)$ и $v(R(t), t)$ существенно зависят от величины начального радиуса r_0 ; давление и скорости в начальные мгновения могут в несколько раз отличаться для разных значений r_0 . При $t > 1$ мкс давление на подвижной границе практически не зависит от величины начального радиуса r_0 для принятых значений. Хотя значения скорости $v(R(t), t)$ при $t = 0,5$ мкс еще различаются почти в два раза для данных значений r_0 . Полученные результаты могут быть использованы при исследовании ближней зоны расширяющейся границы плазменной полости, решении вопросов управления импульсными процессами, моделировании пробоя межэлектродного промежутка, изучении плазмы канала и влиянии величины начального радиуса на исследуемые функции.

6.4. Определение функций управления волновыми процессами цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами

Авторским методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [5, 21] получены точные аналитические решения волнового уравнения цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами для общего случая. Решения универсальны, пригодны для обратных и прямых задач. Однако, точные соотношения для функций управления имеют особенности: в сложные аргументы этих функций входит закон изменения радиуса подвижной границы, который заранее неизвестен и подлежит определению

и может быть нелинейным. Предложен способ преодоления известных для цилиндрического случая симметрии логарифмических особенностей при количественном определении значений функций управления волновыми процессами в областях с подвижными границами.

Для случая задания в фиксированной точке волновой зоны произвольной функции давления $P(r_1, t) = f(r_1, t)$ (обратная задача) [3, 5] решения (6.35) имеют вид (6.39):

$$\bar{\varphi} = -\frac{\bar{f}(r_1, s)K_0(\mu, r)}{s\rho K_0(\mu, r_1)}, \quad \bar{\varphi}_r = \frac{f(r_1, s)K_1(\mu, r)}{s\rho K_0(\mu, r_1)},$$

$$s\bar{\varphi} = -\frac{\bar{f}(r_1, s)K_0(\mu, r)}{\rho K_0(\mu, r_1)},$$

где $\mu = s/a$, s – параметр преобразования, $P = -\rho\varphi$, $v = -\varphi_r$, ρ – плотность. Переход к оригиналам в (6.39) может быть осуществлен рациональным способом в каждом конкретном случае в зависимости от формы функции f . Для общего случая имеем следующие функции управления 1 и 2 $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$:

$$\left| \int_0^t P(r, t-\tau)X(r_1)d\tau = \int_0^t f(r, \xi-\tau)X(r)d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (6.50)$$

$$\left| \rho \int_0^t v(r, t-\tau)X(r_1)d\tau = \int_0^t \frac{1}{r} f(r, \xi-\tau)X(r) \left(\tau + \frac{r}{a} \right) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (6.51)$$

$$\left| \frac{\rho}{2} \int_0^t [r^2(t-\tau) - r_0^2]X(r_1)d\tau = \int_0^t f^*(r, \xi-\tau)X(r) \left(\tau + \frac{r}{a} \right) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (6.52)$$

$$X(r) = \left(r^2 + 2\frac{r}{a}\tau \right)^{-1/2}, \quad X(r_1) = \left(\tau^2 + 2\frac{r_1}{a}\tau \right)^{-1/2},$$

$$\xi = t - \frac{r-r_0}{a}, \quad f^* = \int_0^t f(r, \xi)dt.$$

Если функции в (6.50)–(6.52) аппроксимировать полиномами Лагранжа степени m , то интегралы становятся табличными (2.261)–(2.262) [25].

Представим вид изображения $P(r_1, t) = A \cdot \left((t+\beta)^2 - (r_1/a)^2 \right)^{-1/2}$ в классе функций Бесселя [26], тогда функции управления 1 и 2 будут иметь вид (они понадобятся для вычислений общего случая):

$$P(R(t), t) = \frac{A}{\omega} - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad v(R(t), t) = \frac{A(t + \beta)}{R(t) \rho \omega}, \quad (6.53)$$

$$R(t) = \left\{ r_0^2 + \frac{2A}{\rho} [\omega - \omega_1] + \frac{2A^2}{\rho^2 a^2} \left[\ln \left| \omega - \frac{A}{\rho a^2} \right| - \ln \left| \omega_1 - \frac{A}{a^2 \rho} \right| \right] \right\}^{1/2}, \quad (6.54)$$

где $\omega = \sqrt{(t + \beta)^2 - \frac{R^2(t)}{a^2}}$, $\omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}$, $\beta = \alpha + \frac{r_0}{a}$, $A, a, \rho, r_0, \alpha = \text{const}$; r_0 – начальный радиус.

$$\text{При } t \rightarrow 0 \quad P(R(t), t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{r_0}{a} \right)^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}} - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad (6.55)$$

$$t \rightarrow 0 \quad v(R(t), t) = \frac{A \left(\alpha + \frac{r_0}{a} \right)}{r_0 \rho \sqrt{\left(\alpha + \frac{r_0}{a} \right)^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}}, \quad (6.56)$$

$$\text{при } a \rightarrow \infty \quad R(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2At}{\rho}}. \quad (6.57)$$

Формулы (6.53)–(6.57) при $a \rightarrow 0$ и $r_0 \rightarrow 0$ переходят в полученные ранее (8)–(10) [21].

При определении функций управления 1 и 2 (6.50), (6.51) необходимо знание закона изменения радиуса ПГ. Вычисления $R(t)$ по (6.52) связано с трудностями: в аргументы функции справа входит искомая функция $R(t)$.

Решение проводим методом последовательных приближений (как уже упоминалось, в работе [14] рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений и без учета подвижных границ). Последовательность расчета следующая: 1) определяем точку r_2 . Выбор точки r_2 ясен из физического смысла. Это ближайшая точка, которой не коснется ПГ за рассматриваемый период времени. Поскольку $v(R(t), t)$ неизвестно, ее требуется определить в процессе решения, то r_2 ориентировочно можно определить с "запасом" в безопасную сторону: а) при $v(R(t), t) = \text{const} = 200$ м/с [8]; либо, б) используя формулы (6.53)–(6.57), скачок давления $P(r_1, t)$ для обратной задачи известен. Величину r_0 необходимо выбрать. Следует учесть, что заданный закон изменения $P(r_1, t)$ можно обеспечить с различного начального радиуса r_0 , но при этом закон движения границы будет существенно раз-

личным. Производим расчет первого приближения по формуле (6.51), справа приближенно принимая $r = R(t) \approx r_2$; определяем коэффициенты C_m полинома

Лагранжа $v(R(t), t) = \sum_0^{\infty} C_m t^m$, первого приближения, а значит $R^I(t)$ первого

приближения. 2) Второе приближение: подставляя $R^I(t)$ в правую часть (6.51), получаем $v^{II}(R(t), t)$, а значит и $R^{II}(t)$ второго приближения и т. д. Описанный процесс обладает хорошей сходимостью и уже в первом приближении можно получить приемлемые для оценок результаты. По известным значениям $R(t)$ (A_m – задано по условию) функции управления 1 и 2 для этого случая определяются по (6.50), (6.51). Решения (6.50)–(6.57) являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, они пригодны для обратных и прямых задач. Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с ПГ и ППГ определены в [8], учет влияния проницаемости подвижных границ на волновые процессы произведен в [21].

На рис. 6.10 показаны результаты расчета методом характеристик [3, 15] системы уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Гэтта

$$v_t + vv_r + \rho^{-1} P_r = 0, \quad \rho_t + (\rho v)_r + r^{-1} \rho v = 0, \\ (P + B)/\rho^n = (P_0 + B)/\rho_0^n, \quad (6.58)$$

где B, n – const, v – показатель симметрии, при расширении цилиндра по закону $v(R(t), t) = A \exp(-\alpha_1 t) m/c$, где $A = 30$, $\alpha_1 = 0,046 \cdot 10^{-6} 1/c$; $r_0 = 0,1$ мм, $a = 1460$ м/с, давление в точке $r_1 = 0,08$ м (кривая 1) взято для реконструкции и аппроксимировано полиномом Лагранжа

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right)^m, \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad (6.59)$$

где $A_0 = 11,74998$, $A_1 = -11,2383 \cdot 10^6$, $A_2 = 5,3499 \cdot 10^{12}$, $A_3 = -0,8216 \cdot 10^{18}$.

Приближенно определяем точки r_{23} , которых не коснется ПГ при $t_1 = 0,5$ мкс и $t_2 = 1,0$ мкс по формуле $r_{2,3} = r_0 + v^* t_{1,2}$, где $v^* = 24,5$ м/с = const определено по формулам (6.53)–(6.57) при скачке $A = 11,75 \cdot 10^{-6}$ кг · с/см², $\rho = 102$ кг · с²/м⁴, величина α определена из формулы [26]:

$$10^{-6} = \sqrt{\left(t^0 + \alpha + \frac{r_0}{a} \right)^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}, \quad t^0 = \frac{r_1 - r_0}{a}.$$

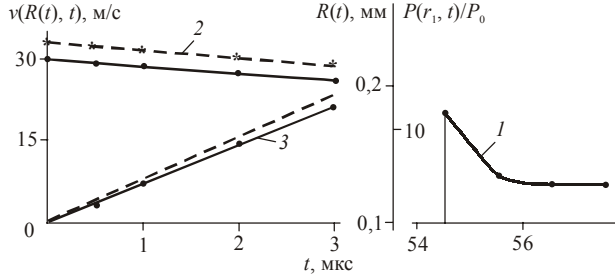


Рис. 6.10. Восстановление функций управления $v(R(t), t)$, $R(t)$ – кривые 2, 3 по заданному давлению в точке r_1 – кривая 1. Первое приближение обозначено ***. Сплошные линии – расчет методом характеристик полной системы (6.58)

Эти значения равны $r_2 = 0,1125$ мм, $r_3 = 0,125$ мм.

С учетом (6.51), (6.59) и разложения $\exp(\alpha_1 \tau) = 1 + \alpha_1 \tau + \dots$ получаем:

$$\begin{aligned} & \rho A \exp(-\alpha_1 t) \left\{ \int_0^t \frac{d\tau}{X(r_1)} + \alpha_1 \int_0^t \frac{\tau d\tau}{X(r_1)} \right\} = \\ & = A_0 \frac{1}{r_{2,3}} \left\{ \sqrt{\xi^2 + 2 \frac{r_{2,3}}{a} \xi} \right\} + A_1 \frac{1}{r_{2,3}} \left\{ \left(\xi - \frac{r_{2,3}}{a} \right) Z_1 - Z_2 + \frac{r_{2,3}}{a} \xi Z_0 \right\} + \\ & + A_2 \frac{1}{r_{2,3}} \left\{ \left(\xi^2 - 2 \frac{r_{2,3}}{a} \right) Z_1 - \left(2\xi - 2 \frac{r_{2,3}}{a} \right) Z_2 + Z_3 + \left(\xi^2 \frac{r_{2,3}}{a} \right) Z_0 \right\} + \\ & + A_3 \frac{1}{r_2} \left\{ \left(-3\xi^2 \frac{r_{2,3}}{a} + \xi^3 \right) Z_1 + \left(-3\xi^2 + 3 \frac{r_{2,3}}{a} \xi \right) Z_2 + \right. \\ & \left. + \left(3\xi - \frac{r_{2,3}}{a} \right) Z_3 - Z_4 + \left(\xi^3 \frac{r_{2,3}}{a} \right) Z_0 \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\text{где } X(r_1) = \sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r_1}{a} \tau}; \quad \xi = t - \frac{r_{2,3} - r_0}{a}; \quad Z_n = \int_0^t \frac{\tau^n d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r_{2,3}}{a} \tau}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4,$$

интегралы Z_n табличные [25]. С учетом значений $r_{2,3}$ и $t_{2,3}$ из (6.60) получаем трансцендентные соотношения для определения A и $\alpha_1 = \alpha^* \cdot 10^6$, решаемые известными методами:

$$A \exp(-\alpha^*) \{0,19076036 + \alpha^* \cdot 0,06351\} = 6,32990393;$$

$$A \exp(-0,5\alpha^*) \{0,13499004 + \alpha^* \cdot 0,022485\} = 4,46464852,$$

из которого получаем значения первого приближения:

$$A = 33, \quad \alpha_1 = 0,04462 \cdot 10^6 \text{ 1/с.}$$

На рис. 6.10 обозначены *** функции управления $v(R(t), t)$ и $R(t)$ первого приближения. По известным законам изменения скорости плазменного поршня и радиуса давление $P(R(t), t)$ (прямая задача) определялось ранее [20, 21].

Анализ результатов показывает, что корректно управлять волновыми процессами возможно при достижении определенного уровня знания процесса, в данном случае знаний точных аналитических зависимостей функций управления 1 и 2 случаев. Без этого точного знания функций управления само управление превращается в серию попыток ошупью, с помощью проб и ошибок, чаще всего случайно определить желаемое (требуемое). Чаще всего это приводит к потерям времени и средств. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [1, 2] применить для обратных задач затруднительно.

6.5. Особенности гидродинамических характеристик импульсных процессов в сжимаемой среде при многократном (пульсирующем) законе ввода энергии. Эффект Доплера

В работе [22] впервые решена обратная задача восстановления давления на подвижной границе цилиндрического плазменного поршня по пульсирующему давлению в точке волновой зоны. При этом закон движения плазменного поршня был неизвестен и подлежал определению. Получены кинематические и динамические параметры расширяющегося поршня, позволяющие определить закон ввода мощности в канал. В результате точного аналитического решения задачи показано, что если функция давления на стенке канала является последовательностью возрастающих по амплитуде импульсов, то функция давления в фиксированной точке волновой зоны – есть так же последовательность возрастающих импульсов. Период пульсации кривой давления на стенке канала не равен периоду пульсации кривой ввода мощности и периоду пульсации кривой давления в фиксированной точке волновой зоны.

Обычно при электрическом разряде, лазерном импульсе и т. д. в сжимаемой среде закон ввода мощности имеет вид одиночного импульса, который достаточно хорошо изучен [6, 7]. Возможности применения импульсных процессов существенно расширяются при использовании двух, трех и вообще многократном, пульсирующем по определенному закону, вводе мощности в расширяющийся плазменный канал. В работах [27–29, 32] показано, что путем, например, параметрического изменения характеристик разрядной цепи можно

в достаточно широких пределах изменять закон ввода мощности и, как следствие, получать импульсы давления сложной формы.

В работе [30] рассмотрена внешняя гидродинамическая задача при двухимпульсном законе ввода мощности в плазменный канал. При этом: а) из-за математических трудностей использовалось не точное решение волнового уравнения цилиндрической симметрии, а некоторое приближение; б) исследуемые функции определялись некоторой суперпозицией их – наложением, вычисленных от линейного роста радиуса и от пульсации малой амплитуды радиуса канала.

В результате приближенного аналитического решения задачи сделаны выводы о том, что функция давления на стенки канала является последовательностью убывающих по амплитуде импульсов, а функция давления для фиксированной точки волнового поля – последовательностью возрастающих импульсов [30, 33, 34]. Представляет интерес рассмотреть эту важную задачу без упомянутых допущений, в точной постановке. Точные аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными границами и их анализ позволяют сделать более достоверные заключения.

Цилиндрическая симметрия относится к случаю особой сложности, до настоящего времени не было ни одного точного аналитического решения волнового уравнения в областях с подвижными границами.

Для случая $P(r_1, t) = f(r_1, t)$ – произвольной функции, соответствующие соотношения представлены в [20]. Полученные соотношения являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль. Проведено сравнение с результатами численного решения методом характеристик полной системы уравнений движения, сплошности и состояния в форме Тэта [20]. Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в задачах импульсной гидродинамики и акустики определены [8] и находятся в пределах $M = v/a \leq 0,2$, v – скорость расширения полости. При этом ударная волна сразу отходит от расширяющегося поршня со скоростью $a_0 = \text{const}$.

Во многих случаях эффективность волнового поля существенно увеличивается, если функции воздействия имеют периодический, пульсирующий характер.

Пусть в точке волновой зоны давление изменяется по закону:

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^n \frac{A_m \sigma_0 \left(t - \gamma_m - \frac{r_1 - r_0}{a} \right)}{\sqrt{\left(t - \gamma_m + \beta \right)^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}}, \quad (6.61)$$

тогда с учетом (6.39) и преобразований, подобных приведенным в [21] можно получить:

$$P(r, t) = \sum_{m=0}^n \frac{A_m \sigma_0 \left(t - \gamma_m - \frac{r_1 - r_0}{a} \right)}{\sqrt{(t - \gamma_m + \beta)^2 - \frac{r^2}{a^2}}},$$

$$v(r, t) = \sum_{m=0}^n \frac{A_m (t - \gamma_m + \beta)}{R(t) \rho \sqrt{(t - \gamma_m + \beta)^2 - \frac{r^2}{a^2}}}. \quad (6.62)$$

На подвижной границе $r = R(t)$ и $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$; с учетом $\frac{1}{2} \rho v^2$

$$R(t) = \sum_{m=0}^n \left\{ r_0^2 + \frac{2A}{\rho} [\omega - \omega_1] + \frac{2A^2}{\rho^2 a^2} \left[\ln \left| \omega - \frac{A}{\rho a^2} \right| - \ln \left| \omega_1 - \frac{A}{\rho a^2} \right| \right] \right\}^{1/2}, \quad (6.63)$$

где $\omega = \sqrt{(t - \gamma_m + \beta)^2 - \frac{R^2(t)}{a^2}}$; $\omega_1 = \sqrt{(\beta - \gamma_m)^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}$; $\beta = \alpha_m + \frac{r_0}{a}$, A_m, a, ρ ,

$\alpha_m, \gamma_m = \text{const}$, σ_0 – единичная разрывная функция нулевого порядка.

В (6.61) предполагается, что функция f записывается так же по участкам с соответствующим индексом, то есть по типу (3.13) [3], например:

$$A_0 \sigma_0 \left(t - \gamma_0 - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) - \underline{A_0 \sigma_0 \left(t - \gamma_0 - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \sigma_0 \left(t - \gamma_1 - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) +}$$

$$+ A_1 \sigma_0 \left(t - \gamma_1 - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) - \underline{A_1 \sigma_0 \left(t - \gamma_1 - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \sigma_0 \left(t - \gamma_2 - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) + \dots}$$

Для краткости, вычитаемую (подчеркнутую) часть опускаем. Таким образом, проведение математических операций с формулами происходит по строго определенным временным участкам, соответствующим каждому члену функции f .

Следует отметить, что формулы (6.61)–(6.63) описывают и следующий известный факт: приближение источника периодических волн к неподвижному приемнику соответствует увеличению частоты сигнала. Действительно, из формул (6.62) для $P(r, t)$ и $P(R(t), t)$ видим, что в точке r_1 по ее достижении через $\left(\frac{r_1 - r_0}{a} \right)$ импульсы появляются с временным промежутком γ_m .

Из формулы для $P(R(t), t)$ видим, время появления импульсов на подвижной границе происходит с интервалом $\left(\gamma_m + \frac{R(t) - r_0}{a} \right)$. Это и есть наглядное подтверждение эффекта Доплера. Как видим, точные аналитические решения, полученные методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов, наиболее наглядны и удобны для анализа чем какие-либо другие решения, полученные другими авторами приближенно.

Оценка количественного различия:

для $r_0 = 0,013 \cdot 10^{13} \text{ м}$; $a = 1460 \text{ м/с}$, $R(t)(t = 5 \cdot 10^{-6} \text{ с}) \approx 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$;

$$\frac{R(t) - r_0}{a} = \left(\frac{0,1 - 0,013}{1,46} \right) \cdot 10^{-6} = \left(\frac{0,087}{1,46} \right) \cdot 10^{-6} = 0,0595 \cdot 10^{-6} \text{ с},$$

то есть примерно пять сотых микросекунды. Как видим, для большого количества возможных случаев импульсных процессов при практическом использовании, например, электрического разряда, лазерного импульса и т. д. в сжимаемой среде [6, 7] можно считать периоды пульсаций функций на подвижной границе и в точке волновой зоны практически одинаковыми.

По известным кинематическим и динамическим параметрам (6.61)–(6.63) расширяющегося цилиндрического плазменного поршня можно, используя уравнение баланса энергии [7], определить вводимую в канал мощность.

На рис. 6.11–6.14 изображены результаты вычислений по формулам (6.61)–(6.63) при

$$A_0 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ кгс} \cdot \text{с/см}^2, \quad A_1 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ кгс} \cdot \text{с/см}^2, \quad \rho = 102 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4,$$

$$a = 1460 \text{ м/с}, \quad r_0 = 0,013 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad r_1 = 0,08 \text{ м}, \quad \alpha_1 = 5 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_0 = 0.$$

Анализ соотношений (6.61)–(6.63) показывает: а) что если в точке r_1 волновой зоны функция давления имеет вид последовательности убывающих по амплитуде импульсов, то функция давления на стенки плазменного канала так же будет последовательностью убывающих по амплитуде импульсов. И наоборот: возрастающей последовательности импульсов на подвижной границе будет соответствовать так же возрастающая последовательность по амплитуде импульсов в точке волновой зоны. Последнее и показано на рисунках, где $A_1 > A_0$.

Указанное соответствует физике явления в описании его волновым уравнением. Два разных скачка давления, зародившись на подвижной границе и распространяясь по среде будут, во-первых, всегда находиться на одинаковом расстоянии друг от друга, пропорционально величине α_m ($a = \text{const}$ и поджата ожидать нельзя). Во-вторых, соотношение амплитуд (первый скачок больше второго, либо первый меньше второго скачка) будет всегда сохраняться, изменяясь одинаково для них в соответствии с величиной $[t^2 - (r - r_0)^2 a^{-2}]^{-1/2}$, хотя и с запаздыванием α_m .

б) Изменение расстояния между скачками во время распространения возможно, если хотя бы один из них перемещается со скоростью, превышающей $a_0 = \text{const}$ – скорость звука. Однако, в этом случае исследуемые явления описываются уже другими уравнениями, например, полной системой (1) [8]. Также при распространении возможно увеличение амплитуды скачка, но при прохождении волной, например, участков двухфазной среды, насыщенной пузырьками определенных размеров и концентрации, что так же должно описываться уже другими уравнениями.

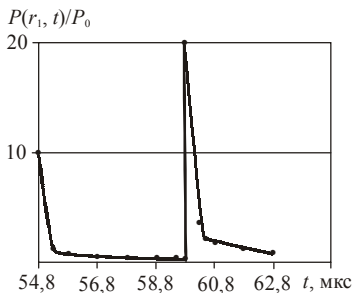


Рис. 6.11. Исходная для реконструкции возрастающая последовательность импульсов давления в зависимости от времени в фиксированной точке волновой зоны, значения 10 и 20 кгс/см² при $t = 54,8$ и $t = 59,8$ мкс

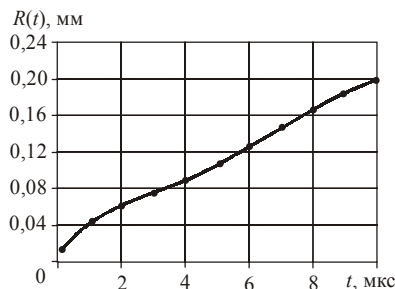


Рис. 6.12. Восстановление закона изменения радиуса подвижной границы плазменного поршня в зависимости от времени

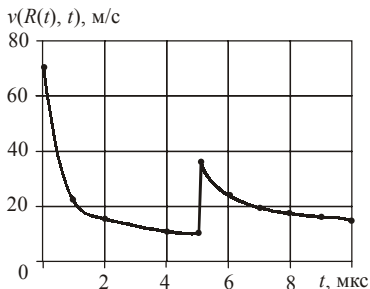


Рис. 6.13. Восстановление закона изменения скорости подвижной границы в зависимости от времени

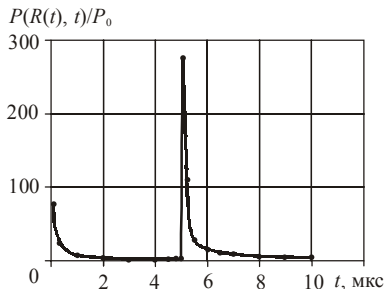


Рис. 6.14. Реконструкция закона изменения давления на подвижной границе плазменного поршня в зависимости от времени по заданному пульсирующему давлению в точке волновой зоны рис. 6.11

Анализ формул (6.61)–(6.63) и уравнения баланса энергии для не слишком сильных электрических разрядов в воде [7]:

$$N(t)/l = (\gamma - 1)^{-1} S \cdot dP(R(t), t)/dt + [\gamma/(\gamma - 1)] \cdot P(R(t), t) \cdot dS/dt,$$

где $S = \pi R^2(t)$, $\gamma = 1,26$ – эффективный показатель адиабаты плазмы, l – длина канала, $N(t)$ – вводимая в канал мощность, показывает, что период пульсации кривой ввода мощности неравен периоду пульсации кривой давления на стенке канала и периоду пульсации кривой давления в фиксированной точке волновой зоны.

На рис. 6.13 кривая скорости подвижной границы поршня имеет второй скачок меньше первого, в то время как на кривой давления $P(R(t), t)$ рис. 6.14 второй скачок больше первого. Это соответствует физике явления, описываемого волновым уравнением, так как второй скачок давления индуцируется со значительно большего (почти на порядок) радиуса канала плазменного поршня, хотя и расширяющегося несколько медленнее.

6.6. Волны, окружающие расширяющийся проницаемый цилиндр в сжимаемой среде

Представляют большой интерес задачи цилиндрической симметрии, когда волновые процессы индуцируются движением проницаемых границ. Подобные задачи в математической физике не рассматривались.

а) Непроницаемая подвижная граница.

В противоположность случаю сферической симметрии, динамика цилиндрической полости в безграничной несжимаемой жидкости не может быть описана точным уравнением из-за логарифмической особенности на бесконечности [31]. Между тем наличие хотя бы приближенной модели, а тем более точного решения, весьма желательно не только в научных исследованиях, но и потому, что целый ряд практических задач, например, подводного взрыва, нестационарного взаимодействия деформируемых тел со средой, взрыва в грунтах и т. д., связан с необходимостью получения простых оценок.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к уравнению (6.35), с учетом нулевых начальных условий, получаем операторное уравнение, решая которое для случая движения границы в безграничной среде при учете условия (6.3), получаем интересные нас зависимости. Значения исследуемых функций имеют вид (6) и (11)–(13) работы [21].

Если функции в (11)–(13) [21] аппроксимировать полиномами Лагранжа степени m , то интегралы становятся табличными (2.261)–(2.262) [25]. Правые части соотношений вычисляются, f – задано (для обратных задач, например), а слева будут полиномы, коэффициенты которых определяются из решения системы алгебраических уравнений.

Отметим, что устойчивость обратной задачи есть непосредственное следствие теоремы единственности [10]. Подобные теоремы доказаны, например, в [11]. Из (10) и (13) работы [21], а так же из подобных им соотношений видно, что малым изменениям исследуемых функций соответствуют малые изменения радиуса подвижной границы.

б) Проницаемые (излучающие) подвижные границы,

$$dR(t)/dt \neq v(R(t), t), \quad v = 2.$$

Если на подвижной границе имеет место и условие (6.7), то имеем проницаемую (излучающую) подвижную границу (ППГ). Тогда поступая, как и выше, получим интересующие нас зависимости с учетом реальных величин запаздываний: они будут иметь вид (6.50)–(6.52). Однако в этом случае вид функции f несет информацию о том, что распространяющиеся возмущения, описываемые волновым уравнением, индуцированы проницаемой подвижной границей. Для вычисления по этим формулам необходимо знать $R(t)$. Вычисления радиуса подвижной проницаемой границы можно произвести следующим образом.

Как и для случая сферы [4], для цилиндрической симметрии в каждой точке подвижной поверхности будет иметь место соотношение:

$$R^*(t) = v(R(t), t) + R_2^*(t), \quad (6.64)$$

$R^*(t) = v_1$ – "наблюдаемая" скорость изменения радиуса ППГ,

$v(R(t), t)$ – скорость частиц среды, соприкасающихся с ППГ,

$R_2^*(t) = v_2$ – скорость проницаемости.

С учетом (6.64), (6.51) и второго соотношения из (6.39) можно получить:

$$\begin{aligned} \rho \int_0^t v_1(t-\tau) X(r_1) d\tau &= \left| \int_0^t f(\xi-\tau) \left(\tau + \frac{r}{a} \right) \frac{X(r)}{r} d\tau \right|_{r=R(t)} + \\ &+ \rho \int_0^t v_2(t-\tau) X(r_1) d\tau, \end{aligned} \quad (6.65)$$

где $R(t)$ – "наблюдаемый" радиус ППГ.

Скорость проницаемости подвижной границы можно определить из (6.65), зная f и $R(t)$ ($v_1 = R^*(t)$).

Учет проницаемости добавляет к рассматриваемым еще одну неизвестную функцию – скорость проницаемости $v_2 = R_2^*(t)$, входящую в (6.64). Поэтому в случае $dR(t)/dt \neq v(R(t), t)$ для вычислений по (6.50)–(6.52), (6.64), (6.65) должны быть известны две функции, например, $R(t)$ и $v = (R(t), t)$, либо f и $R(t)$. Тогда как при $dR(t)/dt = v(R(t), t)$ достаточно знать одну: f или $R(t)$. Полученные решения являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, при отсутствии проницаемости они переходят в полученные ранее для непроницаемых границ [5]. Это позволяет решать задачи при различных вариантах задания дополнительных условий. При этом законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц

среды, соприкасающихся с ней, могут быть произвольными и различными. Полученные результаты имеют большое научное и прикладное значение.

На рис. 6.16 представлены результаты расчетов с единым законом изменения радиуса (кривая 3, рис. 6.16) и двух вариантов подвижных границ:

а) проницаемой, реконструкция по формулам (6.50)–(6.52) давления на подвижной границе (кривая 2, рис. 6.15), аппроксимировано полином Лагранжа при $m = 0, 1, 2, 3$; $a = 1460$ м/с; $r_0 = 0,5$ мм; $r_1 = 80$ мм; $B_0 = 1115,12$; $B_1 = -310,08 \cdot 10^6$; $B_2 = 73,527 \cdot 10^{12}$; $B_3 = -1,839 \cdot 10^{18}$, скорость частиц среды на ППГ – кривая 2, рис. 6.16.

б) непроницаемой, расчет методом характеристик [3, 15] системы уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Тэта (6.58) с соответствующими граничными и начальными.

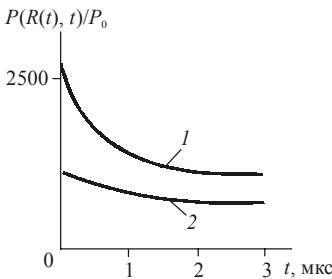


Рис. 6.15. Изменение во времени давления на движущихся границах (с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа [194] непроницаемой (1), проницаемой (2) – реконструкция)

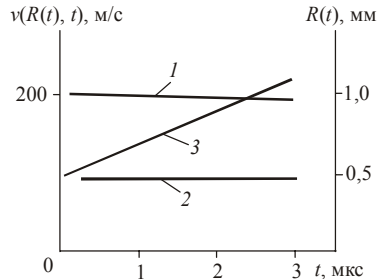


Рис. 6.16. Изменение скорости частиц на непроницаемой (1) и проницаемой (2) границах; (3) – общий закон изменения радиуса подвижных границ

Закон расширения поршня: $v(R(t), t) = 200 \exp(-5 \cdot 10^{-3} t)$ м/с, – кривая 1, рис. 6.16 при $v(R(t), t) = d R(t)/d t$, давление на подвижной границе – кривая 1, рис. 6.15.

Анализ кривых рис. 6.15, 6.16 показывает, сколь велики могут быть погрешности определения исследуемых функций по наблюдаемому изменению радиуса подвижной границы. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [2] применить к обратным задачам затруднительно.

6.7. Волновые процессы в областях с подвижными границами плоской симметрии. Функции управления. Учет нелинейных дополнительных условий. Учет проницаемости подвижных границ

Волновая зона. Точные аналитические решения обратных и прямых задач для уравнения (6.1) для $v = 1$ в областях с подвижными границами при

$P(r_1, t) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right)$ имеют вид [3, 5]:

$$P(r_1, t) = f(\xi), \quad v(r, t) = \frac{1}{\rho a} f'(\xi), \quad (6.66)$$

$$[R(t) - r_0] \rho a = \left| \int_0^t f'(\xi - \tau) \sigma_0(\xi) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a},$$

$$P(R(t), t) = f(\xi)|_{r=R(t)}, \quad v(R(t), t) = \frac{1}{\rho a} f'(\xi)|_{r=R(t)}. \quad (6.67)$$

где функция f может быть аппроксимирована, как и ранее разными способами. Формулы, подобные (2.4)–(2.6) [5] получены для большого количества вариантов аппроксимации f . В общем случае произвольных законов изменения скорости движения границ и вида функции f (6.10), с учетом (6.66), (6.67) соответствующие решения представлены в [3].

Ближняя зона, нелинейное условие: $P - P_0 = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right].$

С учетом (6.66), (6.10) и (6.4) можно записать для точек ближней зоны:

$$P(r, t) + P_0 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{1}{\rho a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m \right\}^2. \quad (6.68)$$

Покажем, что решение задачи можно свести к решению алгебраического уравнения. Вычислим значение A_0 , когда решение, аппроксимированное полиномом Лагранжа $A_0 \sigma_0(\xi_1)$, представляет собой прямую в точке r_1 для момента t_0 , это момент прихода волны в точку r_1 . Из (6.68) имеем квадратное уравнение относительно A_0 , решая которое, получаем:

$$A_0 = \frac{1}{2c_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2c_2} \right)^2 - \frac{P(r_1, t)}{c_2}}, \quad c_2 = \frac{1}{2\rho a^2}, \quad t_0 = \frac{r_1 - r_0}{a}, \quad \xi = 0. \quad (6.69)$$

Расширим временной интервал на некоторую величину Δt и определим решение, которое аппроксимируем полиномом Лагранжа $A_0 + A_1 \xi$, проходящее через точку t_0 и вторую точку $t_1 = t_0 + \Delta t$. Тогда из (6.68) получаем:

$$P(r_1, t_1)_0 = A_0 + A_1 \xi - \frac{1}{2\rho a^2} \{A_0 + A_1 \xi\}^2. \quad (6.70)$$

Величина P известна по условию, A_0 – из (6.69). Тогда A_1 определится из решения квадратного уравнения (6.70).

Продолжая таким способом, можно получить необходимое количество коэффициентов Лагранжа. Соотношение для m -го коэффициента будет иметь вид:

$$A_m = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}, \quad (6.71)$$

$$a_1 = c_2 \xi^{2m}, \quad b_1 = \xi^m (1 - 2c_2 M_m), \quad c_1 = P(r_1, t) - M_m (1 - c_2 M_m),$$

$$M_m = A_0 \xi^0 + A_1 \xi^1 + A_2 \xi^2 + \dots + A_{m-1} \xi^{m-1}.$$

Как видим, решение задачи с нелинейным дополнительным условием (6.4) и движущейся произвольным законом изменения скорости границы свелось к вычислению по формуле типа (6.71). Зная A_m , по (4.72)–(4.76) [3], полученным из (6.66) и (6.67) с учетом (6.10), определяем исследуемые функции на подвижных границах и в любых других точках, а также параметры движения границы.

Нелинейное условие на подвижной границе:
$$P - P_0 = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right]_{r=R(t)},$$

при этом закон движения границы неизвестен, нелинеен и подлежит определению. Как и ранее решение проводим методом последовательных приближений. Определяем точку r_1 – ближайшую точку, которой не коснется подвижная граница за рассматриваемый период времени. Точку r_1 ориентировочно определяем с "запасом" в безопасную сторону при $v(R(t), t) = \text{const} = 200$ м/с [8]. Выбираем величину r_0 .

1) Производим расчет первого приближения, ориентировочно принимая $P(r_1, t) \approx P(R(t), t)$; по формулам (6.68)–(6.71) методом последовательного определения коэффициентов полинома Лагранжа [9] определяем A_m , а по (6.66) – третье соотношение с учетом (6.10), значение функции $R(t)$ первого приближения.

2) С учетом решений (6.66), (6.67) и (6.10) запишем (6.5) в виде:

$$P(R(t), t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{1}{\rho a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m \right\}^2, \quad (6.72)$$

здесь $\xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}$, $P(R(t), t)$ известно по условию, значения $R(t)$ берутся первого приближения, найденного выше и методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа [9] определяем A_m^1 , отвечающего нелинейному граничному условию на подвижных границах. Соотношения для определе-

ния A_m в общем случае произвольных величин начального радиуса, законов движения границ и вида $P(R(t), t)$ имеют такой же вид, как (6.69), (6.71):

$$A_m = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}, \quad (6.73)$$

$$a_1 = c_2 \xi^{2m}, \quad b_1 = \xi^m (1 - 2c_2 M_m), \quad c_1 = P(R(t), t) - M_m (1 - c_2 M_m),$$

$$M_m = A_0 \xi^0 + A_1 \xi^1 + A_2 \xi^2 + \dots + A_{m-1} \xi^{m-1}, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}.$$

3) Второе приближение: из (6.66) для $R(t)$ по известным A_m^I определяем уточненное значение $R(t)$ и по (6.73) методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа получим уточненное значение A_m^{II} второго приближения. По известным A_m^{II} и (6.66), (6.67) с учетом (6.10) определяем значения исследуемых функций в любых других точках и на подвижных границах. Описанный процесс обладает хорошей сходимостью и, как правило, с приемлемой для практических целей точностью достаточно сделать одно приближение.

Проницаемые (излучающие) подвижные границы, $\nu = 1$,
 $dR(t)/dt \neq v(R(t), t)$.

Как и для случаев сферической [4] и цилиндрической [21] симметрий, в каждой точке подвижной поверхности будет иметь место соотношение:

$$R^*(t) = v(R(t), t) + R_2^*(t), \quad (6.74)$$

где как и выше $R^*(t) = v_1$ – "наблюдаемая" скорость изменения радиуса ППГ; $v(R(t), t)$ – скорость частиц среды, соприкасающихся с ППГ; $R_2^*(t) = v_2$ – скорость проницаемости.

С учетом (6.74), второго соотношения из (6.67), получаем:

$$R^*(t) = \frac{1}{\rho a} \left[f(\xi) \right]_{r=R(t)} + R_2^*(t). \quad (6.75)$$

Вычисление функций с учетом проницаемости ПГ производится как и для случаев $\nu = 2$ и $\nu = 3$.

Полученные решения являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, при отсутствии проницаемости они переходят в решение для непроницаемых подвижных границ. Это позволяет решать задачи при различных вариантах задания дополнительных условий, при этом законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающихся с нею, могут быть произвольными и различными.

Заключение по главе 6

Предложенный и разработанный новый подход – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов, позволил получить аналитические решения (для трех случаев симметрии) обратных задач основного уравнения математической физики волнового в областях с подвижными и подвижными проницаемыми границами. Полученные соотношения универсальны: пригодны для решения обратных и прямых задач. Из вышеизложенного следуют важные выводы:

а) одна из наиболее сложных проблем уравнений математической физики – проблема подвижных границ решена впервые и в полном объеме для обратных и прямых задач для волнового уравнения в областях: 1) с подвижными границами, 2) с подвижными проницаемыми границами, 3) с нелинейными условиями и подвижными границами, 4) с нелинейными условиями на подвижных границах (п.п. 3 и 4 – дважды нелинейные задачи);

б) впервые показано, что решение уравнения в частных производных волнового в областях с подвижными границами и нелинейными дополнительными условиями приведено к решению алгебраического уравнения.

7. ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПЛОТНОСТИ СРЕДЫ КАК СРЕДСТВО УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 2] впервые получены точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач, величины начального радиуса и перемещений подвижных границ могут быть произвольными [3–12]. Показано, что полученные простые точные аналитические соотношения могут быть использованы при изучении физических процессов в сплошных, многофазных и многокомпонентных средах, скорость звука и плотность которых могут меняться при определенных условиях в широком диапазоне в зависимости от исходных составляющих [3–12].

7.1. О распространении возмущений в многокомпонентной среде (цилиндрическая симметрия)

При исследовании гидродинамики импульсных процессов, в том числе электрического разряда, возникает необходимость рассматривать рабочую среду как газожидкостную смесь. Некоторые механизмы газонасыщения, рассмотренные в [13, 14], способствуют образованию газожидкостной смеси с объемной концентрацией $\varepsilon_0 \approx 10^{-2} \div 10^{-4}$, при этом радиус пузырьков равен $R_0 = 10 \div 15$ мкм. Такие параметры смеси позволяют использовать для описания ее динамики при подводном электровзрыве модель равновесной среды. Согласно [14, 15] среду можно считать равновесной, если длительность переходного процесса изменения плотности мала по сравнению с характерными временами внешних воздействий на среду, например, с характерным временем активной стадии подводного электроразряда.

Время релаксации обусловлено, в основном, наличием газовых кластеров и для реальных условий, когда размеры последних порядка десятков микрон, возможно, квазиравновесное описание гидродинамических процессов. При этом влияние газовых включений может быть описано в рамках волновой модели (линейной) с низкочастотной, равновесной скоростью звука, значение

которой определяется газосодержанием среды [14, 16]. Условие корректности [17] равновесного приближения, учитывая, что для пузырьков малого диаметра основной вклад в затухание вносят рациональные эффекты, имеет вид (8) [15]. Если, например, потребовать, чтобы время релаксации среды было менее 1 мкс, то для пузырьков радиусом 15 мкм из условия корректности [15, 17] получим условие $P > 10$ МПа, что и позволяет использовать модель равновесной среды при описании гидродинамики импульсных процессов в пузырьковой газожидкостной среде с естественным газонасыщением, когда $R_0 \leq 15$ мкм [15, 18].

Динамические особенности плазменного канала электровзрыва в равновесной среде изучались в [13, 19], где в качестве решения внешней гидродинамической задачи использовалось решение автомодельной задачи расширения цилиндрической полости. Указанное квазиавтомодельное приближение, как и для случая чистой жидкости [20], непригодно для расчета полевых характеристик, не описывает разгонный участок и справедливо только в непосредственной окрестности поршня [21].

Гидродинамические поля давления при электровзрыве в равновесной газожидкостной среде рассматривались в [22]. При математическом моделировании гидродинамические поля рассчитывались численным интегрированием в эллипсоидальной системе координат квазиволнового уравнения с нелинейным баротропным уравнением состояния смеси. При этом установлено, что присутствие газовых включений проявляется при газосодержании $\epsilon_0 \geq 10^{-4}$, а заметные нелинейные эффекты при $\epsilon_0 \geq 5 \cdot 10^{-3}$.

Во многих случаях необходимо при рассмотрении волновых процессов учитывать наличие в среде кроме воздуха (газа) и других компонент: порошков, окислов металлов, опилок, глины, ила, песка, волокон растительного и искусственного происхождения и т.п., которые могут существенно изменять плотность смеси и скорость звука.

Здесь будем рассматривать распространение волн сжатия, длина – протяженность которых превышает размеры включений. При этом делается попытка получения точных аналитических соотношений, позволяющих рассмотреть волновые процессы в многокомпонентных смесях, получить количественные результаты при импульсных процессах в различных смесях, произвести оценку особенностей влияния подобных включений без использования громоздких алгоритмов, требующих при расчетах на ЭВМ значительных затрат машинных ресурсов и вычислительного времени. Пусть жидкая (многокомпонентная) смесь состоит из $i = 1, 2, 3, \dots, n$ компонент. Обозначая через ρ_i , a_i , Γ_i – плотность, скорость звука и объемное содержание i -го компонента в смеси, согласно [17, 23, 24] получаем следующие соотношения для плотности ρ_0 и скорости звука a_0 эквивалентной сплошной среды:

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i \Gamma_i, \quad a_0 = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\rho_0}{\rho_i} \right) \frac{\Gamma_i}{a_i^2} \right]^{-1/2}. \quad (7.1)$$

Задача о расширении поршня, полости, пузырька в сжимаемой среде – классическая задача математической физики, импульсной гидродинамики и акустики. Ее можно рассматривать как "модельную задачу" о взрыве взрывчатых веществ или газовых смесей, электрическом разряде, лазерном импульсе и т.д. в жидкости. Для одномерных случаев движение жидкости описывается полной системой [25] уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Тэта (1) [26]. Для потенциальных движений из первого уравнения системы можно получить нелинейный интеграл Коши-Лагранжа. Показано [21, 26], что при $M = v/a \leq 0,2$, где v – скорость поршня, a – скорость звука, потенциал скорости ϕ в интеграле Коши-Лагранжа можно определять не из нелинейного уравнения (3) [26], а из линейного волнового уравнения (4) [26]. Условия могут быть заданы на подвижной границе, этим определяется класс прямых задач. Если условия заданы только в фиксированной точке волновой зоны, то этим определяется класс обратных задач. При решении обратных задач необходимо реконструировать значения исследуемых функций в других точках, включая подвижных границы, при этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению и может быть нелинейным. Корректность такой постановки и области ее применимости показаны в работах [1, 21, 26].

Проблема подвижных границ, для уравнений параболического типа известная как проблемы Стефана, является одной из наиболее сложных в математической физике. Для решения обратных волновых задач с подвижными границами применим метод обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 21, 58]. Другие подходы и в частности метод [27], где решение ищется в виде разложения в ряд по мгновенным собственным функциям, что приводит к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения подобных задач применить затруднительно.

Для определенности рассмотрим цилиндрический случай симметрии.

Волновое уравнение цилиндрической симметрии имеет вид (6.1) [1, 21].

Точные аналитические решения имеют вид (6.40)–(6.46).

Если расширяющийся цилиндр имеет конечный начальный радиус $r_0 =$
 $= \text{const}$, а $P(r_1, t) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{a}\right)$ – произвольная функция, то из (6.39) можно получить следующие соотношения:

$$\left| \int_0^t P(r, t - \tau) X(r_1) d\tau = \int_0^t f(r, \xi - \tau) X(r) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (7.2)$$

$$\rho_0 \left| \int_0^t v(r, t - \tau) X(r_1) d\tau = \int_0^t \frac{1}{r} f(r, \xi - \tau) X(r) \left(\tau + \frac{r}{a_0} \right) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (7.3)$$

$$\left| \frac{\rho_0}{2} \int_0^t [r^2(t-\tau) - r_0^2] X(r_1) d\tau = \int_0^t f(r, \xi - \tau) X(r) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (7.4)$$

где $X(r) = \left(\tau^2 + 2 \frac{r}{a_0} \tau \right)^{-1/2}$, $X(r_1) = \left(\tau^2 + 2 \frac{r_1}{a_0} \tau \right)^{-1/2}$, $\xi = t - \frac{r-r_0}{a_0}$.

Если функции в (7.2)–(7.4) аппроксимировать полиномами Лагранжа степени m , то интегралы становятся табличными (2.261)–(2.262) [28]. Число m характеризует количество точных значений функций и может быть сколько угодно большим [29].

Пусть известна скорость изменения подвижной границы $v(R(t), t)$, а значит и закон изменения радиуса подвижной границы. Обозначим функции P , f , v полиномами Лагранжа:

$$P = B_0 t^0 + B_1 t^1 + B_2 t^2 + B_3 t^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} B_m t^m,$$

$$v = C_0 t^0 + C_1 t^1 + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} C_m t^m,$$

$$f(r, \xi) = A_0 \xi^0 + A_1 \xi^1 + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m, \quad \xi = t - \frac{r-r_0}{a_0}.$$

Тогда с учетом (7.2), (7.3) и (2.261)–(2.262) [28] получим:

$$\begin{aligned} & B_0 \{X_1\} + B_1 \left\{ \left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) X_1 - Y_1 \right\} + B_2 \left\{ \left[\left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{a_0^2} \right] X_1 - \frac{3}{2} \left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) Y_1 \right\} + \\ & + B_3 \left\{ \left[\left(t + \frac{r_1}{a_0} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{r_1^2}{a_0^2} \left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) \right] X_1 - \left(\frac{11}{6} t^2 + \frac{11}{3} t \frac{r_1}{a_0} + \frac{5}{2} \frac{r_1^2}{a_0^2} \right) Y_1 \right\} + \dots = \\ & = A_0 \{X\} + A_1 \{ \xi Z_0 - Z_1 \} + A_2 \{ \xi^2 Z_0 - 2 \xi^2 Z_1 + Z_2 \} + \\ & + A_3 \{ \xi^3 Z_0 - 3 \xi^2 Z_1 + 3 \xi Z_2 - Z_3 \} \Big|_{r=R(t)}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$Z_m = \int_0^t \frac{\tau^m d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r}{a} \tau}},$$

$$\text{где } X_1 = \left\{ \ln \left| \sqrt{t^2 + \frac{2r_1}{a_0}} + \left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) \right| - \ln \frac{r_1}{a_0} \right\}, \quad Y_1 = \sqrt{t^2 + \frac{2r_1}{a_0}} t,$$

$$X = \left\{ \ln \left| \sqrt{\xi^2 + 2 \frac{R(t)}{a_0} \xi} + \left(\xi + \frac{R(t)}{a_0} \right) \right| - \ln \frac{R(t)}{a_0} \right\}, \quad Y = \sqrt{t^2 + \frac{2R(t)}{a_0}} t,$$

$$\xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a_0}.$$

Соответственно из (7.2) получаем:

$$\begin{aligned} & C_0 \rho_0 R(t) \{X_1\} + C_1 \rho_0 R(t) \left\{ \left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) X_1 - Y_1 \right\} + \\ & + C_2 \rho_0 R(t) \left\{ \left[\left(t + \frac{r_1}{a_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{r_1^2}{a_0^2} \right] X_1 - \frac{3}{2} \left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) Y_1 \right\} + \\ & + C_3 \rho_0 R(t) \left\{ \left[\left(t + \frac{r_1}{a_0} \right)^3 + \frac{3}{2} \frac{r_1^2}{a_0^2} \left(t + \frac{r_1}{a_0} \right) \right] X_1 - \left(\frac{11}{6} t^2 + \frac{11}{3} t \frac{r_1}{a_0} + \frac{5}{2} \frac{r_1^2}{a_0^2} \right) Y_1 \right\} + \dots = \\ & = A_0 = \frac{1}{r} \left\{ \sqrt{\xi^2 + 2 \frac{r}{a} \xi} \right\} + A_1 \frac{1}{r} \left\{ \left(\xi + \frac{r}{a} \right) Z_1 - Z_2 + \left(\frac{r}{a} \xi \right) Z_0 \right\} + \\ & + A_2 \frac{1}{r} \left\{ \left(\xi^2 - 2 \frac{r}{a} \xi \right) Z_1 - \left(2 \xi - \frac{r}{a} \right) Z_2 + Z_3 + \left(\xi \frac{2r}{a} \right) Z_0 \right\} + \\ & + A_3 \frac{1}{r} \left\{ \left(-3 \xi \frac{2r}{a} + \xi^3 \right) Z_1 - \left(-3 \xi^2 + 3 \frac{r}{a} \xi \right) Z_2 + \right. \\ & \left. + \left(3 \xi - \frac{r}{a} \right) Z_3 - Z_4 + \left(\xi \frac{3r}{a} \right) Z_0 \right\} \Bigg|_{r=R(t)} + \dots, \end{aligned} \quad (7.6)$$

Z_n – табличные интегралы [28];

где X, Y, X_1, Y_1 – такие же, как в формуле (7.5).

Решая систему алгебраических уравнений, в которой C_m и $R(t)$ известно, определяем A_m , а затем по известным A_m и $R(t)$ определяем B_m . Таким образом становятся известными функции давления на подвижной границе и в точке волновой зоны.

Решения (6.40)–(6.46), (7.2)–(7.6) являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, они универсальны: пригодны для прямых и обратных задач при произвольных величинах начального радиуса, перемещений, законов изменения скорости движения границ

и вида функции давления в точке волновой зоны. Коэффициенты Лагранжа вычисляются по конкретным значениям ординат точек, лежащий на аппроксимируемой кривой. Полином точно описывает функцию в этих точках. Поэтому, число m выбирают исходя из того, какое количество точных значений функций – точек кривой – необходимо иметь для ее построения [30].

Рассмотрим количественные результаты. На рис. 7.1, 7.2 представлены результаты расчета по формулам (7.1) плотности ρ_0 и скорости звука a_0 эквивалентной сплошной среды:

а) смеси вода + воздух (рис. 7.1) в зависимости от концентрации воздуха. Как видим, увеличение концентрации воздуха увеличивает сжимаемость, что приводит к понижению скорости звука в смеси, причем это снижение может быть очень значительным с 1500 до $10 \div 12$ м/с [31];

б) смесь (рис. 7.2): вода: $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_1 = 1500 \text{ м/с}$;
 воздух: $\rho_2 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $a_2 = 300 \text{ м/с}$;
 одревесневшие волокна: $\rho_3 = 650 \text{ кг/м}^3$, $a_4 = 4000 \text{ м/с}$.

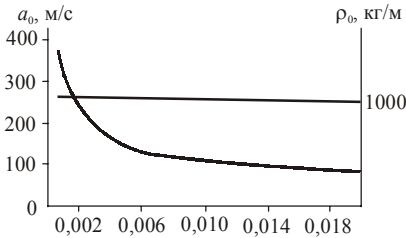


Рис. 7.1. Плотность и скорость звука эквивалентной сплошной среды (смесь вода + воздух) в зависимости от концентрации воздуха

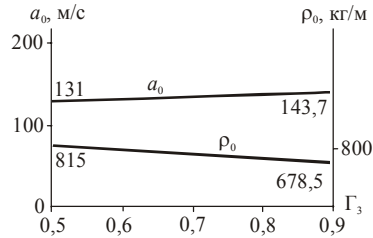


Рис. 7.2. Изменение плотности и скорости звука эквивалентной сплошной среды в зависимости от концентрации волокон. Концентрация воздуха постоянна и равна 10^{-2}

При постоянном содержании воздуха $\Gamma_2 = 10^{-2} = \text{const}$ изменение концентрации одревесневших волокон $\Gamma_3 = 0,5 \div 0,9$ приводит к увеличению скорости звука $a_0 = 131 \div 143,7$ м/с на $\approx 10\%$ и к уменьшению плотности смеси $\rho_0 = 815 \div 678 \text{ кг/м}^3$ на $\approx 15\%$.

Анализ результатов вычислений по формулам (6.40)–(6.46) показывает следующие различия при расширении плазменной полости в воде и водно-воздушной волоконной среде. Исходным для расчета принято давление в точке $r_1 = 80 \cdot 10^{-3}$ м волновой зоны с максимальным давлением 20 кг/см^2 : для смеси $a_0 = 400 \text{ м/с}$, $\rho_0 = 85,62 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$, для воды $a_0 = 1460 \text{ м/с}$, $\rho_0 = 102 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$.

Величина скачка от точки $r_1 = 50$ мм до $r = 150$ мм изменяется незначительно, на доли процента, в то время как по характеру кривые давления в смеси и в воде отличаются качественно:

1) давление в смеси меньше, чем в воде. При этом время появления скачков различается примерно в четыре раза, в смеси они появляются позже. Это является основным тестирующим фактором корректности – физической и математической моделей газожидкостных смесей [17, 32]. Различие в давлениях изменяется от 50 % в первые моменты появления, до 90 % при достижении давления $1 \div 2 \text{ кг/см}^2$. Величина различия во всех точках волновой зоны практически одинакова;

2) радиус плазменного поршня больше в смеси, чем в воде, различие изменяется от долей процента в начале движения, $4 \div 5 \%$ через 0,3 мкс и достигает 8 % при 5 мкс;

3) скорость плазменного поршня больше в смеси, чем в воде; различия существенны: в начале движения скорость в смеси в 4 раза больше, чем в воде; при 0,03 мкс скорость поршня в смеси в 2 раза больше, чем в воде, при 0,1 мкс на 60 %, при 5 мкс на 11 %. Полученные результаты совпадают с расчетами по неравновесной модели [33] пузырьковой среды, в которых рассматривалось точное уравнение пульсаций типа Релея [34];

4) давление на подвижной границе плазменного поршня, расширяющегося в смеси меньше, чем при расширении в воде; характер изменения – рост различия в начале движения от 21 % до 50 % при 0,1 мкс, до 24 % и 8,5 % при 0,5 мкс и 5 мкс соответственно;

5) изменение закона ввода мощности $N(t)$ (на единицу длины канала, $\gamma = 1,26$ – эффективный показатель адиабаты плазмы) [35], вводимой в плазменную полость, расширяющейся в смеси больше, чем в воде; в первые мгновения различия достигают $30 \div 35$ раз, при 0,03 мкс – 4 раза, при 0,1 мкс $\approx 60 \%$, при 5 мкс – $8 \div 9 \%$.

Указанные различия будут качественно сохраняться и при других законах изменения скоростей движения плазменного поршня и законах изменения давления в точках волновой зоны.

Отметим, что скорость границы плазменной полости выходит за допустимый диапазон применимости линейного волнового уравнения $M = v/a \leq 0,2$: для воздуха $v = 66 \text{ м/с}$ и для смеси $v = 80 \text{ м/с}$. Однако, при этом необходимо учитывать два обстоятельства: первое – уже при $t \approx 0,01 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ скорость $v(R(t), t) < 88 \text{ м/с}$, то есть близка к допустимой. Второе: известно, что гидродинамические характеристики именно на подвижной границе можно определить с хорошим приближением и при больших скоростях движения. Об этом говорит и факт вычисления их на ПГ по формулам несжимаемой жидкости.

Далее на рис. 7.3 и 7.4 показаны результаты расчетов по формулам (7.2)–(7.6) при одинаковой скорости расширения плазменного поршня $v(R(t), t)$ – рис. 7.4, а значит и одинаковом законе изменения радиуса $R(t)$:

$$v(R(t), t) = 200 \exp(-0,0608 \cdot 10^6 t) \text{ м/с}, \quad r_0 = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

в воде: $a_0 = 1460 \text{ м/с}$; $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$;

и в водо-воздушно-волоконной смеси:

$$a_0 = 400 \text{ м/с}; \quad \rho_0 = 85,62 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4 = 840 \text{ кг/м}^3.$$

На рис. 7.4 показано изменение давления на подвижной границе $P(R(t), t)/P_0$ канала, расширяющегося в воде (1) и смеси (2). Как видим, в воде: с началом движения давление скачком достигает максимума и затем плавно падает. Давление $P(R(t), t)$ в смеси в начале имеет небольшой скачок (~ 5 раз меньше, чем в воде), затем плавно нарастает (в этом проявляется повышенная сжимаемость смеси), достигает максимума, затем медленно падает. Таким образом, влияние параметров a_0 и ρ_0 смеси приводит к существенному различию характера изменения давления на подвижной границе полости. Это в свою очередь предопределяет и может объяснить изменение и различие других исследуемых функций. На рис. 7.3 представлен закон ввода мощности [Вт] в канал: для воды (1) и смеси (2); как видим, характер кривых существенно различен. Для поддержания одинаковой скорости требуется значительно большая мощность ($\sim$ в 2,5 раза по максимуму) для смеси. Естественно, отсюда и энергия [Дж], вводимая в канал (рис. 7.3), будет существенно различной: кривые (1) – вода и (2) – смесь – различаются в $\sim 2,5$ раза, что является причиной появления в смеси повышенного давления (в 2 раза) в точках волновой зоны, хотя и с запаздыванием $\sim 3,5$ раза относительно воды.

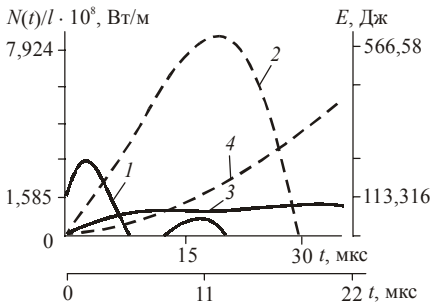


Рис. 7.3. Изменение во времени удельной мощности и закона ввода энергии в плазменную полость $l = 40$ мм, расширяющуюся с одинаковой скоростью в воде (1, 3) и водно-воздушно-волоконной среде (2, 4)

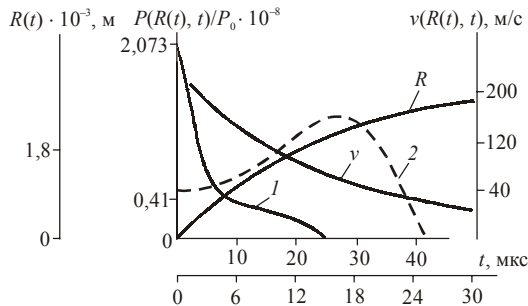


Рис. 7.4. Изменение давления на подвижной границе и единые законы изменения скорости v и радиуса подвижной границы R плазменной полости, расширяющейся с одинаковой скоростью в воде (1) и водно-воздушно-волоконной среде (2)

В работе рассматривалась неоднородная многокомпонентная среда (однородная усредненная модель). Это имеет место в важных в научном и прикладном планах случаях, например, когда повторяющиеся возмущения (волнение, импульсные процессы и т. д.) поддерживают многокомпонентную среду в состоянии, которое можно описать с достаточным приближением при a и ρ – усредненные = const.

Небольшими отклонениями параметров среды от средних значений можно пренебрегать, так как они незначительно влияют на определение исследуемых функций P , v и т. д. (рис. 7.1, 7.2). Значительные отклонения необходимо учитывать, для описания этих процессов необходимо исследовать другие уравнения, где ρ и a будут непостоянными, а функциями координат и времени, т. е. $\rho(r, t)$ и $a(r, t)$. Некоторые вопросы определения гидродинамических характеристик электрического разряда в жидкости при вводе энергии в канал в виде повторяющихся импульсов рассмотрены в [36].

Таким образом, на основании полученных решений приходим к заключению, что построенные физическая и математическая модели пригодны и могут быть использованы при изучении физических процессов в сплошных и многофазных средах, скорость звука в которых может меняться в широком диапазоне в зависимости от исходных составляющих. К таким средам можно отнести и релаксирующие среды произвольной физической природы [14, 22]. Возможно также проведение мониторинга газовых включений и т. д., например, определяя скорость звука a_0 по другим параметрам.

7.2. Изменение плотности и скорости распространения возмущений многокомпонентной сжимаемой среды как средство управления волновыми процессами (сферическая симметрия)

Как уже упоминалось, при исследовании электрического разряда часто возникает необходимость рассматривать рабочую среду как газожидкостную смесь. Образование таких смесей и их параметры были описаны в [37, 38].

Для описания динамики смеси при подводном электровзрыве, когда объемная концентрация воздуха составляет от 10^{-4} до 10^{-2} , а радиус пузырьков от 10 до 15 мкм, использование модели равновесной среды возможно при условии, если длительность переходного процесса изменения плотности (т. е. время релаксации смеси, обусловленное в основном наличием газовых кластеров) мала по сравнению с временами внешнего воздействия на среду, в данном случае – с характерным временем активной стадии подводного электроразряда. Согласно условию корректности равновесного приближения, полученному в [15], для пузырьков радиусом 15 мкм давление должно превышать 10 МПа.

Таким образом, квазиравновесное описание гидродинамических процессов возможно, например, в пузырьковой газожидкостной среде с естественным газонасыщением. При этом влияние газовых включений может быть описано в рамках волновой (линейной) модели эквивалентной сплошной среды с эквивалентными плотностью ρ и низкочастотной равновесной скоростью звука c .

При электровзрывной обработке различных материалов возможно образование также многокомпонентных смесей путем внесения в газожидкостную среду объектов обработки и других твердых веществ. Целью настоящей работы является получение точных аналитических соотношений, описывающих распространение волн сжатия, длина которых превышает размеры включений, распределенных в жидкости, и определение возможности применения этих соотношений для исследования волновых явлений в многокомпонентных смесях. Значения ρ и c определяются объемным содержанием компонентов [39, 40], формулы (7.1).

Обоснованность и области корректного использования линейного волнового уравнения при решении задач расширения полости в сжимаемой среде для одномерных случаев были рассмотрены в работах [1, 21, 26]. В прямых задачах условия задаются на подвижной границе. В обратных задачах условия известны только в некоторой точке r_1 волновой зоны, например, давление P в виде произвольной функции f :

$$P(r_1, t) = f\left(t - \frac{r_1 - r_0}{c}\right), \quad (7.7)$$

где t – время; r_0 – начальный фиксированный радиус подвижной границы; значения же исследуемых функций в других точках, в том числе и на подвижной границе, включая закон ее движения, подлежат определению.

Здесь для решения волновых задач с подвижными границами был использован метод обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 2]. Случай цилиндрической симметрии подвижной границы рассматривается в [2] и п.п. 7.1, здесь же исследуем сферическую симметрию.

Применяя к волновому уравнению одностороннее преобразование Лапласа, с учетом условия (7.7) и при нулевых начальных условиях можно получить операторное уравнение, точное аналитическое решение которого для бесконечной среды будет иметь следующий вид:

$$\varphi(r, t) = \frac{r_1}{r\rho} \int_0^t f(\xi) dt, \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{c}. \quad (7.8)$$

Значения исследуемых функций в произвольной точке r волновой зоны и на подвижной границе $R(t)$ имеют вид (6.8)–(6.9).

Если функцию f в выражениях (6.8)–(6.9) аппроксимировать полиномом Лагранжа в степени m , то соответствующие соотношения будут иметь вид

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^m, \quad A_m = \text{const.}$$

В этом случае, учитывая (6.8)–(6.10), функции управления имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad (7.9)$$

$$v(R(t), t) \rho R^2(t) / r_1 = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \quad (7.10)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3]}{3r_1} \cdot \rho = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} \xi^{m+2}. \quad (7.11)$$

Решения (7.8)–(7.11) являются точными (подстановка их в волновое уравнение обращает его левую часть в ноль) и универсальными (они применимы как для прямых, так и для обратных задач).

Для представления закона изменения давления в точке r_1 волновой зоны в виде ступеньки с определенной амплитудой A_0

$$P(r_1, t) = A_0 \sigma_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{c} \right), \quad (7.12)$$

где σ_0 – единичная разрывная функция нулевого порядка, используя (7.8)–(7.11), можно получить следующие соотношения:

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} A_0 \sigma_0(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(r, t), \quad (7.13)$$

$$v(r, t) = \frac{r_1}{r^2} \rho \left[\frac{r}{c} A_0 + A_0 \xi \right], \quad \xi = \frac{r - r_0}{a}, \quad (7.14)$$

давление и скорость на подвижной границе $R(t)$

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} A_0 \sigma_0(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad (7.15)$$

$$v(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)^2} \rho \left[\frac{R(t)}{c} A_0 + A_0 \xi \right], \quad (7.16)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3]}{3r_1} \cdot \rho = \frac{R(t)}{a} A_0 \xi + A_0 \xi^2, \quad \xi = \frac{R(t) - r_0}{a}. \quad (7.17)$$

Это точное аналитическое решение обратной задачи с подвижными границами имеет важное значение, в частности оно может быть использовано для оценок, для определения максимальных значений исследуемых функций.

Количественный расчет законов изменения $R(t)$, $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$, согласно выражениям (7.12)–(7.17), был проведен при $r_1 = 20 \cdot 10^{-3}$ м, $A_0 = 20$ атм = 1,96 МПа, $r_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м для таких сред:

1) воды с характеристиками $\rho = 1000$ кг/м³, $c = 1460$ м/с;

2) смеси I с характеристиками $\rho = 840 \text{ кг/м}^3$, $c = 800 \text{ м/с}$ (вода+воздух+ одревесневшие волокна);

3) смеси II с характеристиками $\rho = 840 \text{ кг/м}^3$, $c = 400 \text{ м/с}$; результаты представлены на рис. 7.5–7.7.

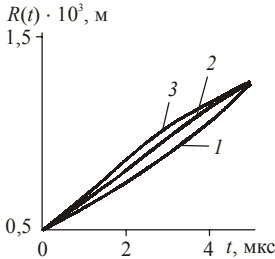


Рис. 7.5. Изменение во времени радиуса $R(t)$ подвижной границы плазменной полости, расширяющейся в воде (1), в смеси I (2), в смеси II (3)

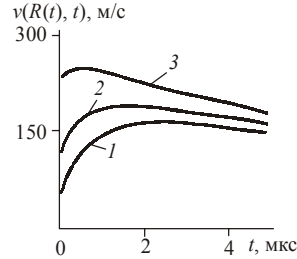


Рис. 7.6. Изменение во времени скорости $v(R(t), t)$ подвижной границы плазменной полости, расширяющейся в воде (1), в смеси I (2), в смеси II (3)

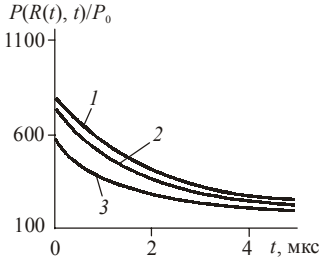


Рис. 7.7. Изменение во времени давления $P(R(t), t)$, отнесенное к начальному давлению P_0 , на подвижной границе плазменной полости в воде (1), в смеси I (2), в смеси II (3)

Видно, что для рассматриваемых смесей по сравнению с водой как радиус подвижной границы больше (для смеси II – на 9 % через 1 мкс после начала движения), так и ее скорость больше (в начале движения: для смеси I – в 2 раза, для смеси II – в 4 раза).

Давление на подвижной границе плазменной полости, расширяющейся в смеси, меньше, чем при расширении в воде.

Тот факт, что в некоторых случаях полученные значения скорости границы выходят за пределы применимости линейного волнового уравнения, был проанализирован в [26].

Таким образом, описанная методика [11] может быть использована для управления волновыми процессами, т.е. для получения определенной функции давления и скорости в заданной точке волновой зоны (включая ближнюю зону и подвижную границу) в различных многокомпонентных средах путем изменения их плотности и скорости звука в них с помощью изменения состава, варьирования концентраций отдельных компонентов смесей.

7.3. О границах применимости точных аналитических решений волнового уравнения в областях с подвижными проницаемыми границами в задачах импульсной гидродинамики и акустики

В предыдущих главах мы касались вопроса границ применимости волнового уравнения. Здесь этот вопрос будет рассмотрен более подробно.

Волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов [41]. Однако при этом необходимо учитывать, что границы применимости его решений в каждом конкретном случае, для каждого исследуемого физического процесса могут быть свои. В настоящей работе [26] исследуются волновые поля, индуцируемые подвижными проницаемыми границами; определяются границы применимости волнового уравнения и его решений при описании гидродинамики расширяющейся полости в сжимаемой жидкости. Отсутствие точных аналитических решений волнового уравнения для случая удовлетворения граничных условий на подвижных проницаемых границах не позволяло однозначно это сделать.

Область применимости акустического приближения изучалась во многих работах, например, [42–45]. В работе [43] показано, что акустический подход справедлив при давлениях, достигающих 350 кгс/см^2 , при этом максимальная погрешность в оценке скорости звука не превышает 5 %.

Исходя из условий на фронте плоской волны, показано, что, допуская 5%-ную погрешность, можно использовать для воды акустическое приближение при давлениях меньших 1100 кгс/см^2 [46]. В работе [42] проведен качественный расчет, из которого следует, что акустический подход при $P \leq 520 \text{ кгс/см}^2$ дает погрешность в значении давления, не превышающую 5 % (такую же погрешность дают уравнения нелинейной акустики при давлениях $P \leq 3000 \text{ кгс/см}^2$).

Результаты исследования применимости акустического подхода в случае отражения волны от абсолютно жесткой стенки представлены в работе [45]. Подобное различие в оценках акустического подхода стимулирует рассмотрение этого вопроса, что можно проделать на примере решения задачи о расширении полости, в том числе в описании ее волновым уравнением.

Задача о расширении поршня, полости, пузырька в сжимаемой среде – классическая задача математической физики, импульсной гидродинамики и акустики. Ее можно рассматривать как модельную задачу о взрыве взрывчатых веществ или газовых смесей, электрическом разряде [35], лазерном импульсе [47] и т. д. в жидкости. Для одномерных случаев движение жидкости описывается полной системой [25] уравнений движения, сплошности и состояния для изэнтропических процессов в форме Тэта (6.29), с соответствующими граничными и начальными условиями.

Для потенциальных движений из первого уравнения системы (6.29) можно получить интеграл Коши-Лагранжа:

$$\varphi_t + 0,5\varphi_r^2 + \int_{P_0}^P \frac{dP}{\rho} = F(t), \quad P - P_0|_{\rho \approx \rho_0} = -\rho_0\varphi_t - 0,5\rho_0\varphi_r^2, \quad (7.18)$$

где $F(t)$ может быть без ограничения общности принята равной нулю. В (7.18) потенциал скорости φ определяется из уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - a_0^2\varphi_{rr} - a_0^2r^{-1}(\nu-1)\varphi_r + [2\varphi_r\varphi_{rt} + (n-1)\varphi_r^2\varphi_t + (n-1)r^{-1}\varphi_r\varphi_r(\nu-1)] + \\ + \left\{ \varphi_r^2\varphi_{rr} + \varphi_{rr}\varphi_r^2 \left(\frac{n+1}{2} \right) + \frac{(n-1)(\nu-1)}{2r} \varphi_r^2\varphi_r \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Его удалось решить только для частного случая расширения с постоянной скоростью в безграничной среде цилиндра (методом малого параметра [48]) и сферы ([49], где в (7.19) удерживались кроме линейных еще квадратичные члены).

В [50] показано, что в подобных задачах, когда энергия сжатия жидкости мала по сравнению с кинетической энергией, линеаризация уравнения движения (интеграла Коши-Лагранжа) не оправдана, что, однако, не препятствует линеаризации волнового уравнения для потенциала скорости.

Величина $0,5\rho_0\varphi_r^2$ достигает больших значений [21] и соизмерима с компонентой $\rho_0\varphi_r$ в точках, где скорость частиц среды приближается или равна скорости подвижной поверхности. Неучет ее может привести к большим погрешностям.

Таким образом, при $\rho \approx \rho_0$, когда возмущения распространяются с постоянной скоростью α_0 , функцию φ в (7.18) определяем из линейного волнового уравнения.

Даже если уравнение, описывающее исследуемый процесс, линейное, наличие подвижных границ делает задачу существенно нелинейной, что рассмотрено в [51, 52] для уравнений параболического типа. Можно показать это для нашего случая с помощью формулы Тэйлора расширения сферы с постоянной скоростью в сжимаемой среде [53, 54].

В первом случае, когда граница перемещалась, задача нелинейна и метод суперпозиции не работает, во втором при $R = \text{const}$ задача линейна, сумма двух решений является решением.

Методологически важным, примыкающим к понятию нелинейности проблемы подвижных границ для волнового уравнения, является вопрос идентичности, равноценности эйлера и лагранжева описания одной и той же задачи расширения полости в сжимаемой среде. Линейное волновое уравнение в связанных (лагранжевых) координатах [$r = r - R(t)$] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \varphi_{rr} + \frac{v}{r} \varphi_r - \frac{1}{a^2} \varphi_{tt} = \\ & = \left\{ \frac{vR(t)}{r(r+R(t))} \varphi_r - \frac{1}{a^2} \varphi_{rt}(r_0, t) \varphi_r + \frac{1}{a^2} \varphi_r^2(r_0, t) \varphi_{rr} - \frac{2}{a^2} \varphi_r(r_0, t) \varphi_{rt} \right\}, \quad (7.20) \end{aligned}$$

при этом положение границы $r = R(t)$ будет зафиксировано.

Уравнение (7.20) является сугубо нелинейным, так как, особенно при решении обратных задач, когда закон движения поршня неизвестен и подлежит определению и может быть нелинейным, в правой части переход к лагранжевым координатам добавил сразу четыре нелинейных члена. Решить уравнение (7.20) аналитически в общем случае достаточно сложно.

Для иллюстрации рассмотрим случай плоской симметрии $v = 0$. Из (7.20) при $v_{\Pi} = U = \text{const}$, $\dot{v}_{\Pi} = 0$, $U/a = M$, $r = r - R(t)$, $r = r - Ut$, $\varphi_r|_{r=r_0} = v_{\Pi}$ получим уравнение:

$$(1 - M^2) \varphi_{rr} + 2 \frac{M}{a} \varphi_{rt} - \frac{1}{a^2} \varphi_{tt} = 0, \quad (7.21)$$

которое в точности соответствует уравнению (4.10) [55]. Линейный интеграл Коши-Лагранжа в связанных координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} & P - P_0 = -\rho[\varphi_t - v_{\Pi} \varphi_r] = \\ & = f\left(t - \frac{r - Ut - r_0}{a}\right) = f\left[\left(1 + M\right)t - \frac{r - r_0}{a}\right] \Big|_{r=r_1}. \quad (7.22) \end{aligned}$$

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к (7.21), с учетом нулевых начальных условий, получим операторное уравнение:

$$(1 - M^2) \bar{\varphi}_{rr} + 2 \frac{M}{a} s \bar{\varphi}_r - \frac{1}{a^2} s^2 \bar{\varphi} = 0,$$

где s – параметр преобразования, решением которого для случая движения границы в безграничной среде будет $\bar{\varphi}(r, s) = c(s) \exp\left[-Bs \frac{r}{a}\right]$, $B = 1/(1 + M)$,

откуда при условии (7.22) для точки r_1 определяем $c(s)$. Тогда решение волнового уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(r, s) &= \frac{1}{(1 + M) \rho s [1 + U B/a]} \times f\left(\frac{1}{1 + M} s\right) \exp\left[-s \frac{Br + (1 - B)r_1 - r_0}{a}\right], \\ \bar{\varphi}(r, s) &= \left[-s \frac{B}{a}\right] \bar{\varphi}(r, s), \quad \bar{\varphi}_{rr}(r, s) = \left[-s \frac{B}{a}\right]^2 \bar{\varphi}(r, s). \end{aligned}$$

Подставляя эти решения в уравнение, убеждаемся, что левая часть его обращается в нуль. Переходя к оригиналам, имеем

$$P = f \left[(1+M)t - \frac{Br + (1-B)r_1 - r_0}{a} \right],$$

$$v = -\varphi_r = \frac{1}{\rho a} f \left[(1+M)t - \frac{Br + (1-B)r_1 - r_0}{a} \right], \quad \frac{B}{(1+MB)} = 1. \quad (7.23)$$

Формулы (7.23) в лагранжевых координатах точно переходят в формулы (4.72)–(4.73) [21] эйлерова описания. Действительно, при $r = r_1$

$$\left[(1+M)t - \frac{(1-B)r_1 + Br - r_0}{a} \right] = \left[t + \frac{U}{a}t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right] = \left[t - \frac{r^* - r_0}{a} \right],$$

r^* – лагранжева координата.

Как видим, постановка волновых задач с учетом подвижности границ является корректной как в эйлеровом, так и лагранжевом описании, которые являются равноценными.

Рассмотрим решения волнового уравнения с подвижными и проницаемыми границами:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - 2a^2 r^{-1} \varphi_r = 0, \quad r \geq R(t), \quad (7.24)$$

$$\varphi_r(r, 0) = \varphi(r, 0), \quad R(0) = r_0, \quad (7.25)$$

$$\rho \varphi_t|_{r=r_1} = P = f \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right); \quad a, \rho = \text{const}, \quad (7.26)$$

$$-\varphi_r = v|_{r=R(t)} = F_1(t), \quad R(t) = F_2(t), \quad (7.27)$$

$$v(R(t), t) \neq dR(t)/dt - \text{условие проницаемости границы.} \quad (7.28)$$

Условия могут быть заданы на подвижной границе – этим определяется класс прямых задач, например (7.27). Если условия заданы только в фиксированной точке волновой зоны, то этим определяется класс обратных задач, например (7.26). При решении обратных задач необходимо реконструировать значения исследуемых функций в других точках, включая подвижные границы, при этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению. Это традиционное определение прямых и обратных задач. Наличие проницаемости подвижных границ может вносить коррективы в эти понятия, о чем будет сказано ниже.

Нелинейность проблемы подвижных границ явилась причиной того, что общего точного аналитического метода решения подобных задач не было. В известном методе [56] для решения прямых задач и случая движения непроницаемых границ используется разложение по "мгновенным" собственным функциям. Однако это приводит к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Предлагается новый подход к решению задач с подвижными границами, основанный на определении зависимости между значениями исследуемых

функций на подвижных границах и в других точках с учетом реальных величин запаздываний. В некоторых случаях он позволяет получить в явном виде формулы для исследуемых функций при движении цилиндрической поверхности [57], получить аналитическое решение обратных задач для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [58], исследовать волновые явления между двумя подвижными границами, движущимися по произвольным законам [53]. При этом учитывалось движение непроницаемых границ, т.е. полагалось $v(R(t), t) = dR(t)/dt$.

Представляют также большой интерес задачи, когда волновые процессы индуцируются движением проницаемой границы. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Они рассмотрены впервые автором, см. главу 6.

Полученные решения гл. 6 являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, при отсутствии проницаемости они переходят в полученные ранее [21, 53, 58] для непроницаемых подвижных границ и при $a \rightarrow \infty$ – в известные решения [58] для несжимаемой среды. Действительно, дифференцируя дважды уравнение (6.9) при $a \rightarrow \infty$ и $V_2 \rightarrow 0$, получим известную формулу $P - P_0 = \rho r^{-1} (2RR'^2 + RR'')$ для точки r_1 . Это позволяет решать задачи при различных вариантах задания дополнительных условий, при этом законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающейся с ней, могут быть произвольными и различными.

Постановка с условием (6.7), (7.28) обратной и прямой задач для волнового уравнения с учетом движения проницаемых границ возникает, в частности, в гидромеханике, сейсмоакустике при рассмотрении взрывного источника, например электрического разряда [35], лазерного импульса [47] и т. д. в жидкости, имеющей температуру, близкую к критической. Действие взрывного источника приводит к интенсивному "испарению" (превращению в пар, плазму и т. д.) с внутренней подвижной поверхности плазменной полости. В этом случае исследуемые волновые явления могут быть описаны математической моделью с подвижной проницаемой границей.

До настоящего времени было известно одно-единственное аналитическое решение Тэйлора уравнения (7.24) с подвижной границей, частного случая прямой задачи расширения сферы с постоянной скоростью в сжимаемой среде [49, 54]. На основе этого решения были сделаны выводы о том, что в акустическом приближении ударные волны отсутствуют. Особенно любопытно, как отмечает Дж. Тэйлор, то, что различие между точным решением (численным решением автомодельной задачи $U = \text{const}$) и решением в акустическом приближении имеет место в области переднего фронта волны, где избыточное давление и скорости чрезвычайно малы и где, поэтому можно было бы ожидать наибольшей применимости акустической теории.

Точные аналитические решения (6.8), (6.9) волнового уравнения (7.24) с условиями (7.25)–(7.27) на подвижной границе описывают ударные волны;

показывают наличие разрывов на переднем фронте волны при любых, сколь угодно малых скоростях расширения полости, что видно из формул [21, 58, 59]; решения описывают разгонный участок для задачи $v(R(t), t) = U = \text{const}$ [21, 58], чего не описывает автомодельное решение Тэйлора [54]; они пригодны для произвольных величин перемещений и законов изменения скорости поршня; они позволяют рассчитать влияние r_0 на гидродинамические характеристики [60]. Точные аналитические решения универсальны: пригодны для решения прямых и обратных задач, описывают волновые поля в ближней зоне, включая движущиеся поверхности.

Известно, что полная система (6.29) применима до давлений 30000 кгс/см^2 . Значение ϕ в интеграле Коши-Лагранжа из-за математических трудностей решения (7.19) определяется из линеаризованного уравнения (7.24). Сравнение результатов вычислений по формулам (1.5)–(1.7) работы [58], являющимися точными решениями волнового уравнения в областях с подвижными границами и решениями полной системы (6.29) методом характеристик [61, 62], показало, что с достаточной для практических целей точностью уравнение (6.29) и его решение применимо при скоростях расширения поршня до 200 м/с [21, рис. 25, 26]. При больших скоростях влияние членов второго и третьего порядков малости в уравнении (7.19) становится существенным. В этих случаях пренебрегать отброшенными членами уже невозможно, необходимо обращаться к решению полной системы (6.29) или уравнению (7.19).

Как видим, впервые однозначно определены границы применимости волнового уравнения. Это сделано в другой, нетрадиционной форме – в виде определения предельной величины скорости расширения полости ($\approx 200 \text{ м/с}$). Это сделано по следующей причине. Как уже упоминалось, точного предела применимости уравнения (7.24) до настоящего времени установлено не было: он колеблется по давлению от 350 до 1100 кгс/см^2 . Допустим, мы остановились на 350 кгс/см^2 . Возникают вопросы, где, в каких точках, на каком расстоянии от полости? Если взять расстояние $r_1 > 10 \text{ м}$, то, реконструируя давление на подвижной поверхности, получим давление $P(R(t), t) > 30000 \text{ кгс/см}^2$, т. е. выйдем за пределы применимости уравнения состояния в форме Тэта. С другой стороны, этому давлению $P(R(t), t) = 350 \text{ кгс/см}^2$ на поршне соответствует скорость расширения $\approx 60 \text{ м/с}$, что значительно ниже действительной границы $\approx 200 \text{ м/с}$. В этом состоит, по мнению автора, еще одна неоднозначность, неопределенность при назначении границ применимости по давлению. Такой неоднозначности не существует, если границы применимости определять по скорости расширения полости. При $v(R(t), t) = 200 \text{ м/с}$ ударная волна сразу отходит от поверхности поршня со скоростью $a_0 = 1460 \text{ м/с}$ – это и служит границей, а при несколько больших скоростях расширения – с несколько большей, чем a_0 и приходит в точку r_1 несколько ранее. Это хорошо видно по сдвигу кривых [21, рис. 15, 16] при сравнении результатов решений уравнения (7.24) и полной системы (6.29) методом характеристик. Определение границ применимости волнового уравнения имеет важное значение, так

как исключает возможные ошибки в научных исследованиях и гидродинамических расчетах импульсных процессов.

В некоторых случаях границы применимости полученных решений можно несколько расширить. Учитывая, что при несколько больших, чем 200 м/с скоростях расширения полости кривые исследуемых функций лишь несколько сдвигаются без искажения на некоторую величину, которую при некотором навыке можно учесть, решения уравнения (7.24) можно применять и при $v(R(t), t) > 200$ м/с. В работе [58] рассмотрен случай $v(R(t), t) = 350 \exp(-10^3 t)$ м/с.

В работе [60] показано влияние величины начального радиуса r_0 на исследуемые функции. Рассмотрены случаи расширения сферы по одному и тому же закону с двух существенно различных начальных радиусов $r_0 = 10^{-3}$ м и $r_0 = 50 \cdot 10^{-3}$ м, значения $P(R(t), t)$ в обоих случаях находятся в границах ≈ 3000 кгс/см², проведено сравнение с решением методом характеристик полной системы (6.29).

Оценка погрешности, а значит, и границ применимости, которая образуется при определении функции φ из уравнения (7.24), а не из (7.19), при расчете ударных волн на больших расстояниях от места взрыва требует использования для сравнения точного аналитического решения (7.19) или надежных экспериментальных данных. Точное аналитическое решение (7.19) еще не получено. Поэтому воспользуемся расчетами С.А. Христиановича [64], весьма близкими к экспериментальным данным Р. Коула [45]. В работе [65] представлено давление от взрыва одного килограмма тротила в точках $r_1 = 2,12$ м и $r_2 = 12,72$ м, вычисленных по формуле $P = P_m \exp(-\Delta t/\Theta)$, обозначения и величины взяты из табл. 1 работы [64]. По формулам (6.8), (6.9) и (1.5)–(1.7) [58] проведена реконструкция давления в точке r_1 исходным для восстановления взяты значения давления в точке r_2 . Точка r_1 выбрана таким образом, чтобы в ней влияние нелинейности среды для данного случая сказывалось слабо. Удовлетворительное согласование результатов расчетов по точным аналитическим решениям уравнения (7.24) и расчетов С.А. Христиановича и экспериментальных данных Р. Коула показывает, что точные решения уравнения (7.24) могут быть использованы в том же диапазоне расстояний от источника возмущений, что и расчеты С.А. Христиановича [64]. При этом необходимо следить, чтобы $v(R(t), t)$, вызванное импульсными процессами, не превышало границ применимости волнового уравнения.

Необходимо отметить следующее. Заключение работы [66, стр. 54] о том, что только в сферическом случае имеются правильные результаты для описания течения с учетом нелинейных эффектов, по-видимому, следует считать неточным. В работе [57] получены аналитические решения волнового уравнения цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами. Показано, что потенциал скорости φ , входящий в интеграл Коши-Лагранжа (7.18), можно определять из решений волнового уравнения (6.1) и в цилиндрическом случае симметрии.

Границы применимости точных аналитических решений волнового уравнения в областях с подвижными проницаемыми (излучающими) границами [59] также могут быть определены в рамках предельных скоростей движения границы и проницаемости. При этом, естественно, при любых произвольных законах изменения скоростей движения ППГ и проницаемости (излучения) необходимо, чтобы скорости частиц среды, соприкасающихся с ППГ, не превышали предела, определенного для непроницаемых подвижных границ (≈ 200 м/с). Тогда, возникающие возмущения будут распространяться со скоростями $a_0 = 1460$ м/с = const и волновые процессы можно описывать уравнением (7.24) и его точными решениями.

Величина $v(R(t), t) = 200$ м/с относится к воде, для других сжимаемых сред границы применимости определяются, как и выше, сравнением точных численных решений полной системы (6.29), с соответствующим среде уравнением состояния, с решениями волнового уравнения. Однако общим для всех сред будет то, что во всех случаях искомой границей будет та максимальная скорость частиц, соприкасающихся с ПГ и ППГ, которая индуцирует возмущения, распространяющиеся еще с постоянной скоростью a_0 . Зависимость скорости ударной волны от относительной скорости расширения поршня с учетом нелинейности среды показана для трех случаев симметрии в [21, рис. 6], при $M \approx v/a_0 < 0,2$ ударная волна распространяется с практически постоянной скоростью a_0 ; то же и для воздуха $M = 0,203$ отмечено Дж. Тэйлором [49, 54].

Полученные решения волнового уравнения в областях с ПГ и ППГ описывают не только случаи, когда скачки функций P и v возникают сразу с началом движения границы. Они описывают и случаи, когда волна возмущения не имеет скачка, в работе [67], например, получены решения, когда заданное давление в точке r_1 (обратная задача) имеет вид затухающей синусоиды:

$$P(r_1, t) = B \exp(-\alpha \xi_1) \sin \omega_1 \xi_1 \sigma_0(\xi_1), \quad \xi_1 = t - \frac{r_1 - r_0}{a}, \quad B, \alpha, \omega_1 - \text{const}.$$

Границы применимости подобных решений для случаев, когда нелинейные эффекты в среде, накапливаясь с расстоянием, изменяют форму волны и на ней образуется скачок [49, 68], так же могут быть указаны. Сравнивая точные решения: волнового уравнения с ПГ и уравнения (7.19) с нелинейными членами второго и третьего порядков малости, можно определить время t^* и расстояние r^* образования разрыва. Очевидно, что искомые границы применимости будут всегда несколько меньше указанных величин r^* и t^* , определенных по известным формулам, например, [49; 69, стр. 532].

В противоположном накоплению нелинейности в среде направлении работает поглощение. Влияние диссипативных процессов вязкости и теплопроводности на распространение волн рассмотрено, например, в [21, гл. 3, § 3], где решено волновое уравнение (3.33) с членами, учитывающими вязкость и теплопроводность. Показано, что экспоненциальный профиль волны, распространяющийся в воде от расширяющейся сферы, имеющий в точке $r_1 = 1$ м скачок $A = 8$ кгс/см², изменяется незначительно из-за вязкости и теплопро-

водности к точке $r_2 = 1500$ м на величину $\Delta P/P_0 \approx 2,63 \cdot 10^{-10}$. Кроме того, известно [99], что амплитуда волны уменьшается, в частности, за счет вязкости на 1,5 % при движении в глубоководной области океана в течение 2 ч. Для других сред, где влияние диссипативных процессов более существенно, границы применимости могут быть определены, например, сравнением точных численных решений уравнений типа Навье-Стокса и волнового уравнения с соответствующими членами, учитывающими диссипацию.

Как показано [21, 26] границы применимости волнового уравнения и его точных решений определены впервые и однозначно не по давлению, а по скорости движения границы полости v . Границей будет та скорость расширения, которая приводит еще к распространению возмущений с постоянной скоростью a . Для воды это $M = v/a \leq 0,2$, для воздуха (Тейлор) $M = 0,203$. Для случая многокомпонентных сред, скорость распространения возмущений v_m , как показано в п.п. 7.1, определяется по известным формулам [17, 23, 24], при этом для многокомпонентных сред $M = v_m/a \leq 0,2$.

7.4. Об одной обратной задаче для волнового уравнения в областях с подвижными границами и об итерационном методе определения функций управления

Волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов, необходимость управлять которыми возникает, как правило, одновременно с изучением этих явлений. Управление, как известно, есть в общем случае функция организованных систем различной природы (биологических, физических, технических, социальных и т. д.), обеспечивающих сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. Задачей управления является определение функции управления. В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: первое – функция скорости (движения и проницаемости подвижной границы (ППГ)) или второе – функция давления (на подвижной границе (ПГ)).

Определение функций управления 1 и 2 случаев имеет большое научное и прикладное значение. Оно позволяет, например, в приложениях, используя уравнение баланса энергии [47, 70], определить закон ввода мощности в расширяющийся плазменный поршень электрического разряда или лазерного импульса в жидкости для получения заранее заданной формы функции давления или скорости в сжимаемой среде.

Ранее [1, 2] получены точные аналитические решения волновых задач с подвижными границами. В работе [71] предложен и разработан способ преодоления известных для цилиндрического случая симметрии логарифмических особенностей при количественном определении значений функций управления. Однако, зачастую необходимо знать функции управления не бесконечного расширяющегося цилиндра, а цилиндра конечной длины. Подобные

задачи в математической физике не рассматривались. В работе делается попытка определения количественных значений функций управления волновыми процессами, индуцируемых цилиндрическим плазменным поршнем конечной длины.

Волновые процессы в областях с ПГ цилиндрической симметрии относятся к наиболее сложным для изучения [72]. Однако еще более трудным для исследования будет расширение цилиндрического плазменного поршня конечной длины. Это сложнейшая многомерная волновая задача с подвижными границами. Расширение сопровождается волновыми явлениями существенно отличными от явлений, индуцированных математической моделью бесконечного цилиндра Съёмки на СФР показывают, что с течением времени расширяющийся плазменный поршень превращается в полость, имеющую "гантелеобразную" форму [47, 70]. Естественно, подобные явления трудны для математического описания и в настоящее время известны численные решения только прямых подобных задач, например, методом Годунова С.К. [73–75], обратные задачи расширения цилиндра конечной длины в математической физике не рассматривались.

Рассмотрим физические явления начальной стадии за период $t = 0 \div 15$ мкс расширения плазменной полости, что приближенно соответствует времени ввода энергии, "история" которого с некоторым запаздыванием $t^0 = (r_1 - r_0)/a$ формирует вид функции давления $P(r_1, t)$ в точке r_1 . За это время, если даже $v^*(R(t), t) = 200$ м/с = const [26] размер достигает $R(t) = r_0 + v^* \cdot t = 3,1 \cdot 10^{-3}$ м. Начальный радиус $r_0 = 0,1$ мм. То есть практически находится между толщиной электродов (~8 мм), например, при электрическом разряде в жидкости, (либо стенкой и электродом).

Поэтому при вычислении объема V в уравнении баланса энергии (7.40) плазменного поршня, по методу Годунова С.К. [73–75] можно в рассматриваемый промежуток времени $t = 0 \div 15$ мкс в первом приближении использовать только радиальную скорость, дающую наибольший вклад в формирование функции воздействия $P(r_1, t)$.

Кроме того, физически понятно, что функции управления при расширении бесконечного и цилиндра конечной длины l будут идентичными в определенном промежутке времени $\Delta t = c/a - t^0$; $c = [(0,5l)^2 + (r_1 - r_0)^2]^{1/2}$. В это время в точке r_1 расширение частей бесконечного цилиндра больших l "не слышны".

Изложенное позволяет: выбрать тот промежуток времени, когда функции управления бесконечного и конечной длины цилиндров идентичны; при подборе аппроксимирующих функций управления учесть, что, если эти функции (постоянные входящие в эти функции) определять в этот период совпадения (или близкий к нему), то естественно, по этим функциям можно определять и количественные значения функций управления в период времени несколько выходящий за время совпадения. Поскольку исходная для реконструкции заданная форма функции $P(r_1, t)$ (и используемая для определения упомянутых постоянных) несет информацию о том, что она индуцирована расширением

цилиндрической плазменной полости конечной длины, в течении всего исследуемого времени.

Рассмотрим задачу:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - a^2 r^{-1} \varphi_r = 0, \quad (7.29)$$

$$\varphi_t(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0, \quad R(0) = r_0, \quad (7.30)$$

$$\rho \varphi_t \Big|_{r=r_1} = P = f(r_1, t), \quad (7.31)$$

$$-\varphi_r = v \Big|_{r=R(t)}, \quad (7.32)$$

$$v(R(t), t) \neq dR(t)/dt, \quad (7.33)$$

где t – время, $R(t)$, r_0 , r , r_1 – координаты подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; a , ρ – постоянные.

Условия (7.31) определяют класс обратных задач, а (7.32) – прямых. Условия проницаемости ПГ – (7.33). Для решения воспользуемся методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 2, 71]. Значения функций управления 1 и 2 $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$ таковы:

$$\left| \int_0^t P(r, t - \tau) X(r_1) d\tau = \int_0^t f(r, \xi - \tau) X(r) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (7.34)$$

$$\left| \rho \int_0^t v(r, t - \tau) X(r_1) d\tau = \int_0^t \frac{1}{r} f(r, \xi - \tau) X(r) \left(\tau + \frac{r}{a} \right) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (7.35)$$

$$\left| \frac{\rho}{2} \int_0^t [r^2(t - \tau) - r_0^2] X(r_1) d\tau = \int_0^t f^*(r, \xi - \tau) X(r) \left(\tau + \frac{r}{a} \right) d\tau \right|_{r=R(t)}, \quad (7.36)$$

$$X(r) = \left(\tau^2 + 2 \frac{r}{a} t \right)^{-1/2}, \quad X(r_1) = \left(\tau^2 + 2 \frac{r_1}{a} t \right)^{-1/2},$$

$$\xi = t - \frac{r - r_0}{a}, \quad f^* = \int_0^t f(r, \xi) dt.$$

Если функции в (7.34)–(7.36) аппроксимировать полиномами Лагранжа степени m , то интегралы становятся табличными. Следует отметить, что устойчивость обратной задачи есть непосредственное следствие теоремы единственности [76]. Подобные теоремы доказаны, например, в [77]. Из (7.36) и (7.38), а также подобных им соотношений видно, что малым изменениям исследуемых функций, соответствуют малые изменения радиуса подвижной границы.

Представим вид изображения $P(r_1, t) = A \cdot ((t + \beta)^2 - (r_1/a)^2)^{-1/2}$ в классе функций Бесселя [10], тогда функции управления 1 и 2 будут иметь вид:

$$P(R(t), t) = \frac{A}{\omega} - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad v(R(t), t) = \frac{A(t + \beta)}{R(t) \rho \omega}, \quad (7.37)$$

$$R(t) = \left\{ r_0^2 + \frac{2A}{\rho} [\omega - \omega_1] + \frac{2A^2}{\rho^2 a^2} \left[\ln \left| \omega - \frac{A}{\rho a^2} \right| - \ln \left| \omega_1 - \frac{A}{a^2 \rho} \right| \right] \right\}^{1/2}. \quad (7.38)$$

$$\omega = \sqrt{(t + \beta)^2 - \frac{R^2(t)}{a^2}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}, \quad \beta = \alpha + \frac{r_0}{a}, \quad A, a, \rho, r_0, \alpha = \text{const}. \quad (7.39)$$

$$\text{При: } t \rightarrow 0 \quad P(R(t), t) = A[\zeta^2 - (r_0/a)^2]^{-1/2} - 0,5 \rho v^2(R(t), t), \quad (7.40)$$

$$t \rightarrow 0 \quad v(R(t), t) = A \zeta / r_0 \rho [\zeta^2 - (r_0/a)^2]^{-1/2}, \quad \zeta = \alpha + r_0/a \quad (7.41)$$

$$\text{при } a \rightarrow \infty \quad R(t) = (r_0 + 2At \rho^{-1})^{1/2}. \quad (7.42)$$

Формулы (7.37)–(7.42) при α и $r_0 \rightarrow 0$ переходят в полученные ранее (8)–(10) [2].

При определении функций управления 1 и 2 по (7.34), (7.35) необходимо знание закона изменения радиуса ПГ. Вычисления $R(t)$ по (7.36) связано с трудностями: в аргументы функции справа входит искомая функция $R(t)$.

Решение проводим методом последовательных приближений. Следует отметить, что в работе [78] рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений и без учета подвижных границ.

Определяем точку r_2 . Выбор точки r_2 ясен из физического смысла. Это ближайшая точка, которой не коснется ПГ за рассматриваемый период времени. Поскольку $v(R(t), t)$ неизвестно, то r_2 определяем с "запасом" в безопасную сторону: а) при $v(R(t), t) = \text{const} = 200$ м/с [26]; либо, б) по формулам (7.37)–(7.42), скачок давления $P(r_1, t)$ для обратной задачи известен. Величины r_0 и l необходимо выбрать. Следует учесть, что заданный закон изменения $P(r_1, t)$ можно обеспечить с различного начального радиуса r_0 и различной величиной l расширяющегося цилиндра конечной длины, но при этом закон движения границы будет существенно различным.

Производим расчет первого приближения по формуле (7.35), справа приближенно принимая $r = R(t) \approx r_2$; определяем коэффициенты C_m полинома

$$\text{Лагранжа } v(R(t), t) = \sum_0^\infty C_m t^m, \text{ первого приближения, а значит } R^1(t) \text{ первого}$$

приближения. Второе приближение проводим как в [71]. Описанный процесс обладает хорошей сходимостью и уже в первом приближении можно получить

приемлемые для оценок результаты. Решения (7.34)–(7.36), (7.37)–(7.42) являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, они пригодны для обратных и прямых задач. Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с ПГ и ППГ определены в [26], учет влияния проницаемости подвижных границ на волновые процессы произведен в [2].

На рис. 7.8 и рис. 7.9 приведены результаты расчета методом Годунова С.К. двумерной задачи течения жидкости при электрическом разряде без каких-либо ограничений, связанных с одномерностью и нелинейностью течения, хорошо согласующиеся с результатами эксперимента [73–75]. В области, ограниченной ударной волной и контактным разрывом, решалась численно система гидродинамических уравнений, которая в соответствии с рекомендациями [74] взята в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho r) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u r) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w u) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u^2 + P) &= \frac{-\rho u^2}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 + P) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w u) &= \frac{-\rho u w}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(E r) + \frac{\partial}{\partial z}((E + P) w r) + \frac{\partial}{\partial r}((E + P) r u) &= 0,\end{aligned}\tag{7.43}$$

t – время, z , r – цилиндрические координаты; ρ – плотность P – давление, u , w – компоненты скорости соответственно по осям r , z ; $E = \varepsilon + 0,5\rho(u^2 + w^2)$; ε – удельная внутренняя энергия, рассчитанная на единицу объема; $\varepsilon = [P - c_0^2(\rho - \rho_0)]/(\chi - 1)\rho$, $\chi = 7,15$, ρ_0 , c_0 – плотность и скорость звука покоящийся жидкости. На ударной волне требовалось выполнение соотношений Гюгонио-Ренкина, а на контактном разрыве (границе канала разряда) – связь между объемом канала, давлением и мощностью, вводимой в канал, предложенная Наугольных К.А. [47, 70]:

$$\frac{d}{dt}(P V_\kappa) \frac{1}{\gamma - 1} + P \frac{dV_\kappa}{dt} = N(t), \quad \gamma = 1,26, \tag{7.44}$$

здесь $N(t)$ – известная величина. Обозначения в (7.43), (7.44) как в [73–75].

На рис. 7.8 и 7.9 результаты расчетов, проведенных авторами [75] методом Годунова С.К. расширения цилиндра $l = 200$ мм, $v(R(t), t)$, $P(r_1 = 0,2 \text{ м}, t)$. Кривая I взята для реконструкции и аппроксимирована следующим образом:

$$P(r_1, t) = D(t - t^0)\sigma_0(t - t^0) - D(t - t^0)\sigma_0(t - \alpha_2) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t - \alpha_2)^m, \tag{7.45}$$

где $m = 0-3$, $A_0 = 163$, $A_1 = -5,60(6) \cdot 10^6$, $A_2 = 0,201(9) \cdot 10^{12}$, $A_3 = -0,0161(3) \times 10^{18}$, $\alpha_2 = t^0 + 4 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 140,85 \text{ мкс}$; σ_0 – единичная разрывная функция нулевого порядка; $\alpha_1 = t^0 = 136,85 \text{ мкс}$; $D = 163/4 \cdot 10^{-6} = 40,75 \cdot 10^6 \text{ кгс/см}^2 \cdot \text{с}$; $P_{\max}(r_1, t = t^0 + 4 \text{ мкс}) = 163$.

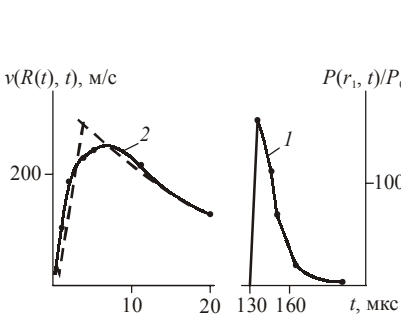


Рис. 7.8. Восстановление функции управления $v(R(t), t)$ – 2 по заданному давлению в точке $r_1 - I$, индуцированному цилиндрическим плазменным поршнем конечной длины. Первое приближение обозначено штриховыми линиями. Сплошные линии – расчет методом Годунова С.К. системы (7.43), (7.44), прямая задача

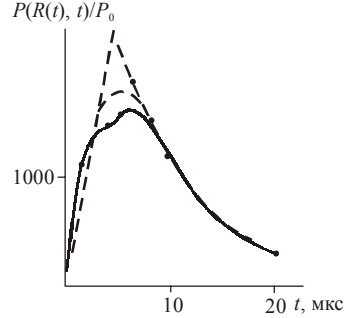


Рис. 7.9. Реконструкция функции управления $P(R(t), t)$ – штриховая линия. Исходная для реконструкции функция воздействия – кривая 1 рис. 7.8. Сплошная линия – расчет методом Годунова С.К. системы (7.43), (7.44), прямая задача

Коэффициенты Лагранжа A_m несут информацию о том, что волновые процессы индуцированы расширением цилиндра конечной длины.

Из (7.35) при $r = R(t) \approx r_2$, $a = 1460 \text{ м/с}$, $\rho = 102 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$, $r_0 = 0,2 \text{ мм}$, $r_1 = 0,2 \text{ м}$, первой части (7.45) и $v(R(t), t) = \sum_{m=0}^4 C_m \cdot t^m$ для значений $t = 0,5; 1; 2; 3; 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \rho \{ C_0 [Z_0] + C_1 [tZ_0 - Z_1] + C_2 [t^2 Z_0 - 2tZ_1 + Z_2] \} + \\ & + C_3 [t^3 Z_0 - 3t^2 Z_1 + 3tZ_2 - Z_3] + C_4 [t^4 Z_0 - 4t^3 Z_1 + 6t^2 Z_2 - 4tZ_3 + Z_4] = \quad (7.46) \\ & = D \frac{1}{r} \left\{ \left(\xi - \frac{r}{a} \right) N_1 - N_2 + \left(\xi \frac{r}{a} \right) N_0 \right\}, \quad \xi = t - \frac{r_2 - r_0}{a}, \end{aligned}$$

где $Z_m = \int_0^t \frac{\tau^m d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r_1}{a} \tau}}$; $N_m = \int_0^t \frac{\tau^m d\tau}{\sqrt{\tau^2 + 2 \frac{r_2}{a} \tau}}$ – интегралы табличные, здесь

принято с "запасом" $r_2 = 0,73 \text{ мм}$. Поскольку $r_2 = 0,5(R_{\min} + R_{\max}) = 0,705 \text{ мм}$,

где $R_{\min} = 0,41$ мм по формуле (7.42) при $A = 163 \cdot 10^{-6}$ кгс · с/см² – скачок $P(r_1, t = 4 \cdot 10^{-6}$ с); $R_{\max} = r_0 + v^* \cdot t = 1,0$ мм, $v^* = 200$ м/с = const [26], решая которую получим $C_0 = 44,966053$; $C_1 = -1,58226 \cdot 10^8$; $C_2 = 1,867363 \cdot 10^{14}$; $C_3 = -5,8156 \cdot 10^{19}$; $C_4 = 6,454306 \cdot 10^{24}$. На рис. 7.8 это возрастающая часть штриховой линии.

Период $t > 4$ мкс: аппроксимируем функцию управления следующим образом $v(R(t), t) = A \exp(-\alpha_1 t)$, A, α_1 – const, которые необходимо определить. Величина $A = v(R(t), t = 0) = 357,35$ м/с определена по формулам (7.37)–(7.42) при $r_1 = 0,2$ м, $r_0 = 0,2$ мм, $t^0 = 136,849315$ мкс, $\alpha = 0,003649699 \cdot 10^{-6}$ – по формуле на стр. 14 [71]. С учетом этой аппроксимации и разложения $\exp(\alpha_1 \tau) = 1 + \alpha_1 \tau + \dots$ соотношение (7.35) примет вид (15) из [71].

Для корректного определения α_1 из (15) [71] необходимо выбрать r_2 и t с учетом времени совпадения функций управления для цилиндров конечной и бесконечной длины. Поэтому t не должно значительно превышать этот период (совпадения). Для расчета принимаем $t = 6,5$ мкс (немного более чем для первого периода 4 мкс). Точка которой не коснется ПГ $R_{\max}(t) = r_0 + v^* t = 0,2 \cdot 10^{-3} + 200 \cdot 6,5 \cdot 10^{-6} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м, принимаем $r_2 = 1,3$ мм, поскольку не весь этот период скорость $v^* = 200$ м/с. Для этих значений r_2 и t из (15) [71] получаем трансцендентное уравнение:

$$\exp(-\alpha_1 \cdot 6,5) \{1,11847049 + \alpha_1 2,4157629\} = 0,840076478,$$

решаемое известными методами. В первом приближении получаем $\alpha_1 = 0,0523 \cdot 10^6$. Для периода $t > 4 \cdot 10^{-6}$ с функция управления будет $v(R(t), t) = 357,35 \exp(-0,0523 \cdot 10^6 t) \sigma_0(t - 4 \cdot 10^{-6})$ м/с – штриховая линия на рис. 7.8. Сопряжение этих линий может быть произведено по некоторому радиусу.

Функция управления P для $t > 4$ мкс определяется следующим образом. С учетом аппроксимации компоненты $P(R(t), t) = B \exp(-\beta t)$, второй части (7.45) и значений A_m , для $t = 0,1$ мкс, $r_2 \approx r_0 = 0,2$ мм, $B = 5120,5$ определено из (7.37)–(7.42) для $t = 0$, из (7.34) приходим к трансцендентному соотношению относительно β :

$$5120,5 \exp(-\beta \cdot 0,1) \{0,03809585 + \beta \cdot 0,00121\} = 186,161062,$$

которое решается известными методами. Откуда в первом приближении $\beta = 0,12643 \cdot 10^6$. Тогда функция управления примет вид:

$P(R(t), t) = 5120,5 \exp(-0,12643 \cdot 10^6 t) \sigma_0(t - 4 \cdot 10^{-6}) - 0,5 \rho v^2(R(t), t)$, – штриховая линия на рис. 7.9, где $v(R(t), t)$ – кривая 2 рис. 7.8. Аналогично определена и восходящая ветвь P .

Анализ результатов показывает, что корректно управлять волновыми процессами, в том числе индуцированными расширяющимся цилиндром конечной длины, возможно при достижении определенного уровня знания процесса, в данном случае знаний точных аналитических зависимостей функций управления 1 и 2 случаев. Без этого точного знания функций управления само управление превращается в серию попыток ощупью, с помощью проб и ошибок, чаще всего случайно определить желаемое (требуемое). Чаще всего это

приводит к потерям времени и средств. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [52] применить для обратных задач затруднительно.

7.5. Об одном возможном способе корректного определения функций управления волновыми процессами в областях с подвижными проницаемыми границами

1. Волновой процесс – это одна из важнейших форм движения материи; в той или иной мере волновые движения присущи всем без исключения объектам материального мира. Волновые процессы как линейные так и нелинейные интенсивно изучаются в различных областях физики: электродинамике, физике плазмы, оптике, гидродинамике, акустике и т. д. Необходимо отметить, что волновые процессы могут происходить только в областях с подвижными границами, абсолютно неподвижных (твердых) границ нет (М.А. Исакович). Волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов, необходимость управлять которыми возникает, как правило, одновременно с изучением этих явлений. Как известно, управление есть в общем случае функция организованных систем различной природы (биологических, физических, технических, социальных и т. д.), обеспечивающая сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. Задачей управления является определение функции управления. Рассмотрим задачу:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - (v-1)\varphi_r a^2 r^{-1} = 0, \quad r \geq R(t), \quad (7.47)$$

$$\varphi_t(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0, \quad R(0) = r_0, \quad (7.48)$$

$$P - P_0 \Big|_{r=R(t)} = -\rho \varphi_t - 0,5\rho \varphi_r^2, \quad (7.49)$$

здесь φ – потенциал скорости; v – показатель симметрии; t – время; $R(t)$, r_0 , r , r_1 – координаты подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; P_0 , ρ , a – давление, плотность, скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости; v – скорость. В теории волн уравнение (7.47) имеет фундаментальное значение (О.В. Руденко).

В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: 1 – функция скорости (движения и проницаемости подвижных границ) или 2 – функция давления (на подвижной границе). Учет движения границ является сложнейшей проблемой уравнений математической физики.

Существенная нелинейность проблемы подвижных границ, для уравнений параболического типа известная как проблема Стефана, показана в работах Г.А. Гринберга [52]. Для нашего случая это рассмотрено в [26]. Методологически важным, примыкающим к понятию существенной нелинейности проблемы ПГ для волнового уравнения, является вопрос идентичности, равноценности эйлерова и лагранжева описания одной и той же задачи. Показа-

но [26], что постановка волновых задач с учетом ПГ является корректной как в эйлеровом, так и лагранжевом описании, которые являются равноценными. Методов точного аналитического решения подобных задач не было [52]. В известном методе [52] для решения прямых задач и случая движения непроницаемых границ используется разложение по "мгновенным" собственным функциям. Однако это приводит к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Известны аналитические соотношения (74.6), (74.8) и т. д. [69], которые не учитывают влияния r_0 , применить их к обратным задачам затруднительно.

Ранее [1, 58, 97] получены точные аналитические решения волновых задач с ПГ. В работе [58] получены решения обратных волновых задач для случаев задания нелинейных дополнительных условий [1, 50, 58] в точке волновой зоны. Однако зачастую необходимо знать функции управления для случая задания нелинейных условий на подвижной границе, при этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению и может быть нелинейным.

Волновые задачи с ПГ (одна нелинейность) и нелинейными условиями (вторая нелинейность) – дважды нелинейные задачи, прикладная важность их настолько велика, что они становятся в ряд актуальнейших проблем математической и теоретической физики. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Кроме того, найденные аналитические соотношения многозначны, о чем неоднократно упоминалось, например, в [81], где говорилось, что заданный закон изменения функции воздействия можно обеспечить с различного (бесконечного множества) начального радиуса r_0 , но при этом законы движения границы будут существенно различными. Также различными будут гидродинамические поля, кроме значений в одной точке r_1 . Это причина отсутствия численных решений обратных волновых задач с ПГ и ППГ.

Известно, что некорректными считаются задачи, для которых не удовлетворяется хотя бы одно из условий: а) решение задачи существует, б) решение определяется однозначно, в) задача устойчива (А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев). Как видим, точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач получены [1, 26] (условие 1); решения устойчивы [1, с. 18] (условие 3); второе условие не выполнено – решения неоднозначны [81].

В работе предпринята попытка

- определения функций управления по заданному нелинейному условию на подвижной границе (при этом закон движения ПГ неизвестен, подлежит определению и может быть нелинейным);
- а также преодоление некорректности при определении функций управления. Однозначное определение функций управления волновыми процессами в областях с ПГ и ППГ имеет большое научное и прикладное, принципиальное значение, без решения вопросов корректности обратных, прямых дважды нелинейных волновых задач решение проблемы подвижных границ для волнового уравнения не может считаться полным и окончательно завершенным.

2. Определять функции управления волновыми процессами будем методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1]. Для определенности рассмотрим случай сферической симметрии $\nu = 3$ [82]. В соответствии с этими методами получим решение уравнения (7.47), которое удовлетворяет начальным условиям (7.48) и условию $P - P_0|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t = -f[t - (r_1 - r_0)/a]$ – обратная задача; функции управления при этом имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} f(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t),$$

$$v(R(t), t) \frac{R^2(t) \rho}{r_1} = \frac{R(t)}{a} f(\xi) + \left[\int_0^t f(\xi) dt \right]_{r=R(t)}, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad (7.50)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \left[\int_0^t f(\xi) dt + \int_0^t \int_0^t f(\xi) dt dt \right]_{r=R(t)}. \quad (7.51)$$

Функция f в (7.50), (7.51) для обратных задач известна, она может быть аппроксимирована разными способами. "Кубическое" уравнение (7.51), а также подобные ему решаются, например, как в [58]. Следует отметить, что устойчивость обратных задач есть непосредственное следствие теоремы единственности [76]. Подобные теоремы доказаны, например, в [77]. Из (7.51) и подобных ему соотношений видно, что малым изменениям исследуемых функций соответствуют малые изменения радиусов подвижной границы.

Для общего случая произвольных законов движения границ и видов функции f последнюю можно аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m . Число m характеризует количество точных значений функции и может быть сколь угодно большим:

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^m, \quad A_m = \text{const}. \quad (7.52)$$

В этом случае, учитывая (7.50)–(7.52) функции управления имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad (7.53)$$

$$v(R(t), t) \rho R^2(t) / r_1 = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \quad (7.54)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} \xi^{m+2}. \quad (7.55)$$

Для ступенчатой функции в точке r_1 функции управления 1 и 2 имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} A_0 \sigma_0(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t);$$

$$v(R(t), t) = \frac{r_1}{R^2(t) \rho} \left[\frac{R(t)}{a} A_0 + A_0 \xi \right], \quad (7.56)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} A_0 \xi + \frac{A_0}{2} \xi^2, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad \sigma_0(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t > \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}. \quad (7.57)$$

Это точное аналитическое решение обратной задачи с ПГ имеет важное значение.

С учетом (7.53), (7.54) и (7.49) запишем:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m -$$

$$- \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{r_1}{R^2(t) \rho} \left[\frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right] \right\}^2. \quad (7.58)$$

Здесь $P(R(t), t)$ известно по условию. Это соотношение пригодно для любых точек $R(t) = r = r_1$. Соотношения для определения A_m в общем случае произвольных величин начального радиуса, законов движения границ и вида $P(R(t), t)$ имеют вид:

$$A_m = N \pm (N^2 - M)^{1/2}; \quad N = -\frac{1}{2} \frac{2C_1 C_2^2 C_3 C_4 - \frac{r_1}{R(t)} \xi^m}{C_1 C_2^2 C_4^2}; \quad M = \frac{C_1 C_2^2 C_3 - C_0}{C_1 C_2^2 C_4}, \quad (7.59)$$

где $C_0 = -P(R(t), t) + \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{m-1} A_m \xi^m$; $C_1 = \frac{1}{2} \rho$; $C_2 = \frac{r_1}{R^2(t) \rho}$;

$$C_3 = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{n=0}^{m-1} A_n \xi^n + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A_n}{n-1} \xi^{n-1}; \quad C_4 = \frac{r_1}{R(t)} \xi^m + \frac{1}{m+1} \xi^{m+1},$$

при $R(t) = r_1$ (7.58), (7.59) переходят в полученные ранее (2.4), (2.7) [58]. Решение проводим методом последовательных приближений. Следует отметить, что в работе [78] рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений, без учета ПГ и нелинейных условий на подвижных границах. Последовательность расчета следующая: 1) определяем точку r_1 . Выбор r_1 ясен из физического смысла. Это ближайшая точка, которой не коснется ПГ за рассматриваемый период времени. Поскольку $v(R(t), t)$ неизвестно, ее требуется определить в процессе решения, то r_1

ориентировочно определяем с "запасом" в безопасную сторону при $v(R(t), t) = \text{const} = 200 \text{ м/с}$ [26]. Величину r_0 необходимо выбрать. Следует учесть, что заданный закон изменения $P(R(t), t)$ можно обеспечить с различного начального радиуса r_0 но при этом закон движения границы будет существенно различным. 2) Производим расчет первого приближения, ориентировочно принимая закон изменения давления на ПГ равным в точке r_1 . По формулам (7.58), (7.59) с учетом $P(r_1, t) \approx P(R(t), t)$ определяем коэффициенты полинома Лагранжа A_m^I и значения функции $R(t)$ первого приближения.

Второе приближение: из соотношения (7.55) по известным A_m^I определяем уточненное значение $R(t)$ и по (7.59) методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа получим уточненные значения второго приближения. Описанный процесс обладает хорошей сходимостью и, как правило, с приемлемой для практических целей точностью достаточно сделать одно приближение. По известным A_m функции управления 1 и 2 для этого случая имеют вид (7.53)–(7.55). Решения (7.50)–(7.59) являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, они пригодны для обратных и прямых задач; при $a \rightarrow \infty$ переходят в известные решения для несжимаемой среды [26].

Разработанный подход решения дважды нелинейных задач имеет важное теоретическое и прикладное значения. Может служить основой решения других задач с ПГ и ППГ математической физики и теоретической физики. В приложениях, знание функций управления 1 и 2, например, позволяет, используя уравнения баланса энергии, определять закон ввода мощности в расширяющийся плазменный поршень электрического разряда, лазерного импульса [47, 83–85] и т. д. в сжимаемой среде для получения заранее заданных функций воздействия P, v в точке r_1 . Изложенное повышает роль и значение, показывает важность полученных точных решений волнового уравнения в областях с ПГ и ППГ, так как зачастую именно к нему приводят наиболее простые модельные задачи. Подобные задачи возникают, например, при исследовании плазмы канала, химических технологиях, при обработке поверхностей материалов и т.д. более подробный перечень в [86]; количество технологий (теоретически) в пределе может приближаться к количеству (огромному, неисчислимому) физических явлений, описываемых уравнением (7.47). Будут и другие технологии на основе волновых процессов, но всегда будут востребованы точные аналитические решения (7.50)–(7.59) волнового уравнения в областях с подвижными границами и функции управления.

Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с ПГ и ППГ определены в [26].

Пример 1. Пусть необходимо обеспечить давление на подвижной границе как показано на рис. 7.10 кривая 2 при $a = 1500 \text{ м/с}$; $\rho = 102 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^{-4}$; $r_0 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

а) При $P(r_1, t) \approx P(R(t), t)$ по формулам (7.58), (7.59) определяем значения коэффициентов Лагранжа:

$$A_0^1 = 2727,86; A_1^1 = -84,70 \cdot 10^6; A_2^1 = -1,80 \cdot 10^{12}; A_3^1 = 0,1167 \cdot 10^{18}. \quad (7.60)$$

и по формуле (7.55) определяем $R(t)$ первого приближения, уже при этом для преодоления некорректности требуется однозначное значение r_0 .

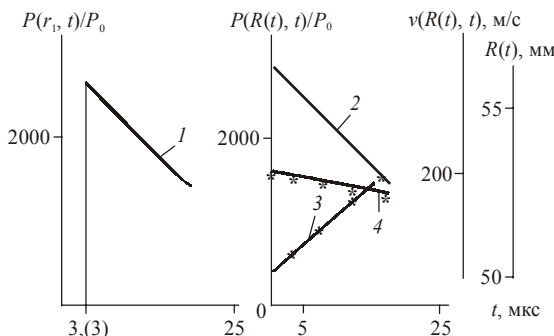


Рис. 7.10. Реконструкция функций управления:

а) кривые (2) и (4) сплошные линии по заданному нелинейному условию в точке r_1

$$P(r_1, t) = -\rho(\varphi_t + 0,5\varphi_r^2) \Big|_{r=r_1} - \text{кривая 1};$$

б) по заданному нелинейному условию на подвижной границе

$$P(R(t), t) = -\rho(\varphi_t + 0,5\varphi_r^2) \Big|_{r=R(t)} - \text{кривая 2, обозначено *** первое приближение}$$

Преодоление некорректности (многозначности), связанной с величиной r_0 для случая заданного нелинейного условия (7.49) $P - P_0 \Big|_{r=R(t)} = -\rho\varphi_t - 0,5\rho\varphi_r^2$.

Пусть необходимо на ПГ обеспечить функцию управления $P(R(t), t)$ в виде кривой 2 рис. 7.10. Воспользуемся физически очевидным фактом: функция $P(R(t), t)$ несет информацию о том, с какого начального радиуса начиналось движение, с какой скоростью расширялся поршень, и что на ПГ при $t \rightarrow 0$ и одинаковом r_0 значение $P(R(t), t)$ кривая 2 рис. 7.10 и ступенчатой (7.56) равны.

Воспользуемся точными решениями для ступенчатой функции (7.56), формулы действительны при любом $r = R(t) = r_1$. Определяем A_0 , для чего выбираем такое r_1 , близкое к r_0 , чтобы при малом t ($0,1; 0,001 \cdot 10^{-6}$ с и т. д.) с большой точностью равнялось $P(R(t), t) \approx P(r_1, t^0)$.

Определяем A_0 . При $r = R(t) = r_1$ из (7.56), $\rho = 102 \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$, $a = 1500 \text{ м/с}$, $t \rightarrow 0$ имеем:

$$P(r_1, t) \approx P(R(t), t) = A_0 - \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{1}{r_1 \rho} \left[\frac{r_1}{a} A_0 + A_0 \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right) \right] \right\}^2, \quad (7.61)$$

$$P_{\text{кривая 2}}^{\text{max}}(R(t), t=0) = 2901,1 = A_0 - \left(21,7864923 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{2} \frac{10^4}{102 \cdot 2,25 \cdot 10^6} \right) A_0^2.$$

Из решения этого квадратного уравнения имеем: $A_0 = 3112,1$ кгс/см².

Определяем $v(R(t), t)$ при $t \rightarrow 0$, $r_1 \approx r_0$ из (7.56)

$$v(R(t), t=0) = \frac{r_1}{\rho r_0^2} \left[\frac{r_0}{a} A_0 \right] = \frac{A_0}{\rho a} = \frac{3112,1 \cdot 10^4}{102 \cdot 1500} = 203 \text{ м/с}.$$

Определяем r_1 . Приблизительно зависимость (r_1/r_0) можно определить из (7.56) при $t=0$, $R(0) = r_0$:

$$v(R(t), t=0) = \frac{r_1}{r_0^2 \rho} \left[\frac{r_0}{a} A_0 \right], \text{ где } A_0 \left(t - \frac{r_0 - r_0}{a} \right) = 0,$$

$$203 = \frac{r_1 \cdot 10^4 A_0}{102 \cdot r_0 \cdot a}, \quad r_1/r_0 = 0,9980777.$$

Определяем r_0 (выбираем r_1 как можно ближе к r_0 , при этом время – десятые, сотые и менее доли мкс), с учетом найденных значений и (7.61) имеем соотношение:

$$2901,1 = 3112,1 - \frac{0,5 \cdot 102}{10^4} \left\{ \frac{10^4}{(r_0 \cdot 0,9980777) \cdot 102} \left[\frac{(r_0 \cdot 0,9980777)}{1500} 3112,1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3112,1 \left(0,1 \cdot 10^{-6} - \frac{(r_0 \cdot 0,9980777) - r_0}{1500} \right) \right] \right\}^2,$$

здесь $A_0 = 3112,1$; $r_1/r_0 = 0,9980777$; $t = 0,1 \cdot 10^{-6}$ с; и одно неизвестное r_0 , решаемое известными методами: $r_0 = 50 \cdot 10^{-3}$ м (с точностью до 0,14 %).

Аналогично преодолена некорректность для $P - P_0|_{r=r_1} = -\rho \varphi_t - 0,5 \rho \varphi_r^2$.

б) Вместо того, чтобы по (7.58), (7.59) и приближенного значения $R(t)$ из а) определять A_m^{II} , поступим иначе. С учетом приближенных значений $R(t)$ из а) и A_m из (7.60) определим функцию управления $v(R(t), t)$ по (7.54); соответствующие значения обозначены *. Как видим, совпадение удовлетворительное, особенно для $R(t)$. Оно будет значительно лучшим, если после уточнения $R(t)$ значение точки r_1 брать ближе.

Пример 2. Пусть необходимо обеспечить давление в точке $r_1 = 55 \cdot 10^{-3}$ м как показано на рис. 7.10 кривая 1 при a , ρ , r_0 , r_1 из Пр. 1. Методом после-

довательного определения коэффициентов полинома Лагранжа определяем по формулам (7.58), (7.59) при $R(t) = r_1$ коэффициенты [58]:

$$A_0 = 2778; A_1 = -80,187 \cdot 10^6; A_2 = 0,0073 \cdot 10^{12}; A_3 = -0,00511 \cdot 10^{18}, \quad (7.62)$$

а по (7.53)–(7.55) с учетом (7.62) функции управления $P(R(t), t)$, $v(R(t), t)$ – кривые 2 и 4 рис. 7.10.

3. Возможности управления волновыми процессами могут быть существенно расширены использованием проницаемости (излучения) подвижной границы – $v(R(t), t) \neq dR(t)/dt$ [59]. Варьируя скоростью проницаемости $R_2 \cdot (t)$ и законом изменения радиуса $R(t)$ ППГ, можно в широком диапазоне изменения получать волновые поля и определять функции управления с учетом ППГ.

Задача о расширении поршня, полости, пузырька в сжимаемой среде – классическая задача математической физики, импульсной гидродинамики и акустики [26]. Вопросам взаимодействия ударных волн с пузырьками посвящены многие работы, например, [87]; однако решение обратных волновых задач в областях с подвижными границами в сплошных, многофазных многокомпонентных средах, скорость звука и плотность которых могут меняться при определенных условиях в широком диапазоне в зависимости от исходных составляющих, произведено впервые в работе [9] (в [87] не обозначено). При подводном электровзрыве, лазерном импульсе и т. д. наличие, например, в среде различных компонентов, микропузырьков-кластеров и т. д. значительно влияет на гидродинамические поля, на функции управления. Использование этого так же существенно расширяет возможности управления волновыми процессами.

Учет движения границ необходим во многих случаях, в том числе задачах удара затупленных тел о поверхность жидкости (используется во многих новых отраслях машиностроения) [88]. Проведем некоторые сравнения. Давление P^* в лобовой точке, согласно (1.20) [88] при ударе шара равно:

$$P(t, 0) = V_0 / \sqrt{1 + (2t)/V_0},$$

где $P^* = P(t, 0) \cdot \rho a^2$, $V_0 = v/a$, $t = t/(r_0/a)$. Для $a = 1460$ м/с, $t = 0,1 \cdot 10^{-6}$ с, $r_0 = 50$ мм, $v = 200$ м/с, $P^* = 2916,87(2712,87)$ кгс/см². В скобках значение P^* с учетом $1/2\rho v^2 = 204$ кгс/см². Учет нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа (Слепян Л.И.) в подобных задачах необходим [1, 21, 58] (в работе [88] он не учитывается). Давление $P(R(t), t = 0,1 \cdot 10^{-6}$ с) = 2826 кгс/см² (см. рисунок данной работы) при расширении сферы $r_0 = 50$ мм будет несколько большим P^* , что объясняется отсутствием угла между направлением движения и нормалью к поверхности сферы для этого случая. Допустимая скорость соударения для воды может достигать 200 м/с – это граница применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с подвижными границами определена впервые в работе [21, рис. 25, с. 115–116], в некоторых случаях она может быть расширена до 350 м/с [26] и более.

Преодоление некорректности позволяет однозначно восстановить в полном объеме всю картину волновых полей от следствия (функции воздействия) до причины (функции управления). Определив однозначно функции управления становятся известными однозначно законы ввода мощности в расширяющуюся плазменную полость электрического разряда и лазерного импульса [47, 83, 84], а значит определены однозначно, электродинамические характеристики электрического разряда или интенсивность света лазерного импульса.

В заключение необходимо сказать следующее. Удивительно необычайное число приложений волнового уравнения "от волн в океанах воды, воздуха и эфира", как сказал бы Рассел, до волн, описывающих элементарные частицы. В наше время волновое уравнение стало настолько привычным, что его эффективности никто уже не удивляется. Однако, если попытаться мысленно охватить все, что было сделано с помощью этого уравнения, вообразить, какое богатство явлений природы скрывается за столь простой формулой, то эпитеты "удивительное" и "необычайное" не покажутся неуместными. Один выдающийся современный физик как-то написал популярную статью "О непостижимой эффективности математики в естественных науках". В эффективности волнового уравнения конечно есть что-то непостижимое, что бы не говорили люди, которые умеют объяснить все [98]. Как видим, эффективность волнового уравнения многократно возрастает теперь еще и наличием точных аналитических решений обратных (и прямых) волновых задач в областях с ПГ и ППГ, впервые полученных методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 21, 26, 58, 81].

Анализ результатов, принципиально новых, приводит к следующему очень ответственному и глубокому по своим последствиям выводу:

а) точные аналитические решения (7.50)–(7.57) физико-математических моделей (7.47)–(7.49) позволяют корректно (однозначно) определить функции управления волновыми процессами в областях с подвижными границами по заранее заданным, исходя из технологических потребностей, функциям воздействия;

б) тем самым предопределен переход от процессов познания (изучения) волновых процессов в областях с подвижными границами к более сложному и важному процессу управления волновыми процессами (множество которых описывается уравнением (7.47));

в) корректно управлять можно только по достижении определенного уровня знаний процесса и когда осмыслены все возможные последствия управления. В данном случае знаний однозначного значения точных аналитических зависимостей функций управления первого и второго случаев (скорости и давления на ПГ). Без этого точного знания функций управления само управления превращается в серию попыток ошупью, с помощью проб и ошибок, чаще всего случайно, определить желаемое (требуемое). Чаще всего это приводит к потерям (времени, средств и т. д.). Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [52] применить для обратных задач затруднительно.

7.6. Об одном новом способе корректного решения физических проблем управления волновыми процессами в областях с подвижными границами

1. "Задача определения звуковых тонов, излучаемых колеблющейся системой, иногда разрешима в явном виде, а иногда нет, но обратная задача определения формы колокола по звуку, который он способен издавать, просто ставит в тупик самых искусных математиков, физиков, исследователей.... Сейчас мы должны с восхищением приветствовать каждый, даже небольшой шаг, в этом направлении" [89, с. 285]. В работе делается попытка сделать шаг в этом направлении. А именно, решить сложные задачи, в областях с подвижными границами – определить начальные размеры сферы и цилиндра по значениям функций воздействия (нелинейные условия (7.65), (7.66)) в точке волновой зоны и на подвижной границе. При этом величины начального радиуса, перемещений и законы изменения скорости подвижных границ могут быть произвольными. А законы изменения скорости и радиуса подвижной границы неизвестны, подлежат определению и, как правило, нелинейны. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Следуя [81, 97, 101–105], рассмотрим задачу:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - (v-1)\varphi_r a^2 r^{-1} = 0, \quad r \geq R(t), \quad (7.63)$$

$$\varphi_t(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0, \quad R(0) = r_0, \quad (7.64)$$

$$P - P_0 \Big|_{r=R(t)} = -\rho \varphi_t - 0,5\rho \varphi_r^2, \quad (7.65)$$

$$P - P_0 \Big|_{r=r_1} = -\rho \varphi_t - 0,5\rho \varphi_r^2, \quad (7.66)$$

$$v(R(t), t) \neq dR(t)/t, \quad (7.67)$$

здесь φ – потенциал скорости; v – показатель симметрии; t – время; $R(t)$, r_0 , r , r_1 – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; P_0 , ρ , a – давление, плотность, скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости; v – скорость, (7.67) – условие проницаемости (излучения) подвижной границы. В теории волн уравнение (7.63) имеет фундаментальное значение [41, 95, 100].

В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: 1 – функция скорости (движения и проницаемости подвижных границ) или 2 – функция давления (на подвижной границе). Известны аналитические соотношения (74.6), (74.8) и т. д. [69], которые не учитывают влияния r_0 , применить их к обратным задачам затруднительно.

Некорректными считаются задачи, для которых не удовлетворяется хотя бы одно из условий: а) решение задачи существует; б) решение определяется однозначно; в) задача устойчива (А.Н. Тихонов, М.М. Лаврентьев) [90, с. 930]. Ранее точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач

в областях с подвижными (ПГ) и подвижными проницаемыми границами (ППГ) получены [1, 2, 59, 81] (условие 1). Решения устойчивы [1, с. 18] (условие 3); второе условие не выполнено – решения неоднозначны. Говорилось, например, в [81], что функции воздействия можно получить (обеспечить) с различных (бесконечного множества) величин начального радиуса r_0 , но при этом законы движения границ будут существенно различными, также различными будут волновые поля, кроме значений в одной точке r_1 . Это не позволяло: корректно (однозначно) определить никакими способами (ни численно, ни аналитически и т. д.) функции управления; однозначно восстановить волновые поля в полном объеме от следствия (функции воздействия) до причины (функции управления); однозначно, корректно решить вопросы управления волновыми процессами в областях с ПГ и ПППГ (определить вводимую в плазменный канал мощность [35, 47] $N(t)$ (15) [81]).

Преодоление некорректности функций управления волновыми процессами имеет большое научное, прикладное и принципиальное значение. Без решения вопросов многозначности обратных, прямых, дважды нелинейных (с ПГ и нелинейными дополнительными условиями) волновых задач решения проблемы подвижных границ не может считаться полным и окончательно завершенным.

2. Определять функции управления волновыми процессами будет методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 59]. Для определенности рассмотрим случай сферической симметрии $\nu = 3$. В соответствии с этими методами получим решение уравнения (7.63), которое удовлетворяет начальным условиям (7.64) и условию $P - P_0|_{r=r_i} = -\rho\phi_t = f[t - (r_1 - r_0)/a]$ – обратная задача; функции управления при этом имеют вид (6–8) [1]. Для общего случая произвольных законов движения границ и видов функции f последнюю можно аппроксимировать полиномом Лагранжа в степени m . Число m характеризует количество точных значений функции и может быть сколь угодно большим.

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^m, \quad A_m = \text{const.} \quad (7.68)$$

Тогда, с учетом (6)–(8) [1] и (7.68) функции управления имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad (7.69)$$

$$\nu(R(t), t) = \rho R^2(t) / r_1 = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1}, \quad (7.70)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m \cdot m!}{(m+2)!} \xi^{m+2}. \quad (7.71)$$

Для ступенчатой функции в точке r_1 функции управления 1 и 2 имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} A_0 \sigma_0(\xi) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t);$$

$$v(R(t), t) = \frac{r_1}{R^2(t) \rho} \left[\frac{R(t)}{a} A_0 + A_0 \xi \right], \quad (7.72)$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3] \cdot \rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a} A_0 \xi + \frac{A_0}{2} \xi^2, \quad \xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}, \quad \sigma_0(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}. \quad (7.73)$$

Это точное аналитическое решение обратной задачи с ПГ имеет важное значение.

С учетом (7.69), (7.70) и (7.71) запишем:

$$P(R(t), t) =$$

$$= \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m - \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{r_1}{R^2(t) \rho} \left[\frac{R(t)}{a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m+1} \xi^{m+1} \right] \right\}^2. \quad (7.74)$$

Здесь $P(R(t), t)$ известно по условию (7.65). Это соотношение пригодно для любых точек $R(t) = r = r_1$. Соотношения для определения A_m в общем случае произвольных величин начального радиуса, законов движения границ и вида $P(R(t), t)$ имеют вид (метод последовательного определения коэффициентов Лагранжа A_m):

$$A_m = N \pm (N^2 - M)^{1/2}; \quad N = -\frac{1}{2} \frac{2C_1 C_2^2 C_3 C_4 - \frac{r_1}{R(t)} \xi^m}{C_1 C_2^2 C_4^2}; \quad M = \frac{C_1 C_2^2 C_3 - C_0}{C_1 C_2^2 C_4}, \quad (7.75)$$

где $C_0 = -P(R(t), t) + \frac{r_1}{R(t)} \sum_{m=0}^{m-1} A_m \xi^m$; $C_1 = \frac{1}{2} \rho$; $C_2 = \frac{r_1}{R_2(t) \rho}$; $C_3 = \frac{r_1}{R(t)} \times$

$$\times \sum_{n=0}^{m-1} A_n \xi^n + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A_n}{n-1} \xi^{n-1}; \quad C_4 = \frac{r_1}{R(t)} \xi^m + \frac{1}{m+1} \xi^{m+1}, \quad \text{при } R(t) = r_1 \text{ (7.74), (7.75)}$$

переходят в полученные ранее (2.4), (2.7) [10].

Решение проводим методом последовательных приближений. Следует отметить, что в работе [78] рассматривается другая разновидность обратных волновых задач методом последовательных приближений, без учета ПГ и нелинейных условий на подвижных границах.

3. Преодоление некорректности (многозначности), связанной с величиной r_0 для случая заданного нелинейного условия на ПГ $P - P_0 \Big|_{r=R(t)} = -\rho \Phi_r - 0,5 \rho \Phi_r^2$.

Пусть необходимо на ПГ обеспечить функцию воздействия $P(R(t), t)$ в виде кривой (I) рис. 6.2 [59]. Воспользуемся физическим фактом: функция $P(R(t), t)$ несет информацию о том, с какого начального радиуса начиналось движение, с какой скоростью расширился поршень, и что на ПГ при $t \rightarrow 0$ и одинаковом r_0 значение $P(R(t), t)$ кривая I рис. 6.2 [59] и ступенчатой (7.72) равны. Формулы (7.72) действительны при любом $r = R(t) = r_1$. Определяем A_0 , для чего выбираем такое r_1 , близкое к r_0 , чтобы при малом t ($0,1; 0,001 \cdot 10^{-6}$ с и т. д.) с большой точностью равнялось $P(R(t), t) \approx P(r_1, t^0)$.

Определяем A_0 . При $R(t) = r_1$ из (10), $r = 102$ кгс $\cdot$ с²/м⁴, $a = 1500$ м/с, $t \rightarrow 0$, $A_0 \left(t - \frac{r_1 = R(t) - r_0}{a} \right) = 0$, имеем

$$P_{\text{кривая I}}^{\text{max}} = 4730 = A_0 - 0,5 \frac{1}{\rho a^2} A_0^2 = A_0 - 21,7864924 \cdot 10^{-6} A_0^2.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем $A_0 = 5354,67389$.

Определяем $v(R(t), t = 0)$, из (7.72), учитывая $\xi = 0$ при $t \rightarrow 0$, $r_1 \approx r_0$

$$v(R(t), t = 0) = \frac{A_0}{\rho a} = \frac{5354,67389 \cdot 10^4}{102 \cdot 1500} = 349,978685 \text{ м/с}.$$

Определяем r_1 . Приближенно зависимость (r_1/r_0) можно определить из (7.72) при $t \rightarrow 0$; $R(0) = r_0$, $A_0 \left(t - \frac{r_0 - r_0}{a} \right) = 0$; $A_0 = 349,978685$; $v(R(t), t = 0) = \frac{r_1}{r_0} \rho \left[\frac{r_0}{a} A_0 \right]$; $349,978685 = \frac{r_1 \cdot 10^4 A_0}{102 \cdot r_0 \cdot a}$; $\frac{r_1}{r_0} = 1$.

Определяем r_0 (выбираем r_1 как можно ближе к r_0 , при этом время – сотые, тысячные доли мкс). С учетом найденных значений и (7.69) имеем соотношение для $t = 0,001 \cdot 10^{-6}$:

$$4730 = 5354,67389 - \frac{0,5 \cdot 102}{10^4} \times \left\{ \frac{10^4}{(r_0 \cdot 1) 102} \left[\frac{(r_0 \cdot 1)}{1500} 5354,67389 + 5354,67389 \left(0,001 \cdot 10^{-6} - \frac{(r_0 \cdot 1) - r_0}{1500} \right) \right] \right\}^2$$

решаемое известными методами, $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м, что точно соответствует решению прямой задачи методом характеристик полной системы (10) работы [59] уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Тэта. Определив r_0 , по (7.75) методом последовательного определения коэффициентов Лагранжа вычисляем A_m , а по (7.69)–(7.71) и другие однозначные значения функций управления. За первое приближение берутся значения, вычисленные по (7.75) при $r_1 \approx R(t)$ (см. [26, 58]).

4. Преодоление некорректности (многозначности), связанной с величиной r_0 для случая заданного нелинейного условия $P - P_0|_{r=r_1} = -\rho\varphi_t - 0,5\rho\varphi_r^2 = F_1 - F_2$.

Пусть необходимо в точке волновой зоны r_1 обеспечить функцию воздействия в виде кривой 2 рис. 6.2 [59]. Приближенно аппроксимируем эту кривую

полиномом Лагранжа $f = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \xi_1^m$, где

$$\begin{aligned} A_4 &= 0,342831 \cdot 10^{24}; A_3 = -4,06966 \cdot 10^{18}; \\ A_2 &= 16,7101 \cdot 10^{12}; A_1 = -12,953 \cdot 10^6; \\ A_0 &= 49,40999; m = 0 \div 4; P(t = 0, (3) \cdot 10^{-6}) = 46,8025056. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Определим значение $v(r_1, t)$ в момент прихода волны.

Воспользуемся физическим фактом: (см. п.п. 3)

– функции $v(R(t), t)$ (решение методом характеристик системы (10) [59]) на ПГ при $t \rightarrow 0$ и ступенчатой (7.72) равны;

– функции $v(r_1, t)$ в точке r_1 (решение методом характеристик системы (10) [59]) в момент прихода волны $t^0 = (r_1 - r_0)/a$ и ступенчатой (7.72) при $R(t) = r_1$ равны.

$$\begin{aligned} A_0 &= 49,40999; r_1 = 80 \cdot 10^{-3} \text{ м}; a = 1500 \text{ м/с}; \rho = 102 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4; \\ v(r_1, t) &= \frac{r_1}{(R^2(t) = r_1^2)\rho} \left[\frac{R(t) = r_1}{a} A_0 + A_0 \left(\xi = t^0 - \frac{r_1 - r_0}{a} = 0 \right) \right] = 3,22941113 \text{ м/с}, \\ F_2 &= 0,5\rho v^2 = 0,0531883906 \text{ кгс/см}^2. \end{aligned}$$

Из (7.69) при $R(t) = r_1, t = 53 \cdot 10^{-6}$ – время выбираем такое, чтобы F_2 и погрешности были наименьшими, и F_2 мало отличались от произведенной оценки, получаем соотношение, A_m из (7.76):

$$\begin{aligned} 46,8025056 &= 49,40999 + A_1 \xi_1^1 + A_2 \xi_1^2 + A_3 \xi_1^3 + A_4 \xi_1^4 - (F_2 \approx 0); \\ \xi &= \left(53 \cdot 10^{-6} - \frac{r_1 - r_0}{a} \right), \end{aligned}$$

в котором одно неизвестное r_0 , решаемое известными методами: $r_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ м, что точно соответствует решению методом характеристик прямой задачи полной системы (10) [59]. Зная r_0 , по (7.68)–(7.71) можно однозначно восстановить волновые поля в полном объеме, во всех точках, включая ПГ, а также восстановить функции управления.

5. В отличие от областей, направлений или объектов физических исследований "физическая проблема" имеет место, когда содержание ответа не ясно, когда имеет место непредсказуемость результатов и неопределенность границ применимости (В.Л. Гинзбург) [91]. Все это в полной мере относится к проблемам ПГ, ППГ и вопросам управления. Необходимо добавить еще

невозможность до настоящего времени корректного, однозначного определения функций управления волновыми процессами. Для сферических и особенно цилиндрических волн эти проблемы однозначно характеризуются как сложнейшие, фундаментальные "физические проблемы".

Рассмотрим случай цилиндрической симметрии. Методами [1, 2, 59] получим решение уравнения (7.63) для $v = 2$. Функции управления имеют вид (6)–(8) [81] (они многократно приведены, в том числе недавно, см. список литературы в [81]).

5.1. Преодоление первой некорректности, обусловленной множеством величин начального радиуса r_0 при различных законах изменения скорости ПГ, обеспечивающих однозначную функцию воздействия в точке r_1 . Пусть необходимо обеспечить функцию воздействия кривая 1 рис. 7.8 работы [81] в точке $r_1 = 200$ мм, $a = 1460$ м/с, $\rho = 102$ кгс · с²/м⁴. Следуя подробному описанию в п.п. 3, 4, воспользуемся нисходящей ветвью кривой 1 рис. 7.8 [81] для периода $t \geq \alpha_2$, $\alpha_2 = t^0 + 4 \cdot 10^{-6}$ с; $P_{\max}(r_1, t) = 163$ кгс/см²; $\alpha = 0,00365 \cdot 10^{-6}$ из [81], которую аппроксимируем полиномом, где

$$A_0 = 163; A_1 = 5,60(6) \cdot 10^6; A_2 = 0,201(9) \cdot 10^{12}; A_3 = -0,0161(3) \cdot 10^{18}. \quad (7.77)$$

Соотношение, согласованное со структурой волнового уравнения [1, 2, 81] и с учетом реальных запаздываний будет иметь вид, время t выбрано по соображениям п.п. 3, 4:

$$P(r_1, t = 150,849315 \cdot 10^{-6}) = 110, (9) = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 - (F_2 \approx 0), \quad (7.78)$$

где $\xi = [t - (r_1 - r_0)/a] - 4 \cdot 10^{-6} = (9,863014 \cdot 10^{-6} + r_0/1,46 \cdot 10^3)$; $F_2 = = 0,5\rho v^2(r_1, t)$; A_m из (7.77), оценка величины $F_2 = 0,61565$ кгс/см², которая будет еще меньше через 10 мкс, произведена по точным формулам (9)–(13) [81] при $R(t) = r_1$. Решение (7.78) производится известными методами: $r_0 = = 0,2 \cdot 10^{-3}$ м, что точно соответствует значению r_0 при решении прямой задачи методом Годунова системы (14), (15) работы [81].

5.2. Преодоление второй некорректности, связанной со множеством величин l конечных длин расширяющегося цилиндра, возможно сравнением $P(R(t), t)$ – давления на ПГ или $P(r_1, t)$: а) при расширении заданного конечного l и б) бесконечной длины цилиндра, определенного по вычисленным ранее r_0 (см. выше) и скорости $v(R(t), t)$ поршня (подробно описано в [81]). Физически понятно, функции воздействия, а также управления, будут идентичными в определенный промежуток времени Δt до тех пор, пока не начнет сказываться влияние частей расширяющегося бесконечного цилиндра, больших l .

Зная Δt , с учетом соотношений

$$\Delta t = c/a - t^0; \quad c = [(0,5l)^2 + (r_1 - r_0)^2]^{1/2}, \quad (7.79)$$

длина l однозначно определится из (7.79). Оценено влияние погрешности определения Δt на вычисление l ; показано, что погрешность определения Δt при-

водит к меньшей в два раза погрешности определения l . Значение $l = 200$ мм точно соответствует расчету методом Годунова С.К. системы (14) [81] прямой задачи расширения цилиндра конечной длины. Значения $\Delta t = 16; 20$ мкс также хорошо отражены на рис. 7.9 ($P(R(t), t)$) [81] наилучшим совпадением функций управления конечного и бесконечного цилиндров именно в этом диапазоне времени Δt . Зная r_0 и l однозначно определены волновые поля в полном объеме, а также функции управления по формулам работы [81] и вводимая в плазменный канал мощность $N(t)$ [81].

Анализ результатов показывает, что впервые удовлетворены все три условия корректности проблемы управления волновыми процессами в областях с подвижными границами для сферических и цилиндрических волн: решения существуют, единственны и устойчивы. Без точных аналитических решений (7.68)–(7.75) и (6)–(13) [81] решить эти проблемы нельзя, метод [52] применить для обратных задач затруднительно. Границы применимости волнового уравнения и его точных аналитических решений в областях с ПГ и ППГ [2, 59] определены впервые и нетрадиционно в [26].

В заключение необходимо сказать следующее. Как известно, удивительны необычайное число приложений волнового уравнения, в той или иной степени описывающего все богатство явлений Природы, как и непостижимая эффективность математики в естественных науках [41, 92], которые многократно возрастают теперь еще и наличием однозначных аналитических соотношений функций управления волновыми процессами в областях с ПГ и ППГ.

7.7. К теории излучающих источников, движущихся в сжимаемой среде (проблема Гинзбурга В.Л.)

Получены точные аналитические решения волнового уравнения в областях с подвижными излучающими границами. Впервые предложены способы получения количественных результатов для обратных (задач управления) и прямых задач определения волновых полей, индуцированных движущейся границей, с поверхности которой происходит излучение среды.

Успешная реализация многих технологий на основе волновых импульсных процессов требует обеспечения необходимых, заранее заданных, оптимальных форм функций воздействия: давления P , скорости v частиц, температуры T и т. д. в точке среды или во всем объеме. Однако, зачастую, эксперимент и расчеты энергии и давлений показывают, что для совершения технологического процесса получаемые параметры функций воздействия (P , v , T) с помощью электрического взрыва [35], лазерного импульса [47] и т. д. недостаточны. В этих случаях, одним из возможных способов решения вопроса, может служить использование электродных систем ВЭХВ – высоковольтного электрохимического взрыва. Расчет энергии и давления с использованием электродных систем ВЭХВ связан с разрешением нескольких фундаментальных физических и математических проблем, которые до настоящего времени не нашли своего полного разрешения.

Отмечено, что при ВЭХВ канал разряда выполняет двойную роль. Во-первых, является источником для образования первоначальной волны давления, во-вторых, служит электрозапалом для зажигания экзотермической смеси. Вклад реакции экзотермической смеси в общее количество энергии, выделяющейся в расширяющейся полости (и создающей волны возмущения: волны давления и скорости частиц среды), когда неизвестны ни закон горения смеси (начало, конец и т. д.), ни количество прореагировавшей и оставшейся части, определить с достаточной степенью точности не удастся ни экспериментально, ни численными методами. При этом на реакцию (горение) экзотермических добавок большое влияние оказывают такие факторы, например, как волновые поля давления и скорости, температуры, плотность среды, которая при повторных разрядах становится многокомпонентной (это непрореагировавшие части экзотермических добавок, микропузырьки, продукты взаимодействия волн давления с обрабатываемым материалом и т. д.). Оптимальная реакция происходит только при определенных значениях давления: при меньших давлениях она вообще может не происходить, при больших могут происходить нежелательные детонационные явления [111].

В данной работе сделана попытка оценить волновые поля давления и скорости в областях с подвижными излучающими границами, которые генерируются плазменным поршнем электрического разряда, с подвижной поверхности которого происходит излучение, вызванное реакцией экзотермической смеси.

Постановка проблемы. Как известно, волновое уравнение в теории волн имеет фундаментальное значение. Движение границы в сжимаемой среде является частным более общего случая движения излучающей (проницаемой) границы, когда скорость излучения (проницаемости) равна нулю. При этом для определения волнового поля нельзя решить ни обратную, по заданному закону изменения давления в точке волновой зоны, ни прямую задачу по известному закону изменения радиуса плазменного поршня. Известное определение "физическая проблема" дано в работе [112, с. 13–16]. К физическим проблемам (по Гинзбургу В.Л.) особой сложности относятся: проблемы подвижных границ (ПГ), которые существенно нелинейны, метод суперпозиции неприменим (Гринберг Г.А.) [27,52]; подвижных проницаемых границ (ППГ) – более сложные, они были даже не поставлены [2,59]; вопросы управления волновыми процессами, обратные задачи управления некорректны, многозначны (Тихонов А.Н., Лавренцев М.М.) [90, с. 930].

Они существовали и были неразрешимы длительное время с момента создания волнового уравнения (Тейлор Брук). Упомянутая проблематика чрезвычайно интересна, ею занимались выдающиеся физики [69, 112]. "Действительно, и другие задачи могут оказаться трудными и очень интересными. Например, задачи, относящиеся к теории излучения источников, движущихся в сжимаемой среде. Мне лично (Гинзбургу В.Л.) этот круг вопросов **очень** дорог и близок, я им занимаюсь в течении всей своей научной жизни" [112, стр. 15]. Физически понятно, в этих задачах много общего с проблемами ПГ,

ППГ, вопросами управления волновыми процессами, понятно, что без учета ПГ и ППГ они неразрешимы.

Автор поставил себе задачу учесть влияние того факта, что законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающихся с ней, могут быть произвольны и различны. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Математически это означает, что на подвижной границе, изменяющейся по закону $R(t)$, скорость частиц среды, соприкасающихся с подвижной границей, не равна скорости изменения радиуса ПГ. Такую границу, для случая $v(R(t), t) < dR(t)/dt$ назовем проницаемой ПГ. Случай $v(R(t), t) > dR(t)/dt$ назовем излучающей подвижной границей. Примером ППГ может служить движение в среде поршня с отверстиями. Примером излучающей подвижной границы служит движение в среде поршня, с поверхности которого происходит истечение среды; таким образом, скорость частиц, соприкасающихся с подвижной границей, будет больше скорости движения границы. Физически понятно также, что ППГ может быть представлена системой отрицательных источников (стоков), а другая – системой излучающих источников, расположенных на движущихся поверхностях. Проницаемая подвижная граница рассмотрена ранее [2, 59], представляет большой интерес случай движения границы, с поверхности которой происходит излучение.

Физическая и математическая модели. Подходы и решения. Рассмотрим движение среды, вызванное перемещением сферической ($v = 3$) проницаемой границы в безграничной жидкости. Возмущение, возникшее в результате движения проницаемой границы, будет распространяться в среде, и ее распространение будет описываться волновым уравнением, среда не изменилась. При этом скорость распространения возмущений будет также равна $a = \text{const}$, включая точки вблизи подвижной границы. Волновое уравнение имеет вид [59]:

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - (v-1)a^2 r^{-1} \varphi_r = 0, \quad r \geq R(t), \quad (7.80)$$

$$\varphi_r(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0, \quad R(0) = r_0, \quad (7.81)$$

$$\rho \varphi_r \Big|_{r=r_1} = P = f \left(t - \frac{r_1 - r_0}{a} \right), \quad (7.82)$$

$$-\varphi_r = v \Big|_{r=R(t)} = F_1(t), \quad R(t) = F_2(t), \quad (7.83)$$

$$v(R(t), t) \neq dR(t)/dt - \text{проницаемая граница}, \quad (7.84)$$

здесь t – время; φ – потенциал скорости; $v = 1, 2, 3$ – показатель симметрии; $R(t), r_0, r, r_1$ – координаты: подвижных границ, начальная, текущая, точки волновой зоны соответственно; ρ, a – постоянные; v – скорость; P – давление; (7.84) – условие проницаемости (излучения) подвижной границы. Условия могут быть заданы на подвижной границе – этим определяется класс прямых задач, например, (7.83). Если условия заданы только в фиксированной точке волновой зоны, то этим определяется класс обратных задач, например, (7.82). При решении

обратных задач необходимо реконструировать значения исследуемых функций в других точках, включая подвижные границы, при этом закон движения границы неизвестен, нелинеен и подлежит определению. Необходимое уточнение: зависимость между функциями управления $(P(R(t), t), v(R(t), t))$ и воздействия $(P(r, t), v(r, t))$ всегда существенно нелинейна, даже если они (первое или второе) линейны. Это традиционное определение прямых и обратных задач. Наличие проницаемости ПГ вносит коррективы в эти понятия, появляются смешанные дополнительные условия [59]. Пусть известно в какой-либо точке волновой зоны r_1 давление $P(r_1, t)$, которое может быть аппроксимировано разными способами: элементарными функциями, их комбинациями и т. д. [1]. Используя методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 2, 21, 59], получим давление и скорость частиц в любых точках. На подвижных границах они имеют вид:

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right) - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad (7.85)$$

$$v(R(t), t) \frac{R^2(t) \rho}{r_1} = \frac{R(t)}{a} f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right) + \left[\int_0^t f(\xi) dt \right]_{r=R(t)}, \quad (7.86)$$

$$\varphi(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t) \rho} \left[\int_0^t f(\xi) dt \right]_{r=R(t)}, \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a}, \quad (7.87)$$

где $v(R(t), t)$ – изменение функции $[-\varphi_r]_{r=R(t)}$ в точках, соприкасающихся с проницаемой подвижной границей. Здесь вид функции f несет информацию о том, что распространяющиеся возмущения, описываемые волновым уравнением, индуцированы подвижной проницаемой границей (ППГ). Для вычисления по формулам (7.85), (7.86) при решении обратных задач необходимо знание величины $R(t)$. Изменение радиуса подвижной проницаемой границы можно произвести следующим образом. Изменение объема в единицу времени dV/dt по "наблюдаемому" изменению радиуса подвижной границы в рассматриваемом случае будет иметь две составляющие:

$$dV / dt = dV_1 / dt + dV_2 / dt, \quad (7.88)$$

где dV_1/dt – изменение объема, которое обуславливает изменение функции $[-\varphi_r]$, dV_2/dt – изменение объема, характеризующее проницаемость.

Придавая функции $[-\varphi_r]$ физический смысл скорости частиц среды, воспользуемся известным физическим свойством [69]. Объем среды, протекающей через замкнутую поверхность, равен изменению объема в единицу времени, т. е. $dV_1/dt = 4\pi r^2 v(r, t)$, где v – соотношение из (7.86).

Интегрируя от 0 до t (7.88) и переходя на подвижные границы, можно получить:

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3]P}{3r_1} = \left[\int_0^t \frac{r}{a} f(\xi) dt + \int_0^t \int_0^t f(\xi) dt dt \right]_{r=R(t)} + \frac{V_2 P}{4\pi r_1}. \quad (7.89)$$

Вычисление $R(t)$ из этого "кубического" уравнения (7.89) производится, как и в случае непроницаемых ПГ [21, 58]. Оно может быть произведено различными способами, в том числе и для случаев, когда r_0 и r_1 неизвестны и подлежат определению [113].

Скорость проницаемости $R_2^*(t)$ подвижной границы можно определить, зная $R(t)$ и функцию f , из соотношения (9) работы [59], где $R^*(t)$ – скорость изменения радиуса подвижной границы. Решения (7.85)–(7.87) тождественны полученным ранее [1, 21, 58] для непроницаемых границ. Физический смысл функций (7.85)–(7.87) будет другой, соответствующий ПППГ. Учет проницаемости добавляет к рассматриваемым еще одно неизвестную функцию – скорость, входящую в (7.88). Поэтому в случае $v(R(t), t) \neq dR(t)/dt$ для вычисления по (7.85)–(7.89) должны быть известны две функции, например, $R(t)$ и $v(R(t), t)$, либо f и $R(t)$. Тогда как при $v(R(t), t) = dR(t)/dt$ достаточно знать одну: f или $R(t)$. Как видим, при задании функций $R(t)$ и $v(R(t), t)$ определение прямой задачи остается неизменным: обе функции заданы на подвижной границе. А при задании f и $R(t)$ определение обратной задачи видоизменяется: одно из двух условий задано на подвижной границе. Это смешанное задание (условий) обусловлено наличием дополнительной неизвестной функции $R_2^*(t)$ на подвижной границе. Полученные решения являются точными, подстановка их в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, при отсутствии проницаемости они переходят в полученные ранее для непроницаемых границ [1, 21, 58] и при $a \rightarrow \infty$ в известные решения [58]. Действительно, дифференцируя дважды уравнение (7.89) при $a \rightarrow \infty$ и $V_2 \rightarrow 0$, получим известную формулу:

$$P - P_0 = \rho r^{-1} (2RR^{*2} + R^2 R^{**})$$

для точки r_1 . Подобные рассуждения проведены и идентичны для случая излучающей подвижной границы.

Полученные соотношения позволяют решать задачи при различных вариантах задания дополнительных условий, при этом законы изменения радиуса подвижной границы и скорости частиц среды, соприкасающихся с ней, могут быть произвольными и различными, в том числе, например, уменьшение во времени радиуса и увеличение (уменьшение) скорости частиц на ПГ.

Границы применимости волнового уравнения и его точных решений в областях с ПГ и ПППГ определены ранее в работах [21, 26]. Они определены

впервые нетрадиционно не по давлению, что вообще говоря, невозможно, а по скорости частиц на ПГ.

Количественные результаты. На рис. 7.11 и 7.12 представлены результаты расчетов с единым законом изменения радиуса

$$R(t) = r_0 + \frac{350}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha t)], \quad (7.90)$$

$r_0 = 1$ мм, $\alpha = 1 \cdot 10^3$ с⁻¹, $\rho = 102$ кгс · с²/м⁴, $r_1 = 0,08$ м (кривая 3, рис. 7.12), и двух вариантов подвижных границ:

а) излучающей, расчет по формулам (7.85)–(7.89) давления на ПГ (кривая 3, рис. 7.11), аппроксимировано полиномом Лагранжа:

$$P(r_1, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m [t - (r_1 - r_0)/a]^m, \quad (7.91)$$

коэффициенты которого могут быть определены разными способами [58]. Для нашего случая $dR(t)/dt < v(R(t), t) = 525 \exp(-\alpha t)$ и для значений $m = 0 \div 4$, $t = 0, 0,1, 0,25, 0,5, 0,75 \cdot 10^{-6}$ с, $a = 1500$ м/с с учетом (7.86), (7.90), (7.91) определено

$$\begin{aligned} A_0 &= 100,4; \quad A_1 = -104,2 \cdot 10^6; \quad A_2 = 138,1 \cdot 10^{12}; \\ A_3 &= -99,0 \cdot 10^{18}; \quad A_4 = 33,2 \cdot 10^{24}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Для $t = 1; 2; 3; 4 \cdot 10^{-6}$ с; $m = 0 \div 3$ с учетом (7.86), (7.90), (7.91) определяем коэффициенты

$$A_0 = -53,0; \quad A_1 = 239,0 \cdot 10^6; \quad A_2 = -120,67 \cdot 10^{12}; \quad A_3 = 19,2 \cdot 10^{18}, \quad (7.93)$$

где $v(R(t), t)$ – скорость частиц; $R(t)$ – видимый, наблюдаемый радиус ПГ. Из (7.85) с учетом (7.91)–(7.93) определяем давление на излучающей ПГ (кривая 3, рис. 7.11) и по (7.12) давление в точке $r_1 = 0,08$ м (кривая 4, рис. 7.11);

б) непроницаемой ПГ, расчет методом характеристик (Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.) [59] системы уравнений движения, сплошности и состояния в форме Тэта:

$$\begin{aligned} v_t + v \cdot v_r + \rho^{-1} P_r &= 0, \quad \rho_t + (\rho v)_r + (v-1)\rho v = 0, \\ (P+B)/(P_0+B) &= (\rho/\rho_0)^n, \dots \end{aligned} \quad (7.94)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями (B , n – постоянные, v – показатель симметрии).

Закон расширения поршня $v(R(t), t) = 350 \exp(-10^3 \cdot t)$ – кривая 1, рис. 7.12, при $v(R(t), t) = dR(t)/dt$, давление на подвижной границе и в фиксированной точке волновой зоны – кривая 1 и 2, рис. 7.11.

Учет движения границ необходим во многих случаях, в том числе задачах удара затупленных тел о поверхность жидкости (используется во многих новых отраслях машиностроения). Результаты расчетов по формуле (1.20) [88] давления в лобовой точке при ударе шара $r_0 = 50$ мм, $v = 200$ м/с, $\rho = 102$ кгс $\cdot$ с²/м⁴, $a = 1460$ м/с, $t = 0,1 \cdot 10^{-6}$ с, $P^* = P(t, 0) \cdot \rho a^2 = 2916,87$ (2712,87) кгс/см² (в скобках значение с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа (Слепян Л.И.) [1, 21, 79], что в (1.20) [88] не учитывается) и по формулам автора $P(R(t), t = 0,1 \cdot 10^{-6}$ с) = 2826 кгс/см² удовлетворительно согласуются. Точное решение дважды нелинейной обратной задачи (нелинейные условия и ПГ) для волнового уравнения в областях с подвижными границами для $v = 2$ получено в [11] и в [81]. Решения описывают ближайшее поле расширяющегося цилиндрического плазменного поршня, в том числе и самые интересные, самые критические, начальные мгновения движения (удара) импульсного процесса.

Рис. 7.11 Изменение во времени давления на подвижных границах (с учетом нелинейного члена интеграла Коши-Лагранжа [2, 59]), и в точке r_1 : непроницаемой (1, 2) и излучающей (3, 4) границы. Кривая (3): значения $P(R(t), t = 0,.) = 6627,1$ и $P(R(t), t = 0,1 \cdot 10^{-6}$ с) = 5796,8 кгс/см² позволяют оценить начало (удар) движения излучающего источника в среде (задача В.Л. Гинзбурга)

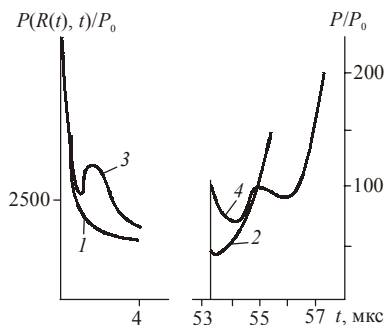
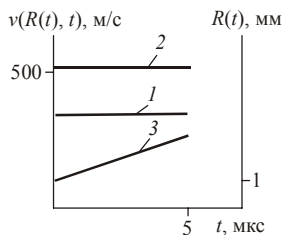


Рис. 7.12. Изменение во времени скорости движения границы – кривая (1); излучения – кривая (2); общий закон изменения радиуса – кривая (3)



Анализ кривых показывает, сколь велики могут быть погрешности определения исследуемых функций по наблюдаемому изменению радиуса подвижной границы. В начальные мгновения, при некоторых соотношениях значений радиуса и скоростей частиц на излучающей ПГ, происходит уменьшение давления (кривая 3, рис. 7.11, значение $P(R(t), t)$ при $t \approx 1$ мкс), вплоть до отрицательных значений P . Подобная ситуация, когда $v(R(t), t) > dR(t)/dt$,

может возникать в некоторых случаях при реакции экзотермических добавок [111], инициированных электрическим взрывом (Наугольных К.А.), лазерным импульсом (Лямшев Л.М.) и т. д. Развитые подходы позволяют рассмотреть различные варианты, например, уменьшение радиуса во времени и увеличение (уменьшение) скорости частиц на ПГ. Полученные результаты и их анализ показывают, что решения актуальных физических (по Гинзбургу В.Л.) и математических (по Тихонову А.Н.) проблем подвижных излучающих границ, может быть использовано для оценки волновых полей, индуцированных расширяющимся плазменным поршнем электрического разряда, с поверхности которого происходит излучение в результате реакции экзотермической смеси. Это позволяет построить более корректную физико-математическую модель обратной задачи управления сложными процессами ВЭХВ, более корректно определить вклад реакции экзотермических добавок в общий энергетический баланс [114, 115].

В заключение необходимо сказать, что авторскими методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [1, 110] впервые решено волновое уравнение в областях с излучающими границами, разработана теория, получены точные аналитические соотношения, определены волновые поля, индуцированные движением излучающей границы (проблема Гинзбурга В.Л.). Они универсальны, пригодны для обратных (задач управления) и прямых задач. Они описывают самые интересные, самые критические, начальные мгновения движения (удара) излучающего источника в сжимаемой среде (задача Гинзбурга В.Л.), при этом законы изменения скорости движения и излучения произвольны и различны. Подобные результаты другими способами получить нельзя, метод [27, 52] и формулы (74.8 и другие подобные) работы [69] применить для обратных задач невозможно.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Редакционная коллегия обратилась к автору с предложением, в котором, в частности, говорилось: "...напишіть для нашего журналу (Вісник НАН України) статтю про нові методи математичної фізики, які Ви (Крутиков В.С. – автор) винайшли і які стали підставою для включення Вас до списку Тисячі фундаторів ХХІ століття. Причому, це має бути стаття, розрахована на широку наукову аудиторію, а не на фахівців вузького профілю. Інакше кажучи, Вам, як автору доведеться обходитися без формул, щоб донести до читачів передусім логіку Вашого відкриття, що нового воно привнесло у розвиток відповідного напрямку науки. Тобто йдеться про ґрунтовне осмислення місця Вашої роботи серед того, що вже зроблено у цій галузі. У такій статті найголовніше – не специфічно наукові викладки, а жива думка, аналіз ситуації в науці. Бажаємо успіхів! З повагою, Г. Торжевська"¹. Автор виконав, по-видимому, одно із останніх побажань видаючогося Редактора.

Волновые процессы – фундаментальная основа современных наукоемких технологий

Блажен, кто в наши дни Победу,
Добыл не кровью, а умом.
Блажен, кто точку Архимеда
Сумел найти в себе самом.

Ф.И. Тютчев

"Технологии" получения научных результатов, логика научных открытий сугубо индивидуальны. Эти вопросы окончательно не решены и пока обучить этому нельзя. Специальные исследования показывают, что только небольшой процент (около двух) всех защищенных кандидатских и докторских диссертаций содержит научную новизну. Такого же порядка малый, небольшой процент, около двух с половиной составляют удачливые предприниматели среди

¹ "Вісник НАН України", 2003, 12, С. 61–62.

огромного количества занимающихся бизнесом в Америке. При всей кажущейся тривиальности, указанные вопросы имеют большое научное и прикладное значение. Поэтому правомерно одновременно описывать, перечислять не только научные результаты, но и технологию, логику научных открытий, что особенно актуально для волновых процессов и имеет непосредственное отношение к теме настоящей работы. В настоящее же время приходится пока только накапливать и осмысливать индивидуальную философию успеха каждого исследователя².

Важно получить выдающийся, великий результат, еще важнее осмыслить пути его получения. Эти вопросы интересовали давно и многих, например, Лейбница Г.В.³ Рассмотрению путей познания в математике, механике, физике посвящены работы Анри Пуанкаре "Наука и гипотеза", "Ценность науки", "Наука и метод", "Последние мысли", "О науке" (М.: Наука, 1983) и других. Как представляется, многие исследователи, в том числе и Пуанкаре, все-таки в начале получали научные результаты, а потом, оглядываясь на пройденный путь, и не только свой, осмысливали его. Этот процесс необходим и плодотворен. С подобной целью отобраны и выписаны в эпиграфы некоторые основные мысли. Стоит обратить внимание, как гармонично они вписываются в последовательность действий по решению проблем подвижных проницаемых границ и вопросов управления волновыми процессами. Это свидетельствует о многом, и прежде всего о том знании, заключенном в них, с помощью которого можно получать новые знания, новые истины. Данная статья – не систематическое изложение по данному вопросу. Целью этой публикации является возможность, любезно предоставленная Редакцией "Вісник НАН України" поделиться некоторыми соображениями, связанными с попытками решить сложнейшие проблемы математической физики, существовавшие с момента получения (создания) волнового уравнения. Это послужит продолжению накопления информации по осмыслению путей познания на личном примере решения сложных научных проблем.

²Этим занимаются, например, The American Biographical Institute USA и International Biographical Centre Cambridge England, анкеты которых содержат пункт: "Индивидуальная философия успеха", в штатах которых числится более 14000 высококвалифицированных и высокооплачиваемых специалистов и целые специализированные Научные организации (см. Great Minds of 21st Century).

³Г.В. Лейбниц. Немецкий математик. Один из создателей дифференциального и интегрального исчисления.

I. Волновые процессы

Не в массе приобретенных знаний
заключается красота и мощь умственной
деятельности, даже не в их систематичности,
а в искреннем ярком искании.

В.И. Вернадский⁴

1. Волновой процесс – одна из важнейших форм движения материи, в той или иной мере волновые движения присущи всем без исключения объектам материального мира. Волновые процессы являются фундаментальной основой развития естествознания, современной техники и наукоемких технологий. Поэтому важное значение приобретает решение проблем математической физики, сложнейшими из которых являются проблемы подвижных границ (ПГ), подвижных проницаемых границ (ППГ), вопросы управления волновыми процессами. Подобные задачи для областей с подвижными границами являются трудными и малоизученными [93].

Волновые процессы как линейные, так и нелинейные интенсивно изучаются в электродинамике, физике плазмы, оптике, гидродинамике, акустике и др. Механизмы распространения возмущений, естественно, сильно отличаются друг от друга. Различие физических механизмов, реализующих волновой процесс, приводит к различным, сильно различающимся друг от друга системам уравнений. Однако, для понимания наиболее фундаментальных явлений, свойственным волнам различной природы (интерференция, дифракция, дисперсия, отражение, преломление, рассеяние и т. д.) часто нет необходимости анализировать исходные, зачастую сложные системы уравнений. Простые эффекты, как правило, описываются простыми и поэтому универсальными математическими моделями. Отсюда, по-видимому, можно сделать вывод, что целью исследования должно быть не только составление особо сложных систем дифференциальных уравнений в частных производных и решение их на мощных ЭВМ, но и по возможности сведение решения задачи к наиболее простой математической модели и получение аналитического решения, естественно, с определением границ ее (модели) применимости [77, 94].

Такой универсальной математической моделью, описывающей многие физические процессы, является волновое уравнение. Необходимо учесть так же, что в силу ряда обстоятельств, непосредственный учет всех факторов, определяющих сложное явление затруднителен, и решение задачи получают, объединяя данные по более простым модельным задачам, выявленным на этапе анализа. Такие модели тщательно изучаются различными методами, среди которых на первое место выдвигаются аналитические методы решения, дающие наиболее ценные результаты абсолютного характера. Критериальное значение

⁴ В.И. Вернадский. Первый президент Академии наук Украины. Основатель биогеохимии, геохимии, радиогеологии.

имеет при этом физический эксперимент, а сильной стороной численных методов решения является их оперативность. Изложенное повышает роль и показывает важность решений волнового уравнения в областях с подвижными границами, так как зачастую именно к нему приводит наиболее простые модельные задачи.

Однако даже если исследуемый процесс описывается линейным уравнением, наличие подвижных границ делает задачу существенно нелинейной, сумма двух решений не является решением, метод суперпозиции неприменим. Существенная нелинейной проблемы подвижных границ для уравнений параболического типа известна как проблема Стефана, рассмотрена в работах Гринберга Г.А., для волнового уравнения это показано в работах автора [21, 26]. Это явилось причиной того, что до настоящего времени не было методов точного аналитического решения таких задач. Точные решения подобного рода задач, полученные в основном при помощи удачных догадок, известны лишь для какого-либо частного вида граничных условий. Для волнового уравнения это одно-единственное решение Дж. Тейлора (1946) частного вида прямой задачи расширения сферы с постоянной скоростью в сжимаемой среде. Прямая задача, когда условия заданы на подвижной границе; обратная задача, когда дополнительные условия заданы в фиксированной точке волновой зоны и необходимо определить исследуемые функции в других точках, включая ближнюю зону и поверхность подвижных границ. При этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению и может быть нелинейным. Наличие проницаемости подвижных границ вносит коррективы в эти понятия, появляются новые понятия – смешанные дополнительные условия [2, 59]. Дадим определение некоторых понятий: волновая зона, ближняя зона, поверхность подвижных границ. При математическом описании процессов волновым уравнением при корректном задании дополнительных условий различаются следующие случаи: *а* – волновая зона, когда заданная функция, например, давления определяется линейным интегралом Коши-Лагранжа; *б* – ближняя зона – заданная функция (давления) определяется нелинейным интегралом Коши-Лагранжа; *в* – на поверхности подвижной границы заданная функция определяется нелинейным интегралом Коши-Лагранжа (нелинейное дополнительное условие), при этом в сложные аргументы этих функций на подвижной границе входит нелинейный закон изменения радиуса подвижной поверхности границы, который заранее неизвестен. Нелинейные дополнительные условия – это одна нелинейность; наличие подвижных границ – вторая нелинейность; при наличии одновременно этих двух нелинейностей задача считается дважды нелинейной.

Под взаимодействием аргументов понимается следующее: в промежуточное решение, имеющее одну разновидность аргументов, подставляются функции дополнительного условия, имеющие другую разновидность аргумента, в результате чего получаем решение, имеющее третью разновидность аргумента.

Исследователям приходилось принимать различные допущения: изменять граничные условия, сносить граничные условия на неподвижные границы, либо заменять действия подвижных границ системой особенностей. Это приводило к ограниченности решений, а в некоторых случаях и к неприемлемым результатам. Показательно, что еще Даламбером⁵ (1747 г.) было получено решение волнового уравнения: задача Коши – известны начальные условия, а граничных нет, в котором, естественно вид функций, зависящий от граничных условий, оставался неизвестным. В известном обобщении общего метода конечных интегральных преобразований (Кошляков Н.С., Гринберг Г.А.) для прямых задач используется разложение по "мгновенным" собственным функциям. Однако это приводит к решению бесконечной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Для решения проблемы подвижных границ традиционные подходы оказались неприемлемыми, требовалось искать новые.

2.

Математические истины выводятся из небольшого числа очевидных предположений при помощи цепи непогрешимых рассуждений: эти истины присущи не только нам, но и самой природе.

Анри Пуанкаре⁶

Основой математической физики являются три главных уравнения: теплопроводности, волновое и Лапласа. Наибольшее количество процессов описывается волновым уравнением. Раньше оно решалось только численно, имеется в виду в областях с подвижными границами. Зададимся вопросом: почему основное уравнение математической физики волновое в областях с ПГ не было решено? По мнению автора тут две причины. Первая – решались только прямые задачи (Дж. Тейлор), что при произвольных граничных условиях приводило к непреодолимым математическим трудностям. Второе – не учитывался, не принимался во внимание основополагающий факт всех волновых явлений в сжимаемых средах распространения возмущений с конечной скоростью. Автору удалось преодолеть эти сложности, трудности следующим образом. Рассмотрим в начале факт распространения возмущений в сжимаемой среде с конечной скоростью, что непосредственно связано с понятием запаздывания, а при математическом описании его с понятиями

⁵ Даламбер. Французский математик, механик. Его работы вместе с исследованиями Л. Эйлера и Д.И. Бернулли послужили основой математической физики.

⁶ Анри Пуанкаре. Французский математик, работы которого вместе с работами Лоренца Х.А. и Минковского Г. лежат в основе теории относительности.

сложных аргументов, количеством сложных аргументом, со взаимодействием сложных нелинейных аргументов. Без осмысления этих понятий и применения их невозможно получить точные аналитические решения обратных и прямых волновых задач в областях с подвижными границами. Пусть возмущение возникает в какой-либо момент времени на поверхности конечного начального радиуса, например, сферы с началом ее расширения. Волны, генерируемые таким способом, используются в различных технологиях. Тогда в точке волновой зоны на некотором расстоянии от центра сферы возмущение появится не в момент начала расширения сферы, а спустя время запаздывания, равное частному от деления расстояния от начальной поверхности сферы до точки волновой зоны на скорость распространения возмущения по конкретной среде [21]. Таким же образом, рассуждая логически, мы получим еще несколько разновидностей аргументов с запаздываниями, которые взаимодействуют между собой при проведении математических операций. Для волновой задачи расширения сферы таких аргументов оказывается пять (см. с. 55 [21]). Для задачи с двумя подвижными границами их шестнадцать. Отметим, что эта информация получена без решения самого уравнения. Определив все разновидности сложных аргументов с запаздываниями, естественно попытаться найти ту последовательность математических операций при решении уравнения для волновых задач, которая сохраняет все виды найденных аргументов. Такая последовательность была впервые найдена автором и названа – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов. Это и является ответом, касающегося второй причины. При этом имеется ввиду, что решить указанные проблемы просто методами обратных задач невозможно. Эти задачи решаются еще и обязательно с учетом наличия большого количества сложных аргументов, в том числе и нелинейных, с различными запаздываниями, а также с учетом того, что они взаимодействуют.

Тут может возникнуть вопрос: определив, например, пять разновидностей аргументов с запаздываниями, на каком основании, на чем основывается уверенность, что все эти виды аргументов будут соответствовать внутренней структуре волнового уравнения? Такая уверенность появляется уже, если рассмотреть решение Даламбера (задачи Коши) волнового уравнения. Уже там есть, но всего одна только, разновидность запаздывания [95]. Окончательно можно утвердиться в этом, когда получено точное аналитическое решение волнового уравнения в областях с подвижными границами со всеми найденными разновидностями аргументов, подстановка которого превращает левую часть волнового уравнения в нуль. Отметим, что автором впервые в математической физике определены все сложные аргументы, определен факт их взаимодействия, что позволило впервые создать методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов и получить впервые точные аналитические решения волновых задач с ПГ и ППГ.

Как видим, истиной, присущей самой природе, в данном случае явился факт распространения возмущений в сплошных средах с конечной скоростью, при математическом описании которого появились различные аргументы с запаздываниями.

3.

При изучении наук примеры полезнее правил.
И. Ньютон⁷

Автор понимает это следующим образом. С одной стороны имеется ввиду изучение уже сделанного другими. На этом основан исторический, последовательный, согласно хронологии событий подход изучения материала. А с другой – при исследовании неизвестного начинать последовательно накапливать информацию для размышления, решая более простые частные задачи. Ибо понятно, что частные решения несут на себе отпечаток (следы) точного решения и помогают осмысливать пути его получения. Такое накопление может протекать поколениями ученых. Это может протекать и один ученый на протяжении всей жизни. Так работал, например, Гаусс К.Ф.⁸ Как известно, Гаусс был несравненным вычислителем и, подобно тому, как это делали другие выдающиеся арифметики, обычно получал свои новые результаты, исходя из обширных численных вычислений, которые позволяли ему подмечать новые, глубоко скрытые математические истины, доказательства которых он получал затем нередко лишь в результате упорной, продолжительной, иногда многолетней работы. Последовательность накопления информации наблюдается и в технике. Например, шитье: шило – нитки – игла с ушком – швейная машина. Или: колесо – вал – вал с лопатками – гребной винт – турбина.

При решении проблем подвижных и подвижных проницаемых границ, как оказалось, просматриваются оба этих способа, но в основном пример Гаусса ближе к действительно произошедшему [21].

4. Что сделано впервые при решении проблем подвижных и подвижных проницаемых границ

Метод важнее чем результат, ибо
с помощью метода можно получить
бесчисленное количество новых
ценных результатов.

Л.Д. Ландау⁹

Основным результатом автор считает то, что впервые предложен и разработан новый, нетрадиционный авторский метод решения проблемы подвижных границ уравнений математической физики – это методы обратных

⁷ И. Ньютон. Английский математик, физик, механик. Одновременно с Лейбницем (и независимо) разработывал дифференциальное и интегральное исчисление.

⁸ К.Ф. Гаусс. Немецкий математик, астроном, геодезист.

⁹ Л.Д. Ландау. Нобелевский лауреат (1962), создание (совместно с Е.М. Лившицем) курса теоретической физики.

задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов. Новый подход решения проблемы подвижных границ, как и само волновое уравнение далеко выходит за рамки использования в задачах, описывающих импульсные процессы. Он позволил получить универсальные аналитические решения сложных нелинейных задач. Они пригодны для обратных и прямых задач для волнового уравнения с одной и двумя подвижными границами, одна движется вторая неподвижна [53]; с нелинейными условиями и подвижными границами [58]; с нелинейными условиями на подвижных границах. Последние два случая – дважды нелинейные задачи. При этом законы изменения скорости движения границ, величины начальных радиусов и перемещений могут быть произвольными. Полученные результаты отражают волновые процессы различной физической природы. Следует отметить, что название нетрадиционного подхода решения проблемы подвижных границ уравнений математической физики – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов удачно и точно отражает физическую и математическую суть авторского метода [1, 21, 59].

Возможности разработанного метода значительны: поставлены и решены аналитически прямые и обратные задачи особой трудности с проницаемой (излучающей) подвижными границами [2, 21, 59], законы изменения скоростей проницаемости и движения границ могут быть произвольными. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Развита методика является методологической основой изучения влияния новых, подобных нетрадиционных граничных условий. При этом решение даже дважды нелинейных задач сведено к решению алгебраического уравнения. Достоверность полученных результатов обосновывается сравнением с результатами эксперимента и решениями более сложных уравнений и систем нелинейных уравнений известными методами (характеристик, размерностей и подобия, малого параметра и т. д.), показана корректность решаемых обратных задач. Подстановка полученных решений в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль. Разработанные аналитические методы решения сложных волновых задач могут быть использованы для решения новых задач теоретической гидромеханики, теоретической физики и математической физики.

5. Управление волновыми процессами.

Подвижность и проницаемость подвижных границ как принцип управления

По мнению автора, управление возможно, когда изучение процесса достигло определенного уровня – найдены функции управления и когда осмыслены все возможные последствия управления.

Предложенный и разработанный метод решения проблем подвижных проницаемых границ уравнений математической физики позволил перейти от процессов познания волновых явлений к более сложным и важным процессам управления волновыми явлениями.

Волновое уравнение служит математической моделью многих физических процессов, необходимость управлять которыми возникает, как правило, одновременно с изучением этих явлений. Возможности управления обуславливаются как наличием точных аналитических решений обратных волновых задач (задач управления), так и в большей степени – формулировкой математических моделей, позволяющих теоретически описать практически все возможное многообразие, все мыслимые волновые поля. Такой важной математической моделью является волновое уравнение, реализуемое в областях с подвижными и подвижными проницаемыми границами.

Как известно, управление есть в общем случае функция организованных систем различной природы (биологических, физических, технических, социальных и т. д.), обеспечивающая сохранение их определенной структуры, поддержание режима деятельности, реализацию программы, цели деятельности. Задачей управления является определение функции управления. В рамках рассматриваемой математической модели под управлением понимается: первое – функция скорости (движения и проницаемости подвижной границы) или второе – функция давления (на подвижной границе). Целью исследований по вопросам управления является определение функций управления первого и второго случаев, которые обеспечивают получение заранее заданных волновых полей скорости и давления в интересующих точках, включая ближнюю зону и подвижные поверхности границ (где экспериментальное определение затруднительно или невозможно), а также целенаправленное изменение их в течение времени. Основными, главными понятиями, объясняющими свойства и возможности (управлять) упомянутой математической модели, являются подвижность и проницаемость подвижных границ, что по определению и является принципом управления.

Методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов позволили получить точные аналитические решения обратных волновых задач с подвижными границами. При решении обратных задач задается, исходя из технологических потребностей, исследуемая функция давления (или скорости) в точке волновой зоны. Полученные решения определяют исследуемые функции в любых точках и на подвижной границе. Знание функций давления или скорости на ПГ это и есть знание функций управления волновыми процессами, тем самым задача управления становится решенной. В приложениях, используя уравнения баланса энергии, связывающие давление и скорость на подвижной границе плазменного поршня с количеством вводимой энергии в канал, получаем точные аналитические зависимости. Они позволяют знать закон вводимой энергии в плазменный канал разряда или лазерного импульса, например, для получения заранее заданных волновых полей давления и скорости в сжимаемой среде [10, 11].

Таким образом видим, что управлять волновыми процессами корректно можно только по достижении определенного уровня знаний процесса. В данном случае знания точных аналитических зависимостей функций управления

первого и второго случаев (функций скорости и давления на ПГ). Без этого точного знания функций управления само управление превращается в серию попыток ощупью, с помощью проб и ошибок, чаще всего случайно определить желаемое (требуемое). Чаще всего это приводит к потерям времени, средств и даже жизней. Особенно трагичны попытки управлять таким способом, как известно, в социальной сфере, других масштабных воздействиях.

Как видим, выводы относительно возможности управления волновыми процессами имеют и более общий характер. Они несут информацию (следы) и о других более сложных процессах управления, в том числе имеющих социальный характер. Определить функции управления такими сложными системами в настоящее время не представляется возможным из-за их чрезвычайной сложности. Изучение их может происходить на этапе рассмотрения более простых моделей.

Большое значение для получения заданных форм исследуемых функций, то есть решения вопросов управления, имеет учет и использование проницаемости (излучения) подвижных границ. Подобные задачи относятся к сложному неизученному существенно нелинейному классу задач математической физики. Математическая формулировка и учет проницаемости подвижных границ произведены впервые автором [2, 21, 26]. Полученные решения пригодны для обратных и прямых задач для произвольных величин начального радиуса, перемещений, законов изменения скорости движения и проницаемости границ. Подобные задачи возникают, в частности, в гидродинамике, сейсмоакустике, при рассмотрении взрывного источника, например, электрического разряда, лазерного импульса и т. д. в жидкости, имеющей температуру близкую к критической. Действие взрывного источника приводит к интенсивному испарению с подвижной поверхности плазменной полости. В этом случае исследуемые волновые явления могут быть описаны математической моделью с подвижной проницаемой границей.

Следует отметить, что наиболее сложным и неизученным является определение функций управления для волнового уравнения с подвижными границами и нелинейными условиями на подвижной границе. При этом закон движения ПГ неизвестен и подлежит определению и может быть нелинейным. Задачи с нелинейными дополнительными условиями и подвижными границами – дважды нелинейные задачи представляют большой интерес, прикладная важность их настолько велика, что они становятся в ряд актуальнейших проблем математики, физики, механики. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов позволили получить аналитические решения этих дважды нелинейных волновых задач, при этом решение их впервые приведено к решению алгебраического квадратного уравнения [58].

Необходимым условием законченности каждой разработки является определение границ применимости физических и математических моделей и их решений. Волновое уравнение служит математической моделью многих

физических процессов. Однако при этом необходимо учитывать, что границы применимости его решений в каждом конкретном случае, для каждого исследуемого процесса могут быть свои. Отсутствие точных аналитических решений волнового уравнения с ПГ и ППГ до настоящего времени не позволяло определить границы применимости его, например, в импульсной гидродинамике и акустике. Это две дисциплины, два научных направления ведут счет времени много ранее 1717 года – времени создания волнового уравнения (Тейлор Б.¹⁰). Эти границы были неопределенными и назначались по давлению от нескольких сотен до нескольких тысяч атмосфер. Такой разброс на порядок недопустим. Полученные точные аналитические решения методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов позволили впервые и однозначно определить границы применимости волнового уравнения с ПГ и ППГ в импульсной гидродинамике и акустике [21, 26]. Это сделано в нетрадиционной форме не по давлению, что однозначно не может быть произведено, а по скорости движения границы в сжимаемой среде. Эти границы определены также для случаев подвижных проницаемых границ, что имеет большое научное и прикладное значение.

Таким образом, приходим к выводу, что логика исследований состоит в основе своей из следующей последовательности приоритетов. Среди всех достижений на первом месте стоит победа, достигнутая в поиске истины. При этом, естественно, предпочтение отдается не накопительству знаний, а искреннему, яркому исканию нового. На основе истин, присущих, что важно, самой природе, строятся математические модели и их решения. Целенаправленно накапливая и используя информацию предшественников, а также полученную в процессе решения частных задач, создавать новые нетрадиционные методы. Новые методы это средство получения бесчисленного количества ценных результатов.

Принципиально новым в развитии математической физики является нетрадиционный подход решения волновых задач в областях с подвижными границами – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов. Он позволил решить ранее нерешенные волновые задачи с ПГ и не только прямые, но и обратные; поставить и решить сложные существенно нелинейные задачи с ППГ прямые и обратные; решить аналитически дважды нелинейные задачи (с ПГ и нелинейными дополнительными условиями); свести решения дважды нелинейных задач к алгебраическому уравнению. Он позволяет решать новые классы задач теоретической гидромеханики и теоретической физики, математической физики.

Кроме того метод позволил сделать качественный шаг вперед: перейти от познания волновых явлений к более важному и сложному процессу управления волновыми явлениями. Показано, что корректное управление волновыми

¹⁰ Тейлор Брук. Английский математик. Непременный секретарь Лондонского королевского общества (1714–1718).

процессами возможно только при достижении определенного уровня знаний процесса – знаний точных аналитических зависимостей функций управления.

II. Фундаментальная основа современных наукоемких технологий

6. Некоторые аспекты (иллюстрационные) применения полученных результатов

Импульсные процессы могут служить иллюстрацией применения полученных результатов. К ним относятся электрический разряд, лазерный импульс, взрыв взрывчатых веществ и газовых смесей, удар о поверхность и т. д. в сжимаемых средах. Они являются одной из основ современных наукоемких технологий в том числе информационных (геофизика, геоакустика и т. д., разведка полезных ископаемых на суше и на море и т. д.). Теорией импульсных процессов занимались многие известные ученые, например, Седов Л.И., Лаврентьев М.А., Христианович С.А., Кочин Н.Е., Шемякин Е.И., Ландау Л.Д., Окунь И.З., Яковлев Ю.С., Баум Ф.С., Станюкович К.П., Лаврентьев М.М., Алексеев А.С., Коробейников В.П., Наугольных К.А., Рой Н.А., Лямшев Л.М., Курант Р., Фридрихс К., Харитон Ю.Б., Зельдович М.А., Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н., Лайтхилл и многие многие другие. Характерной особенностью импульсных процессов в сжимаемых средах является наличие подвижных границ раздела фаз плазма-жидкость, газ-жидкость (а также движущихся разрывов, преград и т. д.). Учет влияния этой особенности, а также величины начального радиуса необходим при изучении плазмы канала электрического разряда, лазерного импульса и т.д. в жидкости, при исследовании волновых процессов, в том числе ближней зоны расширяющейся границы плазменной полости, решении вопросов управления импульсными процессами; моделировании пробоя межэлектродного промежутка (что является отдельной сложной проблемой) и во многих других случаях, например, при очистке и обработке поверхности материалов, штамповке, дроблении, исследованиях поведения пузырьков в двухфазных средах и т. д. и т. п.; повышении износостойкости и коррозионной стойкости, воздействии на кристаллизующиеся сплавы, взаимодействии с пластинами и оболочками и многое другое. Таким образом видим, что нет такой технологии на основе импульсных процессов, где бы в основе процесса не использовалось основное уравнение математической физики – волновое с подвижными границами. Будут и другие технологии на основе волновых процессов, но всегда в основе будет волновое уравнение с ПГ. В этом непреходящая ценность волнового уравнения с ПГ и его точных решений, впервые полученных методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов.

Необходимо обратить внимание на известные важные обстоятельства. Технологии, разработанные на основе экспериментальных данных, не подкрепленные фундаментальными теоретическими разработками имеют узкую

направленность, не могут широко применяться, не тиражируются, т. е. для других родственных технологий потребуются опять дорогостоящие эксперименты, происходит также значительная потеря времени и средств. При этом зачастую, при проведении экспериментов физический смысл явлений недостаточно понятен и изучен из-за их чрезвычайной сложности. Например, физика воздействия возмущений на кристаллизующийся металл, физика развития и "залечивания" трещин при импульсной обработке и т.д., со всеми вытекающими при этом негативными последствиями. Кроме того, разрабатываемые сейчас технологии из-за тяжелого в настоящее время состояния экономики не находят как правило внедрения в производство и устаревают. Незначительное количество высоких технологий и промышленных образцов используется в современном производстве¹¹. Тогда как результаты фундаментальных исследований не устаревают, имеют непреходящую ценность и всегда будут востребованы для разработок новых наукоемких технологий сейчас и в будущем. Поэтому очевидно, что именно фундаментальные исследования должны иметь приоритеты для разработок и финансирования, это является наиболее рациональным и экономически выгодным и целесообразным¹².

7. Новые способы использования конкретных волновых процессов в конкретных наукоемких технологиях

Высокие технологии – это искусство.

Многие высокие технологии граничат с искусством, например, приготовление пищи, лекарств, вина, древних красок, "греческий огонь", дамасская сталь, технологии лечения болезней и т.д., многие изделия военной техники, "технологии" исполнения музыкальных произведений, создания художественных шедевров, "технологии" получения новых научных истин, открытий и т. д. Попадая в виде готового изделия продукты высоких технологий, даже в страну с высокой технологической культурой не могут быть воспроизведены долгое время, иногда вообще. Некоторые из них не могут быть пока описаны физико-математическими моделями.

В то же время не требует доказательств, что без математической физики невозможны современные наукоемкие технологии. Они являют собой концентрацию научных открытий многих ученых, иногда целых поколений, конструкторских и технологических разработок. Одним из основных физических явлений в современных наукоемких технологиях на основе импульсных процессов является движение подвижных границ раздела фаз плазма-жидкость, газ-жидкость, которые генерируют ударные волны, волны возмущения, потоки

¹¹ Вісник НАНУ. – 2002. – № 6. – С. 23.

¹² При наличии высокой технологической культуры Япония тратит десятки млрд долларов на создание своей фундаментальной науки.

среды и т. д., используемые в различных технологиях, при математическом описании которых приходим к задачам с подвижными проницаемыми границами. Из упомянутых импульсных процессов подводный электровзрыв является самым мощным управляемым генератором кавитационных явлений, во много раз превосходящий возможности механических излучателей. В последние годы установлено, что подводный электрический взрыв в своем акустическом спектре генерирует не только низкочастотные акустические колебания, но и ультразвуковые, вплоть до ста килогерц.

Приведем некоторые примеры новых способов использования волновых процессов, вызванных электрическим разрядом в жидкости:

взрыв тонких угольных проводников (волокон) – получение фуллеренов, необходимых для производства, например, специальных радиотехнических изделий; получение оксидов металлов, находящихся применение в производстве красок, конструкционной керамики, используемой, например, в машиностроении, покрытии космических аппаратов многоразового использования, производстве сверхпроводящих материалов (сверхпроводников) и т. д.; разрядно-импульсная технология чистого измельчения различных радиотехнических материалов, в частности люминофоров; получение высококачественных льняных волокон с целью применения их в текстильной промышленности и при производстве медицинской ваты, а также других стратегических материалов; дробление гравия, бетонных блоков, отходов фарфорового производства и т. д. в широком спектре от крупнокускового разрушения неметаллических материалов до сверхтонкого измельчения; очистка литья – удаление стержневых смесей из отливок; электровзрывная раздача, закрепление концов труб в трубных досках теплообменных аппаратов путем электровзрывной раздачи; электроразрядная обработка нефтяных и водозаборных скважин с целью повышения их дебита (повышение нефтеотдачи пластов и т.д.); защита рыбной молоди от попадания в водозаборы систем хозяйственного водоснабжения; штамповка изделий из листовой заготовки; создание средств акустического противодействия в морях и океанах; создание генерирующего зондирующего сигнала, используемого при разведке полезных ископаемых; приготовление катализаторов и интенсификация каталитических процессов; устройство подготовки просадочных грунтов под строительство зданий и сооружений; электровзрывная технология водоподготовки и обезвреживания сточных вод путем генерирования высокоинтенсивных кавитационных процессов; послойная электроразрядное щадящее освобождение высокоактивных лав аварийного четвертого блока ЧАЭС от наслоений и многое другое. Более подробно об этих и других технологиях, не имеющих аналогов в мире, на основе электрического разряда в жидкости смотри работы [96] и [86].

Значение решения проблем подвижных проницаемых границ и вопросов управления волновыми процессами не ограничивается использованием их для разработок новых технологий. Разработанные новые подходы по созданию

аналитических методов решения сложных волновых задач, в том числе дважды нелинейных, могут быть использованы для создания новых методов математической физики для решения задач теоретической гидромеханики и теоретической физики.

Содержание п.п. 1–5, в которых описан путь исследований и отмеченного в эпитафах, составляет необходимые условия получения новых истин. Несоблюдение даже одного из них недопустимо, что очевидно. Достаточные условия, по мнению автора, содержатся в индивидуальной философии успеха.

POSTFACE
Wave Processes –
Fundamental Basis of Modern High Technologies
(to the book "Waves in the regions with moving permeable boundaries.
Control questions" by V. S. Krutikov)

One is blessed who got the victory
not with blood, but with his mind.
One is blessed who managed to find
Archimedean point in his own self.
F.I. Tyutchev*

The "technologies" of getting scientific results, logic of scientific discoveries is especially individual. These questions are not solved finally and for the present, it is impossible to teach it. Special analysis show that only a small percentage (about two) of all defended Ph.D. and doctoral theses contains a scientific novelty. The same small percent, – about two and a half from successful businessmen among the enormous quantity of those who carry on business in America. For all seeming triviality, the stated questions have a great scientific and applied significance. Therefore, it's rightful to describe and enumerate at one time not only scientific results but also technology, logic of scientific discoveries what is especially relevant for wave processes and has direct relation to the theme of the given work. At present time, one has just to accumulate and comprehend individual philosophy of each research worker**.

* Блажен, кто в наши дни Победу,
Добыл не кровью, а умом.
Блажен, кто точку Архимеда
Сумел найти в себе самом.
Ф.И. Тютчев

Krutikov Victor Sergeevich. Doctor of physico-mathematical science. Leading research officer of the Institute of Pulse Processes and Technologies of National Academy of Science, Ukraine (Nikolaev). 2002.

** The American Biographical Institute USA and International Biographical Centre Cambridge CB2 3QP England, whose questionnaires contain the paragraph "Individual philosophy of success" and whose staff is more than 14000 of highly experienced and high-paid experts and specialized scientific institutions are engaged with it (see Great Minds of 21st Century).

It is important to get remarkable, great result, and it is more important to conceive the ways of its getting. These questions interested many people long time ago, for example, Leibniz ***. The works of Henri Poincaré "Science and hypothesis", "Value of science", "Science and method", "Last thoughts", "On science" (Moscow: Science, 1983) and others are devoted to examination of cognition routes in mathematics, mechanics, physics. It seems that a lot of research workers, including Poincaré got scientific results at first, and then, looking back at their and not only their own traversed path they comprehended it. This process is essential and productive. Some basic ideas are selected and extracted to the epigraphs with similar purpose. It is worth to pay attention to how harmoniously they blend with the sequence of operations as for the problem-solving of moving permeable boundaries and problems of wave processes control. It is evidence of many things and first of that knowledge put in them which helps to get new knowledge, new truths.

This article is unsystematic account on the given question. The purpose of this publication is an opportunity, kindly afforded by the editors of "Bulletin of the National Academy of Science of Ukraine", to share some considerations connected with attempts to solve the most difficult problems of mathematical physics which existed since the moment of wave equation creation. It would serve the continuation of accumulation of information as for the comprehension of cognition ways by the personal example of complicated scientific problems solving.

*** Leibniz G.V. German mathematician. One of the founders of differential and integral calculus.

I. Wave processes

The beauty and power of mental work lies
not in a large number of acquired knowledge
and even not in their systematic character,
but in an outstanding striking retrieval.

V.I. Vernadsky*

1. Wave process is one of the most important forms of substance motion. To some extent undulatory movements are inherent to all objects of material world without exception. Wave processes are fundamental basis of development of natural science, modern techniques and high technologies. Therefore the problems-solving of mathematical physics with its most complicated problems of moving boundaries (MB), moving permeable boundaries (MPB) and the problems of wave processes control acquire the great importance. Such problems for regions with moving boundaries are complicated and by-way¹.

Both linear and non-linear wave processes are intensely studied in electrodynamics, plasma physics, optics, fluid dynamics, acoustics etc. The mechanisms of spread of disturbance naturally differ greatly one from another. The difference of physical mechanisms which incarnate wave process leads to various differing one from other equations sets. However there is often no necessity to analyze the initial often complicated equations sets in order to understand the most fundamental phenomena peculiar to the waves of different nature (interference, diffraction, dispersion, reverberation, refraction, dispersion etc). As a rule, elementary effects are described with the help of simple and therefore universal mathematic models. Hence it is obviously possible to make a conclusion that the purpose of the research has to be not only the composition of especially complicated systems of differential equations in partial derivatives and their solution with the help of powerful computers, but also reduction of task solution to the simplest mathematical model and receipt of analytical solution with the determination of its (model) validity limits².

It is wave equation that serves as such a universal mathematical model that describes a lot of physical processes. It is also necessary to take into consideration that in accordance with the number of circumstances, the direct considering of all

* V.I. Vernadsky. The first president of the Academy of Sciences of Ukraine. The founder of biogeochemistry, geochemistry, radiogeology.

¹ Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Science 1972.

² Lavrentyev M.A., Shabat B.V. Problems of fluid dynamics and their mathematical models. Moscow: Science. 1973.

factors which determine the complex phenomenon is a rather difficult task, and the task solution is got combining the data according to simpler model problems, discovered at the analysis stage. Such models are scrutinized with the help of various methods, among which analytical methods of solution which give the most precious results of absolute character advanced to the forefront. At the same time physical experiment has a criterion value, and the potent side of numerical methods of solution is their efficiency. The stated raises the role and shows the importance of solutions of wave equation in the regions with moving boundaries, as rather often the simplest model problems lead right to it.

However, even if the process under consideration is described with the help of linear equation, the presence of moving boundaries makes the problem substantially nonlinear, the sum of two solutions is not solution, and the method of superposition is inapplicable. The essential nonlinearity of the problem of moving boundaries for equations of parabolic type known as the problem of Stephen is analyzed in the works of G.A. Grinberg; for the wave equation it is shown in the works of the author^{3,4}. It was the reason of the fact that there were no methods of exact analytical solution of such tasks. Exact solutions of this sort of problems got mainly with the help of successful conjectures are known only for some particular kind of boundary conditions. As for the wave equation, this is the only one J. Taylor's solution (1946) of particular kind of direct problem of sphere expansion with steady speed in compressible medium. Direct problem when the conditions are specified at the moving boundary; inverse problem when the additional conditions are specified at a fixed point of wave zone and it is necessary to determine the functions under consideration in other points, including the near-field zone and the surface of moving boundaries. At the same time, the law of boundary moving is unknown, is to be determined, and can be non-linear. The presence of permeability of moving boundaries amends these concepts, new concepts – compound additional conditions – appear^{5,6}. Let's give a definition of some terms: wave zone, near-field region, surface of moving boundaries. In mathematical describing of processes with the help of wave equation and when the additional conditions are defined correctly, the following cases are discriminated: *a* – wave zone, when the given function (e.g. the pressure function) is determined with the help of Langrange-Cauchy linear integral; *b* – near-field region – the given function (of pressure) is determined with the help of Langrange-Cauchy linear integral; *c* – the given function on the surface of moving boundary is determined with the help of Langrange-Cauchy nonlinear integral (nonlinear additional clause), at the same time nonlinear law of radius change of the moving surface of the boundary, which is known beforehand is included in compound arguments of these functions on the moving boundary.

³ Krutikov V.S. One-dimensional problems of continuum mechanics with moving boundaries. Kiev: Naukova Dumka. 1985.

⁴ Krutikov V.S. Acoustical Physics. Vol. 42, no. 4, 1996. pp. 471–477.

⁵ Krutikov V.S. //Dokl. Akad. Nauk. (Russia). 1993. Vol.333. № 4. pp. 512–514.

⁶ Krutikov V.S. // Doklady Physics. Vol.44, no. 10. 1999. pp. 674–677.

Nonlinear additional clauses are the first nonlinearity; the presence of moving boundaries is the second nonlinearity; if there simultaneously exist these two nonlinearities, the problem is supposed to be nonlinear twice.

By the interaction of arguments, the following is meant: the functions of additional clause, which have one sort of arguments, are put in an interim decision, which has another sort of arguments. As a result, we get the solution with the third sort of the argument.

The researches had to accept various assumptions: to change the boundary conditions, to transfer the boundary conditions to fixed boundaries or to replace the actions of moving boundaries by the system of peculiarities. It leads to the limited nature of decisions, and in some cases to unacceptable results. It is indicative that the solution of the wave equation was got by d'Alembert* (1747 г.): Cauchy problem – initial conditions are known, boundary conditions are absent, and the functions form that depended on boundary conditions remained unknown. In a known summarizing of a general method of terminal integral transformations (Koshlyakov N.S., Grinberg G.A.) for direct problems, "momentary" eigenfunctions expansion is used. However, it leads to the solution of the infinite system of first-order differential equations. Traditional approaches appeared to be unacceptable for the solution of the moving boundaries problem, it was necessary to look for the new ones.

2.

Mathematical truths are deduced from
a small number of obvious suppositions
with the help of series of impeccable
argumentations: these truths are inherent
not only to us, but to the nature itself.

Henri Poincar**

The basis of mathematic physics is three main equations: heat conduction equation, wave and Laplace's equation. The largest quantity of processes is described with the help of wave equations.

Before it could be solved only numerically, that is in the regions with moving boundaries. Let's ask ourselves the following question: why wasn't solved the main equation of mathematical physics, that is the wave equation in the regions with

* d'Alembert. French mathematician, mechanic. His works together with the investigations of L.Euler and D.I. Bernoulli served as the basis of mathematical physics.

** Henri Poincar. French mathematician, whose works together with the works of Lorentz H.A. and Minkovsky G. lie at the heart of the theory of relativity.

moving boundaries? From the author's opinion there are two reasons. The first one is that only the direct problems were solved (G. Taylor), what resulted in insuperable mathematical difficulties under voluntary boundary conditions. The second one is that fundamental fact of all wave phenomena in compressible spheres of disturbances propagation with finite speed was not taken into account. The author managed to overcome these difficulties in the following way. First of all let's examine the fact of disturbances propagation in compressible sphere with the finite speed what is directly connected with the concept of lag, and in its mathematical describing it's connected with the concepts of compound arguments, the quantity of compound arguments, and with the interaction of compound nonlinear arguments. It is impossible to get accurate analytical solutions of inverse and direct wave problems in the regions with moving boundaries without the comprehension of these concepts and their application. Let disturbance appears at some point of time on the surface of finite size of initial radius, for example, on the surface of sphere with the source of its expansion. Waves, generated in this way are used in different technologies. Then in the point of wave zone in some distance from the center of the sphere the disturbance appears not in the moment of beginning of wave expansion but after some dead time, which is equal to the quotient from the division of distance from the source surface of the sphere to the point of wave zone by the speed of disturbance expansion according concrete medium³. Ratiocinating in the same way we would get some more varieties of arguments with lags, which interact when mathematical operations are carried out. There appears to be five of such arguments for the wave problem of sphere expansion (see p. 55³). There are sixteen of them for the problem with two moving boundaries. It is significant that this information is got without the solution of the equation itself. Having determined all varieties of compound arguments with the lags, it is natural to try to find that succession of mathematical operations in solving an equation for wave problems, which keeps all kinds of found arguments. For the first such a succession was found by the author and named as the methods of inverse problems with regard for the interaction of nonlinear arguments. This is the answer concerning the second reason. At the same time it is meant that it is impossible to solve the pointed problems just with the help of the methods of inverse problems. These problems are also necessarily solved with regard for a great number of compound arguments, including nonlinear ones with various lags and also taking into consideration the fact that they interact.

There the following question may appear: having determined, for example five varieties of arguments with lags, on what ground, on what is the confidence based that all these kinds of arguments would correspond the internal structure of wave equation?

Such a confidence appears already if one examines d'Alembert's solution (of Cauchy problem) of wave equation. There already exists, though the only one, variety of lag*. It's possible to become firmly convinced in it when an accurate

* Similar kind of lag see. p. 276 Isakov M.A. "General acoustics". Moscow: Science, 1973.

analytical development of wave equation in the regions with moving boundaries with all found varieties of arguments, the substitution of which turns the left side of the wave equation into zero. It is significant that for the first time in mathematical physics the author determined all compound arguments, and the fact of their interaction. It allowed for the first time to create the methods of inverse problems with regard for the interaction of nonlinear arguments and for the first time it allowed to get accurate analytical developments of wave problems with moving boundaries and moving permeable boundaries .

As we can see in this case the truth, inherent to the nature itself, is the fact of disturbance expansion in continuum with the finite speed in which mathematical describing appeared various arguments with delays.

3.

Examples are more useful than
rules when sciences are studied.
I. Newton*.

The author understands it in the following way. On the one hand, the study of the done by other people is meant. Historical, consecutive, according the chronology of events, approach to the study of the material is based on it. On the other hand, it is necessary to begin to gather information for reflection gradually while studying something unknown and solving more simple particular problems. Since it is clear that particular solutions bear the marks of accurate development and help to comprehend the ways of its receipt. Such an accumulation can be carried out by the generations of scientists. It can be also done and by the only one scientist in the course of his whole life. For example, Gauss K.F. worked in such a way**. As is well known, Gauss was an incomparable calculator and, just as other outstanding arithmeticians did, he usually got his new results from extensive numerical calculations which helped him to notice new, deeply concealed mathematical truths, the proofs of which he got quite often only in the result of painstaking, enduring, sometimes long-term work. The succession of accumulation of information is also observed in technique. For instance, stitching: awl – threads – needle with an eye – sewing machine. Or another example: wheel – axle – axle with blades – screw propeller – turbine.

As it turned out, in solving the problems of moving and moving permeable boundaries, both of these methods are examined, but in the main the example of Gauss is closer to what has really happened³.

* I. Newton. English mathematician, physicist, mechanic. Along with Leibnitz (and independently) worked out differential and integral calculus.

** K.F. Gauss. German mathematician, astronomer, land-surveyor.

4. What was done for the first time in solving of problems of moving and moving permeable boundaries

The method is more important than the result as it is possible to get an infinite number of new precious results with the help of a method.

L.D. Landau*.

The author considers the main result to be the fact that for the first time the new off-center author's method for solving the problem of moving boundaries of mathematical physics equations was proposed and devised – these are the methods of inverse problems with regard for the interaction of nonlinear arguments. The new method of moving boundaries problem solving, just as the wave equation itself lie outside the scope of use in the problems which describe pulse processes. It let to get universal analytical solutions of intricate nonlinear problems. They are suitable for inverse and direct problems for a wave equation with one and two moving boundaries, one of them moves and another one is fixed⁸; with nonlinear conditions and moving boundaries⁹; with nonlinear conditions at moving boundaries. Two latter cases are twice nonlinear problems. At the same time the laws of change of boundary moving speed, data of initial radiuses and displacements may be voluntary. Received results reflect the wave processes of various physical natures. It is necessary to point out that name of off-center approach of moving boundaries equations of mathematical physics problem solving – the methods of inverse problems with regard for the interaction of nonlinear arguments reflects physical and mathematical essence of the author's method very successfully and exactly^{3,5,7}.

The abilities of the developed method considerable: analytically direct and inverse problems of special difficulty with permeable (radiant) moving boundaries are posed and solved^{3,5,6}, the laws of change of permeability speed and speed of boundary moving may be voluntary. Such problems in mathematical physics were not examined. The developed system is a methodological basis of study of the influence of new, similar off-center boundary conditions. At the same time, the solution of twice-nonlinear problems is brought to the algebraic equation solving. Trustworthiness of findings is proved by the comparison with the results of experiment and solutions of more complicated equations and sets of nonlinear equations with the help of known methods (characteristics, dimensions and similarity, small parameter etc.), the correctness of current inverse problems is shown. Substitution of received solutions into the wave equation turns its left side in zero. Developed analytical methods of compound wave problems solution may be used for the solution of new problems of theoretical fluid mechanics, theoretical physics and mathematical physics.

* L.D. Landau. The Nobel Prize laureate (1962), the creation (together with E.M. Livshitz) of the course of theoretical physics.

⁷ Krutikov V.S. // Doklady Mathematics. Vol. 58, № 1. 1999, pp. 10–13.

⁸ Krutikov V.S. // Mechanics of rigid body. Izv. Akad. Nauk. SSSR. 1992.

⁹ Krutikov V.S. // Applied mathematics and mechanics. 1991.

5. Wave processes control. The mobility and permeability of moving boundaries as the principle of control

The control is possible when the study of the process reached certain level and when all possible control consequences are conceived.

Author

The proposed and developed method of solution of moving permeable boundaries problems of mathematical physics equations allowed to pass from the processes of cognition of wave phenomena to more complex and important processes of wave phenomena control.

The wave equation serves as the mathematical model of a great number of physical processes, the necessity of their control appears, as a rule, simultaneously with the study of these phenomena. The abilities of control are determined both by the availability of exact analytical solutions of inverse wave problems (control problems), and to a greater extent – by the formulating of mathematical models, which let to describe practically all possible variety, all conceivable wave fields in a theoretical way. Wave equation realized in the regions with moving and moving permeable boundaries is such an important mathematical model.

As is well known, control, in the general case, is the function of organized systems of various nature (biological, physical, technical, social etc.), which describes the preservation of their definite structure, maintenance of activity regulations, realization of the program, and purposes of the activity. The task of control is the determination of control function. In the context of examined mathematical model under control is understood the following: the first one – velocity function (moving and permeable moving boundary) or the second – pressure function (at the moving boundary). The purpose of investigations at the control problems is the definition of control functions of the first and second cases, which supply the receipt of adjusted wave regions of velocity and pressure in necessary points, including the near-field region and moving surfaces of boundaries (where the experimental determination passes with difficulty or impossible), and also their purposeful change during certain period of time.

The main, basic concepts which explain properties and possibilities (to control) of named mathematical model, are mobility and permeability of moving boundaries, what is the control principle by definition.

The methods of inverse problems with regard for the interaction of nonlinear arguments allowed to get exact analytical solutions of inverse wave problems with moving boundaries. In inverse problems solving the investigated pressure function is defined, reasoning from technological necessities, the pressure function (or velocity) under consideration in the point of wave zone. The received solutions determine the examined functions in any points and at moving boundary. The knowledge of pressure and velocity functions at moving boundaries is the knowledge of control functions of wave processes; thereby the control problem

becomes decided. In applications, using the energy balance equations, which connect pressure and velocity at moving boundary of plasma piston with the quantity of input energy in the channel, we get accurate analytical dependences. They let to know the law of input energy in plasma channel of discharge or laser impulse, for example, for the receipt of adjusted pressure and velocity wave fields in compressible media^{10,11}.

Thus, we see that it is possible to control wave processes in an accurate way only on reaching the definite level of knowledge of the process. In this case the knowledge of exact analytical dependences of control functions of the first and second cases (velocity and pressure functions at moving boundaries). Without this exact knowledge of control functions the control itself turns into the series of attempts to determine the wishful (required) thing gropingly, with the help of trials and mistakes, mostly accidentally. Frequently it leads to wastes of time, funds and even lives. As it is well-known, especially tragic are attempts of such a control in a social sphere.

As we see, the conclusions concerning the possibility of wave processes control also have more general character. They bear information (signs) and of others more complicated control processes, including those ones which have social character. At present time there is no possibility to define control functions with the help of such complex systems because of their extreme difficulty. Their study may take place on the stage of examination of more simple models.

Registration and use of permeability (radiation) of moving boundaries have a great significance for the receipt of the adjusted forms of examined functions, that is the control problems solution. Such problems belong to complex unexplored essentially nonlinear class of problems of mathematical physics. Mathematical formulating and regard of permeability of moving boundaries are executed at first by the author^{3,4,6}.

Received solutions fit for inverse and direct problems for voluntary values of initial radius, displacements, laws of change of rate of movement and permeability of boundaries. Such problems appear, in particular, in fluid dynamics, seism acoustics, at examination of dynamite source, for instance, of electric discharge, laser pulse etc. in fluid, which has the temperature close to critical one. The effect of dynamite source results in intense vaporization from the moving surface of plasma cavity. In this case wave phenomena under research may be described with the help of mathematical model with moving permeable boundary.

It should be noted that the most complex and unexplored is the definition of control function for the wave equation with moving boundaries and nonlinear conditions at moving boundary. At the same time the law of motion of moving boundaries is unknown, is to be defined, and may be nonlinear. The problems with nonlinear additional conditions and moving boundaries are twice nonlinear problems and they are of great interest, their applied importance is so great that they become

¹⁰ V.S. Krutikov // Technical Physics Letters, vol.29, No. 12, 2003.

¹¹ V.S. Krutikov//Technical Physics Letters, vol.29, No. 10, 2003.

in the number of the issues of the day of mathematics, physics, and mechanics. Such problems in mathematical physics were not examined. The methods of inverse problems with due regard for interaction of nonlinear arguments allowed to get analytical solutions of these twice nonlinear wave problems, and their solution is for the first time reduced to the solution of the algebraic quadratic equation⁹.

The definition of validity limits of physical and mathematical models and their solutions is the requirement of completeness of every elaboration. The wave equation is the mathematical model of many physical processes. However for all that it is necessary to take into account that the validity limits of its solutions may be different in every particular case, for every process under investigation. The absence of exact analytical solutions for wave equations with moving boundary and moving permeable boundary did not allow to define its validity limits in impulse fluid dynamics and acoustics, for example, to present day. These two disciplines, two scientific trends began before the year 1717 – the time of creation of wave equation (Taylor B.*). These limits were vague and were set according the pressure from several hundreds to several thousands atmospheres. Such a dispersion in dozens of times is intolerable. Exact analytical solutions, received with the help of inverse problems methods with regard for the interaction of nonlinear arguments, allowed to define the validity limits of wave equation with moving boundaries и moving permeable boundary in impulse fluid dynamics and acoustics for the first time and unambiguously^{3,4}. It was carried out in nontraditional form – not according the pressure, what cannot be produced unambiguously, but according the velocity of boundary moving in compressible medium.

These limits are also defined for the cases of moving permeable boundaries, what has great scientific and applied significance.

Thus, we come to a conclusion that the logic of investigations lies basically in the following sequence of priorities. Victory, achieved in search of truth, heads the list of all achievements. Naturally, the preference is given not to knowledge hoarding, but to sincere, outstanding search of new. Mathematical models and their solutions are built on the basis of truths, peculiar to nature itself, what is very important. Gathering and using both the information of the ancestors and the one got in the process of particular problems solution in a purposeful way, to create new untraditional methods. New methods are the mean of receipt of infinite number of valuable results.

The off-center approach of wave problems solution in the regions with moving boundaries – the methods of inverse problems with the regard of nonlinear arguments interaction is fundamentally new in the development of mathematical physics. It allowed to solve not only direct wave problems with moving boundaries, but also inverse ones which weren't solved before; set and solve complex substantially nonlinear problems with moving permeable boundary – both direct and inverse; to solve analytically twice nonlinear problems (with moving boundaries and

* Taylor Brook. English mathematician. Permanent secretary London royal community (1714–1718).

nonlinear additional conditions); to reduce the solutions of twice nonlinear problems to algebraic equation. It allows to solve new classes of problems of theoretical fluid mechanics and theoretical physics, mathematical physics.

Moreover, the method allowed making a big qualitative step forward: to pass from the learning of wave phenomena to more important and complicated wave phenomena control process. It is shown that the correct wave processes control is possible only when certain level of knowledge of the process is achieved – the knowledge of exact analytical dependence of control functions.

II. Fundamental basis of modern high technologies

6. Some aspects (illustrating) of application of received results

Pulse processes may serve as an illustration of application of received results. Electric discharge, laser pulse, explosion of charge and premixed gases, a blow against the surface etc. in compressible media belong to them. They are one of the essential principles of modern high technologies including informational ones (geophysics, geoacoustics etc., mineral exploration overland and at sea etc.). Many outstanding scientists were engaged in the theory of pulse processes, amidst them are the following: Sedov L.I., Lavrentiev M.A., Christianovich S.A., Kochin N.E., Shemyakin E.I., Landau L.D., Okun' I.Z., Yakovlev Yu.S., Baum F.S., Stanyukovich K.P., Laurentiev M.M., Alekseev A.S., Korobeynikov V.P., Naugolnykh K.A., Roy N.A., Lyamshev L.M., Kurant R., Fridrichs K., Charlton Yu.B., Zeldovich M.A., Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N., Lighthill and a lot of other people.

Characteristic feature of pulse processes in compressible media is the presence of moving boundaries of phase division plasma-fluid, gas-fluid (and also of moving explosions, barriers etc.). Taking into account the influence of this peculiarity and also of the initial radius value is necessary while studying the plasma of electric discharge channel, laser pulse etc. in fluid, while studying wave processes, including the ones of the near-field region of the expanding boundary of plasma cavity, the solution of problems pulse processes control; modeling of disruption (breakdown) of spark gap (what is a separate complex problem) and in many other cases, for example, at materials surface cleaning and treatment, punching, fragmentation, investigations of behaviour of bubbles in two-phase media etc. and so on; growth of wear-resistance and corrosion resistance, influence on crystallizing alloy, interaction with plates and jackets and lots of other. Hence we see that there is no such a technology on basis of pulse processes, where the main equation of mathematical physics – wave with moving boundaries – wouldn't be used at the heart of the processes. There will also be other technologies on basis of wave processes, but wave equation with moving boundaries would also be at their heart. This is an imperishable value wave equation with moving boundaries, and its exact solutions, which were at first acquired with the help of inverse problems methods with regard of nonlinear arguments interaction.

It is necessary to pay attention to known important circumstances. Technologies, developed on the basis of experimental data, without support of fundamental theoretical elaborations have narrow orientation, cannot be widely used, aren't replicate, that is expensive experiments will be again necessary for another allied technologies, a considerable waste of time and funds. However, for all that rather often when experiments are made the physical sense of phenomena is not comprehensible and studied enough because of their great difficulty. For instance, physics of perturbation effects on crystallizing metal, development physics and "healing" of cracks formed during pulse processing etc., with all following negative consequence. Besides, nowadays, as a rule, workable technologies do not find manufacturing application and become out-of-date because of an economical grave condition. Minor number of high technologies and industrial standards are used in modern manufacture*. As soon as the results of fundamental researches do not become out-of-date, are of imperishable value and will always be wanted for the elaboration of new high technologies both now and then. That's why it's evident that fundamental researches should have priorities for elaborations and financing, it is the most efficient and economically profitable, advantageous and purposeful way**.

7. New ways of use of particular wave processes in particular high technologies

High technologies – are art.

A lot of high technologies border on art, for example, cooking, formulation of drugs, wine making, preparation of paints, "Greek fire", damask, the technologies of treatment etc., many products of defense technology, "technology" of performance of musical compositions, creation of artistic masterpieces, "technologies" of getting of new scientific truths, discoveries etc. Coming in the form of complete product even to the country with high technological culture, the products of high technologies cannot be reproduced for a long time, sometimes never at all. Yet some of them cannot be described with the help of physico-mathematical models.

At the same time it does not acquire proves that modern high technologies are impossible without mathematical physics. They are the concentration of scientific discoveries of many scientists, sometimes of the whole generations, engineering and technological developments. One of the main physical phenomena of modern higher technologies on the basis of pulse processes is the motion of moving boundaries of the division of plasma-fluid phase, gas-fluid, which generate shock waves, perturbation waves, media waves etc., used in various technologies, at which mathematical description we come to the problems of moving permeable boundaries. Among the described pulse processes, underwater electric explosion is the most powerful controlled generator of cavitation phenomena, which exceeds the

* Visnik of National Academy of Sciences of Ukraine. 2002, № 6, p. 23.

** In the presence of high technological culture Japan spends dozens of milliards of dollars on the creation of their fundamental science.

possibilities of mechanic oscillators. Recently it was established that underwater electric explosion in its acoustic spectrum generates not only low-frequency vibrations, but also ultrasound ones to the extend of a hundred KHz.

Let's give some examples of new methods of use of wave processes, induced by electric discharge in fluid: the explosion of thin coal conductors (fibers) – the receipt of fullerenes, necessary for manufacture, for example, of special radio technical products; the receipt of metals oxides, which find their application in the production of paint, structural ceramics, used, for example, in mechanical engineering, covering of spacecrafts of nonexpendable usage, the production of superconducting materials (superconductor) etc.; discharge-pulse technology of pure decomposition of various radio materials, namely of phosphor; the receipt of high quality flax fibers with the purpose of their application in textile manufacture and at production of medicinal cotton, and also of other strategical materials; breaking up of gravel, cement blocks, wastes of porcelain manufacture etc. in a wide spectrum from lumpy breaking up of non-metallic materials to ultrafine pounding;

moulding refinement – the delete of core sand mixture from mouldings; electroblasting diameter extension (extension of size), ends fixity of tubes in tube plates of heat-exchange apparatuses by means of electroblasting diameter extension (extension of size); sputter-ion processing of oil and water wells on purpose of rising of their flow rate (increase of oil recovery of plates etc.); defence of young fish from getting to water supply points of water supply systems; stamping of goods from plate stock; the creation of acoustic resistance devises in seas and oceans; the creation of generative probing signal, used at mineral exploration; catalysts preparation and intensification of catalytic processes; the preparation device of subsided rocks for the construction of buildings and erections; electroblasting technology of water conditioning and sterilization of sewage by means of generation of high-level cavitation processes; layer-by-layer sputter-ion sparing release of high-radiation lavas safety fourth block Chernobyl nuclear power-station from depositions and lots of others. See works* and** to know in details about these and other technologies, which have no analogues in the world on the basis of electric discharge in fluid.

The significance of solution to moving permeable boundaries problems and wave processes control problems is not limited by their usage for the elaboration of new technologies. New developed approaches as for the creation of analytical methods of complex wave problems solution, including twice nonlinear, can be used for the creation of new methods of mathematical physics for solving of theoretical fluid mechanics and theoretical physics problems.

Furthermore, it's necessary to mention the following. And astonishing exceptional number of applications of the wave equation "from the waves in the oceans of water, air and ether", as Russell would tell, to the waves, describing the

* I.S. Shvetz// Theory, experiment, practice, sputter-ion technologies. Nikolaev. Atoll, 2002, edition 4, p. 3–6.

** G.A. Gulij. Scientific bases sputter-ion technologies. Kiev:Naukova dumka. 1990.

elementary particles. Nowadays the wave equation became so customary and usual, that nobody is surprised at its effectiveness any longer. However, if one tries to comprehend in one's mind everything that had been done with the help of this equation, simply to imagine what a wealth of natural phenomena is hiding behind such a simple formula, the epithets "astonishing" and "extraordinary" would seem inappropriate. Once, an eminent contemporary physicist wrote a popular article "On the incomprehensible effectiveness of mathematics in natural sciences". There is surely something incomprehensible in the effectiveness of the wave equation, no matter what everything-can-explain people say*. Evidently, now the effectiveness of the wave equation rises repeatedly due to the presence of exact analytical solutions of inverse (and direct) wave problems in the regions with MB and MPB, which were for the first time received by the methods of inverse problems taking into account the interaction of nonlinear arguments [2, 4, 5, 15].

A marvelous mystery of correspondence of mathematical language to physics laws is a wonderful gift we are unable to understand and the one we are possibly unworthy of. We have to be grateful for this gift. We have to hope that it will not leave us in the next generations and that it will – either it's good or bad – develop for our great satisfaction, and, perhaps, for the growing anxiety, broadening the sphere of knowledge of the outward things**.

The content of paragraphs 1-5, which contain the investigations development descriptions and mentioned in epigraphs, composes the necessary conditions of getting the new truths. It is evident that non-observance of the only one of them is impossible. From the author's point of view, sufficient conditions are in individual philosophy of success.

It is worth to cite the optimistic words of d'Aalamber instead of conclusion: work, work, absolute comprehension comes later. As we see, it took three hundred years to understand the essence to take into consideration the influence of mobility and permeability of moving boundaries on wave processes [110].

* Philippov A.T. *Mnogolikiy soliton*. M.: Nauka. – 1990. – 297 p.

** E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, *Comm. Pure and Appl. Math.*

131, 1 (1960). Лекция в честь Рихарда Куранта, прочитанная 11 мая 1959 г. в Нью-Йоркском университете. Перевод В.А. Белокопя и В.А. Угарова.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Более важными следует считать общие концепции, взгляды, теории, законы и принципы [106]. В этом смысле наиболее важными следует считать волновые процессы и вопросы управления ими. Данная публикация рассчитана на широкую научную аудиторию, чтобы довести до читателя прежде всего физический смысл рассматриваемых явлений, показать, что нового оно привнесло в развитие соответствующего направления, показать, что путь исследования не возник "из ничего", а полученные результаты всего лишь "камень, который стоил ему целой жизни" [107]. Работа является конспективно сжатой информацией содержания, написанной автором монографии.

Необходимо сказать следующее. Удивительно необычайное число приложений волнового уравнения "от волн в океанах воды, воздуха и эфира" [98] до волн, описывающих элементарные частицы. В наше время волновое уравнение стало настолько привычным, что его эффективности никто уже не удивляется. Однако, если попытаться мысленно охватить все, что было сделано с помощью этого уравнения, вообразить, какое богатство явлений природы скрывается за столь простой формулой, то эпитеты "удивительное" и "необычайное" не покажутся неуместными. Один выдающийся физик как-то написал популярную статью "О непостижимой эффективности математики в естественных науках" [92]. В эффективности волнового уравнения конечно есть что-то непостижимое, чтобы ни говорили люди, которые могут объяснить все [98]. Как видим, эффективность волнового уравнения многократно возрастает теперь еще и наличием точных аналитических решений обратных (и прямых) волновых задач в областях с ПГ и ППП, полученных методами обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов. При этом простая истина состоит в том, что ни измерение, ни эксперимент, ни наблюдение невозможны, без соответствующей **теоретической** схемы [108]. При разработке подобных схем существенную роль играют функции управления, найденные выше. Без этих функций управления корректно построить такие схемы невозможно. Кроме того, когда создается удачная модель физического явления, т. е. модель, которая позволяет делать точные вычисления и предсказания, то сама математическая

структура модели открывает новые стороны этих явлений. В результате "исследования внутренней структуры модели" могут изменить и расширить наши представления о физических явлениях [89] Т.1, С. 7.

Внушает уверенность следующее. Волновое уравнение и его точные аналитические решения созданы на явлениях, присущих самой природе, явлениях распространения возмущений в сплошных средах с конечной скоростью. Физически очевидно, что волновые явления, основные явления, присущие всем без исключения объектам, своей главной, существенной частью находят свое описание – отражение в волновом уравнении, "чудесном основном уравнении математической физики". Остальные уравнения, например, параболического типа и т. д. в этом смысле "не физичны", так как описывают возмущения, распространяющиеся мгновенно [21], [79]. Чудесное соответствие математического языка законам физики [92] является действительно удивительным даром. Но оно не является загадкой и мы можем, и в состоянии, и достойны его понять, что наглядно показано на примере решения вышеупомянутых физических проблем. Внушает оптимизм огромная роль математических методов при решении **физических проблем** – известная схема трех шагов [109] решения **разнообразных задач**: задача любого вида сводится к математической; математическая задача любого вида сводится к алгебраической; любая алгебраическая задача сводится к решению одного единственного уравнения. Иллюстрацией этого может служить формула (5.146) и др.

В заключение стоит привести оптимистические слова Даламбера: работайте, работайте, полное понимание приходит потом. Как видим, для понимания сущности и учета влияния подвижности и проницаемости подвижных границ на волновые процессы потребовалось триста лет [110].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

К ГЛАВЕ 1

1. **Гринберг, Г. А.** О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также родственных задач теории теплопроводности, диффузии и других [Текст] / Г. А. Гринберг // Журн. техн. физики. – 1967. – 37, вып. 9. – С. 1598–1606.
2. **Крутиков, В. С.** Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков. – К. : Наук. думка, 1985. – 125 с.
3. **Гринберг, Г. А.** Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях [Текст] / Г. А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, вып. 2. – С. 193–203.
4. **Сагомонян, А. Я.** Волны напряжения в сплошных средах [Текст] / А. Я. Сагомонян. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 416 с.
5. Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей [Текст]. – К. : Наук. думка, 1983. – 136 с.
6. **Taylor, G.** The airwave surrounding an expanding sphere [Text] / G. Taylor // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1946. – Vol. 186. – P. 273–292.
7. Математическая энциклопедия [Текст] / гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – 1103 с.
8. **Фарлоу, С.** Уравнения с частными производными [Текст] / С. Фарлоу. – М. : Мир, 1985. – 383 с.
9. Вопросы математической физики. – Л. : Наука, 1976. – 299 с.
10. **Гринберг, Г. А.** Новый метод решения некоторых краевых задач для уравнений математической физики, допускающих разделение переменных [Текст] / Г. А. Гринберг // Изв. АН СССР, сер. физич. – 1946. – 10. – С. 168.
11. **Гринберг, Г. А.** О решении уравнений математической физики с частично или полностью разделяющимися переменными [Текст] / Г. А. Гринберг // К 70-летию академика А. Ф. Иоффе. – М. ; Л. : Изд. АН СССР, 1950. – С. 50–60.

12. **Гринберг, Г. А.** О статье В. Л. Шевелькова "Нахождение температурного поля в изотропной среде перед фронтом движущегося источника тепла", напечатанной в Журн. техн. физики (XVI, 207, 1946), и о правильном решении поставленной в ней задачи [Текст] / Г. А. Гринберг // Журн. техн. физики. – 1951. – 21. – С. 382–384.
13. **Гринберг, Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений [Текст] / Г. А. Гринберг. – М. : Изд-во АН СССР, 1948. – 727 с.
14. Волновая задача для параболического зеркала [Текст] / Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд // ДАН СССР. – 1954. – Т. 95. – С. 961–964.
15. **Гринберг, Г. А.** О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей [Текст] / Г. А. Гринберг // Прикл. матем. и механика. – 1969. – Т. 33. – С. 269–273.
16. **Гринберг, Г. А.** О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей [Текст] / Г. А. Гринберг, В. А. Косс // Прикл. математика и механика. – 1969. – 33. – С. 753–756.
17. **Гринберг, Г. А.** О температурных или концентрационных полях, создаваемых внутри бесконечной или конечной области движущимися поверхностями, на которых задан временной ход температуры или концентрации [Текст] / Г. А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1969. – 33. – С. 1051–1060.
18. **Гринберг, Г. А.** О движении поверхности раздела фаз в задачах стефановского типа [Текст] / Г. А. Гринберг, О. М. Чекмарева // Журн. технич. физики. – 1970. – 40. – С. 2025–2031.
19. **Гринберг, Г. А.** О некоторых точных решениях уравнения Фурье для изменяющихся со временем областей [Текст] / Г. А. Гринберг, В. А. Косс // Прикл. математика и механика. – 1971. – 35. – С. 759–760.
20. **Гринберг, Г. А.** О некоторых точных решениях уравнения Фурье для изменяющихся со временем областей [Текст] / Г. А. Гринберг, В. А. Косс // Прикл. математика и механика. – 1973. – 37. – С. 1145–1146.
21. **Гринберг, Г. А.** Об одном общем методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии и им подобных при наличии границ, движение которых задано или подлежит определению (проблема Стефана и др.) [Текст] / Г. А. Гринберг // Журн. технич. физики. – 1974. – 44. – С. 2033–2042.
22. **Коздоба, Л. А.** Методы решения нелинейных задач теплопроводности [Текст] / Л. А. Коздоба. – М. : Наука, 1975. – 228 с.
23. **Крутиков, В. С.** О взаимодействии слабых ударных волн со сферической оболочкой с учетом подвижности границ [Текст] / В. С. Крутиков // Известия РАН Механика тверд. тела. – М. ; 1992. – № 2. – С. 178–186.
24. **Krutikov, V. S.** A New Approach to Solution of Inverse Problems for a Wave Equation in Domains with Moving Boundaries [Text] / V. S. Krutikov // Doklady Mathematics, vol. 59, no. 1, 1999, pp. 10–13. Translated from Doklady Akademii Nauk, vol. 364, no. 1, 1999, pp.17–20. Original Russian Text Copyright © 1999 by

Krutikov. English Translation Copyright © 1999 by МАИК "Наука/Interperiodica" (Russia).

25. **Krutikov, V. S.** Waves Surrounding an Expanding Permeable Cylinder in a Compressible Medium [Текст] / V. S. Krutikov // Doklady Physics, vol. 44, no. 10, 1999, pp. 674–677. Translated from Doklady Akademii Nauk, vol. 368, no. 6, 1999, pp. 755–758. Original Russian Text Copyright © 1999 by Krutikov.

26. **Каудерер, Г.** Нелинейная механика [Текст] / Г. Каудерер. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.

27. **Иванов, А. В.** Определение гидродинамических характеристик потока при расширении поршня в жидкости [Текст] / А. В. Иванов, В. С. Крутиков // Электрогидравлический эффект и его применение. – К. : Наук. думка, 1981. – С. 86–96.

28. **Кочина, Н. Н.** О расширении поршня в воде [Текст] / Н. Н. Кочина, Н. С. Мельникова // Прикл. математика и механика. – 1959. – 23, вып. 1. – С. 93–100.

29. **Наугольных, К. А.** О расширении цилиндра в жидкости [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1962. – 8, вып. 1. – С. 136–138.

30. **Крашениникова, Н. Д.** О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем [Текст] / Н. Д. Крашениникова // Изв. АН СССР, ОНТ. – 1955. – № 8. – С. 22–36.

31. **Седов, Л. И.** Методы подобия и размерности в механике [Текст] / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1967. – 428 с.

32. **Касоев, С. Г.** О генерации звука в жидкости лазерными импульсами произвольной формы [Текст] / С. Г. Касоев, Л. М. Лямшев // Акуст. журн. – 1978. – 23, вып. 4. – С. 534–639.

33. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика [Текст] / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М. : Физматгиз, 1948. – Ч. 2. – 535 с.

34. **Курант, Р.** Сверхзвуковое течение и ударные волны [Текст] / Р. Курант, Ф. Фридрихс. – М. : Изд-во иностр. лит., 1950. – 426 с.

35. **Хоскинд, Н.** Расчет общих одномерных нестационарных задач с помощью метода характеристик [Текст] / Н. Хоскинд, Б. Лембурн // Численные методы в механике жидкостей. – М. : Наука, 1973. – С. 83–93.

36. **Березин, И. С.** Методы вычислений [Текст] : в 2 т. / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М. : Физматгиз, 1962. – Т. 2. – 639 с.

37. **Жуков, А. И.** Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики [Текст] / А. И. Жуков // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. – М., 1960. – 58. – 149 с.

38. **Крутиков, В. С.** О расширении поршня в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Новое в разрядноимпульсной технологии. – К. : Наук. думка, 1979. – С. 112–120.

39. **Окунь, И. З.** Расчет давления жидкости на поршень при постоянной скорости его расширения [Текст] / И. З. Окунь // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1968. – Вып. 1. – С. 126–130.

40. **Яковлев, Ю. С.** Гидродинамика взрыва [Текст] / Ю. С. Яковлев. – Л. : Судпромгиз, 1961. – 313 с.
41. **Найфэ, А.** Методы возмущений [Текст] / А. Найфэ. – М. : Мир, 1976. – 455 с.
42. **Коул, Р.** Подводные взрывы [Текст] / Р. Коул. – М. : Изд-во иностр. лит., 1950. – 494 с.
43. **Наугольных, К. А.** Электрические разряды в воде [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой. – М. : Наука, 1971. – 155 с.
44. **Петухов, Ю. В.** Поле давления и скорости, возбуждаемые расширяющимся цилиндром [Текст] / Ю. В. Петухов // Акуст. журн. – 1985. – Т. 31, № 4. – С. 549–553.
45. **Морозов, В. П.** О погрешности расчета волны конечной амплитуды, излучаемой сферической каверной, в приближении Кирквуда-Бете [Текст] / В. П. Морозов // Акуст. журн. – 1970. – 16, вып. 3. – С. 480–481.
46. **Петухов, Ю. В.** Модифицированное приближение Кирквуда-Бете, позволяющее рассчитывать полный профиль взрывной волны и ее спектр вблизи источника [Текст] / Ю. В. Петухов // Акуст. журн. – 1987. – Т. 33. – Вып. 2. – С. 317–323.
47. **Наугольных, К. А.** Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1965. – Вып. 3. – С. 351–358.
48. **Наугольных, К. А.** Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде [Текст] / К. А. Наугольных, Р. И. Солуян, Р. В. Хохлов // Акуст. журн. – 1963. – 9, вып. 1. – С. 54–60.
49. **Ламб, Г.** Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. – 928 с.
50. **Тирский, Г. А.** Два точных решения нелинейной задачи Стефана [Текст] / Г. А. Тирский // Докл. АН СССР. – 1959. – 125, № 2. – С. 293–296.
51. **Лайтхил, Дж.** Волны в жидкости [Текст] / Дж. Лайтхил. – М. : Мир, 1981. – 600 с.
52. **Ландау, Л. Д.** Механика сплошных сред. [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 596 с.
53. **Сагомоян, А. Я.** Удар и проникание тел в жидкость [Текст] / А. Я. Сагомоян. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 172 с.
54. **Поздеев, В. А.** Взаимодействие нестационарной акустической волны давления с пузырьком газа в жидкости [Текст] / В. А. Поздеев // Акуст. журн. – 1984. – Т. 30, № 6. – С. 838–840.
55. **Поздеев, В. А.** Взаимодействие звукового импульса с подвижной границей двух акустических сред [Текст] / В. А. Поздеев // Письма в Журн. техн. физики. – 1989. – Т. 15. – Вып. 6. – С. 30–32.
56. **Поздеев, В. А.** Метод нелинейного преобразования времени в краевых задачах теории потенциала с подвижными границами для линейного волнового уравнения [Текст] / В. А. Поздеев // Прикл. матем. и механика. – 1991. – Вып. 6. – С. 1055–1058.

57. **Поздеев, В. А.** Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами [Текст] / В. А. Поздеев. – К. : Наук. думка, 1992. – 242 с.
58. **Поздеев, В. А.** Влияние подвижности возмущающей границы и нелинейности среды на волновом поле, вызванное нестационарным движением плоского поршня [Текст] / В. А. Поздеев // Акустический журнал. – 1995. – Т. 41, № 1. – С. 164–165.
59. **Поздеев, В. А.** Нестационарная периодическая структура струи, вызванная импульсным движением поршня в струйном генераторе [Текст] / В. А. Поздеев // Изв. акад. наук. Механика жидкости и газа. – 1996. – № 4. – С. 172–178.
60. **Бескаравайный, Н. М.** Волновые задачи о расширении полости в жидкости с учетом конечных перемещений границ [Текст] / Н. М. Бескаравайный, В. А. Поздеев // Физико-механические процессы при высоковольтном разряде в жидкости. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 88–97.
61. **Бескаравайный, Н. М.** Теоретические основы измерения импульсных давлений в жидких средах [Текст] / Н. М. Бескаравайный, В. А. Поздеев. – К. : Наук. думка, 1981. – 192 с.
62. **Поздеев, В. А.** Нестационарные гидродинамические поля в областях с подвижными границами [Текст] / В. А. Поздеев : Автореферат дисс. д-ра физ.-мат. наук / Институт гидромеханики НАН Украины. – К., 2002. – 33 с.
63. **Поздеев, В. А.** Обобщение закона Френеля на случай вызванного волной давления перемещения границы раздела акустических сред [Текст] / В. А. Поздеев // ЖТФ. – 1999. – Т. 69. – Вып. 4. – С. 114–115.
64. **Поздеев, В. А.** Нарушение принципа суперпозиции решений начально-краевой задачи с подвижными границами для волнового уравнения [Текст] / В. А. Поздеев // Акустический вестник. – 2001. – Т. 4, № 1. – С. 70.
65. **Krutikov, V. S.** Validity Limits of Solutions to the Wave Equation for Regions with Moving Permeable Boundaries in Impulse Fluid Dynamics and Acoustics [Text] / V. S. Krutikov // Acoustical Physics. – 1996. – Vol. 42, no. 4. – Pp. 471–477.
66. **Крутиков, В. С.** О взаимодействии слабых ударных волн со сферической оболочкой с учетом подвижности границ [Текст] / В. С. Крутиков // Известия РАН. Механика твердого тела. – М., 1992. – № 2. – С. 178–186.
67. **Вовченко, А. И.** Особенности гидродинамических характеристик высоковольтного электрического разряда в жидкости при двухимпульсном законе ввода мощности [Текст] / А. И. Вовченко, В. Г. Ковалев, В. А. Поздеев // Письма в ЖТФ. – 1997. – 23, вып. 9. – С. 58–61.
68. **Крутиков, В. С.** Особенности гидродинамических характеристик импульсных процессов в сжимаемой среде при многократном (пульсирующем) законе ввода энергии [Текст] / В. С. Крутиков, А. Г. Лопатнев // Письма в ЖТФ. – 1999. – Т. 25. – Вып. 14. – С. 34–41.

69. **Krutikov, V. S.** A New Approach to Solution of Inverse Problems for a Wave Equation in Domains with Moving Boundaries [Text] / V. S. Krutikov // Doklady Mathematics. – 1999. – Vol. 59, no. 1. – Pp. 10–13.

70. **Крутиков, В. С.** Построение метода и решений импульсных задач механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков : диссертация на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук. – К. : Ин-т гидромеханики НАН Украины, 1995. – 343 с.

71. **Слепьян, Л. И.** Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости [Текст] / Л. И. Слепьян // Докл. АН СССР. – 1985. – 282, № 4. – С. 809–813.

72. **Новожилов, В. В.** Теория упругости [Текст] / В. В. Новожилов. – Л. : Судостроение, 1958. – 370 с.

73. **Крутиков, В. С.** Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Прикл. математика и механика. – М. ; 1991. – № 6. – С. 1058–1062.

74. **Крутиков, В. С.** Волновые явления с учетом конечных перемещений проницаемых границ [Текст] / В. С. Крутиков // Доклады РАН/АН СССР. – 1993. – Т. 333, № 4. – С. 512–514.

К ГЛАВЕ 2

1. **Крутиков, В. С.** К вопросу о волновых явлениях в конечной системе [Текст] / В. С. Крутиков // II Всесоюз. симпозиум по физике акустико-гидродинамич. явлений и оптоакустике. – М. : Наука, 1979. – С. 54.

2. **Крутиков, В. С.** К определению гидродинамических характеристик в конечной системе [Текст] / В. С. Крутиков // Электрогидравлический эффект и его применение. – К. : Наук. думка, 1981. – С. 70–86.

3. **Крутиков, В. С.** О вычислении времени запаздывания в задачах с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Электрический разряд в жидкости и его применение в промышленности. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 64–65.

4. **Крутиков, В. С.** Определение гидродинамических характеристик в конечной системе [Текст] / В. С. Крутиков // Основные проблемы разрядно-импульсной технологии. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 149–159.

5. **Вестяк, А. В.** Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой [Текст] / А. В. Вестяк, А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Механика деформируемого тела. – М. : Наука, 1983. – Т. 15. – С. 69–148.

6. **Горшков, А. Г.** Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами [Текст] / А. Г. Горшков // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Механика деформируемого тела. – М. : Наука, 1980. – Т. 13. – С. 105–186.

7. **Гузь, А. Н.** Методы расчета оболочек [Текст] / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко // Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – К. : Наук. думка, 1983. – Т. 5. – 400 с.

8. **Кубенко, В. Д.** Нестационарные взаимодействия элементов конструкций со средой [Текст] / В. Д. Кубенко. – К. : Наук. думка, 1979. – 182 с.
9. **Рубинштейн, Л. И.** Проблема Стефана [Текст] / Л. И. Рубинштейн. – Рига : Звайгзне, 1967. – 457 с.
10. **Сагомонян, А. Я.** Проникание [Текст] / А. Я. Сагомонян. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 300 с.
11. **Харкевич, А. А.** Избранные труды [Текст] : в 3 т. / А. А. Харкевич. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 400 с.
12. **Сагомонян, А. Я.** Волны напряжения в сплошных средах [Текст] / А. Я. Сагомонян. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 416 с.
13. **Рахматулин, Х. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках [Текст] / Х. А. Рахматулин, Ю. А. Демьянов. – М. : Физматгиз, 1961. – 399 с.
14. **Исакович, М. А.** Общая акустика [Текст] / М. А. Исакович. – М. : Наука, 1973. – 495 с.
15. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 703 с.
16. **Янке, Е.** Специальные функции [Текст] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1969. – 344 с.
17. **Гринберг, Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений [Текст] / Г. А. Гринберг. – М. : Изд-во АН СССР, 1948. – 727 с.
18. **Корн, Г.** Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968. – 720 с.
19. **Taylor, G.** The airwave surrounding an expanding sphere [Text] / G. Taylor // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1946. – Vol. 186. – P. 273–292.
20. **Наугольных, К. А.** Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1965. – Вып. 3. – С. 351–358.
21. **Ландау, Л. Д.** Механика сплошных сред [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 596 с.
22. **Якимов, Ю. Л.** Некоторые вопросы гидродинамики больших скоростей [Текст] / Ю. Л. Якимов // Механика жидкости и газа. – 1982. – № 2. – С. 62–74.

К ГЛАВЕ 3

1. **Виноградова, М. Б.** Теория волн [Текст] / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1979. – 383 с.
2. **Крутиков, В. С.** О вычислении времени запаздывания в задачах с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Электрический разряд в жидкости и его применение в промышленности. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 64–65.
3. **Крутиков, В. С.** Об одной задаче с подвижными границами (прямая задача) [Текст] / В. С. Крутиков // Физические основы электрического взрыва. – К. : Наук. думка, 1983. – С. 110–121.

4. **Крутиков, В. С.** Об одной задаче механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Электроразрядные процессы, эксперимент, теория, практика. – К. : Наук. думка, 1984. – С. 67–80.
5. **Крутиков, В. С.** Метод точного аналитического решения задач с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Подводный электровзрыв. – К. : Наук. думка, 1985. – С. 69–74.
6. **Крутиков, В. С.** Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков. – К. : Наук. думка, 1985. – 125 с.
7. **Крутиков, В. С.** О взаимодействии слабых ударных волн со сферической оболочкой с учетом подвижности границ [Текст] / В. С. Крутиков // Известия РАН. Механика тверд. тела. – М. , 1992. – № 2. – С. 178–186.
8. **Крутиков, В. С.** О восстановлении давления на движущейся границе плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1988. – 14. – С. 510–514.
9. **Крутиков, В. С.** Приближенная оценка влияния проницаемости подвижной границы плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1989. – 15, вып. 14. – С. 45–48.
10. **Крутиков, В. С.** К вопросу управления электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электроимпульсная технология и электромагнитные процессы в нагруженных твердых телах. – Томск : Изд-во Томск. Гос. ун-та, 1982. – С. 59–60.
11. **Крутиков, В. С.** Об управлении электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Технологические особенности использования электрического взрыва. – К. : Наук. думка, 1983. – С. 42–50.
12. **Крутиков, В. С.** К вопросу управления электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электронная обработка материалов. – 1983. – № 6 (114). – С. 67–70.
13. **Крутиков, В. С.** Об управлении спектром волны давления, вызванного электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электрические и гидродинамические процессы электрического разряда в конденсированных средах. – К. : Наук. думка, 1987. – С. 96–101.
14. **Крутиков, В. С.** О распространении волн в вязкой, теплопроводящей среде // III Всесоюзный симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. – М. : Наука, 1982. – С. 30.
15. **Крутиков, В. С.** Количественная оценка волновых явлений с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1990. – 16, вып. 22. – С. 37–42.
16. **Крутиков, В. С.** Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Прикл. математика и механика. – М. , 1991. – № 6. – С. 1058–1062.
17. **Крутиков, В. С.** К вопросу о волновых явлениях в конечной системе [Текст] / В. С. Крутиков // II Всесоюз. симпозиум по физике акустико-гидродинамич. явлений и оптоакустике. – М. : Наука, 1979. – С. 54.

18. **Крутиков, В. С.** К определению гидродинамических характеристик в конечной системе [Текст] / В. С. Крутиков // Электрогидравлический эффект и его применение. – К. : Наук. думка, 1981. – С. 70–86.

19. **Крутиков, В. С.** Определение гидродинамических характеристик в конечной системе [Текст] / В. С. Крутиков // Основные проблемы разрядно-импульсной технологии. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 149–159.

20. **Ландау, Л. Д.** Механика сплошных сред [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 596 с.

21. **Taylor, G.** The airwave surrounding an expanding sphere [Text] / G. Taylor // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1946. – Vol. 186. – P. 273–292.

22. Математическая энциклопедия [Текст] / гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – 1103 с.

23. **Вестяк, А. В.** Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой [Текст] / А. В. Вестяк, А. Г. Горшков, Д. В. Тарлаковский // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Механика деформируемого тела. – М. : Наука, 1983. – Т. 15. – С. 69–148.

24. **Горшков, А. Г.** Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами [Текст] / А. Г. Горшков // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Механика деформируемого тела. – М. : Наука, 1980. – Т. 13. – С. 105–186.

25. Вопросы математической физики [Текст]. – Л. : Наука, 1976. – 299 с.

26. **Гринберг, Г. А.** Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях [Текст] / Г. А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, вып. 2. – С. 193–203.

27. **Наугольных, К. А.** Электрические разряды в воде [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой. – М. : Наука, 1971. – 155 с.

28. **Седов, Л. И.** Методы подобия и размерности в механике [Текст] / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1967. – 428 с.

29. **Крутиков, В. С.** О расширении поршня в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Новое в разрядноимпульсной технологии. – К. : Наук. думка, 1979. – С. 112–120.

30. **Ламб, Г.** Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. – 928 с.

31. **Найфэ, А.** Методы возмущений [Текст] / А. Найфэ. – М. : Мир, 1976. – 455 с.

32. **Наугольных, К. А.** Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1965. – Вып. 3. – С. 351–358.

33. **Гонор, А. Л.** Аналитический метод расчета неустановившихся одномерных движений жидкости [Текст] / А. Л. Гонор // Докл. АН СССР. – 1979. – 247, № 1. – С. 53–56.

34. **Гринберг, Г. А.** О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также родственных задач теории теплопроводности, диффузии и других [Текст] / Г. А. Гринберг // Журн. технич. физики. – 1967. – 37, вып. 9. – С. 1598–1606.

35. **Бабаев, А. Э.** Действие внутренних акустических ударных волн, излучаемых поверхностью с переменной границей, на жесткие полости [Текст] / А. Э. Бабаев // Прикладная механика. – 1981. – 17, № 6. – С. 37–44.
36. **Замышляев, Б. В.** Динамические нагрузки при подводном взрыве [Текст] / Б. В. Замышляев, Ю. С. Яковлев. – Л. : Судостроение, 1967. – 387 с.
37. **Поздеев, В. А.** Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами [Текст] / В. А. Поздеев. – К. : Наук. думка, 1992. – 242 с.
38. **Лыков, А. В.** Теория теплопроводности [Текст] / А. В. Лыков. – М. : Высш. школа, 1967. – 600 с.
39. **Копченова, Н. В.** Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст] / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 367 с.
40. **Фильчаков, П. Ф.** Численные и графические методы прикладной математики [Текст] / П. Ф. Фильчаков. – К. : Наук. думка, 1970. – 800 с.
41. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
42. **Харкевич, А. А.** Избранные труды [Текст] : в 3 т. / А. А. Харкевич. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 400 с.
43. Справочник по строительной механике корабля [Текст] : в 3 т. – Л. : Судпромгиз, 1958. – Т. 1. – 627 с.
44. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.
45. **Крутиков, В. С.** Волновые явления в конечной системе при наличии больших перемещений границ [Текст] / В. С. Крутиков // Новое в электрогидроимпульсной обработке. – К. : Наук. думка, 1986. – С. 39–47.
46. **Кнэпп, Р.** Кавитация [Текст] / Р. Кнэпп, Дж. Дейли, Ф. Хэммит. – М. : Мир, 1974. – 687 с.
47. **Кривицкий, Е. В.** Переходные процессы при высоковольтном разряде в воде [Текст] / Е. В. Кривицкий, В. В. Шамко. – К. : Наук. думка, 1979. – 207 с.
48. **Наугольных, К. А.** О связи между гидродинамическими и электрическими характеристиками разряда в жидкости [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой // Докл. АН СССР. – 1966. – 168, № 3. – С. 556–559.
49. **Наугольных, К. А.** Нелинейные волновые процессы в акустике [Текст] / К. А. Наугольных, Л. А. Островский. – М. : Наука, 1990. – 237 с.
50. **Наугольных, К. А.** О расширении цилиндра в жидкости [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1962. – 8, вып. 1. – С. 136–138.
51. **Наугольных, К. А.** Распространение сферических звуковых волн конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1959. – 5, № 1. – С. 80–84.
52. **Балашканд, М. И.** Сопоставление акустической эффективности некоторых источников взрывного звука в воде [Текст] / М. И. Балашканд // Докл. АН СССР. – 1970. – 194, № 6. – С. 1309–1312.
53. **Вовченко, А. И.** Взрывные процессы превращения электрической и химической энергии [Текст] / Вовченко А. И. – К. : Наук. думка, 1987. – 128 с.

54. **Новожилов, В. В.** Теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов. – Л. : Судостроение, 1962. – 430 с.

К ГЛАВЕ 4

1. **Кадомцев, Б. Б.** Нелинейные волны [Текст] / Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман // Успехи физич. наук. – 1971. – 103, вып. 2. – С. 193–232.

2. **Галиев, Ш. У.** Динамика гидроупругопластических систем [Текст] / Ш. У. Галиев. – К. : Наук. думка, 1981. – 276 с.

3. **Григолюк, Э. И.** Нестационарная гидроупругость оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков. – Л. : Судостроение, 1974. – 208 с.

4. **Замышляев, Б. В.** Динамические нагрузки при подводном взрыве [Текст] / Б. В. Замышляев, Ю. С. Яковлев. – Л. : Судостроение, 1967. – 387 с.

5. **Коул, Р.** Подводные взрывы [Текст] / Р. Коул. – М. : Изд-во иностр. лит., 1950. – 494 с.

6. **Крутиков, В. С.** Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков. – К. : Наук. думка, 1985. – 125 с.

7. **Яковлев, Ю. С.** Гидродинамика взрыва [Текст] / Ю. С. Яковлев. – Л. : Судпромгиз, 1961. – 313 с.

8. **Иванов, А. В.** Определение гидродинамических характеристик потока при расширении поршня в жидкости [Текст] / А. В. Иванов, В. С. Крутиков // Электрогидравлический эффект и его применение. – К. : Наук. думка, 1981. – С. 86–96.

9. **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике [Текст] / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.

10. **Крутиков, В. С.** К вопросу управления электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электроимпульсная технология и электромагнитные процессы в нагруженных твердых телах. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та, 1982. – С. 59–60.

11. **Крутиков, В. С.** Об управлении электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Технологические особенности использования электрического взрыва. – К. : Наук. думка, 1983. – С. 42–50.

12. **Крутиков, В. С.** К вопросу управления электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электронная обработка материалов. – 1983. – № 6 (114). – С. 67–70.

13. **Крутиков, В. С.** Приближенная оценка влияния проницаемости подвижной границы плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1989. – 15, вып. 14. – С. 45–48.

14. **Крутиков, В. С.** Об управлении спектром волны давления, вызванного электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электрические и гидродинамические процессы электрического разряда в конденсированных средах. – К. : Наук. думка, 1987. – С. 96–101.

15. О профиле ударной волны, образующейся в жидкости при схлопывании сферического пузырька [Текст] / А. П. Дмитриев, Г. В. Дрейден, Ю. И. Островский, М. И. Этинберг // Журн. технич. физики. – 1985. – 55, вып. 2. – С. 384–387.

16. О динамике элементарной полости, возникающей при фокусировке лазерного излучения в жидкости [Текст] / Т. А. Дунина, С. В. Егеров, К. А. Наугольных, А. Е. Пашин // Труды II Всесоюзного симпозиума по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. – М. : Наука. – 1982. – С. 62–65.

17. **Есипов, И. Б.** О захлопывании пузырька в сжимаемой жидкости [Текст] / И. Б. Есипов, К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1973. – 19, вып. 2. – С. 285–288.

18. **Капица, П. Л.** О природе шаровой молнии [Текст] / П. Л. Капица // ДАН СССР. – 1955. – 101, вып. 2. – С. 245–248.

19. **Максаков, А. А.** О подводном взрыве гремучего газа с высокой начальной объемной плотностью энергии [Текст] / А. А. Максаков, Н. А. Рой // Акуст. журн. – 1979. – Вып. 2. – С. 265–270.

20. **Наугольных, К. А.** Электрические разряды в воде [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой. – М. : Наука, 1971. – 155 с.

21. **Шамко, В. В.** Исследования газодинамических течений жидкости при замедленных взрывных процессах [Текст] / В. В. Шамко // Электрофизические и гидродинамические процессы электрического разряда в конденсированных средах. – К. : Наук. думка, 1987. – С. 55–71.

22. Распространение сферических волн конечной амплитуды [Текст] / В. А. Акуличев, Ю. Я. Богуславский, А. И. Иоффе, К. А. Наугольных // Акуст. журнал. – 1967. – 13, вып. 3. – С. 321.

23. Акустическое излучение длинной искры в воде [Текст] / А. И. Иоффе, И. Г. Кожелупова, К. А. Наугольных, Н. А. Рой // Акуст. журн. – 1967. – 13, вып. 2. – С. 208–212.

24. **Иоффе, А. И.** К теории начальной стадии электрического разряда в воде [Текст] / А. И. Иоффе // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1966. – № 16. – С. 69–72.

25. **Иоффе, А. И.** К образованию ударных волн при электрическом разряде в воде [Текст] / А. И. Иоффе, К. А. Наугольных // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1968. – № 1. – С. 134–137.

26. **Иоффе, А. И.** О начальной стадии электрического разряда в воде [Текст] / А. И. Иоффе, К. А. Наугольных, Н. А. Рой // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1964. – № 4. – С. 108–114.

27. **Наугольных, К. А.** О связи между гидродинамическими и электрическими характеристиками разряда в жидкости [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой // Докл. АН СССР. – 1966. – 168, № 3. – С. 556–559.

28. **Наугольных, К. А.** Нелинейные волновые процессы в акустике [Текст] / К. А. Наугольных, Л. А. Островский. – М. : Наука, 1990. – 237 с.

29. Акустическое излучение длинной искры в воде [Текст] / А. И. Иоффе, И. Г. Кожелупова, К. А. Наугольных, Н. А. Рой // Акуст. журн. – 1967. – 13, вып. 2. – С. 208–212.
30. **Ламб, Г.** Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. – 928 с.
31. **Гонор, А. Л.** Аналитический метод расчета неустановившихся одномерных движений жидкости [Текст] / А. Л. Гонор // Докл. АН СССР. – 1979. – 247, № 1. – С. 53–56.
32. **Слепян, Л. И.** Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости [Текст] / Л. И. Слепян // Докл. АН СССР. – 1985. – 282, № 4. – С. 809–813.
33. **Копченко, Н. В.** Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст] / Н. В. Копченко, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 367 с.
34. **Фильчаков, П. Ф.** Численные и графические методы прикладной математики [Текст] / П. Ф. Фильчаков. – К. : Наук. думка, 1970. – 800 с.
35. Tables of Lagrangian interpolation Coefficients [Text]. – New York : Columbia University Press, 1944.
36. **Горшков, А. Г.** Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами [Текст] / А. Г. Горшков // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Механика деформируемого тела. – М. : Наука, 1980. – Т. 13. – С. 105–186.
37. **Ландау, Л. Д.** Механика сплошных сред [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 596 с.
38. **Крутиков, В. С.** О расширении поршня в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Новое в разрядноимпульсной технологии. – К. : Наук. думка, 1979. – С. 112–120.
39. **Наугольных, К. А.** Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1965. – Вып. 3. – С. 351–358.
40. **Седов, Л. И.** Методы подобия и размерности в механике [Текст] / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1967. – 428 с.
41. **Taylor, G.** The airwave surrounding an expanding sphere [Text] / G. Taylor // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1946. – Vol. 186. – P. 273–292.
42. **Наугольных, К. А.** Сферические волны конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде [Текст] / К. А. Наугольных, Р. И. Солуян, Р. В. Хохлов // Акуст. журн. – 1963. – 9, вып. 1. – С. 54–60.
43. **Солуян, С. И.** Распространение сферических звуковых волн конечной амплитуды в диссипативной среде [Текст] / С. И. Солуян, Р. В. Хохлов // Вестн. МГУ. – 1961. – № 3. – С. 52–61.
44. **Крутиков, В. С.** О распространении волн в вязкой, теплопроводящей среде [Текст] / В. С. Крутиков // III Всесоюзный симпозиум по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. – М. : Наука, 1982. – С. 30.
45. Мощные ультразвуковые поля [Текст] / под ред. Л. Д. Розенберга. – М. : Наука, 1968. – 266 с.

46. **Наугольных, К. А.** Распространение сферических звуковых волн конечной амплитуды в вязкой теплопроводящей среде [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1959. – 5, № 1. – С. 80–84.
47. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст] / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 703 с.
48. **Исакович, М. А.** Общая акустика [Текст] / М. А. Исакович. – М. : Наука, 1973. – 495 с.
49. Ультразвук [Текст] / гл. ред. И. П. Голямина. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – 400 с.
50. **Накоряков, В. Е.** Академический институт и научно-технический прогресс [Текст] / В. Е. Накоряков // Вестник АН СССР. – 1987. – № 10. – С. 112–118.
51. **Карликов, В. П.** О новом методе визуализации потоков капельной жидкости и измерения поля скоростей [Текст] / В. П. Карликов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1982. – № 2. – С. 101–108.
52. **Wortmann, F. X.** Ein Methode zur Beobachtung und Messung von Wasserströmungen mit Tellur [Text] / F. X. Wortmann // Z. Angew. Phys. – 1953. – Bd. 5, № 6. – P. 201–206.
53. **Крутиков, В. С.** О взаимодействии слабых ударных волн со сферической оболочкой с учетом подвижности границ [Текст] / В. С. Крутиков // Известия РАН. Механика тверд. тела. – М., 1992. – № 2. – С. 178–186.
54. **Крутиков, В. С.** Определение влияния скорости испарения с внутренней поверхности поршня на гидродинамические характеристики [Текст] / В. С. Крутиков // Физико-механические процессы при высоковольтном разряде в жидкости. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 143–145.
55. **Христианович, С. А.** Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва [Текст] / С. А. Христианович // Прикл. математика и механика. – 1956. – Вып. 4. – С. 599–605.
56. **Крутиков, В. С.** Волновые явления с учетом конечных перемещений проницаемых границ [Текст] / В. С. Крутиков // Доклады РАН/АН СССР. – 1993. – Т. 333, № 4. – С. 512–514.

К ГЛАВЕ 5

1. **Григолюк, Э. И.** Нестационарная гидроупругость оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков. – Л. : Судостроение, 1974. – 208 с.
2. **Замышляев, Б. В.** Динамические нагрузки при подводном взрыве [Текст] / Б. В. Замышляев, Ю. С. Яковлев. – Л. : Судостроение, 1967. – 387 с.
3. **Зарембо, Л. К.** Введение в нелинейную акустику [Текст] / Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. – М. : Наука, 1966. – 520 с.
4. **Исакович, М. А.** Общая акустика [Текст] / М. А. Исакович. – М. : Наука, 1973. – 495 с.
5. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика [Текст] / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М. : Физматгиз, 1948. – Ч. 2. – 535 с.

6. **Лайтхил, Дж.** Волны в жидкости [Текст] / Дж. Лайтхил. – М. : Мир, 1981. – 600 с.
7. **Ламб, Г.** Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1947. – 928 с.
8. **Ландау, Л. Д.** Механика сплошных сред [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 596 с.
9. Математическая энциклопедия [Текст] / гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – 1103 с.
10. **Милн-Томпсон, Л. М.** Теоретическая гидродинамика [Текст] / Л. М. Милн-Томпсон. – М. : Мир, 1964. – 655 с.
11. **Миниович, И. Я.** Гидродинамические источники звука [Текст] / И. Я. Миниович, А. Д. Перник, В. С. Петровский. – Л. : Судостроение, 1972. – 478 с.
12. **Мнев, Е. Н.** Гидроупругость оболочек [Текст] / Е. Н. Мнев, А. К. Перцев. – Л. : Судостроение, 1970. – 366 с.
13. **Наугольных, К. А.** Электрические разряды в воде [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой. – М. : Наука, 1971. – 155 с.
14. **Седов, Л. И.** Методы подобия и размерности в механике [Текст] / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1967. – 428 с.
15. **Скучик, Е.** Основы акустики [Текст] / Е. Скучик. – М. : Мир, 1976. – Т. 2. – 520 с.
16. **Тирский, Г. А.** Два точных решения нелинейной задачи Стефана [Текст] / Г. А. Тирский // Докл. АН СССР. – 1959. – 125, № 2. – С. 293–296.
17. **Харкевич, А. А.** Избранные труды [Текст] / А. А. Харкевич. – М. : Наука, 1973. – Т. 1. – 400 с.
18. **Яковлев, Ю. С.** Гидродинамика взрыва [Текст] / Ю. С. Яковлев. – Л. : Судпромгиз, 1961. – 313 с.
19. **Taylor, G.** The airwave surrounding an expanding sphere [Text] / G. Taylor // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1946. – Vol. 186. – P. 273–292.
20. **Крутиков, В. С.** О восстановлении давления на движущейся границе плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1988. – 14. – С. 510–514.
21. **Крутиков, В. С.** Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков. – К. : Наук. думка, 1985. – 125 с.
22. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
23. Вопросы математической физики [Текст]. – Л. : Наука, 1976. – 299 с.
24. **Гринберг, Г. А.** Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях [Текст] / Г. А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, вып. 2. – С. 193–203.
25. **Рубинштейн, Л. И.** Проблема Стефана [Текст] / Л. И. Рубинштейн. – Рига : Звайгзне, 1967. – 457 с.

26. **Наугольных, К. А.** О расширении цилиндра в жидкости [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1962. – 8, вып. 1. – С. 136–138.
27. **Петухов, Ю. В.** Поле давления и скорости, возбуждаемые расширяющимся цилиндром [Текст] / Ю. В. Петухов // Акуст. журн. – 1985. – Т. 31. – № 4. – С. 549–553.
28. **Слепян, Л. И.** Нестационарные упругие волны [Текст] / Л. И. Слепян. – Л. : Судостроение, 1972. – 374 с.
29. **Абрамовиц, М.** Справочник по специальным функциям [Текст] / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
30. **Лыков, А. В.** Теория теплопроводности [Текст] / А. В. Лыков. – М. : Высш. школа, 1967. – 600 с.
31. **Гринберг, Г. А.** Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений [Текст] / Г. А. Гринберг. – М. : Изд-во АН СССР, 1948. – 727 с.
32. **Диткин, В. А.** Операционное исчисление [Текст] / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Высш. школа, 1975. – 408 с.
33. **Кедринский, В. К.** О некоторых приближенных моделях одномерной пульсации цилиндрической полости в несжимаемой жидкости [Текст] / В. К. Кедринский // Физика горения и взрыва. – 1976. – Т. 12. – № 5. – С. 768–773.
34. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.
35. **Иванов, А. В.** Определение гидродинамических характеристик потока при расширении поршня в жидкости [Текст] / А. В. Иванов, В. С. Крутиков // Электрогидравлический эффект и его применение. – К. : Наук. думка, 1981. – С. 86–96.
36. **Гонор, А. Л.** Аналитический метод расчета неустановившихся одномерных движений жидкости [Текст] / А. Л. Гонор // Докл. АН СССР. – 1979. – 247, № 1. – С. 53–56.
37. **Крутиков, В. С.** Об одной задаче с подвижными границами (прямая задача) [Текст] / В. С. Крутиков // Физические основы электрического взрыва. – К. : Наук. думка, 1983. – С. 110–121.
38. **Крутиков, В. С.** Волновые явления в конечной системе при наличии больших перемещений границ [Текст] / В. С. Крутиков // Новое в электрогидроимпульсной обработке. – К. : Наук. думка, 1986. – С. 39–47.
39. **Крутиков, В. С.** К вопросу о волновых явлениях в конечной системе [Текст] / В. С. Крутиков // II Всесоюз. симпозиум по физике акустико-гидродинамич. явлений и оптоакустике. – М. : Наука, 1979. – С. 54.
40. **Крутиков, В. С.** О вычислении времени запаздывания в задачах с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Электрический разряд в жидкости и его применение в промышленности. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 64–65.
41. **Крутиков, В. С.** О расширении поршня в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Новое в разрядноимпульсной технологии. – К. : Наук. думка, 1979. – С. 112–120.

42. **Карташов, Э. М.** Метод обобщенного интегрального преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с движущимися границами [Текст] / Э. М. Карташов // Инженерно-физич. журн. – 1987. – 52, № 3. – С. 495–505.
43. **Гринберг, Г. А.** О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также родственных задач теории теплопроводности, диффузии и других [Текст] / Г. А. Гринберг // Журн. технич. физики. – 1967. – 37, вып. 9. – С. 1598–1606.
44. **Коздоба, Л. А.** Методы решения нелинейных задач теплопроводности [Текст] / Л. А. Коздоба. – М. : Наука, 1975. – 228 с.
45. **Смирнов, М. М.** Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка [Текст] / М. М. Смирнов. – Минск : Изд-во БГУ, 1974. – 232 с.
46. **Крутиков, В. С.** Об одном решении задачи Стефана [Текст] / В. С. Крутиков // Электрические устройства и аппаратура электрогидроимпульсных установок. – К. : Наук. думка, 1981. – С. 123–127.
47. **Крутиков, В. С.** Об одном решении задач типа Стефана [Текст] / В. С. Крутиков // Электрический разряд в жидкости и его применение в промышленности. – К. : Наук. думка, 1980. – 62 с.
48. **Огибалов, П. М.** Нестационарные движения вязкопластических сред [Текст] / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 373 с.
49. **Крутиков, В. С.** Об управлении электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Технологические особенности использования электрического взрыва. – К. : Наук. думка, 1983. – С. 42–50.
50. **Крутиков, В. С.** Об управлении движением расширяющейся полости в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электрический разряд в жидкости и его применение в промышленности. – К. : Наук. думка, 1984. – С. 90–92.
51. **Крутиков, В. С.** Метод точного аналитического решения задач с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Подводный электровзрыв. – К. : Наук. думка, 1985. – С. 69–74.
52. **Крутиков, В. С.** Приближенная оценка влияния проницаемости подвижной границы плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1989. – 15, вып. 14. – С. 45–48.
53. **Крутиков, В. С.** Об управлении спектром волны давления, вызванного электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электрические и гидродинамические процессы электрического разряда в конденсированных средах. – К. : Наук. думка, 1987. – С. 96–101.
54. **Сорелла, Г.** Усовершенствованный метод дискретного быстрого преобразования Фурье [Текст] / Гхош Сорелла // Приборы для научных исследований. – 1984. – № 8. – С. 167–172.
55. **Харкевич, А. А.** Избранные труды [Текст] : в 3 т. / А. А. Харкевич. – М. : Наука, 1973. – Т. 2. – 587 с.

56. Поздеев, В. А. Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами [Текст] / В. А. Поздеев. – К. : Наук. думка, 1992. – 242 с.

57. Крутиков, В. С. К вопросу управления электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электроимпульсная технология и электромагнитные процессы в нагруженных твердых телах. – Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та, 1982. – С. 59–60.

58. Крутиков, В. С. К вопросу управления электрическим разрядом в жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Электронная обработка материалов. – 1983. – № 6 (114). – С. 67–70.

59. Управление электрогидроимпульсными процессами [Текст] / И. Т. Вовк, В. Б. Друмирецкий, Е. В. Кривицкий, Л. Е. Овчинникова. – К. : Наумова думка, 1984. – 186 с.

60. Зотов, Е. В. О некоторых закономерностях электроискрового инициирования растворов нитросоединений в концентрированной азотной кислоте [Текст] / Е. В. Зотов, Г. Б. Брасовский, А. С. Козырев // Физика горения и взрыва. – 1982. – № 4. – С. 107–110.

61. Пойа, Д. Математическое открытие. (Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание) [Текст] / Д. Пойа. – М. : Наука, 1970. – 452 с.

62. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975. – 631 с.

63. Чаплыгин, С. А. Избранные труды по механике и математике [Текст] / С. А. Чаплыгин. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 567 с.

64. Крутиков, В. С. Количественная оценка волновых явлений с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1990. – 16, вып. 22. – С. 37–42.

65. Крутиков, В. С. Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Прикл. математика и механика. – М., 1991. – № 6. – С. 1058–1062.

66. Влияние высоких давлений на вещество [Текст] / под ред. А. Н. Пиланкевича. – М. : Наука, – 1987. – Т. 1. – 232 с.

67. Павлов, И. Е. Фазовый состав продуктов, образующихся при электрическом взрыве кубических фаз $Ti C_x O_y$ и $Ti C_x O_y H_m$ [Текст] / И. Е. Павлов // Физика и химия обработки материалов. – 1984. – № 1. – С. 47–50.

68. Вовченко, А. И. Взрывные процессы превращения электрической и химической энергии [Текст] / А. И. Вовченко. – К. : Наук. думка, 1987. – 128 с.

69. Крутиков, В. С. О восстановлении давления на движущейся границе плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // IV Всесоюзный симпозиум. Методы теории идентификации в задачах измерительной техники и метрологии. – Новосибирск, 1985. – С. 52.

70. Крутиков, В. С. К вопросу получения функции давления заданного спектра в сжимаемой среде [Текст] / В. С. Крутиков // Электрический разряд в конденсированных средах. – К. : Наук. думка, 1989. – С. 60–66.

71. **Бейтмен, Г.** Таблицы интегральных преобразований [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – 343 с.

72. **Коробейников, В. П.** Задачи теории точечного взрыва в газах Труды математ. ин-та им. Стеклова В.А [Текст] / В. П. Коробейников. – М. : Наука, 1973. – 278 с.

73. **Балашканд, М. И.** Сопоставление акустической эффективности некоторых источников взрывного звука в воде [Текст] / М. И. Балашканд // Докл. АН СССР. – 1970. – 194, № 6. – С. 1309–1312.

74. **Иванов, А. В.** О возможности управления электрическими и гидродинамическими процессами искровых разрядов [Текст] / А. В. Иванов, А. И. Вовченко, О. А. Богаченко // Технич. электродинамика. – 1981. – № 6. – С. 15–20.

К ГЛАВЕ 6

1. Вопросы математической физики [Текст]. – Л. : Наука, 1976. – 299 с.

2. **Гринберг, Г. А.** Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях [Текст] / Г. А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, вып. 2. – С. 193–203.

3. **Крутиков, В. С.** Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков. – К. : Наук. думка, 1985. – 125 с.

4. **Крутиков, В. С.** Волновые явления с учетом конечных перемещений проницаемых границ [Текст] / В. С. Крутиков // Доклады РАН /АН СССР. – 1993. – Т. 333, № 4. – С. 512–514.

5. **Krutikov, V. S.** A New Approach to Solution of Inverse Problems for a Wave Equation in Domains with Moving Boundaries [Text] / V. S. Krutikov // Doklady Mathematics, vol. 59, no. 1, 1999, pp. 10–13. Translated from Doklady Akademii Nauk, vol. 364, no. 1, 1999, pp.17–20. Original Russian Text Copyright © 1999 by Krutikov. English Translation Copyright © 1999 by МАИК "Наука/Interperiodica" (Russia).

6. **Лямшев, Л. М.** Лазеры в акустике [Текст] / Л. М. Лямшев // Успехи физических наук. – 1987. – Т. 151, № 3. – С. 479–527.

7. **Наугольных, К. А.** Электрические разряды в воде [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой. – М. : Наука, 1971. – 155 с.

8. **Krutikov, V. S.** Validity Limits of Solutions to the Wave Equation for Regions with Moving Permeable Boundaries in Impulse Fluid Dynamics and Acoustics [Text] / V. S. Krutikov // Acoustical Physics, vol. 42, no.4, 1996, pp. 471–477. Translated from Akusticheskii Zhurnal, vol. 42, no. 4, 1996, pp. 534–540. Original Russian Text Copyright © 1996 by Krutikov.

9. **Крутиков, В. С.** Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Прикл. математика и механика. – М., 1991. – № 6. – С. 1058–1062.

10. **Тихонов, А. Н.** Об устойчивости обратных задач [Текст] / А. Н. Тихонов // ДАН. – 1943. – Т. 39. – Вып. 5. – С. 193–198.
11. **Лаврентьев, М. М.** Об одной обратной задаче для волнового уравнения [Текст] / М. М. Лаврентьев // ДАН. – 1964. – Т. 157. – № 3. – С. 520–521.
12. Математическая энциклопедия [Текст] / гл. ред. И.М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – 1103 с.
13. **Слепян, Л. И.** Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости [Текст] / Л. И. Слепян // Докл. АН СССР. – 1985. – 282, № 4. – С. 809–813.
14. **Баев, А. В.** О решении обратной задачи для волнового уравнения на отрезке методом последовательных приближений [Текст] / А. В. Баев // Доклады РАН. – 1986. – Т. 287, № 6. – С. 1358–1361.
15. **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике [Текст] / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.
16. **Крутиков, В. С.** Приближенная оценка влияния проницаемости подвижной границы плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1989. – 15, вып. 14. – С. 45–48.
17. **Александров, А. Ф.** Динамика и излучение прямых сильнооточных разрядов в воздухе [Текст] / А. Ф. Александров, В. В. Зосимов, С. П. Курдюмов // Журн. эксперимент. и теоретич. физики. – 1971. – Т. 61. – № 5. – С. 1841–1855.
18. **Басов, Н. Г.** Сильноточный разряд в газах [Текст] / Н. Г. Басов, Б. П. Борович, В. С. Стойлов // Журн. технич. физики. – 1970. – Т. 40. – № 3. – С. 516–522.
19. **Дубовенко, К. В.** Сильноточный разряд в цилиндрической камере при питании от контура с индуктивно-емкостным накопителем энергии [Текст] / К. В. Дубовенко // Электронная обработка материалов. – 1990. – № 2 (152). – С. 62–65.
20. **Крутиков, В. С.** О восстановлении давления на движущейся границе плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1988. – 14. – С. 510–514.
21. **Krutikov, V. S.** Waves Surrounding an Expanding Permeable Cylinder in a Compressible Medium [Text] / V. S. Krutikov // Doklady Physics, vol. 44, no. 10, 1999, pp. 674–677. Translated from Doklady Akademii Nauk, vol. 368, no. 6, 1999, pp. 755–758. Original Russian Text Copyright © 1999 by Krutikov.
22. **Krutikov V. S.** Hydrodynamic characteristics of pulsed processes in a compressible medium with a multiple (pulsating) energy deposition law [Text] / V. S. Krutikov, A. G. Lopatnev // Technical Physics Letters, vol. 25, iss. 7, 1999, pp. 564–566. Translated from Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, vol. 25, no. 14, 2000, pp. 34. Original Russian Text Copyright © 1999 by Krutikov, Lopatnev.
23. **Krutikov, V. S.** A Possible Method for Finding the Value of Indeterminate Near Wave Field of an Expanding Cylinder [Text] / V. S. Krutikov, A. G. Lopatnev // Technical Physics Letters, vol. 26, iss. 9, 2000, pp. 751–848. Translated from

Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, vol. 26, no. 17, 2000, pp. 17–25. Original Russian Text Copyright © 2000 by Krutikov, Lopatnev.

24. **Вовченко, А. И.** Гидродинамические характеристики разряда в жидкости при вводе энергии в канал в виде повторяющихся импульсов [Текст] / А. И. Вовченко, В. Г. Ковалев, В. А. Поздеев // Прикладная гидромеханика. – 2001. – Т. 3 (75). – № 3. – С. 18–25.

25. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

26. **Крутиков, В. С.** Об одном точном аналитическом решении обратной задачи расширения цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 2003. – Т. 29. – Вып. 24. – С. 7–14.

27. **Вовченко, А. И.** Исследование характеристик подводного искрового разряда при параметрическом изменении электрических характеристик разрядной цепи [Текст] / А. И. Вовченко // Техн. электродинамика. – 1983. – № 1. – С. 13–16.

28. **Иванов, А. В.** О возможности управления электрическими и гидродинамическими процессами подводных искровых разрядов [Текст] / А. В. Иванов, А. И. Вовченко, С. А. Богаченко // Техн. электродинамика. – 1983. – № 6. – С. 15–20.

29. **Иванов, В. В.** Математическая модель подводных искровых разрядов при переменной индуктивности разрядного контура [Текст] / В. В. Иванов // Электронная обработка материалов. – 1982. – № 3. – С. 30–35.

30. **Вовченко, А. И.** Особенности гидродинамических характеристик высоковольтного электрического разряда в жидкости при двухимпульсном законе ввода мощности [Текст] / А. И. Вовченко, В. Г. Ковалев, В. А. Поздеев // Письма в Журн. техн. физ. – 1997. – Т. 23. – № 9. – С. 58–61.

31. **Кедринский, В. К.** О некоторых приближенных моделях одномерной пульсации цилиндрической полости в несжимаемой жидкости [Текст] / В. К. Кедринский // Физика горения и взрыва. – 1976. – Т. 12. – № 5. – С. 768–773.

32. **Вовченко, А. И.** Исследование характеристик подводного искрового разряда при параметрическом изменении электрических характеристик разрядной цепи [Текст] / А. И. Вовченко // Техническая электродинамика. – 1983. – № 1. – С. 12–16.

33. **Вовченко, А. И.** Гидродинамические характеристики электрического разряда в жидкости при вводе энергии в канал в виде повторяющихся импульсов [Текст] / А. И. Вовченко, В. Г. Ковалев, В. А. Поздеев // Акустический вестник. – 2002. – Т. 5, № 3. – С. 12–18.

34. **Иванов, А. В.** О возможности управления электрическими и гидродинамическими процессами искровых разрядов [Текст] / А. В. Иванов, А. И. Вовченко, О. А. Богаченко // Технич. электродинамика. – 1981. – № 6. – С. 15–20.

35. **Ландау, Л. Д.** Механика сплошных сред [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Гостехтеориздат, 1954. – 596 с.

К ГЛАВЕ 7

1. **Krutikov, V. S.** A New Approach to Solution of Inverse Problems for a Wave Equation in Domains with Moving Boundaries [Text] / V. S. Krutikov // *Doklady Mathematics*, vol. 59, no. 1, 1999, pp. 10–13. Translated from *Doklady Akademii Nauk*, vol. 364, no. 1, 1999, pp. 17–20. Original Russian Text Copyright © 1999 by Krutikov. English Translation Copyright © 1999 by МАИК "Наука/Interperiodica" (Russia).

2. **Krutikov, V. S.** Waves Surrounding an Expanding Permeable Cylinder in a Compressible Medium [Text] / V. S. Krutikov // *Doklady Physics*, vol. 44, no. 10, 1999, pp. 674–677. Translated from *Doklady Akademii Nauk*, vol. 368, no. 6, 1999, pp. 755–758. Original Russian Text Copyright © 1999 by Krutikov.

3. Исследовать принципы создания и управления электроразрядной нелинейной, объемной кавитацией для использования в механо-химических процессах обработки льноволокна для получения текстильной нити: Т. 2. Отчет о НИР (заключительный) / ИИПТ НАН Украины / под ред. В. С. Крутикова. – № ГР0100U004073: Инв. № 0203U000542. – Николаев, 2003.

4. **Крутиков, В. С.** Решение проблемы подвижных границ для уравнений в частных производных волновых с нелинейными дополнительными условиями [Текст] / В. С. Крутиков // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. IV Международ. науч. школы-семинара. – Николаев : Атолл, 2001. – С. 29–31.

5. **Крутиков, В. С.** Точные аналитические решения обратной и прямой задач расширения цилиндра в сжимаемой среде, принимающие конечные значения в точках волновой зоны и на подвижной границе [Текст] / В. С. Крутиков // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. IV Международ. науч. школы-семинара. – Николаев : Атолл, 2001. – С. 31–32.

6. **Крутиков, В. С.** Учет влияния проницаемости подвижной границы раздела фаз плазма – жидкость на генерирование слабых ударных волн [Текст] / В. С. Крутиков // Теория, эксперимент, практика электроразрядных технологий. – Николаев : Атолл, 2002. – № 4. – С. 93–100.

7. **Крутиков, В. С.** О границах применимости точных аналитических решений волнового уравнения в областях с подвижными границами в задачах импульсной гидродинамики и акустики [Текст] / В. С. Крутиков // Теория, эксперимент, практика электроразрядных технологий. – Николаев : Атолл, 2002. – Вып. 4. – С. 84–92.

8. **Крутиков, В. С.** Об одном возможном способе определения функций управления волновыми процессами в областях с подвижными проницаемыми границами [Текст] / В. С. Крутиков // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Матер. V Международ. науч. школы-семинара. – Николаев : Атолл, 2003. – С. 5–8.

9. **Krutikov, V. S.** On the Propagation of Perturbations in Multicomponent Media (Spherical symmetry) [Text] / V. S. Krutikov, M. B. Rigina // *Technical*

Physics Letters, vol. 29, no. 10, 2003, pp. 833–835. Translated from Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, vol. 29, no. 19, 2003, pp. 88–94. Original Russian Text Copyright © 2003 by Krutikov, Rigina.

10. **Крутиков, В. С.** An Exact Analytical Solution of the Inverse Problem for a Plasma Cylinder Expanding in a Compressible Medium [Текст] / В. С. Крутиков // Technical Physics Letters, vol. 29, no. 12, 2003, pp. 1014–1017. Translated from Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, vol. 29, no. 24, 2003, pp. 7–14. Original Russian Text Copyright © 2003 by Krutikov.

11. **Крутиков, В. С.** Об одном точном аналитическом решении обратной задачи расширения цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 2003. – Т. 29. – Вып. 24. – С. 7–14.

12. **Крутиков, В. С.** О динамике цилиндрической полости в идеальной сжимаемой жидкости [Текст] / В. С. Крутиков // Теория, эксперимент, практика электроразрядных технологий. – Николаев : Атолл, 2000. – № 3. – С. 83–91.

13. Прикладная гидродинамика электровзрыва [Текст] / Н. М. Бескаравайный, В. В. Дыхта, В. Г. Ковалев, В. В. Тульский. – К. : Наук. думка, 1992. – 200 с.

14. **Нигматулин, Р. И.** Динамика многофазных сред [Текст] / Р. И. Нигматулин. – М. : Наука, 1987. – 360 с.

15. **Ковалев, В. Г.** Об определении времени релаксации газожидкостной смеси [Текст] / В. Г. Ковалев, М. Б. Ригина, В. Н. Цуркин // Письма в журн. техн. физики, 1999. – Т. 25. – Вып. 6. – С. 21–26.

16. **Поздеев, В. А.** Импульсные возмущения в газожидкостных средах [Текст] / В. А. Поздеев, Н. М. Бескаравайный, В. Г. Ковалев. – К. : Наук. думка, 1988. – 116 с.

17. Волны в жидкости с пузырьками [Текст] / А. А. Губайдулин, А. И. Ивандаев, Р. И. Нигматулин, Н. С. Хабеев // Итоги науки и техники (ВИНИТИ). Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1982. – Т. 17. – С. 160–249.

18. **Бескаравайный, Н. М.** Об одном механизме образования газожидкостных систем [Текст] / Н. М. Бескаравайный, В. Г. Ковалев, М. Б. Ригина // Инженерно-физич. журн. – 1994. – Т. 67. – № 1–2. – С. 54–58.

19. **Ковалев, В. Г.** Акустико-гидродинамические характеристики электровзрыва в жидкости, содержащей пузырьки газа [Текст] / В. Г. Ковалев // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. Ин-та гидродинамики. – 1995. – Вып. 110. – С. 111–116.

20. **Окунь, И. З.** Расчет давления жидкости на поршень при постоянной скорости его расширения [Текст] / И. З. Окунь // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1968. – Вып. 1. – С. 126–130.

21. **Крутиков, В. С.** Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков. – К. : Наук. думка, 1985. – 125 с.

22. **Ковалев, В. Г.** Особенности гидродинамического поля давлений электровзрыва в равновесной газожидкостной среде [Текст] / В. Г. Ковалев // Журн. техн. физ. – 1998. – Т. 68. – № 7. – С. 7–12.

23. **Ляхов, Г. М.** Взрывные волны в грунтах [Текст] / Г. М. Ляхов, Г. И. Покровский. – М. : Гостехиздат, 1962. – 103 с.
24. **Ляхов, Г. М.** Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах [Текст] / Г. М. Ляхов. – М. : Наука, 1974. – 223 с.
25. **Седов, Л. И.** Методы подобия и размерности в механике [Текст] / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1967. – 428 с.
26. **Krutikov, V. S.** Validity Limits of Solutions to the Wave Equation for Regions with Moving Permeable Boundaries in Impulse Fluid Dynamics and Acoustics [Text] / V. S. Krutikov // Acoustical Physics, vol. 42, no. 4, 1996, pp. 471–477. Translated from Akusticheskii Zhurnal, vol. 42, no. 4, 1996, pp. 534–540. Original Russian Text Copyright © 1996 by Krutikov.
27. **Гринберг, Г. А.** О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также родственных задач теории теплопроводности, диффузии и других [Текст] / Г. А. Гринберг // Журн. технич. физики. – 1967. – 37, вып. 9. – С. 1598–1606.
28. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.
29. Математическая энциклопедия [Текст] / гл. ред. И. М. Виноградов. – М. : Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – 1103 с.
30. **Копченова, Н. В.** Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст] / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 367 с.
31. **Красильников, В. А.** Введение в физическую акустику [Текст] / В. А. Красильников, В. В. Крылов. – М. : Наука, 1984. – 400 с.
32. **Кедринский, В. К.** Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа [Текст] / В. К. Кедринский // Прикл. механика и техн. физика. – 1968. – № 4. – С. 29–33.
33. **Ковалев, В. Г.** Гидродинамика электровзрыва в газожидкостной смеси [Текст] / В. Г. Ковалев // Журн. техн. физики. – 1996. – Т. 66. – Вып. 4. – С. 24–28.
34. **Ковалев, В. Г.** О динамике газовых пузырьков в жидкости в поле интенсивной волны давления [Текст] / В. Г. Ковалев // Акуст. журн. – 1994. – Т. 40. – № 4. – С. 606–608.
35. **Наугольных, К. А.** Электрические разряды в воде [Текст] / К. А. Наугольных, Н. А. Рой. – М. : Наука, 1971. – 155 с.
36. **Krutikov, V. S.** Hydrodynamic characteristics of pulsed processes in a compressible medium with a multiple (pulsating) energy deposition law [Text] / V. S. Krutikov, A. G. Lopatnev // Technical Physics Letters, vol. 25, iss. 7, 1999, pp. 564–566. Translated from Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, vol. 25, no. 14, 2000, pp. 34. Original Russian Text Copyright © 1999 by Krutikov, Lopatnev.
37. **Гаврилов, Л. Р.** Физика и техника мощного ультразвука [Текст] / Л. Р. Гаврилов. – М. : Наука, 1970. – Т. 3. – С. 393–426.
38. **Сиротюк, М. Г.** Физика и техника мощного ультразвука [Текст] / М. Г. Сиротюк. – М. : Наука, 1968. – Т. 2. – С. 167–220.

39. **Anderson, A. L.** Acoustics of gas-bearing sediments [Text] / A. L. Anderson, L. D. Hampton // JASA. – 1980. – Vol. 67, № 6. – P. 1865–1889.
40. **Бэтчелор, Г. К.** Механика [Текст] / Г. К. Бэтчелор // Периодич. сборник перевод. иностр. статей. – 1968. – Вып. III. – С. 65–84.
41. **Виноградова, М. Б.** Теория волн [Текст] / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. – М. : Наука, 1979. – 383 с.
42. **Галиев, Ш. У.** Динамика гидроупругопластических систем [Текст] / Ш. У. Галиев. – К. : Наук. думка, 1981. – 276 с.
43. **Григолюк, Э. И.** Нестационарная гидроупругость оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков. – Л. : Судостроение, 1974. – 208 с.
44. **Гринберг, Г. А.** О решении уравнений математической физики с частично или полностью разделяющимися переменными [Текст] / Г. А. Гринберг // К 70-летию академика А. Ф. Иоффе. – М. ; Л. : Изд. АН СССР, 1950. – С. 50–60.
45. **Коул, Р.** Подводные взрывы [Текст] / Р. Коул. – М. : Изд-во иностр. лит., 1950. – 494 с.
46. **Замышляев, Б. В.** Динамические нагрузки при подводном взрыве [Текст] / Б. В. Замышляев, Ю. С. Яковлев. – Л. : Судостроение, 1967. – 387 с.
47. **Лямшев, Л. М.** Лазеры в акустике [Текст] / Л. М. Лямшев // Успехи физических наук – 1987. – Т. 151. – № 3. – С. 479–527.
48. **Найфэ, А.** Методы возмущений [Текст] / А. Найфэ. – М. : Мир, 1976. – 455 с.
49. **Наугольных, К. А.** Волна сжатия, излучаемая расширяющейся сферой [Текст] / К. А. Наугольных // Акуст. журн. – 1965. – Вып. 3. – С. 351–358.
50. **Слепян, Л. И.** Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости [Текст] / Л. И. Слепян // Докл. АН СССР, 1985. – 282, № 4. – С. 809–813.
51. Вопросы математической физики [Текст]. – Л. : Наука, 1976. – 299 с.
52. **Гринберг, Г. А.** Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях [Текст] / Г. А. Гринберг // Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, вып. 2. – С. 193–203.
53. **Крутиков, В. С.** О взаимодействии слабых ударных волн со сферической оболочкой с учетом подвижности границ [Текст] / В. С. Крутиков // Известия РАН. Механика тверд. тела. – М. ; 1992. – № 2. – С. 178–186.
54. **Taylor, G.** The airwave surrounding an expanding sphere [Text] / G. Taylor // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1946. – Vol. 186. – P. 273–292.
55. **Вольмир, А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа (задачи аэроупругости) [Текст] / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1976. – 416 с.
56. Волновая задача для параболического зеркала [Текст] / Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд // ДАН СССР. – 1954. – Т. 95. – С. 961–964.

57. **Крутиков, В. С.** О восстановлении давления на движущейся границе плазменного поршня [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1988. – С. 510–514.
58. **Крутиков, В. С.** Об одном решении обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Прикл. математика и механика. – М., 1991. – № 6. – С. 1058–1062.
59. **Крутиков, В. С.** Волновые явления с учетом конечных перемещений проницаемых границ [Текст] / В. С. Крутиков // Доклады РАН/АН СССР. – 1993. – Т. 333, № 4. – С. 512–514.
60. **Крутиков, В. С.** Количественная оценка волновых явлений с нелинейными условиями в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Письма в Журн. техн. физики. – 1990. – 16, вып. 22. – С. 37–42.
61. **Жуков, А. И.** Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики [Текст] / А. И. Жуков. – М. : Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1960. – 58. – 149 с.
62. **Рождественский, Б. Л.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике [Текст] / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978. – 688 с.
63. **Бейтмен, Г.** Таблицы интегральных преобразований [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – 343 с.
64. **Христианович, С. А.** Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва [Текст] / С. А. Христианович // Прикл. математика и механика. – 1956. – Вып. 4. – С. 599–605.
65. **Крутиков, В. С.** О взаимодействии слабых ударных волн со сферической оболочкой [Текст] / В. С. Крутиков // Волновые процессы в жидкости и элементах конструкций электрогидравлических установок. – К. : Наук. думка, 1990. – С. 21–35.
66. **Гонор, А. Л.** Аналитический метод расчета неустановившихся одномерных движений жидкости [Текст] / А. Л. Гонор // Докл. АН СССР, 1979. – 247. – № 1. – С. 53–56.
67. **Крутиков, В. С.** Теоретическая оценка возможности получения заданного спектра сигнала за счет выбора необходимого закона ввода энергии [Текст] / В. С. Крутиков // Теория, эксперимент, практика электроразрядных технологий. – 1995. – Вып. 2. – С. 64–72.
68. **Зарембо, Л. К.** Введение в нелинейную акустику [Текст] / Л. К. Зарембо, В. А. Красильников. – М. : Наука, 1966. – 520 с.
69. **Ландау, Л. Д.** Гидродинамика [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986. – 736 с.
70. **Наугольных, К. А.** Нелинейные волновые процессы в акустике [Текст] / К. А. Наугольных, Л. А. Островский. – М. : Наука, 1990. – 237 с.

71. **Krutikov, V. S.** Method of Determining the Control Functions for the Wave Processes in Regions with Mobile Boundaries (Cylindrical Symmetry) [Text] / V. S. Krutikov // Technical Physics Letters, vol. 31, no. 1, 2005, pp. 4–8. Translated from Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, vol. 31, no. 1, 2005 pp. 9–16. Original Russian Copyright © 2005 by Krutikov.

72. **Кедринский, В. К.** Гидродинамика взрыва [Текст] / В. К. Кедринский // Прикл. механика и техн. физика. – 1987. – № 4. – С. 23–48.

73. Численное решение многомерных задач газовой динамики [Текст] / под ред. С. К. Годунова. – М. : Наука, 1976 – 400 с.

74. **Шуршалов, Л. В.** О выборе исходной дивергентной формы уравнений при расчете осесимметричных течений конечно-разностными методами [Текст] / Л. В. Шуршалов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1980. – № 4. – С. 793–799.

75. **Барбашова, Г. А.** Расчет двумерного нестационарного течения жидкости при подводном электрическом взрыве проволоочки конечной длины [Текст] / Г. А. Барбашова, А. В. Иванов // Гидромеханика. – К. : Наук. думка, 1986. – № 53. – С. 16–19.

76. **Тихонов, А. Н.** Об устойчивости обратных задач [Текст] / А. Н. Тихонов // ДАН. – 1943. – Т. 39. – Вып. 5. – С. 193–198.

77. **Лаврентьев, М. М.** Об одной обратной задаче для волнового уравнения [Текст] / М. М. Лаврентьев // ДАН. – 1964. – Т. 157. – № 3. – С. 520–521.

78. **Баев, А. В.** О решении обратной задачи для волнового уравнения на отрезке методом последовательных приближений [Текст] / А. В. Баев // Доклады РАН. – 1986. – Т. 287. – № 6. – С. 1358–1361.

79. **Крутиков, В. С.** Построение метода и решений импульсных задач механики сплошной среды с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // Дисс. на соискание уч. степени доктора физ.-мат. наук. – К., 1994. – 343 с.

80. **Крутиков, В. С.** Гидродинамика импульсных процессов (методика решения задач с подвижными границами) [Текст] / В. С. Крутиков. – Николаев, ИИПТ НАН Украины, 1995. – 54 с.

81. **Krutikov, V. S.** On an Inverse Problem for the Wave Equation in Regions with Mobile Boundaries and an Iteration Method for the Determination of Control Functions [Text] / V. S. Krutikov // Doklady Physics, vol. 51, no. 1, 2006, pp. 1–5 © Pleades Publishing Inc. 2006. Original Russian Text Copyright © 2006 by Krutikov.

82. **Krutikov, V. S.** Determining the Control Functions of Wave Processes in Regions with Mobile Boundaries for a Plasma Cylinder of Finite Length Expanding in a Compressible Medium [Text] / V. S. Krutikov // Technical Physics Letters, vol. 31, no. 6, 2005, pp. 532–535. Translated from Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, vol. 31, no. 12, 2005, pp. 88–94. Original Russian Text Copyright © 2005 by Krutikov.

83. **Алфёров, Ж. И.** Полупроводниковый лазер с электрической накачкой [Текст] / Ж. И. Алфёров, Р. Ф. Казаринов // Авт. свидетельство № 181737 от 30.03.63.
84. **Алфёров, Ж. И.** Гетеропереходы в полупроводниках и приборы на их основе [Текст] / Ж. И. Алфёров // Наука и Человечество. – М., 1975.
85. **Алфёров, Ж. И.** Физика и техника полупроводников [Текст] / Ж. И. Алфёров. – М., 1977. – Т. 11.
86. **Швец, И. С.** Институту импульсных процессов и технологий НАН Украины – 40 лет. Наука и производство [Текст] / И. С. Швец // Теория, эксперимент, практика электроразрядных технологий. – Николаев : Атолл, 2002. – Вып. 4. – С. 3–6.
87. **Hunter, K. S.** Pressure and velocity fields produced by an underwater explosion [Text] / K. S. Hunter and T. L. Geers // The J. of the Acoustical Society of America. – 2004. – Vol. 115, no. 4. – Pp. 1483–1496.
88. **Кубенко, В. Д.** Удар затупленных тел о поверхность жидкости или упругой среды [Текст] / В. Д. Кубенко // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40(50). – № 11. – С. 3–44.
89. **Рид, М.** Методы современной математической физики [Текст] / М. Рид, Б.Саймон. – М. : Мир, 1982. – Т. 4. – 428 с.
90. Математическая энциклопедия [Текст] // гл. ред. М. М. Виноградов. – М. : Сов. энц., 1982. – Т. 3. – 1183 с.
91. **Гинзбург, В. Л.** Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными [Текст] / В. Л. Гинзбург // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 103. – Вып. 1. – С. 87–119.
92. **Вигнер, Е.** О непостижимой эффективности математики в естественных науках [Текст] / Е. Вигнер // Успехи физических наук. – 1968. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 535–546.
93. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 735 с.
94. **Лаврентьев, М. А.** Проблемы гидродинамики и их математические модели [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 416 с.
95. **Исакович, М. А.** Общая акустика [Текст] / М. А. Исакович. – М. : Наука, 1973. – 495 с.
96. **Гулый, Г. А.** Научные основы разрядно-импульсных технологий [Текст] / Г. А. Гулый. – К. : Наук. думка, 1990. – 208 с.
97. **Крутиков, В. С.** Об определении функций управления первого и второго случаев цилиндра конечной длины, расширяющегося в сжимаемой среде [Текст] / В. С. Крутиков // Доклады НАНУ. – 2006. – № 1. – С. 52–58.
98. **Филиппов, А. Т.** Многоликий солитон [Текст] / А. Т. Филиппов. – М. : Наука, 1990. – 297 с.

99. **Черкесов, Л. Б.** Гидродинамика поверхностных и внутренних волн [Текст] / Л. Б. Черкесов. – К. : Наук. думка, 1976. – 364 с.
100. **Грінченко, В. Т.** Основы акустики [Текст] / В. Т. Грінченко, І. В. Вовк, В. Т. Маципура. – Наук. думка, 2007. – 640 с.
101. **Крутиков, В. С.** О корректном решении физических проблем управления волновыми процессами (сферические волны) [Текст] / В. С. Крутиков // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Материалы VII Междунар. науч. школы. – Николаев : Атолл, 2007. – С. 31–35.
102. **Крутиков, В. С.** О корректном решении физических проблем управления волновыми процессами в областях с подвижными границами (цилиндрические волны) [Текст] / В. С. Крутиков // Импульсные процессы в механике сплошных сред: Материалы VII Междунар. науч. школы. – Николаев : Атолл, 2007. – С. 25–28.
103. **Крутиков, В. С.** О корректном решении физических проблем управления волновыми процессами в областях с подвижными границами [Текст] / В. С. Крутиков // 36. науч. праць НУК. – Миколаїв : НУК, 2007. – № 4 (415). – С. 30–37.
104. **Крутиков, В. С.** Проницаемость и подвижность границ как принцип управления (Нелинейные дополнительные условия) [Текст] / В. С. Крутиков // 36. науч. праць НУК. – Миколаїв : НУК, 2007. – № 5 (416). – С. 3–11.
105. **Крутиков, В. С.** Об одном корректном решении физических проблем подвижных проницаемых границ для волнового управления [Текст] / В. С. Крутиков // Труды Акустического симпозиума "КОНСОНАНС-2007". – К. : ИГМ НАНУ, 2007. – С. 121–126.
106. **Гинзбург, В. Л.** Физика: прошлое, настоящее, будущее [Текст] / В. Л. Гинзбург. – (Природа, 3 (2000)).
107. **Пуанкаре, А.** О науке [Текст] / А. Пуанкаре. – М. : Наука, 1983. – С. 270; С. 218.
108. **Пригожин, И.** Порядок из хаоса [Текст] / И. Пригожин, И. Стенгерс. – М. : Прогресс, 1986. – С. 364.
109. **Пойа, Д.** Математическое открытие [Текст] / Д. Пойа. – М. : Наука, 1970. – С. 45.
110. **Krutikov, V. S.** Wave Processes – Fundamental Basis for Modern High Technologies [Text] / V. S. Krutikov // Natural Science (NS), 2010. – Vol. 2. – No. 4. – Pp. 298–306.
111. **Вовченко, А. И.** Управляемые электровзрывные процессы преобразования энергии в конденсированных средах [Текст] / А. И. Вовченко, А. А. Посохов. – К. : Наук. думка, 1992. – 168 с.
112. **Гинзбург, В. Л.** О физике и астрофизике [Текст] / В. Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1985. – 400 с.

113. **Крутиков, В. С.** Определение местоположения дополнительных условий – основа однозначной реконструкции волновых полей в областях с подвижными границами и функций управления [Текст] / В. С. Крутиков // Труды Акустич. симпозиума "КОНСОНАНС–2011". – К. : ИГМ НАНУ, 2011. – С. 170–176.

114. **Крутиков, В. С.** К теории излучающих источников, движущихся в сжимаемой среде (проблема В.Л. Гинзбурга) [Текст] / В. С. Крутиков // Труды Акустич. симпозиума "КОНСОНАНС–2013". – К. : ИГМ НАНУ, 2013. – С. 162–168.

115. **Крутиков, В. С.** Метод оценки полей давлений при высоковольтном электрическом взрыве в закрытых объемах [Текст] / В. С. Крутиков, А. Р. Ризун, Ю. В. Голень // Электронная обработка материалов. – 2014. – 50(5). – С. 84–87.

"Книга может считаться удачной и достигшей своей цели, только в том случае, если она заслужила положительное к себе отношение и со стороны тех, кто этим естествознанием профессионально занимается на деле".

В.Л. Гинзбург, Нобелевский лауреат [112, с. 221]

Приложения:

Редакции, в отдельных случаях, просят автора сообщить им фамилии и адреса исследователей, которые "на деле занимаются этим естествознанием". В данном случае автор, по понятным причинам, к сожалению, не может этого сделать. Поэтому приведены мнения выдающихся мировых лидеров по тематике.

Отзывы, Предисловие, рецензии, протоколы и т. д. к материалам монографии, мировых лидеров, равных которым по теме нет, рассмотревших, одобдивших, рекомендовавших (взявших ответственность на себя) и опубликовавших научные материалы автора. Академики и профессора РАН, НАНУ, Уз.ССР и т. д.:

1. **Лаврентьев М. М.**, академик РАН, ученик выдающегося математика Тихонова А.Н., Дважды Героя Соц. Труда, научная специализация по теме.

2. **Алексеев А. С.**, академик РАН, выдающийся ученый мирового уровня, создал известную школу, лучшую в мире, по волновым процессам. Главный оппонент диссертации д.ф.-м.н. автора. Специализация по теме.

3. **Спасский И. Д.**, академик РАН, выдающийся ученый мирового уровня, создатель бесшумных подводных лодок (п/л), Герой Социалистического Труда, это "Королев С.П. ракетно-ядерного подводного флота". Председатель Совета при Президиуме АН СССР-РАН по гидродинамике, зам. председателя Совета по волновым процессам РАН. Специализация по теме.

4. **Гринченко В. Т.**, академик НАНУ, директор ИГМ НАН Украины, Заслуженный деятель науки и техники Украины, Лауреат Государственной премии УССР. Специализация по теме.

5. **Шамарин Ю. Е.**, профессор, Лауреат Государственной премии Украины, Заслуженный изобретатель Украины, директор КГНИИ гидроприборов. Специализация по теме.

6. **Рахматуллин Х. А.**, Герой Социалистического Труда, академик Уз.ССР, зав. кафедрой газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова, один из создателей Института механики.

7. **Шемякин Е. И.**, академик АН СССР-РАН, Председатель ВАК СССР-РАН, зав. кафедрой газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова.

8. **Тихонов А. Н.**, выдающийся математик, создатель и декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. Ломоносова, Дважды

Герой Социалистического Труда, одобрил подходы автора, на момент подписания Отзыва ушел из жизни, отзыв подписал Захаров Е.В.

9. **Захаров Е. В.**, профессор, зам. декана по науке факультета ВМиК МГУ им. Ломоносова (декан А.Н. Тихонов).

10. **Калиткин Н. Н.**, профессор, Институт прикладной математики АН СССР-РАН им. Келдыша М.В. – Тихонова А.Н.

11. **Исакович М. А.**, профессор, Акустический институт АН СССР.

12. **Гринберг Г. А.**, член-корр. АН СССР-РАН (автор был представлен ему А.Н. Тихоновым и Е.В. Захаровым). Неоднократно с ним встречался после выздоровления (авария). Лично проверил мои подходы, сказал: "Так можно". Благословил первые статьи В.С. Крутикова в ПЖТФ (1988, 1989, 1990) (см. Протокол №28 от 05.10.1992 Е.И. Шемякина). Первая монография Крутикова В.С. (1985) с посвящением: "Патриарху Подвижных Границ" у него.

Вышеупомянутые документы, подписанные теми, "кто на деле профессионально занимается этим естествознанием", профессионализм и компетенция которых высоко оценены, и не вызывают ни у кого сомнения в мире, утверждают (отдают) приоритет в решении актуальных фундаментальных математических и физических проблем по Гинзбургу В.Л.

С П Р А В К А

о выступлении на семинаре (руководитель семинара проф.Захаров Е.В.)
16 марта 1988 г. к.т.н. научного сотрудника ПКБ электрогидравлики
АН УССР КРУТИКОВА В.С. на тему:

"МЕТОД ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ
ГРАНИЦАМИ"

Присутствовало: 21 человек.

Участники семинара отмечают, что следует продолжить работы
по математическому обоснованию метода:

1. вопросы единственности и устойчивости решения при наличии
подвижных поверхностей; при решении обратных задач - предельный
переход на подвижную поверхность;
2. в указанной трактовке метода термин "точное" преждевременен,
ввиду аппроксимации исследуемых функций полиномом Лагранжа.



Инициальный руководитель семинара

профессор

Е.В.ЗАХАРОВ

Юдин В.С. Е.В. заверяю:

16.03.88 г.

ОТЗЫВ

**на автореферат диссертационной работы Крутикова В.С.
"Построение метода и решений импульсных задач механики
сплошной среды с подвижными границами",
представленной на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.02.05.
– механика жидкости, газа и плазмы.**

Проблема подвижных границ уравнений математической физики (для задач параболического типа известная как проблема Стефана), которой посвящена работа, относится к числу сложнейших и малоизученных. Существенной чертой подобных задач является наличие движущихся поверхностей, для которых закон перемещения во времени заранее неизвестен и должен быть определен в ходе решения задачи. Это обстоятельство делает проблему существенно нелинейной даже в том случае, когда линейны как дифференциальные уравнения, описывающие рассматриваемые процессы, так и граничные условия. В настоящее время число известных точных решений задач такого рода – единицы и получены они, как правило, не каким-либо методически ясным путем, а на основе удачных догадок, и, обычно лишь для каких-либо частных граничных условий. Поэтому, разработка нового подхода решения волновых задач в областях с подвижными и подвижными проницаемыми границами определяет актуальность, научную и практическую значимость настоящего исследования и вносит, на наш взгляд, существенный, основополагающий вклад в решение проблемы.

В.С. Крутиковым впервые обращено внимание на тот физически очевидный факт, что распространение возмущений в сплошных средах с конечной скоростью, описываемое волновым уравнением, должны приводить при математическом описании процесса к сложным, в общем случае нелинейным, аргументам исследуемых функций и их взаимодействию. Как показано автором, для задач с одной подвижной границей их пять, с двумя подвижными границами – шестнадцать. Это позволило впервые получить, применяя методы обратных задач, универсальные аналитические решения сложных нелинейных задач, прямых и обратных, для волнового уравнения с одной и двумя подвижными границами, нелинейными условиями в областях с подвижными границами, с нелинейными условиями на подвижных границах, при этом законы изменения скорости движения границ, величины начальных радиуса и перемещений могут быть произвольными. Следует отметить, что название нетрадиционного подхода решения проблемы подвижных границ уравнений математической физики – методы обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов удачно и точно отражает физическую и математическую суть авторского метода.

Возможности разработанного соискателем метода значительны. Им представлены и решены аналитически задачи особой трудности (прямые и обрат-

ные) с проницаемой (излучающей) подвижными границами, законы изменения скоростей проницаемости и движения границ могут быть произвольными. Подобные задачи в математической физике не рассматривались. Развитая методика является методологической основой изучения влияния новых, подобных нетрадиционных граничных условий.

Соискателем большое внимание уделено обоснованию достоверности полученных результатов, проделано сравнение с результатами эксперимента и решениями более сложных уравнений и систем нелинейных уравнений известными методами (характеристик, размерности и подобия, малого параметра и т. д.), показана корректность решаемых обратных задач, доказаны соответствующие теоремы единственности и устойчивости решений; постановка полученных решений в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль; определены границы применимости методов и полученных решений.

Диссертационная работа В.С. Крутикова представляет собой законченное исследование, выполнена на высоком научном уровне и в полном объеме удовлетворяет требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям; разработанный авторский подход решения проблемы подвижных границ и полученные аналитические решения основного уравнения математической физики являются крупным вкладом в развитие аналитических методов решения уравнений в частных производных. Ее автор Крутиков В.С. заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.05. – механика жидкости, газа и плазмы.

Профессор, доктор физико-математических наук

Подпись зам. декана по науке
факультета ВМиК МГУ
Е.В. Захарова заверяю:



Е.В. Захаров

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ И ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи

КРУТИКОВ Виктор Сергеевич

**ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДА И РЕШЕНИЙ
ИМПУЛЬСНЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

Специальность 01.02.05—механика жидкости, газа и
плазмы

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев-1995

Диссертацией является рукопись.
Работа выполнена в Институте импульсных
процессов и технологий НАН Украины

Официальные оппоненты:

- академик РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
А.С. Алексеев,
- доктор физико-математических наук, профессор
И.Т. Селесов,
- доктор технических наук, профессор
В.А. Касянов



Доктор физ.-математических наук, профессор
Александр А.С.
Канд. физ. наук
Игорь Сергеевич
Нарбаков А.Г.

Виктор Сергеевич

Ведущая организация - Институт прикладных проблем механики
и математики НАН Украины

Защита состоится "26" октября 1995г.
в 14⁰⁰ часов на заседании специализированного совета
Д 01.04.01 в Институте гидромеханики НАН Украины
по адресу: 252057, Киев - 57, Желябова 5/4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Института гидромеханики НАН Украины.

Автореферат разослан "12" сентября 1995г.

Ученый секретарь специализированного
совета Д 01.04.01 в Институте
гидромеханики НАН Украины
доктор технических наук

Судин

С.И.Крыль

С уважением *В*
21.02.94

Посланая Вам отрывок по
диссертацию. Отмечу, что
хочу выразить Вам мое искреннее
пожелание в Москву - это мое
желание в социально-экономическом
и медицинском плане.

ПРОТОКОЛ

заседания семинара по задачам магнитной
газодинамики с излучением
от 22 мая 1978 г.

Присутствовали: 12 человек.

Слушали: доклад В.С.Крутикова "Об одном методе решения
задач с подвижными границами.

Постановили: 1/ Метод представляет научный и практический
интерес. Следует направить данную работу в печать.

2/ Целесообразно продолжить работу по развитию данного
метода и уточнению границ его применимости, для чего можно:

а/ Провести сравнение в автомоделным решением для сферы,
расширяющейся с непостоянной скоростью, и

б/ Сравнивая модельное краевое условие, предложенное док-
ладчиком, с точным условием, найти уравнение и краевое условие,
которому удовлетворяет разность точного и приближенного решений.
Исследуя полученную задачу, попробовать получить оценку погреш-
ности метода.

Председатель семинара
доктор физ.-мат. наук

Н.Н.Калиткин

Н.Н.Калиткин

Подпись Н.Н.Калиткина заверяю:

Ученый секретарь ИПМ АН СССР

кандидат физ.-мат. наук

Ю.П.Попов

Ю.П.Попов



П Р О Т О К О Л
заседания семинара Теоретического сектора
от 22 февраля 1980 г.

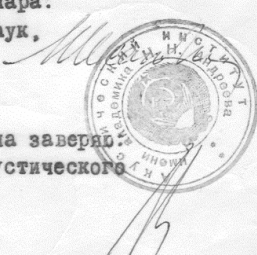
На семинаре присутствовало 11 человек.

Участники семинара заслушали доклад В.С.Крутикова

"Некоторые задачи механики сплошной среды с подвижными границами".

Согласно расчетам автора, при определенных условиях движение границ жидкости обуславливает основную часть нелинейных акустических эффектов, а влияние нелинейности среды еще относительно мало. Как указал автор, это обстоятельство может объяснить наблюдаемые на опыте явления опережения акустического сигнала при штамповке при помощи ударных волн в жидкости. Участники семинара при обсуждении доклада указывали на то, что помимо своего прикладного значения, проведенные автором расчеты могут иметь и независимый научный интерес.

Председатель семинара:
доктор физ.-мат.наук,
профессор



М.А.Исакович

Подпись М.А.Исаковича заверяю.
Ученый секретарь Акустического
института

А.В.Евтушенко

ВЫПСКА

из протокола № 28 заседания кафедры газовой
и волновой динамики механико-математического
факультета МГУ от 5.10.92 г.

ПРИСУТСТВОВАЛИ: зав.кафедрой, академик Шемякин Е.И., профессора: Сагомонян А.Я., Бунимович А.И., Никитин Л.В., Смирнов Н.Н.; Хабеев Н.С.; доценты: Зверев И.Н., Максимов В.Ф., Куксенко Б.В., Филимонов В.А., Звягин А.В., Филиппов Ю.Г.; ст. преп. Натяганов В.Л. доц. Ковалев В.Л., вед.н.с.: Гендугов В.М., Киселев А.Б.; снсн Сагомонян Е.А., сотрудники и аспиранты кафедры.

СЛУШАЛИ: Диссертационную работу снс Института импульсных процессов и технологий АН Украины, к.т.н. Крутикова В.С. на тему: "Построение метода и решений импульсных задач механики сплошной среды с подвижными границами".

В данной работе предложен и разработан нетрадиционный подход решения волновых задач с подвижными границами, основанный на нахождении зависимостей между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в точках области с учетом реальных величин запаздываний, аргументы имеют сложную структуру.

Впервые решены существенно нелинейные волновые задачи: с одной подвижной границей; одна движется, а вторая неподвижна; с двумя подвижными границами; обратные задачи для этих случаев (апробация в МТИ произведено сравнение результатов с известными частными решениями и экспериментальными данными).

Впервые разработана методика и решены задачи с подвижной и проницаемой границей, подобные задачи поставлены впервые.

Основные результаты опубликованы в журналах АН:

Прикладная математика и механика, 1991, № 6,

Известия АН Механика твердого тела, 1992, № 2.

Письма в ЖТФ, 1988, т.14, вып.6.

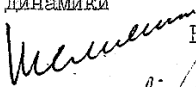
Письма в ЖТФ, 1989, т.15, в.14.

Письма в ЖТФ, 1990, т.16, в.22, а также монографии Крутикова В.С. "Одномерные задачи МСС с подвижными границами" и серии статей.

Кафедра считает, что представленная работа может служить основой докторской диссертации после существенных исправлений и устранения замечаний, высказанных на заседании кафедры (воп-

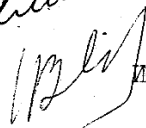
росы рецензентов, назначенных кафедрой, автору представлены).

Зав.кафедрой газовой и волновой динамики
академик



Е.И.Шемякин

Ученый секретарь кафедры
доцент



И.Н.Зверев

ВЫПИСКА

из протокола № 2 заседания кафедры газовой и волновой динамики механико-математического факультета МГУ от 10.02.86 года.

ПРИСУТСТВОВАЛИ: зав.кафедрой газовой и волновой динамики академик АН УССР Рахматулин Х.А., профессора: Бунимович А.И., Сагомонян А.Я., доценты: Зверев И.И., Павленко А.Л., Куценко В.В., Филимонов В.А., сис: Гендугтов В.М., Сагомонян Е.А., ст.преп.: Святин А.В., Филиппов Ю.Г., мис Киселев А.Б., сис Ивандаев А.И., аспиранты и сотрудники кафедры.

СЛУШАЛИ: Доклад кандидата технических наук, научного сотрудника ИГиЭ электрогидравлики АН УССР Крутикова В.С. на тему: "Волновые явления с учетом конечных перемещений границ".

В данной работе:

1. Решена численным методом обратная задача об определении закона расширения полости в жидкости.
2. Дана методика аналитического решения прямой и обратной задачи расширения полости в оболочке, заполненной жидкостью, описываемой волновым уравнением

ПОСТАНОВИЛИ: Кафедра отметила замечания:

1. относящиеся к вопросу закона сохранения энергии на ударной волне для баротропной среды,
2. относящиеся к вопросу применимости полученных решений к описанию физики процесса электрического разряда в жидкости.

Кафедра считает целесообразным:

- а) Продолжить эти исследования.
- б) Опубликовать полученные результаты с учетом критики на заседании кафедры.



зав.кафедрой газовой и волновой динамики
академик АН УССР, профессор

Х.А. Рахматулин
Х.А. РАХМАТУЛИН

ученный секретарь кафедры
доцент

И.И. Зверев

И.И. ЗВЕРЕВ

П Р О Т О К О Л № 13

заседания кафедры газовой и волновой динамики
механико-математического факультета
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

от 12 октября 1981 года.

ПРИСУТСТВОВАЛИ: зав. кафедрой, профессор Х.А. Рахматуллин, профессора - А.И. Бунимович, А.Я. Сагомонян, доценты - И.Н. Зверев, А.Л. Павленко, В.Ф. Максимов, ст. преподаватели - В.А. Филимонов, Ю.И. Гримза, асс. Звягин А.В., ст.н.с. В.М. Гендутов, м.н.с. Моргунов М.Н., аспиранты и гости.

СЛУШАЛИ: доклад кандидата технических наук, научного сотрудника НКБ электрогидравлики АН УССР Крутикова В.С. на тему: "К вопросу управления движения расширяющейся полости в жидкости".

В данной работе:

1. Решена численным методом обратная задача об определении закона расширения полости жидкости.
2. Дана методика приближенного аналитического решения этой задачи.

Сравнение результатов численных расчетов с аналитическими показывает их удовлетворительное для практики совпадение.

Кафедра считает целесообразным:

1. Продолжить эти исследования.
2. Опубликовать полученные результаты с учетом критики на заседаниях кафедры.

Зав. кафедрой газовой
и волновой динамики, академик АН УзССР
профессор, Герой Социалистического Труда

Х.А. Рахматуллин

РАХМАТУЛЛИН Х.А.

Ученый секретарь кафедры
газовой и волновой динамики,
доцент



И.Н. Зверев

ЗВЕРЕВ И.Н.

СОДЕРЖАНИЕ

РЕЦЕНЗИИ	6
ВВЕДЕНИЕ	22
1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ	27
1.1. Метод характеристик.....	27
1.2. Метод теории размерностей.....	36
1.3. Метод малого параметра.....	39
1.4. Обобщение общего метода конечных интегральных преобразований (метод Г.А. Гринберга).....	45
1.5. Приближенные методы.....	49
Заключение по главе 1.....	54
2. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ	57
2.1. Плоский случай симметрии.....	58
2.2. Вычисление времени запаздывания в задачах с подвижными границами.....	61
2.3. Учет движения двух границ в плоском случае симметрии.....	64
2.4. Цилиндрический случай симметрии.....	66
2.5. Учет движения двух границ в цилиндрическом случае.....	70
2.6. Сферический случай симметрии. Учет движения двух границ... ..	76
Заключение по главе 2.....	82
3. НАХОЖДЕНИЕ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ И ИХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА	84
3.1. Понятие запаздывания. Виды аргументов с запаздываниями.....	84
3.2. Обратная задача для волнового уравнения с подвижными границами.....	86
3.3. Уточнение аппроксимации произвольных кусочно-непрерывных функций с использованием полиномов Лагранжа в случае прямых задач.....	99

3.4. Корректность решаемых обратных задач.....	105
3.5. Точные решения волнового уравнения при наличии двух движущихся границ с произвольной скоростью.....	111
3.6. Дифференцирование и интегрирование разрывных функций с запаздываниями.....	116
3.7. Точные решения волнового уравнения при наличии одной неподвижной границы и другой, движущейся с произвольной скоростью.....	124
3.8. Экспериментальная проверка полученных решений.....	132
Заключение по главе 3.....	146
4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ И ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ.....	148
4.1. Границы применимости волнового уравнения.....	148
4.2. Управление движением расширяющейся полости в жидкости по кинематическим и динамическим параметрам.....	151
4.3. Влияние величины начального радиуса на гидродинамические характеристики.....	160
4.4. Распространение возмущений в сжимаемой, вязкой, теплопроводящей среде.....	162
4.5. Определение давления без внесения возмущений в среду.....	166
4.6. Влияние скорости испарения с внутренней поверхности расширяющегося плазменного поршня на гидродинамические характеристики.....	167
4.7. Определение исследуемых функций на большом расстоянии от подвижной границы.....	169
4.8. Решение волнового уравнения при наличии проникаемых и излучающих подвижных границ.....	170
Заключение по главе 4.....	174
5. РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ДРУГИХ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ, ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФфуЗИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДВИЖУЩИХСЯ ГРАНИЦ.....	175
5.1. Волновое уравнение с подвижными границами при наличии цилиндрической симметрии.....	175
5.2. Волновое уравнение с подвижными границами при наличии плоской симметрии.....	188
5.3. Решение уравнений параболического типа с подвижными границами.....	199
5.4. Оценка возможности получения заданных волн давления за счет выбора необходимого закона ввода энергии.....	204

5.5. Построение решения волнового уравнения с нелинейными условиями на подвижных границах.....	211
Заключение по главе 5.....	221
6. УПРАВЛЕНИЕ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ. ПОДВИЖНОСТЬ И ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПОДВИЖНЫХ ГРАНИЦ КАК ПРИНЦИП УПРАВЛЕНИЯ.....	222
6.1. Определение функций управления волновыми процессами сферической симметрии в областях с подвижными проницаемыми границами. Учет нелинейных дополнительных условий.....	223
6.2. Учет влияния проницаемости подвижной границы раздела фаз плазма-жидкость на генерирование слабых ударных волн.....	230
6.3. Точное аналитическое решение обратной задачи расширения цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде. Учет нелинейных дополнительных условий.....	237
6.4. Определение функций управления волновыми процессами цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами.....	242
6.5. Особенности гидродинамических характеристик импульсных процессов в сжимаемой среде при многократном (пульсирующем) законе ввода энергии. Эффект Доплера.....	247
6.6. Волны, окружающие расширяющийся проницаемый цилиндр в сжимаемой среде.....	252
6.7. Волновые процессы в областях с подвижными границами плоской симметрии. Функции управления. Учет нелинейных дополнительных условий. Учет проницаемости подвижных границ.....	254
Заключение по главе 6.....	258
7. ИЗМЕНЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПЛОТНОСТИ СРЕДЫ КАК СРЕДСТВО УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ. КОРРЕКТНОЕ РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	259
7.1. О распространении возмущений в многокомпонентной среде (цилиндрическая симметрия).....	259
7.2. Изменение плотности и скорости распространения возмущений многокомпонентной сжимаемой среды как средство управления волновыми процессами (сферическая симметрия).....	267
7.3. О границах применимости точных аналитических решений волнового уравнения в областях с подвижными проницаемыми границами в задачах импульсной гидродинамики и акустики.....	271
7.4. Об одной обратной задаче для волнового уравнения в областях с подвижными границами и об итерационном методе определения функций управления.....	279
7.5. Об одном возможном способе корректного определения функций управления волновыми процессами в областях с подвижными проницаемыми границами.....	286

7.6. Об одном новом способе корректного решения физических проблем управления волновыми процессами в областях с подвижными границами.....	295
7.7. К теории излучающих источников, движущихся в сжимаемой среде (проблема Гинзбурга В.Л.).....	301
ПОСЛЕСЛОВИЕ	309
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	339
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	341
ПРИЛОЖЕНИЯ	371

TABLE OF CONTENTS

REVIEWS.....	6
INTRODUCTION.....	22
1. EXISTING GENERAL METHODS OF SOLUTION OF PROBLEMS WITH MOBILE BOUNDARIES.....	27
1.1. Method of characteristics.....	27
1.2. Dimensional theory method.....	36
1.3. Small parameter method.....	39
1.4. Generalization of general method of finite integral transformations (G.A. Greenberg method).....	45
1.5. Approximate methods.....	49
Conclusion of the chapter 1.....	54
2. FORMATION OF APPROXIMATE SOLUTIONS OF PROBLEMS WITH MOBILE BOUNDARIES TAKING INTO ACCOUNT LAGS OF PERTURBATIONS PROPAGATION.....	
2.1. Flat symmetry case.....	58
2.2. Calculation of dead time in the problems with mobile boundaries.....	61
2.3. Consideration of movement of two boundaries in case of flat symmetry.....	64
2.4. Cylindrical symmetry case.....	66
2.5. Consideration of moving of two boundaries in cylindrical case.....	70
2.6. Spherical symmetry case. Consideration of two boundaries movement.....	76
Conclusion of the chapter 2.....	82
3. DETERMINATION OF EXACT ANALYTICAL SOLUTION OF PROBLEMS WITH MOBILE BOUNDARIES AND THEIR EXPERIMENTAL VALIDATION.....	
3.1. The notion of lag, kinds of arguments with lags.....	84
3.2. Inverse problem for the wave equation with mobile boundaries.....	86
3.3. Specification of approximation of arbitrary piecewise continuous functions using Lagrangian polynomials in case of inverse problems.....	99
3.4. Correctness of inverse problems under solving.....	105

3.5. Exact solutions of wave equation in the presence of two moving boundaries with arbitrary speed.....	111
3.6. Differentiation and integration of discontinuous functions with lags....	116
3.7. Exact solutions of the wave equation in the presence of one fixed boundary and another one that moves with an arbitrary speed.....	124
3.8. Experimental validation of received solutions.....	132
Conclusion of the chapter 3.....	146
4. APPLICATION OF RECEIVED EXACT SOLUTIONS AT INVESTIGATION OF PERTURBATIONS IN COMPRESSIBLE, VISCOUS AND THERMAL-TRANSFER MEDIUM.....	
4.1. The limits of application of wave equation.....	148
4.2. The control of the movement of the expanding cavity in liquid according to kinematic and dynamic parameters.....	151
4.3. The effect of the initial radius value on the hydrodynamic characteristics.....	160
4.4. The propagation of perturbations in compressible, viscous, thermal-transfer media.....	162
4.5. Pressure determination without perturbing the media.....	166
4.6. The effect of the evaporation rate from the interior surface of expanding plasma piston on the hydrodynamic characteristics.....	167
4.7. The determination of functions under consideration in a great distance from the mobile boundary.....	169
4.8. Solution of the wave equation in the presence of permeable and radiating mobile boundaries.....	170
Conclusion of the chapter 4.....	174
5. ENHANCEMENT OF APPLICATION OF THE PROPOSED METHOD FOR THE SOLUTION OF OTHER WAVE PROBLEMS, THERMAL CONDUCTIVITY THEORY AND DIFFUSION IN THE PRESENCE OF MOBILE BOUNDARIES.....	
5.1. Wave equation with mobile boundaries in the presence of cylindrical symmetry.....	175
5.2. Wave equation with mobile boundaries in the presence of flat symmetry.....	188
5.3. Solution of equations of parabolic type with mobile boundaries.....	199
5.4. Assessment of the possibility of getting the specified pressure waves due to the choice of the necessary law of energy input.....	204
5.5. Construction of a solution of the wave equation with nonlinear conditions on mobile boundaries.....	211
Conclusion of the chapter 5.....	221
6. WAVE PROCESSES CONTROL. MOBILITY AND PERMEABILITY OF MOBILE BOUNDARIES AS A PRINCIPLE OF CONTROL.....	222
6.1. The determination of control functions of wave processes of spherical symmetry in the regions with mobile permeable boundaries. The consideration of nonlinear additional conditions.....	223

6.2. Consideration of the effect of permeability of mobile interface of phases plasma-liquid on the generation of weak blast waves.....	230
6.3. Exact analytical solution of the inverse problem of the expansion of cylindrical plasma piston in a compressible media. The consideration of nonlinear additional conditions.....	237
6.4. The determination of control functions of wave processes of cylindrical symmetry in the regions with mobile boundaries.....	242
6.5. The peculiarities of hydrodynamic characteristics of pulse processes in a compressible media at multiple (pulse) law of energy input. Doppler effect.....	247
6.6. Waves surrounding expanding permeable cylinder in a compressible media.....	252
6.7. Wave processes in the region with mobile boundaries of flat symmetry. Control functions. The consideration of nonlinear additional conditions. The consideration of moving boundaries permeability.....	254
Conclusion of the chapter 6.....	258
7. THE ALTERATION OF THE VELOCITY OF PERTURBATIONS PROPAGATION AND MEDIUM DENSITY AS A MEAN OF WAVE PROCESSES CONTROL. CORRECT SOLUTION OF PHYSICAL PROBLEMS OF CONTROL.....	259
7.1. On the propagation of perturbations in a polyphase medium. Cylindrical symmetry.....	259
7.2. Variation of density and speed of perturbations propagation in a polyphase compressible medium as a mean of wave processes control. Cylindrical symmetry.....	267
7.3. On the limits of application of exact analytical solutions of the wave equation in the regions with mobile permeable boundaries in the problems of pulse hydrodynamics and acoustics.....	271
7.4. On the one inverse problem for the wave equation in the fields with moving boundaries and on the iterative method for determination of control functions.....	279
7.5. On the Correct Determination of Wave Phenomena Control Functions in the Regions with Moving Permeable Boundaries.....	286
7.6. On the New Method of the Correct Determination of Physical Problems of Control by Wave Phenomena in the Regions with Moving Boundaries.....	295
7.7. Theory of radiating sources moving in a compressible medium (V.L. Ginzburg's problem).....	301
POSTFACE.....	309
CONCLUSION.....	339
LIST OF REFERENCES.....	341
APPS.....	371

УДК 534.222
ББК 22.311
К 84

Крутіков В. С.
К 84 Хвилі в областях з рухомими проникними границями. Питання керування : монографія / В. С. Крутіков. – Миколаїв : НУК, 2015. – 392 с.
ISBN 978–966–321–304–0

Біля трьох сторіч, з моменту створення хвильового рівняння, перед математичною фізикою стоять проблеми розв'язання нелінійних задач, що описуються рівняннями в частинних похідних, найскладніша з яких – проблема рухомих границь. Методів точного аналітичного розв'язання подібних задач дотепер не було. Запропоновано й розроблено нетрадиційний підхід розв'язання проблем рухомих проникних границь – це методи обернених задач з урахуванням взаємодії нелінійних аргументів. Розв'язано аналітично: класи задач для хвильового рівняння з однією та двома рухомими границями; одна рухається, а друга нерухома; прямих і обернених задач для цих випадків, при довільних величинах переміщень, початкових радіусів і законів зміни швидкості руху границь; важливий клас задач для випадку задання нелінійних додаткових умов на рухомих границях; клас задач з рухомими проникними границями. Метод дозволив зробити якісний крок уперед, перейти від пізнання хвильових процесів до більш складного й важливого процесу керування хвильовими явищами. Визначено функції керування хвильовими процесами в областях з рухомими проникними границями, у тому числі в багатокомпонентних стисливих середовищах, швидкість звуку й щільність яких можуть змінюватися в широкому діапазоні залежно від вихідних складових.

Для студентів і аспірантів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також науковців відповідних спеціальностей, фахівців, які розробляють наукоємні технології, що ґрунтуються на хвильових процесах.

Наукове видання

КРУТІКОВ Віктор Сергійович

ХВИЛІ В ОБЛАСТЯХ З РУХОМИМИ ПРОНИКНИМИ ГРАНИЦЯМИ. ПИТАННЯ КЕРУВАННЯ

МОНОГРАФІЯ

(російською мовою)

Комп'ютерне верстання *В. Г. Мазанко*

Коректори *Ю. О. Банкулова, М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 22,8. Тираж 350. Вид. № 6. Зам. № 11.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідectво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

