

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

М. Я. Хлопенко, І. С. Білюк, В. В. Шевченко

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТАМИ

**Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України*



Миколаїв
НУК
2013

УДК 62-83(075.8)

ББК 32.965.3я73

X 58

Авторський колектив:

М. Я. Хлопенко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматики Національного університету кораблебудування (НУК) імені адмірала Макарова;

І. С. Білюк, кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматики НУК;

В. В. Шевченко, кандидат технічних наук, професор НУК, завідувач кафедри автоматики та електроустаткування Херсонської філії НУК

Рецензенти:

К. В. Дубовенко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри електро-технологій і електропостачання Миколаївського державного аграрного університету;

О. І. Вовченко, доктор технічних наук, професор, директор Інституту імпульсних процесів і технологій НАН України;

А. А. Ставинський, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри суднових електроенергетичних систем НУК

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-9804 від 18.06.2012 р.)*

Хлопенко М. Я.

X58 Оптимальне керування об'єктами : навчальний посібник / М. Я. Хлопенко, І. С. Білюк, В. В. Шевченко. – Миколаїв : НУК, 2013. – 172 с.
ISBN 978-966-321-245-6

Розроблено методологію, наведено методи та приклади аналізу і синтезу оптимальних та з бажаними показниками якості детермінованих і стохастичних систем керування об'єктами різноманітного призначення.

Призначено для студентів і магістрантів, які навчаються за напрямом "Електромеханіка" спеціальностей 8.05070204 "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод" і 8.05070202 "Електричні системи і комплекси транспортних засобів". Також може бути корисний дипломникам, студентам інших спеціальностей, інженерам та фахівцям, які займаються проектуванням сучасних систем керування.

УДК 62-83(075.8)

ББК 32.965.3я73

© Хлопенко М. Я., Білюк І. С.,
Шевченко В. В., 2013

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2013

ISBN 978-966-321-245-6

ПЕРЕДМОВА

Даний навчальний посібник написано на основі лекцій, прочитаних завідувачем кафедри автоматики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова, доктором технічних наук, професором М.Я. Хлопенко студентам, які навчаються за спеціальностями 8.05070204 "Електромеханічні системи автоматизації та електропривод" та 8.05070202 "Електричні системи і комплекси транспортних засобів". Посібник присвячений теорії оптимального керування детермінованих і стохастичних систем та її застосуванню. Велика увага приділена класичним варіаційним методам Ейлера–Лагранжа та Гамільтона–Якобі, некласичним варіаційним методам – динамічному програмуванню Р. Беллмана та принципу максимуму Л.С. Понтрягіна, а також оптимальній фільтрації Вінера і фільтрам Калмана–Б'юсі. У посібнику детально розглядається метод простору станів, заснований на більш абстрактній теорії систем та методах аналізу і синтезу, що мають більшу глибину та дозволяють розв'язувати дещо складніші задачі у порівнянні із задачами, розв'язуваними класичними методами.

Навчальний посібник складається з 17 розділів, що логічно пов'язані один з одним.

Розділ 1 є введенням до теорії оптимального керування. Він знайомить з основними поняттями, простором станів та основною задачею теорії оптимального керування.

У розділах 2 та 3 викладено класичні варіаційні методи Ейлера–Лагранжа й Гамільтона–Якобі та отримано на їх основі розв'язки практичних задач академічного характеру.

Розділи 4 та 5 присвячено некласичним варіаційним методам – методу динамічного програмування Р. Беллмана та принципу максимуму Л.С. Понтрягіна. У них наводяться класичні приклади застосування цих методів до задач аналітичного конструювання регуляторів та швидкодії матеріальної точки.

У розділах 6 та 7 дається опис лінійних систем у просторі станів диференціальними рівняннями в нормальній формі Коші. На конкретному прикладі системи, що задана структурною схемою, розглядається перехід від простору сигналів до простору станів. Вводиться поняття матричної передавальної функції системи. Викладаються методи синтезу оптимальних лінійних систем за квадратичним показником якості.

У розділах 8 та 9 наведено поняття керованості та спостережуваності лінійних систем, перетворення подібності і канонічні форми керованості та спостережуваності Луенбергера.

Розділи 10 і 11 присвячені модальному керуванню зі зворотним зв'язком за станом. У них викладається метод та алгоритм синтезу модального регулятора з бажаною характеристикою перехідного процесу, а також наводяться формула Аккермана та стандартні характеристичні поліноми замкнутих систем для визначення коефіцієнтів модального регулятора. На конкретному прикладі виконаний синтез коефіцієнтів модального регулятора з бажаною характеристикою перехідного процесу.

У розділі 12 розглянуто методи синтезу спостерігачів стану повного та пониженого порядків, принцип роздільності, алгоритм та приклад синтезу модального регулятора зі спостерігачем стану.

У розділі 13 викладаються результати застосування теорії модального керування та спостерігачів стану до задачі стабілізації руху електропривода з керованою електромагнітною муфтою.

Розділи 14–16 присвячені аналізу та синтезу оптимальних систем керування при випадкових збуреннях. Вони базуються на матеріалах навчального посібника [3]. Основна увага приділяється оптимальній фільтрації та синтезу фільтрів Вінера та Калмана–Б'юсі.

Розділ 17 дає уявлення про настройку регуляторів системи підпорядкованого регулювання комплектного електропривода на модульний та симетричний оптимуми.

Навчальний посібник може бути корисним не тільки студентам, але й проектувальникам та творцям оптимальних систем керування. Він може бути спеціальним курсом для студентів та аспірантів, які вивчають теорію оптимального керування.

Автори висловлюють щиру подяку директору Інституту імпульсних процесів та технологій НАН України доктору технічних наук, професору О.І. Вовченко, завідувачу кафедри суднових електроенергетичних систем Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова, доктору технічних наук, професору А.А. Ставинському та завідувачу кафедри електротехнологій і електропостачання Миколаївського державного аграрного університету, доктору технічних наук, професору К.В. Дубовенко за ряд корисних зауважень при рецензуванні рукопису.

1. ВВЕДЕННЯ В ПРОСТІР СТАНУ. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

1.1. Загальні відомості

У теорії керування в загальному випадку розглядаються системи (об'єкти), на поведінку яких можна впливати (якими можна керувати) шляхом зміни параметрів керування. Останні обираються з урахуванням певних обмежень. Теоретичний та практичний інтерес становить оптимальне керування.

Метою теорії оптимального керування є розробка методу такого вибору параметрів керування, за якого буде досягнуто оптимум деякого функціонала, наприклад: мінімум часу, максимум корисності, мінімум витрат та ін.

В електромеханіці, наприклад, задачі такого роду виникають при синтезі оптимальних систем керування електроприводів різноманітного призначення. Для їх розв'язання застосовуються методи варіаційного числення і простору стану. Вони суттєво спрощують розв'язання оптимальних задач.

1.2. Поняття про простір стану

У загальному випадку об'єкт керування може бути поданий у вигляді структурної схеми (рис. 1.1).

Уся сукупність параметрів, яка визначає стан об'єкта на даній структурній схемі, поділена на такі групи:

1. Вхідні параметри (зовнішні дії):

а) керуючі $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$;

б) випадкові збурювальні $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$.

2. Вихідні параметри:

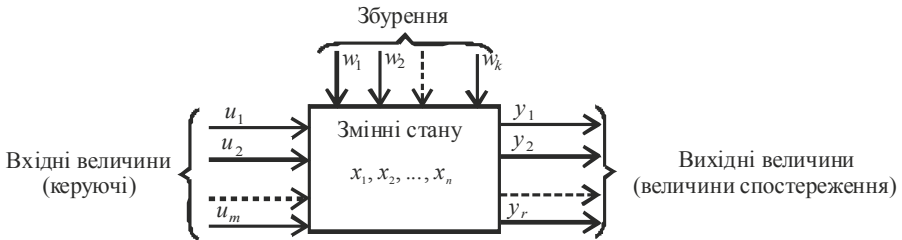
а) спостереження $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)^T$;б) проміжні $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Рис. 1.1. Структурна схема об'єкта керування

Проміжні параметри однозначно визначають стан керуючого об'єкта. Їх також називають *змінними стану* або *фазовими координатами*.

Множини всіх значень компонент, які мають вектори $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ та $\bar{y}$, утворюють відповідно простір стану (фазовий простір), простір керування, простір збурень (стохастичний простір) та простір спостережень.

Стан об'єкта в кожний момент часу можна зобразити у вигляді точки n -вимірного простору, яка є кінцем фазового вектора $\bar{x}$, що виходить з початку координат. Цю точку називають *зображувальною точкою*.

При русі об'єкта зображувальна точка описує в n -вимірному просторі деяку криву – *фазову траєкторію*. Для механічних об'єктів фазова траєкторія має бути неперервною функцією часу.

1.3. Загальна постановка задачі оптимального керування

Поведінка об'єкта керування для широкого класу задач може бути описана системою нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t];$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t];$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t],$$

або у векторній формі:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}[\bar{x}(t), \bar{u}(t), t], \quad (1.1)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – n -вимірний вектор стану (фазовий вектор), який визначає стан системи; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ – m -вимірний керуючий вектор; $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ – n -вимірна векторна функція; t – час.

Звичайно задача оптимального керування формулюється таким чином.

Дано:

1. Рівняння стану об'єкта керування (1.1).
2. Система граничних умов, накладених на змінні стану в початковий t_0 та кінцевий t_f моменти часу:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(t_f) = \bar{x}_f, \quad (1.2)$$

де $\bar{x}_0, \bar{x}_f$ – задані множини.

Вектор $\bar{x}(t_0)$ називається *лівим*, а вектор $\bar{x}(t_f)$ – *правим кінцем* фазової траєкторії.

У залежності від вигляду граничних умов (1.2) розрізняють задачі з фіксованими кінцями (кожна множина $\bar{x}_0$ і $\bar{x}_f$ складається з однієї точки, а всі фазові координати в початковий і кінцевий моменти часу задані, тобто зафіксовані), рухомим правим кінцем (коли $\bar{x}_f$ складається більш ніж з однієї точки), з рухомим лівим кінцем ($\bar{x}_0$ складається більш ніж з однієї точки) і рухомими кінцями (обидва кінці рухомі).

3. Система обмежень, накладених на змінні стану та керування:

$$\bar{x}(t) \in \bar{x}_t, \quad \bar{u}(t) \in \bar{U}_t, \quad (1.3)$$

де $\bar{x}_t, \bar{U}_t$ – деякі задані множини.

Множина $\bar{U}_t$ називається допустимим обмеженням.

4. Показник якості (критерій оптимальності) або функціонал

$$F = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt, \quad (1.4)$$

де g_0, f_0 – скалярні функції.

Видно, що *функціонал* – це така функція, у якої незалежною змінною є інша функція.

Треба знайти таке допустиме керування $\bar{u}(t)$, при якому $F \rightarrow \max (\min)$.

Керування, що є розв'язком сформульованої задачі, називають оптимальним, а відповідну йому траєкторію – оптимальною.

У залежності від вигляду показника якості F звичайно вирізняють три класи задач оптимального керування:

1) задача Майєра, або задача термінального керування –

$$F = F_1, \quad F_1 = g_0(\bar{x}(t_f), t_f);$$

2) задача Лагранжа –

$$F = F_2, \quad F_2 = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt;$$

3) задача Больца –

$$F = F_1 + F_2.$$

Задача (1.1)–(1.4) є так званою *неавтономною* задачею оптимального керування, оскільки права частина (1.1) і підінтегральна функція в показнику якості (1.4) явно залежать від часу. Якщо вказані функції в (1.1) і (1.4) явно не залежать від часу, то задачу (1.1)–(1.4) називають *автономною*.

Неавтономна задача звичайно зводиться до автономної, якщо взяти час t за змінну стану x_{n+1} [8].

Інтегрування у функціоналі Лагранжа або Больца може здійснюватися за різними інтервалами часу. Залежно від цього розрізняють задачі з фіксованим та нефіксованим часом. У задачах з фіксованим часом початковий t_0 і кінцевий t_f моменти часу зафіксовані, а в задачах з нефіксованим часом хоча б один з моментів часу t_0 і t_f не фіксований.

2. МЕТОД ЕЙЛЕРА–ЛАГРАНЖА

2.1. Загальні відомості

Знаходження екстремуму функціонала (показника якості) належить до варіаційних задач [1, 9], які мають велике значення в теорії оптимального керування.

Уперше варіаційна задача (задача про лінію найшвидшого спуску, або про брахістохрону) була поставлена у 1696 році Іоганном Бернуллі.

У XVIII столітті Леонардом Ейлером та Жозеф Луї Лагранжем були розроблені загальні методи розв'язання широкого класу варіаційних задач.

Фундаментальна теорія варіаційного числення остаточно сформувалася у XIX столітті. Нижче викладено математичні методи даної теорії для найпростіших показників якості.

2.2. Рівняння Ейлера

Розглянемо функціонал

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x, \dot{x}) dt,$$

де точка означає похідну за часом t .

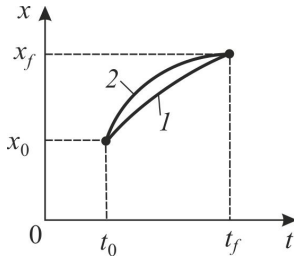
Серед допустимих траєкторій $x = x(t)$, які проходять через точки (t_0, x_0) та (t_f, x_f) , де $x_0 = x(t_0)$ та $x_f = x(t_f)$, знайдемо ту, для якої функціонал має екстремальне значення.

Нехай $x = x(t)$ є такою траєкторією (рис. 2.1).

Замінімо її іншою близькою траєкторією:

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \eta,$$

де ε – достатньо мала величина; $\eta = \eta(t)$ – довільна функція, яка перетворюється в нуль на кінцях проміжку $[t_0; t_f]$:



$$\eta(t_0) = \eta(t_f) = 0.$$

Тоді

$$F = F(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x + \varepsilon\eta, \dot{x} + \varepsilon\dot{\eta}) dt. \quad (2.1)$$

Рис. 2.1. Екстремальна 1 та близька до неї 2 траєкторії

Продиференціюємо за ε :

$$\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) dt. \quad (2.2)$$

Проінтегруємо другий доданок, який стоїть під знаком інтеграла, за частинами:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} dt = \eta \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} dt = - \int_{t_0}^{t_f} \eta \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} dt. \quad (2.3)$$

Підставимо вираз (2.3) в (2.2):

$$\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \eta \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right] dt.$$

Якщо функція $x(t)$ дає екстремум інтегралу (2.1), то $\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$.

Тому на *екстремалі* (так називається оптимальна траєкторія)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (2.4)$$

Це рівняння отримане Ейлером і носить його ім'я. Воно виражає необхідну умову екстремуму функціонала. Необхідної умови ще не достатньо для визначення максимуму або мінімуму функціонала. Потрібна

додаткова умова. Вона визначається за другою похідною $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}$. Якщо

ця похідна додатна, то має місце мінімум, а якщо від'ємна, то буде мак-

симум. Таким чином, визначивши похідну $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}$, можна одержати на-

ступні умови Лежандра: для максимуму $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \leq 0$, а для мінімуму

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \geq 0.$$

У випадку декількох незалежних змінних $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ функ-

ціонал $F = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt$, а рівняння Ейлера мають

вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Якщо функціонал залежить від похідних вищого порядку, тобто

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) dt,$$

то йому відповідає рівняння Ейлера–Пуассона:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right) - \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial f}{\partial \ddot{\ddot{x}}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}} \right) = 0.$$

Приклад 1. На якій кривій може досягатися екстремум функціонала

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\dot{x})^2 - x^2 \right] dt; \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Розв'язання. Рівняння Ейлера (2.4) має вигляд $\ddot{x} + x = 0$. Його загальним розв'язком є $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Використовуючи граничні умови, знаходимо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Таким чином, екстремум функціонала досягається при $x = \sin t$.

2.3. Задачі з рухомими кінцями. Умови трансверсальності

Трохи складніше розв'язуються задачі, коли граничні точки не закріплені і можуть знаходитися на деяких поверхнях чи лініях [7, 9]. Рівняння Ейлера для таких задач доповнюються умовами трансверсальності. Зміст їх полягає у наступному. Коли розглядалося рівняння Ейлера, то граничні точки були закріплені. Така задача називається *задачею із закріпленими кінцями*. З граничних умов визначалися сталі інтегрування, і рівняння Ейлера мало єдиний розв'язок. Наочно це показує наведений

вище приклад. Якщо екстремаль повинна проходити між поверхнями чи лініями, то ніяких визначених граничних точок не задається. Тому для визначення сталих інтегрування потрібно мати додаткові умови – умови трансверсальності.

Обмежимося випадком розташування кінців екстремалі $x(t)$ на гладких лініях $x = \varphi_0(t)$ і $x = \varphi_f(t)$ (рис. 2.2).

На кінцях екстремалі $x(t)$ в точках її перетину з кривими $x = \varphi_0(t)$ і $x = \varphi_f(t)$ повинні виконуватися наступні умови транс-

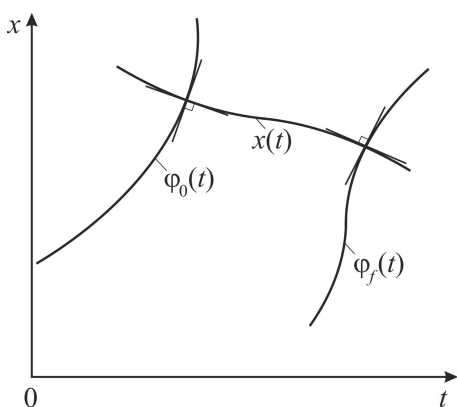


Рис. 2.2. Розташування кінців екстремалі $x(t)$ на гладких лініях $x = \varphi_0(t)$ і $x = \varphi_f(t)$

версальності:

$$f + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\dot{\phi}_0 - \dot{x}) = 0 \text{ при } t = t_0;$$

$$f + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(\dot{\phi}_f - \dot{x}) = 0 \text{ при } t = t_f.$$

В окремих випадках умови трансверсальності мають такий вигляд:

$$\dot{\phi}_0(t_0)\dot{x}(t_0) = -1;$$

$$\dot{\phi}_f(t_f)\dot{x}(t_f) = -1.$$

Вони виражають ортогональність (взаємну перпендикулярність) дотичних у точках перетину гладких кривих $x = \phi_0(t)$ і $x = \phi_f(t)$ з екстремаллю $x(t)$.

Таким чином, для знаходження екстремалі необхідно визначити загальний розв'язок $x = x(t)$ рівняння Ейлера (2.4) та за умовами трансверсальності знайти частинний розв'язок.

2.4. Рівняння Ейлера–Лагранжа

Розглянемо задачу Лагранжа.

Дано:

$$\text{Цільова функція } F = \int_{t_0}^{t_f} f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt \rightarrow \max(\min), \text{ де } \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T;$$

обмеження $g_i(\bar{x}, \bar{u}, t) = 0, i = \overline{1, m}$.

Треба знайти векторну функцію $\bar{x}(t)$, яка дає максимум (мінімум) інтегралу F .

Уведемо множники Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Запишемо функцію Лагранжа

$$L = L(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i. \quad (2.5)$$

Тоді

$$F = \int_{t_0}^{t_f} L dt \rightarrow \max (\min).$$

Цьому функціоналу відповідають рівняння Ейлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Зазначимо, що у задачі Лагранжа обмеження можуть мати вигляд

$$\int_{t_0}^{t_f} g_i(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt = b_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Такі обмеження називають *ізопериметричними*, а відповідну варіаційну задачу – *ізопериметричною*.

Можна довести, що за наявності ізопериметричних обмежень функція Лагранжа має вигляд (2.5).

2.5. Канонічні рівняння Ейлера–Лагранжа

Розглянемо загальну задачу оптимального керування із закріпленими кінцями і фіксованим часом (задачу Лагранжа):

$$f_j(\bar{x}, \bar{u}, t) - \dot{x}_j = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.6)$$

$$g_i(\bar{x}, \bar{u}, t) = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad (2.7)$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \quad x_j(t_f) = x_j^f, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.8)$$

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \rightarrow \min, \quad (2.9)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{j=1}^n \psi_j (f_j - \dot{x}_j) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i,$$

де $\psi_0, \psi_j, \lambda_i$ – множники Лагранжа, при цьому $\psi_j = \psi_j(t)$, $j = \overline{1, n}$;
 $\psi_0 = \text{const}$, $\lambda_i = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$.

Одержимо при $\psi_0 \leq 0$ функціонал

$$\tilde{F} = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{u}, \bar{\psi}, \bar{\lambda}, t) dt \rightarrow \max,$$

де $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$.

Тут функціонал $\tilde{F}$ максимізується, хоча функціонал F мінімізується, оскільки множник ψ_0 при f_0 , або, що теж саме, при F , у неособливому випадку береться від'ємним ($\psi_0 = -1$). В особливому випадку ($\psi_0 = 0$)

функціонал $\tilde{F}$ не залежить від F .

Запишемо рівняння Ейлера–Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 0, & j = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial L}{\partial u_s} = 0, & s = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Уведемо функцію Гамільтона

$$H = \sum_{j=0}^n \psi_j f_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i.$$

Якщо f_0 стала, то у функції Гамільтона її звичайно не враховують. Тепер запишемо функцію Лангранжа у вигляді

$$L = H - \sum_{j=1}^n \psi_j \dot{x}_j.$$

Отже, система (2.10) набуває вигляду

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_s} = 0, \quad s = \overline{1, r}. \quad (2.12)$$

Вона називається *канонічними рівняннями Ейлера–Лагранжа*. Рівняння (2.11) називають *спряженою системою*, а (2.12) – умовами *стаціонарності*.

Умови стаціонарності (2.12) показують, що на екстремалі гамільтоніан H розглядається при кожному фіксованому $t \in [t_0; t_f]$ як функція від керування $\bar{u}$ і задовольняє необхідну умову екстремуму. На оптимальній траєкторії гамільтоніан H як функція від керування $\bar{u}$ досягає максимуму (або точніше верхньої межі) при оптимальному керуванні.

Доведено [9], що рівняння Ейлера–Лагранжа справедливі не тільки для неперервних функцій u_s ($s = \overline{1, r}$) і гладких змінних $x_j = x_j(t)$ ($j = \overline{1, n}$), але і для *кусково-неперервного* керування u_s ($s = \overline{1, r}$) та *кусково-гладких* фазових координат $x_j = x_j(t)$ ($j = \overline{1, n}$).

Кусково-неперервна функція має розриви першого роду. Між цими розривами функція неперервна, але може мати зломи. Кусково-гладка функція відрізняється від кусково-неперервної тим, що в інтервалах неперервності має неперервні похідні першого порядку.

Тепер сформулюємо *правило множників Лагранжа*: якщо допустима пара $(\bar{u}, \bar{x})$ є розв'язком задачі оптимального керування (2.6)–(2.9), то знайдуться такі нерівні одночасно нулю множни-

ки Лагранжа, що ця пара задовольняє рівняння Ейлера–Лагранжа (2.11) і (2.12).

Згідно з цим правилом, щоб знайти оптимальне керування та оптимальну траєкторію, слід розв'язати систему рівнянь (2.6), (2.7), (2.11) і (2.12) за крайових умов (2.8). Рівняння Ейлера–Лагранжа отримані за умови, що вектор керування $\bar{u}(t)$ є неперервною функцією, а траєкторія $\bar{x}(t)$ гладка на проміжку $[t_0; t_f]$. Правило множників Лагранжа виконується і тоді, коли $\bar{u}(t)$ належить до кусково-неперервних функцій, тобто таких, в яких кожна компонента на відрізку визначення має скінченну кількість точок розриву першого роду, а $\bar{x}(t)$ належить до кусково-гладких функцій, похідні яких кусково-неперервні в інтервалах неперервності. Якщо оптимальне керування $\bar{u}(t)$ має розрив першого роду в якихось точках (ці точки називають кутовими), то воно і відповідна йому траєкторія $\bar{x}(t)$ мають задовольняти вказані раніше рівняння лише в точках неперервності керування. У кутових точках мають виконуватися умови Вейєрштрасса–Ердмана:

$$\psi^- = \psi^+; \quad H^- = H^+,$$

де індекси "–" і "+" означають ліву та праву межі відповідних функцій.

Відмітимо, що рівняння Ейлера–Лагранжа є лише необхідними умовами, тобто будь-який розв'язок початкової задачі є екстремаллю, але не кожна екстремаль, що задовольняє граничні умови, може бути розв'язком. Проте якщо розв'язок задачі існує й екстремаль, що задовольняє граничні умови, єдина, то ця екстремаль і буде розв'язком.

Задача. Розглянемо задачу обертання вала електродвигуна на заданий кут при мінімальній витраті енергії:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0; \quad F = \int_0^1 u^2 dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Розв'язання. Функція Гамільтона має вигляд

$$H = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \psi_0 = -1.$$

Використовуючи систему рівнянь Ейлера–Лагранжа (2.11) і (2.12), знаходимо

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1; \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi_2 = 0.$$

Проінтегруємо цю систему:

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2, \quad u = \psi_2 / 2 = (-C_1 t + C_2) / 2.$$

Знаходимо

$$x_2 = -C_1 t^2 / 4 + C_2 t / 2 + C_3, \quad x_1 = -C_1 t^3 / 12 + C_2 t^2 / 4 + C_3 t + C_4.$$

Використовуючи крайові умови, отримуємо

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_2 = 12, \quad C_1 = 24.$$

Для оптимальних керування та фазової траєкторії маємо

$$u^*(t) = 6(1 - 2t), \quad x_1^*(t) = t^2(3 - 2t), \quad x_2^*(t) = 6t(1 - t).$$



3. МЕТОД ГАМІЛЬТОНА–ЯКОБІ

3.1. Рівняння Гамільтона–Якобі

Перейдемо до виводу рівняння Гамільтона–Якобі, яке встановлює зв'язок між задачею інтегрування канонічної системи рівнянь Ейлера–Лагранжа та інтегруванням одного рівняння в частинних похідних з багатьма невідомими та дозволяє розв'язувати задачі неперервного оптимального керування в залежності від фазових координат.

Розглянемо систему, яка описується диференціальними рівняннями у нормальній формі:

$$\dot{x}_j = f_j(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad j = \overline{1, n}.$$

Запишемо критерій оптимальності:

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt. \quad (3.1)$$

Потрібно знайти таке неперервне керування $\bar{u}(\bar{x}, t)$ ($t_0 \leq t \leq t_f$), яке забезпечує переведення системи з початкового стану $\bar{x}(t_0)$ в кінцевий $\bar{x}(t_f)$ і надає мінімум інтегралу (3.1).

Нехай $\bar{u}^*(\bar{x}, t)$ – керування, яке дає мінімум критерію оптимальності (3.1) та якому відповідає фазова траєкторія $\bar{x}(t)$.

Уведемо інтегральну функцію

$$V(\bar{x}, t) = - \int_t^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}^*(\bar{x}, t), t) dt$$

зі змінною нижньою межею t .

Будемо вважати функцію $V(x, t)$ неперервною разом зі своїми частинними похідними до другого порядку включно на відріжку часу $[t_0; t_f]$.

За правилом диференціювання функції зі змінною верхньою межею маємо

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} = f_0(\bar{x}, \bar{u}^*, t). \quad (3.2)$$

Згідно з правилом диференціювання складної функції знаходимо

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Позначимо

$$\nabla V = \text{grad } V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right);$$

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1, \frac{dx_2}{dt} = f_2, \dots, \frac{dx_n}{dt} = f_n; \bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Тоді

$$\frac{dV(\bar{x}, t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla V \cdot \bar{f}^T. \quad (3.3)$$

Прирівнюємо праві частини виразів (3.2) і (3.3). Тоді отримаємо рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial t} - f_0 + \nabla V \cdot \bar{f}^T = 0. \quad (3.4)$$

Уведемо функцію Гамільтона

$$H = -f_0 + \bar{\Psi}^T \cdot \bar{f}^T,$$

де $\bar{\Psi}^T = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ – n -вимірний вектор множників Лагранжа.

Припустимо, що виконується рівність

$$\bar{\Psi}^T = \nabla V, \quad (3.5)$$

де $\Psi_j = \frac{\partial V}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$.

Тоді

$$H = -f_0 + \nabla V \cdot \bar{f}^T. \quad (3.6)$$

Підставимо вираз (3.6) в рівняння (3.4). Тоді отримаємо *рівняння Гамільтона–Якобі*

$$H + \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (3.7)$$

Доведемо рівність (3.5). Для цього скористаємося спряженою системою (2.11):

$$\dot{\Psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.8)$$

Диференціюємо (3.5) за t , а (3.7) за x_j :

$$\dot{\Psi}_j = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_j}.$$

Підставимо ці похідні в спряжену систему (3.8). Тоді отримаємо

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x_j}.$$

Згідно з теоремою Шварца про мішані похідні ця рівність має місце, якщо мішані похідні неперервні. Тому вона виконується на відрізку часу $[t_0; t_f]$. Таким чином, рівність (3.5) доведено.

3.2. Процедура розв'язання задачі за підходом Гамільтона–Якобі

За методом Гамільтона–Якобі процедура розв'язання задачі неперервного оптимального керування складається з наступних етапів.

1. Формується функція Гамільтона

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}, t),$$

де замість $\bar{\psi}$ записується ∇V , тобто

$$H(\bar{x}, \bar{u}, \nabla V, t).$$

2. Досліджується $H(\bar{x}, \bar{u}, \nabla V, t)$ на екстремум за умовами стаціонарності

$$\frac{\partial H}{\partial u_s} = 0, \quad s = \overline{1, r},$$

і з отриманих рівнянь знаходиться керування

$$\bar{u} = \bar{u}^*(\bar{x}, \nabla V, t).$$

3. Визначається функція

$$H^* = H(\bar{x}, \bar{u}^*(\bar{x}, \nabla V, t), \nabla V, t).$$

4. Складається і розв'язується рівняння Гамільтона–Якобі

$$H^* + \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

5. Визначається закон оптимального керування

$$\bar{u}^*(\bar{x}, \nabla V, t).$$

3.3. Квадратична форма. Критерій Сильвестра

Квадратичною формою називається скалярна функція

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2, \dots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

де a_{ij} – числа, причому $a_{ij} = a_{ji}$, які називаються *коефіцієнтами квадратичної форми*, а складена з них матриця

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– *матрицею квадратичної форми*.

Визначники

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називаються *головними мінорами* матриці R .

Квадратичну форму можна подати у вигляді

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(\bar{x}) = \bar{x}^T R \bar{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Квадратична форма $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *додатно (від'ємно) визначеною*, якщо для будь-яких значень змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які одночасно не дорівнюють нулю, вона набуває додатні (від'ємні) значення. Наприклад, $S(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_2^2$ називається додатно визначеною, оскільки $S(x_1, x_2) > 0$ для всіх точок (x_1, x_2) , крім початку координат.

Квадратична форма $S(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називається *знаковизначеною*, якщо вона є або додатно визначеною, або від'ємно визначеною. Наприклад, функція $S(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ є знаковизначеною.

Квадратична форма $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *додатно (від'ємно) напіввизначеною*, якщо вона набуває тільки невід'ємні, або тільки недовід'ємні значення, але при цьому перетворюється в нуль не тільки при нульових значеннях змінних.

Квадратична форма називається *невизначеною*, якщо вона набуває як додатні, так і від'ємні значення. Наприклад, $S(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$.

Критерій Сильвестра:

1. Для того щоб квадратична форма $S(\bar{x})$ була *додатно визначеною*, необхідно і достатньо, щоб усі головні мінори її симетричної матриці R були додатні, тобто $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

2. Для того щоб квадратична форма $S(\bar{x})$ була *від'ємно визначеною*, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні знаки головних мінорів її симетричної матриці R чергувалися наступним чином: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0 \dots$.

3.4. Приклад розв'язання задачі за підходом Гамільтона–Якобі

Розглянемо неперервну систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = u; \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0, \end{aligned}$$

для якої функціонал

$$F = \int_0^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt \rightarrow \min.$$

Потрібно визначити оптимальне керування $u^*(t)$ зі зворотним зв'язком. Задачу розв'язуємо згідно з процедурою Гамільтона–Якобі. Складаємо гамільтоніан:

$$H = -x_1^2 - u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u = -x_1^2 - u^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2} u.$$

Досліджуємо H на екстремум за умовами стаціонарності (2.12):

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0.$$

Звідси знаходимо

$$u = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x_2}.$$

Підставляємо цей вираз у функцію Гамільтона:

$$H^* = -x_1^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 = -x_1^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2.$$

Запишемо рівняння Гамільтона–Якобі

$$H^* + \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

У даній задачі V не залежить від $t = 0$, тому $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. Отже, $H^* = 0$, або

$$x_1^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial V}{\partial x_1} x_2 = 0.$$

Шукаємо розв'язок знайденого нелінійного диференціального рівняння у вигляді квадратичної форми:

$$V = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Маємо

$$x_1^2 - \frac{1}{4} (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2)^2 - (2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2)x_2 = 0,$$

або

$$(1 - a_{12}^2)x_1^2 - (2a_{11} + 2a_{12}a_{22})x_1x_2 - (2a_{12} + a_{22}^2)x_2^2 = 0.$$

Звідки отримуємо

$$1 - a_{12}^2 = 0, \quad 2a_{11} + 2a_{12}a_{22} = 0, \quad 2a_{12} + a_{22}^2 = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо

$$a_{12} = \pm 1, \quad a_{22} = \pm\sqrt{2}, \quad a_{11} = \pm\sqrt{2}.$$

Оскільки $V(\bar{x}, t) = -\int_t^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt < 0$ при всіх $t \neq t_f$, то квадратична

форма повинна бути від'ємно визначеною.

Цю умову задовольняє розв'язок

$$a_{12} = -1, \quad a_{22} = -\sqrt{2}, \quad a_{11} = -\sqrt{2},$$

$$V = -\sqrt{2} x_1^2 - 2x_1x_2 - \sqrt{2} x_2^2.$$

Отже, оптимальне керування буде таким:

$$u^*(\bar{x}) = \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x_2} = -(x_1 + \sqrt{2}x_2).$$

Воно залежить від фазових координат x_1 і x_2 .

Структурна схема системи наведена на рис. 3.1.

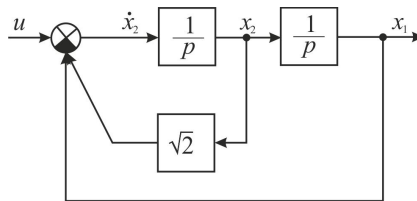


Рис. 3.1. Структурна схема оптимальної системи керування

4. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Принцип оптимальності. Рівняння Беллмана

Метод динамічного програмування розвинутий американським ученим Річардом Беллманом та його співробітниками в 1950–1953 рр. [1, 10].

В основі методу лежить *принцип оптимальності* Р. Беллмана. Він формулюється так: *будь-яка залишена кінцева ділянка оптимальної траєкторії сама по собі також є оптимальною траєкторією*.

Нехай поведінка об'єкта керування описується векторним рівнянням

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{u}, t) \quad (4.1)$$

при заданих граничних умовах

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0, \quad \bar{x}(t_f) = \bar{x}_f, \quad (4.2)$$

обмеженні на керування

$$\bar{u} \in \bar{U} \quad (4.3)$$

та узагальненому показнику якості Больца

$$F = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (4.4)$$

Припустимо, що знайдена оптимальна траєкторія $\bar{x}(t)$, для якої $F \rightarrow \min$.

Відповідно до принципу оптимальності ділянка траєкторії, починаючи з будь-якої точки $\bar{x}(t)$, що відповідає моменту часу $t_0 < t < t_f$, також є оптимальною траєкторією, а функціонал (4.4) на цьому інтервалі

$$F = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt$$

досягає мінімуму.

Уведемо функцію Беллмана

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} F = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(g_0 + \int_t^{t_f} f_0 dt \right),$$

причому

$$S(\bar{x}(t_f), t_f) = g_0(\bar{x}(t_f), t_f). \quad (4.5)$$

Розглянемо дві достатньо близькі точки оптимальної траєкторії: точку $\bar{x}(t)$, що відповідає моменту часу t , і точку $\bar{x}(t + \Delta t)$, що відповідає часу $(t + \Delta t)$. Точка $\bar{x}(t + \Delta t)$ знаходиться ближче до кінцевого стану $\bar{x}(t_f)$. Тому відповідно до принципу оптимальності Беллмана ділянку траєкторії від точки $\bar{x}(t)$ до точки $\bar{x}(t_f)$ будемо розглядати за умови, що ділянка від точки $\bar{x}(t + \Delta t)$ до точки $\bar{x}(t_f)$ вже оптимальна. Розіб'ємо інтервал інтегрування на два: від t до $(t + \Delta t)$ і від $(t + \Delta t)$ до t_f .

Тоді

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(g_0 + \int_t^{t+\Delta t} f_0 dt + \int_{t+\Delta t}^{t_f} f_0 dt \right)$$

або

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(\int_t^{t+\Delta t} f_0 dt + S(\bar{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \right), \quad (4.6)$$

тому що ділянка траєкторії на другому інтервалі оптимальна.

Припустимо, що функція $S(\bar{x}, t)$ має частинні похідні за всіма фазовими координатами і часом.

Тоді з точністю до нескінченно малої першого порядку мализни

$$\int_t^{t+\Delta t} f_0 dt = f_0 \Delta t; \quad S(\bar{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) = S(\bar{x}, t) + (\nabla S \cdot \bar{f}^T) \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t$$

і вираз (4.6) набуває вигляду

$$S(\bar{x}, t) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(f_0 \Delta t + S(\bar{x}, t) + (\nabla S \cdot \bar{f}^T) \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t \right).$$

Оскільки $S(\bar{x}, t)$ і $\frac{\partial S}{\partial t} \Delta t$ не залежать від вектора керування $\bar{u}(t)$

і можуть бути винесені за знак мінімуму, одержуємо

$$S(\bar{x}, t) = S(\bar{x}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \min_{\bar{u} \in \bar{U}} (f_0 \Delta t + (\nabla S \cdot \bar{f}^T) \Delta t),$$

звідки після скорочень

$$\min_{\bar{u} \in \bar{U}} (f_0 + \nabla S \cdot \bar{f}^T) = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Це рівняння носить ім'я Беллмана.

Якщо в рівнянні Беллмана функція S диференційовна, то для того щоб припустима пара $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$ була розв'язком поставленої задачі (4.1)–(4.4), необхідно, щоб вона задовольняла рівняння (4.7) при граничній умові (4.5).

Якщо мінімум у лівій частині рівняння Беллмана (4.7) досягається у внутрішніх точках множини, то це рівняння можна подати у вигляді

$$f_0 + \nabla S \cdot \bar{f}^T = -\frac{\partial S}{\partial t}; \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_s} (f_0 + \nabla S \cdot \bar{f}^T) = 0, \quad s = \overline{1, r}. \quad (4.9)$$

Таким чином, рівняння (4.9) замінює пропущену в (4.8) операцію мінімізації по керуванню.

4.2. Достатня умова оптимальності*

Рівняння Беллмана

$$\min_{\bar{u} \in \bar{U}} (f_0 + \nabla S \cdot \bar{f}^T) = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (4.10)$$

виражає необхідну умову оптимальності, оскільки отримано в припущенні, що функція $S = S(\bar{x}, t)$ є гладкою, тобто неперервно диференційовною. Однак це припущення не впливає з умови задачі оптимального керування і в ряді випадків не виконується. Тому метод динамічного програмування, який застосовується для задач оптимального керування, потребує обґрунтування. За певних умов цей метод дає достатню умову оптимальності. Ця умова може бути сформульована у вигляді такої теореми.

Теорема. Нехай $S(\bar{x}, t)$ – гладке розв'язування рівняння Беллмана (4.10) при граничній умові

$$S(\bar{x}(t_f), t_f) = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) \quad (4.11)$$

і $\bar{u}^*(t)$ – функція керування, вирахована з умови оптимальності Беллмана

*Викладається за підручником "Теория автоматического управления" : в 2 ч. Ч. 2 / А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин [и др.] ; под ред. А. А. Воронова. – М., 1986. – 504 с.

$$\min_{\bar{u} \in \bar{U}} f_0 + \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(\nabla S \cdot \bar{f}^T(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(f_0 + \frac{dS}{dt} \right)$$

або, що те ж саме, із рівняння

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}^*, t) + \nabla S \cdot \bar{f}^T(\bar{x}, \bar{u}^*, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\bar{u} \in \bar{U}} \left(f_0 + \frac{dS}{dt} \right),$$

породжує єдину траєкторію $\bar{x}^*(t)$, яка задовольняє поставлену вище задачу. Уздовж цієї траєкторії функція $\bar{u}^*(t) = \bar{u}^*(\bar{x}^*(t), t)$ кусково-неперервна, тому функція $\bar{u}^*(\bar{x}, t)$ є оптимальним керуванням указаної задачі.

Дійсно, згідно з визначенням оптимального керування $\bar{u}^*(\bar{x}, t)$ в кожній точці його неперервності правдиве рівняння

$$f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \frac{dS(\bar{x}^*, t)}{dt} = 0.$$

Проінтегруємо це рівняння за t від t_0 до t_f :

$$\int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt + S(\bar{x}^*(t_f), t_f) - S(\bar{x}^*(t_0), t_0) = 0.$$

Звідси з урахуванням (4.11) та рівняння $\bar{x}^*(t_0) = \bar{x}_0$ знаходимо

$$S(\bar{x}_0, t_0) = g_0(\bar{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) dt.$$

Візьмемо будь-яке інше керування $\bar{u}(t)$ та відповідний йому фазовий вектор $\bar{x}(t)$. Тоді, в силу визначення кусково-неперервної функції

$\bar{u}^* = \bar{u}^*(t) = \bar{u}^*(\bar{x}^*(t), t)$, маємо

$$f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) + \frac{dS(\bar{x}, t)}{dt} \geq f_0(\bar{x}^*, \bar{u}^*, t) + \frac{dS(\bar{x}^*, t)}{dt} = 0.$$

Проінтегруємо обидві частини цієї нерівності за t від t_0 до t_f . Тоді отримаємо з урахуванням (4.11) та умови $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt + g_0(\bar{x}(t_f), t_f) \geq S(\bar{x}_0, t_0).$$

З даної нерівності виходить, що при $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(\bar{x}, t)$ критерій оптимальності Больца $F \rightarrow \min$. Отже, керування $\bar{u}^*(\bar{x}, t)$ є оптимальним.

4.3. Приклади застосування методу динамічного програмування для аналітичного конструювання регуляторів

Приклад 1. Знайти оптимальне керування в задачі про швидкодію при обмеженні на керування:

$$\dot{x} = -ax + bu, \quad x(0) = x_0;$$

$$F = \int_0^{t_f} dt \rightarrow \min,$$

де $a > 0$, $b > 0$ і $|u| \leq 1$.

Розв'язання. Запишемо рівняння Беллмана

$$\min_{|u| \leq 1} \left[1 + \frac{\partial S(x)}{\partial x} (bu - ax) \right] = 0.$$

Вираз у квадратних дужках по відношенню до обмеженого керування при фіксованій змінній x набуває мінімальне значення, якщо виконується умова

$$u = -\operatorname{sgn} \frac{\partial S(x)}{\partial x}.$$

Взявши до уваги цю умову, рівняння Беллмана запишемо таким чином:

$$1 - ax \frac{\partial S(x)}{\partial x} - b \left| \frac{\partial S(x)}{\partial x} \right| = 0.$$

Це рівняння з точністю до сталої має наступні розв'язки:

$$S(x) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{b} x + 1 \right), \text{ якщо } \frac{\partial S}{\partial x} > 0;$$

$$S(x) = \frac{1}{a} \ln \left(-\frac{a}{b} x + 1 \right), \text{ якщо } \frac{\partial S}{\partial x} < 0.$$

Інакше

$$S(x) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{b} |x| + 1 \right).$$

Звідси

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\operatorname{sgn} x}{a|x| + b}$$

і оптимальне керування $u^* = -\operatorname{sgn}(x)$.

Видно, що оптимальне керування є релейним.

Структурна схема системи керування подана на рис. 4.1.

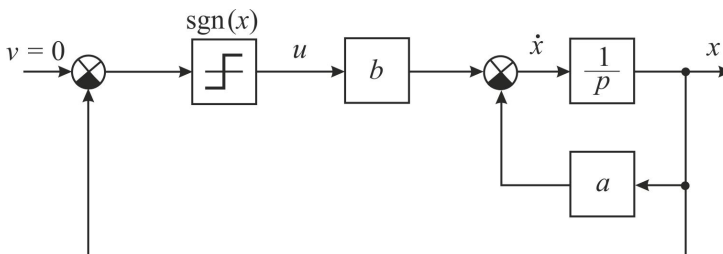


Рис. 4.1. Структурна схема системи керування

Приклад 2. Розглянемо застосування методу динамічного програмування для визначення закону оптимального керування регулятора в задачі з квадратичним показником якості [8].

Нехай поведінка об'єкта керування описується наступною системою рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u,$$

де a_1, a_2 – сталі.

Показник якості, що характеризує мінімум квадратичної похибки, запишемо у вигляді

$$F = \int_0^{\infty} (b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + \dot{u}^2) dt \rightarrow \min,$$

де b_1, b_2 – сталі.

Потрібно знайти закон керування $\dot{u} = \dot{u}(t)$.

Розв'язання. Уведемо додаткове рівняння

$$\dot{u} = v. \quad (4.12)$$

Запишемо рівняння Беллмана

$$\min_{\bar{u} \in \bar{U}} (f_0 + \nabla S \cdot \bar{f}^T) = -\frac{\partial S}{\partial t},$$

де $f_0 = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + v^2$; $\bar{f}^T = (x_2; a_1 x_1 + a_2 x_2 + u; v)$.

У даному випадку функції f_0 і $\bar{f}^T$ не залежать від часу t . Тому $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ і рівняння Беллмана має вигляд

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + v^2 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u) \frac{\partial S}{\partial x_2} + v \frac{\partial S}{\partial u} = 0. \quad (4.13)$$

Продиференціюємо це рівняння за v :

$$2v + \frac{\partial S}{\partial u} = 0. \quad (4.14)$$

Звідси

$$v = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial u}.$$

Підставляючи (4.14) в (4.13), одержимо

$$b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + u^2 + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_1} + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + u) \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial u} \right)^2.$$

Розв'язок записаного рівняння шукаємо у вигляді квадратичної форми фазових координат x_1, x_2 і функції керування u :

$$S = c_{11} x_1^2 + c_{12} x_1 x_2 + c_{22} x_2^2 + c_1 x_1 u + c_2 x_2 u + r u^2. \quad (4.15)$$

Знайшовши коефіцієнти цієї квадратичної форми та взявши до уваги (4.15), (4.14) і (4.12), отримаємо

$$v = \dot{u} = -\frac{1}{2} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + 2r u).$$

Цей вираз показує, що на вході об'єкта необхідно увімкнути виконавчий механізм зі сталою часу $T = 1/r$ або у загальному випадку аперіодичну ланку першого порядку.

5. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

5.1. Принцип максимуму

У багатьох прикладних задачах на керування накладаються обмеження типу нерівності. Часто оптимальне керування у таких задачах має розрив. Методи Ейлера–Лагранжа і Гамільтона–Якобі не дозволяють визначити число та місцеположення точок розриву, і тому в цих випадках вони не дозволяють знаходити оптимальне керування. Такі задачі ефективно розв'язуються за допомогою принципу максимуму. Цей принцип уперше був сформульований академіком Л.С. Понтрягіним у 1953 році та розвинений згодом його учнями В.Г. Болтянським, Р.В. Гамкрелідзе, Е.Ф. Міщенко [2, 6].

Розглянемо задачу оптимального керування із закріпленими кінцями та фіксованим часом (задачу Лагранжа).

Дано:

$$\dot{x}_j = f_j(\bar{x}, \bar{u}, t), \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.1)$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \quad x_j(t_f) = x_j^f, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.2)$$

$$F = \int_{t_0}^{t_f} f_0(\bar{x}, \bar{u}, t) dt \rightarrow \min. \quad (5.3)$$

Потрібно мінімізувати функціонал F шляхом вибору вектора припустимого керування $\bar{u}(t)$, причому $\bar{u}(t) \in \bar{U}$, де $\bar{U}$ – припустима множина значень керування. Припустимим береться керування $\bar{u}(t)$, яке

належить до класу кусково-неперервних функцій та набуває значення з припустимої множини $\bar{U}$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L = \psi_0 f_0 + \sum_{j=1}^n \psi_j (f_j - \dot{x}_j) = H - \sum_{j=1}^n \psi_j \dot{x}_j, \quad (5.4)$$

де гамільтоніан

$$H = \psi_0 f_0 + \sum_{j=1}^n \psi_j f_j.$$

Відповідно до підходу Лагранжа, який розглядався раніше, поставлена задача (5.1)–(5.3) з урахуванням (5.4) зводиться до задачі

$$\tilde{F} = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{u}, \bar{\psi}, t) dt \rightarrow \max_{\bar{u} \in \bar{U}} \text{ при } \psi_0 = -1; \quad (5.5)$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, x_j(t_f) = x_j^f, \quad j = \overline{1, n},$$

де $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^T$ – n -вимірний вектор-стовпець.

Нехай $(\bar{x}^*(t), \bar{u}^*(t), \bar{\psi}^*(t))$ – розв'язок цієї задачі.

Очевидно, задача (5.5) рівносильна наступним двом:

$$\tilde{F}_1 = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \bar{u}^*, \bar{\psi}, t) dt \rightarrow \max_{\bar{x}, \bar{\psi}};$$

$$\tilde{F}_2 = \int_{t_0}^{t_f} L(\bar{x}^*, \dot{\bar{x}}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t) dt \rightarrow \max_{\bar{u} \in \bar{U}}$$

або

$$\tilde{F}_1 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\bar{x}, \bar{u}^*, \bar{\psi}, t) - \sum_{j=1}^n \psi_j \dot{x}_j \right] dt \rightarrow \max_{\bar{x}, \bar{\psi}}; \quad (5.6)$$

$$\tilde{F}_2 = \int_{t_0}^{t_f} \left[H(\bar{x}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t) - \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_j^* \dot{x}_j^* \right] dt \rightarrow \max_{\bar{u} \in \bar{U}} \quad (5.7)$$

за тих граничних умов, що й у задачі (5.5).

Задача (5.6) – це найпростіша задача варіаційного числення. Для неї рівняння Ейлера–Лагранжа мають вигляд (вони виконують необхідні умови екстремуму)

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5.8)$$

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial \psi_j}, \quad j = \overline{1, n} \quad (5.9)$$

і називаються *системою Гамільтона*.

Як було доведено Якобі, задача інтегрування системи рівнянь Гамільтона (5.8) і (5.9) еквівалентна задачі знаходження повного інтеграла рівняння Гамільтона–Якобі (3.7).

Розв'язання задачі (5.7) було дано Л.С. Понтрягіним спочатку у вигляді гіпотези: *керування $\bar{u}^*(t)$ дає максимум у цій задачі в тому і тільки в тому випадку, коли на всьому проміжку $[t_0; t_f]$, крім точок розриву $\bar{u}^*(t)$, виконується рівність*

$$\max_{\bar{u} \in \bar{U}} H(\bar{x}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t) = H(\bar{x}^*, \bar{u}^*, \bar{\psi}^*, t). \quad (5.10)$$

Необхідні умови задачі (5.6) сумісно з умовою (5.10) складають необхідні умови початкової задачі (5.1)–(5.3).

Умови задачі (5.6) сумісно із (5.10) називаються принципом максимуму Понтрягіна.

Рівності (5.9) збігаються з рівностями (5.1) об'єкта, тому їх можна не розглядати. Рівності (5.8), як відзначалося раніше, називаються спряженими рівностями чи спряженою системою.

На основі наведених викладок сформулюємо принцип максимуму: для того щоб допустима для задачі (5.1)–(5.3) пара $(\bar{u}^*(t), \bar{x}^*(t))$ була її розв'язком, необхідно, щоб існували константа $\psi_0 \leq 0$ і розв'язок $\bar{\psi}^* = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*)^T$ спряженої системи (5.8) при $\bar{x}(t) = \bar{x}^*(t)$ і $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t)$, які не перетворюються одночасно в нуль, що при будь-яких $t \in [t_0; t_f]$, крім точок розриву $\bar{u}^*(t)$, функція $\tilde{H} = H(\bar{x}^*, \bar{u}, \bar{\psi}^*, t)$ досягає при $\bar{u} = \bar{u}^*(t)$ максимуму, тобто виконується рівність (5.10).

Принцип максимуму дає необхідну умову оптимальності, тому він дозволяє визначити оптимальні траєкторії серед допустимих. Достатня умова оптимальності визначається за теоремою В.Г. Болтянського [2]. Ця теорема стверджує, що синтез на основі принципу максимуму дійсно приводить до оптимальних траєкторій.

5.2. Задача про швидкодію матеріальної точки

Розглянемо задачу про прямолінійний рух матеріальної точки одиначною масою під дією сили $u = u(t)$ [6].

Відповідно до другого закону Ньютона рівняння руху запишемо у вигляді

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u.$$

На силу накладемо обмеження $|u| \leq 1$, або $-1 \leq u \leq 1$.

Потрібно з даного початкового стану $\bar{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ потрапити в початок фазових координат за мінімальний час:

$$F = \int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min.$$

Розв'язок. Функція Гамільтона $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u$.

Спряжена система рівнянь (2.11) або (5.8) має вигляд

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1.$$

Проінтегруємо цю систему. Тоді знайдемо

$$\psi_1 = C_1, \quad \psi_2 = -C_1 t + C_2,$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Згідно з принципом максимуму Понтрягіна

$$H = \max_{|u| \leq 1} (\psi_1 x_2 + \psi_2 u).$$

Тому

$$u(t) = +1, \text{ якщо } \psi_2(t) > 0; \quad u(t) = -1, \text{ якщо } \psi_2(t) < 0.$$

Інакше

$$u(t) = \operatorname{sgn} \psi_2(t) = \operatorname{sgn}(-C_1 t + C_2).$$

Звідси випливає, що кожне оптимальне керування $u(t)$ на проміжку $[t_0; t_f]$ є кусково-сталою функцією, яка набуває значення ± 1 і має не більше двох інтервалів сталості (оскільки лінійна функція $-C_1 t + C_2$ не більше одного разу змінює знак на відрізку $t_0 \leq t \leq t_f$).

Для відрізка часу, на якому $u = 1$, маємо

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_2} = \frac{x_2}{u} \quad \text{або} \quad \frac{dx_1}{dx_2} = x_2,$$

звідки знаходимо

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2 + C. \quad (5.11)$$

Таким чином, кусок фазової траєкторії, для якого $u = +1$, являє собою дугу параболи.

Сім'я парабол зображена на рис. 5.1, *а*. Вони виходять одна з одної зсувом. По цих параболах зображувальні точки рухаються знизу нагору.

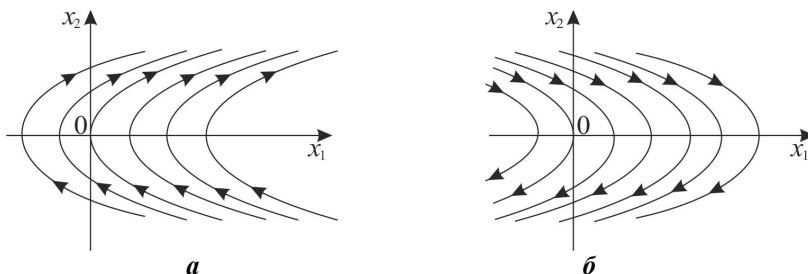


Рис. 5.1. Рух точки по фазових траєкторіях (параболах) знизу нагору (*а*) і зверху вниз (*б*)

Аналогічно для відрізка часу, на якому $u = -1$, маємо

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -x_2,$$

звідки

$$x_1 = -\frac{1}{2}(x_2)^2 + C. \quad (5.12)$$

Сім'я парабол зображена на рис. 5.1, *б*. По параболах фазові точки рухаються зверху вниз.

Як було вказано вище, кожне оптимальне керування $u(t)$ є кусково-сталогою функцією, яка набуває значення ± 1 і має не більше двох інтервалів сталості. Якщо керування $u(t)$ протягом деякого часу дорівнює $+1$, а потім -1 , то фазова траєкторія складається з двох кусків парабол (рис. 5.2, *а*), які примикають одна до одної. Причому другий із цих кусків лежить на тій з парабол, яка проходить через початок координат, оскільки ж шукана траєкторія повинна вести в початок координат.

Коли ж, навпаки, спочатку $u = -1$ і потім $u = +1$, то одержимо фазову траєкторію, показану на рис. 5.2, *б*.

Таким чином, відповідно до принципу максимуму оптимальними будуть такі траєкторії, які зображені на рис. 5.3.

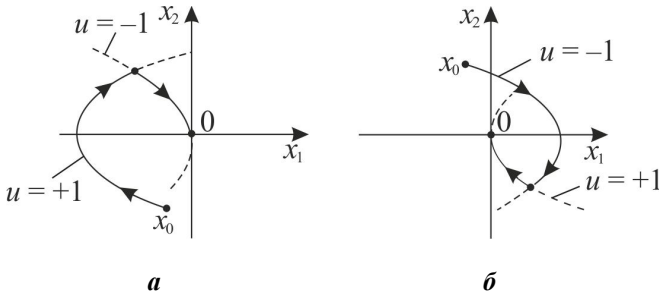


Рис. 5.2. Рух точки в початок фазових координат:

$$a - u(t) = \pm 1; \quad б - u(t) = \mp 1$$

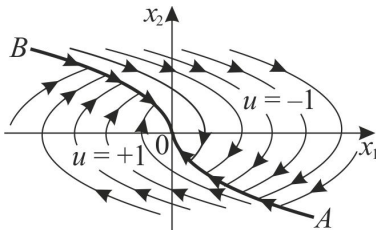


Рис. 5.3. Рух точки з будь-якого початкового стану в початок фазових координат

через $\bar{x}_0$. Інакше кажучи, коли початкове положення $\bar{x}_0$ знаходиться вище лінії $A0B$, то фазова точка повинна рухатися під дією керування $u = -1$ до тих пір, поки вона не потрапить на дугу $A0$. У момент улучення на дугу $A0$ значення u переключається і стає рівним $+1$ аж до моменту улучення в початок координат. Аналогічно для випадку місцеположення точки $\bar{x}_0$ нижче лінії $A0B$ фазова точка починає рухатися під дією $u = +1$ по дузі параболі (5.11), а потім після переключення u на -1 по дузі $B0$ у початок координат.

Тут $A0$ – дуга параболі

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_2)^2, \quad B0 - \text{дуга параболі}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(x_2)^2, \quad \text{а лінія } A0B \text{ називається}$$

лінією перемикавання.

Якщо початкова точка $\bar{x}_0$ розташована вище лінії $A0B$, то зображувальна точка починає рухатися по дузі параболі (5.12), яка проходить

5.3. Поняття ковзного процесу. Умова існування ковзного процесу

Одним з перспективних підходів до синтезу систем керування складними об'єктами з невизначеностями є керування зі змінною структурою. Теорія систем зі змінною структурою була створена у 60-х роках XX століття радянськими вченими С.В. Ємельяновим та В.І. Уткіним. Найбільш примітною властивістю систем зі змінною структурою є можливість отримання ковзного процесу. *Ковзний процес* являє собою рух зображувальної точки у просторі стану по так званій гіперповерхні або лінії перемикання, який виникає у зв'язку з перемиканням структури системи. В ідеальному випадку динамічні характеристики системи визначаються тільки коефіцієнтами рівняння поверхні перемикання. Як наслідок, система стає нечутливою до зміни параметрів об'єкта керування та інваріантною до зовнішніх збурень.

З'ясуємо умови, за яких у системі зі змінною структурою буде існувати ковзний процес.

Нехай $S = S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ – рівняння гіперповерхні перемикання;

$S = S(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ – відхилення зображувальної точки від гіперповерхні.

Необхідно скласти умову, за якої зображувальна точка, потрапивши на гіперповерхню перемикання $S = 0$, не змогла зійти з неї.

Припустимо, що в деякий момент часу $S > 0$. Тоді при $\frac{dS}{dt} > 0$ зображувальна точка буде рухатися до гіперповерхні перемикання $S = 0$. Якщо вона перескочила цю гіперповерхню, то $S < 0$ і зображувальна точка буде рухатися до гіперповерхні, коли $\frac{dS}{dt} < 0$.

З розглянутого випливає, що умова існування ковзного процесу може бути записана у вигляді

$$S \frac{dS}{dt} = 0.$$

Щоб рух системи у ковзному процесі відбувався з високою швидкістю, необхідно, щоб зображувальна її точка коливалася у поперечному напрямку до поверхні перемикання з нескінченно малою амплітудою і нескінченно великою частотою. На практиці такий рух системи може бути реалізований завдяки релейному елементу.

6. ОПИС СТАНУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ У НОРМАЛЬНІЙ ФОРМІ

6.1. Нормальна форма рівнянь стану і виходу

Багато систем можуть бути описані векторним лінійним диференціальним рівнянням стану в нормальній формі Коші [12–14]

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

і рівнянням спостереження

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u},$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця об'єкта розміру $n \times n$;

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$ – матриця керування розміру $n \times m$;

$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix}$ – матриця спостереження розміру $r \times n$;

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{pmatrix} - \text{матриця зв'язку розміру } r \times m.$$

Матриця A , елементи якої визначаються структурною схемою системи та значенням її параметрів, характеризує динамічні властивості системи, її вільний рух. Матриця керування B визначає вплив зовнішніх дій на змінні стану системи, тобто чутливість системи до зовнішніх дій як задавальних, так і збурювальних. Матриця спостереження C характеризує зв'язок вихідної величини системи з вектором стану. Зазвичай не всі складові вектора стану є спостережуваними сигналами, тобто можуть бути виміряні за допомогою будь-яких датчиків, у той час як вихідний сигнал завжди є спостережуваним. Матриця зв'язку D встановлює зв'язок вихідної величини системи із зовнішніми діями.

На рис. 6.1 показано структурну схему системи керування, що відповідає матричним рівнянням стану. Подвійні лінії характеризують векторні зв'язки.

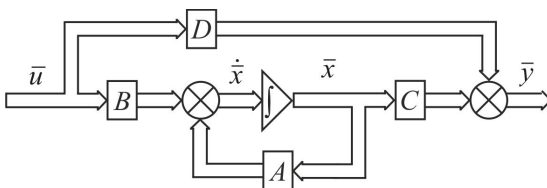


Рис. 6.1. Структурна схема системи в матричній формі

Розглянута модель системи у просторі стану буде основою для подальшого аналізу.

6.2. Перехід від структурної схеми системи до нормальних рівнянь стану

Для системи, заданої структурною схемою з інтегровальними та аперіодичними ланками, процедура побудови математичної моделі у просторі стану складається з двох етапів.

1. Взяти вихід кожної інтегральної та аперіодичної ланок за змінну стану.

2. Записати передавальні функції для кожної інтегральної та аперіодичної ланок і скласти диференціальні рівняння стану в нормальній формі Коші.

Приклад 1. Нехай автоматична система задана структурною схемою (рис. 6.2), яка складається з типових динамічних ланок.

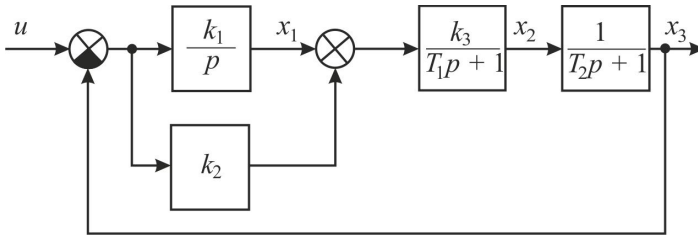


Рис. 6.2. Структурна схема системи автоматичного керування

Видно, що ця система має третій порядок, тому її стан визначається трьома фазовими координатами x_1, x_2, x_3 .

Згідно з прийнятими позначеннями фазових координат запишемо передавальні функції елементів системи:

$$\frac{k_1}{p} = \frac{x_1}{u - x_3}; \quad \frac{k_3}{T_1 p + 1} = \frac{x_2}{x_1 + k_2(u - x_3)}; \quad \frac{1}{T_2 p + 1} = \frac{x_3}{x_2}.$$

Звідси можна одержати рівняння в операторній формі:

$$p x_1 = -k_1 x_3 + k_1 u;$$

$$p x_2 = \frac{k_3}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_2 - \frac{k_2 k_3}{T_1} x_3 + \frac{k_2 k_3}{T_1} u;$$

$$p x_3 = \frac{1}{T_2} x_2 - \frac{1}{T_2} x_3.$$

Диференціальні рівняння стану системи у нормальній формі

$$\dot{x}_1 = -k_1 x_3 + k_1 u;$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k_3}{T_1} x_1 - \frac{1}{T_1} x_2 - \frac{k_2 k_3}{T_1} x_3 + \frac{k_2 k_3}{T_1} u;$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{T_2} x_2 - \frac{1}{T_2} x_3.$$

Запишемо ці рівняння у векторній формі:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu,$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -k_1 \\ \frac{k_3}{T_1} & -\frac{1}{T_1} & -\frac{k_2 k_3}{T_1} \\ 0 & \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} k_1 \\ \frac{k_2 k_3}{T_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Згідно з рис. 6.2 запишемо рівняння спостереження

$$\bar{y} = C\bar{x} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Якщо структурна схема автоматичної системи має коливальну ланку, для якої передавальна функція

$$W(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + 1},$$

то її зображають у вигляді структурної схеми (рис. 6.3), а за змінні стану x_1, x_2 обирають вихідні сигнали інтегровальних ланок.

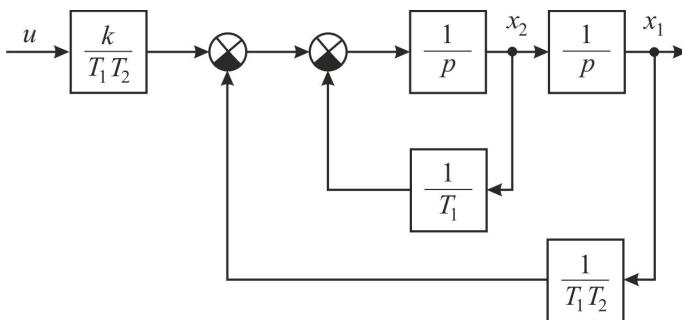


Рис. 6.3. Структурна схема коливальної ланки

6.3. Матрична передавальна функція системи

Розглянемо об'єкт керування

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}; \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Означення. Вираз

$$W(p) = C(pI - A)^{-1}B + D\tag{6.2}$$

називається матричною передавальною функцією системи (6.1) від входу $\bar{u}$ до виходу $\bar{y}$. У ньому буквою I позначено одиничну матрицю.

Матриця $(pI - A)^{-1}$ називається *резольвентою*, а визначник $\det(pI - A)$ є *характеристичним поліномом* даної розімкненої системи.

Зауважимо, що $W(p)$ має розмір $r \times t$ і є функцією комплексної змінної від оператора Лапласа p .

Скористаємося для виводу формули (6.2) інтегральним перетворенням Лапласа. Для цього перейдемо до зображень за Лапласом:

$$\bar{x}(p) \doteq L\{\bar{x}(t)\}, \quad \bar{y}(p) \doteq L\{\bar{y}(t)\}, \quad \bar{u}(p) \doteq L\{\bar{u}(t)\}.$$

Тоді, коли визначник $\det(pI - A) \neq 0$, отримаємо

$$\bar{x}(p) = (pI - A)^{-1} B \bar{u}(p); \quad \bar{y}(p) = (C(pI - A)^{-1} B + D) \bar{u}(p).$$

Таким чином, маємо матричний множник, що зв'язує зображення за Лапласом вхідного $\bar{u}(p)$ та вихідного $\bar{y}(p)$ сигналів, – *матричну передавальну функцію* (6.2) системи (6.1).

7. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗА КВАДРАТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ ЯКОСТІ

7.1. Синтез оптимальної стабілізуючої системи

Постановка задачі. Нехай об'єкт керування описується рівнянням

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \quad (7.1)$$

і критерій оптимальності має вигляд [10]

$$F = \frac{1}{2} \bar{x}^T(t_f) S \bar{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\bar{x}^T(t) Q(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) R(t) \bar{u}(t)) dt, \quad (7.2)$$

де $\bar{x}(t)$ – n -вимірний фазовий вектор; $\bar{u}(t)$ – m -вимірний вектор керування; $A(t)$ – квадратна матриця об'єкта розміру $n \times n$; $B(t)$ – прямокутна матриця керування розміру $n \times m$; S , $Q(t)$ – додатно напіввизначені симетричні матриці розміру $n \times n$ та $R(t)$ – додатно визначена симетрична матриця розміру $m \times m$ ($\bar{x}^T S \bar{x} \geq 0$, $\bar{x}^T Q \bar{x} \geq 0$, $\bar{u}^T R \bar{u} > 0$ при всіх $\bar{x} \neq 0$, $\bar{u} \neq 0$ і $t \in [t_0; t_f]$); матриці $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ і $R(t)$ є неперервними функціями часу на інтервалі $[t_0; t_f]$; початковий і кінцевий моменти часу t_0 і t_f фіксовані.

Термінальна складова з ваговою матрицею S (перша складова критерію оптимальності (7.2)) характеризує квадратичну похибку після закінчення процесу або штраф за термінальне відхилення від точки $\bar{x} = 0$, а *інтегральна складова* – динамічну точність регулювання (перша складова підінтегральної функції (7.2)) та затрати енергії на керування (друга складова підінтегральної функції (7.2)).

Потрібно знайти неперервне керування $\bar{u}(\bar{x}, t)$ ($t_0 \leq t \leq t_f$) зі зворотним зв'язком, при якому при довільній початковій умові $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ критерій оптимальності набуває мінімальне значення.

Сформульовану задачу називають задачею синтезу оптимального лінійного регулятора стану.

Твердження. Розв'язок задачі синтезу оптимального лінійного регулятора стану існує, єдиний, і оптимальне керування має вигляд

$$\bar{u}^*(t) = -K(t)\bar{x}(t), \quad (7.3)$$

де $K(t) = R^{-1}B^T P$, а симетрична додатно визначена квадратна матриця P розміру $n \times n$ знаходиться з матричного рівняння Ріккати

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q, \quad P(t_f) = S.$$

Якщо термінальна складова критерію оптимальності відсутня ($S = 0$), то початкова умова для рівняння Ріккати $P(t_f) = 0$.

У випадку стаціонарної лінійної системи (матриці A , B , Q і R сталі у виразах (7.1), (7.2)) при $t \rightarrow \infty$ об'єкт є стабілізованим і матриця $P(t)$ прямує до сталого значення. Тому рівняння Ріккати має вигляд

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = 0.$$

7.2. Синтез оптимального ПІ-регулятора**

З класичної теорії регулювання відомо, що пропорційний регулятор не відстежує зміни уставки або вимушених впливів по навантаженню в системі. Тому бажано до закону керування ввести інтегральну складову, яка підвищує точність регулювання.

Нехай поведінка стаціонарного об'єкта керування описується векторним рівнянням стану:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad (7.4)$$

де A , B – сталі матриці.

Див. **Рей, У. Методы управления технологическими процессами [Текст] : [пер. с англ.] / У. Рей. – М. : Мир, 1983. – 368 с.

Показник якості, що характеризує мінімум квадратичної похибки, запишемо у вигляді

$$F = \frac{1}{2} \bar{x}^T(t_f) S \bar{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{x}^T(t) Q(t) \bar{x}(t) + \dot{\bar{u}}^T(t) R(t) \dot{\bar{u}}(t) \right) dt. \quad (7.5)$$

Такий критерій оптимальності, як було з'ясовано вище, підвищує точність регулювання.

Візьмемо похідну з обох частин рівності (7.4):

$$\ddot{\bar{x}} = A \dot{\bar{x}} + B \dot{\bar{u}}. \quad (7.6)$$

Уведемо заміну змінних у рівнянні (7.6):

$$\bar{x} = \bar{z}_1; \quad \dot{\bar{x}} = \bar{z}_2; \quad \dot{\bar{u}} = \bar{v}.$$

Тоді отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= \bar{z}_2; \\ \dot{\bar{z}}_2 &= A \bar{z}_2 + B \bar{v}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Позначимо

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему рівнянь (7.7) у вигляді

$$\dot{\bar{z}} = \begin{pmatrix} O & I \\ O & A \end{pmatrix} \bar{z} + \begin{pmatrix} O \\ B \end{pmatrix} \bar{v},$$

де O – нульова матриця.

Перейдемо до показника якості (7.5):

$$F = \frac{1}{2} \bar{z}^T(t_f) \begin{pmatrix} S & O \\ O & O \end{pmatrix} \bar{z}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(\bar{z}^T(t) \begin{pmatrix} Q(t) & O \\ O & O \end{pmatrix} \bar{z}(t) + \bar{v}^T(t) R(t) \bar{v}(t) \right) dt.$$

За виразом оптимального закону керування (7.3) знаходимо

$$\bar{v}(t) = -K(t)\bar{z} = -(K_1 \ K_2) \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = -K_1(t)\bar{z}_1 - K_2(t)\bar{z}_2,$$

або після повернення до початкових змінних з точністю до сталої

$$\dot{\bar{u}}^* = -K_1(t)\bar{x} - K_2(t)\dot{\bar{x}}.$$

Звідси, інтегруючи за частинами, знаходимо з точністю до сталої

$$\bar{u}^* = -K_2\bar{x}(t) - \int_{t_0}^t (K_1 - \dot{K}_2) \bar{x}(t) dt.$$

Знайдений вираз задає достатньо складний пропорційно-інтегральний закон регулювання. У сталому стані при $t \rightarrow \infty$ матриці K_1 і K_2 будуть сталими, та оптимальний регулятор набуде вигляду

$$\bar{u}^* = -K_2\bar{x}(t) - K_1 \int_{t_0}^t \bar{x}(t) dt.$$

Такий закон керування реалізує звичайний ПІ-регулятор.

Другий спосіб синтезу оптимального ПІ-регулятора може бути реалізований за критерієм (7.2) при додаванні до первісних змінних стану нових, які пов'язані з первісними змінними інтегральними законами регулювання.

7.3. Синтез оптимальної слідкуючої системи

Постановка задачі. Нехай об'єкт керування описується рівняннями

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad \bar{y} = C\bar{x}$$

і критерій оптимальності має вигляд [10]

$$F = \frac{1}{2} (\bar{g}(t_f) - \bar{y}(t_f))^T S (\bar{g}(t_f) - \bar{y}(t_f)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} ((\bar{g}(t) - \bar{y}(t))^T Q (\bar{g}(t) - \bar{y}(t)) + \bar{u}(t)^T R \bar{u}(t)) dt, \quad (7.8)$$

де $\bar{x}(t)$ – n -вимірний фазовий вектор; $\bar{u}(t)$ – m -вимірний вектор керування; $\bar{y}(t)$ – r -вимірний вектор виходу; $\bar{g}(t)$ – r -вимірний вектор довільного задавального впливу; $A(t)$ – квадратна матриця об'єкта розміру $n \times n$; $B(t)$ – прямокутна матриця керування розміру $n \times m$; $C(t)$ – матриця виходу розміру $r \times n$; S , $Q(t)$ – додатно напіввизначені симетричні матриці розміру $r \times r$ та $R(t)$ – додатно визначена симетрична матриця розміру $m \times m$ ($\bar{x}^T S \bar{x} \geq 0$, $\bar{x}^T Q \bar{x} \geq 0$, $\bar{u}^T R \bar{u} > 0$ при всіх $\bar{x} \neq 0$, $\bar{u} \neq 0$ і $t \in [t_0; t_f]$); матриці $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $Q(t)$ і $R(t)$ є неперервними функціями часу на інтервалі $[t_0; t_f]$; початковий і кінцевий моменти часу t_0 і t_f фіксовані.

Термінальна складова з ваговою матрицею S (перша складова критерію оптимальності (7.8)) характеризує квадратичну похибку після закінчення процесу або штраф за термінальне відхилення від точки $\bar{x} = 0$, а *інтегральна складова* – динамічну точність регулювання (перша складова підінтегральної функції (7.8)) та затрати енергії на керування (друга складова підінтегральної функції (7.8)).

Потрібно знайти неперервне керування $\bar{u}(t)$, яке дозволяє відстежувати довільний задавальний вплив $\bar{g}(t)$ при $F \rightarrow \min$.

Твердження. Розв'язок задачі синтезу оптимального лінійного регулятора стану існує, єдиний, і оптимальне керування має вигляд

$$\bar{u}(t) = -R^{-1} B^T [P(t) \bar{x}(t) - \bar{\xi}(t)],$$

де симетрична квадратна матриця P розміру $n \times n$ знаходиться з матричного рівняння Ріккати

$$\dot{P} = -PA - A^T P + PBR^{-1} B^T P - C^T Q C, \quad P(t_f) = C^T S C,$$

а n -вимірний вектор $\bar{\xi}(t)$ – з розв'язання диференціального рівняння

$$\dot{\bar{\xi}} = -(A - BR^{-1}B^T P)^T \bar{\xi} - C^T Q \bar{g}, \quad \bar{\xi}(t_f) = C^T S \bar{g}(t_f), \quad \xi(t_f) = C^T S \bar{g}(t_f).$$

Розглянута задача має розв'язок, якщо змінні стану є спостережуваними (вимірювальними) на проміжку часу $[t_0; t_f]$. Якщо всі змінні стану спостережувані, то вони відновлюються за допомогою спостерігаючого пристрою (див. розд. 12).



8. КЕРОВАНІСТЬ ТА СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Означення. Лінійний об'єкт з диференціальним рівнянням стану

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

називається *повністю керованим*, якщо існує таке необмежене керування $\bar{u}(t)$, що може перевести об'єкт з початкового стану $\bar{x}(t_0)$ в будь-який інший кінцевий стан $\bar{x}(t_f)$ за кінцевий час $(t_f - t_0)$ [4, 12, 14].

Твердження. Лінійний об'єкт зі сталими параметрами

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

є повністю керованим тоді й тільки тоді, коли ранг матриці керованості

$$P = (B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

дорівнює n , де n – порядок системи.

Зауважимо, що рангом матриці називають найбільший порядок її мінора, який відрізняється від нуля, причому будь-який мінор більш високого порядку дорівнює нулю.

Приклад 1. Дослідити керованість об'єкта, який описується рівняннями

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + u_1 + u_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + 3u_2.$$

Запишемо рівняння стану у векторній формі:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u},$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Оскільки

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

то матриця керованості

$$P = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці $\text{rang } P = 2$. Отже, об'єкт є повністю керованим.

Спостережуваність системи пов'язана з її здатністю оцінювати змінні стану.

Означення. Неперервна лінійна система

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t); \\ \bar{y}(t) &= C\bar{x}(t) \end{aligned} \tag{8.1}$$

називається *спостережуваною*, якщо її початковий вектор стану $\bar{x}(t_0)$ можна визначити, знаючи вихідний вектор $\bar{y}(t)$, вимірюваний на деякому інтервалі часу $t \in [t_0; t_f]$ при заданому керуванні $\bar{u}(t)$. Якщо це справедливо для будь-якого t_0 , то система називається *повністю спостережуваною* [4, 12, 14].

Твердження. Система (8.1) повністю спостережувана тоді і тільки тоді, коли ранг матриці спостережуваності

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

дорівнює n , де n – порядок системи.

Приклад 2. Об'єкт керування заданий рівняннями

$$\dot{x}_1 = -8x_1 + 3x_2 + 3u;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + 2u;$$

$$y = x_1 - 2x_2.$$

Цим рівнянням відповідають такі матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матриця керованості

$$P = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 2 & -1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det P \neq 0$, то $\text{rank } P = 2$ і система повністю керована.

Матриця спостережуваності

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 \cdot (-8) + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Її $\det N \neq 0$, а $\text{rank } N = 2$. Тому система є повністю спостережуваною.

9. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ. КАНОНІЧНІ ФОРМИ РІВНЯНЬ СТАНУ

9.1. Перетворення подібності

Нехай стан системи описується матричними рівняннями

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}; \quad (9.1)$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}. \quad (9.2)$$

Уведемо новий вектор

$$\bar{v} = T\bar{x},$$

де T – матриця перетворення.

Якщо $\det T \neq 0$, то існує зворотнє перетворення

$$\bar{x} = T^{-1}\bar{v}. \quad (9.3)$$

Підставимо (9.3) в (9.1):

$$T^{-1}\dot{\bar{v}} = AT^{-1}\bar{v} + B\bar{u}.$$

Звідси

$$\dot{\bar{v}} = TAT^{-1}\bar{v} + TB\bar{u}. \quad (9.4)$$

Рівняння виходу (9.2) з урахуванням (9.3) набуде вигляду

$$\bar{y} = CT^{-1}\bar{v} + D\bar{u}. \quad (9.5)$$

Запишемо рівняння стану системи відносно вектора $\bar{v}$:

$$\dot{\bar{v}} = \tilde{A}\bar{v} + \tilde{B}\bar{u}; \quad (9.6)$$

$$\bar{y} = \tilde{C}\bar{v} + \tilde{D}\bar{u}. \quad (9.7)$$

У цих формулах хвиляста лінія над матрицями означає перетворення подібності.

Порівнюючи (9.6) з (9.4) та (9.7) з (9.5), знаходимо

$$\tilde{A} = TAT^{-1}; \quad \tilde{B} = TB; \quad \tilde{C} = CT^{-1}; \quad \tilde{D} = D.$$

Отримані вирази для перетворених матриць показують, що задача побудови математичної моделі у змінних стану не має однозначного розв'язку. Саме тому її приводять до тієї чи іншої канонічної форми.

Можна переконатися, що перетворення подібності не змінюють вигляд матричної передавальної функції, тобто

$$C(pI - A)^{-1}B + D = \tilde{C}(pI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}.$$

Звідси випливає, що $\det(pI - A) = \det(pI - \tilde{A})$.

Приклад 1. Розглянемо систему

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u;$$

$$\bar{y} = C\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$$

з матрицею перетворення

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначимо обернену матрицю

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриці перетвореної системи набувають наступного вигляду:

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{B} = TB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \tilde{C} = CT^{-1} = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2 \quad -1).$$

Рівняння стану перетвореної системи

$$\dot{\bar{v}} = \tilde{A}\bar{v} + \tilde{B}u; \quad \bar{y} = \tilde{C}\bar{v};$$

$$\dot{\bar{v}} = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -15 & 8 \end{pmatrix} \bar{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u; \quad \bar{y} = (2 \quad -1) \bar{v}.$$

Перевіримо рівність передавальних функцій початкової та перетвореної систем.

Визначимо передавальну функцію початкової системи:

$$\begin{aligned} W(p) &= C(pI - A)^{-1} B = (1 \quad 0) \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} p+3 & -1 \\ 2 & p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Знаходимо } \det \begin{pmatrix} p+3 & -1 \\ 2 & p \end{pmatrix} = p^2 + 3p + 2.$$

$$\text{Позначимо } D(p) = pI - A = \begin{pmatrix} p+3 & -1 \\ 2 & p \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю алгебраїчних доповнень

$$D^{\Delta}(p) = \begin{pmatrix} p & -2 \\ 1 & p+3 \end{pmatrix}.$$

Визначимо присдану (союзну) матрицю

$$D^*(p) = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -2 & p+3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$D^{-1}(p) = \begin{pmatrix} p+3 & -1 \\ 2 & p \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p^2+3p+2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -2 & p+3 \end{pmatrix}.$$

Тепер визначимо передавальну функцію початкової системи:

$$\begin{aligned} C(pI - A)^{-1}B &= (1 \ 0) \frac{1}{p^2+3p+2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -2 & p+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{p^2+3p+2} (p \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2+3p+2} (1) = \left(\frac{1}{p^2+3p+2} \right). \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо передавальну функцію перетвореної моделі:

$$\begin{aligned} \tilde{W}(p) &= \tilde{C}(pI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = (2 \ -1) \frac{1}{p^2+3p+2} \begin{pmatrix} p-8 & 6 \\ -15 & p+11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{p^2+3p+2} (2p-1 \ 1-p) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2+3p+2} (1) = \left(\frac{1}{p^2+3p+2} \right). \end{aligned}$$

Видно, що передавальні функції початкової та перетвореної систем збігаються.

9.2. Канонічна керована форма Луенбергера

При перетвореннях подібності було встановлено, що існує багато способів подання рівнянь стану системи. Саме тому доцільно вибрати кращий з них. Така форма запису рівнянь називається канонічною. Оскільки існують різноманітні системи, то є і багато канонічних форм. Тому розглянемо найбільш поширені з них – канонічні керовану та спо-

стережувану форми Луенбергера [3, 4, 14]. Ці форми запису застосовують для систем з одним входом та виходом.

Рівняння стану в канонічній формі Луенбергера має вигляд

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} + \tilde{B}u, \quad (9.8)$$

де $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$ – матриця Фробеніуса;

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; u - \text{скаляр.}$$

Відмітимо, що матрицю Фробеніуса $\tilde{A}$ називають також *супровідною матрицею*.

Рівнянню (9.8) відповідає наступний характеристичний поліном:

$$\det(pI - \tilde{A}) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (9.9)$$

Таким чином, коефіцієнти характеристичного полінома (9.9), взяті з протилежним знаком, є елементами останнього рядка матриці Фробеніуса $\tilde{A}$ рівняння (9.8).

Твердження. Для того щоб рівняння стану

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu$$

неособливим перетворенням можна було привести до керованої форми Луенбергера, необхідно та достатньо, щоб пара (A, B) була повністю керованою.

Приклад 2. Перетворити рівняння стану

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

в керовану форму Луенбергера.

Добутки AB , A^2B та матриця керованості мають вигляд

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A^2B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det P = -1$, то пара (A, B) повністю керована. Таким чином, дане рівняння може бути перетворене в керовану форму Луенбергера.

Характеристичний поліном має вигляд

$$\det(pI - A) = \begin{vmatrix} p-1 & -1 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 \\ -1 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^3 = p^3 - 3p^2 + 3p - 1.$$

Звідси

$$a_1 = -3; \quad a_2 = 3; \quad a_3 = -1.$$

Матриця Фробеніуса

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перетворене рівняння набуває вигляду

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{A}\tilde{v} + \tilde{B}u,$$

або

$$\dot{\bar{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \bar{v} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Матриця перетворень, що відповідає цьому рівнянню, $T = \tilde{P}P^{-1}$ ($\tilde{P}$, P – матриці керованості канонічної та початкової моделей відповідно).

9.3. Канонічна спостережувана форма Луенбергера

Розглянемо рівняння об'єкта керування

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + Bu; \\ \bar{y} &= C\bar{x}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Твердження. Якщо система (9.10) повністю спостережувана, то вона може бути приведена шляхом перетворень до спостережуваної канонічної форми Луенбергера наступного вигляду:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ – матриця Фробеніуса;}$$

$$\tilde{C} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1).$$

У цьому випадку матриця перетворень може бути визначена за формулою

$$T = \tilde{N}^{-1}N,$$

де $\tilde{N}$, N – відповідно матриці спостережуваності канонічної та початкової моделей.

10. МОДАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ ЗА СТАНОМ

10.1. Синтез регуляторів з бажаними показниками якості

Характер перехідних процесів у системі визначається розташуванням коренів її характеристичного рівняння. Тому забезпечити бажані перехідні процеси можна за рахунок відповідного розташування коренів на комплексній площині. Регулятори, побудовані таким чином, називаються модальними регуляторами. Виникнення терміну "модальне керування" пояснюється тим, що кореням відповідають складові вільного руху системи, які інколи називають модами [3–5, 14, 17].

Розглянемо задачу модального керування при повному вимірюванні вектора стану об'єкта $\bar{x}(t)$. Для спрощення викладу будемо вважати, що керування $u(t)$ є скалярним.

Нехай поведінка об'єкта керування визначається рівнянням

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu$$

або

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (10.1)$$

де $\bar{u}$ – одновимірна матриця, елементом якої є скалярна функція керування $u(t)$; $B\bar{u}$ – зовнішній матричний добуток (визначається за тим же правилом, що і Bu).

Розглянемо закон керування вигляду

$$u(t) = -K\bar{x}(t), \quad (10.2)$$

де $K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n)$ – невідома матриця коефіцієнтів регулятора; n – порядок об'єкта.

Замкнена система "об'єкт-регулятор" описується рівнянням

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A - BK)\bar{x}(t). \quad (10.3)$$

Необхідно визначити такі коефіцієнти $k_1, k_2, \dots, k_n$ регулятора (елементи матриці K), щоб характеристичний поліном

$$D_{\bar{6}}(p) = \det(pI - A + BK) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n$$

мав задані бажані коефіцієнти d_i ,

Розглянемо процедуру синтезу більш детально.

Припустимо спочатку, що рівняння (10.1) відповідає канонічній керованій формі Луенбергера, тобто матриці A та B мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Тоді

$$\det(pI - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

При використанні регулятора (10.2) з матрицею K , як легко переко-
натися безпосередньою підстановкою, матриця $A-BK$ замкненої систе-
ми (10.3) також має вигляд матриці Фробеніуса та її характеристичний
поліном

$$\det(pI - A + BK) = p^n + (a_1 + k_n)p^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + k_2)p + a_n + k_1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти цього багаточлена до заданих значень d_i , отримаємо наступні вирази для коефіцієнтів регулятора:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = d_n - a_n; \\ k_2 = d_{n-1} - a_{n-1}; \\ \dots\dots\dots \\ k_{n-1} = d_2 - a_2; \\ k_n = d_1 - a_1, \end{array} \right. \quad (10.5)$$

або

$$k_i = d_{n-i+1} - a_{n-i+1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Нехай тепер рівняння стану системи записані в довільній, а не в канонічній формі, а об'єкт (10.1) є повністю керованим. У цьому випадку існує матриця T перетворень подібності, що приводить рівняння стану до керованої форми Луенбергера. Вона знаходиться, як було з'ясовано вище, за формулою

$$T = \tilde{P} P^{-1},$$

де $\tilde{P}$, P – матриці керованості канонічної та початкової форм відповідно.

Отже, вважаємо, що матриці перетвореного об'єкта

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \quad \tilde{B} = TB$$

мають вигляд (10.4), причому

$$\det(pI - A) = \det(pI - \tilde{A}).$$

Знайдемо для системи $(\tilde{A}, \tilde{B})$ коефіцієнти модального регулятора (елементи матриці $\tilde{K}$) за формулою (10.5). Далі виконаємо перехід до початкового базису. Оскільки

$$\bar{v}(t) = T \tilde{v}(t),$$

то

$$u(t) = -\tilde{K} \tilde{v}(t) = -\tilde{K} T \bar{x}(t),$$

звідси

$$K = \tilde{K} T.$$

Таким чином, для повністю керованої системи зі скалярним керуванням отримані коефіцієнти зворотного зв'язку модального регулятора.

10.2. Алгоритм розрахунку коефіцієнтів модального регулятора

1. Складаємо рівняння стану об'єкта у векторній формі:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t).$$

2. Обчислюємо матрицю керованості

$$P = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

та перевіряємо повну керованість системи за рангом цієї матриці. Він повинен збігатися з розмірністю системи.

3. Знаходимо вираз для характеристичного полінома розімкнутої системи та нормуємо його за коефіцієнтами по старшому степеню оператора Лапласа:

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n.$$

4. Задаємо бажаний характеристичний поліном

$$D_6(p) = p^n + d_1p^{n-1} + \dots + d_{n-1}p + d_n.$$

5. Розраховуємо коефіцієнти модального регулятора перетвореної системи:

$$\tilde{k}_i = d_{n-i+1} - a_{n-i+1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

6. Обчислюємо матрицю перетворення

$$T = \tilde{P}P^{-1},$$

або за формулою Аккермана

$$T = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1A \\ P_1A^2 \\ \dots \\ P_1A^{n-1} \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

7. Розрахуємо коефіцієнти модального регулятора початкової системи:

$$K = \tilde{K}T.$$

10.3. Формула Аккермана

Для системи з одним входом і одним виходом матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, за допомогою якої формується керуючий сигнал $u(t) = -K\bar{x}(t)$, можна знайти за формулою Аккермана [14, 17].

Якщо задано бажаний характеристичний поліном замкненої системи

$$D_6(p) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n,$$

то матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку за станом

$$K = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)P^{-1}D_6(A),$$

де $D_6(A) = A^n + d_1 A^{n-1} + \dots + d_{n-1} A + d_n I$; $P = \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix}$.

Відмітимо, що елементи матриці K можуть бути розраховані безпосередньо при розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь, отриманої шляхом прирівнювання виразів для коефіцієнтів бажаного та дійсного характеристичного поліномів замкнених систем. Цей метод зручно застосовувати при розрахунках вручну. В цьому випадку зникає необхідність зведення рівнянь стану до канонічної форми.

11. СТАНДАРТНІ ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПОЛІНОМИ ЗАМКНЕНИХ СИСТЕМ

При синтезі модального регулятора використовуються стандартні характеристичні поліноми [5, 7, 14, 18]. Для цих поліномів вивчені та побудовані криві перехідних процесів. Ці криві є оптимальними відносно деякого критерію якості та трактуються як *бажані характеристики перехідних процесів*.

Розглянемо основні види характеристичних поліномів та бажані характеристики перехідних процесів.

11.1. Характеристичні поліноми моделі, що оптимізовані за інтегральним критерієм якості

Інтегральний критерій якості описується виразом

$$F = \int_0^{\infty} t |1(t) - h(t)| dt,$$

де $1(t)$ – одинична ступенева функція; $h(t)$ – перехідна функція системи.

За результатами мінімізації цього інтеграла можна одержати оптимальні перехідні процеси для систем різного порядку. На рис. 11.1 такі процеси наведені для систем 2-го–6-го порядків у залежності від безрозмірного часу $\tau = q_0 t$ (q_0 – базова частота або середньгеометричний корінь полінома; t – час).

У табл. 11.1 наведені характеристичні поліноми, які відповідають графікам на рис. 11.1, а також відносний час перехідного процесу τ_n .

Таблиця 11.1. Характеристичні поліноми моделей, що оптимізовані

за критерієм $F = \int_0^{\infty} t |l(t) - h(t)| dt$

Степінь полінома	Вид полінома	τ_{Π}
2	$p^2 + 1,41 q_0 p + q_0^2$	2,8
3	$p^3 + 1,75 q_0 p^2 + 2,15 q_0^2 p + q_0^3$	3,6
4	$p^4 + 2,1 q_0 p^3 + 3,4 q_0^2 p^2 + 2,7 q_0^3 p + q_0^4$	4,7
5	$p^5 + 2,8 q_0 p^4 + 5 q_0^2 p^3 + 5,5 q_0^3 p^2 + 3,4 q_0^4 p + q_0^5$	7,8
6	$p^6 + 3,25 q_0 p^5 + 6,6 q_0^2 p^4 + 8,6 q_0^3 p^3 + 7,45 q_0^4 p^2 + 3,95 q_0^5 p + q_0^6$	8,4

11.2. Характеристичні поліноми Бесселя–Томсона

Такі поліноми використовуються для усунення фазових викривлень сигналів, які будуть тим більші, чим більше фазова частотна характеристика системи відрізняється від лінійної.

Фільтри Бесселя–Томсона мають фазочастотну характеристику, близьку до лінійної.

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми моделі Бесселя–Томсона наведені відповідно на рис. 11.2 та в табл. 11.2.

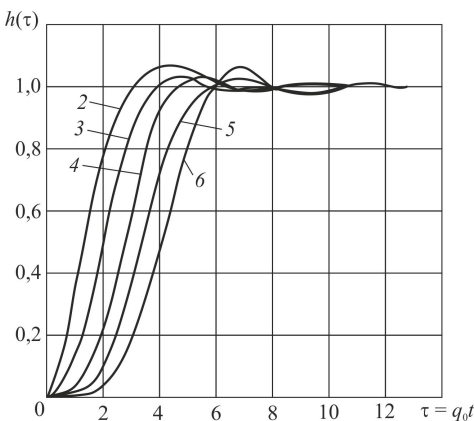


Рис. 11.1. Перехідні характеристики моделей, що оптимізовані за критерієм

$$F = \int_0^{\infty} t |l(t) - h(t)| dt$$

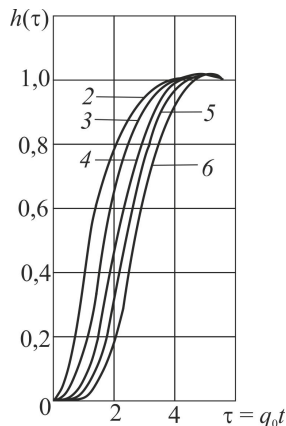


Рис. 11.2. Перехідні характеристики моделі Бесселя–Томсона

Таблиця 11.2. Характеристичні поліноми моделі Бесселя–Томсона

Степінь полінома	Вид полінома
2	$p^2 + 2,2 q_0 p + 1,62 q_0^2$
3	$p^3 + 3,42 q_0 p^2 + 4,87 q_0^2 p + 2,77 q_0^3$
4	$p^4 + 4,73 q_0 p^3 + 10,1 q_0^2 p^2 + 11,1 q_0^3 p + 5,26 q_0^4$
5	$p^5 + 6,18 q_0 p^4 + 17,8 q_0^2 p^3 + 29,4 q_0^3 p^2 + 27,2 q_0^4 p + 11,2 q_0^5$
6	$p^6 + 7,77 q_0 p^5 + 28,7 q_0^2 p^4 + 63,8 q_0^3 p^3 + 88,5 q_0^4 p^2 + 72 q_0^5 p + 26,6 q_0^6$

11.3. Характеристичні поліноми Баттерворта

Дані поліноми використовуються для усунення амплітудних викривлень, за яких амплітудно-частотна характеристика системи є плоскою в робочому діапазоні частот.

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми Баттерворта наведені відповідно на рис. 11.3 та в табл. 11.3.

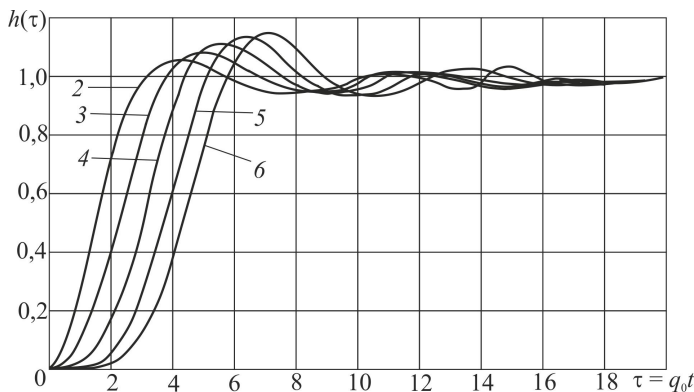


Рис. 11.3. Перехідні характеристики моделі Баттерворта

Таблиця 11.3. Характеристичні поліноми моделі Баттерворта

Степінь полінома	Вид полінома	τ_n
2	$p^2 + 1,41 q_0 p + q_0^2$	2,8
3	$p^3 + 2 q_0 p^2 + 2 q_0^2 p + q_0^3$	5,9
4	$p^4 + 2,61 q_0 p^3 + 3,41 q_0^2 p^2 + 2,61 q_0^3 p + q_0^4$	6,9
5	$p^5 + 3,24 q_0 p^4 + 5,24 q_0^2 p^3 + 5,24 q_0^3 p^2 + 3,24 q_0^4 p + q_0^5$	7,8
6	$p^6 + 3,86 q_0 p^5 + 7,46 q_0^2 p^4 + 9,14 q_0^3 p^3 + 7,46 q_0^4 p^2 + 3,86 q_0^5 p + q_0^6$	8,0

11.4. Характеристичні поліноми Еллєрта

Такі поліноми забезпечують нульову швидкісну похибку та мінімальне перегулювання, що не перевищує 10 %.

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми моделі Еллєрта наведені відповідно на рис. 11.4 та в табл. 11.4.

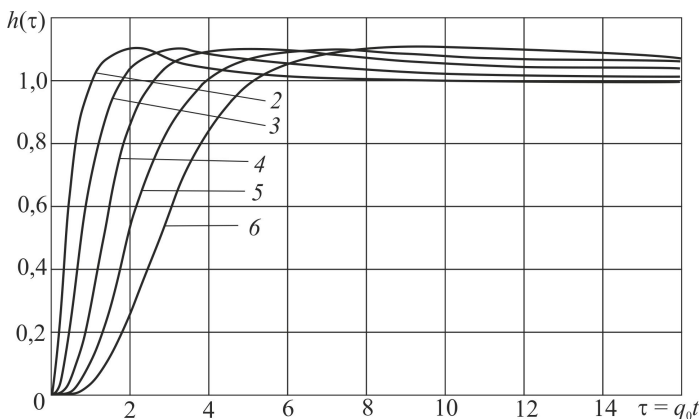


Рис. 11.4. Перехідні характеристики моделі Еллєрта

Таблиця 11.4. Характеристичні поліноми моделі Еллєрта

Степінь полінома	Вид полінома
2	$p^2 + 2,5 q_0 p + q_0^2$
3	$p^3 + 5,1 q_0 p^2 + 6,3 q_0^2 p + q_0^3$
4	$p^4 + 7,2 q_0 p^3 + 16 q_0^2 p^2 + 12 q_0^3 p + q_0^4$
5	$p^5 + 9 q_0 p^4 + 29 q_0^2 p^3 + 385 q_0^3 p^2 + 18 q_0^4 p + q_0^5$
6	$p^6 + 11 q_0 p^5 + 43 q_0^2 p^4 + 83 q_0^3 p^3 + 73 q_0^4 p^2 + 25 q_0^5 p + q_0^6$

11.5. Характеристичні поліноми біноміальної моделі

Перехідні характеристики та характеристичні поліноми біноміальної моделі отримані на базі бінома Ньютона та наведені відповідно на рис. 11.5 і в табл. 11.5.

Стандартні характеристичні поліноми розглянутих моделей отримані з відповідних поліномів n -го степеня цих моделей

$$D_0 p^n + D_1 p^{n-1} + \dots + D_i p^{n-i} + \dots + D_{n-1} p + D_n$$

шляхом ділення на D_0 з подальшим перетворенням до вигляду

$$D_0(p) = p^n + c_1 q_0 p^{n-1} + \dots + c_i q_0^i p^{n-i} + \dots + c_n q_0^n,$$

де $q_0 = \sqrt[n]{\frac{D_n}{D_0}}$; $c_i = \frac{D_i}{D_0 q_0^i}$.

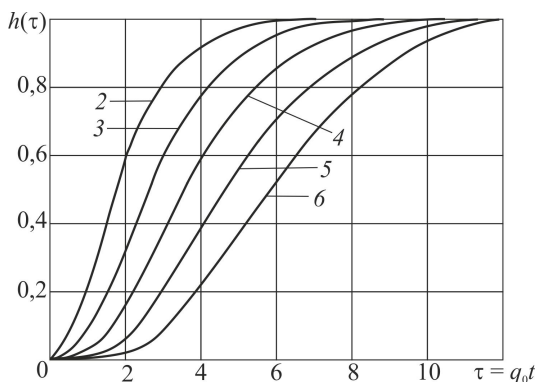


Рис. 11.5. Перехідні характеристики біноміальної моделі

Таблиця 11.5. Характеристичні поліноми біноміальної моделі

Степінь полінома	Вид полінома	τ_n
2	$p^2 + 2 q_0 p + q_0^2$	4,8
3	$p^3 + 3 q_0 p^2 + 3 q_0^2 p + q_0^3$	6,3
4	$p^4 + 4 q_0 p^3 + 6 q_0^2 p^2 + 4 q_0^3 p + q_0^4$	7,8
5	$p^5 + 5 q_0 p^4 + 10 q_0^2 p^3 + 10 q_0^3 p^2 + 5 q_0^4 p + q_0^5$	9,2
6	$p^6 + 6 q_0 p^5 + 15 q_0^2 p^4 + 20 q_0^3 p^3 + 15 q_0^4 p^2 + 6 q_0^5 p + q_0^6$	10,5

Відносний час перехідного процесу τ_{Π} визначається за перехідними характеристиками. Часом перехідного процесу t_{Π} зазвичай задаються.

Приклад 1. Розглянемо систему 2-го порядку з передавальною функцією $W(p) = 1/p^2$ та визначимо коефіцієнти зворотного зв'язку за станом, які дозволяють забезпечити перерегулювання не більше 10 % та нульову швидкісну похибку при заданому часі перехідного процесу $t_{\Pi} = 8$ с.

Заданим показником якості задовольняє модель Еллерта з характеристичним поліномом (див. табл. 11.4)

$$D_6(p) = p^2 + 2,5q_0p + q_0^2.$$

За рис. 11.4 знаходимо $\tau_{\Pi} = 8$. Обчислюємо

$$q_0 = \frac{\tau_{\Pi}}{t_{\Pi}} = 1; \quad D_6(p) = p^2 + 2,5p + 1.$$

Рівняння стану початкової системи в нормальній формі Коші

$$\frac{x(p)}{u(p)} = \frac{1}{p^2}.$$

$$\text{Звідси } \ddot{x} = u, \text{ або } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

Запишемо цю систему рівнянь у векторній формі:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu,$$

$$\text{де } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Матриця керованості } P = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Її $\det P \neq 0$, тому система повністю керована.

Знайдемо обернену матрицю

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} P^*,$$

де P^* – приєднана матриця.

Визначимо матрицю алгебраїчних доповнень

$$P^{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю P^{Δ} . Тоді знайдемо приєднану матрицю

$$P^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі обчислюємо

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} D_6(A) &= A^2 + 2,5A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2,5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2,5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

За формулою Аккермана остаточно отримуємо

$$K = (0 \ 1)P^{-1}D_6(A) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2,5).$$

Таким чином, коефіцієнти регулятора $k_1 = 1$, $k_2 = 2,5$.

Закон керування

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 = -x_1 - 2,5x_2.$$

Структурну схему системи в просторі сигналів зі знайденими зворотними зв'язками подано на рис. 11.6.

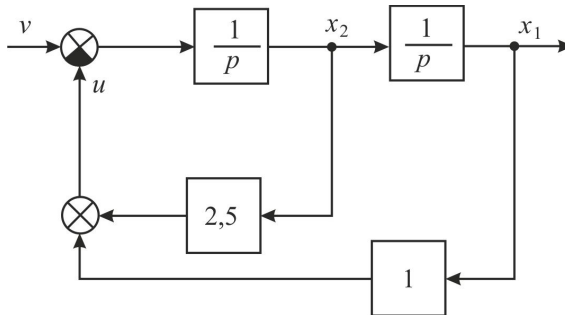


Рис. 11.6. Структурна схема системи з бажаними показниками якості

Приклад 2. Розглянемо систему 3-го порядку

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = u$$

та визначимо матрицю зворотного зв'язку за станом з відносним перерегулюванням менше 10 % та часом перехідного процесу $t_{\pi} = 1,475$ с.

За змінні стану візьмемо $x_1 = y$, $x_2 = dy/dt$, $x_3 = d^2 y/dt^2$.

Запишемо рівняння стану в матричній формі:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Тут матриці A та B мають форму Фробеніуса.

Обчислюємо матрицю керованості

$$P = \begin{pmatrix} B & AB & A^2 B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Її визначник } \det P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 22 \end{vmatrix} = -1.$$

Оскільки $\det P \neq 0$, то матриця P не вироджена. Отже, система є повністю керованою.

Оберемо бажаний характеристичний поліном Баттерворта, який задовольняє задані показники якості (див. табл. 11.3):

$$D_6(p) = p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3,$$

де $d_1 = 2q_0$; $d_2 = 2q_0^2$; $d_3 = q_0^3$.

За рис. 11.3 або табл. 11.3 знаходимо $\tau_{\Pi} = 5,9$.

Визначаємо наступні величини:

$$q_0 = \frac{\tau_{\Pi}}{t_{\Pi}} = 4; \quad d_1 = 8; \quad d_2 = 32; \quad d_3 = 64.$$

Знайдемо характеристичний поліном системи:

$$\begin{aligned} \det(pI - A) &= \det \left(p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 2 & 3 & p+5 \end{pmatrix} = p^3 + 5p^2 + 3p + 2. \end{aligned}$$

Коефіцієнти цього полінома $a_1 = 5$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$. Відмітимо, що їх можна було б записати відразу, якщо використати останній рядок матриці Фробеніуса.

Коефіцієнти зворотного зв'язку визначаємо за формулою (10.5):

$$k_1 = d_3 - a_3 = 64 - 2 = 62;$$

$$k_2 = d_2 - a_2 = 32 - 3 = 29;$$

$$k_3 = d_1 - a_1 = 8 - 5 = 3.$$

Приклад 3. Синтезувати систему керування технологічним об'єктом, задану структурною схемою на рис. 11.7.

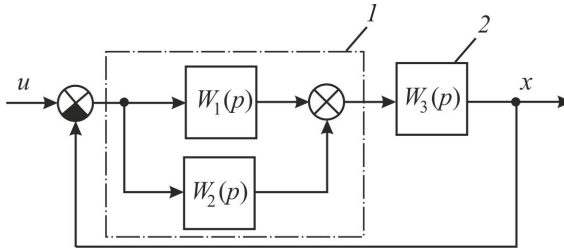


Рис. 11.7. Структурна схема системи:
1 – регулятор; 2 – об'єкт керування

Початкові дані: $W_1(p) = \frac{k_1}{p}$; $W_2(p) = k_2$; $W_3(p) = \frac{k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$;

$k_3 = 1$; $T_1 = 5$ с; $T_2 = 25$ с.

При визначенні матриці зворотного зв'язку використати модель Баттерворта.

Спочатку запишемо передавальну функцію регулятора:

$$W_{\text{рег}}(p) = W_1(p) + W_2(p) = \frac{k_1}{p} + k_2 = \frac{k_1((k_2/k_1)p + 1)}{p}.$$

Розірвемо систему за каналом від'ємного зворотного зв'язку та запишемо передавальну функцію розірваної системи:

$$W_{\text{роз}}(p) = W_{\text{рег}}(p)W_3(p) = \frac{k_1((k_2/k_1)p + 1)}{p} \frac{k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}.$$

Якщо взяти $k_2/k_1 = T_2$, то можна компенсувати сталу часу T_2 .

Тоді

$$W_{\text{роз}}(p) = \frac{k_1(T_2 p + 1)}{p} \frac{k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} = \frac{k_1 k_3}{p(T_1 p + 1)}.$$

Передавальна функція системи, замкненої за каналом від'ємного зворотного зв'язку:

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{роз}}(p)}{1 + W_{\text{роз}}(p)} = \frac{k_1 k_3 / T_1}{p^2 + \frac{1}{T_1} p + \frac{k_1 k_3}{T_1}}.$$

Система має 2-й порядок. Її характеристичний поліном

$$D(p) = p^2 + \frac{1}{T_1} p + \frac{k_1 k_3}{T_1}.$$

Характеристичний поліном стандартної моделі Баттерворта

$$D_6(p) = p^2 + 1,41 q_0 p + q_0^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти поліномів при однакових степенях оператора p , отримуємо

$$\frac{1}{T_1} = 1,41 q_0, \quad \frac{k_1 k_3}{T_1} = q_0^2.$$

Звідси знаходимо

$$q_0 = \frac{1}{1,41 T_1} = \frac{1}{1,41 \cdot 5} = 0,1418 \text{ с}^{-1};$$

$$k_1 = \frac{T_1 q_0^2}{k_3} = \frac{5 \cdot 0,1418^2}{1} = 0,1 \text{ с}^{-1};$$

$$k_2 = k_1 T_2 = 0,1 \cdot 25 = 2,5.$$

За рис. 11.3 або табл. 11.3 $\tau_{\text{п}} = 2,8$. Визначаємо час перехідного процесу

$$t_{\text{п}} = \frac{\tau_{\text{п}}}{q_0} = \frac{2,8}{0,1418} = 19,75 \text{ с}.$$

12. СИНТЕЗ СПОСТЕРІГАЮЧИХ ПРИСТРОЇВ

При синтезі оптимальних систем зі зворотним зв'язком за станом та бажаними показниками якості перехідних процесів параметри керування обираються пропорційними фазовим координатам. Проте не всі фазові координати піддаються вимірюванню. Доступними вимірюванню (відновленню або спостереженню) є координати вихідного вектора. Вони функціонально пов'язані з фазовими координатами. Тому фазові координати зазвичай визначаються за вимірами значень вихідних змінних за допомогою спеціальних пристроїв – спостерігачів [3–5, 13, 14].

Розрізняють спостерігачі повного та зниженого порядку. Спостерігачі повного порядку повністю відновлюють вектор стану, а зниженого порядку – частково.

Емпірично встановлено, що спостерігач повинен мати швидкодію, більшу у 2...10 разів за швидкодію об'єкта керування.

12.1. Спостерігач повного порядку

Перейдемо до задачі синтезу спостерігача повного порядку, який повністю відновлює поточні значення фазових координат (фазового вектора $\bar{x}(t)$). Відновлені значення цих координат називають оцінками. Позначимо їх фазовий вектор $\hat{\bar{x}}(t)$. Оцінки отримують за вимірюваннями (спостереженнями) вектора керування $\bar{u}(t)$ та вихідного вектора $\bar{y}(t)$ на інтервалі часу $t_0 \leq t \leq t_f$.

Означення. Пристрій, що описується рівнянням

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = F\hat{\bar{x}} + G\bar{u} + H\bar{y}, \quad (12.1)$$

називається спостерігачем повного порядку для керованої системи

$$\dot{\hat{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}; \quad (12.2a)$$

$$\bar{y} = C\bar{x}, \quad (12.2б)$$

якщо при $\hat{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$ виконується рівність $\hat{x}(t) = \bar{x}(t)$ при всіх $\bar{u}(t); t \geq t_0$.

Спостерігач (12.1) названо спостерігачем повного порядку, оскільки оцінка $\hat{x}$ має таку саме розмірність, що і вектор стану $\bar{x}$.

Теорема. Спостерігач повного порядку для керованої системи (12.2) має вигляд

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\bar{u} + G(\bar{y} - C\hat{x}), \quad (12.3)$$

де G – довільна матриця, яка може бути функцією від часу та називається матрицею коефіцієнтів підсилення.

Доведення. Підставимо (12.2б) в (12.1):

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + GC\bar{x} + H\bar{u}. \quad (12.4)$$

Віднімемо з (12.2a) рівняння (12.4):

$$\dot{\hat{x}} - \dot{\bar{x}} = (A - GC)\bar{x} - F\hat{x} + (B - H)\bar{u}.$$

Із цього рівняння випливає, що при початковій умові $\hat{x}(t_0) = \bar{x}(t_0)$ рівність $\hat{x}(t) = \bar{x}(t)$ буде виконуватися при всіх $\bar{u}(t); t \geq t_0$, якщо

$$A - GC = F, B = H. \quad (12.5)$$

Оскільки в перше рівняння входять дві невідомі матриці G та F , одну з них, наприклад матрицю G , можна вважати довільною. Підставивши вираз (12.5) для матриць F та H в рівняння (12.1), отримаємо вираз (12.3). Теорема доведена.

З рівняння (12.3) випливає, що спостерігач системи (12.2) включає в себе саму систему та додатковий доданок, пропорційний різниці $(\bar{y} - \hat{y})$ вихідного вектора $\bar{y}$ та його оцінки $\hat{y} = C\hat{x}$.

Матрична структурна схема спостерігача повного порядку наведена на рис. 12.1.

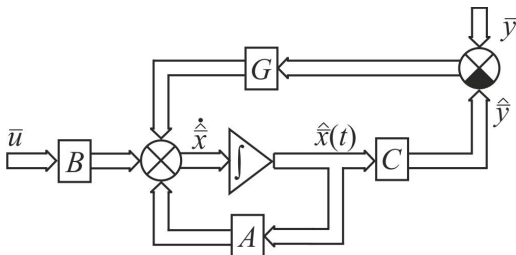


Рис. 12.1. Матрична структурна схема спостерігача повного порядку

З формули (12.3) видно, що спостерігач повного порядку можна також подати у вигляді

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = (A - GC)\hat{\bar{x}} + B\bar{u} + G\bar{y}.$$

Звідси випливає, що стійкість спостерігача (12.3) визначається поведінкою матриці $A - GC$.

Рівняння для помилки $\Delta\bar{x} = \hat{\bar{x}} - \bar{x}$ має вигляд

$$\Delta\dot{\bar{x}} = (A - GC)\Delta\bar{x}. \quad (12.6)$$

Звідси випливає, що помилка $\Delta\bar{x}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ незалежно від початкової помилки тоді й тільки тоді, коли спостерігач є асимптотично стійким. Тому вибір матриці коефіцієнтів G , до якої зводиться синтез спостерігача (12.3), повинен відбуватися згідно з умовами стійкості та заданими вимогами до його якості. Для детермінованих систем (усі матриці системи, в тому числі й G , сталі) це досягається відповідним розташуванням коренів характеристичного рівняння спостерігача при дотриманні повної спостережуваності об'єкта керування.

12.2. Принцип роздільності

Розглянемо спостерігач сумісно з об'єктом керування і модальним регулятором:

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = A\hat{\bar{x}} + B\bar{u} + G(\bar{y} - C\hat{\bar{x}}); \quad (12.7a)$$

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}; \quad \bar{y} = C\bar{x}; \quad (12.76)$$

$$\bar{u} = \bar{v} - K\hat{\bar{x}}, \quad (12.7в)$$

де $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$; $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)^T$; A – квадратна матриця об'єкта керування розміру $n \times n$; B – прямокутна матриця розміру $n \times m$; G – матриця регулятора спостерігаючого пристрою розміру $n \times r$; C – матриця виходів, які доступні вимірюванню, розміру $r \times n$; K – прямокутна матриця модального регулятора розміру $m \times n$.

Рівняння системи (12.7а) є рівнянням спостерігача, (12.7б) – об'єкта керування, (12.7в) – це рівняння замикання для модального регулятора.

Наведеній системі рівнянь відповідає матрична структурна схема системи (рис. 12.2).

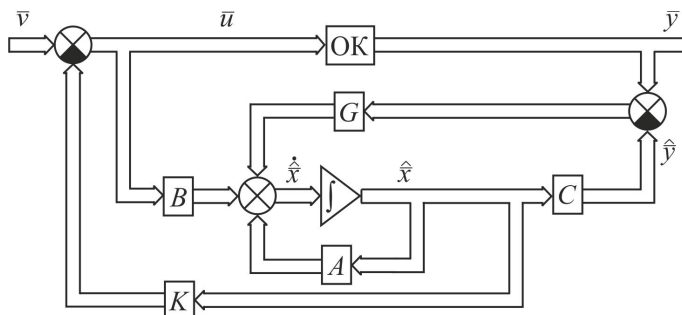


Рис.12.2. Матрична структурна схема спостерігача повного порядку об'єкта керування (ОК) з модальним регулятором

Запишемо характеристичний поліном спостерігача

$$D(p) = \det(pI - A + GC),$$

який впливає з рівняння (12.7а).

Таким чином, спостерігач являє собою замкнену систему, в якій зворотні зв'язки з матричним коефіцієнтом G виконують функцію модального регулятора спостерігача.

Запишемо рівняння (12.6) для помилки $\Delta\bar{x} = \hat{\bar{x}} - \bar{x}$ спостереження:

$$\Delta\dot{\bar{x}} = (A - GC)\Delta\bar{x}. \quad (12.8)$$

Із цього рівняння випливає, що при стійкому спостерігачі помилка спостереження в сталому режимі дорівнює нулю.

Система рівнянь (12.7) пов'язує між собою дві системи: об'єкт керування з модальним регулятором та спостерігач з об'єктом керування.

Припустимо, що у виразі (12.7в) $\bar{v} = 0$. Тоді отримаємо

$$\bar{u} = -K\hat{x}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння системи (12.7а):

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} + G(\bar{y} - C\hat{x}). \quad (12.9)$$

З виразу для помилки маємо

$$\hat{x} = \bar{x} + \Delta\bar{x}. \quad (12.10)$$

Підставивши (12.10) в (12.9) та виконавши перетворення, отримаємо з урахуванням виразу (12.8) наступне рівняння:

$$\dot{\bar{x}} = (A - BK)\bar{x} - BK\Delta\bar{x}. \quad (12.11)$$

Рівняння (12.11) та (12.8) перепишемо в операторній формі:

$$(pI - A + BK)\bar{x}(p) + BK\Delta\bar{x}(p) = 0;$$

$$0 \cdot \bar{x}(p) + (pI - A + GC)\Delta\bar{x}(p) = 0.$$

Цій системі однорідних рівнянь відповідає характеристична матриця

$$\begin{pmatrix} pI - A + BK & BK \\ 0 & pI - A + GC \end{pmatrix}.$$

Її характеристичний поліном

$$D(p) = \det(pI - A + BK) \det(pI - A + GC).$$

Видно, що цей поліном складається з добутку двох характеристичних поліномів. Тому об'єкт керування, замкнутий за вектором стану, оціненим спостерігачем, можна розглядати незалежно від самого спостерігача. Цей *принцип роздільності* істотно спрощує синтез спостерігача та модального регулятора.

12.3. Алгоритм синтезу спостерігача повного порядку

Будемо вважати, що керування $u(t)$ є скалярним.

1. Складаємо рівняння стану та виходу об'єкта у векторній формі:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t);$$

$$\bar{y} = C\bar{x}.$$

2. Обчислюємо матрицю спостережуваності

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

та перевіряємо повну спостережуваність системи за рангом цієї матриці. Він повинен збігатися з розмірністю системи.

3. Знаходимо вираз для характеристичного полінома розімкнутої системи та нормуємо його за коефіцієнтами по старшому степеню оператора Лапласа:

$$D(p) = \det(pI - A) = p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n.$$

4. Записуємо за коефіцієнтами $D(p)$ пару матриць $(\tilde{A}, \tilde{C})$ у спостережуваній формі Луенбергера:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \text{ — матриця Фробеніуса;}$$

$$\tilde{C} = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1).$$

5. Задаємо бажаний характеристичний поліном

$$D_6(p) = p^n + d_1 p^{n-1} + \dots + d_{n-1} p + d_n.$$

6. Розраховуємо елементи матриці коефіцієнтів підсилення $\tilde{G} = (\tilde{g}_1 \quad \tilde{g}_2 \quad \dots \quad \tilde{g}_n)^T$ канонічної моделі:

$$\tilde{g}_i = d_{n-i+1} - a_{n-i+1}, \quad i = \overline{1, n}.$$

7. Обчислюємо матрицю перетворення

$$T = \tilde{N}^{-1} N,$$

де N , $\tilde{N}$ – відповідно матриці спостережуваності початкової і канонічної моделей.

8. Перетворимо елементи матриці $\tilde{G}$ в початковий базис:

$$G = T^{-1} \tilde{G}.$$

9. Перевіряємо елементи матриці G за формулою Аккермана:

$$G = D_6(A) N^{-1} (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T.$$

10. Будуємо структурну схему спостерігача.

12.4. Приклад синтезу модального регулятора зі спостерігачем повного порядку

Розглянемо синтез модального регулятора зі спостерігачем повного порядку на конкретному прикладі об'єкта керування, заданого структурною схемою на рис. 12.3.

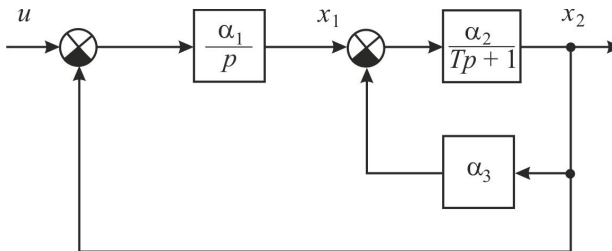


Рис. 12.3. Структурна схема об'єкта керування

Параметри об'єкта керування такі: $\alpha_1 = 1,5$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 1,1$; $T = 3$ с.

Бажаний розподіл коренів характеристичного полінома повинен відповідати біноміальній стандартній лінійній формі. Узяти базову частоту характеристичного полінома регулятора $q_0 = 1,25$ с⁻¹, а спостерігача – $q_c = (5 \dots 10) q_0$.

Послідовність синтезу наведено нижче.

1. Складаємо диференціальні рівняння стану та виходу системи в нормальній векторній формі.

Для цього спочатку запишемо передавальні функції елементів об'єкта керування:

$$\frac{x_1}{u - x_2} = \frac{\alpha_1}{p}, \quad \frac{x_2}{x_1 - \alpha_3 x_2} = \frac{\alpha_2}{Tp + 1}.$$

Звідси отримаємо

$$px_1 = -\alpha_1 x_2 + \alpha_1 u;$$

$$px_2 = \frac{\alpha_2}{T} x_1 - \frac{1 + \alpha_2 \alpha_3}{T} x_2.$$

Остаточно маємо

$$\dot{x}_1 = -1,5x_2 + 1,5u;$$

$$\dot{x}_2 = 0,333x_1 - 0,7x_2.$$

Векторне рівняння об'єкта керування в нормальній формі

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu,$$

$$\text{де } A = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Складаємо рівняння спостереження:

$$\bar{y} = C\bar{x},$$

де $C = (0 \quad 1)$.

2. Обчислюємо матрицю керованості

$$P = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$\text{де } AB = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці керованості

$$\det P = \begin{vmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,75.$$

Оскільки $\det P \neq 0$, то система повністю керована.

3. Визначаємо характеристичний поліном об'єкта керування та нормуємо його за коефіцієнтом при старшому степеню оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} D(p) &= \det(pI - A) = \det \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} p & 1,5 \\ -0,333 & p + 0,7 \end{pmatrix} = p^2 + 0,7p + 0,5, \end{aligned}$$

або

$$D(p) = p^2 + a_1 p + a_2,$$

де $a_1 = 0,7$; $a_2 = 0,5$.

4. Отримуємо за коефіцієнтами $D(p)$ пару матриць $(\tilde{A}, \tilde{B})$ у керованій формі Луенбергера:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & -0,7 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Записуємо бажаний характеристичний поліном замкненої системи відповідно до умов задачі:

$$D_6(p) = p^2 + 2q_0p + q_0^2,$$

або

$$D_6(p) = p^2 + d_1p + d_2,$$

де $d_1 = 2q_0 = 2 \cdot 1,25 = 2,5$; $d_2 = q_0^2 = 1,25^2 = 1,5625$.

6. Обчислюємо елементи матриці зворотного зв'язку $\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 \end{pmatrix}$:

$$\tilde{k}_1 = d_2 - a_2 = 1,5625 - 0,5 = 1,0625;$$

$$\tilde{k}_2 = d_1 - a_1 = 2,5 - 0,7 = 1,8.$$

7. Обчислюємо матрицю перетворення за формулою Аккермана

$$T = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 A \\ P_1 A^2 \\ \dots \\ P_1 A^{n-1} \end{pmatrix}, \quad P_1 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)P^{-1}.$$

Обернена матриця керованості

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} P^*,$$

де P^* – приєднана матриця.

Знайдемо матрицю алгебраїчних доповнень

$$P^{\text{д}} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю P^d . Тоді знайдемо приєднану матрицю

$$P^* = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо обернену матрицю:

$$P^{-1} = \frac{1}{0,75} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,67 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матриці P_1 та $P_1 A$:

$$P_1 = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0,667 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (0 \quad 2);$$

$$P_1 A = (0 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} = (0,667 \quad -1,4).$$

Остаточно матриця перетворень

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,667 & -1,4 \end{pmatrix}.$$

8. Перетворюємо елементи матриці $\tilde{K}$ у початковий базис:

$$K = \tilde{K} T;$$

$$K = (1,0625 \quad 1,8) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,667 & -1,4 \end{pmatrix} = (1,2 \quad -0,395).$$

Звідси

$$k_1 = 1,2; \quad k_2 = -0,395.$$

9. Перевіряємо елементи матриці K за формулою Аккермана:

$$K = (0 \quad 1) P^{-1} D_6(A).$$

Бажаний характеристичний поліном замкненої системи

$$\begin{aligned}
 D_6(A) &= A^2 + 2,5A + 1,5625I = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix}^2 + \\
 &+ 2,5 \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} + 1,5625 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 1,05 \\ -0,23 & -0,01 \end{pmatrix} + \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 & -3,75 \\ 0,83 & -1,75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5625 & 0 \\ 0 & 1,5625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0625 & -2,7 \\ 0,6 & -0,1975 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned}
 K &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0,667 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,0625 & -2,7 \\ 0,6 & -0,1975 \end{pmatrix} = \\
 &= (0 \ 2) \begin{pmatrix} 1,0625 & -2,7 \\ 0,6 & -0,1975 \end{pmatrix} = (1,2 \ -0,395); \\
 k_1 &= 1,2; \ k_2 = -0,395.
 \end{aligned}$$

10. Обчислюємо матрицю спостережуваності:

$$N = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix},$$

$$\text{де } CA = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} = (0,333 \ -0,7).$$

Визначник матриці спостережуваності

$$\det N = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0,333 & -0,7 \end{vmatrix} = -0,333.$$

Оскільки $\det N \neq 0$, то система є повністю спостережуваною.

11. Записуємо за коефіцієнтами $D(p)$ пару матриць $(\tilde{A}, \tilde{C})$ у спостережуваній формі Луенбергера:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & -0,7 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (0 \quad 1).$$

12. Задаємося бажаним характеристичним поліномом спостерігача

$$D_6(p) = p^2 + 2q_c p + q_c^2,$$

або

$$D_6(p) = p^2 + d_1 p + d_2,$$

де $d_1 = 2q_c$; $d_2 = q_c^2$.

Середньгеометричний корінь беремо

$$q_c = 10 q_0 = 12,5.$$

Обчислюємо коефіцієнти бажаного полінома:

$$d_1 = 2 \cdot 12,5 = 25; \quad d_2 = 12,5^2 = 156,25.$$

13. Знаходимо елементи матриці коефіцієнтів підсилення $\tilde{G} = (\tilde{g}_1 \quad \tilde{g}_2)^T$ канонічної моделі:

$$\tilde{g}_1 = d_2 - a_2 = 156,25 - 0,5 = 155,75;$$

$$\tilde{g}_2 = d_1 - a_1 = 25 - 0,7 = 24,3.$$

14. Обчислюємо матрицю перетворення

$$T = \tilde{N}^{-1} N,$$

де $\tilde{N}$, N – відповідно матриці спостережуваності канонічної і початкової моделей.

Матриця спостережуваності канонічної моделі

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,7 \end{pmatrix},$$

де $\tilde{C}\tilde{A} = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & -0,7 \end{pmatrix} = (1 \quad -0,7)$.

Обернена матриця

$$\tilde{N}^{-1} = \frac{1}{\det \tilde{N}} \tilde{N}^*,$$

де $\tilde{N}^*$ – приєднана матриця. Її визначник $\det \tilde{N} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0,7 \end{vmatrix} = -1$.

Знайдемо матрицю алгебраїчних доповнень

$$\tilde{N}^{\Delta} = \begin{pmatrix} -0,7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю $\tilde{N}^{\Delta}$. Тоді отримаємо приєднану матрицю

$$\tilde{N}^* = \begin{pmatrix} -0,7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо обернену матрицю:

$$\tilde{N}^{-1} = - \begin{pmatrix} -0,7 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер визначаємо матрицю перетворення:

$$T = \tilde{N}^{-1}N = \begin{pmatrix} 0,7 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Перевіряємо матрицю перетворення за формулою

$$A = T^{-1}\tilde{A}T.$$

Обчислюємо обернену матрицю

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} T^*,$$

де T^* – приєднана матриця.

Визначник матриці T

$$\det T = \begin{vmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,333.$$

Знайдемо матрицю алгебраїчних доповнень

$$T^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,333 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю T^{Δ} . Тоді отримаємо приєднану матрицю

$$T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,333 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо обернену матрицю:

$$T^{-1} = \frac{1}{0,333} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 1 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,333 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix},$$

що відповідає початковій моделі.

16. Перетворюємо елементи матриці $\tilde{G}$ в початковий базис:

$$G = T^{-1} \tilde{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 155,75 \\ 24,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 467,25 \\ 24,3 \end{pmatrix}.$$

17. Перевіряємо елементи матриці G за формулою Аккермана:

$$G = D_6(A)N^{-1}(0 \ 0 \ \dots \ 1)^T,$$

де

$$\begin{aligned} D_6(A) &= A^2 + 2q_c A + q_c^2 I = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot 12,5 \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} + 12,5^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -0,5 & 1,05 \\ -0,23 & -0,01 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -37,5 \\ 8,33 & -17,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 156,25 & 0 \\ 0 & 156,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 155,75 & -36,45 \\ 8,1 & 138,74 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обернена матриця спостережуваності

$$N^{-1} = \frac{1}{\det N} N^*.$$

Знайдемо матрицю алгебраїчних доповнень

$$N^{\Delta} = \begin{pmatrix} -0,7 & -0,333 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо матрицю N^{Δ} . Тоді отримаємо приєднану матрицю

$$N^* = \begin{pmatrix} -0,7 & -1 \\ -0,333 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо обернену матрицю:

$$N^{-1} = -\frac{1}{0,333} \begin{pmatrix} -0,7 & -1 \\ -0,333 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остаточно маємо

$$G = \begin{pmatrix} 155,75 & -36,45 \\ 8,1 & 138,74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2,1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290,625 & 467,25 \\ 155,75 & 24,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 467,25 \\ 24,3 \end{pmatrix};$$

$$g_1 = 467,25; \ g_2 = 24,3.$$

18. Побудуємо структурну схему спостерігача. Запишемо його рівняння:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(\bar{y} - C\hat{x}).$$

Ураховуючи те, що $\bar{y} = C\bar{x}$, отримаємо

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G C(\bar{x} - \hat{x}).$$

Підставивши елементи матриць у це рівняння, одержимо

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 467,25 \\ 24,3 \end{pmatrix} (0 \quad 1) \begin{pmatrix} (x_1 - \hat{x}_1) \\ (x_2 - \hat{x}_2) \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ 0,333 & -0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & 467,25 \\ 0 & 24,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - \hat{x}_1) \\ (x_2 - \hat{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\dot{\hat{x}}_1 = -1,5\hat{x}_2 + 1,5u + 467,25(x_2 - \hat{x}_2);$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = 0,333\hat{x}_1 - 0,7\hat{x}_2 + 24,3(x_2 - \hat{x}_2).$$

Структурну схему спостерігача наведено на рис. 12.4.

19. Записуємо закон керування модального регулятора:

$$u_{\text{MP}}(t) = -k_1\hat{x}_1 - k_2\hat{x}_2 = -1,2\hat{x}_1 + 0,395\hat{x}_2.$$

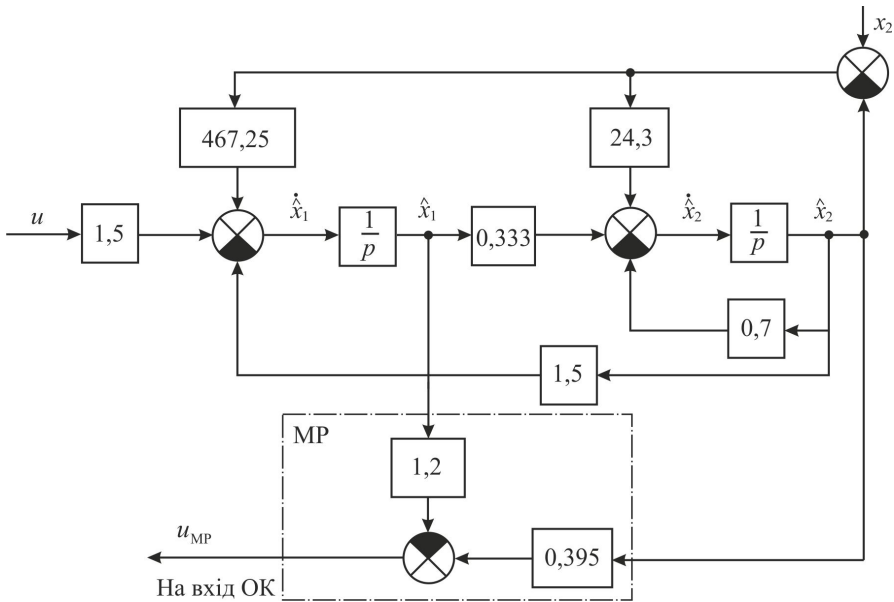


Рис. 12.4. Структурна схема спостерігача:
MP – модальний регулятор

12.5. Спостерігач зниженого порядку

Спостерігач повного порядку оцінює всі змінні стану, проте складний за виконанням, оскільки має порівняно високий порядок.

Спостерігач зниженого порядку (спостерігач Луенбергера, або редукований спостерігач) оцінює тільки ті змінні стану, які недоступні вимірюванню. Змінні виходу, які доступні вимірюванню, формуються датчиками. Такий спостерігач простіший у виготовленні.

Складемо математичну модель спостерігача зниженого порядку.

Нехай стан об'єкта керування визначається фазовим вектором

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T.$$

Вектор доступних вимірюванню r вихідних змінних

$$\bar{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t))^T.$$

Вектор недоступних вимірюванню $(n - r)$ змінних стану позначимо $\bar{w}(t)$, тоді

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ \bar{w}(t) \end{pmatrix}.$$

Запишемо рівняння об'єкта керування:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}; \\ \bar{y} &= C\bar{x}, \end{aligned}$$

де $C = (I \ O)$; $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$; A – квадратна матриця розміру $n \times n$; B – прямокутна матриця розміру $n \times m$; I – одинична матриця розміру $r \times r$; O – нульова матриця розміру $r \times (n - r)$.

Виразимо рівняння об'єкта керування через блокові матриці:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{y}}(t) \\ \dot{\bar{w}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ \bar{w}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \bar{u}(t);$$

$$\bar{y}(t) = (I \ O)\bar{x}(t),$$

де $A_{11}(r \times r)$, $A_{12}(r \times (n - r))$, $A_{21}((n - r) \times r)$, $A_{22}((n - r) \times (n - r))$ – матриці відповідних частин об'єкта керування; $B_1(r \times m)$, $B_2((n - r) \times m)$ – блоки матриці керування, що відповідають змінним $\bar{y}$ та $\bar{w}$.

Перепишемо це рівняння у вигляді двох матричних рівнянь:

$$\dot{\bar{y}}(t) = A_{11}\bar{y}(t) + A_{12}\bar{w}(t) + B_1\bar{u}(t); \quad (12.12a)$$

$$\dot{\bar{w}}(t) = A_{21}\bar{y}(t) + A_{22}\bar{w}(t) + B_2\bar{u}(t). \quad (12.12б)$$

У рівнянні (12.12a) величину

$$A_{12}\bar{w}(t) = \dot{\bar{y}}(t) - A_{11}\bar{y}(t) - B_1\bar{u}(t) \quad (12.13)$$

можна розглядати як вимірюваний змінний вектор, а величину $B_2\bar{u}(t) + A_{21}\bar{y}(t)$ в рівнянні (12.12б) – як вхідний вплив об'єкта спостереження порядку $(n - r)$.

Тоді, за аналогією з матричним рівнянням спостерігача повного порядку, можна записати наступне рівняння для спостерігача зниженого порядку:

$$\dot{\hat{w}}(t) = A_{22}\hat{w}(t) + (B_2\bar{u}(t) + A_{21}\bar{y}(t)) + L(A_{12}\bar{w}(t) - A_{12}\hat{w}(t)). \quad (12.14)$$

Підставимо (12.13) в (12.14):

$$\dot{\hat{w}}(t) = A_{22}\hat{w}(t) + (B_2\bar{u}(t) + A_{21}\bar{y}(t)) + L(\dot{\bar{y}}(t) - A_{11}\bar{y}(t) - B_1\bar{u}(t) - A_{12}\hat{w}(t)).$$

Це рівняння перетворимо до вигляду

$$\dot{\hat{w}}(t) - L\dot{\bar{y}}(t) = (A_{22} - LA_{12})\hat{w}(t) + (A_{21} - LA_{11})\bar{y}(t) + (B_2 - LB_1)\bar{u}(t).$$

Позначимо

$$\bar{z}(t) = \hat{w}(t) - L\bar{y}(t).$$

Тоді отримаємо рівняння спостерігача зниженого порядку у двох формах:

$$\dot{\bar{z}}(t) = (A_{22} - LA_{12})\bar{w}(t) + (A_{21} - LA_{11})\bar{y}(t) + (B_2 - LB_1)\bar{u}(t) \quad (12.15)$$

та

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}(t) &= (A_{22} - LA_{12})\bar{z}(t) + \\ &+ [A_{21} - LA_{11} + (A_{22} - LA_{12})L]\bar{y}(t) + (B_2 - LB_1)\bar{u}(t). \end{aligned} \quad (12.16)$$

При цьому

$$\hat{w}(t) = \bar{z}(t) + L\bar{y}(t). \quad (12.17)$$

Рівнянням (12.15)–(12.17) відповідають матричні структурні схеми на рис. 12.5, де $\bar{u}_{\text{MP}}(t) = -K \begin{pmatrix} \bar{y}(t) \\ \hat{\bar{w}}(t) \end{pmatrix}$ – керуючий вектор модального регулятора.

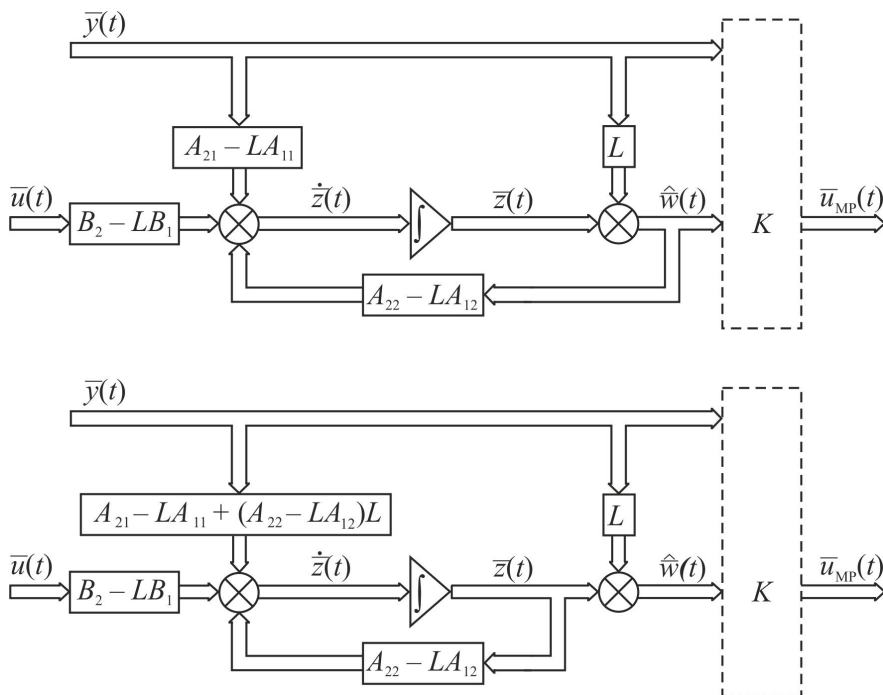


Рис. 12.5. Матричні структурні схеми спостерігача зниженого порядку

Серед важкодоступних вимірюванню можуть бути не тільки змінні стану, але й зовнішні дії на об'єкт спостереження (наприклад, моменти навантаження, флуктуації напруги, частоти енергетичного джерела живлення). Побудова спостерігача без обліку цих дій призводить до додаткових похибок в оцінках змінних стану. Виключити або принаймні послабити вплив дій, що не вимірюються, на похибку спостереження можна наступним чином:

1) створенням інваріантного редукованого спостерігача до дії, що не вимірюється, за умови

$$B_2 - LB_1 = 0,$$

якщо при цьому при виборі L не порушуються вимоги до стійкості та динаміки;

2) включенням зовнішньої дії, яка незначно змінюється у досліджуваному динамічному режимі, у групу змінних стану за умови $w_i(t) = \text{const}$, що відповідає рівнянню $\dot{w}_i(t) = 0$, яке доповнює рівняння стану об'єкта керування.

13. СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ ВИКОНАВЧОГО МЕХАНІЗМУ ЕЛЕКТРОПРИВОДА З КЕРОВАНОЮ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЮ МУФТОЮ

Задача про стабілізацію руху виконавчого механізму на перехідних та усталених режимах роботи електропривода з керованою електромагнітною муфтою має важливе теоретичне та практичне значення. Нижче наводяться деякі результати чисельного розв'язку вказаної задачі для електропривода постійного струму з керованою електромагнітною муфтою [16]. Цей розв'язок отримано у рамках теорії модального керування та спостерігаючих пристроїв із застосуванням результатів [13, 15] та ін.

13.1. Синтез системи керування електропривода з модальним регулятором

Об'єктом керування є електромеханічна система, функціональну схему якої наведено на рис. 13.1. До її складу входять безінерційний підсилювач (П), два тиристорних перетворювачі (ТП1 і ТП2), електродвигун постійного струму незалежного збудження (Д) з тахогенератором (ТГ) на якорі, який жорстко з'єднаний з ведучим диском керованої електромагнітної муфти (МЕ), два модальних регулятори (МР1 і МР2), спостерігаючий пристрій (СП), виконавчий механізм (ВМ), з'єднаний з веденим диском муфти через пружну ланку з коефіцієнтом крутильної жорсткості k і демпфірування μ . У модальному регуляторі МР1 використані зворотні зв'язки за станом, які оцінюються спостерігаючим пристроєм, а в МР2 – зворотні зв'язки за струмом та напругою, які реалізовані за допомогою шунта (Sh), датчиків струму (ДС) і напруги (ДН) обмотки збудження муфти. Дроселі (Др) забезпечують згладжування пульсацій струму в якорному колі. Виконавчий механізм (ВМ) завантажено постійним моментом статичного опору M_C на усталеному режимі (при $t = \tau$). Керуючі задавальні впливи об'єкта керування та муфти відповідно позначені $u_{зд}$ та $u_{зм}$.

Рівняння електропривода в операторній формі мають такий вигляд:

$$(T_{\text{ТП}} p + 1) e_{\text{ТП}} = k_{\text{ТП}} k_{\text{П}} u_{\text{П}}; \quad (13.1\text{а})$$

$$(T_{\text{е}} p + 1) i = \frac{1}{R} (e_{\text{ТП}} - k_{\omega} \omega_{\text{Д}}); \quad (13.1\text{б})$$

$$J_{\text{Д}} p \omega_{\text{Д}} = \frac{1}{k_{\text{Д}}} i - M_{\text{Т}}; \quad (13.1\text{в})$$

$$J_1 p \omega_1 = M_{\text{Т}} - k(\varphi_1 - \varphi_2) - \mu(\omega_1 - \omega_2); \quad (13.1\text{г})$$

$$J_2 p \omega_2 = k(\varphi_1 - \varphi_2) + \mu(\omega_1 - \omega_2) - M_{\text{С}}, \quad (13.1\text{д})$$

де $e_{\text{ТП}}$ – електрорушійна сила (ЕРС) тиристорного перетворювача; $T_{\text{е}}$ – електромагнітна стала часу; i – струм якоря електродвигуна; R – опір якорного кола; $J_{\text{Д}}$ – осьовий момент інерції якоря з ведучим диском муфти; J_1, J_2 – відповідно осьові моменти інерції веденого диска і виконавчого механізму; $u_{\text{П}}$ – напруга на вході в безінерційний підсилювач; $k_{\text{ТП}}$ – коефіцієнт підсилення тиристорного перетворювача; $k_{\text{П}}$ – коефіцієнт підсилення безінерційного підсилювача; $k_{\text{Д}}$ – коефіцієнт передачі двигуна; $\omega_{\text{Д}}$, ω_1 , ω_2 – відповідно кутова швидкість якоря двигуна, веденого диска муфти і виконавчого механізму; $k_{\omega} = 1/k_{\text{Д}}$ – коефіцієнт ЕРС двигуна; $M_{\text{Т}}$ – передавальний момент муфти, який виникає у процесі зчеплення дисків муфти; p – символічний оператор Лапласа. Оскільки $J_{\text{Д}} \gg J_1, J_2 \gg J_1$, то моментом інерції J_1 веденого диска муфти нехтуємо.

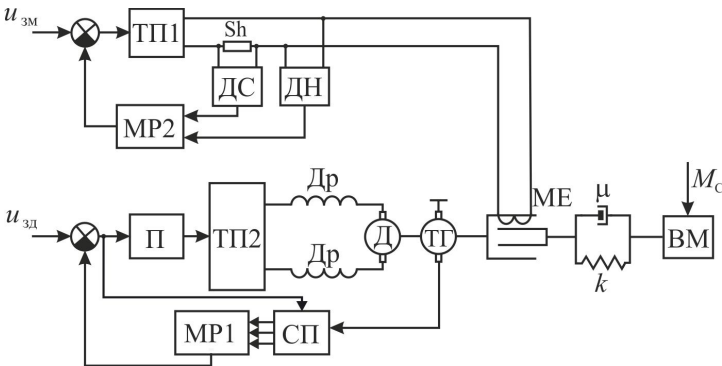


Рис. 13.1. Функціональна схема системи керування

Із системи рівнянь (13.1г) і (13.1д) можна отримати наступну передавальну функцію електромагнітного моменту M_T по кутовій швидкості ω_1 веденого диска муфти:

$$W_1(p) = \frac{M_T(p)}{\omega_1(p)} = \frac{1}{p} \left[J_1 p^2 + \mu p + k - \frac{(k + \mu p)^2}{J_2 p^2 + \mu p + k} \right]$$

або з урахуванням нехтування моменту інерції J_1 веденого диска муфти

$$W_1(p) = \frac{J_2 p(\mu p + k)}{J_2 p^2 + \mu p + k}.$$

Позначимо

$$T_1^2 = \frac{J_2}{k}, \quad T_2 = \frac{\mu}{k}.$$

Тоді остаточно передавальна функція буде мати вигляд

$$W_1(p) = \frac{k T_1^2 p (T_2 p + 1)}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}.$$

Звідси для передавального моменту муфти $M_T = \tilde{M}_T$, при якому відсутнє ковзання дисків муфти ($\omega_1 = \omega_d$), маємо

$$\tilde{M}_T = W_1(p) \omega_d + M_C 1(t - \tau), \quad (13.2)$$

де $1(t - \tau)$ – одинична ступенева функція.

Кутову швидкість веденого диска обчислюємо за формулою

$$\omega_1 = \frac{1}{W_1(p)} \min(M_T, \tilde{M}_T). \quad (13.3)$$

Кутову швидкість виконавчого механізму з урахуванням навантаження M_C на сталому режимі знаходимо з рівняння (13.1г):

$$\omega_2(p) = \left(1 + \frac{J_1 p^2}{\mu p + k} \right) \omega_1(p) - \frac{1}{\mu p + k} p [M_T - M_C 1(t - \tau)]$$

або

$$\omega_2(p) \approx \omega_1(p) - \frac{p}{\mu p + k} [M_T - M_C 1(t - \tau)]. \quad (13.4)$$

Обираємо змінні стану:

$$x_1 = \frac{di}{dt}; \quad x_2 = \frac{d\omega_D}{dt}; \quad x_3 = \omega_D. \quad (13.5)$$

Такий вибір змінних стану підвищує жорсткість механічної характеристики електропривода.

За рівняннями (13.1а)–(13.1в) та виразами (13.2)–(13.5) складаємо структурну схему електропривода з модальним регулятором (рис.13.2).

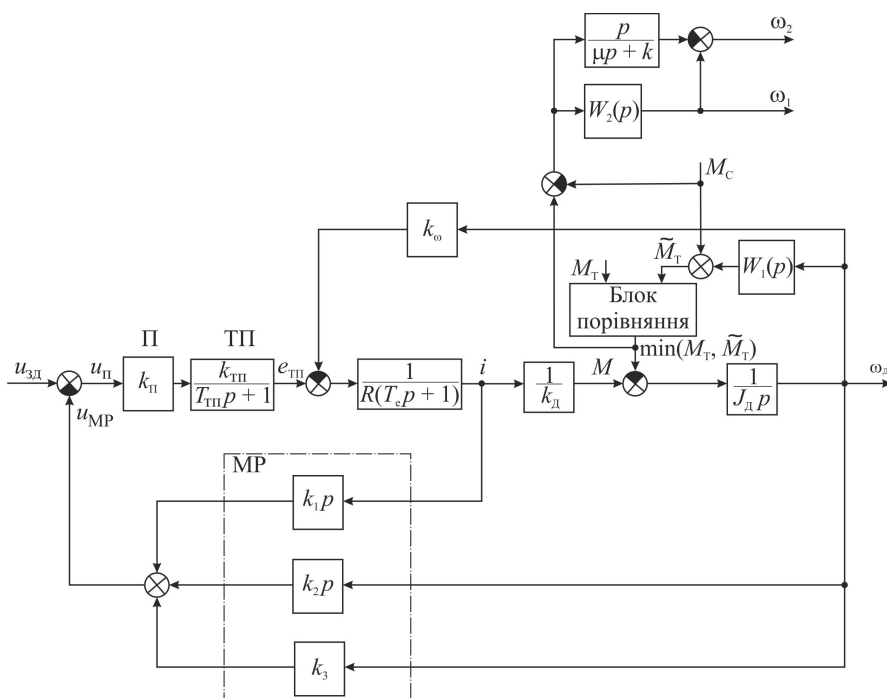


Рис. 13.2. Структурна схема електропривода з модальним регулятором

У неї передавальна функція $W_2(p) = 1/W_1(p)$. Блок порівняння призначений для знаходження передавального моменту муфти, який розглядається як зовнішнє навантаження, що діє на ведучий диск з боку веденого диска муфти.

Складемо диференціальні рівняння розімкненої системи відносно кутової швидкості якоря. Для цього перепишемо рівняння стану (13.1а) і (13.1в) таким чином:

$$e_{\text{ТП}} = \frac{k_{\text{ТП}} k_{\text{П}} u_{\text{П}}}{T_{\text{ТП}} p + 1};$$

$$i = k_{\text{Д}} (J_{\text{Д}} p \omega_{\text{Д}} + M_{\text{Т}}).$$

Підставимо ці вирази в рівняння (13.1б):

$$(T_{\text{е}} p + 1) (J_{\text{Д}} p \omega_{\text{Д}} + M_{\text{Т}}) k_{\text{Д}} = \frac{1}{R} \left(\frac{k_{\text{ТП}} k_{\text{П}} u_{\text{П}}}{T_{\text{ТП}} p + 1} - \frac{1}{k_{\text{Д}}} \omega_{\text{Д}} \right). \quad (13.6)$$

Розкривши дужки у рівнянні системи (13.6), знаходимо

$$\begin{aligned} \left[R T_{\text{е}} T_{\text{ТП}} k_{\text{Д}}^2 J_{\text{Д}} p^3 + R J_{\text{Д}} k_{\text{Д}}^2 (T_{\text{ТП}} + T_{\text{е}}) p^2 + (R J_{\text{Д}} k_{\text{Д}}^2 + T_{\text{ТП}}) p + 1 \right] \omega_{\text{Д}} = \\ = k_0 u_{\text{П}} - \left[T_{\text{е}} T_{\text{ТП}} p^2 + (T_{\text{е}} + T_{\text{ТП}}) p + 1 \right] \frac{M_{\text{Т}}}{\beta}, \end{aligned}$$

або

$$(d_0 p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3) \omega_{\text{Д}} = k_0 u_{\text{П}} - (b_0 p^2 + b_1 p + b_2) \frac{M_{\text{Т}}}{\beta}, \quad (13.7)$$

де $d_0 = T_{\text{ТП}} T_{\text{е}} T_{\text{М}}$; $d_1 = (T_{\text{ТП}} + T_{\text{е}}) T_{\text{М}}$; $d_2 = T_{\text{ТП}} + T_{\text{М}}$; $d_3 = 1$; $b_0 = T_{\text{ТП}} T_{\text{е}}$; $b_1 = T_{\text{ТП}} + T_{\text{е}}$; $b_2 = 1$; $T_{\text{М}} = J_{\text{Д}} / \beta$ – механічна стала часу двигуна; β – жорсткість механічної характеристики розімкненого електропривода [13]; $k_0 = k_{\text{Д}} k_{\text{ТП}} k_{\text{П}}$ – передавальний коефіцієнт розімкненого електропривода.

Для того щоб отримати замкнену за змінними стану, тобто за двома гнучкими і жорсткою зв'язками, систему, вводимо рівняння замикання

$$u_{\Pi} = u_{зд} - (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3). \quad (13.8)$$

Підставляємо вираз (13.8) в (13.7). Тоді отримуємо рівняння замкненої за змінними стану системи

$$(D_0 p^3 + D_1 p^2 + D_2 p + D_3) \omega_d = k_0 u_{зд} - (B_0 p^2 + B_1 p + B_2) \frac{M_T}{\beta}, \quad (13.9)$$

де $D_0 = d_0$; $D_1 = d_1 + k_{01} T_M$; $D_2 = d_2 + k_{02}$; $D_3 = 1 + k_{03}$; $B_0 = b_0$; $B_1 = b_1 + k_{01}$; $B_2 = b_2$; $k_{01} = k_{\Pi} k_{\Pi\Pi} \frac{k_1}{R}$; $k_{02} = k_{\Pi} k_{\Pi\Pi} k_d k_2$; $k_{03} = k_{\Pi} k_{\Pi\Pi} k_d k_3$; $k_3 = \alpha k_{\Pi\Pi}$; $k_{\Pi\Pi}$ – коефіцієнт передачі тахогенератора; α – невідомий коефіцієнт.

З рівняння (13.9) замкненої по фазовому вектору стану системи маємо характеристичний поліном

$$D(p) = p^3 + \frac{D_1}{D_0} p^2 + \frac{D_2}{D_0} p + \frac{D_3}{D_0}. \quad (13.10)$$

За даними розд. 11 обираємо стандартний бажаний характеристичний поліном

$$D_6(p) = p^3 + c_1 q_0 p^2 + c_2 q_0^2 p + c_3 q_0^3. \quad (13.11)$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях оператора p поліномів (13.10) і (13.11):

$$c_1 q_0 = \frac{D_1}{D_0}; \quad (13.12a)$$

$$c_2 q_0^2 = \frac{D_2}{D_0}; \quad (13.12б)$$

$$c_3 q_0^3 = \frac{D_3}{D_0}. \quad (13.12в)$$

З рівняння (13.12в) знаходимо базову частоту:

$$q_0 = \sqrt[3]{\frac{D_3}{c_3 D_0}} = \sqrt[3]{\frac{1 + k_{03}}{c_3 T_{\text{ТП}} T_e T_M}}. \quad (13.13)$$

Вона залежить від коефіцієнта k_{03} .

Задаємося часом перехідного процесу $t_{\text{п}}$ і знаходимо базову частоту $q_0 = \tau_{\text{п}}/t_{\text{п}}$, де безрозмірний час перехідного процесу $\tau_{\text{п}}$ визначається за бажаною характеристикою перехідного процесу (див. розд. 11).

Тепер, знаючи базову частоту, з рівняння (13.13) можна визначити даний коефіцієнт:

$$k_{03} = c_3 \left(\frac{\tau_{\text{п}}}{t_{\text{п}}} \right)^3 T_{\text{ТП}} T_e T_M - 1. \quad (13.14)$$

Знайдемо відношення жорсткості β_3 статичної характеристики замкненого електропривода до жорсткості β статичної характеристики розімкненого електропривода. Для цього покладемо в рівнянні (13.9) $p = 0$. Тоді отримаємо для відношення жорсткостей наступний вираз:

$$\frac{\beta_3}{\beta} = k_{03} + 1 = c_3 \left(\frac{\tau_{\text{п}}}{t_{\text{п}}} \right)^3 T_{\text{ТП}} T_e T_M.$$

З цієї формули видно, що для забезпечення необхідної робастності системи, тобто зниженої чутливості до зміни параметрів при дії зовнішніх збурень, слід, щоб це відношення жорсткостей було визначено з урахуванням часу $t_{\text{п}}$ перехідного процесу.

Тепер з рівнянь системи (13.12а) і (13.12б) знаходимо коефіцієнти k_{01} , k_{02} :

$$k_{01} = \frac{1}{T_M} (c_1 d_0 q_0 - d_1); \quad k_{02} = c_2 d_0 q_0^2 - d_2. \quad (13.15)$$

Бажано, щоб коефіцієнти k_{01} , k_{02} , k_{03} , які визначаються виразами (13.14) і (13.15), були додатними. Ця умова накладає обмеження на нижнє значення базової частоти:

$$\begin{cases} q_0 > \frac{d_1}{c_1 d_0}; \\ q_0 > \sqrt{\frac{d_2}{c_2 d_0}}; \\ q_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{c_3 d_0}}, \end{cases} \quad (13.16)$$

які, як правило, задовольняють нерівність $q_0 > \frac{d_1}{c_1 d_0}$.

Даній нерівності відповідає наступна умова для відношення жорсткостей статичних характеристик замкненого і розімкненого електроприводів:

$$\frac{\beta_3}{\beta} \geq c_3 \left(\frac{d_1}{c_1 d_0} \right)^3 T_{\text{ТП}} T_{\text{е}} T_{\text{М}} = c_3 \left(\frac{T_{\text{ТП}} + T_{\text{е}}}{c_1 T_{\text{ТП}} T_{\text{е}}} \right)^3 T_{\text{ТП}} T_{\text{е}} T_{\text{М}}.$$

Звичайно значення $\frac{\beta_3}{\beta}$ беруть таким, щоб забезпечити не тільки необхідне підвищення жорсткості механічної характеристики електропривода, а й задовольнити, як було з'ясовано вище, потрібне значення часу перехідного процесу.

Тепер знаходимо добуток $k_{\text{П}} \alpha$ і коефіцієнти k_1, k_2 модального регулятора:

$$k_{\text{П}} \alpha = \frac{k_{03}}{k_{\text{Д}} k_{\text{ТП}} k_{\text{ТГ}}}; \quad k_1 = k_{01} R \frac{k_{\text{ТГ}} k_{\text{Д}}}{k_{03}} \alpha; \quad k_2 = \frac{k_{02} k_{\text{ТГ}}}{k_{03}} \alpha.$$

При $k_{\text{П}} = 1$ остаточно знаходимо

$$\alpha = \frac{k_{03}}{k_{\text{Д}} k_{\text{ТП}} k_{\text{ТГ}}}; \quad k_1 = \frac{k_{01} R k_{\text{ТГ}} k_{\text{Д}}}{k_{03}} \alpha; \quad k_2 = \frac{k_{02} k_{\text{ТГ}}}{k_{03}} \alpha.$$

13.2. Синтез модального регулятора електромагнітної муфти

Електромагнітні муфти зазвичай живляться через двопівперіодний випрямляч. Однак такий випрямляч не дозволяє регулювати передавальний момент муфти. Тому для регулювання цього моменту слід використовувати систему з тиристорним перетворювачем і модальним регулятором замість двопівперіодного випрямляча.

Структурна схема керованої електромагнітної муфти з тиристорним перетворювачем, електромагнітом і модальним регулятором з коефіцієнтами k_1 , k_2 подана на рис. 13.3.

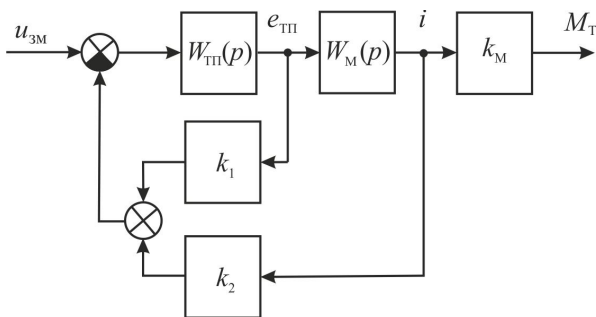


Рис. 13.3. Структурна схема керованої електромагнітної муфти

На даній структурній схемі передавальна функція тиристорного перетворювача має вигляд

$$W_{\text{ТП}}(p) = \frac{k_{\text{ТП}}}{T_{\text{ТП}}p + 1},$$

а передавальна функція електромагніту муфти описується виразом

$$W_{\text{М}}(p) = \frac{1}{R_{\text{М}}(T_{\text{М}}p + 1)}.$$

Коефіцієнт передачі муфти розраховується за формулою

$$k_{\text{М}} = \frac{M_{\text{н}}}{I_{\text{н}}},$$

де M_n , I_n – відповідно номінальний передавальний обертовий момент і струм в обмотці муфти.

Передавальна функція замкненої за змінними стану системи

$$W(p) = \frac{k_M k_{ТП}}{R_M (T_{ТП} p + 1 + k_1 k_{ТП}) (T_M p + 1) + k_{ТП} k_2}.$$

Поліном у знаменнику цієї формули приведемо до стандартного вигляду:

$$D(p) = p^2 + \frac{T_{ТП} + T_M + k_1 k_{ТП} T_M}{T_{ТП} T_M} p + \frac{(1 + k_1 k_{ТП}) R_M + k_{ТП} k_2}{T_{ТП} T_M R_M}. \quad (13.17)$$

Він являє собою характеристичний поліном замкненої системи.

Виберемо як бажаний стандартний поліном характеристичний поліном Еллєрта (див. табл. 11.4), який забезпечує перерегулювання не більше 10 % та нульову швидкісну похибку:

$$D(p) = p^2 + 2,5q_0 p + q_0^2, \quad (13.18)$$

де $q_0 = \tau_n / t_n$ – базова частота полінома; t_n та τ_n – відповідно час і безрозмірний час перехідного процесу.

Прирівнюючи коефіцієнти поліномів (13.17) і (13.18) при однакових степенях оператора p , отримуємо наступну систему рівнянь:

$$\frac{T_{ТП} + T_M + k_1 k_{ТП} T_M}{T_{ТП} T_M} = 2,5q_0;$$

$$\frac{(1 + k_1 k_{ТП}) R_M + k_{ТП} k_2}{T_{ТП} T_M R_M} = q_0^2.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо вирази для коефіцієнтів модального регулятора:

$$k_1 = \frac{1}{k_{ТП} T_M} [T_{ТП} (2,5q_0 T_M - 1) - T_M];$$

$$k_2 = \frac{R_M}{k_{ТП}} (T_{ТП} T_M q_0^2 - k_1 k_{ТП} - 1).$$

Приклад 1. Розглянемо електропривід з двигуном постійного струму Д21 з наступними параметрами: кутова частота обертання якоря $\omega_n = 113,04$ рад/с; момент інерції виконавчого механізму $J_2 = 0,04$ кг·м²;

номінальний момент двигуна $M_n = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{3600}{113,04} = 31,85$ Н·м (P_n – номі-

нальна потужність двигуна); статичний момент опору $M_c = \frac{M_n}{3} \approx 10$ Н·м.

Розраховуємо максимальний передавальний момент муфти:

$$M_T = J_2 \varepsilon + M_c \approx J_2 \frac{\omega_n}{t_n} + M_c = 0,04 \frac{113,04}{0,1} + 10 = 55,2 \text{ Н·м},$$

де $t_n = 0,1$ с – час перехідного процесу електропривода.

За даним моментом обираємо електромагнітну фрикційну муфту ЕТМ132 з наступними характеристиками: номінальний обертовий момент $M_n = 160$ Н·м; номінальний струм $I_n = 1,5$ А; час перехідного процесу $0,0075$ с; опір $R_m = 16$ Ом; коефіцієнт передачі $k_m = 106,67$ Н·м/А. Муфта отримує живлення від тиристорного перетворювача ТЕР4-63/230 з коефіцієнтом підсилення $k_{\text{ПП}} = 46$ та сталою часу $T_{\text{ПП}} = 0,006$ с.

Розрахуємо коефіцієнти модального регулятора. За бажаними характеристиками перехідного процесу, який наведено на рис. 11.4, знаходимо $\tau_n = 8$. Тому бажана частота

$$q_0 = \frac{\tau_n}{t_n} = \frac{8}{0,0075} = 1067 \text{ с}^{-1},$$

а коефіцієнти модального регулятора керованої муфти

$$k_1 = \frac{0,006(2,5 \cdot 1067 \cdot 0,0075 - 1) - 0,0075}{46 \cdot 0,0075} = 0,309;$$

$$k_2 = \frac{0,006 \cdot 0,0075 \cdot 16 \cdot 1067^2 - (1 + 0,309 \cdot 46) \cdot 16}{46} = 12,528 \text{ В/А}.$$

13.3. Синтез спостерігача

Виконаємо синтез спостерігаючого пристрою (спостерігача), що відновлює вектор стану:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{di}{dt} & \frac{d\omega}{dt} & \omega \end{pmatrix}^T,$$

який було обрано в п. 13.1 для реалізації модального регулятора.

Змінні, які доступні вимірюванню: вхідна керуюча напруга u_{Π} ; кутова швидкість двигуна $x_3 = \omega$; напруга тахогенератора $y = u_{\Gamma\Gamma} = k_3 x_3 = k_{\Gamma\Gamma} \omega$.

Змінною стану, яку неможливо виміряти, є похідна струму якірного кола за часом $x_1 = \frac{di}{dt}$.

Рівнянням електропривода, що розглядалися вище, відповідає наступна система рівнянь спостерігача:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_{\Gamma\Gamma}}{dt} &= -\frac{1}{T_{\Gamma\Gamma}} \hat{e}_{\Gamma\Gamma} + \frac{k_{\Pi} k_{\Gamma\Gamma}}{T_{\Pi\Gamma}} u_{\Pi} + g_1 (u_{\Gamma\Gamma} - k_{\Gamma\Gamma} \hat{\omega}); \\ \frac{d\hat{i}}{dt} &= \frac{1}{RT_e} \hat{e}_{\Gamma\Gamma} - \frac{1}{T_e} \hat{i} - \frac{1}{RT_e k_D} \hat{\omega} + g_2 (u_{\Gamma\Gamma} - k_{\Gamma\Gamma} \hat{\omega}); \\ \frac{d\hat{\omega}}{dt} &= \frac{1}{J_D k_D} \hat{i} - \frac{1}{J_D} M_T + g_3 (u_{\Gamma\Gamma} - k_{\Gamma\Gamma} \hat{\omega}). \end{aligned}$$

Цій системі відповідає матриця-стовпець регулятора спостерігача

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix}^T.$$

Матриця-рядок змінних виходу, які можна виміряти:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix}.$$

Матриця добутку

$$GC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 k_{\Gamma\Gamma} \\ 0 & 0 & g_2 k_{\Gamma\Gamma} \\ 0 & 0 & g_3 k_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix}.$$

Матриця спостерігача

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_{\text{ТП}}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{RT_{\text{е}}} & -\frac{1}{T_{\text{е}}} & -\frac{1}{RT_{\text{е}}k_{\text{д}}} \\ 0 & \frac{1}{J_{\text{д}}k_{\text{д}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристична матриця спостерігача

$$D_{\text{C}} = pI - A + GC = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{T_{\text{ТП}}} & 0 & g_1 k_{\text{ТГ}} \\ -\frac{1}{RT_{\text{е}}} & p + \frac{1}{T_{\text{е}}} & \frac{1}{RT_{\text{е}}k_{\text{д}}} + g_2 k_{\text{ТГ}} \\ 0 & -\frac{1}{J_{\text{д}}k_{\text{д}}} & p + g_3 k_{\text{ТГ}} \end{pmatrix}.$$

Даній матриці відповідає характеристичний поліном спостерігача

$$D(p) = \det D_{\text{C}} = \det(pI - A + GC) =$$

$$\begin{aligned} &= p^3 + p^2(a + g_3 k_{\text{ТГ}}) + p \left(b + a g_3 k_{\text{ТГ}} + c + \frac{g_2 k_{\text{ТГ}}}{k_{\text{д}} J_{\text{д}}} \right) + \\ &+ \left[b g_3 k_{\text{ТГ}} + c k_{\text{д}} g_1 k_{\text{ТГ}} + \frac{1}{T_{\text{ТП}}} \left(c + \frac{g_2 k_{\text{ТГ}}}{k_{\text{д}} J_{\text{д}}} \right) \right], \end{aligned} \quad (13.19)$$

$$\text{де } a = \frac{T_{\text{ТП}} + T_{\text{е}}}{T_{\text{ТП}} T_{\text{е}}}; \quad b = \frac{1}{T_{\text{ТП}} T_{\text{е}}}; \quad c = \frac{1}{T_{\text{М}} T_{\text{е}}}.$$

Для виконання синтезу спостерігача, тобто визначення коефіцієнтів матриці G , обирається біноміальний характеристичний поліном 3-го порядку (див. табл. 11.5) з перерегулюванням $\sigma = 0$ %:

$$D(p) = p^3 + c_1 q_c p^2 + c_2 q_c^2 p + c_3 q_c^3, \quad (13.20)$$

де $c_1 = 3$; $c_2 = 3$; $c_3 = 1$; q_c – базова частота спостерігача.

Привівнявши коефіцієнти поліномів (13.19) та (13.20) при однакових степенях символічного оператора p , знаходимо коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку спостерігача:

$$\begin{aligned} g_3 &= \frac{c_1 q_c - a}{k_{\text{ТТ}}}; \\ g_2 &= \frac{k_{\text{Д}} J_{\text{Д}}}{k_{\text{ТТ}}} (c_2 q_c^2 - b - c - a g_3 k_{\text{ТТ}}); \\ g_1 &= \frac{1}{c k_{\text{Д}} k_{\text{ТТ}}} \left[c_3 q_c^3 - b g_3 k_{\text{ТТ}} - \frac{1}{T_{\text{П}}} \left(c + \frac{k_{\text{ТТ}} g_2}{k_{\text{Д}} J_{\text{Д}}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.21)$$

Структурну схему синтезованого спостерігача, що реалізує модальний регулятор електропривода, наведено на рис. 13.4.

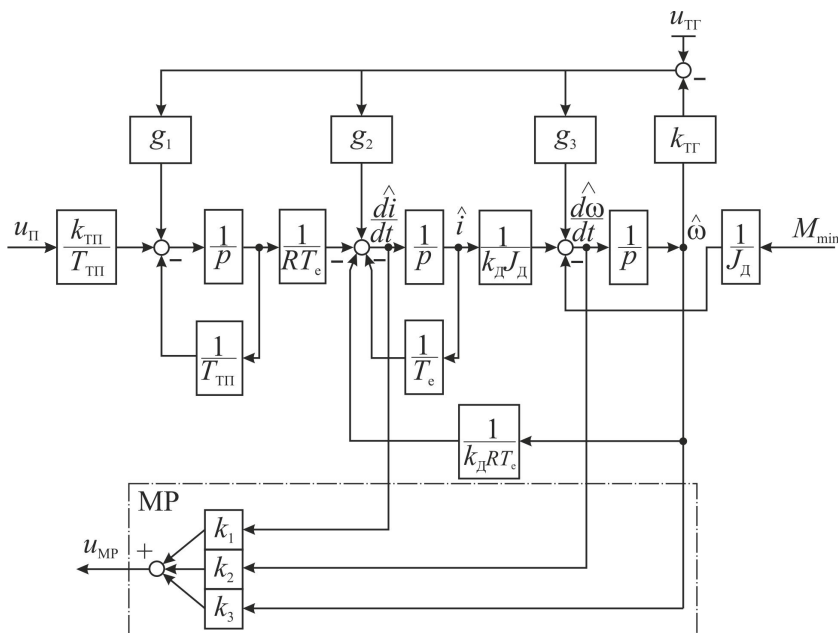


Рис. 13.4. Структурна схема спостерігача

13.4. Приклад розрахунку модального регулятора і спостерігача стану

Синтезуємо модальний регулятор за наступними вихідними даними: тип двигуна Д21, моменти інерції двигуна $J_{\text{Д}} = 0,125 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ і виконавчого механізму $J_2 = 0,08 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; час перехідного процесу $t_{\text{п}} = 0,1 \text{ с}$; перерегулювання $\sigma = 0 \%$. Двигун отримує живлення від тиристорного перетворювача ТЕР4-63/230 з коефіцієнтом підсилення $k_{\text{ТП}} = 46$ та сталою часу $T_{\text{ТП}} = 0,006 \text{ с}$. Двигун з тахогенератором на валу. Передавальний коефіцієнт тахогенератора $k_{\text{ТГ}} = 0,032 \text{ В}\cdot\text{с}/\text{рад}$. Статичний момент опору згідно з прикладом попереднього підрозділу дорівнює $10 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Розрахуємо передавальний коефіцієнт двигуна $k_{\text{Д}} = 1 / k_{\omega}$:

$$k_{\omega} = \frac{U_{\text{н}} - I_{\text{н}} R_{\text{я}}}{\pi \frac{n_{\text{н}}}{30}} = \frac{230 - 21 \cdot 0,94}{\pi \frac{1080}{30}} = 1,859 \text{ В}\cdot\text{с}/\text{рад};$$

$$k_{\text{Д}} = \frac{1}{k_{\omega}} = \frac{1}{1,859} = 0,538 \text{ рад}/(\text{В}\cdot\text{с}).$$

Електромагнітна стала часу якірного кола

$$T_{\text{е}} = \frac{L}{R}.$$

Індуктивність якірного кола

$$L = L_{\text{я}} + 2L_{\text{Др}} + L_{\text{ТП}},$$

де $L_{\text{я}}$ – індуктивність якірного кола двигуна; $L_{\text{Др}} = 0,505$ – індуктивність згладжувального дроселя, мГн; $L_{\text{ТП}} = 0,4$ – індуктивність трансформатора і тиристорного перетворювача, мГн.

За формулою Уманського–Лінвілля

$$L_{\text{я}} = c_{\text{х}} \frac{30U_{\text{н}}}{\pi I_{\text{н}} n_{\text{н}} p_{\text{п}}},$$

де $c_x = 0,10 \dots 0,25$ – для машин з компенсаційною обмоткою; $c_x = 0,5 \dots 0,6$ – для машин без компенсаційної обмотки; p_{Π} – кількість пар полюсів; n_{Π} – номінальна частота обертання двигуна.

Таким чином,

$$L_{\text{я}} = c_x \frac{30U_{\text{н}}}{\pi I_{\text{н}} n_{\Pi} p_{\Pi}} = 0,5 \frac{30 \cdot 230}{3,14 \cdot 21 \cdot 1080 \cdot 2} = 0,024 \text{ Гн};$$

$$L = L_{\text{я}} + 2L_{\text{Др}} + L_{\text{ТП}} = 0,024 + 2 \cdot 0,505 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^{-3} = 0,026 \text{ Гн}.$$

Активний опір якірного кола

$$R = R_{\text{я}} + 2R_{\text{Др}} + R_{\text{ТП}};$$

$$R_{\text{ТП}} \approx \frac{0,08U_{\text{ТП}}}{I_{\text{н}}} = \frac{0,08 \cdot 230}{21} = 0,876 \text{ Ом};$$

$$R = R_{\text{я}} + 2R_{\text{Др}} + R_{\text{ТП}} = 0,94 + 2 \cdot 37 \cdot 10^{-3} + 0,876 = 1,89 \text{ Ом}.$$

Отже, електромагнітна стала часу

$$T_{\text{е}} = \frac{L}{R} = \frac{0,026}{1,89} = 0,014 \text{ с},$$

механічна стала часу

$$T_{\text{м}} = \frac{J_{\text{д}} R}{k_{\omega}^2} = \frac{0,125 \cdot 1,89}{1,859^2} = 0,068 \text{ с}.$$

Згідно з умовою задачі обираємо бажаний характеристичний поліном біноміальної моделі з коефіцієнтами $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, а за табл. 11.5 – безрозмірний час $\tau_{\Pi} = 6,3$.

Задаємося часом перехідного процесу електропривода з модальним регулятором $t_{\text{п.е}} = 0,077 \text{ с}$.

$$\text{Знаходимо базову частоту: } q_0 = \frac{\tau_{\Pi}}{t_{\text{п.е}}} = \frac{6,3}{0,077} = 81,82 \text{ с}^{-1}, \text{ яка задово-}$$

вільняє умову (13.16).

Розрахуємо коефіцієнти:

$$d_0 = T_e T_{\text{П}} T_{\text{М}} = 0,014 \cdot 0,006 \cdot 0,068 = 5,559 \cdot 10^{-6} \text{ с}^3;$$

$$d_1 = (T_{\text{П}} + T_e) T_{\text{М}} = (0,006 + 0,014) \cdot 0,068 = 1,337 \cdot 10^{-3} \text{ с}^2;$$

$$d_2 = T_{\text{М}} + T_{\text{П}} = 0,068 + 0,006 = 0,074 \text{ с};$$

$$k_{01} = \frac{1}{T_{\text{М}}} (c_1 d_0 q_0 - d_1) = \frac{1}{0,068} (3 \cdot 5,559 \cdot 10^{-6} \cdot 81,82 - 1,337 \cdot 10^{-3}) = 4,075 \cdot 10^{-4} \text{ с};$$

$$k_{02} = c_2 d_0 q_0^2 - d_2 = 3 \cdot 5,559 \cdot 10^{-6} \cdot 81,82^2 - 0,074 = 0,037 \text{ с};$$

$$k_{03} = c_3 d_0 q_0^3 - 1 = 5,559 \cdot 10^{-6} \cdot 81,82^3 - 1 = 2,045.$$

Відношення жорсткості розімкненого до жорсткості замкненого електропривода

$$\frac{\beta_3}{\beta} = k_{03} + 1 = 2,045 + 1 = 3,045,$$

що більше від граничного значення

$$\frac{\beta_3}{\beta} = c_3 \left(\frac{T_{\text{П}} + T_e}{3 T_{\text{П}} T_e} \right)^3 T_{\text{П}} T_e T_{\text{М}} = \left(\frac{0,006 + 0,014}{3 \cdot 0,006 \cdot 0,014} \right)^3 \cdot 0,006 \cdot 0,014 \cdot 0,068 = 2,862.$$

Отже, коефіцієнти модального регулятора

$$k_1 = \frac{k_{01} R k_{\text{Д}} k_{\text{П}}}{k_{03}} \alpha = \frac{4,075 \cdot 10^{-4} \cdot 1,89 \cdot 0,538 \cdot 0,032}{2,045} \alpha = 6,483 \cdot 10^{-6} \alpha \text{ Ом} \cdot \text{с};$$

$$k_2 = \frac{k_{02} k_{\text{П}}}{k_{03}} \alpha = \frac{0,037 \cdot 0,032}{2,045} \alpha = 5,835 \cdot 10^{-4} \alpha \text{ В} \cdot \text{с}^2 / \text{рад};$$

$$k_3 = k_{\text{П}} \alpha = 0,032 \alpha \text{ В} \cdot \text{с} / \text{рад},$$

$$\text{де } \alpha = \frac{k_{03}}{k_{\text{П}} k_{\text{Д}} k_{\text{П}}} = \frac{2,045}{46 \cdot 0,538 \cdot 0,032} = 2,583.$$

Для виконання синтезу спостерігача, тобто визначення коефіцієнтів матриці G , обирається біноміальний характеристичний поліном 3-го порядку (див. табл. 11.5) з перерегулюванням $\sigma = 0\%$:

$$D(p) = p^3 + c_1 q_c p^2 + q_c^2 p + c_3 q_c^3,$$

де $c_1 = 3$; $c_2 = 3$; $c_3 = 1$.

$$\text{Значення базової частоти в цьому поліномі } q_c = \frac{\tau_{\text{п}}}{t_{\text{п.с}}} = \frac{6,3}{0,023} =$$

$= 273,913 \text{ с}^{-1}$, де $\tau_{\text{п}}$ знаходиться з перехідної характеристики біномі-

альної моделі 3-го порядку, а $t_{\text{п.с}} = t_{\text{п}} - t_{\text{п.е}} = 0,1 - 0,077 = 0,023 \text{ с}$.

За формулами (13.21) знаходимо коефіцієнти підсилення зворотного зв'язку спостерігача:

$$g_3 = \frac{c_1 q_c - a}{k_{\text{ТГ}}} = \frac{3 \cdot 273,913 - 240,444}{0,032} = 1,817 \cdot 10^4 \text{ рад/(В} \cdot \text{с}^2);$$

$$g_2 = \frac{k_{\text{Д}} J_{\text{Д}}}{k_{\text{ТГ}}} (c_2 q_c^2 - b - c - a g_3 k_{\text{ТГ}}) = \frac{0,538 \cdot 0,125}{0,032} \times$$

$$\times (3 \cdot 273,913^2 - 1,23 \cdot 10^4 - 1079,24 -$$

$$- 240,444 \cdot 1,817 \cdot 10^4 \cdot 0,032) = 1,512 \cdot 10^5 \text{ А/(В} \cdot \text{с)};$$

$$g_1 = \frac{1}{c k_{\text{Д}} k_{\text{ТГ}}} \left[c_3 q_c^3 - b g_3 k_{\text{ТГ}} - \frac{1}{T_{\text{П}}} \left(c + \frac{k_{\text{ТГ}} g_2}{k_{\text{Д}} J_{\text{Д}}} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{1079,24 \cdot 0,538 \cdot 0,032} \left[1 \cdot 273,913^3 - 1,23 \cdot 10^4 \cdot 1,817 \cdot 10^4 \times \right.$$

$$\times 0,032 - \frac{1}{0,006} \left(1079,24 + \frac{0,032 \cdot 1,512 \cdot 10^5}{0,538 \cdot 0,125} \right) \Big] = 6,64 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1};$$

$$a = \frac{T_{\text{ТП}} + T_{\text{е}}}{T_{\text{ТП}} T_{\text{е}}} = \frac{0,006 + 0,014}{0,006 \cdot 0,014} = 240,444 \text{ с}^{-1};$$

$$b = \frac{1}{T_{\text{ТП}} T_{\text{е}}} = \frac{1}{0,006 \cdot 0,014} = 1,23 \cdot 10^4 \text{ с}^{-2};$$

$$c = \frac{1}{T_{\text{М}} T_{\text{е}}} = \frac{1}{0,068 \cdot 0,014} = 1079,24 \text{ с}^{-2}.$$

13.5. Аналіз моделювання перехідних процесів

Розрахунки перехідних процесів, що відбуваються в електроприводі з керованою муфтою, виконані за створеною схемою моделювання у середовищі пакета Simulink. В основу розробки даної схеми покладені структурні схеми (див. рис. 13.2–13.4).

Графіки перехідних процесів кутової швидкості двигуна $\omega_{\text{Д}}$, веденого диска муфти ω_1 та виконавчого механізму ω_2 при керуючих впливах електродвигуна $u_{\text{зд}} = 14 \text{ В}$ і муфти $u_{\text{зм}} = 24 \text{ В}$, навантаженні $M_{\text{С}} = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ в момент $\tau = 0,3 \text{ с}$, коефіцієнтах жорсткості $k = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{рад}$ та демпфіруванні $\mu = 0,15 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$ наведено на рис. 13.5. Як слід було сподіватися, швидкість двигуна і веденого диска муфти в усталеному режимі збігаються та мають аперіодичний характер, а вільні коливання кутової швидкості виконавчого механізму під дією сил в'язкого тертя згасають.

Графіки перехідних процесів виконавчого механізму при керуючому впливі двигуна $u_{\text{зд}} = 14 \text{ В}$ і різних керуючих впливах муфти $u_{\text{зм}}$ наведено на рис. 13.6. Видно, що при різному керуючому впливі та заданому часі перехідного процесу змінюється рівень усталеного значення. Тому керування швидкістю виконавчого механізму за допомогою муфти відіграє важливу роль.

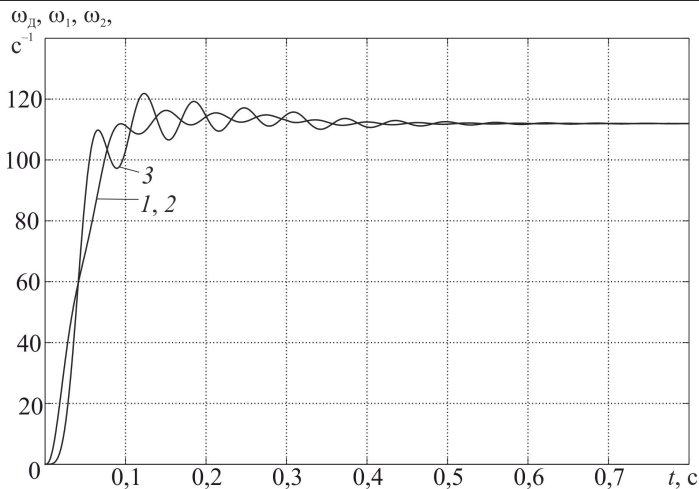


Рис. 13.5. Перехідні процеси кутової швидкості двигуна (1), веденого диска муфти (2) і виконавчого механізму (3)

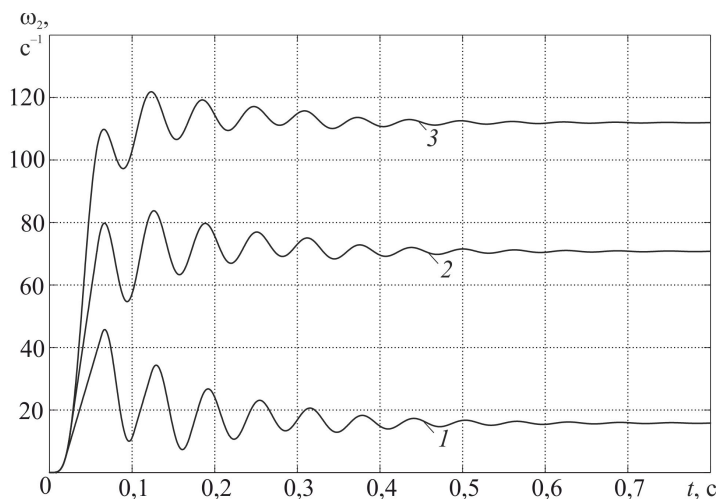


Рис. 13.6. Перехідний процес кутової швидкості виконавчого механізму з різним задавальним впливом електромагнітної муфти:

1 – $u_{3M} = 6 \text{ В}$; 2 – 8 В ; 3 – 24 В

14. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

У попередніх розділах була поставлена та розв'язана детермінована задача спостереження. Однак теоретичний та практичний інтерес викликає розв'язок задачі оцінювання фазового вектора лінійної системи на основі спостереження її виходу з урахуванням випадкових збурень та помилок вимірювань. Вона узагальнює детерміновану задачу спостереження та у стохастичних термінах трактується як задача фільтрації. Математичним апаратом для розв'язку задачі фільтрації є теорія ймовірностей і теорія випадкових процесів.

Розглянемо основні відомості з теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів, які необхідні для постановки та розв'язання задачі фільтрації [3].

14.1. Випадкові величини та їх характеристики

Змінна величина X називається *випадковою величиною*, якщо те, що вона при проведенні експерименту (при реалізації заданого комплексу умов) набуває значення, меншого від заданого числа x , тобто $X < x$, є випадковою подією***.

Ймовірність цієї події $P(X < x)$ називається функцією розподілу та позначається $F(x)$.

Якщо функція $F(x)$ диференційовна, то її похідна $dF(x)/dx$ називається *щільністю розподілу* або *щільністю ймовірностей* та позначається $f(x)$:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

***Випадкові події – це події, які при виконанні комплексу умов можуть відбутися, а можуть і не відбутися.

Інколи функцію розподілу $F(x)$ також називають інтегральною функцією розподілу або інтегральним законом розподілу, а щільність розподілу $f(x)$ – диференціальною функцією розподілу або диференціальним законом розподілу.

Функція розподілу та щільність розподілу мають наступні властивості:

$$\begin{aligned} \text{а) } F(-\infty) &= 0; & \text{в) } F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx; \\ \text{б) } F(\infty) &= 1; & \text{г) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1. \end{aligned}$$

Функції розподілу $F(x)$ та $f(x)$ є *вичерпними характеристиками* випадкових величин. Але поряд з ними використовуються *числові характеристики*: початкові та центральні моменти.

Початковим моментом s -го порядку випадкової величини X називається інтеграл

$$\alpha_s = M[X^s] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^s dF(x),$$

де M позначає операцію математичного сподівання.

Найбільш часто використовується момент 1-го порядку

$$m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

який називається *математичним сподіванням* або *середнім значенням*.

Різниця $\tilde{X} = X - m_x$ називається *центрованою випадковою величиною*. *Центральним моментом* s -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання s -го степеня центрованої

випадкової величини

$$\mu_s = M[\tilde{X}^s] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^s dF(x).$$

Найбільш часто використовується центральний момент 2-го порядку

$$\mu_2 = D_x = D[X] = M[\tilde{X}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 dF(x),$$

який має назву *дисперсії*.

Корінь квадратний з дисперсії $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ називається *середнім квадратичним відхиленням*.

Випадкова величина X задовольняє *нормальний закон* або *закон Гаусса*, якщо її щільність розподілу має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)},$$

де m – математичне сподівання; σ – середньоквадратичне відхилення.

Вектор $\bar{X} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^T$, компоненти якого є випадковими величинами, називається *випадковим вектором*.

Вичерпними характеристиками випадкового вектора $\bar{X}$ є n -вимірні закони розподілу: n -вимірна функція розподілу та n -вимірна щільність розподілу. Імовірність спільного виконання n нерівностей $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, ..., $X_n < x_n$:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

називають n -вимірною функцією розподілу, а похідну

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

– n -вимірною щільністю розподілу.

Функція розподілу $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та щільність розподілу $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мають наступні властивості:

$$1) F_1(x_1) = F_n(x_1, \infty, \dots, \infty), F_k(x_1, \dots, x_k) = F_k(x_1, \dots, x_k, \infty, \dots, \infty);$$

$$2) f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n;$$

$$f_k(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n.$$

При розгляді системи випадкових величин для характеристики залежності між різними випадковими величинами, які входять у цю систему, використовують умовні закони розподілу.

Умовним законом розподілу випадкової величини X , яка входить, наприклад, у систему з двох випадкових величин (X, Y) , називають її закон розподілу, обчислений за умови, що інша випадкова величина Y отримала визначене значення: $Y = y$. Його можна задавати як функцією розподілу (позначається $F(x/y)$), так і щільністю розподілу (позначається $f(x/y)$). Відповідно до теореми множення ймовірностей

$$f_2(x, y) = f_1(x)f(y/x).$$

Випадкові величини X та Y називають незалежними, якщо їх спільна щільність розподілу дорівнює добутку їх щільностей розподілу:

$$f_2(x, y) = f_1(x)f_1(y).$$

Числовими характеристиками випадкового вектора $\bar{X} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^T$ є такі:

1) математичне сподівання

$$M[\bar{X}] = (m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n)^T,$$

де $m_i = M[X_i]$;

2) дисперсія

$$D[\bar{X}] = (D_1 \quad D_2 \quad \dots \quad D_n)^T,$$

де $D_i = D[X_i]$;

3) кореляційна матриця

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix},$$

де $K_{ij} = M[(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$ – кореляційний момент випадкових величин X_i та X_j .

З означення кореляційного моменту ясно, що кореляційна матриця є симетричною. Кореляційна матриця K є кореляційним моментом векторної випадкової величини та визначається наступним чином:

$$K = M[\widetilde{\bar{X}} \widetilde{\bar{X}}^T].$$

14.2. Випадкові процеси та їх характеристики

Випадкову функцію $X(t)$ можна визначити як сімейство випадкових величин, які залежать від параметра t . Якщо параметр t є часом, то функцію $X(t)$ називають *випадковим* (імовірнісним, стохастичним) *процесом*. При кожному експерименті випадкова функція $X(t)$ набуває конкретного вигляду $x(t)$. Функція $x(t)$ є детермінованою та називається *реалізацією* випадкового процесу $X(t)$. Випадкова функція $X(t)$ при фіксованому параметрі t є випадковою величиною, яка володіє законами розподілу $F_1(x, t)$ та $f_1(x, t)$, що залежать від часу.

Функції $F_1(x, t)$ та $f_1(x, t)$ називають одновимірними законами розподілу, причому $F_1(x, t)$ називають одновимірною функцією розподілу, а $f_1(x, t)$ – одновимірною щільністю розподілу.

Одновимірні закони розподілу не є вичерпними характеристиками випадкового процесу $X(t)$. Вони, наприклад, не дозволяють визначити, як залежать одна від одної випадкові величини, які отримуються при різних фіксованих значеннях t .

Більш повною характеристикою випадкових процесів є двовимірні закони розподілу: функція розподілу $F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ та щільність розподілу $f_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$. Але вони, як будь-які кінцеві закони розподілу, не є вичерпними характеристиками випадкового процесу $X(t)$.

Для опису випадкових процесів поряд з функцією розподілу та щільністю розподілу використовують моментні характеристики:

початковий момент n -го порядку

$$M[X(t_1)X(t_2)\dots X(t_n)] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \dots x_n f_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n;$$

центральний момент n -го порядку

$$M[\tilde{X}(t_1)\dots \tilde{X}(t_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1) \times \\ \times (x_2 - m_2) \dots (x_n - m_n) f_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n,$$

де $\tilde{X}(t_i) = X(t_i) - M[X(t_i)]$ – центрована випадкова величина;
 $m_i = M[X(t_i)]$ – математичне сподівання (середнє значення) випадкової величини $X(t_i)$.

Найчастіше використовують:

початковий момент 1-го порядку

$$m_x(t) = M[X(t)],$$

який називають *математичним сподіванням* або *середнім значенням випадкового процесу* $X(t)$;

центральный момент 2-го порядку

$$K_x(t_1, t_2) = M[\tilde{X}(t_1)\tilde{X}(t_2)],$$

який називають *кореляційною* або *автокореляційною функцією*;

початковий момент 2-го порядку

$$B_x(t_1, t_2) = M[X(t_1)X(t_2)],$$

який називають *коваріаційною функцією*. Її також записують у вигляді $\text{cov}[X(t_1), X(t_2)]$.

Очевидно, якщо математичне сподівання $M[X(t)] = 0$, то кореляційна та коваріаційна функції рівні між собою. При $t_1 = t_2 = t$ кореляційна функція дорівнює дисперсії (дисперсійній функції):

$$D[X(t)] = K(t, t).$$

Якщо $X(t)$ та $Y(t)$ – два випадкових процеси, то функція

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M[\tilde{X}(t_1)\tilde{Y}(t_2)]$$

називається *взаємною кореляційною функцією*. Якщо $K_{xy}(t_1, t_2) = 0$, тоді випадкові процеси $X(t)$ та $Y(t)$ називають *некорельованими*, а якщо $K_{xy}(t_1, t_2) \neq 0$, то *корельованими*.

Якщо $\bar{X}(t)$ – векторний випадковий процес, то кореляційна функція

$K(t_1, t_2) = M[\tilde{\bar{X}}(t_1)\tilde{\bar{X}}^T(t_2)]$ являє собою симетричну матрицю, яку також називають кореляційною матрицею.

Математичне сподівання, кореляційна та коваріаційна функції мають наступні властивості:

- 1) $K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)$, $B(t_1, t_2) = B(t_2, t_1)$;
- 2) якщо $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – детермінована функція, то

$$M[Y(t)] = M[X(t)] + \varphi(t), \quad K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2);$$

3) якщо $Y(t) = X(t)\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – детермінована функція, то

$$m_y(t) = \varphi(t)m_x(t), \quad K_y(t_1, t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)K_x(t_1, t_2).$$

14.3. Деякі типи випадкових процесів

1. Гауссів процес

Відбувається згідно з багатовимірним нормальним законом розподілу Гаусса.

2. Стаціонарний процес

Випадковий процес $X(t)$ називається *стаціонарним*, якщо

$$F_n(x_1, t_1 + t_0; x_2, t_2 + t_0; \dots; x_n, t_n + t_0) = F_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$$

при будь-яких t_0 та n .

Для стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ математичне сподівання не змінюється протягом часу, а кореляційна функція залежить тільки від одного параметра.

Дійсно,

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dF(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0) dF(x, t + t_0) = m_x(t + t_0)$$

при будь-якому t_0 .

Аналогічно

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t_1) - m_1)(x_2(t_2) - m_2) dF(x_1, t_1; x_2, t_2) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t_1 + t_0) - m_1)(x_2(t_2 + t_0) - m_2) dF(x_1, t_1 + t_0; x_2, t_2 + t_0) = \\ &= K_x(t_1 + t_0, t_2 + t_0) \end{aligned}$$

при будь-якому t_0 .

Нехай $t_0 = -t_1$. Тоді

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2 - t_1) = K_x(\tau),$$

де $\tau = t_2 - t_1$.

Через властивість

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$$

маємо

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau).$$

Таким чином, кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу є парною функцією.

Можна довести, що

$$K_x(0) \geq K_x(\tau).$$

Стаціонарні випадкові процеси $X(t)$ та $Y(t)$ називаються *стаціонарно зв'язаними*, якщо їх взаємна кореляційна функція залежить тільки від одного параметра:

$$K_{xy}(t_1, t_2) = K_{xy}(\tau).$$

Можна довести, що кореляційна функція стаціонарно зв'язаних процесів $X(t)$ та $Y(t)$ є парною, тобто

$$K_{xy}(\tau) = K_{xy}(-\tau).$$

3. Білий шум

Випадковий процес $X(t)$ називають *білим шумом*, якщо його кореляційна функція має вигляд

$$K_x(t, \tau) = G(t) \delta(t - \tau),$$

де $\delta(t - \tau)$ – дельта-функція Дірака.

Величина $G(t)$ називається *інтенсивністю* білого шуму. Для стаціонарного процесу $G(t) = G = \text{const}$.

Дельта-функція Дірака або одновимірний δ -функція за означенням має наступні властивості:

$$\delta(t) = 0, \text{ якщо } t \neq 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0).$$

Дельта-функція $\delta(t)$ неаналітична.

Зміщуючи особливість у точку τ , дельта-функцію Дірака можна записати як $\delta(t - \tau)$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau).$$

14.4. Спектральна щільність стаціонарного процесу

У теорії випадкових процесів поряд з описом сигналів у часовій області застосовують частотне подання сигналів. Для цього вводять поняття спектральної щільності стаціонарного процесу.

Спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ називається двостороннє перетворення Фур'є від кореляційної функції:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (14.1)$$

де j – уявна одиниця.

Вона характеризує розподіл енергії процесу, що розглядається.

Кореляційна функція виражається за допомогою спектральної щільності через зворотне перетворення Фур'є:

$$K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (14.2)$$

Оскільки $K_x(\tau)$ – парна функція, то $S_x(\omega)$ також буде парною функцією ($S_x(\omega) = S_x(-\omega)$). Отже, вирази (14.1) та (14.2) можна привести до вигляду

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau;$$

$$K_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

Взаємна спектральна щільність двох стаціонарних і стаціонарно зв'язаних випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

а їх взаємна кореляційна функція

$$K_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Спектральна щільність $S_y(\omega)$ вихідного сигналу $Y(t)$ зв'язана зі спектральною щільністю $S_x(\omega)$ вхідного сигналу об'єкта співвідношенням [3]

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega),$$

де $W(j\omega)$ – частотна передавальна функція об'єкта.

Для стаціонарного процесу інтенсивність G білого шуму є сталою величиною і дорівнює спектральній щільності $S_x(\omega)$, тобто $G = S_x(\omega)$ ($S_x(\omega) = \text{const}$).

15. ОПТИМАЛЬНА ФІЛЬТРАЦІЯ ВІНЕРА

У 1942 році американський математик Норберт Вінер розв'язав задачу оптимальної фільтрації, яка полягала у визначенні передавальної функції фільтра, який виділяє корисний сигнал із суміші цього сигналу з перешкодою з мінімальною дисперсією похибки. Такий фільтр прийнято називати оптимальним фільтром Вінера або фільтром Вінера.

Визначення передавальної функції фільтра Вінера зазвичай відбувається у два етапи. На першому етапі виконується факторизація спектральної щільності та визначається передавальна функція формуючого фільтра. Суть факторизації зводиться до подання спектральної щільності у вигляді квадрата модуля деякої функції, що залежить від $j\omega$. На другому заключному етапі відшукується передавальна функція оптимального фільтра Вінера.

15.1. Формуючий фільтр

Формуючим фільтром називається ланка, яка формує з білого шуму випадковий процес із заданою спектральною щільністю [3].

Розглянемо лінійний фільтр з передавальною функцією $W_\Phi(p)$ та сигналами на вході $V(t)$ і на виході $X(t)$ (рис. 15.1).

Будемо вважати вхідний сигнал $V(t)$ білим шумом з одиничною інтенсивністю. Тоді його кореляційна функція $K_v(\tau) = \delta(\tau)$, а спектральна щільність, що дорівнює інтенсивності білого шуму, $S_v(\omega) = 1$.

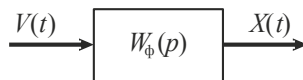


Рис. 15.1. Формуючий фільтр

Оскільки інтенсивність білого шуму – величина стала і дорівнює одиниці, то вхідний сигнал $V(t)$ є стаціонарним. Унаслідок цього вихідний сигнал $X(t)$ в усталеному режимі буде також стаціонарним, а його спектральна щільність

$$S_x(\omega) = |W_\Phi(j\omega)|^2 S_v(\omega) = |W_\Phi(j\omega)|^2. \quad (15.1)$$

Відповідно до цієї формули та означення формуючого фільтра спектральну щільність вихідного сигналу $X(t)$ задамо у вигляді

$$S_x(\omega) = \Psi(j\omega) \Psi(-j\omega) = |\Psi(j\omega)|^2. \quad (15.2)$$

При цьому вважатимемо, що полюси та нулі функції $\Psi(p)$ розташовані у лівій півплощині.

Подання спектральної щільності у вигляді (15.2) називається її *факторизацією*.

Порівнюючи (15.1) та (15.2), знаходимо при $p = j\omega$ передавальну функцію формуючого фільтра

$$W_\Phi(p) = \Psi(p).$$

15.2. Факторизація спектральної щільності

Розглянемо загальний випадок, коли спектральна щільність $S_x(\omega)$ є дробово-раціональною функцією [3]:

$$S_x(\omega) = \frac{H(\omega)}{G(\omega)},$$

де $H(\omega)$ та $G(\omega)$ – деякі поліноми від ω .

Дисперсію

$$D_x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega$$

будемо вважати кінцевою.

При цьому припущенні степінь полінома $H(\omega)$ строго менший від степеня полінома $G(\omega)$, а рівняння $G(\omega) = 0$ не має дійсних коренів.

Через парність спектральної щільності $S_x(\omega)$ поліноми $H(\omega)$ та $G(\omega)$ містять тільки парні степені, а корені рівнянь $H(\omega) = 0$ та $G(\omega) = 0$ розташовані симетрично відносно обох осей системи координат.

Нехай поліноми $H(\omega)$ та $G(\omega)$ мають вигляд

$$H(\omega) = \beta_0 \omega^{2m} + \beta_1 \omega^{2(m-1)} + \dots + \beta_m;$$

$$G(\omega) = \alpha_0 \omega^{2n} + \alpha_1 \omega^{2(n-1)} + \dots + \alpha_n.$$

Розкладемо їх на елементарні множники та подамо спектральну щільність у вигляді

$$S_x(\omega) = \frac{\sqrt{\beta_0} H_+ \sqrt{\beta_0} H_-}{\sqrt{\alpha_0} G_+ \sqrt{\alpha_0} G_-} = \frac{(j)^m \sqrt{\beta_0} H_+ (-j)^m \sqrt{\beta_0} H_-}{(j)^n \sqrt{\alpha_0} G_+ (-j)^n \sqrt{\alpha_0} G_-},$$

де H_+ , G_+ – добуток елементарних множників, що відповідають кореням рівнянь відповідно $H(\omega) = 0$ та $G(\omega) = 0$, розташованим у верхній півплощині; H_- , G_- – добуток елементарних множників, що відповідають кореням рівнянь $H(\omega) = 0$ та $G(\omega) = 0$ відповідно, розташованим у нижній півплощині.

Позначимо

$$P(j\omega) = (j)^m \sqrt{\beta_0} H_+; \quad Q(j\omega) = (j)^n \sqrt{\alpha_0} G_+.$$

Тоді можна довести, що

$$P(-j\omega) = (-j)^m \sqrt{\beta_0} H_-; \quad Q(-j\omega) = (-j)^n \sqrt{\alpha_0} G_-.$$

З урахуванням цих позначень спектральну щільність наведемо у вигляді

$$S_x(\omega) = \frac{P(j\omega)P(-j\omega)}{Q(j\omega)Q(-j\omega)} = \left| \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} \right|^2.$$

Звідси знаходимо передавальну функцію формуючого фільтра

$$W_\Phi(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}.$$

Зауважимо, що кореням рівнянь $H(\omega) = 0$ та $G(\omega) = 0$, розташованим у верхній півплощині на площині коренів ω , на площині $p = j\omega$ відповідають ліві корені. Тому відповідно до побудови поліномів $P(p)$ та $Q(p)$ усі нулі та полюси передавальної функції формуючого фільтра розташовані у лівій півплощині.

Приклад 1. Визначити передавальну функцію формуючого фільтра для стаціонарного випадкового процесу зі спектральною щільністю

$$S_x(\omega) = \frac{\omega^2 + 2^2}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1}.$$

Розв'язання. У даному випадку нулями спектральної щільності є комплексні числа $\omega_1 = 2j$, $\omega_2 = -2j$, а полюсами – $\omega_1 = j$, $\omega_2 = -j$, $\omega_3 = j$, $\omega_4 = -j$. Тому

$$H_+ = \omega - 2j, \quad P(j\omega) = (j)^m \sqrt{\beta_0} \quad H_+ = j(\omega - 2j) = j\omega + 2;$$

$$G_+ = (\omega - j)^2, \quad Q(j\omega) = (j)^n \sqrt{\alpha_0} \quad G_+ = j^2(\omega - j)^2 = (j\omega + 1)^2.$$

Передавальна функція формуючого фільтра має вигляд

$$W_\Phi(p) = \frac{p+2}{(p+1)^2}.$$

15.3. Фільтр Вінера

Передавальна функція оптимального фільтра Вінера (рис. 15.2) має вигляд [3]

$$W(j\omega) = \frac{\hat{S}(p)}{X(p)} = \frac{1}{W_\Phi(j\omega)} \left[\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\Phi(-j\omega)} \right]_+,$$

де $W_\Phi(j\omega)$ – частотна передавальна функція формуючого фільтра вхідного сигналу $X(t) = S(t) + N(t)$; $S(t)$ – корисний сигнал; $N(t)$ – шум (перешкода); $X(p)$ та $\hat{S}(p)$ – зображення за Лапласом вхідного сигналу $X(t)$ та оцінки $\hat{S}(t)$ корисного сигналу $S(t)$; $S_{xs}(\omega)$ – взаємна спектральна щільність вхідного $X(t)$ та корисного $S(t)$ сигналів; $[\dots]_+$ – вираз, який отримується, якщо при розкладанні на прості дроби дробово-раціональної функції, яка міститься у квадратних дужках, виключити ті доданки, полюси яких розташовані у нижній півплощині на комплексній площині ω або у правій півплощині на комплексній площині $p = j\omega$.

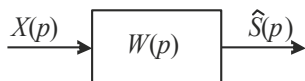


Рис. 15.2. Фільтр Вінера

Вона відповідає мінімуму середнього квадрата похибки $e(t) = S(t) - \hat{S}(t)$:

$$M[e^2(t)] \rightarrow \min.$$

Приклад 2. Приймальний сигнал $X(t)$ складається з корисного сигналу $S(t)$ з кореляційною функцією $K_s(\tau) = e^{-3|\tau|}$ та перешкоди $N(t)$ з кореляційною функцією $K_n(\tau) = e^{-2|\tau|}$. Сигнали $S(t)$ та $N(t)$ не корельовані між собою ($K_{sn}(\tau) = 0$). Визначити передавальну функцію фільтра Вінера.

Розв'язання. Передавальна функція фільтра Вінера

$$W(j\omega) = \frac{1}{W_\phi(j\omega)} \left[\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\phi(-j\omega)} \right]_+.$$

Знайдемо частотну передавальну функцію формуючого фільтра.

Оскільки корисний сигнал $S(t)$ та перешкода $N(t)$ не корельовані, то спектральна щільність приймального сигналу

$$S_x(\omega) = S_s(\omega) + S_n(\omega),$$

де

$$\begin{aligned} S_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{3\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-3\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(3-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{3-j\omega} e^{(3-j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{3+j\omega} e^{-(3+j\omega)\tau} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{3-j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} = \frac{6}{3^2 + \omega^2}; \end{aligned}$$

$$S_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-2\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^0 e^{(2-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(2+j\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{2-j\omega} e^{(2-j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2+j\omega} e^{-(2+j\omega)\tau} \Big|_0^{+\infty} = \\
 &= \frac{1}{2-j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} = \frac{4}{2^2 + \omega^2}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned}
 S_x(\omega) &= \frac{6}{3^2 + \omega^2} + \frac{4}{2^2 + \omega^2} = \frac{6(2^2 + \omega^2) + 4(3^2 + \omega^2)}{(2^2 + \omega^2)(3^2 + \omega^2)} = \\
 &= \frac{60 + 10\omega^2}{(2^2 + \omega^2)(3^2 + \omega^2)} = \frac{10(\left(\sqrt{6}\right)^2 + \omega^2)}{(2^2 + \omega^2)(3^2 + \omega^2)} = \left| \frac{\sqrt{10}(\sqrt{6} + j\omega)}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)} \right|^2.
 \end{aligned}$$

Отже, частотна передавальна функція формуючого фільтра

$$W_\Phi(j\omega) = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{6} + j\omega)}{(2 + j\omega)(3 + j\omega)}.$$

Взаємна кореляційна функція приймального $X(t)$ та корисного $S(t)$ сигналів

$$\begin{aligned}
 K_{xs}(\tau) &= M[\tilde{X}(t)\tilde{S}(t+\tau)] = M[(\tilde{S}(t) + \tilde{N}(t))\tilde{S}(t+\tau)] = \\
 &= M[\tilde{S}(t)\tilde{S}(t+\tau)] + M[\tilde{N}(t)\tilde{S}(t+\tau)] = \\
 &= K_s(\tau) + M[\tilde{S}(t)\tilde{N}(t+\tau)] = K_s(\tau) + K_{sn}(\tau) = K_s(\tau) = e^{-3|\tau|}.
 \end{aligned}$$

Відповідна цій функції взаємна спектральна щільність

$$S_{xs}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xs}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = S_s(\omega) = \frac{6}{3^2 + \omega^2}.$$

Після цього знайдемо вираз, який міститься у квадратних дужках формули для оптимального фільтра Вінера:

$$\begin{aligned}\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\phi(-j\omega)} &= \frac{6(2-j\omega)(3-j\omega)}{(3^2+\omega^2)\sqrt{10}(\sqrt{6}-j\omega)} = \frac{6}{\sqrt{10}} \frac{(2-j\omega)(3-j\omega)}{(3-j\omega)(3+j\omega)(\sqrt{6}-j\omega)} = \\ &= \frac{6}{\sqrt{10}} \frac{2-j\omega}{(3+j\omega)(\sqrt{6}-j\omega)}.\end{aligned}$$

Розкладемо праву частину цього виразу на елементарні дробі методом невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{2-j\omega}{(3+j\omega)(\sqrt{6}-j\omega)} = \frac{A}{3+j\omega} + \frac{B}{\sqrt{6}-j\omega};$$

$$A(\sqrt{6}-j\omega) + B(3+j\omega) = 2-j\omega;$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}A + 3B = 2; \\ B - A = -1, \end{cases}$$

$$A = \frac{5}{3+\sqrt{6}}, \quad B = \frac{2-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}.$$

Тоді

$$\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\phi(-j\omega)} = \frac{6}{\sqrt{10}} \left(\frac{\frac{5}{3+\sqrt{6}}}{3+j\omega} + \frac{\frac{2-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{6}-j\omega} \right).$$

Відкинемо другий елементарний дріб, полюс якого розташований у нижній півплощині на площині ω . Тоді отримаємо

$$\left[\frac{S_{xs}(\omega)}{W_\phi(-j\omega)} \right]_+ = \frac{30}{\sqrt{10}(3+\sqrt{6})} \frac{1}{3+j\omega}.$$

Шукана передавальна функція оптимального фільтра Вінера

$$W(j\omega) = \frac{(2 + j\omega)(3 + j\omega)}{\sqrt{10}(6 + j\omega)} \frac{30}{\sqrt{10}(3 + \sqrt{6})(3 + j\omega)} = \frac{3(2 + j\omega)}{(3 + \sqrt{6})(6 + j\omega)};$$

$$W(p) = \frac{3(2 + p)}{(3 + \sqrt{6})(6 + p)};$$

$$W(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1}, \quad k = \frac{1}{3 + \sqrt{6}}, \quad T_1 = \frac{1}{2}, \quad T_2 = \frac{1}{6}.$$

16. ФІЛЬТРИ КАЛМАНА–Б'ЮСІ

При розв'язанні практичних задач дуже часто виникає ситуація, коли необхідні для керування координати вектора стану об'єкта не вимірюються або вимірюються з істотними випадковими помилками, а рух об'єкта керування піддано випадковим впливам.

У таких ситуаціях керування визначається на основі результатів оцінювання стану системи з мінімальною дисперсією фазових координат. Таке оцінювання виконується спеціальним спостерегаючим пристроєм – фільтром Калмана–Б'юсі [3, 11].

16.1. Фільтри Калмана–Б'юсі при білих шумах

Перейдемо до математичного формулювання задачі оптимальної фільтрації (оцінювання) при білих шумах [3, 14].

Дана керована система

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} + \bar{v}_0(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad (16.1a)$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + \bar{v}_c(t), \quad (16.1б)$$

де A, B, C у загальному випадку є функціями часу; $\bar{x}_0$ – випадкова векторна величина та $\bar{v}_0(t), \bar{v}_c(t)$ – білі шуми відповідно об'єкта і спостереження з імовірнісними характеристиками:

$$M[\bar{x}_0] = \bar{m}, \quad M[(\bar{x}_0 - \bar{m})(\bar{x}_0 - \bar{m})^T] = P_0;$$

$$M[\bar{v}_0(t)] = 0, \quad M[\bar{v}_0(t)\bar{v}_0^T(\tau)] = Q_0(t)\delta(t - \tau);$$

$$M[\bar{v}_c(t)] = 0, \quad M[\bar{v}_c(t)\bar{v}_c^T(\tau)] = R_0(t)\delta(t - \tau);$$

$$M[\bar{v}_0(t)\bar{v}_c^T(\tau)] = S_0(t)\delta(t-\tau),$$

P_0, Q_0 – додатно напіввизначені матриці; R_0 – додатно визначена матриця; випадкова величина $\bar{x}_0$ не корельована із шумами $\bar{v}_0(t)$ та $\bar{v}_c(t)$.

Необхідно на основі спостереження виходу $\bar{y}(t)$ на інтервалі $[t_0; t]$ визначити незсунену лінійну оцінку $\hat{\bar{x}}(t)$ фазового вектора $\bar{x}(t)$, яка забезпечує мінімум середнього квадрата похибки:

$$M\left[\left(\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)\right)^T \left(\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)\right)\right] \rightarrow \min_{\hat{\bar{x}}(t)}. \quad (16.1в)$$

Незсунена оцінка $\hat{\bar{x}}(t)$ передбачає рівність її математичного сподівання математичному сподіванню дійсної величини $\bar{x}(t)$, тобто

$$M[\hat{\bar{x}}(t)] = M[\bar{x}(t)].$$

Умова додатної визначеності матриці R_0 (матриці інтенсивності шуму спостереження) означає, що жодна компонента виходу $\bar{y}(t)$ не вимірюється точно. Тому в цьому випадку задача оцінювання називається *несингулярною* (невиродженою). Таким чином, задача (16.1) є несингулярною задачею оптимального оцінювання (фільтрації).

Рівняння (16.1а) називається рівнянням об'єкта, рівняння (16.1б) – рівнянням спостереження.

Теорема 1. Якщо шуми об'єкта та спостереження не корельовані ($S_0(t) \equiv 0$), то оцінка $\hat{\bar{x}}(t)$ є незсуненою та оптимальною в тому випадку, коли вона знаходиться з рівняння

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = A\hat{\bar{x}} + B\bar{u} + G(\bar{y} - C\hat{\bar{x}}), \quad \hat{\bar{x}}(t_0) = M[\bar{x}_0] = \bar{m} \quad (16.2а)$$

з матрицею коефіцієнтів підсилення

$$G = PC^T R_0^{-1}, \quad (16.2б)$$

де P визначається з матричного рівняння Ріккати

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0. \quad (16.2в)$$

Матриця P є дисперсійною матрицею помилки $\bar{e} = \bar{x}(t) - \hat{x}(t)$:

$$P = M[\bar{e}(t) \bar{e}^T(t)].$$

Рівняння (16.2в), яке вона задовольняє, також називають дисперсійним рівнянням.

Теорема 2. Якщо шуми об'єкта та спостереження корельовані ($S_0(t) \neq 0$), то оцінка $\hat{x}(t)$ є незсуненою та оптимальною в тому випадку, коли вона знаходиться з рівняння (16.2а) з матрицею коефіцієнтів підсилення

$$G = (PC^T + S_0)R_0^{-1}, \quad (16.3а)$$

де дисперсійна матриця P визначається з матричного рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} \dot{P} = & (A - S_0 R_0^{-1} C)P + P(A - S_0 R_0^{-1} C)^T - PC^T R_0^{-1} CP + \\ & + Q_0 - S_0 R_0^{-1} S_0^T, \quad P(t_0) = P_0. \end{aligned} \quad (16.3б)$$

Несингулярна задача оптимальної фільтрації (16.1) при некорельованих шумах уперше була розв'язана Р. Калманом та Р. Б'юсі. Тому фільтри (16.2), (16.2а) і (16.3) називають фільтрами (спостерігачами) Калмана–Б'юсі.

Відмітимо, що фільтри Калмана–Б'юсі мають ту ж саму структуру, що і спостерігач повного порядку у детермінованому випадку. Відмінність полягає в тому, що коли випадкові впливи не враховуються (тобто у детермінованому випадку), матриця коефіцієнтів підсилення обирається довільно, а коли випадкові впливи враховуються, ця матриця визначається однозначно.

Приклад 1. Дана керована система

$$\dot{x} = x + 4u + v_o, \quad x(0) = x_0;$$

$$y = 3x + v_c,$$

де x_0 – випадкова величина та $v_o(t)$, $v_c(t)$ – білі шуми з імовірнісними характеристиками:

$$M[x_0] = 2, \quad M[(x_0 - 2)^2] = P_0, \quad P_0 = 2;$$

$$M[v_o(t)] = 0, \quad M[v_o(t)v_o(\tau)] = Q_0 \delta(t - \tau), \quad Q_0 = 1;$$

$$M[v_c(t)] = 0, \quad M[v_c(t)v_c(\tau)] = R_0 \delta(t - \tau), \quad R_0 = 3;$$

$$M[v_o(t)v_c(\tau)] = 0;$$

випадкова величина x_0 не корельована із шумами $v_o(t)$ та $v_c(t)$.

Необхідно визначити незсунену лінійну оцінку $\hat{x}(t)$ випадкової величини $x(t)$ за спостереженням $y(t)$ на інтервалі $[0; t]$, яка забезпечує мінімум середнього квадрата похибки:

$$M[(x - \hat{x})^2] \rightarrow \min_{\hat{x}}$$

Розв'язання. У даному випадку незсунена лінійна оцінка $\hat{x}(t)$ визначається на основі теореми 1 з рівняння

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = M[x_0]$$

з коефіцієнтом підсилення

$$G = PC^T R_0^{-1},$$

де P визначається з рівняння Ріккати

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(0) = P_0.$$

З рівнянь об'єкта та спостереження знаходимо $A = 1$, $B = 4$, $C = 3$. Рівняння Ріккати набуває вигляду

$$\dot{P} = 2P - 3P^2 + 1.$$

Його інтегрування дає вираз

$$P = \frac{4 + e^{-4t}}{4 - 3e^{-4t}}.$$

Тому для коефіцієнтів підсилення отримуємо

$$G = \frac{4 + e^{-4t}}{4 - 3e^{-4t}}.$$

Структурна схема фільтра наведена на рис. 16.1.

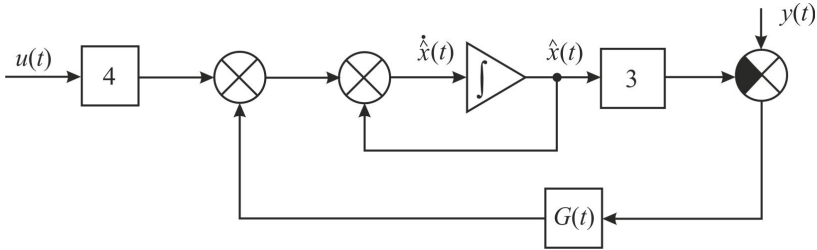


Рис. 16.1. Структурна схема фільтра

16.2. Фільтр Калмана–Б'юсі при кольоровому шумі об'єкта

Кольоровим шумом називається небілий шум.

Постановка задачі. Нехай керована система описується наступними рівняннями [3]:

$$\dot{\bar{x}}^{(1)} = A_1 \bar{x}^{(1)} + B_1 \bar{u} + \bar{x}^{(2)}, \quad x^{(1)}(t_0) = \bar{x}_0^{(1)}; \quad (16.4a)$$

$$\dot{\bar{x}}^{(2)} = A_2 \bar{x}^{(2)} + \tilde{\bar{v}}_0, \quad \bar{x}^{(2)}(t_0) = \bar{x}_0^{(2)}; \quad (16.4б)$$

$$\bar{y} = C_1 \bar{x}^{(1)} + \bar{v}_c, \quad (16.4в)$$

де $\bar{x}_0^{(1)}$, $\bar{x}_0^{(2)}$ – випадкові величини та $\tilde{\bar{v}}_0$, $\bar{v}_c$ – білі шуми об'єкта і спостереження відповідно з імовірнісними характеристиками:

$$M[\bar{x}_0^{(1)}] = \bar{m}_1, \quad M[(\bar{x}_0^{(1)} - \bar{m}_1)(\bar{x}_0^{(1)} - \bar{m}_1)^T] = P_{01};$$

$$M[\bar{x}_0^{(2)}] = \bar{m}_2, \quad M[(\bar{x}_0^{(2)} - \bar{m}_2)(\bar{x}_0^{(2)} - \bar{m}_2)^T] = P_{02};$$

$$M[\tilde{\bar{v}}_0] = 0, \quad M[\tilde{\bar{v}}_0(t) \tilde{\bar{v}}_0^T(\tau)] = \tilde{Q}_0(t) \delta(t - \tau);$$

$$M[\bar{v}_c] = 0, \quad M[\bar{v}_c(t)\bar{v}_c^T(\tau)] = R_0(t)\delta(t-\tau);$$

$$M[\tilde{\bar{v}}_0(t)\bar{v}_c^T(\tau)] = 0,$$

де $P_{01}, P_{02}, \tilde{Q}_0$ – додатно напіввизначені матриці; R_0 – додатно визначена матриця; випадкові величини $\bar{x}_0^{(1)}, \bar{x}_0^{(2)}$ не корельовані з шумами $\tilde{\bar{v}}_0(t)$ та $\bar{v}_c(t)$.

Необхідно на основі спостереження вектора виходу $\bar{y}(t)$ на інтервалі $[t_0; t]$ визначити незсунену лінійну оцінку $\hat{\bar{x}}^{(1)}(t)$ фазового вектора $\bar{x}^{(1)}(t)$, яка забезпечує мінімум середнього квадрата похибки:

$$M\left[\left(\bar{x}^{(1)}(t) - \hat{\bar{x}}^{(1)}(t)\right)^T \left(\bar{x}^{(1)}(t) - \hat{\bar{x}}^{(1)}(t)\right)\right] \rightarrow \min_{\hat{\bar{x}}^{(1)}(t)}. \quad (16.4r)$$

Рівняння (16.4a) цієї системи є рівнянням об'єкта, в якому $\bar{x}^{(2)}(t)$ – кольоровий шум об'єкта; (16.4б) – рівняння формувача, який з білого шуму $\tilde{\bar{v}}_0(t)$ формує кольоровий шум об'єкта $\bar{x}^{(2)}(t)$; (16.4в) – рівняння спостереження.

Сформульовану задачу (16.4) зведемо до несингулярної задачі оптимальної фільтрації при білих шумах.

Уведемо наступні змінні та матриці:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}^{(1)} \\ \bar{x}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} \bar{x}_0^{(1)} \\ \bar{x}_0^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \bar{m} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & I \\ O & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & O \end{pmatrix}; \quad (16.4d)$$

$$K = \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} & O \\ O & P_{02} \end{pmatrix}, \quad Q_0 = K\tilde{Q}_0K^T.$$

Тоді поставлену задачу зведемо до наступної:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u} + \bar{v}_o(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \\ \bar{y} &= C\bar{x} + \bar{v}_c(t);\end{aligned}\tag{16.5}$$

$$M\left[\left(\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)\right)^T \left(\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)\right)\right] \rightarrow \min_{\hat{\bar{x}}(t)},$$

де $\bar{x}_0$ – випадкова величина та $\bar{v}_o = K\widetilde{\bar{v}}_o$, $\bar{v}_c(t)$ – білі шуми з імовірнісними характеристиками:

$$M[\bar{x}_0] = \bar{m}, \quad M[(\bar{x}_0 - \bar{m})(\bar{x}_0 - \bar{m})^T] = P_0;$$

$$M[\bar{v}_o] = 0, \quad M[\bar{v}_o(t)\bar{v}_o^T(\tau)] = Q_0(t)\delta(t - \tau);$$

$$M[\bar{v}_c] = 0, \quad M[\bar{v}_c(t)\bar{v}_c^T(\tau)] = R_0(t)\delta(t - \tau);$$

$$M[\bar{v}_o(t)\bar{v}_c^T(\tau)] = 0;$$

початковий фазовий вектор $\bar{x}_0$ не корельований з білими шумами $\bar{v}_o(t)$ та $\bar{v}_c(t)$.

Задача (16.5) є несингулярною задачею оптимального оцінювання з некорельованими білими шумами об'єкта та спостереження. Її розв'язок визначається за теоремою 1 та являє собою фільтр Калмана–Б'юсі при білих шумах. Тому згідно з цією теоремою для оптимальної оцінки маємо

$$\dot{\hat{\bar{x}}} = A\hat{\bar{x}} + B\bar{u} + G(\bar{y} - C\hat{\bar{x}}), \quad \hat{\bar{x}}(t_0) = \bar{m};\tag{16.6a}$$

$$G = PC^T R_0^{-1};\tag{16.6б}$$

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(t_0) = P_0.\tag{16.6в}$$

Подамо дисперсійну матрицю P у вигляді блокової матриці:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{21} & P_2 \end{pmatrix}, \quad (16.7)$$

де $P_{21} = P_{12}$ в силу симетрії матриці P .

Підставимо вирази (16.4д) і (16.7) у формули (16.6а) та (16.6б). Тоді остаточно отримаємо для матриці G та оцінок $\hat{\bar{x}}^{(1)}$ і $\hat{\bar{x}}^{(2)}$ наступні вирази:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{21} & P_2 \end{pmatrix} (C_1 \quad O)^T R_0^{-1} = \begin{pmatrix} P_1 C_1^T R_0^{-1} \\ P_{21} C_1^T R_0^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}^{(1)} = A_1 \hat{\bar{x}}^{(1)} + B_1 \bar{u} + \hat{\bar{x}}^{(2)} + G_1 (\bar{y} - C_1 \hat{\bar{x}}^{(1)}), \quad \hat{\bar{x}}^{(1)}(t_0) = \bar{m}_1;$$

$$\dot{\hat{\bar{x}}}^{(2)} = A_2 \hat{\bar{x}}^{(2)} + G_2 (\bar{y} - C_1 \hat{\bar{x}}^{(1)}), \quad \hat{\bar{x}}^{(2)}(t_0) = \bar{m}_2.$$

Матрична структурна схема фільтра Калмана–Б'юсі при кольоровому шумі об'єкта наведена на рис. 16.2.

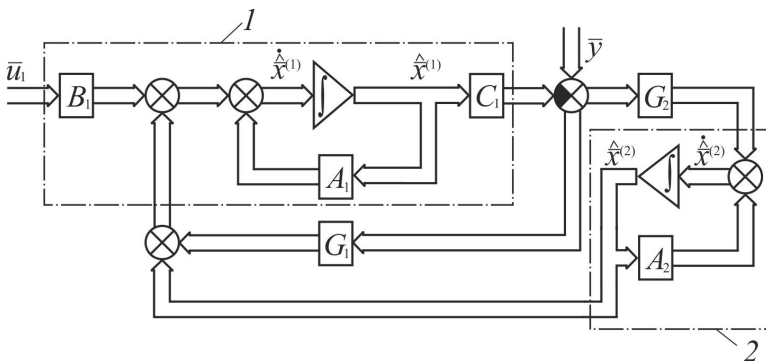


Рис. 16.2. Матрична структурна схема фільтра Калмана–Б'юсі при кольоровому шумі об'єкта

Вона містить моделі об'єкта 1 і формувача 2 та зворотні зв'язки з матричними коефіцієнтами G_1 та G_2 .

Приклад 2. Сформувати математичну модель фільтра Калмана–Б'юсі для системи

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \quad x_1(0) = x_1^0,$$

$$y = x_1 + v_c,$$

де x_2 – кольоровий шум об'єкта з імовірнісними характеристиками:

$$M[x_2] = 0, \quad K_{x_2}(\tau) = M[x_2(t)x_2(t+\tau)] = \frac{1}{2}e^{-|\tau|},$$

початкове випадкове значення x_1^0 і білий шум спостереження $v_c(t)$ не корельовані ні між собою, ні з шумом об'єкта $x_2(t)$ та мають наступні характеристики:

$$M[x_1^0] = 0, \quad M[(x_1^0)^2] = 2, \quad M[v_c(t)] = 0,$$

$$M[v_c(t)v_c(t-\tau)] = \delta(t-\tau).$$

Розв'язання. Спектральна щільність шуму об'єкта

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_{x_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(1-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(1+j\omega)\tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left. \frac{1}{1-j\omega} e^{(1-j\omega)\tau} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{1}{1+j\omega} e^{-(1+j\omega)\tau} \right|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{1+\omega^2} = \left| \frac{1}{1+j\omega} \right|^2. \end{aligned}$$

Передавальна функція формувача

$$W_\Phi(p) = \frac{1}{1+p}.$$

Знайдемо його рівняння:

$$\frac{1}{1+p} = \frac{x_2}{\tilde{v}_0}, \quad px_2 + x_2 = \tilde{v}_0, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + \tilde{v}_0,$$

де $\tilde{v}_0$ – білий шум з нульовим середнім значенням ($M[\tilde{v}_0] = 0$) та одичною інтенсивністю $\tilde{Q}_0 = 1$.

У даному випадку

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0), \quad P_{01} = 2, \quad P_{02} = K_{x_2}(0) = \frac{1}{2};$$

$$R_0 = 1, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = K\tilde{Q}_0K^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1 \cdot (0 \quad 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} P_{01} & 0 \\ 0 & P_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Фільтр Калмана–Б'юсі описується рівняннями

$$\dot{\hat{x}}_1 = 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + g_1(y - \hat{x}_1), \quad \hat{x}_1(0) = M[x_1^0] = 0;$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_2 + g_2(y - \hat{x}_1), \quad \hat{x}_2(0) = M[x_2^0] = 0;$$

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = PC^T R_0^{-1} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}.$$

Дисперсійне рівняння має вигляд

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^T R_0^{-1} CP + Q_0, \quad P(0) = P_0.$$

Подамо його таким чином:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перейдемо до скалярної форми рівнянь. У силу симетрії матриці P ($p_{12} = p_{21}$) отримаємо

$$\dot{p}_{11} = 4p_{11} + 2p_{12} - p_{11}^2;$$

$$\dot{p}_{12} = p_{12} + p_{22} - p_{11}p_{12};$$

$$\dot{p}_{22} = -2p_{22} - p_{12}^2 + 1.$$

Початкові умови мають вигляд

$$p_{11}(0) = 2; \quad p_{12}(0) = 0; \quad p_{22}(0) = \frac{1}{2}.$$

16.3. Фільтр Калмана–Б'юсі при кольоровому шумі спостереження

Розглянемо задачу оптимальної фільтрації при білому шумі об'єкта та кольоровому шумі спостереження [3].

Постановка задачі. Нехай керована система описується рівняннями

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} + \bar{v}_o, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad (16.8a)$$

$$\tilde{\bar{y}} = \tilde{C}\bar{x} + \tilde{z}; \quad (16.8б)$$

$$\dot{\tilde{z}} = D\tilde{z} + \tilde{\bar{v}}_c, \quad (16.8в)$$

де $\bar{x}_0$ – випадкова векторна величина та $\bar{v}_o, \tilde{\bar{v}}_c$ – білі шуми об'єкта і спостереження відповідно з імовірнісними характеристиками:

$$M[\bar{x}_0] = \bar{m}, \quad M[(\bar{x}_0 - \bar{m})(\bar{x}_0 - \bar{m})^T] = P_0;$$

$$M[\bar{v}_o] = 0, \quad M[\bar{v}_o(t)\bar{v}_o^T(\tau)] = Q_0(t)\delta(t - \tau);$$

$$M[\tilde{\bar{v}}_c] = 0, \quad M[\tilde{\bar{v}}_c(t)\tilde{\bar{v}}_c^T(\tau)] = \tilde{R}_0(t)\delta(t - \tau);$$

$$M[\bar{v}_o(t)\tilde{\bar{v}}_c^T(\tau)] = \tilde{S}_0(t)\delta(t - \tau),$$

P_0, Q_0 – додатно напіввизначені матриці; $\tilde{R}_0$ – додатно визначена матриця; випадкова величина $\bar{x}_0$ не корельована із шумами $\bar{v}_0(t)$ та $\tilde{v}_c(t)$.

Необхідно на основі спостереження вектора виходу $\tilde{y}(t)$ на інтервалі $[t_0; t]$ визначити незсунену лінійну оцінку $\hat{\bar{x}}(t)$ фазового вектора $\bar{x}(t)$, яка забезпечує мінімум середнього квадрата похибки:

$$M \left[\left(\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t) \right)^T \left(\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t) \right) \right] \rightarrow \min_{\hat{\bar{x}}(t)}. \quad (16.8\Gamma)$$

У цій задачі (16.8а) є рівнянням об'єкта, (16.8б) – рівнянням спостереження, в якому $\bar{z}(t)$ – кольоровий шум спостереження, (16.8в) – рівнянням формувача, що формує з білого шуму $\tilde{v}_c(t)$ кольоровий шум спостереження $\bar{z}(t)$.

Сформульовану задачу зведемо до несингулярної задачі оптимальної фільтрації при білих шумах.

Продиференціюємо (16.8б) за t :

$$\dot{\tilde{y}} = \dot{\tilde{C}}\bar{x} + \tilde{C}\dot{\bar{x}} + \dot{\bar{z}}. \quad (16.9)$$

Підставимо в (16.9) вирази (16.8а) та (16.8в):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}} &= \dot{\tilde{C}}\bar{x} + \tilde{C}(A\bar{x} + B\bar{u} + \bar{v}_0) + D\bar{z} + \tilde{v}_c = \\ &= \left(\dot{\tilde{C}} + \tilde{C}A \right) \bar{x} + \tilde{C}B\bar{u} + D\bar{z} + \tilde{C}\bar{v}_0 + \tilde{v}_c. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Уведемо новий вектор спостереження

$$\bar{y} = \dot{\tilde{y}} - \tilde{C}B\bar{u} - D\bar{z}. \quad (16.11)$$

Підставимо (16.8б) та (16.10) в (16.11):

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \left(\dot{\tilde{C}} + \tilde{C}A \right) \bar{x} + \tilde{C}B\bar{u} + D\bar{z} + \tilde{C}\bar{v}_0 + \tilde{v}_c - \tilde{C}B\bar{u} - D\left(\tilde{C}\bar{x} + \bar{z} \right) = \\ &= \left(\dot{\tilde{C}} + \tilde{C}A - D\tilde{C} \right) \bar{x} + \left(\tilde{C}\bar{v}_0 + \tilde{v}_c \right). \end{aligned} \quad (16.12)$$

Позначимо

$$C = \dot{\tilde{C}} + \tilde{C}A - D\tilde{C}, \quad \bar{v}_c = \tilde{C}\bar{v}_o + \tilde{\tilde{v}}_c.$$

Тоді

$$\bar{y} = C\bar{x} + \bar{v}_c.$$

Покажемо, що $\bar{v}_c$ є білим шумом:

$$\begin{aligned} M[\bar{v}_c(t)\bar{v}_c^T(\tau)] &= M\left[(\tilde{C}\bar{v}_o(t) + \tilde{\tilde{v}}_c(t))(\tilde{C}\bar{v}_o(\tau) + \tilde{\tilde{v}}_c(\tau))^T\right] = \\ &= M\left[(\tilde{C}\bar{v}_o(t) + \tilde{\tilde{v}}_c(t))(\bar{v}_o^T(\tau)\tilde{C}^T + \tilde{\tilde{v}}_c^T(\tau))\right] = M[\tilde{C}\bar{v}_o(t)\bar{v}_o^T(\tau)\tilde{C}^T] + M[\tilde{C}\bar{v}_o(t)\tilde{\tilde{v}}_c^T(\tau)] + \\ &+ M[\tilde{\tilde{v}}_c(t)\bar{v}_o^T(\tau)\tilde{C}^T] + M[\tilde{\tilde{v}}_c(t)\tilde{\tilde{v}}_c^T(\tau)] = \tilde{C}M[\bar{v}_o(t)\bar{v}_o^T(\tau)]\tilde{C}^T + \tilde{C}M[\bar{v}_o(t)\tilde{\tilde{v}}_c^T(\tau)] + \\ &+ M[\tilde{\tilde{v}}_c(t)\bar{v}_o^T(\tau)]\tilde{C}^T + \tilde{R}_0\delta(t-\tau) = [\tilde{C}Q_0\tilde{C}^T + \tilde{C}\tilde{S} + \tilde{S}^T\tilde{C}^T + \tilde{R}_0]\delta(t-\tau). \end{aligned}$$

Його інтенсивність

$$R_0 = \tilde{C}Q_0\tilde{C}^T + \tilde{C}\tilde{S}_0 + \tilde{S}_0^T\tilde{C}^T + \tilde{R}_0.$$

Знайдемо взаємну кореляційну функцію шумів $\bar{v}_o(t)$ та $\bar{v}_c(t)$:

$$\begin{aligned} M[\bar{v}_o(t)\bar{v}_c^T(\tau)] &= M\left[\bar{v}_o(t)(\tilde{C}\bar{v}_o(\tau) + \tilde{\tilde{v}}_c(\tau))^T\right] = M[\bar{v}_o(t)(\bar{v}_o^T(\tau)\tilde{C}^T + \tilde{\tilde{v}}_c^T(\tau))] = \\ &= M[\bar{v}_o(t)\bar{v}_o^T(\tau)]\tilde{C}^T + M[\bar{v}_o(t)\tilde{\tilde{v}}_c^T(\tau)] = (Q_0\tilde{C}^T + \tilde{S}_0)\delta(t-\tau). \end{aligned}$$

Її інтенсивність

$$S_0 = Q_0\tilde{C}^T + \tilde{S}_0.$$

З цієї рівності випливає, що шуми $\bar{v}_o(t)$ та $\bar{v}_c(t)$ корельовані, хоча шум об'єкта $\bar{v}_o(t)$ та шум $\tilde{\tilde{v}}_c(t)$ на вході формувача можуть бути некорельованими ($\tilde{S}_0 = 0$).

Будемо вважати матрицю R_0 додатно визначеною. За цієї умови поставлена задача зветься до несингулярної задачі оптимальної фільтрації

при білих корельованих шумах $\bar{v}_o(t)$ та $\bar{v}_c(t)$. Її розв'язок знаходиться за теоремою 2 та являє собою фільтр Калмана–Б'юсі при корельованих білих шумах об'єкта та спостереження:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\bar{u} + G(\bar{y} - C\hat{x}), \quad \hat{x}(t_0) = \bar{m}; \quad (16.13a)$$

$$G = (PC^T + S_0)R_0^{-1}; \quad (16.13б)$$

$$\begin{aligned} \dot{P} = & (A - S_0R_0^{-1}C)P + P(A - S_0R_0^{-1}C)^T - \\ & - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0 - S_0R_0^{-1}S_0^T, \quad P(t_0) = P_0. \end{aligned} \quad (16.13в)$$

Новий вектор спостереження $\bar{y}(t)$ визначається виразом (16.11).

Однак цей вираз містить похідну $\dot{\bar{y}}$, що робить необхідним диференціювання змінної, яка спостерігається, а це небажано.

Розглянемо інший спосіб отримання оптимальної оцінки, що виключає необхідність диференціювання [3].

Уведемо вектор $\tilde{x}$, який пов'язаний з $\hat{x}$ співвідношенням

$$\hat{x} = \tilde{x} + G\tilde{y}. \quad (16.14)$$

Підставимо вирази (16.14) та (16.11) в (16.13a):

$$\dot{\hat{x}} + \dot{G}\tilde{y} + G\dot{\tilde{y}} = A\tilde{x} + AG\tilde{y} + B\bar{u} + G\left(\dot{\tilde{y}} - \tilde{C}B\bar{u} - D\dot{\tilde{y}}\right) - GC(\tilde{x} + G\tilde{y});$$

$$\dot{\tilde{x}} + \dot{G}\tilde{y} + G\dot{\tilde{y}} = A\tilde{x} + AG\tilde{y} + B\bar{u} + G\dot{\tilde{y}} - G\tilde{C}B\bar{u} - GD\dot{\tilde{y}} - GC\tilde{x} - GC\dot{G}\tilde{y};$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} + (B - G\tilde{C}B)\bar{u} + [(A - GC)G - \dot{G} - GD]\dot{\tilde{y}},$$

$$\tilde{x}(t_0) = \bar{m} - G(t_0)\tilde{y}(t_0).$$

У це рівняння похідна $\dot{\tilde{y}}$ не входить. З нього визначається $\tilde{x}$, а потім з (16.14) знаходиться оцінка $\hat{x}(t)$.

Приклад 3. Сформувати систему рівнянь для визначення оптимальної оцінки сталої величини x за спостереженням $\tilde{y} = x + z$, де z – кольоровий шум з математичним сподіванням $M[z] = 0$ та кореляційною функцією $K_z(\tau) = M[z(t)z(t+\tau)] = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$. Математичне сподівання $M[x(0)] = m = 0$ та дисперсія $M[x^2(0)] = P_0 = 2$.

Розв'язання. У даному випадку рівняння об'єкта має вигляд

$$\dot{x} = 0.$$

Спектральна щільність кольорового шуму

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_z(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{1 + \omega^2}.$$

Рівняння формувача, що відповідає даній спектральній щільності,

$$\dot{z} = -z + \tilde{v}_c,$$

де $\tilde{v}_c$ – білий шум з нульовим середнім значенням ($M[\tilde{v}_c(t)] = 0$) та одиничною інтенсивністю ($M[\tilde{v}_c(t)\tilde{v}_c(\tau)] = \delta(t - \tau)$).

У даному випадку

$$A = 0, \quad B = 0, \quad \tilde{C} = 1, \quad Q_0 = 0, \quad D = -1, \quad \tilde{R}_0 = 1, \quad \tilde{S}_0 = 0. \quad (16.15)$$

Тому

$$\begin{aligned} C &= \dot{\tilde{C}} + \tilde{C}A - D\tilde{C} = 1; \quad S_0 = Q_0\tilde{C}^T + \tilde{S}_0 = 0; \\ R_0 &= \tilde{C}Q_0\tilde{C}^T + \tilde{C}\tilde{S}_0 + \tilde{S}_0^T\tilde{C}^T + \tilde{R}_0 = 1. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Незсунена лінійна оцінка $\hat{x}(t)$ визначається із системи рівнянь

$$\dot{\hat{x}} = \tilde{x} + G\tilde{y}; \quad (16.17a)$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - GC)\tilde{x} + (B - G\tilde{C}B)\tilde{u} + [(A - GC)G - \dot{G} - GD]\tilde{y}; \quad (16.17b)$$

$$\tilde{x}(0) = m - G(0)\tilde{y}(0); \quad (16.17\text{в})$$

$$G = (PC^T + S_0)R_0^{-1}; \quad (16.17\text{г})$$

$$\begin{aligned} \dot{P} = & (A - S_0R_0^{-1}C)P + P(A - S_0R_0^{-1}C)^T - \\ & - PC^TR_0^{-1}CP + Q_0 - S_0R_0^{-1}S_0^T, \quad P(t_0) = P_0. \end{aligned} \quad (16.17\text{д})$$

Підставимо до рівняння (16.17д) цієї системи вирази (16.15) та (16.16). Тоді отримаємо

$$\dot{P} = -P^2.$$

Інтегруючи це рівняння при початковій умові $P_0 = 2$, будемо мати

$$P = \frac{2}{1 + 2t}. \quad (16.18)$$

Таким чином, система рівнянь (16.17а) та (16.17б) з початковою умовою (16.17в) для визначення незсуненої оптимальної оцінки остаточно набуде вигляду

$$\hat{x} = \tilde{x} + G\tilde{y};$$

$$\dot{\tilde{x}} = -G\tilde{x} + (-G^2 - \dot{G} + G)\tilde{y}, \quad \tilde{x}(0) = -G(0)\tilde{y}(0),$$

де G визначається за формулою (16.17г), яка з урахуванням (16.16) та (16.18) має вигляд

$$G = \frac{2}{1 + 2t}.$$



17. НАСТРОЙКА РЕГУЛЯТОРІВ СИСТЕМИ ПІДПОРЯДКОВАНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ТИРИСТОРНОГО ЕЛЕКТРОПРИВОДА

17.1. Структурна схема тиристорного електропривода з підпорядкованим регулюванням

Система підпорядкованого регулювання тиристорного електропривода – двоконтурна з каскадним вмиканням регуляторів. Її назва пояснюється тим, що вихідний сигнал регулятора, який включено до зовнішнього контуру, є задавальним для регулятора, що включений до внутрішнього контуру, тобто один регулятор підпорядкований іншому.

Структурна схема системи підпорядкованого регулювання електропривода без урахування ЕРС двигуна постійного струму наведена на рис. 17.1 [13, 14, 18].

У такій системі використовують П- і ПІ-регулятори. Стандартну настройку таких регуляторів виконують на *модульний (технічний) та симетричний оптуми* з використанням фільтрів Баттерворта.

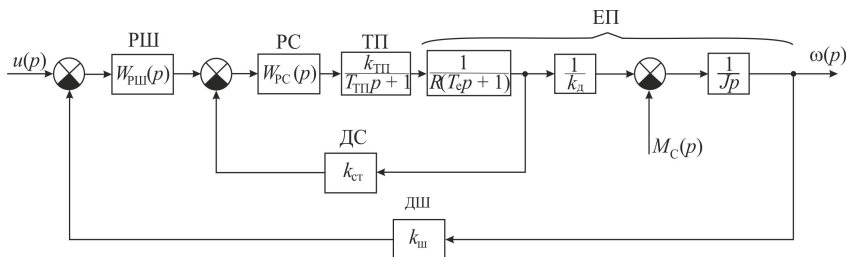


Рис. 17.1. Структурна схема системи підпорядкованого регулювання електропривода з двигуном постійного струму:

РШ – регулятор швидкості; РС – регулятор струму; ТП – тиристорний перетворювач;
ЕП – електропривід; ДС – датчик струму; ДШ – датчик швидкості

Настройка контурів регулювання проводиться незалежно та послідовно від внутрішнього контуру до зовнішнього. *Внутрішній контур* завжди настраюють на *технічний оптимум*.

Настройка на технічний оптимум забезпечує мале перерегулювання та достатньо високу швидкодію.

17.2. Настройка регулятора контуру струму на технічний оптимум

Виконаємо настройку регулятора контуру струму системи підпорядкованого регулювання (див. рис. 17.1) на технічний оптимум.

Передавальна функція розімкненого контуру струму

$$W_{\text{КС}}(p) = W_{\text{РС}}(p) \frac{k_{\text{ТП}} k_{\text{СТ}}}{R(T_{\text{ТП}} p + 1)(T_{\text{е}} p + 1)}.$$

У цьому виразі $T_{\text{е}} \gg T_{\text{ТП}}$.

Щоб компенсувати електромагнітну сталу часу якірного кола $T_{\text{е}}$, необхідно, щоб у чисельнику передавальної функції регулятора струму $W_{\text{РС}}(p)$ був множник $(T_{\text{е}} p + 1)$.

Використаємо в контурі струму ПІ-регулятор з передавальною функцією

$$W_{\text{РС}}(p) = \frac{k_{\text{РС}}(T_{\text{е}} p + 1)}{T_{\text{е}} p}.$$

Тоді

$$W_{\text{КС}}(p) = \frac{k_{\text{ТП}} k_{\text{СТ}} k_{\text{РС}}}{T_{\text{е}} R p (T_{\text{ТП}} p + 1)} = \frac{1}{(T_{\text{е}} R / (k_{\text{ТП}} k_{\text{СТ}} k_{\text{РС}})) p (T_{\text{ТП}} p + 1)}. \quad (17.1)$$

Бажана передавальна функція розімкненого контуру струму, що відповідає фільтру Баттерворта 2-го порядку,

$$W_{\text{б.с}}(p) = \frac{1}{2T p (Tp + 1)}, \quad (17.2)$$

де $T = T_{\text{ТП}}$.

Цій передавальній функції відповідає логарифмічна амплітудна частотна характеристика (ЛАЧХ), яка наведена на рис. 17.2.

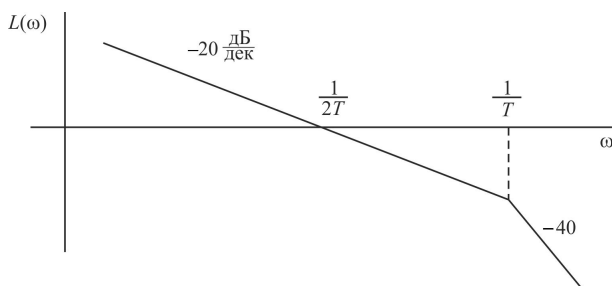


Рис. 17.2. Логарифмічна амплітудна частотна характеристика, що відповідає передавальній функції фільтра Баттерворта 2-го порядку

Прирівнюємо (17.1) та (17.2):

$$\frac{1}{(T_e R / (k_{\text{ТП}} k_{\text{СТ}} k_{\text{РС}})) p (T_{\text{ТП}} p + 1)} = \frac{1}{2 T_{\text{ТП}} p (T_{\text{ТП}} p + 1)}.$$

Звідси

$$k_{\text{РС}} = \frac{T_e R}{2 T_{\text{ТП}} k_{\text{ТП}} k_{\text{СТ}}}.$$

Таким чином, знайдено необхідне значення коефіцієнта підсилення регулятора струму $k_{\text{РС}}$.

Система підпорядкованого регулювання з настроєним ПІ-регулятором струму є астатичною відносно керування та статичною за відношенням до збурення.

17.3. Налаштування регулятора контуру швидкості на технічний оптимум

Виконаємо налаштування регулятора контуру швидкості системи підпорядкованого регулювання (див. рис. 17.1) на технічний оптимум.

Передавальна функція послідовно з'єднаних ланок настроєного на технічний оптимум контуру струму, охоплених зворотним зв'язком:

$$W_{\text{ок}}(p) = \frac{W_{\text{КС}}(p)}{k_{\text{ст}}} = \frac{1}{2T_{\text{ТП}} k_{\text{ст}} p (T_{\text{ТП}} p + 1)}.$$

Передавальна функція замкненого контуру струму

$$W_{\text{ЗС}}(p) = \frac{W_{\text{ок}}(p)}{1 + W_{\text{ок}}(p)k_{\text{ст}}} = \frac{\frac{1}{2T_{\text{ТП}} k_{\text{ст}} p (T_{\text{ТП}} p + 1)}}{1 + \frac{k_{\text{ст}}}{2T_{\text{ТП}} k_{\text{ст}} p (T_{\text{ТП}} p + 1)}} = \frac{1/k_{\text{ст}}}{2T_{\text{ТП}}^2 p^2 + 2T_{\text{ТП}} p + 1}.$$

Оскільки стала часу тиристорного перетворювача $T_{\text{ТП}}$ є надто малою величиною, то

$$W_{\text{ЗС}}(p) \cong \frac{1/k_{\text{ст}}}{2T_{\text{ТП}} p + 1}.$$

Структурна схема двоконтурної системи регулювання з настроєним на технічний оптимум контуром струму наведена на рис. 17.3.

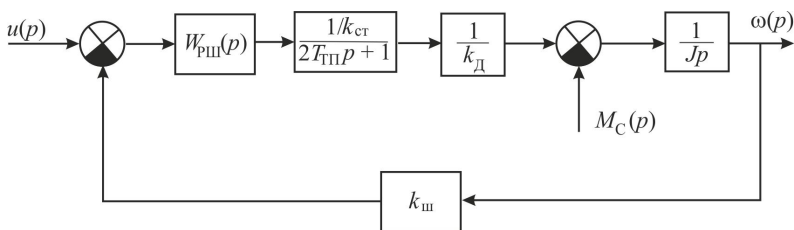


Рис. 17.3. Структурна схема двоконтурної системи регулювання з настроєним на технічний оптимум контуром струму

У залежності від технічних вимог ця система може бути настроєна на технічний або симетричний оптимум.

При настройці на технічний оптимум знайдемо передавальну функцію розімкнутого контуру швидкості:

$$W_{\text{кш}}(p) = W_{\text{рш}}(p) \frac{k_0 k_{\text{ш}}}{k_{\text{ст}} p (2T_{\text{ТП}} p + 1)}, \quad (17.3)$$

де $k_0 = 1/(k_{\text{д}} J)$.

Бажана передавальна функція, що відповідає фільтру Баттерворта 2-го порядку, як було зазначено, має вигляд

$$W_{\text{кш}}(p) = \frac{1}{2T p (T p + 1)} = \frac{1}{4T_{\text{ТП}} p (2T_{\text{ТП}} p + 1)}, \quad (17.4)$$

де $T = 2T_{\text{ТП}}$.

Прирівнюємо (17.3) та (17.4):

$$W_{\text{рш}}(p) \frac{k_0 k_{\text{ш}}}{k_{\text{ст}} p (2T_{\text{ТП}} p + 1)} = \frac{1}{4T_{\text{ТП}} p (2T_{\text{ТП}} p + 1)}.$$

Звідси

$$W_{\text{рш}}(p) = \frac{k_{\text{ст}}}{4T_{\text{ТП}} k_0 k_{\text{ш}}}.$$

Цей вираз показує, що для настройки системи на технічний оптимум слід використати у контурі швидкості П-регулятор.

Можна довести, що двоконтурна система підпорядкованого регулювання з пропорційним регулятором швидкості буде мати швидкісну статичну похибку, тому що збурення $M_{\text{с}}(p)$ прикладене перед інтегрувальною ланкою. Щоб позбавитися цієї похибки, регулятор швидкості настроюють на симетричний оптимум.

17.4. Налаштування регулятора швидкості на симетричний оптимум

В основі налаштування регулятора швидкості на симетричний оптимум покладена логарифмічна амплітудна частотна характеристика фільтра Баттерворта 3-го порядку (рис. 17.4).

Бажана передавальна функція розімкнутого контуру швидкості, що відповідає цій ЛАЧХ:

$$W_{\text{б.ш}}(p) = \frac{4Tp + 1}{8T^2 p^2 (Tp + 1)}. \quad (17.5)$$

Передавальна функція розімкнутого контуру швидкості

$$W_{\text{КШ}}(p) = W_{\text{РШ}}(p) \frac{k_0 k_{\text{ш}}}{k_{\text{ст}} p (2T_{\text{ТП}} p + 1)}. \quad (17.6)$$

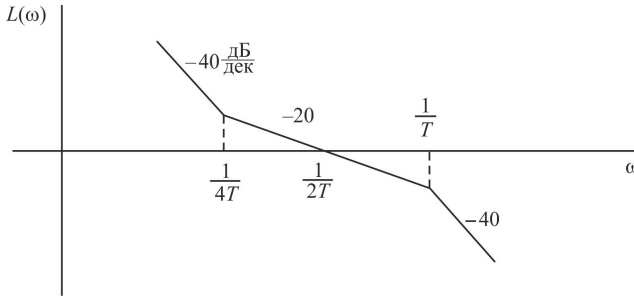


Рис. 17.4. Логарифмічна амплітудна частотна характеристика фільтра Баттерворта 3-го порядку

Прирівнюючи (17.5) і (17.6) та взявши до уваги, що $T = 2T_{\text{ТП}}$, отримаємо

$$W_{\text{РШ}}(p) \frac{k_0 k_{\text{ш}}}{k_{\text{ст}} p (2T_{\text{ТП}} p + 1)} = \frac{8T_{\text{ТП}} p + 1}{32T_{\text{ТП}}^2 p^2 (2T_{\text{ТП}} p + 1)}.$$

Звідси

$$W_{\text{РШ}}(p) = \frac{k_{\text{ст}} (8T_{\text{ТП}} p + 1)}{32T_{\text{ТП}}^2 k_0 k_{\text{ш}} p},$$

$$\text{або } W_{\text{РШ}}(p) = \frac{k_{\text{РШ}} (T_{\text{ш}} p + 1)}{T_{\text{ш}} p},$$

$$\text{де } T_{\text{ш}} = 8T_{\text{ТП}}; \quad k_{\text{РШ}} = \frac{k_{\text{ст}}}{4T_{\text{ТП}} k_0 k_{\text{ш}}}.$$

Цей вираз показує, що під час настройки контуру швидкості на симетричний оптимум необхідно використати ПІ-регулятор швидкості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Блінцов, В. С.** Основні методи оптимального керування електромеханічних систем [Текст] : навч. посіб. / В. С. Блінцов, А. Т. Кінаш, М. Я. Хлопенко. – Миколаїв : УДМТУ, 2002. – 44 с.
2. **Болтянский, В. Г.** Математические методы оптимального управления [Текст] / В. Г. Болтянский. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 408 с.
3. **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления [Текст] : в 2 т. – Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы / Д. П. Ким. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.
4. **Крутько, П. Д.** Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем [Текст] / П. Д. Крутько, А. И. Максимов, Л. М. Скворцов ; под ред. П. Д. Крутько. – М. : Радио и связь, 1988. – 306 с.
5. **Кузовков, Н. Т.** Модальное управление и наблюдающие устройства [Текст] / Н. Т. Кузовков. – М. : Машиностроение, 1976. – 184 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1961. – 392 с.
7. **Мирошник, И. В.** Теория автоматического управления [Текст] : в 2 т. / И. В. Мирошник. – СПб. : Питер, 2005. – Т. 1. Линейные системы. – 336 с. ; 2006. – Т. 2. Нелинейные и оптимальные системы. – 272 с.
8. **Олейников, В. А.** Основы оптимального и экстремального управления [Текст] : учеб. пособие для студентов / В. А. Олейников, Н. С. Зотов, А. М. Пришвин. – М. : Высшая школа, 1969. – 296 с.
9. **Петров, Ю. П.** Вариационные методы теории оптимального управления [Текст] / Ю. П. Петров. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Л. : Энергия, 1977. – 280 с.
10. **Ройтенберг, Я. Н.** Автоматическое управление [Текст] / Я. Н. Ройтенберг. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. – 396 с.
11. **Синицын, И. Н.** Фильтры Калмана и Пугачева [Текст] : учеб. пособие / И. Н. Синицын. – М. : Университетская книга, Логос, 2006. – 640 с.
12. Справочник по теории автоматического управления [Текст] / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.
13. **Терехов, В. М.** Системы управления электроприводов [Текст] : учеб. для студ. высш. учеб. заведений / В. М. Терехов, О. И. Осипов ; под ред. В. М. Терехова. – 2-е изд., стер. – М. : Академия, 2006. – 304 с.

14. **Хлопенко, М. Я.** Оптимальне керування системами [Текст] : навч. посіб. / М. Я. Хлопенко, І. С. Білюк, В. В. Шевченко. – Миколаїв : НУК, 2009. – 84 с.

15. **Хлопенко, Н. Я.** Модальное управление плавным пуском электропривода с фрикционной муфтой [Текст] / Н. Я. Хлопенко, М. Е. Небесный, Бен Ахмед Мажди // Проблемы автоматизации та електрообладнання транспортних засобів : матеріали Міжнар. наук.-техн. конф. – Миколаїв : НУК, 2010. – С. 25–26.

16. **Хлопенко, Н. Я.** Стабилизация движения исполнительного механизма электропривода с управляемой электромагнитной муфтой [Текст] / Н. Я. Хлопенко, И. С. Билюк // Проблемы автоматизации та електрообладнання транспортних засобів : матеріали Всеукр. наук.-техн. конф. – Миколаїв : НУК, 2012. – С. 41–44.

17. **Филлипс, Ч.** Системы управления с обратной связью [Текст] / Ч. Филлипс, Р. Харбор. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 616 с.

18. **Шаруда, В. Г.** Практикум з теорії автоматичного управління [Текст] : навч. посіб. / В. Г. Шаруда. – Д. : Національна гірнична академія України, 2002. – 414 с.

ЗМІСТ

<i>Передмова</i>	3
1. <i>Введення в простір стану. Загальна постановка задачі оптимального керування</i>	6
1.1. Загальні відомості	6
1.2. Поняття про простір стану	6
1.3. Загальна постановка задачі оптимального керування	7
2. <i>Метод Ейлера–Лагранжа</i>	11
2.1. Загальні відомості	11
2.2. Рівняння Ейлера	11
2.3. Задачі з рухомими кінцями. Умови трансверсальності	14
2.4. Рівняння Ейлера–Лагранжа	15
2.5. Канонічні рівняння Ейлера–Лагранжа	16
3. <i>Метод Гамільтона–Якобі</i>	21
3.1. Рівняння Гамільтона–Якобі	21
3.2. Процедура розв'язання задачі за підходом Гамільтона–Якобі ..	24
3.3. Квадратична форма. Критерій Сильвестра	24
3.4. Приклад розв'язання задачі за підходом Гамільтона–Якобі ...	26
4. <i>Метод динамічного програмування</i>	29
4.1. Принцип оптимальності. Рівняння Беллмана	29
4.2. Достатня умова оптимальності	32
4.3. Приклади застосування методу динамічного програмування для аналітичного конструювання регуляторів	34
5. <i>Принцип максимуму та його застосування</i>	38
5.1. Принцип максимуму	38
5.2. Задача про швидкодію матеріальної точки	41
5.3. Поняття ковзного процесу. Умова існування ковзного процесу	45
6. <i>Опис стану лінійних систем у нормальній формі</i>	46
6.1. Нормальна форма рівнянь стану і виходу	46
6.2. Перехід від структурної схеми системи до нормальних рівнянь стану	47
6.3. Матрична передавальна функція системи	50
7. <i>Синтез оптимальних лінійних систем за квадратичним показником якості</i>	52
7.1. Синтез оптимальної стабілізуючої системи	52
7.2. Синтез оптимального ПІ-регулятора	53
7.3. Синтез оптимальної слідкуючої системи	55

8. Керованість та спостережуваність лінійних систем	58
9. Перетворення подібності. Канонічні форми рівнянь стану ..	61
9.1. Перетворення подібності	61
9.2. Канонічна керована форма Луенбергера	64
9.3. Канонічна спостережувана форма Луенбергера	67
10. Модальне керування зі зворотним зв'язком за станом	68
10.1. Синтез регуляторів з бажаними показниками якості	68
10.2. Алгоритм розрахунку коефіцієнтів модального регулятора ..	71
10.3. Формула Аккермана	72
11. Стандартні характеристичні поліноми замкнених систем ..	73
11.1. Характеристичні поліноми моделі, що оптимізовані за інтегральним критерієм якості	73
11.2. Характеристичні поліноми Бесселя–Томсона	74
11.3. Характеристичні поліноми Баттерворта	75
11.4. Характеристичні поліноми Еллєрта	76
11.5. Характеристичні поліноми біноміальної моделі	76
12. Синтез спостерігаючих пристроїв	84
12.1. Спостерігач повного порядку	84
12.2. Принцип роздільності	86
12.3. Алгоритм синтезу спостерігача повного порядку	89
12.4. Приклад синтезу модального регулятора зі спостерігачем повного порядку	90
12.5. Спостерігач зниженого порядку	101
13. Стабілізація руху виконавчого механізму електропривода з керованою електромагнітною муфтою	106
13.1. Синтез системи керування електропривода з модальним регулятором	106
13.2. Синтез модального регулятора електромагнітної муфти ...	114
13.3. Синтез спостерігача	117
13.4. Приклад розрахунку модального регулятора і спостерігача стану	120
13.5. Аналіз моделювання перехідних процесів	124
14. Випадкові величини і процеси та їх характеристики	126
14.1. Випадкові величини та їх характеристики	126
14.2. Випадкові процеси та їх характеристики	130
14.3. Деякі типи випадкових процесів	133
14.4. Спектральна щільність стаціонарного процесу	135

15. <i>Оптимальна фільтрація Вінера</i>	137
15.1. Формуючий фільтр	137
15.2. Факторизація спектральної щільності	138
15.3. Фільтр Вінера	140
16. <i>Фільтри Калмана–Б'юсі</i>	145
16.1. Фільтри Калмана–Б'юсі при білих шумах	145
16.2. Фільтр Калмана–Б'юсі при кольоровому шумі об'єкта	149
16.3. Фільтр Калмана–Б'юсі при кольоровому шумі спостереження	155
17. <i>Настройка регуляторів системи підпорядкованого регулювання тиристорного електропривода</i>	161
17.1. Структурна схема тиристорного електропривода з підпорядкованим регулюванням	161
17.2. Налаштування регулятора контуру струму на технічний оптимум	162
17.3. Налаштування регулятора контуру швидкості на технічний оптимум	163
17.4. Налаштування регулятора швидкості на симетричний оптимум ..	165
<i>Список літератури</i>	167

Навчальне видання

**ХЛОПЕНКО Микола Якович
БІЛЮК Іван Сергійович
ШЕВЧЕНКО Віктор Васильович**

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТАМИ

**Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів**

Редактор *Ю. О. Банкулова*
Комп'ютерне складання і верстання *А. Й. Лихіна*
Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 10,0. Тираж 100 прим. Вид. № 15. Зам. № 4.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.