

Кусково-планарне моделювання базисів мішаних серендипових елементів

*Перші моделі серендипових скінченних елементів мали однакову кількість граничних вузлів у напрямках Ox і Oy . Найбільше розповсюдження у практичних розрахунках набули елементи $Q8$ (біквадратична інтерполяція) та $Q12$ (бікубічна інтерполяція). Ці елементи цілком придатні і зручні для задач відновлення функцій в ізотропному середовищі. Для задач в ортотропному середовищі потрібні мішані моделі серендипових елементів. Як приклад мішаної моделі ми аналізуємо серендипів елемент $Q10$ (квадратично-кубічна інтерполяція). У напрямку осі Ox функція змінюється за законом кубічної параболи, а вздовж осі Oy – за законом квадратичної параболи. У роботі розглядаються класичні та нетрадиційні методи конструювання базисів мішаного скінченного елемента $Q10$, який складається із елементів: $Q8$ і $Q12$. Як і передбачалося, класичні підходи (метод оберненої матриці і нематричний метод Тейлора) показали, що мішана модель $Q10$ успадковує недоліки «інгредієнтів» $Q8$ і $Q12$. Мова йде про фізичну неадекватність спектрів еквівалентних вузлових навантажень від одиничної масової сили. Стандартна модель $Q10$ має від'ємні навантаження у кутових вузлах носія. Це неприродне явище «гравітаційного відштовхування» назвали парадоксом Зенкевича, який у 1971 році вперше звернув увагу на небажану особливість стандартних серендипових СЕ. На думку Зенкевича, цей недолік усунути неможливо, треба змиритися. У роботі показано, що альтернативи існують. Для побудови математично обґрунтованих і фізично адекватних базисів елемента $Q10$ пропонується простий і наочний метод геометричного моделювання. Алгоритм використовує лише фрагменти площин. Портрети ліній нульового рівня містять лише відрізки прямих. Побудова починається саме з таких портретів. Лишається виконати процедуру Уачспреса – *product of planes*. Портрети ліній нульового рівня суттєво спрощують когнітивно-графічний аналіз рельєфу базисних поверхонь. Автори свідомо сконструювали додатково дві несумісні моделі елемента $Q10$, які успішно витримали кускове тестування.*

Ключові слова: кусково-планарний метод (КПМ) відновлення функцій двох аргументів; скінченний елемент $Q10$; фізична адекватність спектра вузлових навантажень; несумісні елементи, кускове тестування.

КУСОЧНО-ПЛАНАРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БАЗИСОВ СМЕШАННЫХ СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Первые модели серендиповых конечных элементов имели одинаковое количество граничных узлов в направлениях Ox и Oy . Наибольшее распространение в практических

расчетах получили элементы Q8 (биквадратичная интерполяция) и Q12 (бикубическая интерполяция). Эти элементы целиком подходят и удобны для задач восстановления функций в изотропной среде. Для задач в ортотропной среде необходимы смешанные модели серендиповых элементов. Как пример смешанной модели мы анализируем серендипов элемент Q10 (квадратично-кубическая интерполяция). В направлении оси Ox функция изменяется по закону кубической параболы, а вдоль оси Oy – по закону квадратичной параболы. В работе рассматриваются классические и нетрадиционные методы конструирования базисов смешанного конечного элемента Q10, который состоит из элементов: Q8 и Q12. Как и предсказывалось, классические подходы (метод обратной матрицы и нематричный метод Тейлора) показали, что смешанная модель Q10 наследует недостатки «ингредиентов» Q8 и Q12. Речь идет о физической неадекватности спектров эквивалентных узловых нагрузок от единичной массовой силы. Стандартная модель Q10 имеет отрицательные нагрузки в угловых узлах носителя. Это неестественное явление «гравитационного отталкивания» назвали парадоксом Зенкевича, который в 1971 году впервые обратил внимание на нежелательную особенность стандартных серендиповых КЭ. По мнению Зенкевича, этот недостаток устранить невозможно, необходимо смириться. В работе показано, что альтернативы существуют. Для построения математически обоснованных и физически адекватных базисов элемента Q10 предлагается простой и наглядный метод геометрического моделирования. Алгоритм использует только фрагменты плоскостей. Портреты линий нулевого уровня содержат только отрезки прямых. Построение начинается именно с таких портретов. Остается выполнить процедуру Уачспресса – *product of planes*. Портреты линий нулевого уровня существенно упрощают когнитивно-графический анализ рельефа базисных поверхностей. Авторы сознательно сконструировали дополнительно две несовместные модели элемента Q10, которые успешно выдержали кусочное тестирование.

Ключевые слова: кусочно-планарный метод (КПМ) восстановления функций двух аргументов; конечный элемент Q10; физическая адекватность спектра узловых нагрузок; несовместные элементы; кусочное тестирование.

A. N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

N.V. TENDITNA, O.I. LYTVYNENKO, O.N. DUDCHENKO

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Kherson branch

I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

Piecewise-planar modeling of bases of mixed serendipity elements

The first models of serendipity finite elements had the same number of boundary nodes in the Ox and Oy directions. Q8 (biquadratic interpolation) and Q12 (bicubic interpolation) elements are the most widespread in practical calculations. These elements are quite suitable and convenient for the tasks of restoring functions in an isotropic environment. Mixed models of serendipity elements are required for problems in an orthotropic environment. As an example of a mixed model we analyze the serendipity element Q10 (quadratic-cubic interpolation). In the direction of the Ox axis the function changes according to the law of the cubic parabola, and along the Oy axis - according to the law of the quadratic parabola. The paper considers classical and non-traditional methods of constructing the bases of a mixed finite element Q10, which consists of elements: Q8 and Q12. As expected, the classical approaches (inverse matrix method and non-matrix Taylor method) showed that the mixed

model Q10 inherits the imperfections of the 'ingredients' Q8 and Q12. We are talking about the physical inadequacy of the spectra of equivalent nodal loads from a unit mass force. The standard Q10 model has negative loads in the carrier corner nodes. This unnatural phenomenon of 'gravitational repulsion' was called the paradox of Zienkiewicz, who in 1971 first drew attention to the undesirable feature of standard serendipity FEs. According to Zienkiewicz this imperfection cannot be eliminated, it should be accepted. The paper shows that there are alternatives. A simple and visual method of geometric modeling is proposed for constructing mathematically grounded and physically adequate bases of the Q10 element. The algorithm uses only fragments of planes. Portraits of zero-level lines contain only segments of straight lines. Construction begins with such portraits. It remains to perform the procedure of Wachspress - product of planes. Portraits of zero-level lines significantly simplify the cognitive-graphic analysis of base surfaces contour. The authors deliberately constructed two additional incompatible models of the Q10 element, which successfully passed piecewise testing.

Keywords: piecewise-planar method (PPM) of restoring functions of two arguments; finite element Q10; physical adequacy of the spectrum of nodal loads; incompatible elements; piecewise testing.

Постановка проблеми

Перші моделі серендипових скінченних елементів мали однакову кількість граничних вузлів у напрямках Ox і Oy . Найбільше розповсюдження у практичних розрахунках набули елементи Q8 (біквадратична інтерполяція) та Q12 (бікубічна інтерполяція). Ці елементи цілком придатні і зручні для задач відновлення функцій в ізотропному середовищі. Для задач в ортотропному середовищі потрібні мішані моделі серендипових елементів. Як приклад мішаної моделі ми розглядаємо серендипів елемент Q10 (квадратично-кубічна інтерполяція). У напрямку осі Ox функція змінюється за законом кубічної параболи, а вздовж осі Oy – за законом квадратичної параболи.

Головна проблема, як завжди у методі скінченних елементів (МСЕ), полягає у розробці способів конструювання базисних функцій, які задовольняють умовам інтерполяційної гіпотези Лагранжа. Традиційні для серендипових елементів методи (оберненої матриці, Тейлора) забезпечують математичне обґрунтування базисних функцій (функцій форми), але не гарантують фізичну адекватність інтегральних характеристик. Це не влаштовує інженерів – прихильників механічних аналогій. Тому пошуки більш ефективних алгоритмів і фізично адекватних СЕ тривають.

У нашій роботі базисна функція вищого порядку будується як добуток лінійних функцій Куранта-Тернера. Це природно: комплекс складається із симплексів. Процедура прямого геометричного формоутворення базисної поверхні дуже проста і використовує тільки трикутні фрагменти площин. Кусково-планарний метод (КПМ) дає можливість сконструювати модельний ряд альтернативних елементів Q10 з фізично адекватними інтегральними характеристиками. Нагадаємо, що стандартна модель Q10 має від'ємні навантаження у кутових вузлах носія. Це неприродне явище "гравітаційного відштовхування" назвали парадоксом Зенкевича, який у 1971 році вперше звернув увагу на небажану особливість стандартних серендипових СЕ. На думку Зенкевича, цей недолік усунути неможливо, треба змиритися. Ми покажемо, що альтернативи існують.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Метод «добутку площин» ('product of planes') побудови базисних функцій на багатокутниках вперше був запропонований на початку 70-х років минулого століття Уачспрессом [1]. На жаль, серендипові елементи, навіть стандартні, лишилися поза

увагою автора [1]. Про перші спроби геометричного конструювання базисів серендипових елементів можна прочитати в [2], де докладно розглядається елемент Q12. Ми розглядаємо побудову альтернативних базисів елемента Q10 як задачу на геометричну ймовірність. Зрозуміло, що цей підхід неважко поширити на гексаедри і, навіть, на октаедри [3–4]. Ми не знайшли в публікаціях посилань на квадратично-кубічну модель Q10, хоча переконалися, що стандартний базис Q10 можна отримати класичним шляхом: методом оберненої матриці [5–7] або нематричним методом Тейлора [8]. Задачі побудови фізично адекватних та несумісних моделей Q10 виходять за рамки можливостей класичних методів. Саме тому ми пропонуємо КПМ. Зрозуміло, що несумісність базисів [9–11] треба уважно проаналізувати.

Мета дослідження

Мета дослідження – на прикладі серендипового елемента Q10 показати можливості КПМ-моделювання фізично адекватних і математично обґрунтованих моделей, включаючи несумісні. Виконати спеціальне тестування несумісних базисних функцій. Цікаво дізнатися про причину виникнення біфуркацій на міжелементних границях.

Викладення основного матеріалу дослідження

На рис. 1 зображено елемент Q10 (носії фінітних функцій форми), а також схема Паскаля, в якій відображені складові інтерполяційного полінома цього елемента.

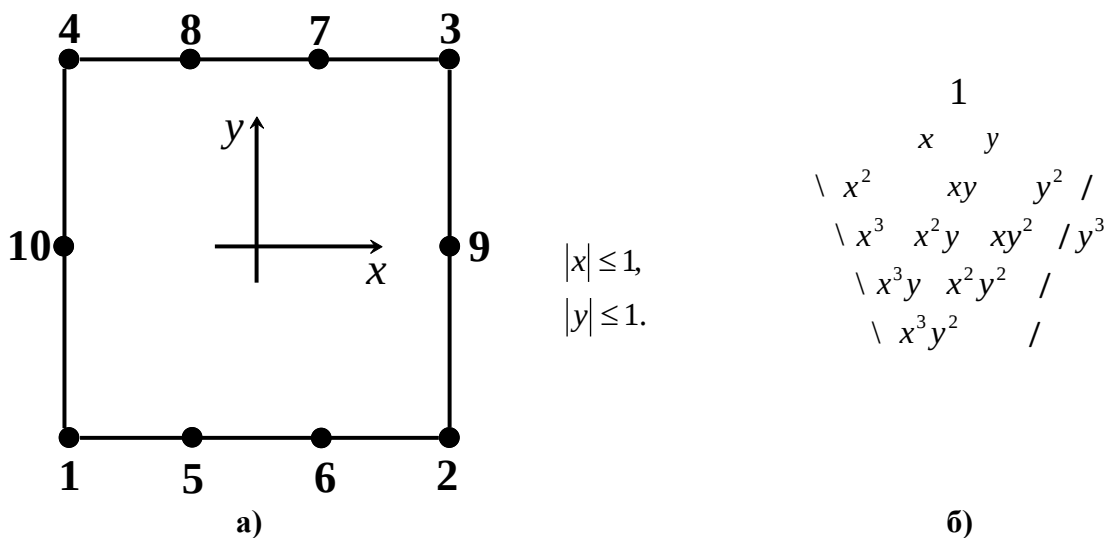


Рис. 1. а) мішаний серендипів елемент Q10;
б) схема Паскаля.

Нагадаємо, що мішана модель Q10 – це результат «схрещування» серендипових елементів Q8 і Q12. Гібридизація полягає у створенні базису із десяти функцій $N_i(x, y)$, які задовольняють умовам інтерполяційної гіпотези Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{10} N_i(x, y) = 1, \quad (1)$$

де i – номер функції, k – номер вузла.

Інтерполянт має вигляд

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{10} N_i(x, y) \cdot f_i, \quad (2)$$

де f_i – вузлові аплікати поверхні $f(x, y)$.

З геометричної точки зору ми будемо поверхню (2), яка проходить через десять фіксованих точок у 3D-просторі. Використовуючи схему Паскаля (рис. 1, б), прихильники матричної алгебри записують поліном з невизначеними коефіцієнтами:

$$f(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} x^3 y. \quad (3)$$

Лишається визначити коефіцієнти α_i .

На перший погляд здається, що задача розв'язується неоднозначно. Замість десятого монома $x^3 y$ можна спробувати мономи $x^2 y^2$ або $x^3 y^2$. Виявляється, що в останніх двох випадках визначник матриці 10x10 дорівнює нулю. Як бачимо, альтернативи відсутні. Це наслідки «жорсткого» математичного моделювання (термін академіка В. Арнольда). Аналогічні приклади теорії серендипових апроксимацій похитнули довіру до методу оберненої матриці. А в цьому випадку важко повірити, що існує одна і тільки одна поверхня, яка проходить через десять фіксованих точок у 3D-просторі. Альтернативні поверхні є, але треба відмовитись від матричної алгебри. Елегантний метод Тейлора [8] та рецепт конденсації Джордана не рятують ситуацію. Усі перелічені підходи закінчуються стандартним базисом Q10, який має неприродний (на думку О. Зенкевича [5]) спектр вузлових навантажень від одиничної масової сили. Щоб уявити повний базис Q10, достатньо знати лише три функції, наприклад,

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{32} (1-x)(1-y)(9x^2 - 8y - 9), \text{ аналогічно для } i = 2, 3, 4; \\ N_5(x, y) &= \frac{9}{32} (1-x^2)(1-3x)(1-y), \text{ аналогічно для } i = 6, 7, 8; \\ N_{10}(x, y) &= \frac{1}{2} (1-x)(1-y^2), \text{ аналогічно для } i = 9. \end{aligned} \quad (4)$$

Вузлове навантаження γ_i визначається як інтегральне середнє відповідної функції $N_i(x, y)$:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad (5)$$

де S – площа елемента.

Стандартний спектр має вигляд:

$$\gamma_i = -\frac{5}{48}, \text{ для } i=1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{9}{48}, \text{ для } i=5, 6, 7, 8; \quad \gamma_i = \frac{16}{48}, \text{ для } i=9, 10.$$

На рис. 2 зображені портрети ліній нульового рівня функцій $N_1(x, y)$ (перший рядок) та $N_5(x, y)$ для стандартної моделі Q10 і трьох модифікацій. Області від'ємних значень базисних функцій заштриховано. Функції $N_9(x, y)$, $N_{10}(x, y)$ лишаємо без змін. Вони придатні, як для стандартного базису (4), так і для модифікованих.

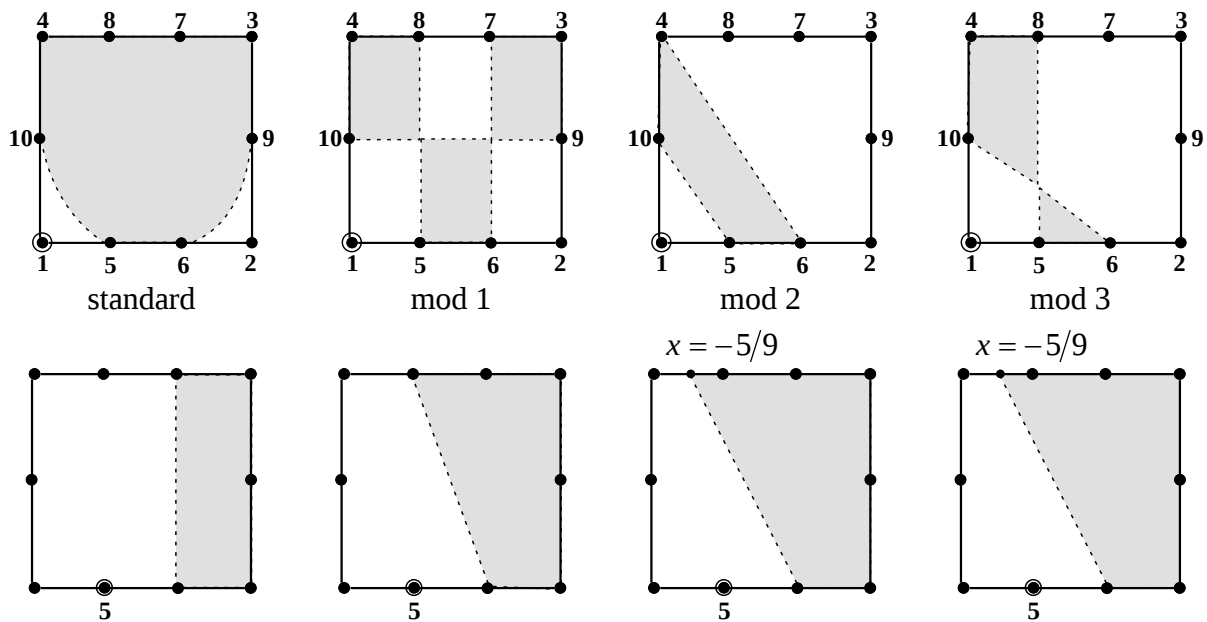


Рис. 2 Лінії нульового рівня $N_1(x, y)$ та $N_5(x, y)$ для стандартної моделі Q10 і трьох модифікацій.

Тобто, ми усуваємо феномен «гравітаційного відштовхування» у кутових вузлах стандартної моделі, змінюючи портрети ліній нульового рівня $N_1(x, y)$ і $N_5(x, y)$. У цій роботі ми свідомо використовуємо лише прямі лінії нульового рівня, щоб показати тісний зв'язок між квадратними елементами вищих порядків і простим трикутником (симплексом). Кусково-планарний метод формоутворення складних поверхонь успадкував геніальні ідеї Р. Куранта (1943 р.).

Кращим прикладом для більш докладного аналізу є mod 2. Ця модифікація не тільки ілюструє технологію КПМ, вона показує, як і чому виникають несумісні базиси.

Конструювання краще починати з $N_1(x, y)$. Квадрат потрібно поділити на трикутники (симплекси) із спільною вершиною у вузлі 1 $(-1; -1)$. Протилежні вузлу 1 сторони симплексів мають забезпечити нулі в решті вузлів Q10 (див. інтерполяційну гіпотезу (1)). Тепер на кожному симплексі відновлюємо лінійну функцію так, щоб усі трикутні фрагменти мали спільну вершину $(-1; -1; 1)$. Перелічимо трикутники із спільною вершиною у вузлі 1: $\Delta 1-2-3$, $\Delta 1-3-4$, $\Delta 1-6-4$, $\Delta 1-5-10$. На кожному симплексі відновлюємо трикутний фрагмент площини так, щоб апліката у вузлі 1 дорівнювала одиниці. Неважко зрозуміти, що в кожному симплексі ми маємо справу з барицентричною координатою Мьобіуса, яка асоціюється з вершиною 1. Ці формули в декартових координатах мають вигляд:

$$\Delta 1-2-3: z_1 = \frac{1}{2}(1-x); \quad \Delta 1-3-4: z_2 = \frac{1}{2}(1-y);$$

$$\Delta 1-6-4: z_3 = -\frac{1}{4}(3x+2y+1); \quad \Delta 1-5-10: z_4 = -\frac{1}{2}(3x+2y+3).$$

Пряме перемноження лінійних функцій дає «кутовий» поліном елемента mod 2:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(3x+2y+1)(3x+2y+3), \quad \gamma_1 = \frac{1}{16}.$$

«Проміжний» поліном $N_5(x, y)$ елемента mod 2:

$$N_5(x, y) = \frac{3}{32}(1-x^2)(1-y)(-9x-4y-1), \quad \gamma_5 = \frac{1}{48}.$$

Варто звернути увагу на $N_1(x, y)$. Тут вже з'явилися ієрархічні форми, наприклад, моном x^2y^2 і, навіть, заборонений моном y^3 (див. схему Паскаля). Ставлення до ієрархічних форм неоднозначне. З одного боку, ці мономи позитивно впливають на швидкість збіжності розв'язку. З іншого боку, присутність ієрархічних форм може викликати біфуркацію на міжелементній границі. Такі елементи називають несумісними. Тепер, коли з'явилася спеціальна процедура тестування, досвідчені фахівці рекомендують навчитися конструювати несумісні елементи [6, 7, 10]. Саме тому ми штучно створили біфуркацію в елементі mod 2 на границях $x = \pm 1$. Нижче ми покажемо, що mod 2 успішно витримує кускове тестування [11].

Щодо полінома $N_5(x, y)$, ми сподіваємося, що зацікавлені читачі самостійно сконструюють цей результат, спираючись на рис. 2 та інтерполяційну гіпотезу Лагранжа (1).

Тепер покажемо базисні функції mod 1 і mod 3.

«Кутова» базисна функція елемента mod 1:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y) \cdot y \cdot (1-9x^2), \quad \gamma_1 = \frac{1}{48}.$$

«Проміжна» функція mod 1:

$$N_5(x, y) = -\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(3x+y), \quad \gamma_5 = \frac{1}{16}.$$

Для mod 3:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(1+3x)(3x+4y+3), \quad \gamma_1 = \frac{1}{16}.$$

$$N_5(x, y) = \frac{3}{32}(1-x^2)(1-y)(-9x-4y-1), \quad \gamma_5 = \frac{1}{48}.$$

Завершує модельний ряд мішаних елементів Q10 іще один приклад з несумісною «кутовою» функцією:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{32}(1-x)(1-y)(3x+y+2)(3x+4y+3), \quad \gamma_1 = \frac{5}{48}.$$

$$N_5(x, y) = -\frac{9}{32}(1-x^2)(1-y)(3x+y), \quad \gamma_5 = \frac{1}{16}.$$

$$N_{10}(x, y) = \frac{1}{8}(1-x)(1-y^2)(1-3x), \quad \gamma_{10} = \frac{1}{6}.$$

Поліном $N_{10}(x, y)$ відрізняється від стандартного. В цьому елементі (mod 4), як і в mod 2, біфуркація спостерігається на границях $x = \pm 1$. Проаналізуємо поведінку сумісної і несумісної функцій $N_1(x, y)$ на границі $x = -1$.

Для сумісної функції маємо:

$$N_1(-1, y) = \frac{1}{2}(y-1) \cdot y.$$

На границі функція змінюється за законом квадратичної параболи.
Для несумісної функції:

$$\overline{N}_1(-1, y) = -\frac{1}{4}(y-1)^2 \cdot y.$$

Функція змінюється за законом кубічної параболи.

Міжелементна неперервність порушена, виникає «стрибок»

$$\varphi(y) = N_1(-1; y) - \overline{N}_1(-1, y) = \frac{1}{4}(y^3 - y).$$

Рис. 3 ілюструє біфуркацію і «стрибок» на границі $x = -1$ між сумісним і несумісним елементами Q10.

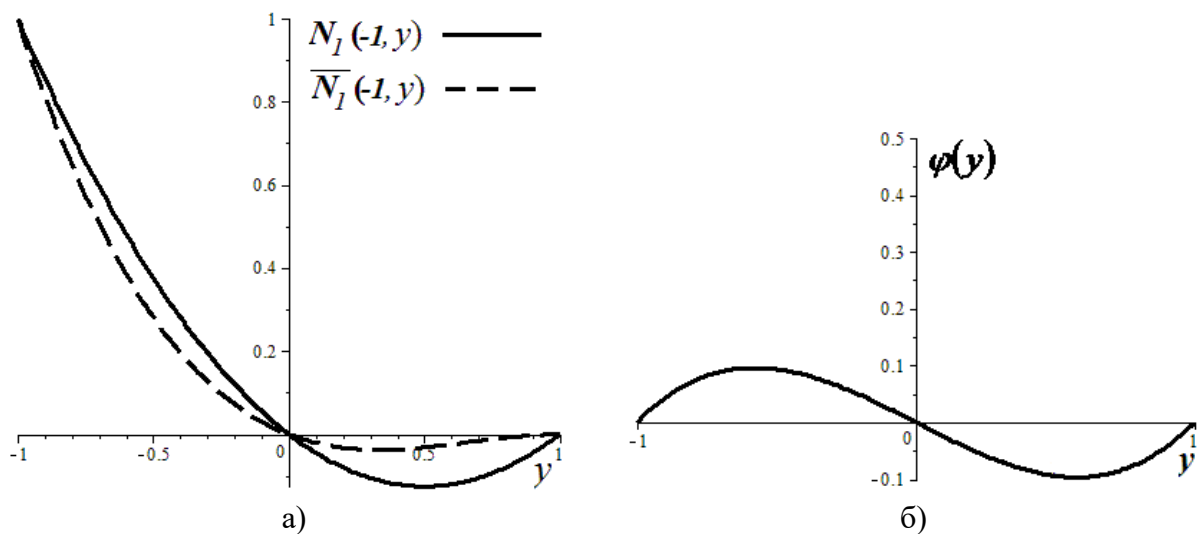


Рис. 3. а) біфуркації поверхонь $N_1(x, y)$ на границі $x = -1$;
б) «стрибок» $\varphi(y)$.

Результати кускового тестування несумісних моделей залежать від характеру «стрибка» [6, 10, 11]. В наших прикладах $\text{mod } 2$ і $\text{mod } 4$ ми маємо справу з ортогональним поліномом (рис. 3, б). Дамо просту і зрозумілу інтерпретацію критерію Айронса-Раззака: несумісна модель успішно витримує кускове тестування, якщо інтеграл на $[-1; 1]$ від «стрибка» дорівнює нулю. Проста і зрозуміла інтерпретація критерію Паттерсона [6] для $2D$ -задач: несумісний елемент успішно витримує кускове тестування, якщо «стрибок» на $[-1; 1]$ як мінімум двічі набуває значення нуля. На рис. 3, б графік перетинає Oy тричі. Цікаво визначити, в яких точках «стрибок» має екстремальні відхилення від нуля: $\phi'(y) = 0$, звідки $y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Це точки, в яких графік полінома Лежандра другого порядку перетинає Oy . Саме в цих точках Гаусс розташував вузли квадратури підвищеної точності.

Висновки

Аналіз отриманих результатів дає підстави вважати КПМ одним із самих простих, зрозумілих і наочних методів відновлення функцій двох аргументів. У методі скінченних елементів цей підхід однаково ефективний на сумісних і несумісних елементах. Однією із причин виникнення феномена несумісності є наявність кратних нулів у вузлах інтерполяції. У наведених прикладах $\text{mod } 2$ і $\text{mod } 4$ двократний нуль свідомо «закладено» у вузол 4 $(-1; 1)$. Для прямого геометричного конструювання серендипових елементів не обов'язково обмежуватися лише прямими лініями на портретах нульового рівня.

Список використаної літератури

1. Wachspress E. I. A Rational Finite Element Basis. Academic Press. New York, 1975. 344 p.
2. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. Ивано-Франковск: Ивано-Франковский ин-т нефти и газа, 1982. Деп. в ВИНТИ 18.03.82, № 1213. 9 с.
3. Хомченко А. Н., Мотайло А. П. Две модели кусочно-линейной интерполяции на октаэдре. *Проблеми інформаційних технологій*. 2011. №1. С. 47–50.
4. Астионенко И. А., Литвиненко Е. И., Хомченко А. Н. Вероятностная природа кусочно-планарной аппроксимации. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2014. №5 (176). Вып. 34. С. 142–149.
5. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1971. 571 p.
6. Norri D. H., de Vries G. An Introduction to Finite Element Analysis. London: Academic Press, 1978. 301 p.
7. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1973.
8. Taylor R. L. On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *J. Num. Meth. Eng.* 1972. Vol. 4. № 1. P. 17–22.
9. Brown J. H. Nonconforming Finite Elements and Their Applications. (M. Sc. Thesis), Dundee: University of Dundee, 1975.
10. Irons B. M. The Patch Test for Engineers. *Invited paper, Symposium at the Atlas Computing Laboratory*. (U.K., Didcot, March 26-28, 1974). P. 167–192.

11. Хомченко А. Н., Литвиненко О. І., Астіоненко І. О. Когнітивно-графічний аналіз ієрархічних базисів скінченних елементів. Монографія. Херсон: ОЛДІ-плюс, 2019. 260 с.

References

1. Wachspress, E. I. (1975). A Rational Finite Element Basis. Academic Press. New York.
2. Homchenko, A. N. (1982). Nekotoryie veroyatnostnyie aspektyi MKE. Ivano-Frankovsk: Ivano-Frankovskiy in-t nefti i gaza. Dep. v VINITI 18.03.82, № 1213. 9 s.
3. Homchenko, A. N., & Motaylo, A. P. (2011). Dve modeli kusochno-lineynoy interpoliyatsii na oktaedre. Problemy Informatsiynih tehnologiy. **1**, 47–50.
4. Astionenko, I. A., Litvinenko, E. I., & Homchenko, A. N. (2014). Veroyatnostnaya priroda kusochno-planarnoy approksimatsii. *Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika.* **5** (176), 34, 142–149.
5. Zienkiewicz, O. C. (1971). The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill.
6. Norri D. H., de Vries G. (1978). An Introduction to Finite Element Analysis. London: Academic Press.
7. Strang, G., & Fix, G. J. (1973). An Analysis of the Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
8. Taylor, R. L. (1972). On the Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis. *J. Num. Meth. Eng.* **4**, 1, 17–22.
9. Brown, J. H. (1975). Nonconforming Finite Elements and Their Applications. (M. Sc. Thesis), Dundee: University of Dundee
10. Irons, B. M. (1974). The Patch Test for Engineers. *Invited paper, Symposium at the Atlas Computing Laboratory.* (U.K., Didcot, March 26-28, 1974), pp. 167–192.
11. Khomchenko, A. N., Lytvynenko, O. I., Astionenko, I. O. (2019). Kohnityvno-hrafichnyi analiz iierarkhichnykh bazysiv skinchennykh elementiv. Monohrafiia. Kherson: OLDI-plus.

Хомченко Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету ім. П. Могили, e-mail: khan@chmnu.edu.ua, ORCID: 0000-0002-5053-388X.

Тендітна Наталія Володимирівна – старший викладач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: nten.hfnuk@gmail.com.

Литвиненко Олена Іванівна – к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, e-mail: mmkntu@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9890-6959.

Дудченко Олег Миколайович – к.т.н., доцент, заступник директора з навчальної роботи Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова ((0552) 26-30-09, kbnuos@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7724-0892.

Астіоненко Ігор Олександрович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету, e-mail: astia@ukr.net, ORCID: 0000-0002-5831-6353.