

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

В. М. Соков

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічних робіт
з розділу будівельної механіки корабля
«Основи теорії пружності»

Методичні вказівки
до самостійної роботи студентів

Рекомендовано Методичною радою НУК



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2024

УДК 539.3
С59

Автор

В. М. Соков, старший викладач

Рецензент

Є. Т. Бурдун, кандидат технічних наук, професор кафедри БМ та ККК

Рекомендовано Методичною радою НУК

Соков В. М.

С59 Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт з розділу будівельної механіки корабля «Основи теорії пружності» : методичні вказівки до самостійної роботи студентів / В. М. Соков. – Миколаїв : НУК, 2024. – 103 с.

Викладено теоретичний і практичний матеріал для виконання розрахунково-графічних робіт з розділу «Основи теорії пружності» згідно з робочою програмою навчальної дисципліни «Будівельна механіка корабля» НУК ім. адмірала Макарова для освітнього ступеня «бакалавр».

Призначено для студентів кораблебудівних, машинобудівних, електротехнічних та інших спеціальностей.

УДК 539.3

© В. М. Соков, 2024

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2024

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....	6
1.1 Основні рівняння теорії пружності.....	6
1.2 Обернена задача теорії пружності.....	14
2 ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТА КОМПОНЕНТІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗАДАНОГО ПРУЖНОГО ТІЛА.....	26
3 ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧКАХ ПРУЖНОГО ТІЛА.....	41
3.1 Визначення головних напружень.....	41
3.2 Визначення головних деформацій.....	44
3.3 Встановлення положення головних площадок.....	46
3.4 Інші перетворення напружень.....	52
4 РОЗРАХУНОК МІЦНОСТІ Й ЖОРСТКОСТІ ТОНКОСТІННОГО ПРИЗМАТИЧНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЧИСТОМУ КРУЧЕННІ.....	67
4.1 Основні залежності для розрахунку чистого кручення тонкостінного призматичного стержня замкнутого профілю.....	67

4.2 Залежності при крученні відкритого тонкостінного профілю.....	69
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	87
ДОДАТКИ.....	88
Додаток А. Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи «Розв’язання оберненої задачі теорії пружності», тип А	89
Додаток Б. Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи «Дослідження зовнішнього навантаження та компонентів напружено-деформованого стану заданого пружного тіла»	94
Додаток В. Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи «Дослідження напружено-деформованого стану в точках пружного тіла»	96
Додаток Г. Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи «Розрахунок міцності й жорсткості тонкостінного призматичного стержня при чистому крученні».....	99

ВСТУП

Методичні вказівки створені на допомогу студентам при виконанні розрахунково-графічних робіт (РГР), які пропонуються в 1-му семестрі вивчення курсу дисципліни «Будівельна механіка корабля», що читається в НУК ім. адмірала Макарова в рамках робочої програми курсу в галузі знань 13 «Механічна інженерія», зі спеціальності 135 «Суднобудування». В методичних вказівках розглянуто послідовність виконання наступних РГР: «Розв’язання оберненої задачі теорії пружності»; «Дослідження зовнішнього навантаження та компонентів напружено-деформованого стану заданого пружного тіла»; «Дослідження напружено-деформованого стану в точках пружного тіла»; «Розрахунок міцності й жорсткості тонкостінного призматичного стержня при чистому крученні».

1 РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

1.1 Основні рівняння теорії пружності

В рамках лінійної або класичної теорії пружності використовуються наступні складові напружено-деформованого стану (НДС), які можна об'єднати за наступними групами, що представлені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Групи НДС

№ групи	Найменування групи	Позначення
1	Переміщення	u, v, w
2	Деформації	$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
3	Напруження	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

В рамках лінійної теорії пружності використовуються наступні основні рівняння.

Рівняння рівноваги елементарного тетраедра:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= p_{vx}, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n &= p_{vy}, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n &= p_{vz}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

де l, m, n – напрямні косинуси елементарної площадки, які є функціями від координат;

P_{vx}, P_{vy}, P_{vz} – проєкції поверхневих сил відповідно на осі x, y, z , Н/м², які є функціями від координат.

Рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда при статичних навантаженнях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= -X, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= -Y, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -Z, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

де X, Y, Z – проєкції об'ємних сил відповідно на осі x, y, z , Н/м³, які є функціями від координат.

Залежності Коші, які пов'язують деформації з переміщеннями,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Рівняння сумісності деформацій Сен-Венана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Закон Гука, коли напруження виражені через деформації:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \right), & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \right), & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \right), & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}, \\ G &= \frac{E}{2(1+\mu)}, & \theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

де E – модуль пружності при розтягу-стиску, Па;

G – модуль зсуву, Па;

μ – коефіцієнт Пуассона;

α – коефіцієнт лінійного температурного розширення, K^{-1} .

Закон Гука, коли деформації виражені через напруження:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Умови сумісності, виражені через напруження у формі Бельтрамі-Мітчела без урахування температурного поля:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right); \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right); \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

де $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, $\nabla^2() = \frac{\partial^2()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2()}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Повні умови сумісності, виражені через напруження:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left[\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_y + \sigma_z)}{\partial y^2} \right] - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\alpha E \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \mu \left[\frac{\partial^2 (\sigma_y + \sigma_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_z + \sigma_x)}{\partial z^2} \right] - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= -\alpha E \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} - \mu \left[\frac{\partial^2 (\sigma_z + \sigma_y)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} \right] - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x} &= -\alpha E \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right); \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]}{\partial y \partial z} &= \alpha E \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}; \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]}{\partial z \partial x} &= \alpha E \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x}; \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]}{\partial x \partial y} &= \alpha E \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7')$$

Рівняння Ламе, що представляють собою рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда, які пов'язують переміщення з об'ємними силами, запишуться як

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{X}{G} + \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial x} \alpha, \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= -\frac{Y}{G} + \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial y} \alpha, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{Z}{G} + \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \frac{\partial T}{\partial z} \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

де T – температурне поле, яке є функцією від координат, K .

Граничні умови до рівнянь Ламе, що представляють собою рівняння рівноваги елементарного тетраедра, які пов'язують переміщення і поверхневі сили, мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} p_{vx} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{2l}{1-2\mu} [\mu\theta - (1+\mu)\alpha T] \right), \\ p_{vy} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{2m}{1-2\mu} [\mu\theta - (1+\mu)\alpha T] \right), \\ p_{vz} &= G \left(\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{2n}{1-2\mu} [\mu\theta - (1+\mu)\alpha T] \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

де $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$; $\frac{\partial(\cdot)}{\partial v} = l \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + m \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} + n \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}$ – похідна

вздовж нормального вектора до поверхні;

$\rho = lu + mv + nw$ – проєкція повного переміщення на нормальний вектор до поверхні.

Переміщення за відомими деформаціями можливо знайти з використанням наступних залежностей:

$$\left. \begin{aligned}
& u = u_0 + (y - y_0) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + (z - z_0) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 + \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx + \\
& \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy^2 + \int_{z_0}^z \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz^2 + \\
& + \frac{1}{2} (y - y_0) \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) dz,
\end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
& v = v_0 + (z - z_0) \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 + (x - x_0) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 + \int_{y_0}^y \varepsilon_y dy + \\
& + \int_{z_0}^z \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} \right) dz^2 + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx^2 + \\
& + \frac{1}{2} (z - z_0) \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) dx,
\end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
& w = w_0 + (x - x_0) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 + (y - y_0) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 + \int_{z_0}^z \varepsilon_z dz + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} \right) dx^2 + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} \right) dy^2 + \\
& + \frac{1}{2} (x - x_0) \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) dy,
\end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

де x_0, y_0, z_0 – координати початкової точки інтегрування M ;
 u_0, v_0, w_0 – початкові переміщення, вважаючи досліджуване тіло абсолютно жорстким у точці M ;

$(\partial u/\partial y)_0$ – початковий кут повороту елемента dy у напрямку осі x (у площині xOy) у точці M , вважаючи досліджуване тіло абсолютно жорстким;

пояснення для кутів повороту $(\partial u/\partial z)_0$, $(\partial v/\partial x)_0$, $(\partial v/\partial z)_0$, $(\partial w/\partial x)_0$, $(\partial w/\partial y)_0$ аналогічні до попереднього $(\partial u/\partial y)_0$.

Згадані шість початкових кутів повороту повинні задовольняти умовам Коші (1.3):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 &= (\gamma_{xy})_0, & \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 &= (\gamma_{yz})_0, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 &= (\gamma_{zx})_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Для зручності іноді використовують наступні залежності:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x = \frac{1}{2}(\beta_{yz} - \beta_{zy}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), & \omega_y = \frac{1}{2}(\beta_{zx} - \beta_{xz}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \omega_z = \frac{1}{2}(\beta_{xy} - \beta_{yx}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

де ω_x , ω_y , ω_z – кути повороту лінійних елементів навколо осей x , y , z відповідно.

Згадані лінійні елементи бісектрують напрями між осями y і z , z і x , x та y відповідно. Величини ω_x , ω_y , ω_z характеризують середнє обертання матеріалу в околі даної точки навколо відповідної осі.

При знаходженні переміщень з використанням (1.10)–(1.12) обрано ізольовану координатну систему, яка не пов'язана з іншими тілами, закріпленнями тощо. Для постійних інтегрування можливо прийняти довільні значення. Зокрема, так як переміщення тіла як твердого цілого не становлять інтересу, то всі шість значень u_0 , v_0 , w_0 і три незалежні кути повороту

(три із $(\partial u/\partial y)_0$, $(\partial u/\partial z)_0$, $(\partial v/\partial x)_0$, $(\partial v/\partial z)_0$, $(\partial w/\partial x)_0$, $(\partial w/\partial y)_0$) можливо покласти рівними нулю.

Щоб виключити середні повороти в околі початкової точки, потрібно покласти рівними нулю компоненти поворотів $(\omega_x)_0 = (\omega_y)_0 = (\omega_z)_0 = 0$, звідки з урахуванням (1.14) отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2}(\gamma_{xy})_0, & \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 &= \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2}(\gamma_{yz})_0, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 &= \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = \frac{1}{2}(\gamma_{zx})_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Використовуючи (1.15), за відомими кутовими деформаціями можливо знайти кути повороту $(\partial u/\partial y)_0$, $(\partial u/\partial z)_0$, $(\partial v/\partial x)_0$, $(\partial v/\partial z)_0$, $(\partial w/\partial x)_0$, $(\partial w/\partial y)_0$, які задіяні у виразах для переміщень (1.10)–(1.12).

Іноді рівняння теорії пружності об'єднують у групи за тією чи іншою ознакою. В табл. 1.2 представлено одну з класифікацій [1] рівнянь теорії пружності по групах.

Таблиця 1.2 – Групи рівнянь теорії пружності

№ групи	Найменування групи	Посилання на формулу
1.1	Рівняння рівноваги елементарного тетраедра	(1.1)
1.2	Рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда	(1.2)
2	Залежності Коші або геометричні залежності	(1.3)
3	Закон Гука або фізичні залежності	(1.5) для $\sigma = f(\varepsilon)$
		(1.6) для $\varepsilon = f(\sigma)$

Для багатозв'язних тіл знайдені переміщення повинні задовольняти умовам однозначності:

$$\left. \begin{aligned} \oint_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) &= 0, \\ \oint_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) &= 0, \\ \oint_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Для однозв'язних тіл умова (1.16) задовольняється автоматично, якщо деформації задовольняють умовам сумісності Сен-Венана.

1.2 Обернена задача теорії пружності

Оберненою задачею теорії пружності називається така задача, коли завданою є одна з груп НДС: переміщення, деформації або напруження, а потрібно знайти решту із двох груп, а також поверхневі та об'ємні сили, використовуючи основні рівняння теорії пружності. Температурне поле не розглядаємо.

Існує три варіанти оберненої задачі теорії пружності. Кожен з варіантів допускає декілька способів вирішення. Варіанти оберненої задачі представлено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3 – Варіанти розв'язання оберненої задачі

№ варіанта	Задано	Потрібно знайти
1	Переміщення	Деформації, напруження, об'ємні та поверхневі сили
2	Деформації	Переміщення, напруження, об'ємні та поверхневі сили
3	Напруження	Деформації, переміщення, об'ємні та поверхневі сили

Нижче у вигляді блок-схем представлено послідовність вирішення кожного з варіантів оберненої задачі теорії пружності.

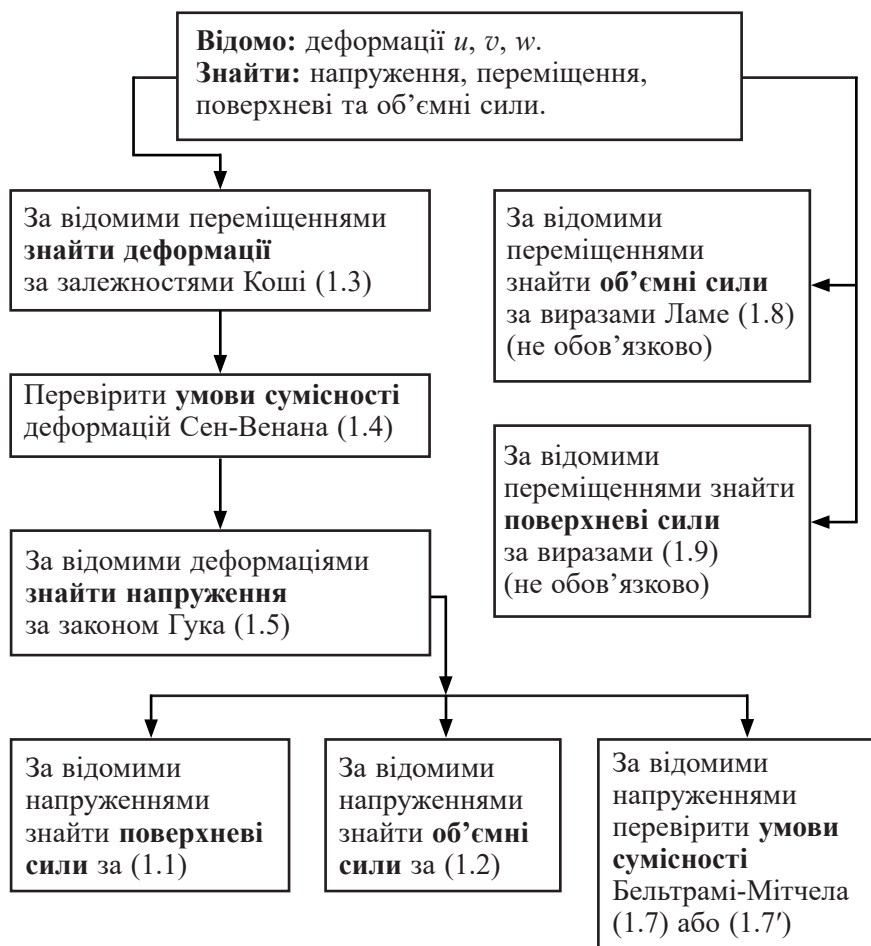


Рис. 1.1. Блок-схема алгоритму вирішення 1-го варіанта оберненої задачі теорії пружності

Перевірка умов сумісності за відомими деформаціями для першого варіанта не є обов'язковою. Вона використовується лише для контролю правильності знаходження залежностей деформацій. У навчальних цілях перевірку умов сумісності потрібно виконувати, щоб зробити висновок про можливість появи даного НДС у тілі.

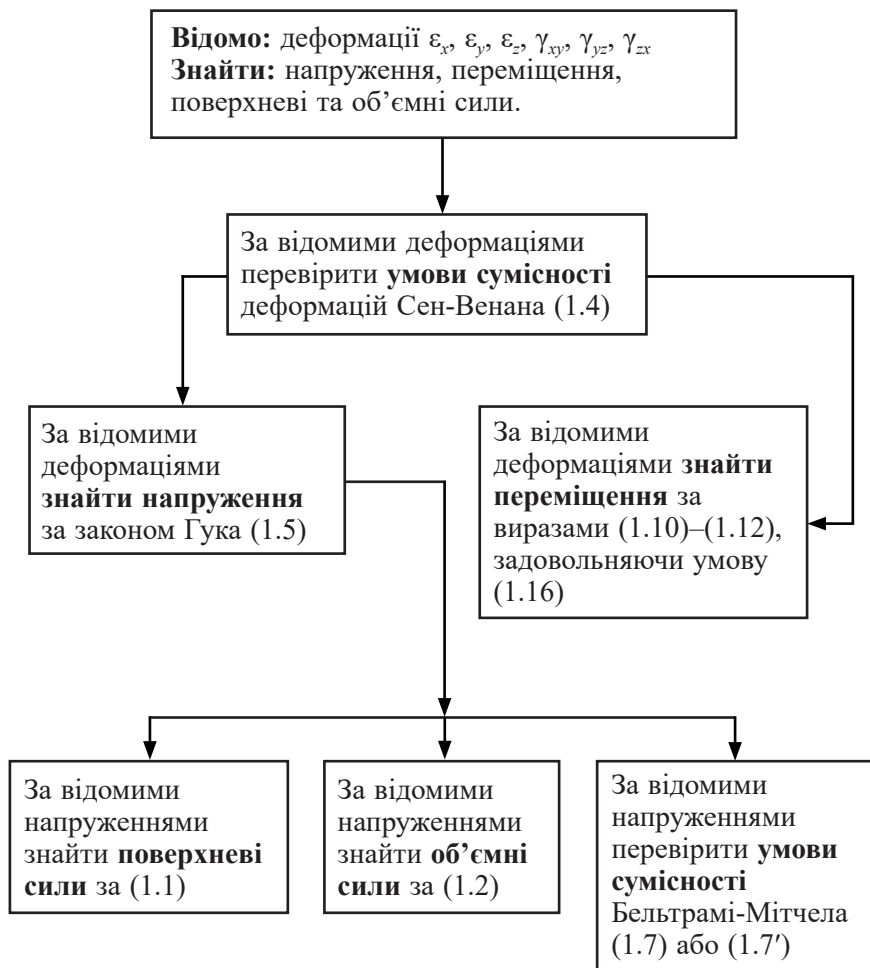


Рис. 1.2. Блок-схема алгоритму вирішення 2-го варіанта
оберненої задачі теорії пружності

Для другого варіанта теорії пружності подальші обчислення можливі лише за умови задоволення умов сумісності деформацій Сен-Венана. Якщо ці умови не виконуються, то подальше обчислення складових НДС не має сенсу.

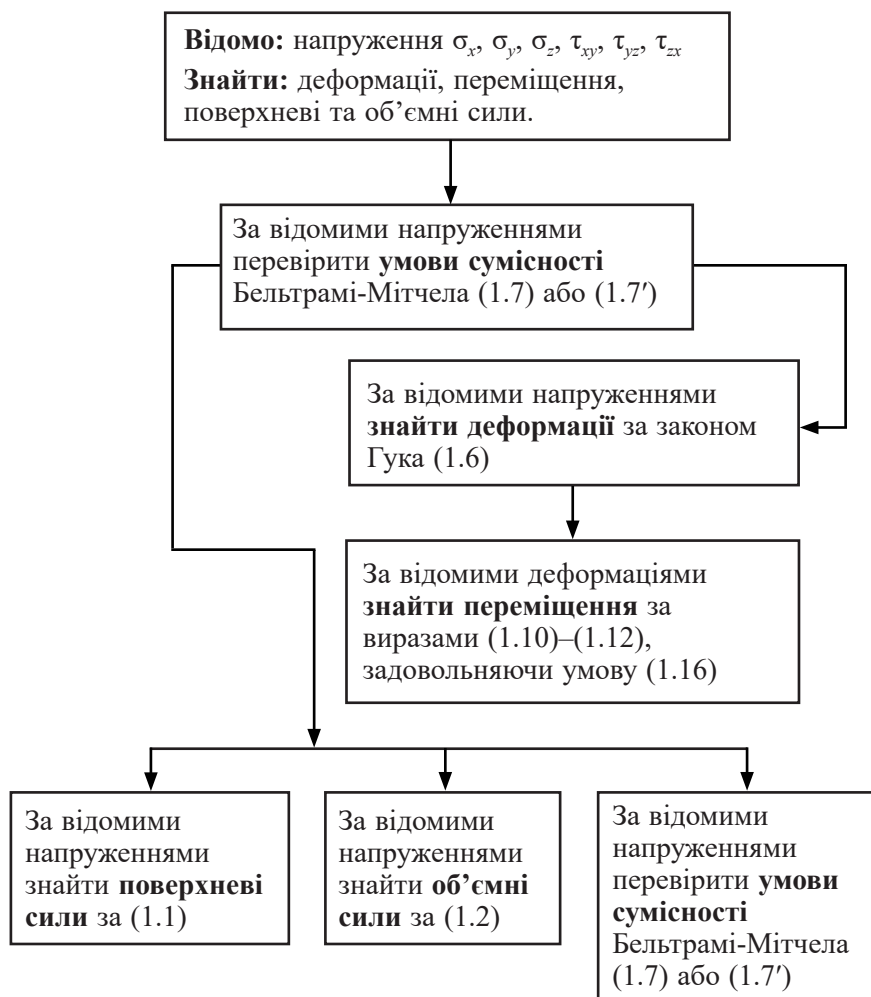


Рис. 1.3. Блок-схема алгоритму вирішення 3-го варіанта оберненої задачі теорії пружності

Для третього варіанта теорії пружності подальші обчислення можливі лише за умови задоволення умов сумісності напружень Бельтрамі-Мітчела, при відсутності температурного поля, або більш загальних умов сумісності (1.7') при наявності

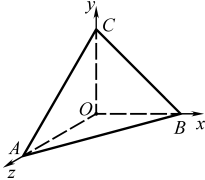
температурного поля. Якщо ці умови сумісності не виконуються, то подальше обчислення складових НДС не має сенсу.

В тому чи іншому разі умови сумісності можливо використовувати для перевірки правильності знаходження виразів складових НДС.

1.3 Приклад. Для заданого однозв'язного, ідеально пружного сталевого тіла ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$) в декартовій системі координат x, y, z задані переміщення $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Вважаючи, що ці переміщення спричинені тільки зовнішніми силами (без температури, $T = 0$), розв'язати обернену задачу теорії пружності у наступній послідовності:

- 1) визначити деформації $\epsilon_x(x, y, z)$, $\gamma_{xy}(x, y, z)$, ... , $\epsilon_z(x, y, z)$;
- 2) перевірити умови сумісності деформацій із п. 1;
- 3) обчислити напруження $\sigma_x(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, ... , $\sigma_z(x, y, z)$;
- 4) розрахувати об'ємні зовнішні сили $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$.
- 5) знайти поверхневі зовнішні сили $p_{vx}(x, y, z)$, $p_{vy}(x, y, z)$, ... , $p_{vz}(x, y, z)$.
- 6) перевірити умови сумісності напружень із п. 3¹;
- 7) знайти одне з переміщень u , v , w за відомими деформаціями і порівняти знайдені переміщення з заданими переміщеннями із п. 1².

Таблиця 1.4 – Вихідні дані

Задані закони переміщень, м	Пружне тіло, рис.	Грань	Відрізок	x_A/y_A	σ, τ
I	II	III	IV	V	VI
$u = 1 \cdot 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx + 8)$		ABC	OC	0,5/1,0	σ_y, τ_{xz}
$v = -2 \cdot 10^{-5} (6x^2 - 7y^2 + 8z^2 - 9)$					
$w = 3 \cdot 10^{-5} (7 - x)(8 + y - 9z)$					

¹ Може не пропонуватися викладачем або одне-два рівняння на вибір викладача.

² Може не пропонуватися викладачем, але слугувати для загального ознайомлення.

Розв'язання. Запропонована обернена задача відноситься до 1-го варіанта. Для її розв'язання скористаємось блок-схемою на рис. 1.1.

Випишемо вирази для переміщень

$$\left. \begin{aligned} u &= 1 \cdot 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx + 8); \\ v &= -2 \cdot 10^{-5} (6x^2 - 7y^2 + 8z^2 - 9); \\ w &= 3 \cdot 10^{-5} (7 - x)(8 + y - 9z). \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

1. Визначення деформацій. Підставивши вирази для переміщень (1.17) у рівняння Коші (1.3), знайдемо деформації:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (1 \cdot 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx + 8)) = 5 \cdot 10^{-5} y - 7 \cdot 10^{-5} z; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-2 \cdot 10^{-5} (6x^2 - 7y^2 + 8z^2 - 9)) = 2,8 \cdot 10^{-4} y; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (3 \cdot 10^{-5} (7 - x)(8 + y - 9z)) = -1,89 \cdot 10^{-3} + 2,7 \cdot 10^{-4} x; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (1 \cdot 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx + 8)) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} (-2 \cdot 10^{-5} (6x^2 - 7y^2 + 8z^2 - 9)) = -1,9 \cdot 10^{-4} x + 6 \cdot 10^{-5} z; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} (-2 \cdot 10^{-5} (6x^2 - 7y^2 + 8z^2 - 9)) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (3 \cdot 10^{-5} (7 - x)(8 + y - 9z)) = -3,2 \cdot 10^{-4} z + 2,1 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5} x; \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (3 \cdot 10^{-5} (7 - x)(8 + y - 9z)) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (1 \cdot 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx + 8)) = \\ &= -2,4 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5} y + 2,7 \cdot 10^{-4} z - 7 \cdot 10^{-5} x. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

2. Перевірка умови сумісності деформацій. Підставивши знайдені деформації (1.18) у рівняння сумісності деформацій Сен-Венана (1.4), отримаємо наступні співвідношення:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \Rightarrow 0 = 0; & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \Rightarrow 0 = 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \Rightarrow 0 = 0; & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \Rightarrow 0 = 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \Rightarrow 0 = 0; & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \Rightarrow 0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Всі умови сумісності деформацій Сен-Венана (1.19) задовольняються. Це дає змогу зробити висновок про те, що вирази деформацій (1.18) визначені вірно. Поява даного НДС в тілі можлива.

3. Знаходження напружень. Для знаходження напружень попередньо обчислимо деякі допоміжні величини, такі як модуль зсуву G , Па, та суму лінійних деформацій θ .

Модуль зсуву G , Па, знайдеться так:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2(1+0,3)} = 7,692 \cdot 10^{10} \text{ Па}. \quad (1.20)$$

Сума лінійних деформацій θ знайдеться наступним чином:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 2,7 \cdot 10^{-4} x + 3,3 \cdot 10^{-4} y - 7 \cdot 10^{-5} z - 1,89 \cdot 10^{-3}. \quad (1.21)$$

Використовуючи закон Гука (1.5), за відомими деформаціями знайдемо напруження, беручи до уваги відсутність температурного поля ($T = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\varepsilon_x + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} \right) = \frac{2 \cdot 10^{-5} G(5y + 23y\mu - 7z + 7z\mu - 189\mu + 27x\mu)}{1-2\mu}; \\ \sigma_y &= 2G \left(\varepsilon_y + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} \right) = \frac{2 \cdot 10^{-5} G(28y - 23y\mu - 7z\mu - 189\mu + 27x\mu)}{1-2\mu}; \\ \sigma_z &= 2G \left(\varepsilon_z + \frac{\mu\theta}{1-2\mu} \right) = \frac{2 \cdot 10^{-5} G(189 - 189\mu - 27x + 27x\mu - 33y\mu + 7z\mu)}{1-2\mu}; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = 1 \cdot 10^{-5} G(6z - 19x); \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = -1 \cdot 10^{-5} G(32z - 21 + 3x); \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} = -1 \cdot 10^{-5} G(24 - 3y - 27z + 7x). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

4. Визначення об'ємних сил. Об'ємні сили за відомими напруженнями визначимо з використанням рівняння рівноваги елементарного паралелепіпеда (1.2):

$$\left. \begin{aligned} X &= - \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = G \left(\frac{5,4 \cdot 10^{-4} \mu}{2\mu - 1} - 2,7 \cdot 10^{-4} \right); \\ Y &= - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = G \left(5,1 \cdot 10^{-4} + \frac{2 \cdot 10^{-5} (28 - 23\mu)}{2\mu - 1} \right); \\ Z &= - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) = G \left(7 \cdot 10^{-5} - \frac{1,4 \cdot 10^{-4} \mu}{2\mu - 1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

5. Визначення поверхневих сил. Поверхневі сили за відомими напруженнями визначимо з використанням рівняння рівноваги елементарного тетраедра (1.1):

$$\left. \begin{aligned} p_{vx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = \left(\frac{2 \cdot 10^{-5} G(5y + 23y\mu - 7z + 7z\mu - 189\mu + 27x\mu)}{1-2\mu} \right) l + \\ &\quad + 1 \cdot 10^{-5} G(6z - 19x) m - 1 \cdot 10^{-5} G(24 - 3y - 27z + 7x) n; \\ p_{vy} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = 1 \cdot 10^{-5} G(6z - 19x) l + \\ &\quad + \left(\frac{2 \cdot 10^{-5} G(28y - 23y\mu - 7z\mu - 189\mu + 27x\mu)}{1-2\mu} \right) m - 1 \cdot 10^{-5} G(32z - 21 + 3x) n; \\ p_{vz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = -1 \cdot 10^{-5} G(24 - 3y - 27z + 7x) l - 1 \cdot 10^{-5} G(32z - 21 + 3x) m + \\ &\quad + \left(\frac{2 \cdot 10^{-5} G(189 - 189\mu - 27x + 27x\mu - 33y\mu + 7z\mu)}{1-2\mu} \right) n. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

6. Перевірка умов сумісності за напруженнями. Так як температурне поле відсутнє, то для перевірки сумісності за напруженнями використаємо рівняння Бельтрамі-Мітчела. В результаті отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \Rightarrow 0 = 0; \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \Rightarrow 0 = 0; \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\mu}{1-\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \Rightarrow 0 = 0; \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \Rightarrow 0 = 0; \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \Rightarrow 0 = 0; \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right) \Rightarrow 0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Всі умови сумісності (1.25) задовольняються. Це означає, що вирази для напружень знайдені вірно, а також додатково підтверджує, що НДС з визначеними компонентами напружень можливий.

7. Визначення складової переміщення u за відомими деформаціями. Покажемо, як за відомими деформаціями можливо визначати переміщення на прикладі визначення складової переміщення u , використавши формулу (1.10). Запишемо цю формулу знову:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + (y - y_0) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + (z - z_0) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 + \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx + \\ &\int_{y_0}^y \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy^2 + \int_{z_0}^z \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (y - y_0) \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) dz, \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Згідно з рекомендаціями підрозділу 1.1 покладемо $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$. Координати початкової точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. За формулами (1.15) визначимо компоненти поворотів:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2}(\gamma_{xy})_0 = 0, & \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 = \frac{1}{2}(\gamma_{yz})_0 = 1,05 \cdot 10^{-4}, \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = \frac{1}{2}(\gamma_{zx})_0 = -1,2 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Послідовно визначимо складові інтегралу (1.26):

$$\begin{aligned} u_0 + (y - y_0) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + (z - z_0) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 &= \\ = 0 + (y - 0) \cdot 0 + (z - 0) \cdot (-1,2 \cdot 10^{-4}) &= -1,2 \cdot 10^{-4} z; \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^x \varepsilon_x dx = \int_0^x (5 \cdot 10^{-5} y - 7 \cdot 10^{-5} z) dx = (5 \cdot 10^{-5} y - 7 \cdot 10^{-5} z) x;$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right) dy^2 &= \int_0^y \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial y} (-1,9 \cdot 10^{-4} x + 6 \cdot 10^{-5} z) - \frac{\partial}{\partial x} (2,8 \cdot 10^{-4} y) \right) dy^2 = \\ &= \int_0^y \int_0^x 0 \cdot dy^2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^z \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) dz^2 &= \int_0^z \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial z} (-2,4 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5} y + 2,7 \cdot 10^{-4} z - 7 \cdot 10^{-5} x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} (-1,89 \cdot 10^{-3} + 2,7 \cdot 10^{-4} x) \right) dz^2 = \int_0^z \int_0^x (2,7 \cdot 10^{-4} - 2,7 \cdot 10^{-4}) dz^2 = \\ &= \int_0^z \int_0^x 0 \cdot dz^2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(y-y_0) \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) dz = \\
& = \frac{1}{2}(y-y_0) \int_0^z \left(\frac{\partial}{\partial z} (-1,9 \cdot 10^{-4} x + 6 \cdot 10^{-5} z) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} (-3,2 \cdot 10^{-4} z + 2,1 \cdot 10^{-4} - 3 \cdot 10^{-5} x) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (-2,4 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5} y + 2,7 \cdot 10^{-4} z - 7 \cdot 10^{-5} x) \right) dz \\
& = \frac{y}{2} \int_0^z (6 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^{-5}) dz = 6 \cdot 10^{-5} zy.
\end{aligned}$$

Остаточню переміщення u , визначене за формулою (1.26), знайдеться як

$$\begin{aligned}
u &= 5 \cdot 10^{-5} xy + 6 \cdot 10^{-5} yz - 7 \cdot 10^{-5} zx - 1,2 \cdot 10^{-4} z = \\
&= 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx - 12z).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Початкове переміщення u з умови задачі

$$u = 1 \cdot 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx + 8). \tag{1.29}$$

Відмінність між (1.28) та (1.29) має місце в останніх членах $-12z$ і 8 . Ці члени визначають переміщення досліджуваного тіла як твердого цілого і залежать від вибору початкової точки. Наприклад, якщо початкова точка має координати: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$, то вираз для переміщення u , визначений формулою (1.26), запишеться

$$u = 1 \cdot 10^{-5} (5xy + 6yz - 7zx - 47 - 23,5y + 23z). \tag{1.30}$$

Проте деформація ϵ_x , визначена за першою формулою Коші (1.3) з використанням трьох виразів (1.28), (1.29), (1.30) для u , є однією і тією ж:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1.28) = \frac{\partial}{\partial x}(10^{-5}(5xy + 6yz - 7zx - 12z)) = 5 \cdot 10^{-5}y - 7 \cdot 10^{-5}z;$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1.29) = \frac{\partial}{\partial x}(1 \cdot 10^{-5}(5xy + 6yz - 7zx + 8)) = 5 \cdot 10^{-5}y - 7 \cdot 10^{-5}z;$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(1.30) = \frac{\partial}{\partial x}(1 \cdot 10^{-5}(5xy + 6yz - 7zx - 47 - 23,5y + 23z)) = \\ &= 5 \cdot 10^{-5}y - 7 \cdot 10^{-5}z.\end{aligned}$$

2 ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТА КОМПОНЕНТІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗАДАНОГО ПРУЖНОГО ТІЛА

В рамках дослідження зовнішнього навантаження та компонентів НДС у вибраних геометричних місцях: точках, лініях, поверхнях будуються епюри зовнішнього навантаження та складових НДС. Послідовність або програма дослідження складових НДС у тілі може бути дуже різноманітна.

В загальному випадку, коли має місце складна геометрія тіла, то для побудови епюр складових НДС на цій геометрії обирається/визначається певна сукупність точок, для яких визначаються координати та напрямні косинуси за потреби. Підставляючи координати цих точок у функціональні залежності досліджуваних складових НДС, отримуємо їх відповідні значення для кожної з точок, які можна використати при побудові епюр.

При графічному зображенні обраної складової НДС усі її розраховані величини відкладаються в певному масштабі для однієї епюри, а вже потім на готовій епюрі вказуються її додаткові атрибути, такі як напрям, знак, значення в обраних точках при необхідності.

Для простих типів поверхонь можливо отримати аналітичні залежності, які визначають закон досліджуваних складових НДС в залежності від координати на лінії або поверхні.

На прикладі покажемо можливу послідовність дослідження зовнішнього навантаження та складових НДС у тілі.

2.1 Приклад. Для заданого в прикладі 1.1 тіла з відомими складовими НДС та зовнішніми силами виконати:

1) графічно показати дію поверхневих сил на тіло та описати прості види деформування, які виникають при їх дії;

2) визначити складові головного вектора та головного моменту поверхневих сил, які діють на задану частину поверхні (грань) (табл. 1.4, III);

3) побудувати епюри компонентів переміщень u , v , w точок тіла, розташованих на заданому прямолінійному відрізку (табл. 1.4, IV);

4) побудувати епюри вказаних компонентів напружень σ і τ (табл. 1.4, VI) вздовж прямої лінії з заданими координатами (табл. 1.4, V).

Розв'язання. Досліджуване тіло, що являє собою тетраедр, представлене на рис. 2.1. Характерні розміри становлять: $OB = 2$ см, $OC = 3$ см, $OA = 4$ см.

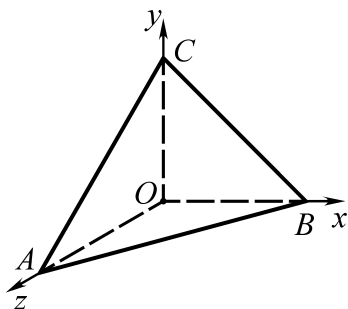


Рис. 2.1. Досліджуване тіло

1. Дослідження поверхневих сил. Для дослідження поверхневих сил, що діють на поверхню тіла, скористаємось залежностями для поверхневих сил (1.24), що були отримані в прикладі 1.1 з використанням рівнянь рівноваги елементарного тетраедра. Залежності лінійно залежать від координат, а тому для побудови складових НДС достатньо лише три точки. Підставляючи координати точок, що належать поверхні/поверхням у рівняння (1.24), отримаємо значення складових поверхневих сил у цих точках. Обчислення виконаємо в табличному вигляді для кожної грані тетраедра на рис. 2.1.

Таблиця 2.1 – Складові поверхневих сил для грані *АОС*

№ з/п	Точка	Атрибути точки						Складові поверхневих сил, Н/м²		
		Координати, м			Напрявні косинуси					
		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>p_{vx}</i>	<i>p_{vy}</i>	<i>p_{vz}</i>
1	<i>A</i>	0	0	4	−1	0	0	2,93E+08	−1,85E+07	−6,46E+07
2	<i>O</i>	0	0	0	−1	0	0	2,18E+08	0	1,85E+07
3	<i>C</i>	0	3	0	−1	0	0	8,08E+07	0	1,15E+07

Таблиця 2.2 – Складові поверхневих сил для грані *ВОС*

№ з/п	Точка	Атрибути точки						Складові поверхневих сил, Н/м²		
		Координати, м			Напрявні косинуси					
		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>p_{vx}</i>	<i>p_{vy}</i>	<i>p_{vz}</i>
1	<i>B</i>	2	0	0	0	0	-1	2,92E+07	-1,15E+07	3,63E+08
2	<i>O</i>	0	0	0	0	0	-1	1,85E+07	-1,62E+07	5,09E+08
3	<i>C</i>	0	3	0	0	0	-1	1,15E+07	-1,62E+07	3,95E+08

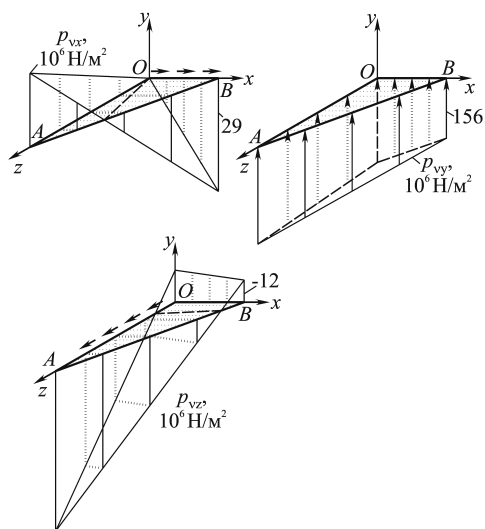
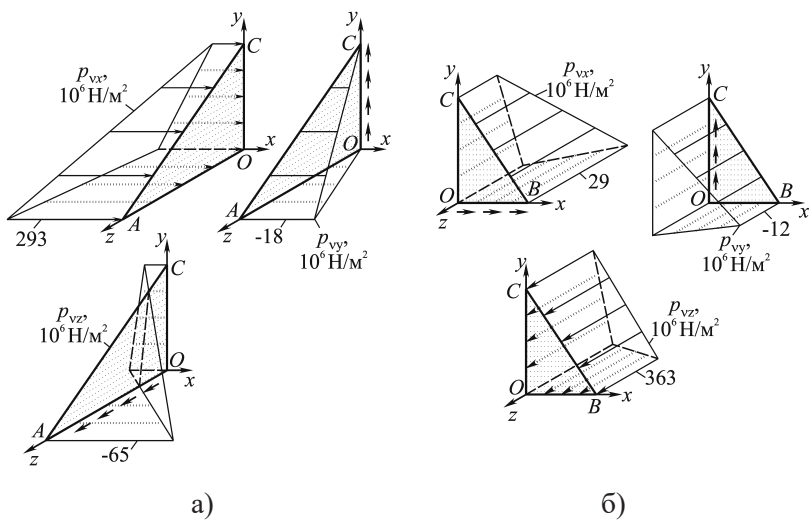
Таблиця 2.3 – Складові поверхневих сил для грані *ВОА*

№ з/п	Точка	Атрибути точки						Складові поверхневих сил, Н/м²		
		Координати, м			Напрявні косинуси					
		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>p_{vx}</i>	<i>p_{vy}</i>	<i>p_{vz}</i>
1	<i>B</i>	2	0	0	0	−1	0	2,92E+07	1,56E+08	−1,15E+07
2	<i>O</i>	0	0	0	0	−1	0	0	2,18E+08	−1,62E+07
3	<i>A</i>	0	0	4	0	−1	0	−1,85E+07	2,50E+08	8,23E+07

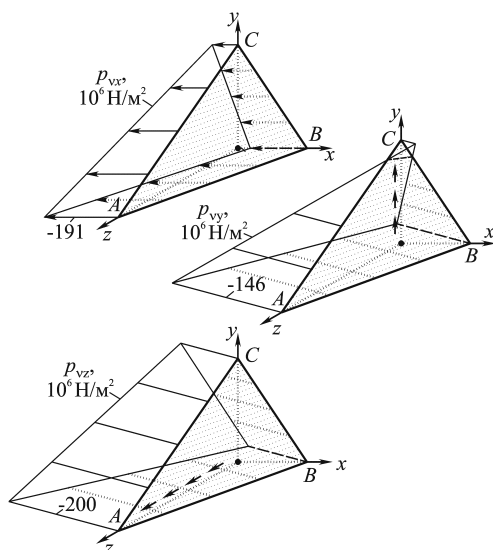
Таблиця 2.4 – Складові поверхневих сил для грані *АВС*

№ з/п	Точка	Атрибути точки						Складові поверхневих сил, Н/м ²		
		Координати, м			Напрявні косинуси					
		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>	<i>p_{vx}</i>	<i>p_{vy}</i>	<i>p_{vz}</i>
1	<i>A</i>	0	0	4	0,76822	0,51215	0,38411	-1,91E+08	-1,46E+08	-2,00E+08
2	<i>B</i>	2	0	0	0,76822	0,51215	0,38411	-1,46E+08	-9,78E+07	-1,56E+08
3	<i>C</i>	0	3	0	0,76822	0,51215	0,38411	-6,65E+07	1,92E+07	-1,52E+08

Епюри поверхневих сил по гранях показано на рис. 2.2. Позитивний напрям складових поверхневих сил – уздовж зовнішньої нормалі.



в)



г)

Рис. 2.2. Епюри поверхневих сил

2. Визначення складових головного вектора та головного моменту поверхневих сил. Складові головного вектора та головного моменту зовнішніх сил визначаються за формулами

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int_F p_{vx} dF; & M_x &= \int_F (p_{vz}y - p_{vy}z) dF; \\ R_y &= \int_F p_{vy} dF; & M_y &= \int_F (p_{vx}z - p_{vz}x) dF; \\ R_z &= \int_F p_{vz} dF; & M_z &= \int_F (p_{vy}x - p_{vx}y) dF; \\ P_x &= \int_V X dV; & T_x &= \int_V (Zy - Yz) dV; \\ P_y &= \int_V Y dV; & T_y &= \int_V (Xz - Zx) dV; \\ P_z &= \int_V Z dV; & T_z &= \int_V (Yx - Xy) dV, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

де $R_{x,y,z}$ – складові головного вектора поверхневих сил;
 $P_{x,y,z}$ – складові головного вектора об’ємних сил;

$M_{x,y,z}$ – складові головного моменту поверхневих сил;
 $T_{x,y,z}$ – складові головного моменту об'ємних сил.

Складові головного вектора та головного моменту всіх зовнішніх сил, які діють на тіло, повинні задовольняти залежностям

$$\left. \begin{aligned} R_x + P_x &= 0 \Rightarrow \int_F p_{vx} dF + \int_V X dV = 0; \\ R_y + P_y &= 0 \Rightarrow \int_F p_{vy} dF + \int_V Y dV = 0; \\ R_z + P_z &= 0 \Rightarrow \int_F p_{vz} dF + \int_V Z dV = 0; \\ M_x + T_x &= 0 \Rightarrow \int_F (p_{vz}y - p_{vy}z) dF + \int_V (Zy - Yz) dV = 0; \\ M_y + T_y &= 0 \Rightarrow \int_F (p_{vx}z - p_{vz}x) dF + \int_V (Xz - Zx) dV = 0; \\ M_z + T_z &= 0 \Rightarrow \int_F (p_{vy}x - p_{vx}y) dF + \int_V (Yx - Xy) dV = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

де F – область визначення поверхневого інтегралу;
 V – область визначення об'ємного інтегралу.

Необхідно зауважити, що складові головного моменту обчислюються відносно початку координат.

Зведемо інтеграли (2.2) до поверхневих, а потім до кратних. Інтеграли (2.2) – це поверхневі інтеграли першого роду. Для тривимірного простору поверхневі інтеграли можуть бути зведені до кратних одним із трьох способів:

$$\left. \begin{aligned} \int_F f(x,y,z) dF &= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy; \\ \int_F f(x,y,z) dF &= \iint_{D_{zx}} f(x,y(z,x),z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dz dx; \\ \int_F f(x,y,z) dF &= \iint_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

де $f(x, y, z)$ – підінтегральний вираз із (2.2);
 $z = z(x, y)$ – поверхня, що проєкується на область Oxy ;
 $y = y(z, x)$ – поверхня, що проєкується на область Ozx ;
 $x = x(y, z)$ – поверхня, що проєкується на область Oyz .

Площину ABC можна задати рівнянням у відрізках

$$\frac{x}{2 \cdot 10^{-2}} + \frac{y}{3 \cdot 10^{-2}} + \frac{z}{4 \cdot 10^{-2}} = 1. \quad (2.4)$$

Скористаймося першим виразом (2.3) для обчислення поверхневого інтегралу. Тоді рівняння поверхні (2.4) запишеться так:

$$z = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{y}{3 \cdot 10^{-2}} \right). \quad (2.5)$$

Похідні $\partial z / \partial x$ і $\partial z / \partial y$ визначаються виразами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3}. \quad (2.6)$$

Напрямні косинуси для площини ABC є постійними і становлять згідно з табл. 2.4:

$$l = 0,76822; \quad m = 0,51215; \quad n = 0,38411. \quad (2.7)$$

Підставляючи (2.6) у підкореневий вираз першої формули (2.3), отримуємо наступне:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3} \right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{61} = 2,6034. \quad (2.8)$$

Підставляючи послідовно числові значення G , μ і напрямних косинусів (2.7) в (1.24), а потім отриманий результат у (2.2), отримуємо підінтегральні вирази для визначення складових головного вектора та головного моменту. Далі підставляємо ці підінтегральні вирази в перший вираз (2.3), з урахуванням (2.5), (2.8). В результаті отримуємо інтеграли для визначення

складових головного вектора та головного моменту поверхневих сил на площині ABC :

$$\left. \begin{aligned} R_x^{ABC} &= \iint_{D_{xy}} (2,2652 \cdot 10^7 x + 4,1561 \cdot 10^7 y - 1,7478 \cdot 10^8) \cdot 2,6034 \, dx dy; \\ R_y^{ABC} &= \iint_{D_{xy}} (2,3932 \cdot 10^7 x + 5,4955 \cdot 10^7 y - 1,0588 \cdot 10^8) \cdot 2,6034 \, dx dy; \\ R_z^{ABC} &= \iint_{D_{xy}} (2,2110 \cdot 10^7 x + 1,6070 \cdot 10^7 y - 2,0134 \cdot 10^8) \cdot 2,6034 \, dx dy; \\ M_x^{ABC} &= \iint_{D_{xy}} (8,9344 \cdot 10^7 y^2 - 3,4472 \cdot 10^8 y + 1,6393 \cdot 10^8 xy + \\ &\quad + 4,2352 \cdot 10^6 - 2,1272 \cdot 10^8 x + 4,7864 \cdot 10^7 x^2) \cdot 2,6034 \, dx dy; \\ M_y^{ABC} &= \iint_{D_{xy}} (5,5181 \cdot 10^8 x - 6,7413 \cdot 10^7 x^2 - 1,2939 \cdot 10^8 xy + \\ &\quad + 2,3470 \cdot 10^8 y - 5,5415 \cdot 10^7 y^2 - 6,9912 \cdot 10^6) \cdot 2,6034 \, dx dy; \\ M_z^{ABC} &= \iint_{D_{xy}} (-1,0588 \cdot 10^8 x + 2,3932 \cdot 10^7 x^2 + 3,2304 \cdot 10^7 xy - \\ &\quad - 4,1561 \cdot 10^7 y^2 + 1,7478 \cdot 10^8 y) \cdot 2,6034 \, dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Границі інтегрування інтегралів (2.9) можуть бути записані у вигляді

$$\iint_{D_{xy}} \varphi(x, y) \, dx dy = \int_0^{2 \cdot 10^{-2}} dx \int_0^{3 \cdot 10^{-2} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 10^{-2}}\right)} \varphi(x, y) \, dy, \quad (2.10)$$

де $\varphi(x, y)$ – будь-який підінтегральний вираз із (2.9).

Обчислюючи інтеграли (2.9) з границями (2.10), отримуємо наступні числові значення складових головного вектора та головного моменту поверхневих сил, що діють на грань ABC :

$$\left. \begin{aligned} R_x^{ABC} &= -1,3607 \cdot 10^5 \text{ Н}; & M_x^{ABC} &= -4,7273 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_y^{ABC} &= -8,2142 \cdot 10^4 \text{ Н}; & M_y^{ABC} &= -7,6910 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_z^{ABC} &= -1,5701 \cdot 10^5 \text{ Н}; & M_z^{ABC} &= 8,1142 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Розглянемо обчислення складових головного вектора поверхневих сил на інші грані досліджуваного тіла, такі як AOC , BOC , BOA .

Грань AOC визначається рівнянням $x = 0$. Для обчислення поверхневого інтегралу зручно скористатися третім виразом (2.3). Очевидно, що підкореневий вираз третього виразу (2.3) дорівнює одиниці. Напрямні косинуси для грані AOC становлять: $l = -1$; $m = 0$; $n = 0$.

З урахуванням сказаного вище, вирази для визначення складових головного вектора і головного моменту поверхневих сил для грані AOC визначаються залежностями

$$\left. \begin{aligned} R_x^{AOC} &= \iint_{D_{yz}} (2,1807 \cdot 10^8 - 4,5767 \cdot 10^7 y + 1,8845 \cdot 10^7 z) dy dz; \\ R_y^{AOC} &= \iint_{D_{yz}} (-4,6152 \cdot 10^6 z) dy dz; \\ R_z^{AOC} &= \iint_{D_{yz}} (-2,3076 \cdot 10^6 y - 2,0768 \cdot 10^7 z + 1,8461 \cdot 10^7) dy dz; \\ M_x^{AOC} &= \iint_{D_{yz}} (-2,3076 \cdot 10^6 y^2 - 2,0768 \cdot 10^7 yz + \\ &\quad + 1,8461 \cdot 10^7 y + 4,6152 \cdot 10^6 z^2) dy dz; \\ M_y^{AOC} &= \iint_{D_{yz}} (-2,6922 \cdot 10^6 \cdot (-81 + 17y - 7z)z) dy dz; \\ M_z^{AOC} &= \iint_{D_{yz}} (2,6922 \cdot 10^6 \cdot (-81 + 17y - 7z)y) dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Границі інтегрування для грані AOC можуть бути визначені наступним чином:

$$\iint_{D_{yz}} \varphi(y, z) dy dz = \int_0^{3 \cdot 10^{-2}} dy \int_0^{4 \cdot 10^{-2} \left(1 - \frac{y}{3 \cdot 10^{-2}}\right)} \varphi(y, z) dz, \quad (2.13)$$

де $\varphi(y, z)$ – будь-який підінтегральний вираз із (2.12).

Обчислюючи інтеграли (2.12) з границями (2.13), отримуємо наступні числові значення складових головного вектора та головного моменту поверхневих сил, що діють на грань AOC :

$$\left. \begin{aligned} R_x^{AOC} &= 1,3072 \cdot 10^5 \text{ Н}; & M_x^{AOC} &= 1,1005 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_y^{AOC} &= -3,6922 \cdot 10^1 \text{ Н}; & M_y^{AOC} &= 1,7448 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_z^{AOC} &= 1,0896 \cdot 10^4 \text{ Н}; & M_z^{AOC} &= -1,3054 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Числові значення складових головного вектора та головного моменту поверхневих сил, що діють на решту граней, а саме на грані BOC та BOA , становлять

$$\left. \begin{aligned} R_x^{BOC} &= 5,5421 \cdot 10^3 \text{ Н}; & M_x^{BOC} &= 1,5237 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_y^{BOC} &= -4,8413 \cdot 10^3 \text{ Н}; & M_y^{BOC} &= -1,0156 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_z^{BOC} &= 1,5239 \cdot 10^5 \text{ Н}; & M_z^{BOC} &= -8,7620 \cdot 10^1 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} R_x^{BOA} &= 1,4358 \cdot 10^1 \text{ Н}; & M_x^{BOA} &= -1,1631 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_y^{BOA} &= 8,7187 \cdot 10^4 \text{ Н}; & M_y^{BOA} &= 4,2255 \cdot 10^1 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\ R_z^{BOA} &= -6,3238 \cdot 10^3 \text{ Н}; & M_z^{BOA} &= 5,8090 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Значення об'ємних сил X , Y , Z , які визначені залежностями (1.23), з урахуваннями числових значень G , μ , становлять

$$\begin{aligned} X &= -5,1921 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3; & Y &= -4,19214 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3; \\ Z &= 1,3461 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Підставляючи (2.17) у (2.1), отримаємо складові головного вектора та головного моменту об'ємних сил, які визначаються наступними інтегралами:

$$\left. \begin{aligned}
 P_x &= \int_V X dV = \int_V -5,1921 \cdot 10^7 dV; \\
 P_y &= \int_V Y dV = \int_V -4,19214 \cdot 10^7 dV; \\
 P_z &= \int_V Z dV = \int_V 1,3461 \cdot 10^7 dV; \\
 T_x &= \int_V (Zy - Yz) dV = \int_V (1,3461 \cdot 10^7 y - (-4,19214 \cdot 10^7)z) dV; \\
 T_y &= \int_V (Xz - Zx) dV = \int_V (-5,1921 \cdot 10^7 z - 1,3461 \cdot 10^7 x) dV; \\
 T_z &= \int_V (Yx - Xy) dV = \int_V (-4,19214 \cdot 10^7 x - (-5,1921 \cdot 10^7) y) dV.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Границі інтегрування для інтегралів (2.18) можуть бути представлені у вигляді

$$\int_0^{2 \cdot 10^{-2}} dx \int_0^{3 \cdot 10^{-2} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 10^{-2}}\right)} dy \int_0^{4 \cdot 10^{-2} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{y}{3 \cdot 10^{-2}}\right)} \psi(x, y, z) dz, \quad (2.19)$$

де $\psi(x, y, z)$ – будь-який підінтегральний вираз із (2.18).

Наприклад, складова P_x визначиться залежністю

$$P_x = \int_0^{2 \cdot 10^{-2}} dx \int_0^{3 \cdot 10^{-2} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 10^{-2}}\right)} dy \int_0^{4 \cdot 10^{-2} \left(1 - \frac{x}{2 \cdot 10^{-2}} - \frac{y}{3 \cdot 10^{-2}}\right)} -5,1921 \cdot 10^7 dz.$$

Обчисливши інтеграли (2.18), отримаємо числові значення складових головного вектора та головного моменту об'ємних сил:

$$\left. \begin{aligned}
 P_x &= -2,0768 \cdot 10^2 \text{ Н}; & T_x &= 2,0807 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 P_y &= -1,6769 \cdot 10^2 \text{ Н}; & T_y &= -2,3461 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 P_z &= 5,3844 \cdot 10^1 \text{ Н}; & T_z &= 7,1920 \cdot 10^{-1} \text{ Н} \cdot \text{м}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Сумарні складові поверхневих сил визначаються залежностями

$$\left. \begin{aligned}
 R_x &= R_x^{ABC} + R_x^{AOC} + R_x^{BOC} + R_x^{BOA} = \\
 &= -1,3607 \cdot 10^5 + 1,3072 \cdot 10^5 + 5,5421 \cdot 10^3 + 1,4358 \cdot 10^1 = 2,0791 \cdot 10^2 \text{ Н}; \\
 R_y &= R_y^{ABC} + R_y^{AOC} + R_y^{BOC} + R_y^{BOA} = \\
 &= -8,2142 \cdot 10^4 - 3,6922 \cdot 10^1 - 4,8413 \cdot 10^3 + 8,7187 \cdot 10^4 = 1,6726 \cdot 10^2 \text{ Н}; \\
 R_z &= R_z^{ABC} + R_z^{AOC} + R_z^{BOC} + R_z^{BOA} = \\
 &= -1,5701 \cdot 10^5 + 1,0896 \cdot 10^4 + 1,5239 \cdot 10^5 - 6,3238 \cdot 10^3 = -5,3541 \cdot 10^1 \text{ Н}; \\
 M_x &= M_x^{ABC} + M_x^{AOC} + M_x^{BOC} + M_x^{BOA} = \\
 &= -4,7273 \cdot 10^2 + 1,1005 \cdot 10^2 + 1,5237 \cdot 10^3 - 1,1631 \cdot 10^3 = -2,0719 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 M_y &= M_y^{ABC} + M_y^{AOC} + M_y^{BOC} + M_y^{BOA} = \\
 &= -7,6910 \cdot 10^2 + 1,7448 \cdot 10^3 - 1,0156 \cdot 10^3 + 4,2255 \cdot 10^1 = 2,3471 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 M_z &= M_z^{ABC} + M_z^{AOC} + M_z^{BOC} + M_z^{BOA} = \\
 &= 8,1142 \cdot 10^2 - 1,3054 \cdot 10^3 - 8,7620 \cdot 10^1 + 5,8090 \cdot 10^2 = -7,2432 \cdot 10^{-1} \text{ Н} \cdot \text{м}.
 \end{aligned} \right\} (2.21)$$

Підставляючи (2.21) і (2.20) в (2.2), отримаємо

$$\left. \begin{aligned}
 R_x + P_x &= 0 \Rightarrow 2,0791 \cdot 10^2 - 2,0768 \cdot 10^2 \approx 0; \\
 R_y + P_y &= 0 \Rightarrow 1,6726 \cdot 10^2 - 1,6769 \cdot 10^2 \approx 0; \\
 R_z + P_z &= 0 \Rightarrow -5,3541 \cdot 10^1 + 5,3844 \cdot 10^1 \approx 0; \\
 M_x + T_x &= 0 \Rightarrow -2,0719 + 2,0807 \approx 0; \\
 M_y + T_y &= 0 \Rightarrow 2,3471 - 2,3461 \approx 0; \\
 M_z + T_z &= 0 \Rightarrow -7,2432 \cdot 10^{-1} + 7,1920 \cdot 10^{-1} \approx 0.
 \end{aligned} \right\} (2.22)$$

Задоволення рівнянь рівноваги (2.2) або (2.22) означає, що при заданій системі поверхневих і об'ємних зовнішніх сил тіло перебуває в стані рівноваги. Це додатково підтверджує, що вирази для напружень, поверхневих та об'ємних сил знайдені вірно.

3. Побудова епюр компонентів переміщень. Епюри компонентів переміщень u , v , w точок тіла, розташованих на заданому

прямолінійному відрізку OC (табл. 1.4, IV), показано на рис. 2.3. Епюри u , v , w були побудовані згідно із значеннями, представленими в табл. 2.5. Так як закони переміщень задані квадратичними законами, то для їх однозначного визначення достатньо три точки на обраній лінії OC . Допоміжна точка D лежить посередині відрізка OC .

Таблиця 2.5 – Значення переміщень u , v , w на лінії OC

№ з/п	Точка	Координати, м			Переміщення, м		
		x	y	z	u	v	w
1	O	0	0	0	$8 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,68 \cdot 10^{-3}$
2	D	0	1,5	0	$8 \cdot 10^{-5}$	$4,95 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-3}$
3	C	0	3	0	$8 \cdot 10^{-5}$	$1,44 \cdot 10^{-3}$	$2,31 \cdot 10^{-3}$

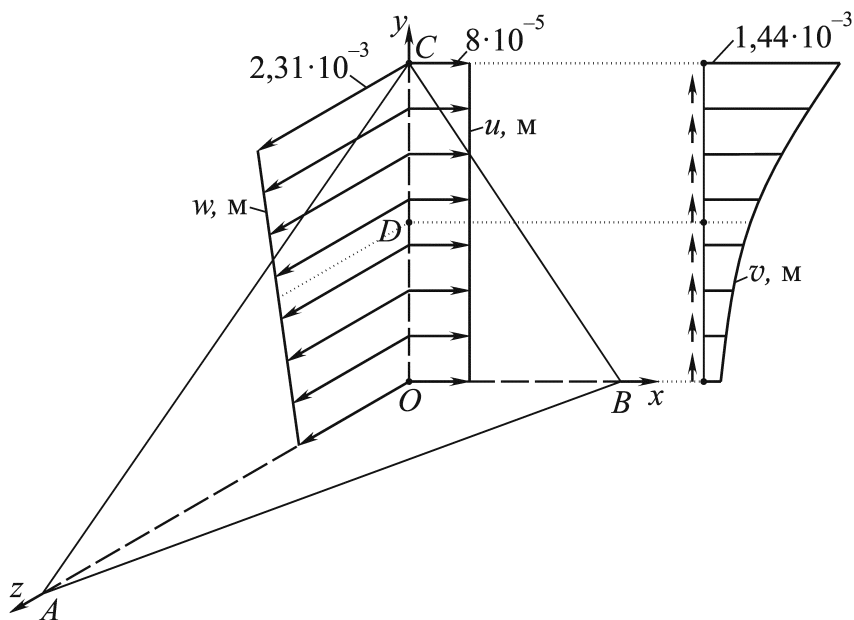


Рис. 2.3. Епюри переміщень на заданій лінії OC

4. Побудова епюр компонентів напружень. Згідно з табл. 1.4 (див. приклад 1.3) потрібно побудувати епюри напружень σ_y, τ_{xz} вздовж лінії, що паралельна осі x та проходить через точку $x_n = 0,5, y_n = 1,0$. Для визначення напрямку заданих складових напружень скористаймося рис. 2.4, де представлено додатні напрями напружень або правила знаків.

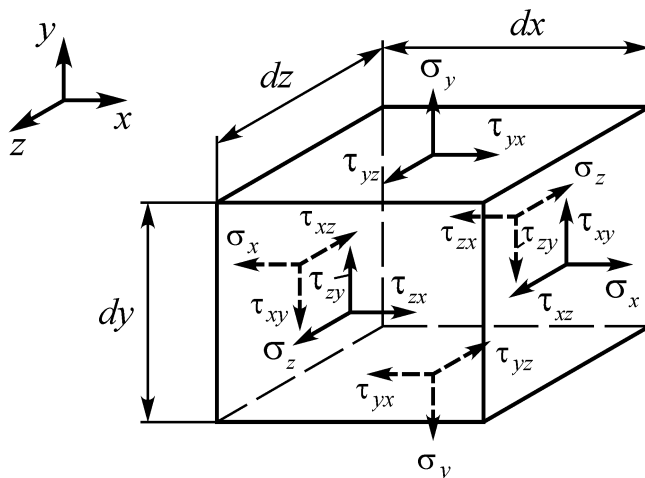


Рис. 2.4. Додатні напрями напружень або правила знаків

На рис. 2.5 представлено складові напружень σ_y, τ_{xz} , побудовані вздовж лінії, яка проходить через точку $x_n = 0,5, y_n = 1,0$ та паралельна осі x . Епюри σ_y, τ_{xz} побудовані згідно з даними табл. 2.6.

Таблиця 2.6 – Значення напружень σ_y, τ_{xz} на заданій лінії

№ з/п	Точка	Координати, м			Напруження, МПа	
		x	y	z	σ_y	τ_{xz}
1	E	0,5	1	0	-121	-18,8
2	F	0,5	1	0,833	-128	-1,54
3	G	0,5	1	1,667	-135	15,8

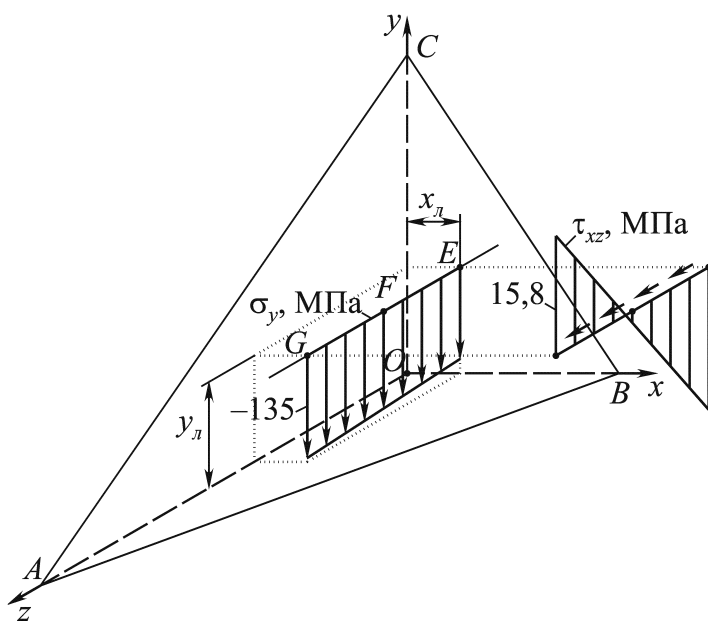


Рис. 2.5. Епюри напружень σ_y , τ_{xz} вздовж заданої лінії

3 ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОЧКАХ ПРУЖНОГО ТІЛА

Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) у точці тіла передбачає різноманітні маніпуляції з напруженнями та деформаціями за їх відомими тензорами. До цих маніпуляцій можуть бути віднесені: знаходження головних напружень та деформацій і відповідних положень головних площадок; визначення найбільших дотичних напружень і кутових деформацій, приведених напружень та деформацій, специфічних напружень і деформацій (наприклад октаедричних); дослідження девіаторів та шарових тензорів; перетворення напружень і деформацій при повороті координатних осей; обчислення повних, повних нормальних і повних дотичних напружень тощо. У ході дослідження НДС в точці тіла можуть виникнути інші нетривіальні, тут не перелічені задачі.

3.1 Визначення головних напружень

Головні напруження – це напруження, що діють на головних площадках. Головні площадки – це такі елементарні площадки (елементарного паралелепіпеду), які виділені в околі точки, де відсутні дотичні напруження. У тривимірному просторі є три взаємно ортогональні головні площадки. У двовимірному просторі таких площадок дві. Для будь-якого довільного напруженого

стану початкові координатні осі завжди можна повернути таким чином, що дотичні напруження на нових взаємно перпендикулярних площадках, визначених відносно нових повернутих осей, зникнуть. Саме ці площадки, де дотичні напруження відсутні, є головними площадками, а нормальні напруження на цих головних площадках називаються головними напруженнями.

Головні напруження можуть бути знайдені з наступного нелінійного кубічного рівняння:

$$\sigma_v^3 - I_1 \sigma_v^2 + I_2 \sigma_v - I_3 = 0, \quad (3.1)$$

де

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2(T_\sigma) &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Величини I_1, I_2, I_3 називаються інваріантами напружень. Інваріанти напружень не залежать від вибору координатної системи. Тобто, в певній точці для різних координатних систем є відповідно різні тензори напружень (і деформацій). Проте інваріанти напружень (і деформацій), обчислені за цими тензорами, будуть завжди однакові.

Кубічне рівняння (3.1) має три дійсні корені $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, які є головними напруженнями та повинні бути впорядковані згідно з умовою $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Ці корені (головні напруження) можна знайти чисельно або аналітично. Аналітично головні напруження можливо обчислити відповідно до наступних залежностей [2]:

$$\sigma_1 = s_1 + \sigma_0; \quad \sigma_2 = s_2 + \sigma_0; \quad \sigma_3 = s_3 + \sigma_0; \quad (3.3)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}; \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos \psi_\sigma; \\ s_2 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\psi_\sigma + \frac{4}{3} \pi \right); \\ s_3 &= \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\psi_\sigma + \frac{2}{3} \pi \right); \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\cos 3\psi_\sigma = \frac{27I_3(D_\sigma)}{2\sigma_i^3}; \quad (3.6)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}; \quad (3.7)$$

$$I_3(D_\sigma) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \hline \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \hline \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{1}{27} [2(\sigma_x^3 + \sigma_y^3 + \sigma_z^3) -$$

$$\begin{aligned} & -3(\sigma_x^2 \sigma_y + \sigma_y^2 \sigma_z + \sigma_z^2 \sigma_x + \sigma_x \sigma_y^2 + \sigma_y \sigma_z^2 + \sigma_z \sigma_x^2) + 12\sigma_x \sigma_y \sigma_z + \\ & + 9\sigma_x (\tau_{xy}^2 - 2\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + 9\sigma_y (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - 2\tau_{zx}^2) + 9\sigma_z (-2\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) + \\ & + 54\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

У наведених формулах позначено наступне: ψ_σ – кут виду напруженого стану; σ_i – інтенсивність напружень; $I_3(D_\sigma)$ – третій інваріант девіатора напружень D_σ ; σ_0 – середні напруження.

Найбільші дотичні напруження τ_1, τ_2, τ_3 , які діють на площадках, що бісектрують площадки головних напружень, обчислюються за формулами:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (3.9)$$

На рис. 3.1 показані площадки, де діють найбільші дотичні напруження.

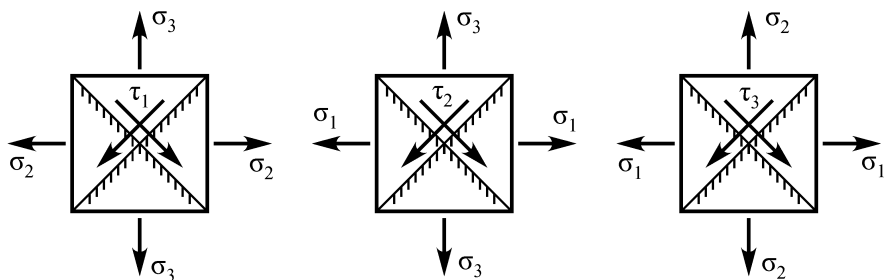


Рис. 3.1. Площинки, де діють найбільші дотичні напруження

3.2 Визначення головних деформацій

Головні деформації – це деформації, що відповідають головним напруженням. Є декілька способів знаходження головних деформацій. Якщо відомі головні напруження σ_1 , σ_2 , σ_3 , то головні деформації можуть бути обчислені залежностями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]; \\ \gamma_{12} &= \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

де ε_1 , ε_2 , ε_3 – головні лінійні деформації;
 γ_{12} , γ_{23} , γ_{31} – головні кутові деформації.

Але якщо відомий тільки тензор деформацій, то головні деформації можна обчислити шляхом вирішення наступного нелінійного кубічного рівняння:

$$\varepsilon_v^3 - I_1 \varepsilon_v^2 + I_2 \varepsilon_v - I_3 = 0, \quad (3.11)$$

де

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2 = \\ &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2 = \\ &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

де $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$, $\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}/2$, $\varepsilon_{zx} = \gamma_{zx}/2$.

Величини I_1 , I_2 , I_3 в останніх рівняннях називаються інваріантами деформацій і мають ті ж властивості, що й інваріанти напружень.

Кубічне рівняння (3.11) має три дійсні корені ε_1 , ε_2 , ε_3 , які є головними деформаціями та повинні бути впорядковані згідно з умовою $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$. Ці корені (головні деформації) можна знайти чисельно або аналітично. Аналітично головні деформації можливо обчислити згідно з наведеними нижче залежностями [2]:

$$\varepsilon_1 = e_1 + \varepsilon_0; \quad \varepsilon_2 = e_2 + \varepsilon_0; \quad \varepsilon_3 = e_3 + \varepsilon_0; \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}; \quad (3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_i \cos \psi_\varepsilon; \\ e_2 &= \varepsilon_i \cos \left(\psi_\varepsilon + \frac{4}{3} \pi \right); \\ e_3 &= \varepsilon_i \cos \left(\psi_\varepsilon + \frac{2}{3} \pi \right); \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$$\cos 3\psi_\varepsilon = \frac{4I_3(D_\varepsilon)}{\varepsilon_i^3}; \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}; \quad (3.17)$$

$$I_3(D_\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{c|c|c} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \hline \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \hline \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{array} \right\} = \frac{1}{27} [2(\varepsilon_x^3 + \varepsilon_y^3 + \varepsilon_z^3) -$$

$$-3(\varepsilon_x^2 \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y^2 + \varepsilon_y \varepsilon_z^2 + \varepsilon_z \varepsilon_x^2) + 12\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z +$$

$$+ \frac{9}{4} \varepsilon_x (\gamma_{xy}^2 - 2\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) + \frac{9}{4} \varepsilon_y (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 - 2\gamma_{zx}^2) + \frac{9}{4} \varepsilon_z (-2\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) +$$

$$+ \frac{27}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}]. \quad (3.18)$$

Найбільші кутові деформації $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, що відповідають найбільшим дотичним напруженням τ_1, τ_2, τ_3 , можуть бути знайдені з використанням наступних залежностей:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\tau_1}{G} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2G} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \\ \gamma_2 &= \gamma_{\max} = \frac{\tau_2}{G} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2G} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \\ \gamma_3 &= \frac{\tau_3}{G} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2G} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

3.3 Встановлення положення головних площадок

Перший спосіб. Положення головних площадок може бути знайдене декількома способами. В рамках найпростішого способу [3] напрямні косинуси можуть бути знайдені з наступної системи:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_v)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_v)m + \tau_{zy}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_v)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

При цьому напрямні косинуси повинні задовольняти залежностям

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (3.21)$$

Покажемо знаходження напрямних косинусів l_1, m_1, n_1 для головного напруження σ_1 . Так як визначник (3.20) дорівнює нулю, то залишається лише два незалежних рівняння із (3.20), з яких два напрямних косинуси можуть виражені через третій. Наприклад:

$$m_1 = a_1 l_1, \quad n_1 = b_1 l_1, \quad (3.22)$$

де a_1, b_1 – невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити.

Підставляючи (3.22) в (3.21), отримаємо вирази для обчислення напрямних косинусів:

$$l_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}, \quad m_1 = \pm \frac{a_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}, \quad n_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}. \quad (3.23)$$

Підставляючи (3.22) в (3.20), отримуємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx}a_1 + \tau_{zx}b_1 &= \sigma_1 - \sigma_x, \\ (\sigma_y - \sigma_1)a_1 + \tau_{zy}b_1 &= -\tau_{xy}, \\ \tau_{yz}a_1 + (\sigma_z - \sigma_1)b_1 &= -\tau_{xz}. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Вирішуючи будь-які два рівняння з останньої системи (3.24), знаходимо невідомі a_1, b_1 . Аналогічно можуть бути знайдені напрямні косинуси для σ_2 та σ_3 , підставляючи послідовно $\sigma_v = \sigma_2, \sigma_v = \sigma_3$ в (3.20) або $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_1 = \sigma_3$ в (3.24). Іноді система з двох рівнянь для знаходження a_1 та b_1 є виродженою. В цьому випадку

замість (3.22) слід долучити до вирішення іншу комбінацію напрямних косинусів, наприклад

$$l_1 = a_1 m_1, \quad n_1 = b_1 m_1, \quad (3.25)$$

$$l_1 = a_1 n_1, \quad m_1 = b_1 n_1, \quad (3.26)$$

Наприклад, якщо підставити (3.25) в (3.20), то система для знаходження невідомих a_1, b_1 буде мати вигляд

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) a_1 + \tau_{zx} b_1 &= -\tau_{yx}, \\ \tau_{xy} a_1 + \tau_{zy} b_1 &= \sigma_1 - \sigma_y, \\ \tau_{xz} a_1 + (\sigma_z - \sigma_1) b_1 &= -\tau_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Але необхідно звернути увагу на те, що напрямні косинуси в цьому випадку будуть обчислюватися за формулами

$$l_1 = \pm \frac{a_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}, \quad m_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}, \quad n_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}. \quad (3.28)$$

Для комбінації напрямних косинусів (3.26) отримуємо відповідно

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1) a_1 + \tau_{yx} b_1 &= -\tau_{zx}, \\ \tau_{xy} a_1 + (\sigma_y - \sigma_1) b_1 &= -\tau_{zy}, \\ \tau_{xz} a_1 + \tau_{yz} b_1 &= \sigma_1 - \sigma_z. \end{aligned} \right\}, \quad (3.29)$$

$$l_1 = \pm \frac{a_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}, \quad m_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}, \quad n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2 + b_1^2}}. \quad (3.30)$$

Зведемо в таблицю (табл. 3.1) необхідні залежності для визначення напрямних косинусів головних площадок на прикладі для площадки σ_1 .

Таблиця 3.1 – Залежності для визначення головних площадок

№ з/п	Вирішальна система (обрати будь-які два рівняння з трьох)	Напрявні косинуси
I	II	III
1	$\left. \begin{aligned} \tau_{yx}a_1 + \tau_{zx}b_1 &= \sigma_1 - \sigma_x, \\ (\sigma_y - \sigma_1)a_1 + \tau_{zy}b_1 &= -\tau_{xy}, \\ \tau_{yz}a_1 + (\sigma_z - \sigma_1)b_1 &= -\tau_{xz}. \end{aligned} \right\}$	$l_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}},$ $m_1 = \pm \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}},$ $n_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}}$
2	$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)a_1 + \tau_{yx}b_1 &= -\tau_{yx}, \\ \tau_{xy}a_1 + \tau_{zy}b_1 &= \sigma_1 - \sigma_y, \\ \tau_{xz}a_1 + (\sigma_z - \sigma_1)b_1 &= -\tau_{yz}. \end{aligned} \right\}$	$l_1 = \pm \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}},$ $m_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}},$ $n_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}}$
3	$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)a_1 + \tau_{yx}b_1 &= -\tau_{zx}, \\ \tau_{xy}a_1 + (\sigma_y - \sigma_1)b_1 &= -\tau_{zy}, \\ \tau_{xz}a_1 + \tau_{yz}b_1 &= \sigma_1 - \sigma_z. \end{aligned} \right\}$	$l_1 = \pm \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}},$ $m_1 = \pm \frac{b_1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}},$ $n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1+a_1^2+b_1^2}}$

Таким чином, враховуючи те, що система для знаходження a_1, b_1 може бути виродженою, більш загальний алгоритм обчислення напрямних косинусів площадки σ_1 може бути представлений наступним чином. У табл. 3.1 для певного номеру рядка (стовпець I) з системи рівнянь (стовпець II) обираємо будь-яких два рівняння, з яких знаходимо a_1 та b_1 , а потім обчислюємо відповідні напрямні косинуси (стовпець III). Якщо обрана система є виродженою, потрібно спробувати іншу систему з іншого рядка

табл. 3.1. Решту напрямних косинусів для головних напружень $\sigma_{2,3}$ можливо знайти аналогічно, замінивши індекс «1» відповідно на індекси «2», «3» у формулах табл. 3.1.

Другий спосіб. Другий спосіб ґрунтується на використанні рівнянь перетворення компонентів напружень при повороті координатних осей, які мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1; \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2 + 2\tau_{zx} n_2 l_2; \\ \sigma_{z'} &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + 2\tau_{zx} n_3 l_3; \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \\ &\quad + \tau_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx} (l_1 n_2 + n_1 l_2); \\ \tau_{y'z'} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \\ &\quad + \tau_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \tau_{zx} (l_2 n_3 + n_2 l_3); \\ \tau_{z'x'} &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) + \\ &\quad + \tau_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + \tau_{zx} (l_3 n_1 + n_3 l_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

або на використанні залежностей перетворення компонентів деформацій при повороті координатних осей, які запишуться

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + 2\varepsilon_{xy} l_1 m_1 + 2\varepsilon_{yz} m_1 n_1 + 2\varepsilon_{zx} n_1 l_1, \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x l_2^2 + \varepsilon_y m_2^2 + \varepsilon_z n_2^2 + 2\varepsilon_{xy} l_2 m_2 + 2\varepsilon_{yz} m_2 n_2 + 2\varepsilon_{zx} n_2 l_2, \\ \varepsilon_{z'} &= \varepsilon_x l_3^2 + \varepsilon_y m_3^2 + \varepsilon_z n_3^2 + 2\varepsilon_{xy} l_3 m_3 + 2\varepsilon_{yz} m_3 n_3 + 2\varepsilon_{zx} n_3 l_3, \\ \varepsilon_{x'y'} &= \varepsilon_x l_1 l_2 + \varepsilon_y m_1 m_2 + \varepsilon_z n_1 n_2 + \varepsilon_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \\ &\quad + \varepsilon_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \varepsilon_{zx} (l_1 n_2 + n_1 l_2), \\ \varepsilon_{y'z'} &= \varepsilon_x l_2 l_3 + \varepsilon_y m_2 m_3 + \varepsilon_z n_2 n_3 + \varepsilon_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \\ &\quad + \varepsilon_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \varepsilon_{zx} (l_2 n_3 + n_2 l_3), \\ \varepsilon_{z'x'} &= \varepsilon_x l_3 l_1 + \varepsilon_y m_3 m_1 + \varepsilon_z n_3 n_1 + \varepsilon_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) + \\ &\quad + \varepsilon_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + \varepsilon_{zx} (l_3 n_1 + n_3 l_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

де x, y, z – осі старої координатної системи;
 x', y', z' – осі нової координатної системи;
 $l_{1, 2, 3}, m_{1, 2, 3}, n_{1, 2, 3}$ – напрямні косинуси, зміст яких зрозуміло з табл. 3.2.

Наприклад, нова вісь x' має напрямні косинуси x' (l_1, m_1, n_1) відносно старих осей x, y, z .

Таблиця 3.2 – Напрямні косинуси

Старі осі	Нові осі		
	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Поклавши у формулах (3.31), (3.32) наступне: x' відповідає головному напрямку 1; $y' - 2$; $z' - 3$, а також враховуючи у (3.31) і (3.32), що $\tau_{x'y'} = 0, \tau_{y'z'} = 0, \tau_{z'x'} = 0, \gamma_{x'y'} = 0, \gamma_{y'z'} = 0, \gamma_{z'x'} = 0$, що еквівалентно $\tau_{12} = 0, \tau_{23} = 0, \tau_{31} = 0, \gamma_{12} = 0, \gamma_{23} = 0, \gamma_{31} = 0$, отримуємо з (3.31), (3.32) наступні нелінійні системи для визначення напрямних косинусів головних площадок:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1; \\ \sigma_2 &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2 + 2\tau_{zx} n_2 l_2; \\ \sigma_3 &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + 2\tau_{zx} n_3 l_3; \\ 0 &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \\ &\quad + \tau_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx} (l_1 n_2 + n_1 l_2); \\ 0 &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \\ &\quad + \tau_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \tau_{zx} (l_2 n_3 + n_2 l_3); \\ 0 &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) + \\ &\quad + \tau_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + \tau_{zx} (l_3 n_1 + n_3 l_1), \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + 2\varepsilon_{xy} l_1 m_1 + 2\varepsilon_{yz} m_1 n_1 + 2\varepsilon_{zx} n_1 l_1; \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_x l_2^2 + \varepsilon_y m_2^2 + \varepsilon_z n_2^2 + 2\varepsilon_{xy} l_2 m_2 + 2\varepsilon_{yz} m_2 n_2 + 2\varepsilon_{zx} n_2 l_2; \\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_x l_3^2 + \varepsilon_y m_3^2 + \varepsilon_z n_3^2 + 2\varepsilon_{xy} l_3 m_3 + 2\varepsilon_{yz} m_3 n_3 + 2\varepsilon_{zx} n_3 l_3; \\
0 &= \varepsilon_x l_1 l_2 + \varepsilon_y m_1 m_2 + \varepsilon_z n_1 n_2 + \varepsilon_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \\
&\quad + \varepsilon_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \varepsilon_{zx} (l_1 n_2 + n_1 l_2); \\
0 &= \varepsilon_x l_2 l_3 + \varepsilon_y m_2 m_3 + \varepsilon_z n_2 n_3 + \varepsilon_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \\
&\quad + \varepsilon_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \varepsilon_{zx} (l_2 n_3 + n_2 l_3); \\
0 &= \varepsilon_x l_3 l_1 + \varepsilon_y m_3 m_1 + \varepsilon_z n_3 n_1 + \varepsilon_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) + \\
&\quad + \varepsilon_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + \varepsilon_{zx} (l_3 n_1 + n_3 l_1).
\end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Систему рівнянь (3.33) і/або (3.34) необхідно доповнити трьома будь-якими рівняннями умов ортогональності напрямних косинусів із залежностей (3.35) (див. нижче).

Перевірка правильності. Знайдені напрямні косинуси головних площадок повинні задовольняти наступним умовам ортогональності:

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=3} l_i^2 &= 1, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{i=3} n_i^2 = 1, \quad l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3; \\
\sum_{i=1}^{i=3} l_i m_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} m_i n_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=3} n_i l_i = 0, \quad l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0, \\
&\text{де } ij = 12, 23, 31.
\end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Перевірку також можливо проводити за допомогою рівнянь табл. 3.1 (стовпець II) та рівнянь (3.33), (3.34).

3.4 Інші перетворення напружень

3.4.1 Повні, повні нормальні та повні дотичні напруження. Повні напруження p_v , повні нормальні напруження σ_v ,

та повні дотичні напруження τ_v , що діють на площадці $v(l, m, n)$, пов'язані залежностями

$$p_v^2 = p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2, \quad (3.36)$$

$$\sigma_v = p_{vx}l + p_{vy}m + p_{vz}n, \quad (3.37)$$

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2. \quad (3.38)$$

3.4.2 Октаедричні напруження та деформації. Октаедричні напруження та деформації – це такі напруження і деформації, які діють на октаедричних елементарних площадках, що рівнонахилені до головних площадок. Октаедричних площадок налічується вісім.

Напрямні косинуси нормальних векторів октаедричних площадок такі:

$$l = l_{oct} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m = m_{oct} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n = n_{oct} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3.39)$$

Нормальні октаедричні σ_{oct} та дотичні октаедричні τ_{oct} напруження визначаються за формулами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{oct} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_0, \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}, \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

де σ_0 – середні нормальні напруження в точці.

Інтенсивність напружень σ_i пов'язана з дотичними октаедричними напруженнями τ_{oct} співвідношенням

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct}. \quad (3.41)$$

Лінійні октаедричні ε_{oct} та кутові октаедричні γ_{oct} деформації визначаються залежностями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{oct} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \varepsilon_0, \\ \gamma_{oct} &= \frac{\tau_{oct}}{G} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}, \\ \gamma_{oct} &= \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

де ε_0 – середні лінійні деформації в точці.

Інтенсивність деформацій ε_i пов'язана з кутовими октаедричними деформаціями γ_{oct} співвідношенням

$$\varepsilon_i = \frac{\gamma_{oct}}{\sqrt{2}}. \quad (3.43)$$

3.4.3 Теорії міцності. Класичні чотири теорії міцності визначаються наступним чином.

1-а теорія міцності називається теорією найбільших нормальних напружень. Якщо є впорядковані головні напруження $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то еквівалентні напруження можуть бути визначені за допомогою простих залежностей:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1, \quad \text{if } \sigma_1 > 0, \\ \sigma'_{eq} &= \sigma_3, \quad \text{if } \sigma_3 < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Перший вираз (3.44) визначає еквівалентні напруження для простого розтягу, а другий – еквівалентні напруження для простого стиску.

2-а теорія міцності називається теорією найбільших лінійних деформацій. Існує два вирази для еквівалентних напружень:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) > 0, \\ \sigma'_{eq} &= \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Перший вираз (3.45) визначає еквівалентні напруження для простого розтягу, а другий – еквівалентні напруження

для простого стиску. Еквівалентні напруження визначені (3.45) повинні розглядатися разом при оцінці міцності.

3-я теорія міцності називається теорією найбільших дотичних напружень, або Кулона-Треска. Еквівалентні напруження для цієї теорії можуть бути визначені залежністю

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (3.46)$$

4-а теорія міцності називається теорією питомої потенціальної енергії деформації формозміни або теорією Мізеса (Мізеса-Губера) (*Richard Edler von Mises i Maksymilian Tytus Huber*). Еквівалентні напруження за цією теорією визначаються залежностями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} = \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Розглянемо на прикладі дослідження НДС у точці.

3.5 Приклад. Для заданого в прикладі 1.1 тіла з відомими компонентами напружено-деформованого стану визначити:

1) головні напруження та деформації і положення головних площадок у точці M ;

2) найбільші дотичні напруження і кутові деформації в точці M , умовно показати площадки (по відношенню до головних), в яких діють ці напруження;

3) величини зведених/еквівалентних напружень у точці M за чотирма класичними гіпотезами міцності, а також відповідні запаси міцності по відношенню до границі плинності матеріалу σ_r ;

4) повне, повне нормальне, повне дотичне напруження в точці N на площадці з нормаллю ν ; напрямок повного напруження і графічно показати його положення;

5) компоненти переміщень u , v , w і повне переміщення s точки N , а також його напрямок і графічно зобразити цей вектор s .

Матеріал тіла сталь Ст3 з наступними механічними характеристиками: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu = 0,3$; $\sigma_T = 235$ МПа.

Таблиця 3.3 – Вихідні дані

Пружне тіло, рис.	$M(x, y, z)$	$N(x, y, z)$	Напрямні косинуси площадки v		
			l	m	n
Рис. з табл. 1.4, II	(0,5; 0,25; 1)	(0,5; 1; 1,5)	0,5409	0,7212	0,4327

Розв’язання. Підставляючи координати точки $M(0,5; 0; 1)$ у вирази для деформацій (1.18) та напружень (1.22), отримуємо наступні числові значення компонентів напружень і деформацій у точці M :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2,0989 \cdot 10^8 \text{ Па}; & \varepsilon_x &= -5,75 \cdot 10^{-5}; \\ \sigma_y &= -1,9028 \cdot 10^8 \text{ Па}; & \varepsilon_y &= 7,0 \cdot 10^{-5}; \\ \sigma_z &= -4,7104 \cdot 10^8 \text{ Па}; & \varepsilon_z &= -1,755 \cdot 10^{-3}; \\ \tau_{xy} &= -2,6922 \cdot 10^6 \text{ Па}; & \gamma_{xy} &= -3,5 \cdot 10^{-5}; \\ \tau_{yz} &= -9,6150 \cdot 10^6 \text{ Па}; & \gamma_{yz} &= -1,25 \cdot 10^{-4}; \\ \tau_{zx} &= 1,9230 \cdot 10^5 \text{ Па}; & \gamma_{zx} &= 2,5 \cdot 10^{-6}. \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

1. Визначення головних напружень і деформацій, а також положення головних площадок у точці M .

Знаходження головних напружень. Обчислюючи інваріанти напружень за (3.2), отримуємо

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\sigma) &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -8,7121 \cdot 10^8 \text{ Па}; \\ I_2(T_\sigma) &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 2,2834 \cdot 10^{17} \text{ Па}^2; \\ I_3(T_\sigma) &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = -1,8790 \cdot 10^{25} \text{ Па}^3. \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Вирішуючи кубічне рівняння (3.1): $\sigma_v^3 - I_1\sigma_v^2 + I_2\sigma_v - I_3 = 0$, де $I_{1,2,3}$ визначені за (3.49), отримуємо наступні значення головних напружень:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -1,8959 \cdot 10^8 \text{ Па}; \quad \sigma_2 = -2,1025 \cdot 10^8 \text{ Па}; \\ \sigma_3 &= -4,7137 \cdot 10^8 \text{ Па}.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Виконаємо перевірку правильності знаходження головних напружень $\sigma_{1,2,3}$, обчисливши інваріанти за (3.2) з використанням $\sigma_{1,2,3}$:

$$\left. \begin{aligned}I'_1(T_\sigma) &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -8,7121 \cdot 10^8 \text{ Па}; \\ I'_2(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 2,2834 \cdot 10^{17} \text{ Па}^2; \\ I'_3(T_\sigma) &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -1,8790 \cdot 10^{25} \text{ Па}^3.\end{aligned}\right\}\tag{3.51}$$

Інваріанти (3.49) та (3.51) однакові, що свідчить про правильність обчислення головних напружень $\sigma_{1,2,3}$.

Розрахунок головних деформацій. За відомими значеннями головних напружень $\sigma_{1,2,3}$ головні деформації $\varepsilon_{1,2,3}$ запишуться так:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}}[-1,8959 \cdot 10^8 - \\ &\quad - 0,3 \cdot (-2,1025 \cdot 10^8 - 4,7137 \cdot 10^8)] = 7,4464 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}}[-2,1025 \cdot 10^8 - \\ &\quad - 0,3 \cdot (-4,7137 \cdot 10^8 - 1,8959 \cdot 10^8)] = -5,9827 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}}[-4,7137 \cdot 10^8 - \\ &\quad - 0,3 \cdot (-1,8959 \cdot 10^8 - 2,1025 \cdot 10^8)] = -1,7571 \cdot 10^{-3}; \\ \gamma_{12} &= \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0.\end{aligned}\right\}\tag{3.52}$$

Знайдемо головні деформації $\varepsilon_{1,2,3}$ в інший спосіб з використанням рівняння (3.11). Обчислюючи інваріанти тензору деформацій за (3.12), отримуємо

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -1,7425 \cdot 10^{-3}; \\ I_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = -3,0177 \cdot 10^{-8}; \\ I_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - \frac{1}{4}(\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 + \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 - \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}) = 7,8286 \cdot 10^{-12}, \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

і розв'язуючи кубічне рівняння (3.11): $\varepsilon_v^3 - I_1 \varepsilon_v^2 + I_2 \varepsilon_v - I_3 = 0$, де інваріанти $I_{1,2,3}$ визначені за (3.53), отримуємо наступні значення головних деформацій:

$$\varepsilon_1 = 7,4467 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_2 = -5,9829 \cdot 10^{-5}; \quad \varepsilon_3 = -1,7571 \cdot 10^{-3}. \quad (3.54)$$

Виконаємо перевірку правильності знаходження головних деформацій $\varepsilon_{1,2,3}$, обчисливши інваріанти за (3.12), з використанням $\varepsilon_{1,2,3}$:

$$\left. \begin{aligned} I'_1(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -1,7425 \cdot 10^{-3}; \\ I'_2(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = -3,0177 \cdot 10^{-8}; \\ I'_3(T_\varepsilon) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 7,8286 \cdot 10^{-12}. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Інваріанти (3.53) та (3.55) однакові, що свідчить про правильність обчислення головних деформацій $\varepsilon_{1,2,3}$. Головні деформації, обчислені за (3.52) та (3.54), не відрізняються між собою (не більше ніж на $4 \cdot 10^{-3} \%$). При практичному обчисленні головних деформацій доцільно скористатися одним із способів.

Встановлення положення головних площадок. Напрявні косинуси головних площадок будемо визначати з використанням двох рівнянь першої системи з табл. 3.1, стовбець II. Провівши відповідні обчислення, отримуємо значення напрямних косинусів (з верхніми знаками):

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= 0,1317; & m_1 &= -0,9907; & n_1 &= 0,0339; \\ l_2 &= 0,9913; & m_2 &= 0,1316; & n_2 &= -0,0041; \\ l_3 &= 0,0004; & m_3 &= -0,0342; & n_3 &= -0,9994. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Виконаємо перевірки умов взаємної ортогональності знайдених напрямних косинусів за (3.35):

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 0,1317^2 + 0,9913^2 + 0,0004^2 \approx 1; \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= (-0,9907)^2 + 0,1316^2 + (-0,0342)^2 \approx 1; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 0,0339^2 + (-0,0041)^2 + (-0,9994)^2 \approx 1; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 0,1317^2 + (-0,9907)^2 + 0,0339^2 \approx 1; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 0,9913^2 + 0,1316^2 + (-0,0041)^2 \approx 1; \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 0,0004^2 + (-0,0342)^2 + (-0,9994)^2 \approx 1; \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= 0,1317 \cdot (-0,9907) + 0,9913 \cdot 0,1316 + \\ &\quad + 0,0004 \cdot (-0,0342) \approx 0; \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= (-0,9907) \cdot 0,0339 + 0,1316 \cdot (-0,0041) + \\ &\quad + (-0,0342) \cdot (-0,9994) \approx 0; \\ n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 &= 0,0339 \cdot 0,1317 + (-0,0041) \cdot 0,9913 + \\ &\quad + (-0,9994) \cdot 0,0004 \approx 0; \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0,1317 \cdot 0,9913 + (-0,9907) \cdot 0,1316 + \\ &\quad + 0,0339 \cdot (-0,0041) \approx 0; \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0,9913 \cdot 0,0004 + 0,1316 \cdot (-0,0342) + \\ &\quad + (-0,0041) \cdot (-0,9994) \approx 0; \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 &= 0,0004 \cdot 0,1317 + (-0,0342) \cdot (-0,9907) + \\ &\quad + (-0,9994) \cdot 0,0339 \approx 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Всі умови ортогональності (3.57) виконуються, що свідчить про правильність обчислення напрямних косинусів (3.56) головних площадок.

2. Найбільші дотичні напруження і кутові деформації в точці М. Найбільші дотичні напруження $\tau_{1,2,3}$ обчислюються за формулами (3.9):

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{-2,1025 \cdot 10^8 - (-4,7137 \cdot 10^8)}{2} = 1,3056 \cdot 10^8; \\ \tau_2 &= \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{-1,8959 \cdot 10^8 - (-4,7137 \cdot 10^8)}{2} = 1,4089 \cdot 10^8; \\ \tau_3 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{-1,8959 \cdot 10^8 - (-2,1025 \cdot 10^8)}{2} = 1,0330 \cdot 10^7. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Найбільші кутові деформації $\gamma_{1,2,3}$ знайдуться за формулами (3.13):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\tau_1}{G} = \frac{1,3056 \cdot 10^8}{7,692 \cdot 10^{10}} = 1,6973 \cdot 10^{-3}; \\ \gamma_2 &= \gamma_{\max} = \frac{\tau_2}{G} = \frac{1,4089 \cdot 10^8}{7,692 \cdot 10^{10}} = 1,8316 \cdot 10^{-3}; \\ \gamma_3 &= \frac{\tau_3}{G} = \frac{1,0330 \cdot 10^7}{7,692 \cdot 10^{10}} = 1,3430 \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

На рис. 3.2 показані площадки, де діють найбільші дотичні напруження.

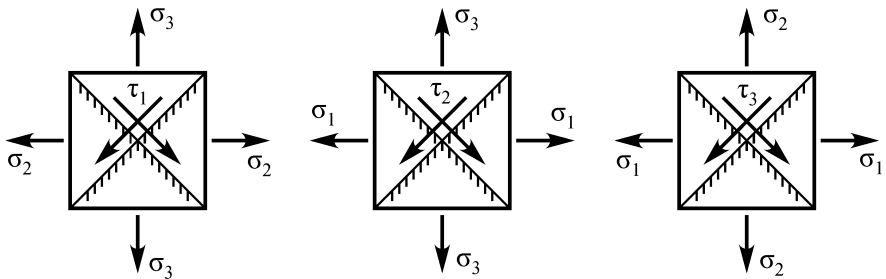


Рис. 3.2. Площинки, де діють найбільші дотичні напруження

3. Еквівалентні напруження в точці М. Еквівалентні напруження за **1-ю** теорією міцності визначаються залежностями (3.44):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1, & \text{якщо } \sigma_1 > 0; \\ \sigma'_{eq} &= \sigma_3, & \text{якщо } \sigma_3 < 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma'_{eq} = \sigma_3 = -4,7137 \cdot 10^8 \text{ Па.} \quad (3.60)$$

Еквівалентні напруження за **2-ою** теорією міцності визначаються формулами (3.45):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = -1,8959 \cdot 10^8 - \\ &\quad - 0,3(-2,1025 \cdot 10^8 + (-4,7137 \cdot 10^8)) = 1,4893 \cdot 10^7 \text{ Па.} > 0; \\ \sigma'_{eq} &= \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = -4,7137 \cdot 10^8 - \\ &\quad - 0,3(-1,8959 \cdot 10^8 + (-2,1025 \cdot 10^8)) = -3,5141 \cdot 10^8 \text{ Па.} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Еквівалентні напруження за **3-ою** теорією міцності обчислюються за (3.46):

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 = -1,8959 \cdot 10^8 - (-4,7137 \cdot 10^8) = 2,8177 \cdot 10^8 \text{ Па.} \quad (3.62)$$

Еквівалентні напруження за **4-ою** теорією міцності визначаються залежностями (3.47):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-1,8959 \cdot 10^8 - (-2,1025 \cdot 10^8))^2 + (-2,1025 \cdot 10^8 - (-4,7137 \cdot 10^8))^2 + \\ &\quad + (-4,7137 \cdot 10^8 - (-1,8959 \cdot 10^8))^2} = 2,7203 \cdot 10^8 \text{ Па.} \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Коефіцієнт запасу міцності по відношенню до границі плинності обчислюється за загальною формулою

$$n = \left| \frac{\sigma_s}{\sigma_{eq}} \right|, \quad (3.64)$$

де σ_s – границя плинності;

σ_{eq} – еквівалентні напруження, обчислені за однією з теорій міцності (3.60)–(3.63).

Міцність забезпечена, якщо $n > 1$. У противному випадку умова міцності не виконується. Обчислення запасу міцності представлено в табл. 3.4.

Таблиця 3.4 – Обчислення запасу міцності

№ теорії	Формула	Значення зведеного напруження	Коефіцієнт запасу міцності	Виконання умови міцності
1	(3.60)	$-4,7137 \cdot 10^8$	0,5	не виконано
2	(3.61), 1-а	$1,4893 \cdot 10^7$	15,78	забезпечена
	(3.61), 2-а	$-3,5141 \cdot 10^8$	0,67	не виконано
3	(3.62)	$2,8177 \cdot 10^8$	0,83	не виконано
4	(3.63)	$2,7203 \cdot 10^8$	0,86	не виконано

4. Повне, повне нормальне, повне дотичне напруження в точці N . Повне нормальне напруження обчислюється за формулою (3.36): $p_v^2 = p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2$, де p_{vx} , p_{vy} , p_{vz} визначаються за (1.24), підставляючи координати точки $N(x = 0,5; y = 1; z = 1,5)$ та напрямні косинуси площадки $v(l = 0,5409; m = 0,7212; n = 0,4327)$ з табл. 3.3.

Складові p_{vx} , p_{vy} , p_{vz} для точки N і нормалі v становлять

$$\begin{aligned} p_{vx} &= -9,5014 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2; \quad p_{vy} = -1,0594 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2; \\ p_{vz} &= -2,0236 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Підставляючи (3.65) у (3.36)–(3.38), отримуємо значення повних p_v , повних нормальних σ_v і повних дотичних τ_v напружень:

$$\left. \begin{aligned} p_v &= \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2} = \sqrt{(-9,5014 \cdot 10^7)^2 + (-1,0594 \cdot 10^8)^2 +} \\ &\quad \left. + (-2,0236 \cdot 10^8)^2} = 2,4739 \cdot 10^8 \text{ Па}, \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

$$\sigma_v = p_{vx}l + p_{vy}m + p_{vz}n = -9,5014 \cdot 10^7 \cdot 0,5409 + (-1,0594 \cdot 10^8) \cdot 0,7212 + (-2,0236 \cdot 10^8) \cdot 0,4327 = -2,1536 \cdot 10^8 \text{ Па}, \quad (3.67)$$

$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{(2,4739 \cdot 10^8)^2 - (-2,1536 \cdot 10^8)^2} = 1,2174 \cdot 10^8 \text{ Па}. \quad (3.68)$$

Напрявні косинуси (l_p, m_p, n_p) повного напруження p_v :

$$\left. \begin{aligned} l_p = \frac{p_{vx}}{p_v} &= \frac{-9,5014 \cdot 10^7}{2,4739 \cdot 10^8} = -0,3841; & m_p = \frac{p_{vy}}{p_v} &= \frac{-1,0594 \cdot 10^8}{2,4739 \cdot 10^8} = -0,4282; \\ n_p = \frac{p_{vz}}{p_v} &= \frac{-2,0236 \cdot 10^8}{2,4739 \cdot 10^8} = -0,8180. \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Напрявні косинуси (l_τ, m_τ, n_τ) повного дотичного напруження τ_v визначаються з системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} l \cdot l_\tau + m \cdot m_\tau + n \cdot n_\tau &= 0; \\ l_p \cdot l_\tau + m_p \cdot m_\tau + n_p \cdot n_\tau &= \cos \beta; \\ l_\tau (m_p n - n_p m) - m_\tau (l_p n - n_p l) + n_\tau (l_p m - m_p l) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.70)$$

де β – кут, який визначається залежністю

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha; \quad \alpha = \arccos(l \cdot l_p + m \cdot m_p + n \cdot n_p). \quad (3.71)$$

Система рівнянь (3.70) пояснюється наступним чином (рис. 3.3). Перше рівняння (3.70) обґрунтоване тим, що повне нормальне напруження σ_v і повне дотичне напруження τ_v є взаємно перпендикулярними векторами, а тому скалярний добуток між ними дорівнює нулю. Друге рівняння (3.70) – це скалярний добуток між повним напруженням p_v і τ_v . Очевидно, що кут β визначається за (3.71), де кут α між p_v і σ_v визначається за допомогою скалярного добутку. Третє рівняння – це рівність нулю мішаного добутку векторів τ_v, p_v, σ_v , тому що ці всі три вектори компланарні.

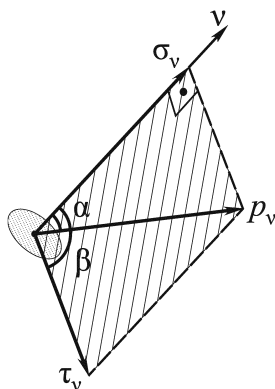


Рис. 3.3. Повне, повне нормальне та повне дотичне напруження

Підставляючи значення напрямних косинусів $v(l = 0,5409$; $m = 0,7212$; $n = 0,4327$) з табл. 3.3 та $(l_p = -0,3841$; $m_p = -0,4282$; $n_p = -0,8180)$ в (3.70) і розв'язуючи отриману систему, знайдемо значення напрямних косинусів (l_τ, m_τ, n_τ) повного дотичного напруження τ_v , які становлять

$$l_\tau = 0,1765; \quad m_\tau = 0,4057; \quad n_\tau = -0,8969. \quad (3.72)$$

Зображувати вектори зручно за їх проєкціями на координатні осі. В табл. 3.5 представлено проєкції напружень p_v, σ_v, τ_v на координатні осі, обчислені з використанням напрямних косинусів.

Таблиця 3.5 – Проєкції напружень p_v, σ_v, τ_v на координатні осі

№	Найменування напруження	Величина напруження	Напрямні косинуси			Проєкції на осі		
			l	m	n	x	y	z
1	p_v	$2,4739 \cdot 10^8$	-0,3841	-0,4282	-0,8180	$-9,5014 \cdot 10^7$	$-1,0594 \cdot 10^8$	$-2,0236 \cdot 10^8$
2	σ_v	$-2,1536 \cdot 10^8$	0,5409	0,7212	0,4327	$-1,1649 \cdot 10^8$	$-1,5532 \cdot 10^8$	$-9,3186 \cdot 10^7$
3	τ_v	$1,2174 \cdot 10^8$	0,1765	0,4057	-0,8969	$2,1487 \cdot 10^7$	$4,9390 \cdot 10^7$	$-1,0919 \cdot 10^8$

Графічне зображення векторів τ_v, p_v, σ_v представлено на рис. 3.4.

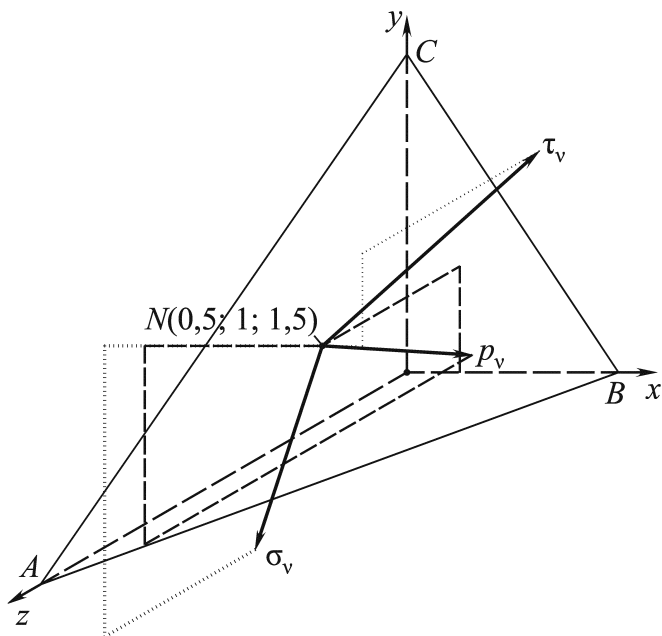


Рис. 3.4. Графічне зображення векторів τ_v , p_v , σ_v у точці N

5. Компоненти переміщень u , v , w і повне переміщення s точки N . Підставляючи координати точки $N(x = 0,5; y = 1; z = 1,5)$ у вирази для переміщень (1.17), отримаємо наступні значення u , v , w :

$$u = 1,4250 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad v = -7,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad w = -8,7750 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \quad (3.73)$$

Повне переміщення в точці N визначиться залежністю

$$s = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \sqrt{(1,4250 \cdot 10^{-4})^2 + (-7,0 \cdot 10^{-5})^2 + (-8,7750 \cdot 10^{-4})^2} = 8,9175 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \quad (3.74)$$

Напрямні косинуси повного переміщення s визначаються виразами

$$\left. \begin{aligned} l_s = \frac{u}{s} = \frac{1,4250 \cdot 10^{-4}}{8,9175 \cdot 10^{-4}} = 0,1598; \quad m_s = \frac{v}{s} = \frac{-7,0 \cdot 10^{-5}}{8,9175 \cdot 10^{-4}} = -0,0785; \\ n_s = \frac{w}{s} = \frac{-8,7750 \cdot 10^{-4}}{8,9175 \cdot 10^{-4}} = -0,9840. \end{aligned} \right\} (3.75)$$

На рис. 3.5 графічно показано вектор повного переміщення s , яке побудовано за проєкціями u , v , w .

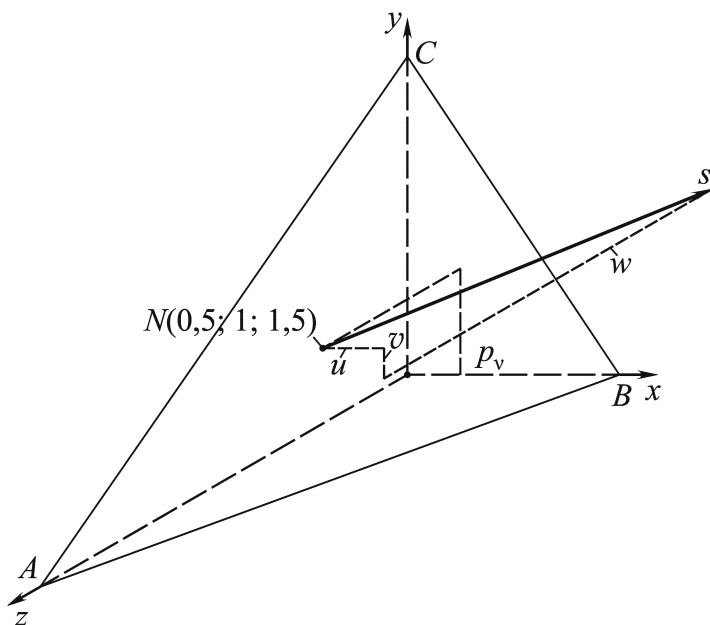


Рис. 3.5. Графічне зображення повного вектора переміщень s

4 РОЗРАХУНОК МІЦНОСТІ Й ЖОРСТКОСТІ ТОНКОСТІННОГО ПРИЗМАТИЧНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ЧИСТОМУ КРУЧЕННІ

Прикладом кручення (зокрема чистого) тонкостінного профілю може слугувати корпус судна, який рухається косим курсом. Величина дотичних напружень у тонкостінних елементах корпусу судна при цьому може бути зіставна з величиною нормальних напружень, які виникають від загального згину корпусу судна. Тому ці дотичні напруження потрібно вміти розраховувати. Слід розрізняти кручення відкритого та закритого тонкостінних контурів. Будемо розглядати тільки тонкостінні елементи або полоси постійної товщини. Тонкостінною половою з точки зору чистого кручення вважається така полоса, довжина якої s перевищує товщину t більш ніж у 15 разів (тобто $s/t > 15$).

4.1 Основні залежності для розрахунку чистого кручення тонкостінного призматичного стержня замкнутого профілю

Жорсткість при крученні тонкостінного стержня C , Н·м², визначиться формулою

$$C = 2G \sum_{i=1}^n c_i F_{s_i}, \quad (4.1)$$

де c_i – функція напружень на внутрішньому контурі i -го каналу (рис. 4.1), м^2 ;

F_{si} – площа обмежена внутрішнім i -м каналом s_i ;

n – кількість внутрішніх каналів.

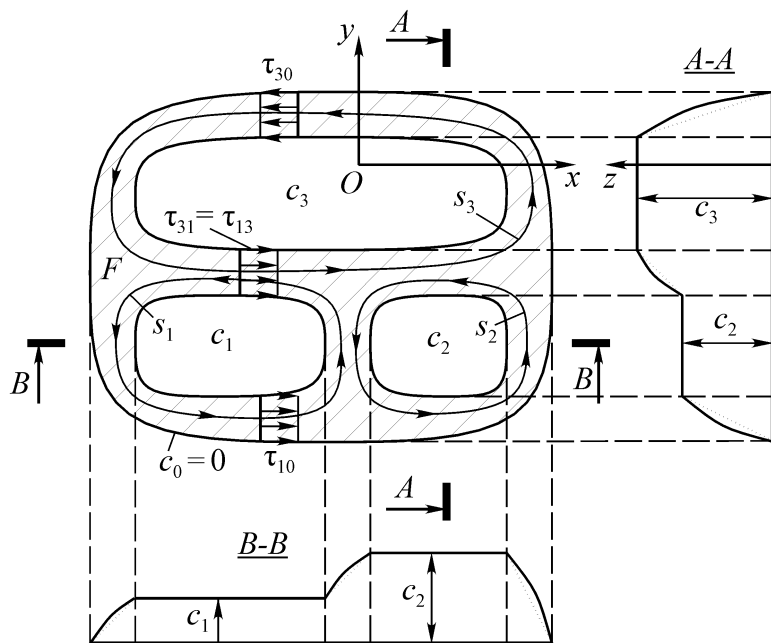


Рис. 4.1. Тонкостінний багатозв'язний профіль

Погонний кут закручування α , рад/м, обчислюється за формулою

$$\alpha = \frac{M_z}{C}. \quad (4.2)$$

Повний кут закручування θ , рад, визначається залежністю

$$\theta = \alpha \cdot L, \quad (4.3)$$

де L – довжина стержня, м.

Дотичні напруження в стінках тонкостінного профілю пишуться так:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{c_j - c_i}{t(s_i)}, \quad \tau_{zs} = \alpha G \frac{c_i - c_j}{t(s_i)}, \quad (4.4)$$

де $t(s_i)$ – товщина стінки в точці каналу s_i , де визначаються напруження;

c_i, c_j – значення функції напружень на внутрішніх контурах i -го та j -го каналів, які розділені товщиною $t(s_i)$;

$c_0 = 0$ – значення функції напружень для зовнішнього контуру.

Функції напружень c_i визначаються з рівнянь циркуляції дотичних напружень на замкнутих контурах у наступній формі:

$$c_i \oint_{s_i} \frac{ds}{t(s_i)} - \sum_j c_j \int_{s_{ij}} \frac{ds}{t(s_i)} = 2F_{s_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

де i – номер i -го внутрішнього каналу;

j – номер замкнутого каналу, що примикає до i -го каналу;

s_{ij} – відрізок контуру s_i в межах внутрішньої стінки, що розділяє i -й та j -й канали.

4.2 Залежності при крученні відкритого тонкостінного профілю

Жорсткість тонкостінної прямокутної полоси можна обчислювати за формулою

$$C = \frac{1}{3} G t^3 s. \quad (4.6)$$

Найбільші дотичні напруження τ на такій полосі визначаються залежністю

$$\tau = \alpha G t. \quad (4.7)$$

Залежності (4.6) та (4.7) можна використовувати і для криволінійних полос постійної товщини за умови $s/t > 15$.

Функція напружень $\psi(s, x)$ криволінійної полоси постійної товщини з достатньою точністю може бути обчислена за виразом

$$\psi(x, s) = \frac{t^2}{4} \left(1 - 4 \frac{x^2}{t^2} \right), \quad (4.8)$$

де s – криволінійна (вісь) координата вздовж середньої лінії, що проходить через середину товщини (рис. 4.2);
 x – вісь, перпендикулярна до s .

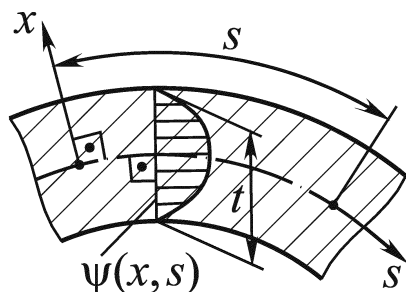


Рис. 4.2. Функція напружень тонкостінної полоси

Жорсткість стержня C , $\text{Н} \cdot \text{м}^2$, складеного відкритого профілю (тобто немає ні одного замкнутого контура), який містить тонкостінні прямолінійні і криволінійні полоси постійної товщини, обчислюється за формулою

$$C = \frac{1}{3} G \sum_{i=1}^m t_i^3 s_i, \quad (4.9)$$

де t_i – товщина кожної полоси;
 s_i – довжина кожної полоси;
 m – кількість полос.

Найбільші дотичні напруження τ_i на i -й полосі визначаються залежністю (4.7). Погонний кут закручування α та повний кут закручування θ визначаються залежностями відповідно (4.2) та (4.3).

Якщо профіль комбінований (замкнутий з відкритим), то жорсткість стержня C визначається як сума жорсткостей

замкнутої і відкритої частин. Далі напруження визначаються для замкнутої і відкритої частин відповідно за своїми залежностями. На практиці розрахунок деформацій та переміщень практично не виконується. Якщо останнє необхідно виконати, то див. [3].

Нижче на прикладі продемонстровано послідовність розрахунку тонкостінного стержня.

4.3 Приклад. Тонкостінний, призматичний, сталевий ($G = 8 \cdot 10^4$ МПа) стержень довжиною L зазнає чистого кручення від моментів $M_{кр}$ (рис. 4.3). Виконати розрахунок міцності при чистому крученні в наступній послідовності:

1) визначити дотичні напруження і повний кут закручування стержня у випадках: а) заданого багатозв'язного поперечного перерізу; б) двозв'язного поперечного перерізу, отриманого довільним чином з багатозв'язного; в) однозв'язного поперечного перерізу, отриманого довільним чином із двозв'язного;

2) побудувати епюри дотичних напружень та епюри функції напружень по товщині всіх пластинчастих елементів;

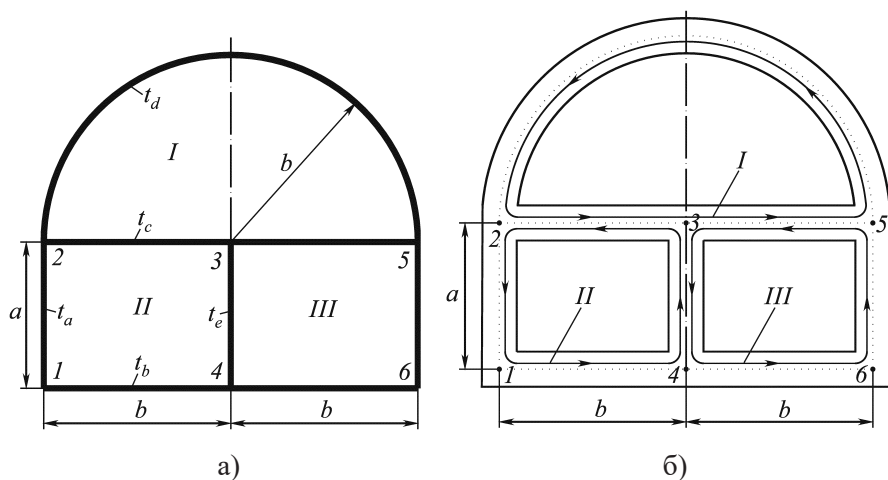


Рис. 4.3. Багатозв'язний тонкостінний профіль:
а – загальна схема; б – напрямки обходу замкнутих каналів

3) порівняти значення жорсткостей і максимальних дотичних напружень (для одних і тих же точок і перерізів) стержня із двозв'язним та однозв'язним перерізами по відношенню до багатозв'язного.

Таблиця 4.1 – Вихідні дані

Профіль, рис.	Крутний момент $M_{кр}$, кН·м	Довжина, L , м	Товщини, мм				
			t_a	t_b	t_c	t_d	t_e
рис. 4.3	120	83	14	16	10	8	12

Розміри: $a = 6,0$ м; $b = 8,0$ м.

Розв'язання. На рис. 4.3 представлені розрахункові схеми, за якими проводяться подальші обчислення з використанням даних табл. 4.1. При складанні розрахункової схеми необхідно пронумерувати вузли (вузол – це точка, що являє собою місце з'єднання двох або більше тонкостінних елементів, у т. ч. і під кутом 180°). Вузли на рис. 4.3 пронумеровані арабськими цифрами від 1 до 6. Замкнуті контури/канали пронумеровані латинськими цифрами I, II, III. Будемо вважати, що внутрішні контури практично співпадають з каналами, що їх обмежують. А тому площа, обмежена замкнутим каналом, практично дорівнює площі, яка обмежена внутрішнім контуром. Напрямок додатного обходу кожного замкнутого каналу приймаємо таким, як це показано на рис. 4.3,б. Всі канали повинні мати один і той же напрям обходу. В нашому випадку – це проти годинникової стрілки. В цьому прикладі наведено розрахунок і трив'язного перерізу для кращого засвоєння навиків складання рівнянь циркуляції. При виконанні розрахунково-графічних завдань необхідно розглядати тільки багатозв'язний, двозв'язний та однозв'язний перерізи.

1а. Розрахунок багатозв'язного перерізу. Використовуючи залежність (4.5), складемо систему рівнянь для визначення значень функції напружень $c_{I,II,III}$ на внутрішніх контурах:

$$\left. \begin{aligned} c_I \left(\frac{s_{23}}{t_{23}} + \frac{s_{35}}{t_{35}} + \frac{s_{52cir}}{t_{52cir}} \right) - c_{II} \frac{s_{23}}{t_{23}} - c_{III} \frac{s_{35}}{t_{35}} &= 2F = 2 \frac{\pi b^2}{2}; \\ c_{II} \left(\frac{s_{14}}{t_{14}} + \frac{s_{43}}{t_{43}} + \frac{s_{32}}{t_{32}} + \frac{s_{21}}{t_{21}} \right) - c_I \frac{s_{23}}{t_{23}} - c_{III} \frac{s_{34}}{t_{34}} &= 2F_{II} = 2ab; \\ c_{III} \left(\frac{s_{46}}{t_{46}} + \frac{s_{65}}{t_{65}} + \frac{s_{53}}{t_{53}} + \frac{s_{34}}{t_{34}} \right) - c_I \frac{s_{35}}{t_{35}} - c_{II} \frac{s_{34}}{t_{34}} &= 2F_{III} = 2ab, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

де, наприклад, $s_{23} = s_{32}$, $t_{23} = t_{32}$ – відповідно довжина та товщина тонкостінного елемента між точками 2 і 3, аналогічно решта; s_{52cir} , t_{52cir} – відповідно довжина та товщина тонкостінного елемента у вигляді окружності від точки 5 до точки 2.

Підставляючи числові значення в (4.10), отримуємо систему

$$\left. \begin{aligned} c_I \left(\frac{8}{0,01} + \frac{8}{0,01} + \frac{\pi b = 3,14 \cdot 8 = 25,13}{0,008} \right) - c_{II} \frac{8}{0,01} - c_{III} \frac{8}{0,01} &= 2 \frac{3,14 \cdot 8^2}{2} = 201,06; \\ c_{II} \left(\frac{8}{0,016} + \frac{6}{0,012} + \frac{8}{0,01} + \frac{6}{0,014} \right) - c_I \frac{8}{0,01} - c_{III} \frac{6}{0,012} &= 2 \cdot 6 \cdot 8 = 96; \\ c_{III} \left(\frac{8}{0,016} + \frac{6}{0,014} + \frac{8}{0,01} + \frac{6}{0,012} \right) - c_I \frac{8}{0,01} - c_{II} \frac{6}{0,012} &= 2 \cdot 6 \cdot 8 = 96, \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

з якої знаходимо значення $c_{I,II,III}$, що становлять

$$c_I = 0,0725 \text{ м}^2; \quad c_{II} = 0,0891 \text{ м}^2; \quad c_{III} = 0,0891 \text{ м}^2. \quad (4.12)$$

Жорсткість стержня C згідно з (4.1) становить

$$C = 2G \cdot (c_I F_I + c_{II} F_{II} + c_{III} F_{III}) = 2 \cdot 7,692 \cdot 10^{10} \cdot (0,0725 \cdot 201,06 + 0,0891 \cdot 96 + 0,0891 \cdot 96) = 2,4362 \cdot 10^{12} \text{ Н} \cdot \text{м}^2. \quad (4.13)$$

Погонний кут закручування α згідно з (4.2) становить

$$\alpha = \frac{M_{кр}}{C} = \frac{120000}{2,4362 \cdot 10^{12}} = 4,9256 \cdot 10^{-8} \text{ рад/м}. \quad (4.14)$$

Повний кут закручування θ згідно з (4.3) становить

$$\theta = \alpha L = 4,9256 \cdot 10^{-8} \cdot 83 = 4,0883 \cdot 10^{-6} \text{ рад.} \quad (4.15)$$

Далі визначимо дотичні напруження τ_{ij} , які діють у тонкостінних елементах.

Напруження в (тонкостінному) елементі 2I згідно з (4.4) обчислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \tau_{21} &= \alpha G \frac{c_i - c_j}{t(s_i)} = \alpha G \frac{c_{II} - c_0}{t_{21}} = \alpha G \frac{c_{II}}{t_a} = 4,9256 \cdot 10^{-8} \cdot \\ &\times 7,692 \cdot 10^{10} \cdot \frac{0,0891}{14 \cdot 10^{-3}} = 2,4107 \cdot 10^4 \text{ Па,} \end{aligned} \quad (4.16)$$

де $c_0 = 0$ – значення функції напружень на зовнішньому контурі.

Напруження τ_{21} обчислюється відносно II-го контура/каналу (ми «сидимо» всередині порожнини II-го контура/каналу), покладаючи $c_i = c_{II}$, $c_j = c_0$ (індекс «0» має зовнішній простір). Тобто номер каналу, відносно якого ми обчислюємо напруження, співпадає з індексом i величини c_i формули дотичного напруження (4.4).

Розглянемо визначення напряму дотичних напружень у тонкостінному елементі на прикладі суміжного елемента 32 (або 23), який розділяє дві сусідні порожнини відносно різних номерів каналів, на прикладі елемента 32 (або 23).

Напруження в (тонкостінному) елементі 32 згідно з (4.4) відносно каналу II обчислюється наступним чином:

$$\begin{aligned} \tau_{32} &= \alpha G \frac{c_{II} - c_I}{t_{32}} = 4,9256 \cdot 10^{-8} \times \\ &\times 7,692 \cdot 10^{10} \cdot \frac{0,0891 - 0,0725}{10 \cdot 10^{-3}} = 6,2943 \cdot 10^3 \text{ Па.} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Напруження в (тонкостінному) елементі 23 згідно з (4.4) відносно каналу I обчислюється наступним чином:

$$\tau_{23} = \alpha G \frac{c_I - c_{II}}{t_{23}} = 4,9256 \cdot 10^{-8} \times$$

$$\times 7,692 \cdot 10^{10} \cdot \frac{0,0725 - 0,0891}{10 \cdot 10^{-3}} = -6,2943 \cdot 10^3 \text{ Па.} \quad (4.18)$$

Як бачимо, одне і теж дотичне напруження, визначене на одному і тому ж суміжному тонкостінному елементі відносно різних каналів, має різні знаки. *Правило напрямку* дотичного напруження на тонкостінному елементі може бути сформульовано наступним чином. Якщо значення дотичного напруження, обчислене за формулою (4.4), відносно певного каналу додатне, то його напрям співпадає з напрямом обходу каналу, якщо напруження від'ємне – то напрям напруження протилежний до напрямку обходу каналу. На рис. 4.4 представлено побудову напружень τ_{32} і τ_{23} відповідно до наведеного правила знаків.

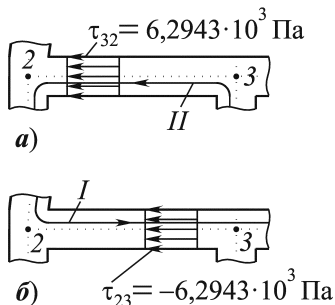


Рис. 4.4. Побудова напружень τ_{32} і τ_{23} :

а – напруження τ_{32} відносно каналу II;

б – напруження τ_{23} відносно каналу I

На практиці напруження на суміжних тонкостінних елементах обчислюється відносно одного обраного каналу.

Нижче в табл. 4.2 представлено обчислення напружень τ_{zs} , які діють в тонкостінних елементах багатозв'язного перерізу (рис. 4.3) згідно з формулою (4.4).

Таблиця 4.2 – Обчислення напружень багатозв’язного перерізу

№ з/п	Елемент	Товщина $t(s_i)$, м	c_I , м ²		c_{II} , м ²		$\tau_{zs} = \alpha G \frac{c_i - c_j}{t(s_i)}$, Па
			позначення	значення	позначення	значення	
1	14	0,016	c_{II}	0,0891	c_0	0	$2,1093 \cdot 10^4$
2	43	0,012	c_{II}	0,0891	c_{III}	0,0891	0
3	32	0,01	c_{II}	0,0891	c_I	0,0725	$6,2943 \cdot 10^3$
4	21	0,014	c_{II}	0,0891	c_0	0	$2,4107 \cdot 10^4$
5	46	0,016	c_{III}	0,0891	c_0	0	$2,1093 \cdot 10^4$
6	65	0,014	c_{III}	0,0891	c_0	0	$2,4107 \cdot 10^4$
7	53	0,010	c_{III}	0,0891	c_I	0,0725	$6,2943 \cdot 10^3$
8	34	0,012	c_{III}	0,0891	c_{II}	0,0891	0
9	23	0,010	c_I	0,0725	c_{II}	0,0891	$-6,2943 \cdot 10^3$
10	35	0,010	c_I	0,0725	c_{III}	0,0891	$-6,2943 \cdot 10^3$
11	52cir	0,008	c_I	0,0725	c_0	0,0000	$3,4319 \cdot 10^4$

На рис. 4.5 представлено епюри дотичних напружень згідно з розрахованими даними в табл. 4.2 та функції напружень за формулами (4.12).

Розрахунок тризв’язного перерізу. Шляхом утворення позовжнього розрізу (вздовж позовжньої осі) тонкостінного елемента 35 введемо до розгляду тризв’язний переріз для подальшого розрахунку (рис. 4.6). Тризв’язний переріз можна було отримати й іншим шляхом. Тонкостінний елемент 35 відноситься до відкритої частини новоствореного комбінованого профілю.

Використовуючи залежність (4.5), складемо систему рівнянь для визначення значень функції напружень $c_{I,II}$ на внутрішніх контурах:

$$\left. \begin{aligned} c_I \left(\frac{s_{21}}{t_{21}} + \frac{s_{14}}{t_{14}} + \frac{s_{43}}{t_{43}} + \frac{s_{32}}{t_{32}} \right) - c_{II} \left(\frac{s_{23}}{t_{23}} + \frac{s_{34}}{t_{34}} \right) &= 2F_I = 2ab; \\ c_{II} \left(\frac{s_{23}}{t_{23}} + \frac{s_{34}}{t_{34}} + \frac{s_{46}}{t_{46}} + \frac{s_{65}}{t_{65}} + \frac{s_{52cir}}{t_{52cir}} \right) - c_I \left(\frac{s_{43}}{t_{43}} + \frac{s_{32}}{t_{32}} \right) &= 2F_{II} = 2 \left(\frac{\pi b^2}{2} + ab \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

де $F_{I,II}$ – площі, обмежені I-м та II-м каналами/контурами, які визначаються виразами

$$F_I = ab = 6 \cdot 8 = 48 \text{ м}^2;$$

$$F_{II} = \frac{\pi b^2}{2} + ab = \frac{3,14 \cdot 8^2}{2} + 6 \cdot 8 = 148,53 \text{ м}^2. \quad (4.20)$$

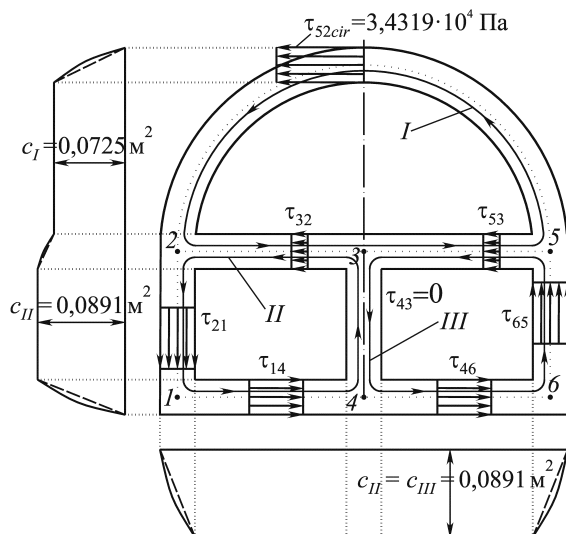


Рис. 4.5. Епюри дотичних напружень та функції напружень для багатозв'язного контуру

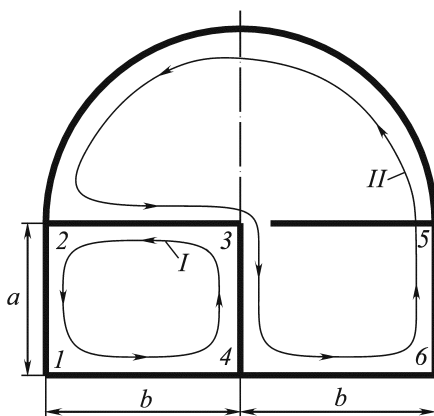


Рис. 4.6. Тризв'язний переріз та напрям обходу

Розв'язуючи систему (4.19), отримуємо наступні значення функції напружень $c_{I,II}$:

$$c_I = 0,0877 \text{ м}^2; \quad c_{II} = 0,0766 \text{ м}^2. \quad (4.21)$$

Жорсткість стержня C згідно з (4.1) з урахуванням елемента 35 відкритої частини (жорсткість якої визначається за (4.6)), визначиться наступним чином:

$$\begin{aligned} C = 2G \cdot (c_I F_I + c_{II} F_{II}) + \frac{G \cdot t_{53}^3 \cdot s_{53}}{3} = 2 \cdot 7,692 \cdot 10^{10} \cdot (0,0877 \cdot 48 + \\ + 0,0766 \cdot 148,53) + \frac{7,692 \cdot 10^{10} \cdot 0,01^3 \cdot 8}{3} = 2,3973 \cdot 10^{12} \text{ Н} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Погонний кут закручування α згідно з (4.2) становить

$$\alpha = \frac{M_{кр}}{C} = \frac{120000}{2,3973 \cdot 10^{12}} = 5,0057 \cdot 10^{-8} \text{ рад/м}. \quad (4.23)$$

Повний кут закручування θ згідно з (4.3) становить

$$\theta = \alpha L = 5,0057 \cdot 10^{-8} \cdot 83 = 4,1548 \cdot 10^{-6} \text{ рад}. \quad (4.24)$$

У табл. 4.3 наведено обчислення дотичних напружень для розглядуваного тризв'язного перерізу (рис. 4.6) за формулою (4.4).

Максимальне напруження в елементі 35 обчислюється за (4.7):

$$\tau_{35} = \alpha G t_{35} = 5,0057 \cdot 10^{-8} \cdot 7,692 \cdot 10^{10} \cdot 0,01 = 38,5 \text{ Па}. \quad (4.25)$$

На рис. 4.7 показані епюри дотичних напружень та функції напружень для тризв'язного контуру. Напруження τ_{35} показано в іншому масштабі, ніж решта напружень.

Таблиця 4.3 – Обчислення напружень трив'язного перерізу

№ з/п	Елемент	Товщина $t(s_i)$, м	c_i , м ²		c_j , м ²		$\tau_{zs} = \alpha G \frac{c_i - c_j}{t(s_i)}$, Па
			позначення	значення	позначення	значення	
1	14	0,016	c_I	0,0877	c_0	0	$2,1114 \cdot 10^4$
2	43	0,012	c_I	0,0877	c_{II}	0,0766	$3,5870 \cdot 10^3$
3	32	0,01	c_I	0,0877	c_{II}	0,0766	$4,3044 \cdot 10^3$
4	21	0,014	c_I	0,0877	c_0	0	$2,4130 \cdot 10^4$
5	46	0,016	c_{II}	0,0766	c_0	0	$1,8424 \cdot 10^4$
6	65	0,014	c_{II}	0,0766	c_0	0	$2,1056 \cdot 10^4$
7	52cir	0,008	c_{II}	0,0766	c_0	0	$3,6848 \cdot 10^4$
8	23	0,01	c_{II}	0,0766	c_I	0,0877	$-4,3044 \cdot 10^3$
9	34	0,012	c_{II}	0,0766	c_I	0,0877	$-3,5870 \cdot 10^3$

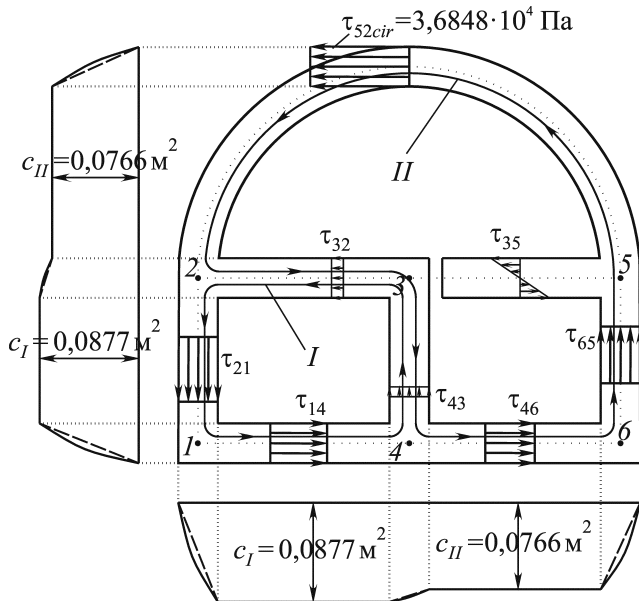


Рис. 4.7. Епюри дотичних напружень та функції напружень для трив'язного контура

16. Розрахунок двозв'язного перерізу. Двозв'язний переріз представлено на рис. 4.8. Тонкостінні елементи 32, 34, 35 відносяться до відкритої частини новоутвореного тонкостінного комбінованого профілю.

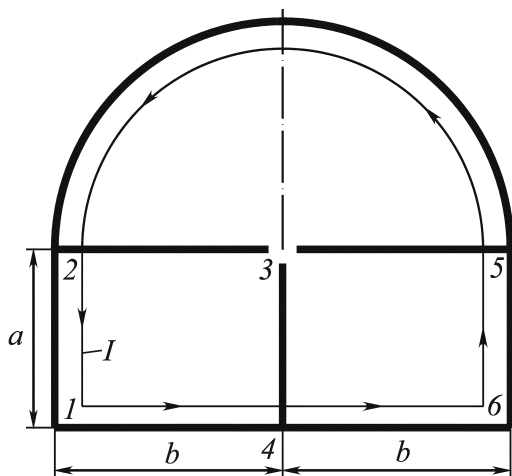


Рис. 4.8. Двозв'язний переріз та напрям обходу

Використовуючи залежність (4.5), складемо систему рівнянь для визначення значень функції напружень c_I на внутрішніх контурах:

$$c_I \left(\frac{s_{21}}{t_{21}} + \frac{s_{14}}{t_{14}} + \frac{s_{46}}{t_{46}} + \frac{s_{65}}{t_{65}} + \frac{s_{52cir}}{t_{52cir}} \right) = 2F_I = 2 \left(\frac{\pi b^2}{2} + 2ab \right), \quad (4.26)$$

де F_I – площа, обмежена I -м каналом/контуром, який визначається залежністю

$$F_I = \left(\frac{\pi b^2}{2} + 2ab \right) = \frac{3,14 \cdot 8^2}{2} + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 196,53 \text{ м}^2. \quad (4.27)$$

Розв'язуючи систему (4.26), отримуємо наступне значення функції напружень c_I :

$$c_I = 0,0786 \text{ м}^2. \quad (4.28)$$

Жорсткість стержня C згідно з (4.1) з урахуванням елементів 32, 35, 34 відкритої частини (жорсткість кожної з яких визначається за (4.6) або всіх трьох за (4.9)), визначиться наступним чином:

$$\begin{aligned} C &= 2G \cdot (c_I F_I) + \frac{G}{3} (t_{32}^3 \cdot s_{32} + t_{35}^3 \cdot s_{35} + t_{34}^3 \cdot s_{34}) = \\ &= 2 \cdot 7,692 \cdot 10^{10} \cdot (0,0786 \cdot 196,53) + \frac{7,692 \cdot 10^{10}}{3} (0,01^3 \cdot 8 + \\ &+ 0,01^3 \cdot 8 + 0,012^3 \cdot 6) = 2,3775 \cdot 10^{12} \text{ Н} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Погонний кут закручування α згідно з (4.2) становить

$$\alpha = \frac{M_{кр}}{C} = \frac{120000}{2,3775 \cdot 10^{12}} = 5,0473 \cdot 10^{-8} \text{ рад/м}. \quad (4.30)$$

Повний кут закручування θ згідно з (4.3) становить

$$\theta = \alpha L = 5,0473 \cdot 10^{-8} \cdot 83 = 4,1893 \cdot 10^{-6} \text{ рад}. \quad (4.31)$$

У табл. 4.4 наведено обчислення дотичних напружень за формулою (4.4) для розглядуваного двозв'язного перерізу (рис. 4.8).

Таблиця 4.4 – Обчислення напружень двозв'язного перерізу

№ з/п	Елемент	Товщина $t(s_i)$, м	c_I , м ²		c_0 , м ²		$\tau_{zs} = \alpha G \frac{c_i - c_j}{t(s_i)}$, Па
			позначення	значення	позначення	значення	
1	21	0,014	c_I	0,0786	c_0	0	$2,1627 \cdot 10^4$
2	14	0,016	c_I	0,0786	c_0	0	$1,8924 \cdot 10^4$
3	46	0,016	c_I	0,0786	c_0	0	$1,8924 \cdot 10^4$
4	65	0,014	c_I	0,0786	c_0	0	$2,1627 \cdot 10^4$
5	52cir	0,008	c_I	0,0786	c_0	0	$3,7847 \cdot 10^4$

Максимальні дотичні напруження в елементах 32, 35, 34 обчислюються за (4.7):

$$\begin{aligned}\tau_{32} &= \alpha G t_{32} = 5,0473 \cdot 10^{-8} \cdot 7,692 \cdot 10^{10} \cdot 0,01 = 38,5 \text{ Па}, \\ \tau_{35} &= \alpha G t_{35} = 5,0473 \cdot 10^{-8} \cdot 7,692 \cdot 10^{10} \cdot 0,01 = 38,5 \text{ Па}, \\ \tau_{34} &= \alpha G t_{34} = 5,0473 \cdot 10^{-8} \cdot 7,692 \cdot 10^{10} \cdot 0,012 = 46,2 \text{ Па}.\end{aligned}\quad (4.32)$$

На рис. 4.9 показані епюри дотичних напружень та функції напружень для двозв'язного контуру. Напруження τ_{32} , τ_{35} , τ_{34} показані умовно.

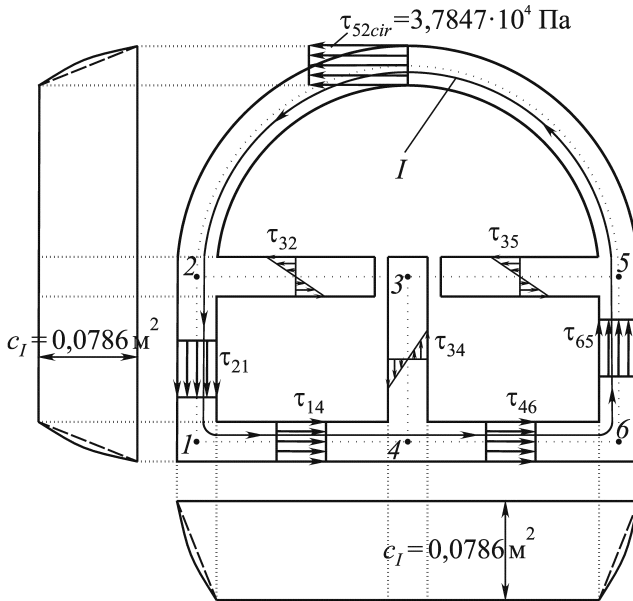


Рис. 4.9. Епюри дотичних напружень та функції напружень для двозв'язного контуру

1в. Однозв'язний, або відкритий, переріз. Однозв'язний переріз представлено на рис. 4.10.

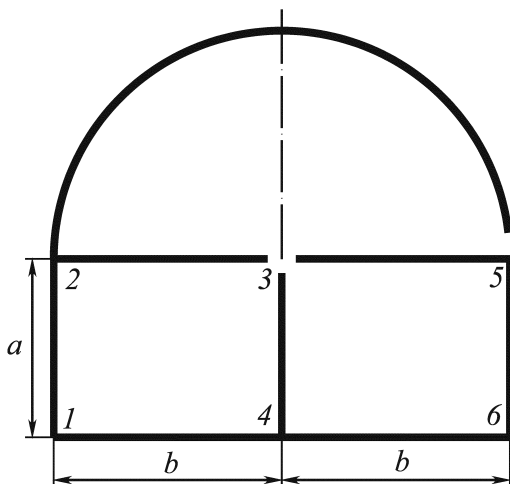


Рис. 4.10. Однозв'язний переріз

Жорсткість однозв'язного стержня C , що складається з системи тонкостінних елементів, обчислюється за формулою (4.9):

$$C = \frac{1}{3} G \sum_{i=1}^m t_i^3 b_i = \frac{G}{3} (t_{21}^3 s_{21} + t_{14}^3 s_{14} + t_{43}^3 s_{43} + t_{32}^3 s_{32} + t_{35}^3 s_{35} + t_{46}^3 s_{46} + t_{65}^3 s_{65} + t_{52cir}^3 s_{52cir}) = \left. \begin{aligned} &= \frac{7,692 \cdot 10^{10}}{3} (0,014^3 \cdot 6 + 0,016^3 \cdot 8 + \dots \\ &+ 0,008^3 \cdot 25,13) = 3,5308 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Погонний кут закручування α згідно з (4.2) становить

$$\alpha = \frac{M_{кр}}{C} = \frac{120000}{3,5308 \cdot 10^6} = 3,3987 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}. \quad (4.34)$$

Повний кут закручування θ згідно з (4.3) становить

$$\theta = \alpha L = 3,3987 \cdot 10^{-2} \cdot 83 = 2,82 \text{ рад}. \quad (4.35)$$

Максимальні напруження, що діють в тонкостінних елементах відкритого однозв'язного профілю, обчислюються

за формулою (4.7), а найбільші значення функції напружень можуть бути отримані з (4.8) при $x = 0$ наступним чином:

$$\psi_{\max} = \psi(x, s) \big|_{x=0} = \frac{t^2}{4} \left(1 - 4 \frac{x^2}{t^2} \right) \bigg|_{x=0} = \frac{t^2}{4}. \quad (4.36)$$

Обчислення найбільших дотичних напружень за формулою (4.7) та найбільших значень функції напружень для відкритого контура представлено в табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – Обчислення напружень однозв’язного (відкритого) перерізу

№ з/п	Елемент	Товщина t_{nk} , м	Найбільші дотичні напруження $\tau_{nk} = \alpha G t_{nk}$, Па	Найбільші значення функції напружень $\psi_{nk} = \frac{t^2}{4}$, м ²
1	14	0,016	$4,1830 \cdot 10^7$	$6,4 \cdot 10^{-5}$
2	43	0,012	$3,1373 \cdot 10^7$	$3,6 \cdot 10^{-5}$
3	32	0,01	$2,6144 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
4	21	0,014	$3,6601 \cdot 10^7$	$4,9 \cdot 10^{-5}$
5	46	0,016	$4,1830 \cdot 10^7$	$6,4 \cdot 10^{-5}$
6	65	0,014	$3,6601 \cdot 10^7$	$4,90 \cdot 10^{-5}$
7	52cir	0,008	$2,0915 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
8	35	0,01	$2,6144 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^{-5}$

На рис. 4.11 показані умовні епюри дотичних напружень та функції напружень на полосах відкритого профілю.

2. Побудова епюр дотичних напружень та функції напружень. Цей пункт був виконаний у п. 1.

3. Порівняння значень жорсткостей і максимальних дотичних напружень. Ці значення будемо порівнювати для криволінійної полоси у вигляді дуги, що має назву 52cir, відносно значень, розрахованих для багатозв’язного перерізу. В табл. 4.6 зібрано розраховані величини для зручності обчислень.

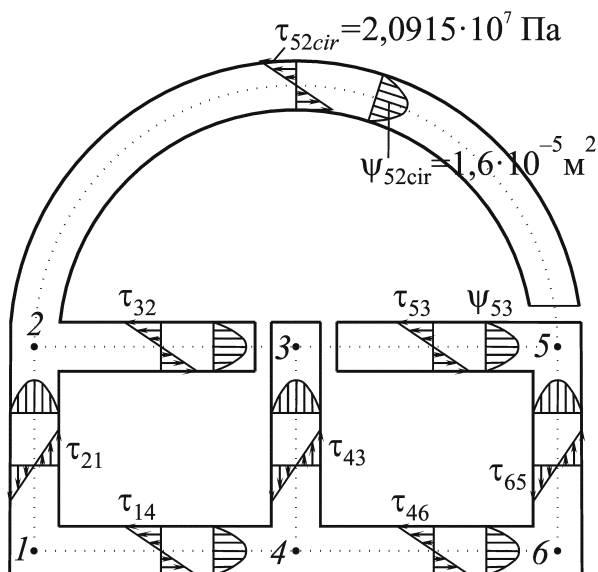


Рис. 4.11. Епюри дотичних напружень та функції напружень для однозв'язного контура

Таблиця 4.6 – Порівняння жорсткостей, погонних кутів закручування і максимальних дотичних напружень

№ з/п	Найменування величини	Позначення	Переріз та його індекс			
			Багатозв'язний, α	Три-зв'язний, β	Дво-зв'язний, γ	Одно-зв'язний, δ
1	Жорсткість, Н·м ²	C	$2,4362 \cdot 10^{12}$	$2,3973 \cdot 10^{12}$	$2,3775 \cdot 10^{12}$	$3,5308 \cdot 10^6$
2	Погонний кут закручування, рад/м	α	$4,9256 \cdot 10^{-8}$	$5,0057 \cdot 10^{-8}$	$5,0473 \cdot 10^{-8}$	$3,3987 \cdot 10^{-2}$
3	Найбільші дотичні напруження на полосі 52cir	τ_{52cir}	$3,4319 \cdot 10^4$	$3,6848 \cdot 10^4$	$3,7847 \cdot 10^4$	$2,0915 \cdot 10^7$

Відношення розрахованих величин представлено наступними залежностями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_{\alpha}}{C_{\beta}} &= \frac{2,4362 \cdot 10^{12}}{2,3973 \cdot 10^{12}} = 1,016; & \frac{\tau_{\beta}}{\tau_{\alpha}} &= \frac{3,6848 \cdot 10^4}{3,4319 \cdot 10^4} = 1,074; \\ \frac{C_{\alpha}}{C_{\gamma}} &= \frac{2,4362 \cdot 10^{12}}{2,3775 \cdot 10^{12}} = 1,025; & \frac{\tau_{\gamma}}{\tau_{\alpha}} &= \frac{3,6848 \cdot 10^4}{3,4319 \cdot 10^4} = 1,103; \\ \frac{C_{\alpha}}{C_{\delta}} &= \frac{2,4362 \cdot 10^{12}}{3,5308 \cdot 10^6} = 6,9 \cdot 10^5; & \frac{\tau_{\delta}}{\tau_{\alpha}} &= \frac{2,0915 \cdot 10^7}{3,4319 \cdot 10^4} = 6,09 \cdot 10^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

де величини з індексом α відносяться до багатозв'язного перерізу;
з індексом β – до тризв'язного перерізу;
з індексом γ – до двозв'язного перерізу;
з індексом δ – до однозв'язного перерізу.

Відношення погонних кутів закручування такі ж самі, як і відношення жорсткостей.

Висновок. Видалення внутрішніх перемичок практично не зменшує жорсткості стержня при його роботі на чисте кручення. Проте жорсткість відкритого профілю практично на 5 порядків менша у порівнянні з таким самим замкнутим профілем. Найбільші дотичні напруження на стінках відкритого профілю в одній і тій же точці на 2 порядки більші в порівнянні з таким самим замкнутим профілем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Постнов В. А., Суслов В. П. Строительная механика корабля и теория упругости : учеб. для вузов : в 2 т. / под ред. В. А. Постнова. Л. : Судостроение, 1987. Т. 1: Теория упругости и численные методы решения задач строительной механики корабля. 288 с.
2. Малини Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести : учеб. для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. : Машиностроение, 1975. 400 с.
3. Соков В. М. Theory of elasticity : навчальний посібник. Миколаїв : НУК, 2021. 168 с.
4. Timoshenko S. P., Goodier J. N. Theory of Elasticity: 3-rd ed. New York : McGraw-Hill Book Company, 1970. 608 p.
5. William S. Slaughter. The Linearized Theory of Elasticity. Birkhäuser, 2002. 568 p.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

**Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи
«Розв’язання оберненої задачі теорії пружності», тип А**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

*Кафедра будівельної механіки
та конструкції корпусу корабля*

Студент(ка) _____

Група _____ Варіант _____

Розрахунково-графічна робота № 1
«Розв'язання оберненої задачі теорії пружності», тип А

Для заданого однозв'язного, ідеально пружного сталевого тіла ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,25$) у декартовій системі координат (x, y, z) задані переміщення $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Вважаючи, що ці переміщення спричинені тільки зовнішніми силами (без температури, $T = 0$), виконати наступне:

- 1) визначити деформації $\epsilon_x(x, y, z)$, $\gamma_{xy}(x, y, z)$, ... , $\epsilon_z(x, y, z)$;
- 2) перевірити умови сумісності деформацій із п. 1;
- 3) визначити напруження $\sigma_x(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$;
- 4) визначити об'ємні зовнішні сили $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$;
- 5) визначити поверхневі зовнішні сили $p_{vx}(x, y, z)$, $p_{vy}(x, y, z)$, $p_{vz}(x, y, z)$;
- 6) перевірити¹ умови сумісності напружень із п. 3.

Вихідні дані

Задані закони переміщень, см	Пружне тіло, рис.	Грань	Відрізок	y_n/z_n	σ/τ
$u =$					
$v =$					
$w =$					

Завдання видано _____

Термін виконання _____

Термін захисту _____

Викладач _____

¹ Будь-яке одне рівняння для нормальних напружень, і будь-яке одне рівняння для дотичних напружень

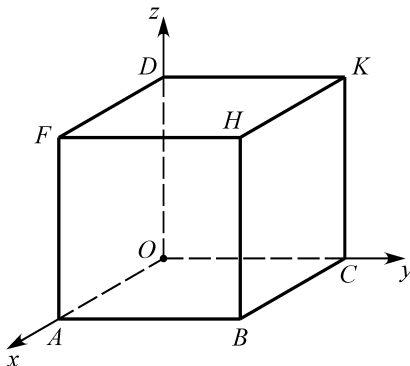
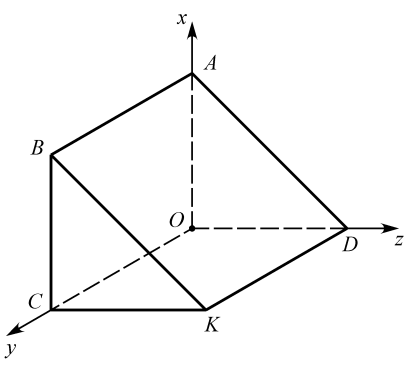
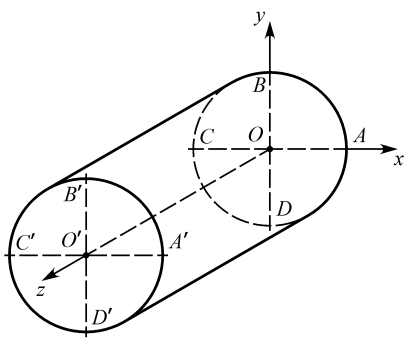
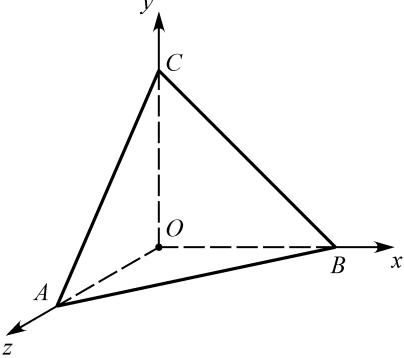
Таблиця А.1 – Вихідні дані до РГЗ № 1 «Розв’язання оберненої задачі теорії пружності», тип А

Варіант	Задані функції переміщень $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ в см; x, y, z – в см	Пружне тіло, рис. з А.2	Грань	Побудова епюр		
				Відрізок	y_A/z_A	σ/τ
I	II	III	IV	V	VI	VII
1	$u = 5 \cdot 10^{-5}(1+z)x$; $v = 5 \cdot 10^{-5}(11-4z)y$; $w = 2,5 \cdot 10^{-5}(4x-8z-x^2+4y^2+z^2)$	1.1	$x=0$	OC	1/1	σ_y/τ_{zx}
2	$u = -5 \cdot 10^{-5}(1-z)x$; $v = 5 \cdot 10^{-5}(4z-11)y$; $w = 2,5 \cdot 10^{-5}(4x+8z+x^2-4y^2-z^2)$	1.1	$y=0$	OD	2/2	σ_y/τ_{zx}
3	$u = 2,5 \cdot 10^{-5}(4+y)x$; $v = 1,25 \cdot 10^{-5}(16x-12y-x^2+y^2+4z^2)$; $w = 5 \cdot 10^{-5}(7-2y)z$	1.1	$z=0$	AB	3/3	σ_z/τ_{xy}
4	$u = -2,5 \cdot 10^{-5}(4+y)x$; $v = 1,25 \cdot 10^{-5}(16x+12y+x^2-y^2-4z^2)$; $w = 5 \cdot 10^{-5}(2y-7)z$	1.1	$x=10$	FH	4/4	σ_z/τ_{xy}
5	$u = 10^{-4}(5-2z)x$; $v = 5 \cdot 10^{-5}(5+z)y$; $w = 2,5 \cdot 10^{-5}(2y-10z+4x^2-y^2+z^2)$	1.1	$y=8$	DK	5/5	σ_x/τ_{yz}
6	$u = 10^{-4}(2z-5)x$; $v = -5 \cdot 10^{-5}(5z+y)y$; $w = 2,5 \cdot 10^{-5}(2y+10z-4x^2+y^2-z^2)$	1.1	$x=0$	CB	6/4	σ_x/τ_{yz}
7	$u = 1,25 \cdot 10^{-5}(8y-14x+x^2-y^2+4z^2)$; $v = 2,5 \cdot 10^{-5}(3+x)y$; $w = 5 \cdot 10^{-5}(9-2x)z$	1.1	$z=6$	KH	7/3	σ_z/τ_{xy}
8	$u = 1,25 \cdot 10^{-5}(14x+8y-x^2+y^2-4z^2)$; $v = -2,5 \cdot 10^{-5}(3+x)y$; $w = 5 \cdot 10^{-5}(2x-9)z$	1.1	$y=0$	DF	6/2	σ_z/τ_{xy}
9	$u = 5 \cdot 10^{-5}(7-2y)x$; $v = 1,25 \cdot 10^{-5}(16z-12y+4x^2+y^2-z^2)$; $w = 2,5 \cdot 10^{-5}(4+y)z$	1.1	$z=0$	AF	5/1	σ_x/τ_{yz}
10	$u = 5 \cdot 10^{-5}(2y-7)x$; $v = 1,25 \cdot 10^{-5}(12y+16z-4x^2-y^2+z^2)$; $w = -2,5 \cdot 10^{-5}(4+y)z$	1.1	$z=6$	BH	4/2	σ_x/τ_{yz}

Закінчення таблиці А.1

I	II	III	IV	V	VI	VII
11	$u = 1,25 \cdot 10^{-5}(4z - 18x + x^2 + 4y^2 - z^2);$ $v = 10^{-4}(4 - x)y;$ $w = 2,5 \cdot 10^{-5}(11 + x)z$	1.1	$y = 8$	<i>CK</i>	3/3	σ_y/τ_{zx}
12	$u = 1,25 \cdot 10^{-5}(18x + 4z - x^2 - 4y^2 + z^2);$ $v = 10^{-4}(x - 4)y;$ $w = -2,5 \cdot 10^{-5}(11 + x)z$	1.1	$x = 10$	<i>OA</i>	2/4	σ_y/τ_{zx}
13	$u = -5 \cdot 10^{-5}(x - 5z + 8xz - x^2 + y^2 - 4z^2);$ $v = 10^{-4}(2 + x + z)y;$ $w = 5 \cdot 10^{-5}(5x - z - 8xz + 4x^2 - y^2 + z^2)$	1.2	$x = 0$	<i>OC</i>	0,25/0,25	σ_z/τ_{zx}
14	$u = -2,5 \cdot 10^{-5}(4x + 20z - 8xz + x^2 - y^2 + 4z^2);$ $v = 5 \cdot 10^{-5}(8 - x - z)y;$ $w = -2,5 \cdot 10^{-5}(20x + 4z - 8xz + 4x^2 - y^2 + z^2)$	1.2	$x = 0$	<i>AB</i>	0,25/0,5	σ_z/τ_{zx}
15	$u = 2,5 \cdot 10^{-5}(4x + 20z - 8xz + x^2 - y^2 + 4z^2);$ $v = -5 \cdot 10^{-5}(8 - x - z)y;$ $w = 2,5 \cdot 10^{-5}(20x + 4z - 8xz + 4x^2 - y^2 + z^2)$	1.2	$z = 0$	<i>DK</i>	0,5/0,75	σ_z/τ_{zx}
16	$u = 5 \cdot 10^{-5}(x - 5z + 8xz - x^2 + y^2 - 4z^2);$ $v = -10^{-4}(2 + x + z)y;$ $w = -5 \cdot 10^{-5}(5x - z - 8xz + 4x^2 - y^2 + z^2)$	1.2	$z = 0$	<i>BC</i>	0,75/0,75	σ_z/τ_{zx}
17	$u = 5 \cdot 10^{-5}(2yz - x);$ $v = -5 \cdot 10^{-5}(y + 2xz);$ $w = 2 \cdot 10^{-4} z$	1.3	$z = 0$	<i>O'A'</i>	0/10	σ_z/τ_{yz}
18	$u = 5 \cdot 10^{-5}(2x - yz);$ $v = 5 \cdot 10^{-5}(2y + xz);$ $w = -4 \cdot 10^{-4} z$	1.3	$z = 50$	<i>O'B'</i>	0/20	σ_z/τ_{zx}
19	$u = 10^{-5}(5z - x)y;$ $v = 5 \cdot 10^{-6}(x^2 - y^2 - 4z^2 - 10xz);$ $w = 4 \cdot 10^{-5} yz$	1.3	$z = 0$	<i>O'C'</i>	0/30	σ_z/τ_{yz}
20	$u = 2,5 \cdot 10^{-6}(x^2 - y^2 + 4z^2 - 40yz);$ $v = 5 \cdot 10^{-6}(y + 20z)x;$ $w = -2 \cdot 10^{-5} xz$	1.3	$z = 50$	<i>O'D'</i>	0/40	σ_z/τ_{zx}

Таблиця А.2 – Пружні тіла

	
$OA = 10 \text{ см}; OC = 8 \text{ см}; OD = 6 \text{ см}$ Рис. А.1. Паралелепіпед	$OA = 1 \text{ см}; OC = 1 \text{ см}; OD = 1 \text{ см}$ Рис. А.2. Призма
	
$R = 10 \text{ см}; OO' = 50 \text{ см}$ Рис. А.3. Вал	$OA = 2 \text{ см}; OC = 2 \text{ см}; OB = 2 \text{ см}$ Рис. А.4. Тетраєдр

ДОДАТОК Б

**Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи
«Дослідження зовнішнього навантаження та компонентів
напружено-деформованого стану заданого пружного тіла»**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

*Кафедра будівельної механіки
та конструкції корпусу корабля*

Студент(ка) _____

Група _____ Варіант _____

Розрахунково-графічна робота № 2
«Дослідження зовнішнього навантаження та компонентів
напружено-деформованого стану заданого пружного тіла»

Для заданого в розрахунково-графічній роботі № 1 тіла з відомими компонентами напружено-деформованого стану та зовнішніми силами виконати наступне:

- 1) графічно показати дію поверхневих сил на тіло та описати прості види деформування, які виникають при їх дії;
- 2) визначити складові головного вектора та головного моменту поверхневих сил, які діють на задану частину поверхні (грань);
- 3) побудувати епюри компонентів переміщень u , v , w точок тіла, розташованих на заданому прямолінійному відрізку (табл. А.1, V);
- 4) побудувати епюри вказаних компонентів напружень σ і τ вздовж прямої лінії з заданими координатами (табл. А.1, VI, VII).

Вихідні дані

Задані закони переміщень, см	Пружне тіло, рис.	Грань	Відрізок	y_d/z_d	σ/τ
$u =$					
$v =$					
$w =$					

Завдання видано _____

Термін виконання _____

Термін захисту _____

Викладач _____

ДОДАТОК В

**Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи «Дослідження
напружено-деформованого стану в точках пружного тіла»**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

*Кафедра будівельної механіки
та конструкції корпусу корабля*

Студент(ка) _____

Група _____ Варіант _____

Розрахунково-графічна робота № 3
«Дослідження напружено-деформованого стану
в точках пружного тіла»

Для заданого в розрахунково-графічній роботі № 1 тіла з відомими компонентами напружено-деформованого стану визначити наступне:

1) головні напруження та деформації і положення головних площадок у точці M ;

2) найбільші дотичні напруження і кутові деформації в точці M , умовно показати площадки (по відношенню до головних), в яких діють ці напруження;

3) величини зведених/еквівалентних напружень у точці M за чотирма класичними гіпотезами міцності, а також відповідні запаси міцності по відношенню до границі плинності матеріалу σ_T ;

4) повне, повне нормальне, повне дотичне напруження в точці N на площадці з нормаллю ν ; напрямок повного напруження і графічно показати його положення. компоненти переміщень u , v , w і повне переміщення s точки N , а також його напрямок і графічно зобразити цей вектор s .

Вихідні дані

Пружне тіло, рис.	$M(x; y; z)$			$N(x; y; z)$			$\nu(l; m; n)$		
	x	y	z	x	y	z	l	m	n

Завдання видано _____

Термін виконання _____

Термін захисту _____

Викладач _____

Таблиця В.1 – Вихідні дані до РГР № 3 «Дослідження напружено-деформованого стану в точках пружного тіла»

Варіант	Пружне тіло, рис. з табл. А.1	Координати точок, см		Напрявні косинуси нормалі v		
		$M(x; y; z)$	$N(x; y; z)$	l	m	n
I	II	III	IV	V	VI	VII
1	1.1	1; 1; 1	2; 2; 5	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
2	1.1	2; 1; 2	3; 4; 4	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
3	1.1	3; 1; 3	4; 5; 3	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
4	1.1	4; 2; 3	5; 3; 2	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
5	1.1	5; 3; 4	6; 4; 4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0
6	1.1	6; 3; 5	7; 5; 5	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0
7	1.1	7; 4; 4	4; 1; 1	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0
8	1.1	8; 4; 4	3; 2; 2	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0
9	1.1	9; 6; 5	8; 7; 3	0,8	0	0,6
10	1.1	1; 7; 5	9; 6; 4	-0,8	0	0,6
11	1.1	2; 6; 1	6; 3; 5	0	0,8	-0,6
12	1.1	3; 5; 2	7; 4; 4	0	-0,8	-0,6
13	1.2	0,25; 0,25; 0,25	0,5; 0,75; 0,25	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0
14	1.2	0,25; 0,5; 0,5	0,25; 0,5; 0,5	$\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
15	1.2	0,5; 0,75; 0,5	0,25; 0,25; 0,25	0	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
16	1.2	0,5; 0,75; 0,25	0,5; 0,25; 0,25	$-\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$
17	1.3	1; 3; 5	2; 4; 25	0,6	0,8	0
18	1.3	2; 4; 10	1; 3; 30	0,6	0	-0,8
19	1.3	6; 5; 15	5; 6; 35	0	0,6	0,8
20	1.3	5; 6; 20	6; 5; 40	0,8	0	-0,6

ДОДАТОК Г

**Вихідні дані для розрахунково-графічної роботи
«Розрахунок міцності й жорсткості тонкостінного призматичного
стержня при чистому крученні»**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

*Кафедра будівельної механіки
та конструкції корпусу корабля*

Студент(ка) _____

Група _____ Варіант _____

Розрахунково-графічна робота № 4
«Розрахунок міцності й жорсткості тонкостінного призматичного
стержня при чистому крученні»

Тонкостінний, призматичний, сталевий ($G = 8 \cdot 10^4$ МПа) стержень довжиною L зазнає чистого кручення від моментів $M_{кр}$. Виконати наступне:

1) визначити дотичні напруження і повний кут закручування стержня у випадках:

а) заданого багатозв'язного поперечного перерізу;

б) двозв'язного поперечного перерізу, отриманого довільним чином з багатозв'язного;

в) однозв'язного поперечного перерізу, отриманого довільним чином із двозв'язного;

2) побудувати епюри дотичних напружень та епюри функції напружень по товщині всіх пластинчастих елементів;

3) порівняти значення жорсткостей та максимальних дотичних напружень (для одних і тих же точок і перерізів) стержня із двозв'язним та однозв'язним перерізами по відношенню до багатозв'язного.

Вихідні дані

Пружне тіло, рис.	Розмір ячейки	$M_{кр}$, кН·м	Довжина L , м	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5

Завдання видано _____

Термін виконання _____

Термін захисту _____

Викладач _____

Таблиця Г.1 – Поперечні перерізи до РГР № 4 «Розрахунок міцності й жорсткості тонкостінного призматичного стержня при чистому крученні»

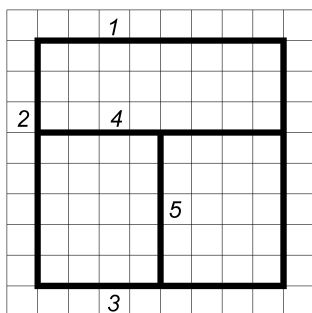


Рисунок 1

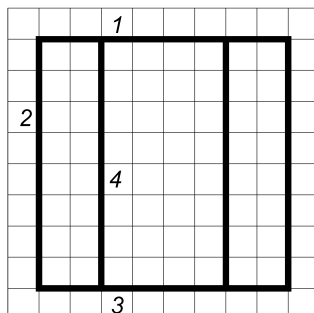


Рисунок 2

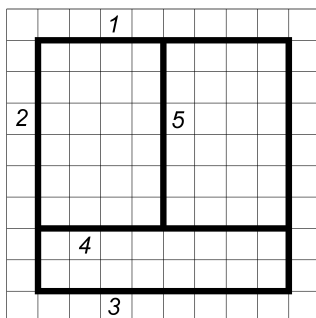


Рисунок 3

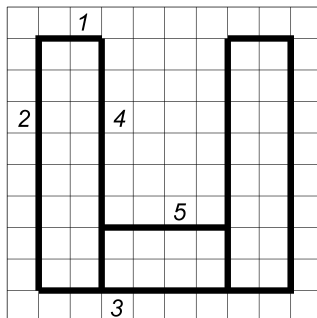


Рисунок 4

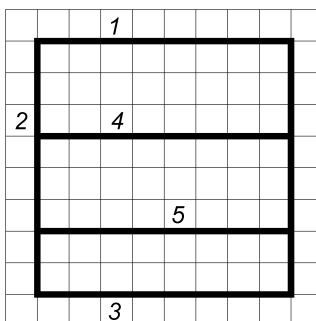


Рисунок 5

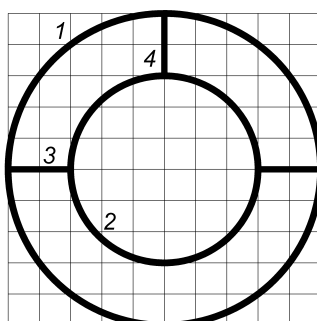


Рисунок 6

Таблиця Г.2 – Вихідні дані до РГР № 4 «Розрахунок міцності й жорсткості тонкостінного призматичного стержня при чистому крученні»

Варіант	Пружне тіло, рис. з табл. Г.1	Розмір ячейки	$M_{кр}, \text{кН}\cdot\text{м}$	Довжина $L, \text{м}$	Товщини, мм				
					t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	1	1,0	450	80	7	9	11	7	8
2	2	1,1	500	82	8	10	12	8	7
3	3	1,2	550	84	9	11	13	9	7
4	4	1,3	600	86	10	12	14	8	9
5	5	1,0	650	88	7	9	11	7	8
6	1	1,1	700	90	8	10	12	8	7
7	2	1,2	750	92	9	11	13	9	7
8	3	1,3	800	94	10	12	14	8	9
9	4	1,0	850	96	7	9	11	7	8
10	5	1,1	900	98	8	10	12	8	7
11	1	1,2	450	100	9	11	13	9	7
12	2	1,3	500	80	10	12	14	8	9
13	3	1,0	550	82	7	9	11	7	8
14	4	1,1	600	84	8	10	12	8	7
15	5	1,2	650	86	9	11	13	9	7
16	1	1,3	700	88	10	12	14	8	9
17	2	1,0	750	90	7	9	11	7	8
18	3	1,1	800	92	8	10	12	8	7
19	4	1,2	850	94	9	11	13	9	7
20	5	1,3	900	96	10	12	14	8	9
21	1	1,0	450	98	7	9	11	7	8
22	2	1,1	500	100	8	10	12	8	7
23	3	1,2	550	80	9	11	13	9	7
24	4	1,3	600	82	10	12	14	8	9

Навчальне видання

СОКОВ Валерій Миколайович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання розрахунково-графічних робіт з розділу
будівельної механіки корабля «Основи теорії пружності»

Комп'ютерне верстання *Н. М. Ковальчук*
Коректор *О. Є. Вакула*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 5,99. Вид. № 75. Зам. № 98.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54007
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.