

УДК 666.97.033.16:621.313
DOI [https://doi.org/10.15589/znп2026.1\(503\).1.25](https://doi.org/10.15589/znп2026.1(503).1.25)

**MATHEMATICAL MODEL OF THE “VIBRATORY MACHINE –
COMPACTED MEDIUM” SYSTEM FOR A UNIT
WITH A CONTROLLED ELECTROMAGNETIC DRIVE SYSTEM**

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ «ВІБРАЦІЙНА МАШИНА –
УЩІЛЬНЮВАНЕ СЕРЕДОВИЩЕ» ДЛЯ УСТАНОВКИ
З КЕРОВАНИМ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПРИВОДОМ**

Maksym V. Dzhanhyrov
maksym.dzhanhirov@nuos.edu.ua
ORCID: 0009-0006-1272-194X

М. В. Джангиров,
аспірант

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв

Abstract. Purpose. The development of comprehensive mathematical models for the dynamic interaction between a cement concrete mixture and the working organs of a vibration unit during vertical harmonic oscillations. The study aims to establish the relationships between the rheological and physical-mechanical characteristics of the mixture, the thickness of the compacted layer, and the dynamic performance of a controlled electromagnetic drive system. **Method.** The research is based on the fundamental principles of classical mechanical vibration theory and continuum mechanics. The behavior of the concrete mixture is described using partial differential equations. Mathematical modeling was implemented through numerical methods and simulation within MathCAD and MATLAB/Simulink environments. This approach allowed for the inclusion of electromagnetic force nonlinearity, the dissipative properties of the medium, and their temporal variations. **Results.** A dynamic model of the "vibration machine – compacted medium" system was developed, accounting for energy transformation from the controlled electromagnetic drive system to the working organ and directly into the concrete mass. Through numerical solutions, amplitude-frequency characteristics describing the system's behavior under various excitation modes were obtained. The constructed simulation model enables the visualization of compaction wave propagation within the concrete layer and identifies zones of effective impact. A comparison between computer simulation results and classical analytical calculations confirmed the adequacy of the proposed approach within the accepted assumptions. **Scientific novelty.** A mathematical model of the interaction between a vibrating platform and a cement concrete medium, represented as a system with distributed parameters, has been developed. This model accounts for changes in the mixture's stiffness and viscosity depending on its physical-mechanical characteristics (dynamic elastic modulus: from 2.3 to 5 MPa, mixture density: from 1830 to 2420 kg/m³) and the thickness of the compacted layer (from 0.05 to 0.3 m). Due to the ability to utilize arbitrary input driving forces, the model can be adapted for the design and investigation of multi-frequency vibration systems, which provide more uniform compaction by superimposing oscillations of different frequencies. **Practical importance.** The developed models and calculation algorithms can be utilized by design organizations when developing new vibration equipment. Implementing these models within MATLAB/Simulink environments reduces the equipment tuning stage and ensures high-quality compaction of the concrete mixture through the automatic selection of frequency modes based on the mixture's specific characteristics.

Key words: vibration machine; electromagnetic drive system; concrete mixture; mathematical and simulation modeling; frequency characteristics.

Анотація. Мета. Розробка комплексних математичних моделей динамічної взаємодії цементобетонної суміші з робочими органами вібраційної установки під час реалізації вертикальних гармонічних коливань. Дослідження спрямоване на встановлення взаємозв'язків між реологічними та фізико-механічними характеристиками суміші, товщиною ущільнюваного шару та динамічними характеристиками керованого електромагнітного привода. **Методика.** В основу дослідження покладено фундаментальні принципи класичної теорії механічних коливань та методи механіки суцільного середовища. Для опису поведінки бетонної суміші використано апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних. Математичне моделювання реалізовано з використанням чисельних методів розв'язання та імітаційного моделювання у середовищах MathCAD та MATLAB/Simulink,

що дозволило врахувати нелінійність електромагнітної сили, дисипативні властивості середовища та їх зміну у часі. *Результати.* Розроблено динамічну модель системи «вібраційна машина – ущільнюване середовище», яка враховує трансформацію енергії від керованого електромагнітного привода до робочого органу та безпосередньо вглиб бетонного масиву. Шляхом чисельного розв'язання отримано амплітудно-частотні характеристики, що описують поведінку системи за різних режимів збурення. Побудована імітаційна модель дозволяє візуалізувати процеси поширення хвиль ущільнення в шарі бетону та визначати зони ефективного впливу. Проведене порівняння результатів комп'ютерного моделювання з класичними аналітичними розрахунками підтвердило адекватність запропонованого підходу у межах прийнятих припущень. *Наукова новизна.* Отримала подальший розвиток математична модель взаємодії віброплатформи з цементобетонним середовищем, представленим як система з розподіленими параметрами, що дозволяє враховувати зміну жорсткості та в'язкості суміші залежно від фізико-механічних характеристик (динамічного модуля пружної деформації від 2,3 до 5 МПа, густини суміші від 1830 до 2420 кг/м³) і товщини ущільнюваного шару (від 0,05 до 0,3 м). Завдяки можливості використання в моделі довільних вхідних змушуючих сил, вона може бути адаптована для проектування та дослідження полічастотних вібраційних систем, що забезпечують більш рівномірне ущільнення за рахунок накладання коливань різних частот. *Практична значимість.* Отримані моделі та алгоритми розрахунку можуть бути використані проектними організаціями при розробці нового вібраційного обладнання. Застосування створених моделей у середовищах MATLAB/Simulink дозволяє скоротити етап налагодження обладнання та забезпечити якісне ущільнення бетонної суміші за рахунок автоматичного підбору частотних режимів залежно від характеристик суміші.

Ключові слова: вібраційна машина; електропривод; бетонна суміш; математичне та імітаційне моделювання; частотні характеристики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У сучасному світовому виробництві збірних залізобетонних конструкцій процес ущільнення суміші є критичним етапом, що безпосередньо визначає експлуатаційні характеристики виробів: геометричну точність, міцність, вологостійкість та довговічність [1; 2; 3]. Сучасні вимоги до ресурсозбереження зумовлюють перехід до використання малорухомих та жорстких сумішей, що дозволяє суттєво зменшити витрати дороговартісного цементу та скоротити енергоємність термовологісної обробки. Проте ефективне формування таких виробів можливе лише за умови забезпечення прецизійних параметрів вібраційного впливу, що висуває жорсткі вимоги до надійності, металоємності та енергоефективності формувального обладнання [4; 5; 6].

Одним з підходів вирішення цієї проблеми є застосування вібраційних установок з керованим електромагнітним приводом. На відміну від традиційних систем, вони дозволяють гнучко адаптувати режими роботи до змінних характеристик оброблюваного матеріалу.

Традиційні підходи, що розглядають вібромашину як систему із зосередженими масами, часто не враховують складну реакцію бетонної суміші, яка залежить від її реологічних параметрів та товщини шару. Необхідність одночасного врахування електромагнітних процесів у приводі та континуальних властивостей суміші робить визначення динамічних реакцій системи «вібраційна машина – ущільнюване середовище» актуальною науково-технічною задачею.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Для опису поведінки таких матеріалів, як бетонна суміш, використовуються дискретні та континуальні

математичні моделі. Дискретні моделі [7; 8] є найбільш поширеними завдяки відносній простоті реалізації. При їх побудові оброблювана суміш представляється як зосереджена маса, що пов'язана з робочим органом пружним зв'язком і елементом в'язкого тертя. Величини жорсткості пружного зв'язку та коефіцієнта в'язкого тертя визначаються таким чином, щоб отримані в результаті моделювання сила пружності та дисипація енергії дорівнювали відповідним значенням у реальних умовах. Однак на різних стадіях ущільнення механічні властивості суміші суттєво змінюються, що вимагає впровадження змінних коефіцієнтів у динамічні схеми. Континуальна модель бетонної суміші запропонована у [9; 10; 11]. Вона є більш складною, але її використання дає можливість більш точно описати рух середовища, зокрема, врахувати хвильові процеси. На світовому рівні все частіше застосовують моделювання, з використанням методу дискретних елементів та обчислювальної гідрогазодинаміки [12; 13; 14], де кожна частинка заповнювача розглядається окремо [15; 16; 17]. Це дозволяє дослідити внутрішнє тертя та перерозподіл фракцій, що неможливо в межах класичних моделей. Хоча метод дискретних елементів дозволяє детально вивчити внутрішнє тертя, його обчислювальна місткість та складність параметризації рідкої фази роблять його нераціональним для задач дослідження динаміки всієї вібромашини та її електромагнітного привода. Тому, часто перевагу віддають континуальному підходу, який базується на апроксимації реальних матеріалів комбінаціями ідеалізованих тіл, що описують базові фізико-механічні властивості: ідеально-пружне тіло (Гука); ідеально в'язка рідина (Ньютона); ідеально пластичне тіло (Сен-Венана) [18; 19; 20].

ВІДОКРЕМЛЕННЯ НЕВИРШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

Аналіз сучасного стану досліджень показує, що взаємодія бетонної суміші з робочими органами вібромашини суттєво трансформує динамічні характеристики всієї системи. Проте традиційний підхід, що базується на спрощеному підсумовуванні коливальних мас машини та середовища (дискретна модель), виявляється неспроможним адекватно описати процеси при збільшенні висоти стовпа суміші. Це призводить до значних похибок у визначенні амплітудно-частотних характеристик, оскільки не враховується внутрішня дисипація енергії та фазовий зсув хвиль у бетонній суміші. Незважаючи на наявність континуальних моделей, більшість існуючих рішень хвильового рівняння базуються на суттєвих припущеннях: статичність параметрів (реологічні характеристики середовища вважаються незмінними в часі, хоча процес ущільнення докорінно змінює структуру суміші); спрощення збурення (розглядаються виключно гармонічні закони зміни зовнішніх сил).

Таким чином, існуючі моделі не забезпечують адекватного опису процесів при переході до полічастотного збудження, де форма змушуючої сили може бути складною та адаптивною. Це зумовлює необхідність розробки моделі, що поєднає континуальний підхід із гнучкістю чисельних методів, які дозволяють інтегрувати довільні вхідні впливи та враховувати динамічну зміну властивостей об'єкта обробки.

Метою дослідження є розробка комплексної математичної та імітаційної моделей електромеханічних процесів у системі «керований електромагнітний привод – вібраційна установка – бетонна суміш».

Об'єкт дослідження – взаємопов'язані електромагнітні, електромеханічні та динамічні процеси, що виникають у керованих електромагнітних приводах віброплощадок з вертикально спрямованими коливаннями в процесі ущільнення цементобетонних сумішей.

Предмет дослідження – закономірності взаємозв'язків між параметрами електромагнітного поля привода, динамічними характеристиками механічної коливальної системи та реологічними властивостями ущільнюваного середовища при варіації частотних та амплітудних режимів впливу.

Методи дослідження: метод моделювання механіки твердих тіл на основі рівняння Лагранжа II роду; методи механіки суцільного середовища та класичної теорії коливань; метод скінченних різниць для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних; метод Рунге-Кутта 4-го та 5-го порядків з адаптивним кроком інтегрування для дослідження перехідних та сталих електромеханічних процесів у середовищі MATLAB/Simulink.

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

У процесі вібраційного ущільнення кожен елементарний об'єм цементобетонної суміші зазнає дії

інерційних та пружно-в'язких сил, відчуває пластичну течію й володіє кінетичною та потенціальною енергією, тобто маса і пружно-в'язко-пластичність розподілені по всьому обсягу деформованого середовища. Отже, цементобетонну суміш можна з достатньою мірою точності розглядати як систему з розподіленими параметрами. Тоді при вертикальному деформуванні цементобетонного шару залежність між напругою і деформацією може бути описана відомим рівнянням [11; 18]:

$$E \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 q}{\partial z^2 \partial t} = \rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де q і z – ейлерова та лагранжева координати; E – динамічний модуль пружної деформації цементобетонної суміші; η – коефіцієнт динамічної в'язкості, що характеризує внутрішнє тертя у цементобетонній суміші; ρ – густина цементобетонної суміші; t – час. У загальному випадку параметри E , η , ρ змінюються у часі. Такий підхід дозволяє врахувати зміну реологічних властивостей бетонної суміші безпосередньо в процесі її віброущільнення.

Розглянемо наступну тримасову систему для ущільнення бетонних сумішей (Рис. 1).

Якщо елементи схеми описуються лінійними залежностями, процеси у коливальній системі можуть бути описані системою лінійних диференціальних рівнянь, складених на підставі рівняння Лагранжа II роду [7]:

$$\begin{cases} m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} + (b_0 + b_1) \frac{dx_0}{dt} + (c_0 + c_1) x_0(t) - b_1 \frac{dx_1}{dt} - c_1 x_1(t) = -F_e(t) + F_r(t); \\ m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx_1}{dt} + (c_1 + c_2) x_1(t) - b_1 \frac{dx_0}{dt} - c_1 x_0(t) - b_2 \frac{dx_2}{dt} - c_2 x_2(t) = F_e(t); \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b_2 \frac{dx_2}{dt} + c_2 x_2(t) - b_2 \frac{dx_1}{dt} - c_2 x_1(t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

де m_0, m_1 і m_2 – маси робочого органа, проміжної платформи і динамічного віброгасника відповідно; c_0, c_1 і c_2 – жорсткості пружин, що зв'язують робочий орган з фундаментом, проміжну платформу з робочим органом і віброгасник з проміжною платформою відповідно; b_0, b_1 і b_2 – коефіцієнти в'язкого тертя у перелічених вище пружинах; $F_e(t)$ – електромагнітна сила, що створюється вібратором; $F_r(t)$ – сила реакції від суміші. Ця сила – це сумарна сила, яку суміш прикладає до робочого органа на поверхні $z=0$. Вона дорівнює напруженню σ помноженому на S_c – площа перерізу суміші в горизонтальній площині:

$$F_r(t) = S_c \cdot \sigma(0, t).$$

Напруження для даної моделі, що враховує пружність та в'язкість, визначається як:

$$\sigma(z, t) = E \frac{\partial q(z, t)}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q(z, t)}{\partial z} \right).$$

Рівняння руху суміші (1) переписемо у такому вигляді:

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^3 q}{\partial z^2 \partial t} = 0, \quad (3)$$

з наступними неоднорідними граничними умовами:

1) для $z = 0$: зміщення та швидкість суміші на поверхні контакту з тримасовою системою дорівнює зміщенню та швидкості системи:

$$q(0, t) = x_0(t), \quad \frac{dq}{dt}(0, t) = \frac{dx_0}{dt}(t); \quad (4)$$

2) для $z = h$ (h – висота шару оброблюваної суміші): припускаємо, що напруження на поверхні суміші дорівнює нулю:

$$\sigma(h, t) = 0. \quad (5)$$

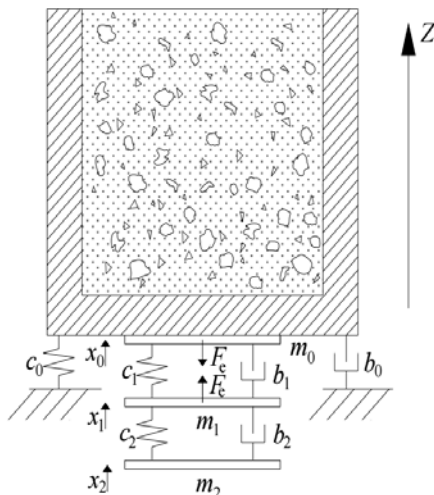


Рис. 1. Динамічна схема тримасової вібраційної установки з бетонною сумішшю

Побудова та аналіз частотних характеристик

Запишемо рівняння руху установки (2) у операторній формі:

$$\begin{cases} (m_0 p^2 + p(b_0 + b_1) + c_0 + c_1) X_0(p) - (pb_1 + c_1) X_1(p) = -F_c(p) + F_c'(p); \\ (m_1 p^2 + p(b_1 + b_2) + c_1 + c_2) X_1(p) - (pb_2 + c_2) X_2(p) = F_c(p); \\ (m_2 p^2 + pb_2 + c_2) X_2(p) - (pb_2 + c_2) X_1(p) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

де p – оператор Лапласа.

Знайдемо $F_r(p)$ для першого рівняння (6):

$$F_r(t) = S_c \cdot \left[E \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} + \eta p \left(\frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) \right]. \quad (7)$$

$$F_r(p) = S_c \left[E + \eta p \left(\frac{\partial Q(p)}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) \right].$$

Замінюємо похідну в (7) її скінченно-різницевою апроксимацією 2-го порядку точності. Для знаходження похідної на границі $z = 0$ використовуємо сусідні вузли суміші:

$$\frac{\partial Q(p)}{\partial z} \Big|_{z=0} \approx \frac{-3Q_0(p) + 4Q_1(p) - Q_2(p)}{2\Delta z}.$$

$$F_r(p) \approx S_c E \left[1 + \eta p \left(\frac{-3Q_0(p) + 4Q_1(p) - Q_2(p)}{2\Delta z} \right) \right]. \quad (8)$$

Рівняння руху установки після заміни $F_r(p)$ апроксимацією (8) та з урахуванням, що $X_0(p) = Q_0(p)$, матиме вигляд:

$$\begin{cases} \left[m_0 p^2 + (b_0 + b_1)p + c_0 + c_1 + \frac{3S_c[E + \eta p]}{2\Delta z} \right] X_0(p) - [b_1 p + c_1] X_1(p) - \\ - \frac{4S_c[E + \eta p]}{2\Delta z} Q_1(p) + \frac{S_c[E + \eta p]}{2\Delta z} Q_2(p) = -F_c(p); \\ [m_1 p^2 + (b_1 + b_2)p + c_1 + c_2] X_1(p) - [b_2 p + c_2] X_2(p) = F_c(p); \\ [m_2 p^2 + b_2 p + c_2] X_2(p) - [b_2 p + c_2] X_1(p) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Рівняння для суміші (3) в операторній формі (вузли $i = 1 \dots N-1$) запишемо як

$$\rho p^2 Q(p) - E \frac{\partial^2 Q(p)}{\partial z^2} - \eta p \frac{\partial^2 Q(p)}{\partial z^2} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial^2 Q(p)}{\partial z^2} - \gamma^2 Q(p) = 0, \quad (10)$$

де $\gamma = \sqrt{\frac{\rho p^2}{E + \eta p}}$ – коефіцієнт поширення хвилі в операторній формі.

Використовуємо центральну скінченну різницю 2-го порядку точності для апроксимації другої просторової похідної

$$\frac{\partial^2 Q(p)}{\partial z^2} \Big|_j \approx \frac{Q_{i+1}(p) - 2Q_i(p) + Q_{i-1}(p)}{\Delta z^2}.$$

Підставляємо в (10) рівняння для i -го вузла:

$$\frac{Q_{i+1}(p) - 2Q_i(p) + Q_{i-1}(p)}{\Delta z^2} - \gamma^2 Q_i(p) = 0,$$

Помножимо все рівняння на Δz^2 та згрупуємо члени біля $Q_i(p)$:

$$Q_{i+1}(p) - (\gamma^2 \Delta z^2 + 2) Q_i(p) + Q_{i-1}(p) = 0.$$

Для границі $z = h$ умова (5) дає

$$\sigma(h, p) = E \frac{\partial Q(p)}{\partial z} \Big|_{z=h} + \eta p \left(\frac{\partial Q(p)}{\partial z} \Big|_{z=h} \right) =$$

$$= (E + \eta p) \left(\frac{\partial Q(p)}{\partial z} \Big|_{z=h} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial Q(p)}{\partial z} \Big|_{z=h} \right) = 0.$$

Використовуємо центральну різницю 2-го порядку для першої похідної (вводячи фіктивний вузол $N+1$):

$$\frac{\partial Q(p)}{\partial z} \Big|_{z=h} \approx \frac{Q_{N+1}(p) - Q_{N-1}(p)}{2\Delta z} = 0 \Rightarrow Q_{N+1}(p) = Q_{N-1}(p)$$

Потім підставляємо $Q_{N+1}(p)$ у рівняння для вузла N :

$$2Q_{N-1}(p) - (\gamma^2 \Delta z^2 + 2) Q_N(p) = 0.$$

Складаємо матрицю $\mathbf{Z}$ розміром $(N+3) \times (N+3)$, що включає всі вищезгадані зв'язки для визначення вектора амплітуд $\mathbf{X} = [X_0 \ X_1 \ X_2 \ Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_N]^T$.

$$\begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & 0 & Z_{03} & Z_{04} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{21} & Z_{22} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & Z_{33} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Z_{44} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Z_{55} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & Z_{N-1,N-1} & 1 & Q_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & Z_{NN} & Q_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_{N-1} \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_c(p) \\ F_c(p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{00} = m_0 p^2 + p(b_0 + b_1) + c_0 + c_1 + \frac{3S_c[E + \eta p]}{2\Delta z},$$

$$Z_{01} = Z_{10} = -[pb_1 + c_1]$$

$$Z_{03} = -\frac{4S_c[E + \eta p]}{2\Delta z}, \quad Z_{04} = \frac{S_c[E + \eta p]}{2\Delta z},$$

$$Z_{11} = m_1 p^2 + p(b_1 + b_2) + c_1 + c_2,$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -[pb_2 + c_2]$$

$$Z_{22} = m_2 p^2 + pb_2 + c_2,$$

$$Z_{33} = Z_{44} = \dots = Z_{NN} = -(\gamma^2 \Delta z^2 + 2).$$

Знаходимо всі значення:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{F},$$

де $\mathbf{F} = [-F_c(p) \ F_c(p) \ \dots \ 0]^T$.

Передавальна функція для параметра x_m визначається як

$$W(p, x_m) = \frac{X_m(p)}{F_c(p)}, \quad m = 0, \dots, N+2.$$

АЧХ та ФЧХ обчислюємо з модуля та аргументу передавальної функції $W(p, x_m)$:

$$A(\omega, x_m) = |W(j\omega, x_m)|. \quad (11)$$

$$\varphi(\omega, x_m) = \arctan \left(\frac{\text{Im}(W(\omega, x_m))}{\text{Re}(W(\omega, x_m))} \right). \quad (12)$$

На основі отриманих рівнянь для АЧХ та ФЧХ були проведені розрахунки у математичному пакеті MathCAD з наступними значеннями для параметрів, що необхідні для проведення обчислень:

$$\begin{aligned} m_0 &= 59 \text{ кг}, m_1 = 41 \text{ кг}, m_2 = 10 \text{ кг}, \\ b_0 &= 43,5 \text{ Н·с/м}, b_1 = 610 \text{ Н·с/м}, b_2 = 48 \text{ Н·с/м}, \\ c_0 &= 1,45 \cdot 10^6 \text{ Н/м}, c_1 = 8,96 \cdot 10^6 \text{ Н/м}, c_2 = 1,6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}, \\ S_c &= 0,292 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Модуль E та коефіцієнт η можна розрахувати за залежностями [18]:

$$E = \frac{\rho \omega^2 (k^2 - \alpha^2)}{\sqrt{(k^4 - \alpha^4)^2 + 4k^2 \alpha^2 (k^2 + \alpha^2)^2}};$$

$$\eta = 2E \frac{\alpha}{c(k^2 - \alpha^2)},$$

де середні значення цих параметрів для бетонних сумішей: $\rho = 2450 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 0,9 \text{ м}$, $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$, $c = 46 \text{ м/с}$, $k = \omega/c$, $\alpha = 1 \text{ м}^{-1}$.

Графіки на рис. 2.2 чітко свідчать про присутність трьох резонансів в системі, а саме на частотах приблизно: 12...13 Гц, 57...58 Гц, 91...93 Гц. З графіків ФЧХ можна зробити висновок про оцінку ефективності віброгасника. Порівнюючи фази мас m_1 та m_2 , можна зрозуміти, чи встигає віброгасник реагувати на збурення. Якщо фази між X_1 та X_2 протилежні (180°), гасник працює ефективно. Така поведінка спостерігається в момент другого резонансу на частоті 57...58 Гц.

З графіків АЧХ на Рис. 3 видно, що при зміні H від 0,05 до 0,2 м, резонансні піки зміщуються у бік низьких частот, що вказує на необхідність налаштування

системи на резонанс в залежності від висоти і неможливість використання фіксованої частоти. Зі збільшенням H також зростає загальне демпфування, тому піки стають не тільки лівішими, а й нижчими, більш широкими.

Графіки на Рис. 4 показують, що після ущільнення резонансні піки майже не змінюються. Значення E , ρ були отримані з експериментальних даних та використовуючи залежності, наведені у роботі [11].

На Рис. 5 спостерігаємо, що на початковій стадії ущільнення резонансні піки низькі та розмиті. Це обумовлено високою початковою в'язкістю та значним вмістом повітряної фази, що створює сильне дисипативне демпфування енергії коливань. В процесі ущільнення в'язкість суміші стрімко падає, що призводить до різкого «загострення» та зростання амплітуди піків.

На рис. 6 наведено порівняння розрахованих частотних характеристик з характеристиками, отриманими аналітичним шляхом за методикою, аналогічною запропонованій у [11].

Для великої кількості шарів (більше 10) графіки, отримані чисельним та аналітичним методами майже ідентичні. Якщо зменшити N до 3..5, чисельне рішення почне давати похибку біля резонансів та на високих частотах.

Розробка імітаційної моделі

Запишемо систему рівнянь руху установки (2) у формі Коші:

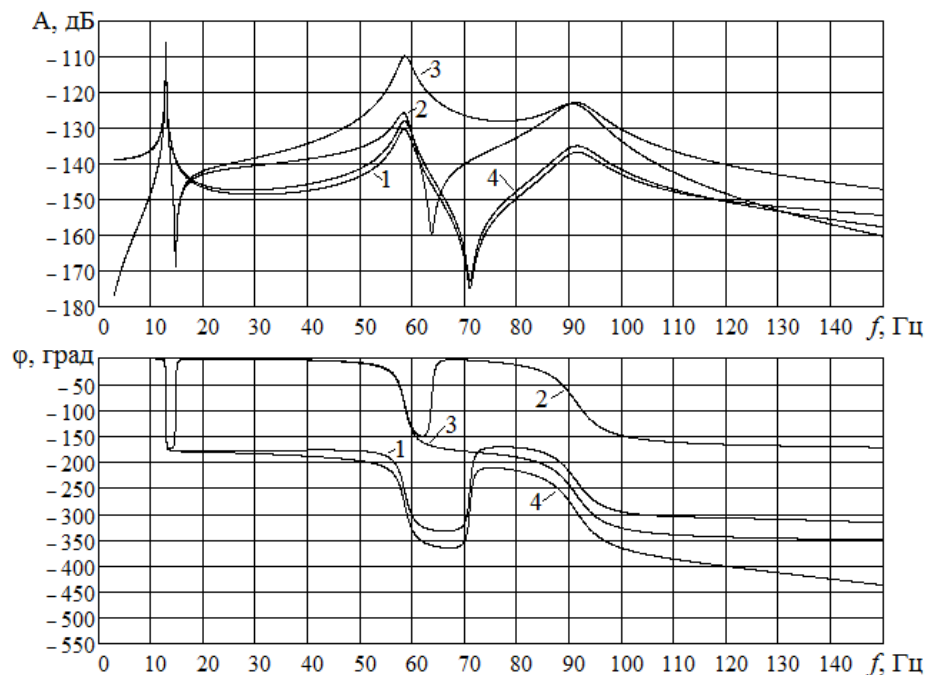


Рис. 2. АЧХ та ФЧХ для висоти бетонної суміші 0,15 м, кількість шарів – 6, 1 – для маси m_0 , 2 – m_1 , 3 – m_2 , 4 – для верхньої поверхні суміші

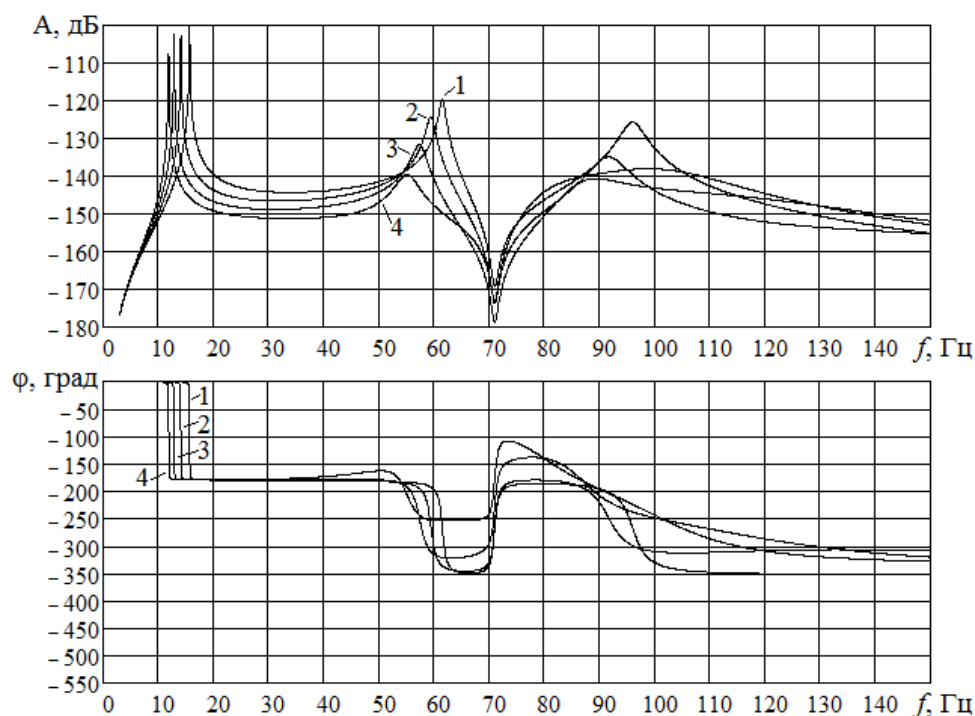


Рис. 3. АЧХ та ФЧХ для різних висот бетонної суміші, кількість шарів – 10, 1 – для висоти 0,05 м, 2 – для висоти 0,1 м, 3 – для висоти 0,15 м, 4 – для висоти 0,2 м

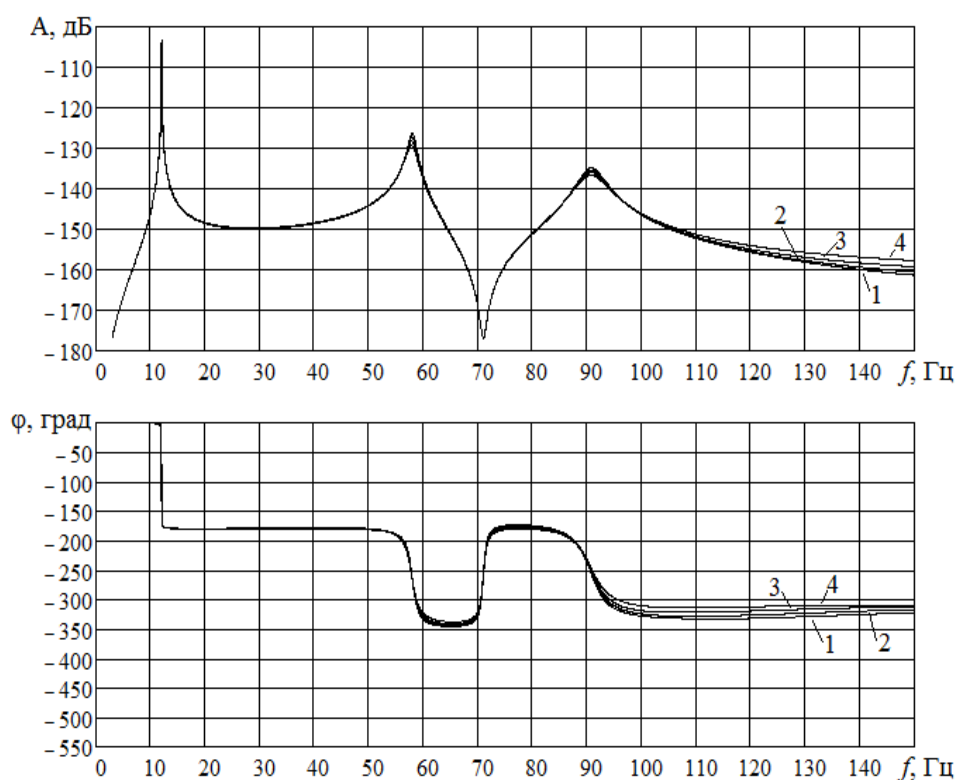


Рис. 4. АЧХ та ФЧХ для маси m_0 і різних значень жорсткості суміші, кількість шарів – 10, висота суміші – 0,2 м, 1 – $E = 21,11 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 2400$ кг/м³, $G = 30$ с, 2 – $E = 17,66 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 2410$ кг/м³, $G = 60$ с, 3 – $E = 14,31 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 2420$ кг/м³, $G = 90$ с, 4 – $E = 11,51 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 2420$ кг/м³, $G = 120$ с

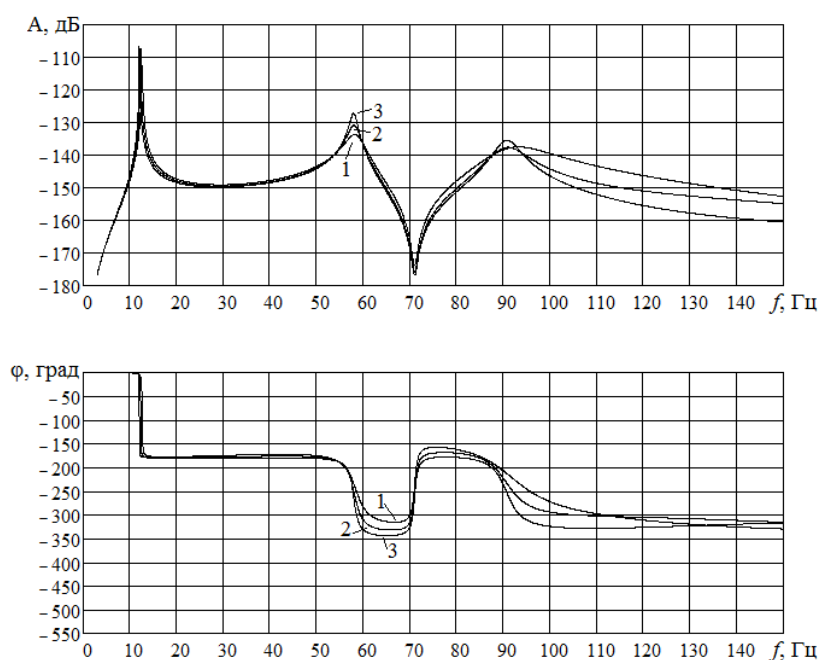


Рис. 5. АЧХ та ФЧХ для маси m_0 , отримані чисельними методами, для випадку коли суміш поступово ущільнюється, кількість шарів – 10, висота суміші – 0,2 м, $G = 60$ с, 1 – початкові умови $E = 3,53 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 1950$ кг/м³, 2 – умови в процесі ущільнення $E = 7,26 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 2185$ кг/м³, 3 – після ущільнення $E = 17,66 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 2410$ кг/м³

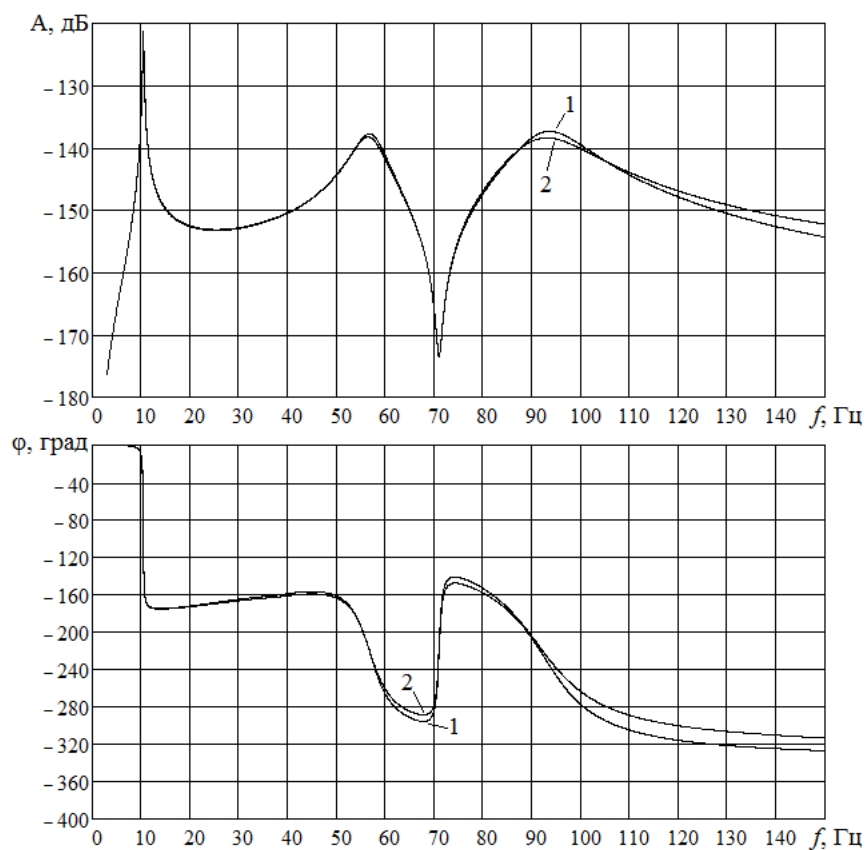


Рис. 6. АЧХ та ФЧХ, отримані чисельним та аналітичним методами для висоти бетонної суміші 0,3 м, кількість шарів – 3

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = v_0; \\ \frac{dv_0}{dt} = \frac{1}{m_0}(-F_e(t) + F_r(t) - (b_0 + b_1)v_0(t) - (c_0 + c_1)x_0(t) + b_1v_1(t) + c_1x_1(t)); \\ \frac{dx_1}{dt} = v_1; \\ \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{m_1}(F_e(t) - (b_1 + b_2)v_1(t) - (c_1 + c_2)x_1(t) + b_2v_0(t) + c_1x_0(t) + b_2v_2(t) + c_2x_2(t)); \\ \frac{dx_2}{dt} = v_2; \\ \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{m_2}(-b_2v_2(t) - c_2x_2(t) + b_2v_1(t) + c_2x_1(t)). \end{cases}$$

Перехід до форми Коші дозволяє легко змоделювати роботу системи у MATLAB/Simulink, використовуючи стандартні блоки.

Для рівняння суміші (3) розіб'ємо висоту суміші H на N шарів чи вузлів, перетворивши рівняння в частинних похідних на систему звичайних диференціальних рівнянь.

Визначимо крок між сусідніми шарами суміші наступним чином:

$$\Delta z = H / N.$$

Також як і у випадку з рівняннями руху установки перейдемо до запису у формі Коші. Для внутрішніх вузлів i матимемо:

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} = \frac{E}{\rho \Delta z^2}(q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}) + \frac{\eta}{\rho \Delta z^2}(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}). \end{cases}$$

На нижній границі $z = 0$:

$$q_0 = x_0, v_0 = v_0.$$

На верхній границі $z = h$, використовуючи умову (5) та фіктивний вузол $N + 1$, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{dq_N}{dt} = \frac{2(v_{N-1} - v_N)}{\Delta z^2}, \\ \frac{dv_N}{dt} = \frac{2E}{\rho \Delta z^2}(q_{N-1} - q_N) + \frac{2\eta}{\rho \Delta z^2}(v_{N-1} - v_N). \end{cases}$$

Тоді силу реакції, що діє на установку, визначимо

$$F_r \approx S_c \left[E \left(\frac{-3q_0 + 4q_1 - q_2}{2\Delta z} \right) + \eta \left(\frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2\Delta z} \right) \right].$$

Для забезпечення чисельної стійкості при інтегруванні рівнянь стану у часовій області часовий крок Δt треба обирати згідно з критерієм Куранта-Фрідрікса-Леві, враховуючи швидкість поширення поздовжніх хвиль у в'язкопружному середовищі:

$$\Delta t \leq \frac{\rho(\Delta z)^2}{2\eta}.$$

В системі MATLAB алгоритм ode45 має адаптивний крок, що дозволяє автоматично коригувати Δt , щоб задовольнити критерію стійкості. Водночас слід зазначити, що при високому ступені дискретизації шару бетону (великих значеннях N), або при значних градієнтах параметра в'язкості, необхідність дотримання цього критерію призводить до суттєвого зменшення кроку інтегрування та, як наслідок, до значного зростання обчислювальних витрат.

Якщо здійснювати моделювання суміші за допомогою основних блоків Simulink, то кожного разу при додаванні/видаленні шару треба переробляти модель, що ускладнює її використання та зменшує її універсальність. Щоб позбутися цих недоліків доцільно реалізувати модель суміші у блоці MATLAB Function для векторного обчислення параметрів всіх шарів суміші.

На рис. 7 зображена модель механічної системи, а на Рис. 8 – модель об'єднана з електромагнітним

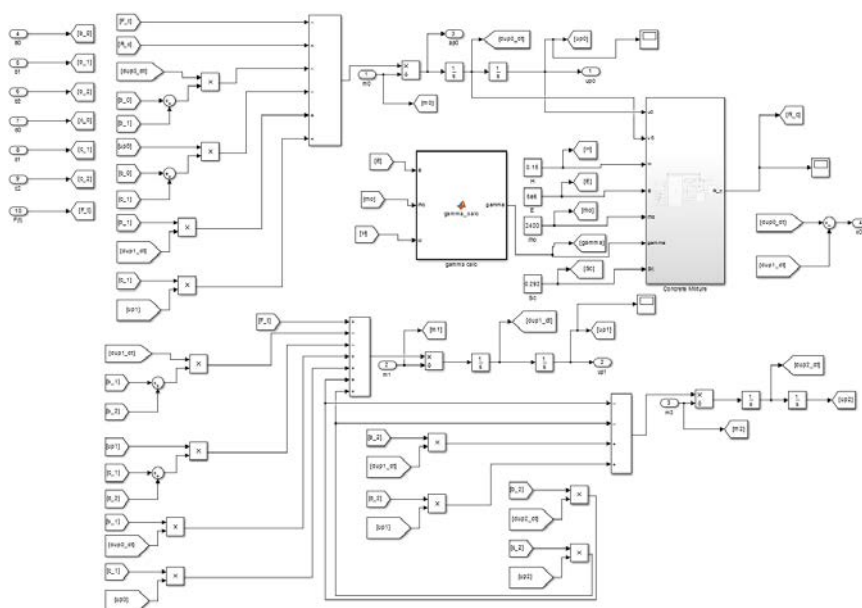


Рис. 7. Імітаційна модель механічної системи

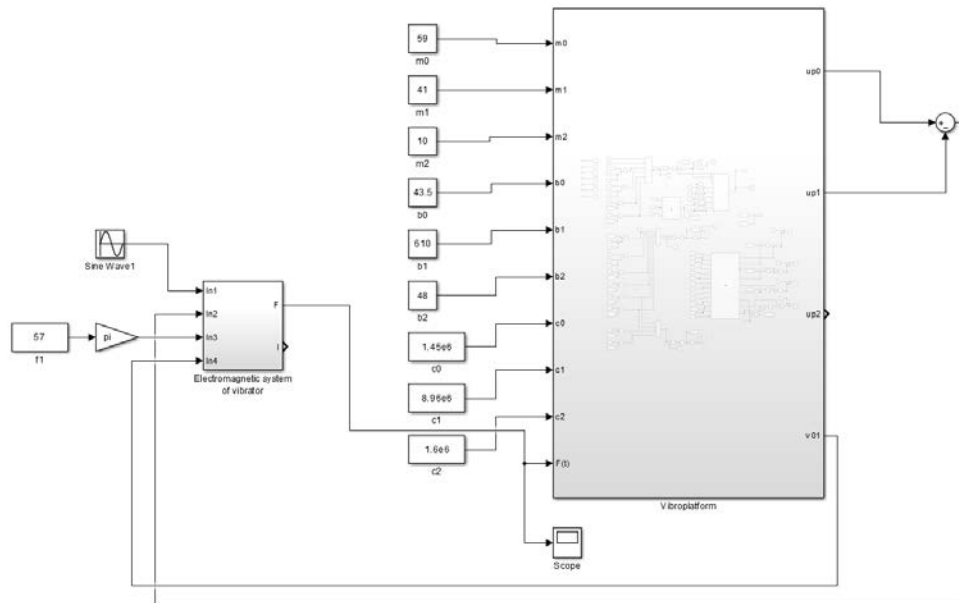


Рис. 8. Імітаційна модель електромагнітний привод – віброплатформа при синусоїдальній напрузі живлення

приводом при синусоїдальній напрузі живлення. Таке поєднання дозволяє дослідити перехідні процеси в системі при різних законах зміни збудовуючої сили.

ОБГОВОРЕННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Порівняльний аналіз розробленої моделі з існуючими підходами [7; 9; 11] свідчить про її ширші функціональні можливості. На відміну від результатів, представлених у [7], де використовувалась дискретна модель, ми інтегрували континуальну модель бетонної суміші в динамічну систему «машина – середовище». Це дозволило врахувати хвилову природу поширення коливань, що критично для товстих шарів суміші.

Головною відмінністю від моделі, запропонованої у [9], є відмова від жорсткої прив'язки до аналітичних розв'язків. Завдяки застосуванню чисельних методів нам вдалося зняти обмеження на форму вхідного сигналу. Це дає змогу моделювати не лише ідеальні гармонічні коливання, а й реальні перехідні процеси та зміну реологічних параметрів бетону в реальному часі. У порівнянні з класичною одномасовою моделлю [11], наш підхід забезпечує вищу точність у випадках полічастотного збурення, оскільки він враховує складну взаємодію мас віброплатформи та матеріалу.

Таким чином, гіпотеза про необхідність переходу до континуальних моделей із розподіленими параметрами для коректного опису роботи керованого привода повністю підтвердилася. Модель демонструє високу збіжність з аналітичними еталонами (похибка не перевищує 5%), але при цьому є значно гнучкішою для практичного застосування.

ВИСНОВКИ

Створена математична модель немає обмежень на характер змущуючих сил, що робить її придатною для дослідження полічастотних режимів, які вважаються одним з ефективних способів руйнування внутрішньої структури жорстких сумішей завдяки одночасному резонансному впливу на різні фракції заповнювача. Це дозволить значно скоротити споживання електроенергії та зменшити час, необхідний для ущільнення суміші.

Отримані алгоритми можуть стати основою для розробки системи автоматичного керування електромагнітним приводом, яка дозволить віброустановці самостійно підлаштовувати частоту та амплітуду коливань у процесі зміни фізико-механічних характеристик бетонної суміші.

REFERENCES

- [1] Nazarenko, I., Dedov, O., & Diachenko, O. (2019). Obhruntuvannia alhorytmu rozrakhunku vibratsiinoi ustanovky dlia ushchilnennia betonnykh sumishei zi zminnym rezhymom roboty [Substantiation of the algorithm for calculating a vibration unit for compacting concrete mixtures with a variable operating mode]. *Hirnychi, budivelni, dorozhni ta melioratyvni mashyny – Mining, Construction, Road and Melioration Machines*, (93), 19–26. DOI: 10.32347/gbdmm2019.93.0301 [in Ukrainian]
- [2] Ruchynskyi, M. M., Sviderskyi, A. T., & Diachenko, O. S. (2019). Ohliad i analiz isnuuiuchykh rezhymiv ushchilnennia betonnykh sumishei [Review and analysis of existing modes of concrete mixtures compaction]. *Materialy naukovotekhnichnoi konferentsii "Prohresyyna tekhnika, tekhnolohiia ta inzhenerna osvita" – International Scientific and Technical Conference "The Progressive Technics, Technology and Engineering Education"*, (XX). DOI: 10.20535/2409-7160.2019.XX.175190 [in Ukrainian]

- [3] Antunes, R., & Tia, M. (2018). Cement content reduction in concrete through aggregate optimization and packing: A sustainable practice for pavement and seaport construction. *Mix Sustentável*, 4(3), 23–30. DOI: 10.29183/2447-3073.MIX2018.v4.n3.23-30
- [4] Yan, W., Cui, W. & Qi, L. (2022). DEM study on the response of fresh concrete under vibration. *Granular Matter* 24–37. DOI: 10.1007/s10035-021-01199-y
- [5] Zhao, X. et al. (2024) *A review of compaction mechanisms, influencing factors, and advanced methods in concrete vibration technology*. Journal of Building Engineering, vol. 93, p. 109847. DOI: 10.1016/j.jobbe.2024.109847
- [6] Levchenko, O., & Korobko, B. (2024). Optimization of the concrete production process in terms of energy consumption. *Technology Audit and Production Reserves*, 6(1(80)), 11–15. DOI: 10.15587/2706-5448.2024.319827
- [7] Chernov, O. O. (2020). Enerhoefektyvni kerovani elektromahnitni pryvody vibratsiynoho obladnannia. Teoriia i praktyka [Energy-efficient controlled electromagnetic drive systems for vibrating equipment. Theory and practice] (Doctoral dissertation, Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv). [in Ukrainian].
- [8] Borovets, V. M., & Borovets, Ya. V. (2016). Vplyv robochoho seredovyscha na kinematyku vibratsiinykh mashyn [Influence of the working medium on the vibrating machines kinematics]. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh – Vibrations in Engineering and Technology*, 2(82), 10–15. [in Ukrainian].
- [9] Gurskyi, V. M. (2018). Syntez nelineinykh polichastotnykh vibratsiinykh mashyn z rezonansnymy rezhymamy roboty [Synthesis of nonlinear multi-frequency vibration machines with resonant operating modes] (Doctoral dissertation, Lviv Polytechnic National University, Lviv). https://lpnu.ua/sites/default/files/2020/dissertation/1459/dysertaciya_gurskyi_v_m_1.pdf [in Ukrainian].
- [10] Slipetskyi, V. V. (2022). Obhruntuvannia parametriv vibroformuvального obladnannia dlia vyhotovlennia betonnykh vyrobiv [Substantiation of parameters of vibroforming equipment for the manufacture of concrete products.] (PhD thesis, Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv). [in Ukrainian].
- [11] Itkin, O. F. (2010). Naukovi osnovy rozrobky vibratsiinykh mashyn dlia ushchilnennia tsementobetonnykh sumishei [Scientific bases of vibrating machines development for compaction of cement concrete mixtures] (Doctoral dissertation, Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv). [in Ukrainian].
- [12] Ranjbari, P., Ebrahimi, M., Ein-Mozaffari, F., Upreti, S. R., & Lohi, A. (2025). A critical review of the coupled CFD–DEM method for the simulation of two-phase liquid–solid systems. *Powder Technology*, 454, 120677. DOI: 10.1016/j.powtec.2025.120677
- [13] Cao, G., Bai, Y., Shi, Y., Li, Z., Deng, D., Jiang, S., Xie, S., & Wang, H. (2024). Investigation of vibration on rheological behavior of fresh concrete using CFD-DEM coupling method. *Construction and Building Materials*, 425, 135908. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2024.135908
- [14] Yan, W., Cui, W., & Qi, L. (2022). Simulation of underwater concrete movement in flowing water using DEM-CFD coupling method. *Construction and Building Materials*, 319, 126134. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.126134
- [15] Zou, D., He, Z., Cheng, X., & Yu, W. (2024). Numerical analysis and experimental research on the vibration performance of concrete vibration table in PC components. *Science and Engineering of Composite Materials*, 31: 20240038. DOI: 10.1515/secm-2024-0038
- [16] Sassi R, Jelidi A, & Montassar S. (2023). *Numerical simulation of fresh concrete flow in the L-box test using computational fluid dynamics*. Magazine of Concrete Research, 75(23): 1189–1201. DOI: 10.1680/jmacr.23.00032
- [17] Karakurt, C., Çelik, A. O., Yılmaz, C., Kiriçi, V., & Özyaşar, E. (2018). CFD simulations of self-compacting concrete with discrete phase modeling. *Construction and Building Materials*, 186, 20–30. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.07.106
- [18] Nazarenko, I. I. (2010). Prykladni zadachi teorii vibratsiinykh system (2-e vidannja) [Applied problems of the theory of vibration systems (2nd edition)]. Slovo Publishing House [in Ukrainian].
- [19] Sheremeta, R. (2018). Ohliad reolohichnykh modelei [Review of rheological models]. *Visnyk Lvivskoho natsionalnoho universytetu pryrodokorystuvannia. Seriya Ahroinzhenerni doslidzhennia – Bulletin of the Lviv National University of Nature Management. Agroengineering Research Series*, (22), 22–30. DOI: 10.31734/agroengineering2018.01.022 [in Ukrainian]
- [20] Nazarenko, I. I., Baranov, Yu. O., & Sviderskyi, A. T. (2012). Modeliuvannia robochykh protsesiv ta rezhymiv rukhu vibratsiinykh mashyn riznoho tekhnolohichnoho przyznachennia [Modeling of working processes and motion modes of vibrating machines for various technological purposes]. *Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh – Vibrations in Engineering and Technology*, 1(65), 30–35. [in Ukrainian].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Назаренко І., Дедов О., & Дьяченко, О. (2019). Обґрунтування алгоритму розрахунку вібраційної установки для ущільнення бетонних сумішей зі змінним режимом роботи. *Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини*, (93), 19–26. DOI: 10.32347/gbdmm2019.93.0301
- [2] Ручинський, М. М., Свідерський, А. Т., & Дьяченко, О. С. (2019). Огляд і аналіз існуючих режимів ущільнення бетонних сумішей. *Матеріали науково-технічної конференції "Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта"*, (XX). DOI: 10.20535/2409-7160.2019.XX.175190.
- [3] Antunes, R., & Tia, M. (2018). Cement content reduction in concrete through aggregate optimization and packing: A sustainable practice for pavement and seaport construction. *Mix Sustentável*, 4(3), 23–30. DOI: 10.29183/2447-3073.MIX2018.v4.n3.23-30

- [4] Yan, W., Cui, W. & Qi, L. (2022). DEM study on the response of fresh concrete under vibration. *Granular Matter* 24 – 37. DOI: 10.1007/s10035-021-01199-y
- [5] Zhao, X. et al. (2024) *A review of compaction mechanisms, influencing factors, and advanced methods in concrete vibration technology*. *Journal of Building Engineering*, vol. 93, p. 109847. DOI: 10.1016/j.jobbe.2024.109847
- [6] Levchenko, O., & Korobko, B. (2024). Optimization of the concrete production process in terms of energy consumption. *Technology Audit and Production Reserves*, 6(1(80), 11–15. DOI: 10.15587/2706-5448.2024.319827
- [7] Черно, О. О. (2020). *Енергоефективні керовані електромагнітні приводи вібраційного обладнання. Теорія і практика* (Дис. д-ра техн. наук). Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, Миколаїв.
- [8] Боровець, В. М., & Боровець, Я. В. (2016). Вплив робочого середовища на кінематику вібраційних машин. *Вібрації в техніці та технологіях*, 2(82), 10-15.
- [9] Гурський, В. М. (2018). *Синтез нелінійних полічастотних вібраційних машин з резонансними режимами роботи* (Дис. д-ра техн. наук). Національний університет «Львівська політехніка», Львів. <https://lpnu.ua/sites/default/files/2020/dissertation/1459/dysertacyagurskyvm-1.pdf>
- [10] Сліпський, В. В. (2022). *Обґрунтування параметрів віброформувального обладнання для виготовлення бетонних виробів* (Дис. д-ра філософії). Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ.
- [11] Іткін, О. Ф. (2010). *Наукові основи розробки вібраційних машин для ущільнення цементобетонних сумішей* (Дис. д-ра техн. наук). Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків.
- [12] Ranjbari, P., Ebrahimi, M., Ein-Mozaffari, F., Upreti, S. R., & Lohi, A. (2025). A critical review of the coupled CFD–DEM method for the simulation of two-phase liquid–solid systems. *Powder Technology*, 454, 120677. DOI: 10.1016/j.powtec.2025.120677
- [13] Cao, G., Bai, Y., Shi, Y., Li, Z., Deng, D., Jiang, S., Xie, S., & Wang, H. (2024). Investigation of vibration on rheological behavior of fresh concrete using CFD-DEM coupling method. *Construction and Building Materials*, 425, 135908. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2024.135908
- [14] Yan, W., Cui, W., & Qi, L. (2022). Simulation of underwater concrete movement in flowing water using DEM-CFD coupling method. *Construction and Building Materials*, 319, 126134. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.126134
- [15] Zou, D., He, Z., Cheng, X., & Yu, W. (2024). Numerical analysis and experimental research on the vibration performance of concrete vibration table in PC components. *Science and Engineering of Composite Materials*, 31: 20240038. DOI: 10.1515/secm-2024-0038
- [16] Sassi R, Jelidi A, & Montassar S. (2023). *Numerical simulation of fresh concrete flow in the L-box test using computational fluid dynamics*. *Magazine of Concrete Research*, 75(23): 1189–1201. DOI: 10.1680/jmacr.23.00032
- [17] Karakurt, C., Çelik, A. O., Yılmaz, C., Kiriççi, V., & Özyaşar, E. (2018). CFD simulations of self-compacting concrete with discrete phase modeling. *Construction and Building Materials*, 186, 20–30. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.07.106
- [18] Назаренко І. І. (2010). *Прикладні задачі теорії вібраційних систем. Навчальний посібник (2-ге вид.)*. Київ : Видавничий Дім «Слово».
- [19] Шеремета, Р. (2018). Огляд реологічних моделей. *Вісник Львівського національного університету природокористування. Серія Агроінженерні дослідження*, (22), 22–30. DOI: 10.31734/agroengineering2018.01.022
- [20] Назаренко І.І., Баранов Ю.О., & Свідерський А.Т. (2012). Моделювання робочих процесів та режимів руху вібраційних машин різного технологічного призначення. *Вібрації в техніці та технологіях*, 1(65), 30-35.

© Джангіров М. В.

Дата першого надходження статті до видання: 23.02.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 19.03.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 22.05.2026



Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу (CC BY 4.0)