



КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ



НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМЕНІ АДМІРАЛА МАКАРОВА

Н. О. РОМАНЧУК,
Н. О. ШАПОВАЛ, О. В. МАЙБОРОДА

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА



*Н*серія
авчальні посібники

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**Н. О. РОМАНЧУК,
Н. О. ШАПОВАЛ, О. В. МАЙБОРОДА**

**КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ,
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою НУК

 **ВИДАВНИЦТВО**
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА
2020

УДК 517(075.8)

P69

Автори:

Н. О. Романчук, кандидат педагогічних наук, доцент;

Н. О. Шаповал, кандидат технічних наук, доцент;

О. В. Майборода, кандидат економічних наук, доцент

Рецензент Ж. Ю. Буруніна, кандидат технічних наук, доцент

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як навчальний посібник*

Романчук Н. О.

P69 Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля : навчальний посібник / Н. О. Романчук, Н. О. Шаповал, О. В. Майборода. – Миколаїв : НУК, 2020. – 152 с.

ISBN 978-966-321-374-3

Матеріал посібника подано у вигляді восьми лекцій, кожна з яких містить основні означення, властивості, теореми та приклади розв'язування задач. Наведено приклади розв'язків більш ніж ста задач з розділу "Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля".

Призначено для студентів, аспірантів та викладачів при підготовці до лекційних і практичних занять.

УДК 517(075.8)

© Романчук Н. О., Шаповал Н. О.,
Майборода О. В., 2020

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2020

ISBN 978-966-321-374-3

**Лекція 1. Подвійний інтеграл:
означення, властивості, обчислення**

**Задачі, що приводять до поняття
подвійного інтеграла**

Задача 1. (Про об'єм циліндричного тіла)

Нехай задано тіло, яке обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, знизу – замкненою обмеженою областю $D \subset Oxy$, з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz (рис. 1).

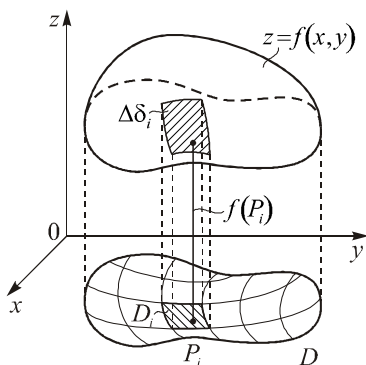


Рис. 1

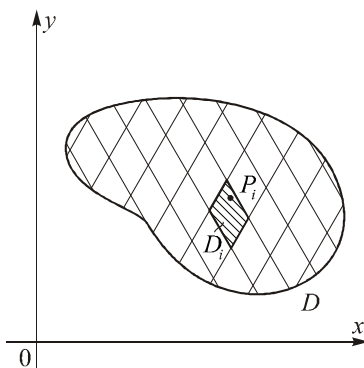


Рис. 2

Розіб'ємо довільним чином область D на n частин D_i , які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Виберемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i) \in D_i$, значення функції в цій точці $f(P_i) = f(\xi_i; \eta_i)$. Знайдемо добуток $f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i$, який дорівнює об'єму циліндричного стовпчика з твірними, паралельними осі Oz , основою D_i і висотою $f(P_i)$. Усього таких стовпчиків n , і сума їх об'ємів наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла:

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (1)$$

Позначимо через $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i ; діаметром області називаємо найбільшу з її хорд. Об'єм заданого циліндричного тіла знаходиться як границя суми (1) при $\lambda \rightarrow 0$:

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} V_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2)$$

Задача 2. (Про масу матеріальної пластини)

Нехай задано плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є область D (рис. 2). В області D задано неперервну функцію $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини в точці $(x; y)$.

Розіб'ємо довільним способом область D на частини D_i , які не мають спільних внутрішніх точок і площі яких дорівнюють ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i) \in D_i$ і знайдемо густину в цій точці $\gamma(P_i) = \gamma(\xi_i; \eta_i)$. Тоді маса ча-

стини D_i дорівнює добутку $\gamma(P_i) \cdot \Delta S_i$, а значення маси m всієї пластини наближено дорівнює сумі:

$$m \approx m_n = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (3)$$

Точне значення маси одержимо як границю суми (3) при $\lambda \rightarrow 0$, тобто:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} m_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (4)$$

Отже, різні за змістом задачі приводять до знаходження границь одного й того ж виду. Кожна з таких границь називається подвійним інтегралом. У зв'язку з цим виникає потреба у вивченні властивостей цих границь, незалежно від змісту тієї чи іншої задачі.

Означення подвійного інтеграла

Нехай функція $f(x, y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset R^2$. Розіб'ємо область D довільним чином на n частин D_i , площі яких дорівнюють ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$); $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i . Виберемо в кожній області D_i довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i)$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i, \quad (5)$$

яку назвемо інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ по області D .

Якщо інтегральна сума (5) при $\lambda \rightarrow 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області D на частинні області D_p , ні від вибору точок P_p , то ця границя називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D :

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i. \quad (6)$$

Функція $f(x, y)$ називається інтегровною в області D ; D – область інтегрування; x, y – змінні інтегрування; $dx dy$ – елемент площі.

Геометричний зміст подвійного інтеграла:

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx dy \text{ – об'єм циліндричного тіла.}$$

Механічний зміст подвійного інтеграла:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) \, dx dy \text{ – маса матеріальної пластини.}$$

Теорема (достатня умова інтегровності функції)

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D , то вона інтегровна в цій області.

Надалі вважатимемо, що підінтегральна функція $f(x, y)$ в області інтегрування D є неперервною.

Властивості подвійного інтеграла

1. $\iint_D C \cdot f(x, y) \, dx dy = C \cdot \iint_D f(x, y) \, dx dy, \quad C = \text{const.}$
2. $\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) \, dx dy = \iint_D f(x, y) \, dx dy \pm \iint_D g(x, y) \, dx dy.$

Властивість справедлива для скінченного числа функцій.

$$3. \iint_D f(x, y) dx dy \geq 0, \text{ якщо } f(x, y) \geq 0 \text{ в області } D.$$

$$4. \iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy, \text{ якщо } f(x, y) \geq g(x, y)$$

в області D .

$$5. \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

де D_1, D_2 – області, на які розбито область інтегрування D .

$$6. mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS, \text{ де } S - \text{площа області } D;$$

m, M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D .

Обчислення подвійних інтегралів

1) Область інтегрування D обмежена зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), а знизу і зверху – неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$) (рис. 3).

Тоді обчислення інтеграла (6) зводиться до обчислення повторного інтеграла за формулою:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (7)$$

2) Область інтегрування D обмежена знизу і зверху прямими $y = c$ і $y = d$ ($c < d$), а зліва і справа – неперервними кривими $x = \psi_1(y)$ і $x = \psi_2(y)$ ($\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$) (рис. 4). Для такої області подвійний інтеграл (6) обчислюється за

формулюю:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (8)$$

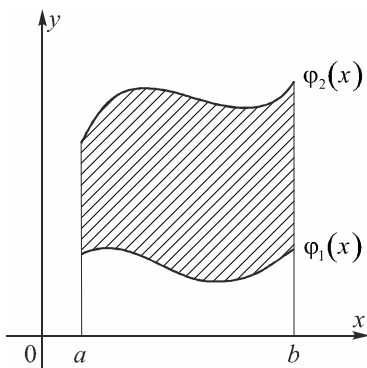


Рис. 3

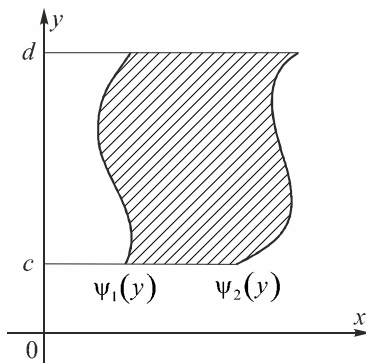


Рис. 4

Приклад 1. Обчислити подвійні інтеграли, взяті по прямокутних областях.

а) $\iint_D e^{x+y} dx dy$, $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$;

$$\iint_D e^{x+y} dx dy = \iint_D e^x \cdot e^y dx dy = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = e^x \Big|_0^1 \cdot e^y \Big|_0^1 = (e-1)^2.$$

б) $\iint_D x^2 y \cdot \cos(xy^2) dx dy$, $D: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2$;

$$\begin{aligned}
 \iint_D x^2 y \cdot \cos(xy^2) dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 dx \cdot \int_0^2 2y \cos(xy^2) dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2 dx \cdot \frac{1}{x} \sin(xy^2) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cdot \sin 4x dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} x = u, \quad dx = du, \\ \sin 4x dx = dv, \quad v = -\frac{1}{4} \cos 4x \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{4} \cos 4x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 4x dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{8} \cos 2\pi + \frac{1}{16} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{1}{16} (\cos 2\pi - \cos 0) \right) = -\frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити повторні інтеграли.

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x - y + 1) dy = \int_0^1 dx \left((x+1) \cdot y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{2x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left(2x^2 + 2x - 2x^2 - \left(x^2 + x - \frac{x^2}{2} \right) \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad & \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 x^2 dx \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{\frac{1}{x}}^x = \\
 &= -\int_1^2 x^2 dx \cdot \left(\frac{1}{x} - x \right) = \int_1^2 (x^3 - x) dx = \\
 &= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = 2\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & \int_2^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx = \int_2^4 y^3 dy \int_0^y \frac{dx}{x^2 + y^2} = \\
 &= \int_2^4 y^3 dy \cdot \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^y = \int_2^4 y^2 (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) dy = \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_2^4 = \frac{\pi}{12} (4^3 - 2^3) = \frac{14\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Змінити порядок інтегрування в наступних інтегралах:

$$\text{а) } I_1 = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Зобразимо область інтегрування, яка визначається лініями: $y = 0$, $y = 1$, $x = y$, $x = \sqrt{y}$ (рис. 5). Змінивши порядок інтегрування, отримаємо нові межі: $x = 0$, $x = 1$, $y = x^2$, $y = x$, тобто

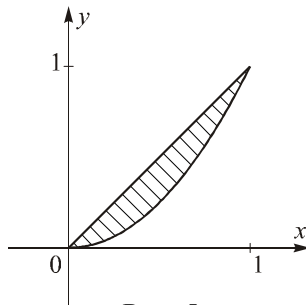


Рис. 5

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

$$\text{б) } I_2 = \int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

Початкові межі: $x = -1$, $x = 0$, $y = x + 1$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ (рис. 6); виразимо нові межі інтегрування

$$x = y - 1, \quad x = -\sqrt{1 - y^2}, \quad y = 0, \quad y = 1.$$

Отже,

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x, y) dx.$$

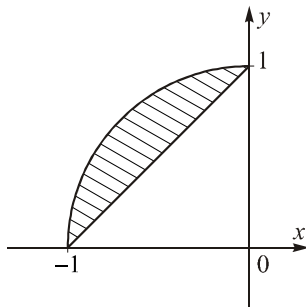


Рис. 6

$$\text{в)} I_3 = \int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$$

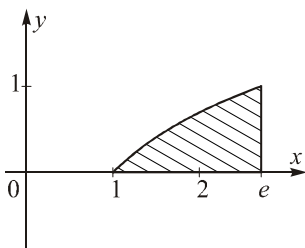


Рис. 7

Область інтегрування зображено на рис. 7, звідки знаходимо нові межі: $y = 0$, $y = 1$, $x = e^y$, $x = e$, тому

$$I_3 = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

Приклад 4. Змінивши порядок інтегрування, записати заданий вираз у вигляді одного двократного інтеграла.

$$\text{а)} I_1 = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dx + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

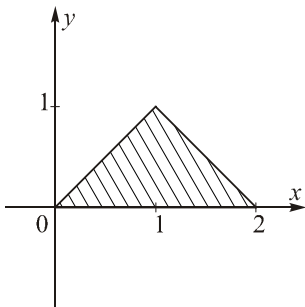


Рис. 8

Область інтегрування зображено на рис. 8. Змінимо порядок інтегрування та запишемо заданий інтеграл як один двократний:

$$I_1 = \int_1^2 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$\text{б)} I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy.$$

Задані межі інтегрування $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^2$ і $0 \leq x \leq 3$,

$0 \leq y \leq \frac{3-x}{2}$ (рис. 9) можна записати

так: $\sqrt{y} \leq x \leq 3-2y$, $0 \leq y \leq 1$. Отже,

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx.$$

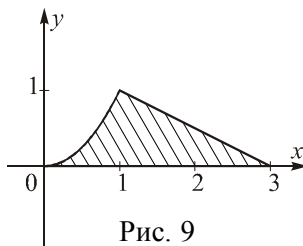


Рис. 9

Приклад 5. Обчислити подвійні інтеграли по заданих областях:

а) $\iint_D \frac{x \, dx \, dy}{x^2 + y^2}$; $D : x = 2, y = x,$

$x = 2y$ (рис. 10).

$$\iint_{D_1} \frac{x \, dx \, dy}{x^2 + y^2} = \int_0^2 x \, dx \int_{x/2}^x \frac{dy}{x^2 + y^2} =$$

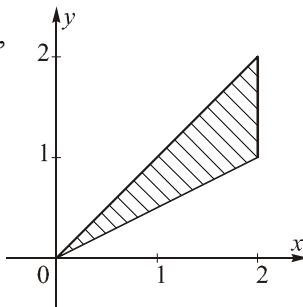


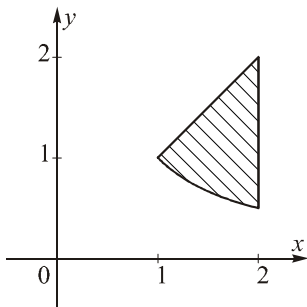
Рис. 10

$$= \int_0^2 x \, dx \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{\frac{x}{2}}^x = \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \cdot x \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

б) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$; $D: x=2, y=x, xy=1$ (рис. 11).

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{1/x}^x \frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2 dx \cdot \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{1/x}^x =$$

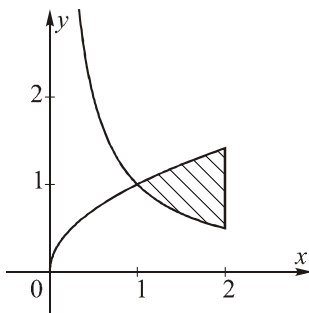


$$= \int_1^2 x^2 dx \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right) = \int_1^2 \left(x^3 - x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}.$$

Рис. 11

в) $\iint_D y \ln x dx dy$; $D: xy=1, y=\sqrt{x}, x=2$ (рис. 12).



$$\iint_D y \ln x dx dy = \int_1^2 \ln x dx \int_{1/x}^{\sqrt{x}} y dy =$$

$$= \int_1^2 \ln x dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} =$$

Рис. 12

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln x \cdot \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = u, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ \left(x - \frac{1}{x^2} \right) dx = dv, \quad v = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) \ln x \right)_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \right) dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} \ln 2 - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x} \right) \right)_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} \ln 2 - \frac{5}{4} \right) = \frac{5}{8} (2 \ln 2 - 1). \end{aligned}$$

***Лекція 2. Заміна змінних у подвійному інтегралі.
Полярні координати. Застосування подвійного
інтеграла до задач геометрії, механіки***

Нехай задана функція $f(x, y)$ є неперервною в замкненій і обмеженій області D , тоді існує подвійний інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy. \quad (1)$$

Припустимо, що в інтегралі (1) можна перейти до нових змінних u і v за допомогою формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (2)$$

з яких однозначно виражаються змінні u і v :

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (3)$$

Тоді кожній точці $M(x, y) \in D$ ставиться у відповідність точка $M^*(u, v)$. Множина всіх таких точок $M^*(u, v)$ утворює замкнену і обмежену область D^* .

Теорема. Якщо перетворення (3) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємоднозначним, і якщо функції (2) в області D^* мають непе-

первні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (4)$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в області D , то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| \, du dv. \quad (5)$$

Функціональний визначник (4) називається визначником Якобі або якобіаном.

Розглянемо заміну декартових координат x, y полярними ρ, φ , пов'язаними співвідношеннями $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Оскільки якобіан

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho, \quad |J(\rho, \varphi)| = \rho,$$

то формула (5) набуває вигляду:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \, d\rho d\varphi, \quad (6)$$

де область D задана в декартовій системі координат Oxy , а D^* – відповідна їй область у полярній системі координат.

Якщо область D (рис. 13,а) обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α і β ($\alpha < \beta$) і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$

та $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (рис. 13,б). Тоді формулу (6) можна записати у вигляді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (7)$$

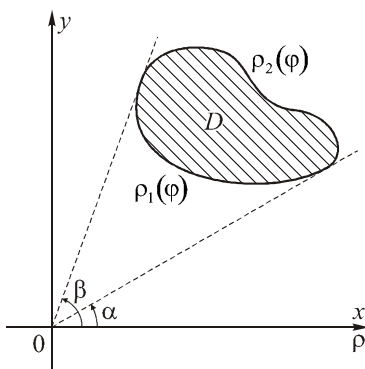


Рис. 13,а

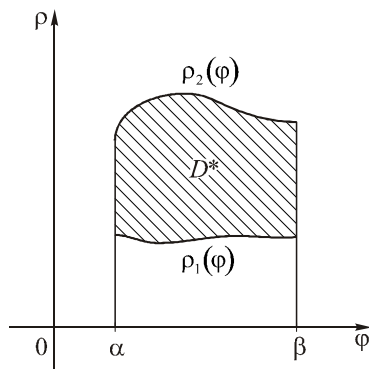


Рис. 13,б

Приклади. Перейти до полярних координат і обчислити подвійні інтеграли:

а) $I_1 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$; D – I чверть кола $x^2 + y^2 \leq a^2$;

$$I_1 = \iint_{D^*} \sqrt{\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \iint_{D^*} \rho^2 d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho =$$

$$= \varphi \bigg|_0^{\pi/2} \cdot \frac{\rho^3}{3} \bigg|_0^a = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{6}.$$

$$\text{б)} I_2 = \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} \, dxdy; \quad D: x^2 + y^2 \leq 4;$$

$$I_2 = \iint_{D^*} \rho \sqrt{4-\rho^2} \, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \sqrt{4-\rho^2} \, d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2} \, d(4-\rho^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \varphi \bigg|_0^{2\pi} \cdot \frac{2}{3} (4-\rho^2)^{3/2} \bigg|_0^2 = -\pi \cdot \frac{2}{3} (0-4^{3/2}) = \frac{16\pi}{3}.$$

$$\text{в)} I_3 = \iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + 1}; \quad D: y = \sqrt{1-x^2},$$

$y = 0$ (рис. 14);

$$I_3 = \iint_{D^*} \frac{\rho \, d\rho d\varphi}{\rho^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \frac{d(\rho^2 + 1)}{\rho^2 + 1} =$$

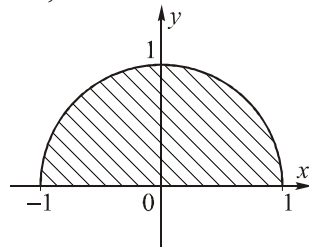


Рис. 14

$$= \frac{1}{2} \varphi \bigg|_0^\pi \cdot (\ln(\rho^2 + 1)) \bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{\pi \ln 2}{2}.$$

$$\text{г) } I_4 = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy; \quad D: x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x$$

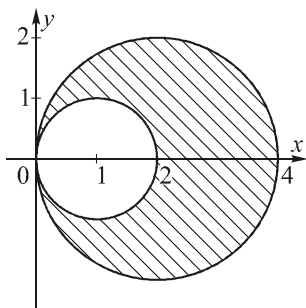


Рис. 15

(рис. 15);

$$D^*: \rho^2 = 2\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 2 \cos \varphi;$$

$$\rho^2 = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi;$$

$$I_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot \rho^3 \Big|_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (64 \cos^3 \varphi - 8 \cos^3 \varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{56}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \frac{56}{3} \left(\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{56}{3} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) =$$

$$= \frac{56}{3} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{224}{9}.$$

Застосування подвійного інтеграла до розв'язування задач геометрії, механіки

Нехай в площині Oxy задано матеріальну пластину, яка має форму обмеженої замкненої області D (рис. 16), в кожній точці якої густина визначається неперервною функцією $\gamma = \gamma(x, y)$. Тоді *площа фігури*, що має форму області D , обчислюється за формулою:

$$S = \iint_D dx dy. \quad (8)$$

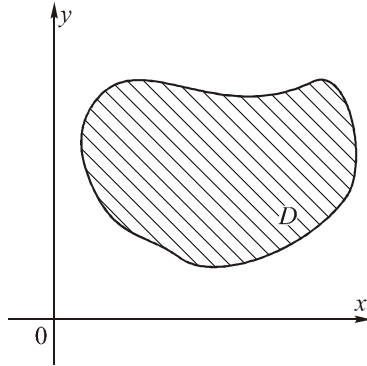


Рис. 16

Маса матеріальної пластини, обмеженої областю D , з густиною γ визначається за формулою:

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (9)$$

Величини

$$M_x = \iint_D y \cdot \gamma(x, y) dx dy$$
$$\text{і } M_y = \iint_D x \cdot \gamma(x, y) dx dy \quad (10)$$

називаються *статичними моментами пластини* відносно осей Ox та Oy відповідно.

Координати центра маси пластини обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \quad (11)$$

Величини

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) \, dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) \, dx dy,$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) \, dx dy \quad (12)$$

називаються *моментами інерції пластини* відносно осей Ox , Oy та початку координат відповідно.

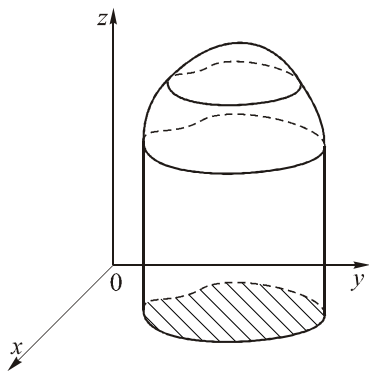


Рис. 17

Об'єм циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю D площини Oxy , а зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна та невід'ємна в області D (рис. 17), знаходиться за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx dy. \quad (13)$$

Якщо поверхня σ , задана рівнянням $z = f(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$,

$f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площа Q поверхні σ знаходиться за формулою

$$Q = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \, dx dy. \quad (14)$$

Приклад 1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

а) $y = x, y = 5x, x = 1$.

Задану фігуру зображено на рис. 18. Шукану площу обчислюємо за формулою (8):

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{5x} dy = \int_0^1 dx \cdot y \Big|_x^{5x} = \\ &= \int_0^1 4x \, dx = 2x^2 \Big|_0^1 = 2 \quad (\text{кв. од.}). \end{aligned}$$

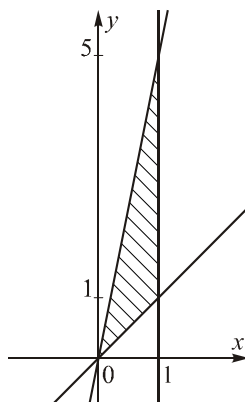


Рис. 18

б) $y = 2 - x, y^2 = 4x + 4$.

Знаходимо спільні точки ліній:

$$\begin{cases} y = 2 - x, \\ y^2 = 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow (2 - x)^2 = 4x + 4,$$

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow (0; 2), (8; -6);$$

виконуємо рисунок (рис. 19).

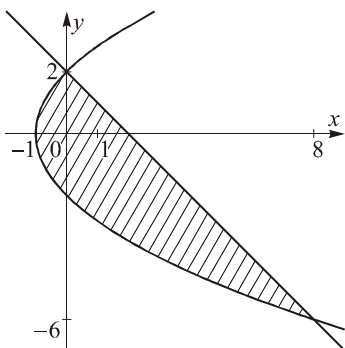


Рис. 19

$$S = \iint_D dx dy = \int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{2-y} dx =$$

$$= \int_{-6}^2 \left(2 - y - \frac{y^2}{4} + 1 \right) dy =$$

$$= \left(3y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_{-6}^2 = 4 - \frac{2}{3} + 18 = 21\frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

в) $\rho = a \cos \varphi$, $\rho = b \cos \varphi$, $0 < a < b$ (рис. 20).

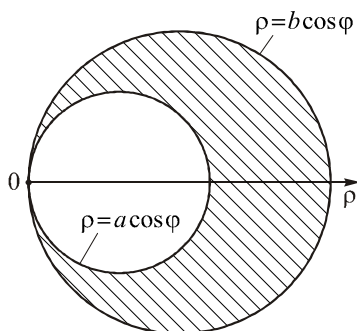


Рис. 20

Враховуючи симетричність фігури, обмеженої заданими лініями, її площа дорівнює:

$$S = 2 \iint_{D_1^*} \rho d\rho d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{b \cos \varphi} \rho d\rho =$$

$$= (b^2 - a^2) \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{b^2 - a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{(b^2 - a^2)\pi}{4} \text{ (кв. од.)}.$$

г) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$.

Для обчислення площі фігури, обмеженої замкненою лінією (лемніскатою), застосуємо формулу (6) переходу до полярних координат і врахуємо її симетричність (рис. 21), тоді

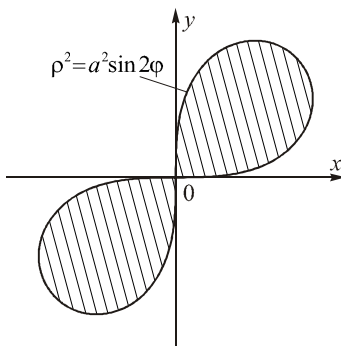


Рис. 21

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho \, d\rho =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, d\varphi = -\frac{a^2}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} = a^2 \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 2. Обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями:

а) $y = x^2$, $y = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$.

Задане тіло – це вертикальний циліндр $y = x^2$, який обмежений зверху площиною $z = 4 - x - y$, а знизу – частиною площини $z = 0$ (рис. 22); його проекцією на площину Oxy є фігура, обмежена параболою

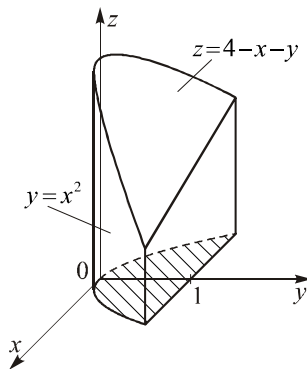


Рис. 22

$y = x^2$ і прямою $y = 1$. Об'єм тіла знаходимо за формулою (13):

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (4 - x - y) \, dy = \\
 &= \int_{-1}^1 dx \left((4 - x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^1 = \int_{-1}^1 \left(3\frac{1}{2} - x - 4x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \\
 &= \left(\frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3\frac{1}{2}x \right) \Big|_{-1}^1 = \\
 &= 2 \left(\frac{1}{10} - \frac{4}{3} + 3\frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \frac{34}{15} = \frac{68}{15} \text{ (куб. од.)}.
 \end{aligned}$$

б) $z = y^2 - x^2$, $z = 0$, $y = \pm 2$.

Гіперболічний параболоїд $z = y^2 - x^2$ перетинає площину Oxy ($z = 0$) по прямих $y = \pm x$. Разом з площинами $z = 0$, $y = \pm 2$ цей параболоїд обмежує тіло, симетричне відносно площини Oxz і Oyz . Враховуючи симетричність, об'єм V_1 чверті тіла, розміщеної в першому октанті (рис. 23), дорівнює:

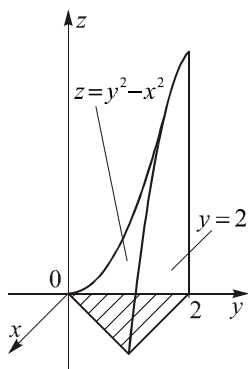


Рис. 23

$$V_1 = \iint_D f(x, y) \, dx dy =$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 dy \int_0^y (y^2 - x^2) dx &= \int_0^2 dy \left(y^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^y = \\ &= \frac{2}{3} \int_0^2 y^3 dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \text{ (куб. од.)}. \end{aligned}$$

Тоді об'єм заданого тіла $V = 4V_1 = \frac{32}{3}$ (куб. од.).

Приклад 3. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 24).

Із рівняння параболоїда $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ знаходимо $z'_x = x$, $z'_y = y$.

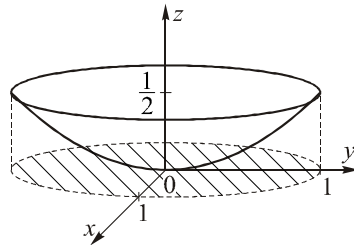


Рис. 24

Областю інтегрування D є круг $x^2 + y^2 = 1$. За формулою (14) знаходимо:

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \iint_{D^*} \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} d(1 + \rho^2) = \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{(1 + \rho^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \pi (2\sqrt{2} - 1) \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти координати центра маси верхньої половини однорідного ($\gamma = 1$) круга $x^2 + y^2 = 9$.

Внаслідок симетрії фігури відносно осі Oy $x_c = 0$. Для знаходження y_c скористаємося формулою (11). Отже $y_c = \frac{M_x}{m}$, де за формулами (9) і (10):

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y \gamma \, dx dy = \iint_{D^*} \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi = \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^3 \rho^2 \, d\rho = \\ &= (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^3 = (\cos 0 - \cos \pi) \cdot 9 = 18; \end{aligned}$$

$$m = \iint_D \gamma \, dx dy = \iint_{D^*} \rho \, d\rho d\varphi = \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 \rho \, d\rho = \varphi \Big|_0^\pi \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9\pi}{2},$$

тоді $y_c = \frac{18}{9\pi/2} = \frac{4}{\pi}$.

Приклад 5. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідної фігури, обмеженої лініями $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

За формулами (12) знаходимо:

$$I_0 = \iiint_D (x^2 + y^2) \gamma \, dx dy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} (x^2 + y^2) dy =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^a dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} = \int_0^a \left(\frac{b}{a} x^2 (a-x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} (a-x^3) \right) dx = \\
 &= \left(\frac{b}{3} x^3 - \frac{b}{4a} x^4 - \frac{b^3}{3a^3} \cdot \frac{(a-x)^4}{4} \right) \bigg|_0^a = \frac{ab(a^2 + b^2)}{12}.
 \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти масу кругового кільця, утвореного колами радіусів r_1 і r_2 ($r_1 < r_2$), якщо в кожній точці поверхнева густина обернено пропорційна квадрату відстані її до центра кільця.

За умовою задачі густина $\gamma(x, y) = \frac{k}{x^2 + y^2}$, де k – коефіцієнт пропорційності, тоді за формулою (9) маса кільця буде:

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \gamma(x, y) dx dy = \iint_D \frac{k}{x^2 + y^2} dx dy = k \iint_{D^*} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^2} = \\
 &= k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\rho}{\rho} = k \cdot \varphi \bigg|_0^{2\pi} \cdot \ln \rho \bigg|_{r_1}^{r_2} = 2\pi k (\ln r_2 - \ln r_1) = 2\pi k \ln \frac{r_2}{r_1}.
 \end{aligned}$$

Приклад 7. Обчислити момент інерції однорідного еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \text{ відносно його великої осі.}$$

Оскільки $a > b$, то знаходимо:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_D y^2 \, dx dy = 4 \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y^2 \, dy = 4 \int_0^a dx \cdot \frac{y^3}{3} \bigg|_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^a \frac{b^3}{a^3} \left(\sqrt{a^2 - x^2} \right)^3 dx = \left[\begin{array}{l} x = a \sin z, \\ dx = a \cos z \, dz, \\ z = \arcsin \frac{x}{a}, \\ z_1 = 0, \, z_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{4b^3}{3a^3} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} \right)^3 \cdot a \cos z \, dz = \frac{4b^3}{3a^3} \int_0^{\pi/2} a^4 \cos^4 z \, dz = \\
 &\frac{4}{3} ab^3 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2z}{2} \right)^2 dz = \frac{ab^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + 2 \cos 2z + \cos^2 2z) dz = \\
 &= \frac{ab^3}{3} \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2 \cos 2z + \frac{1 + \cos 4z}{2} \right) dz =
 \end{aligned}$$

$$\frac{ab^3}{3} \left(z + \sin 2z + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{4} \sin 4z \right) \right) \Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{ab^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \sin \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\pi \right) \right) =$$

$$= \frac{ab^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{ab^3}{3} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi ab^3}{4}.$$

Лекція 3. Означення та обчислення потрійних інтегралів

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в обмеженій замкненій області $G \subset R^3$. Розіб'ємо область G сіткою поверхонь на n частин G_i , які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині G_i візьмемо довільну точку $P_i(\xi_i; \eta_i; \mu_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i; \mu_i) \cdot \Delta V_i, \quad (1)$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по області G . Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(G_i)$ – найбільший з діаметрів областей G_i .

Означення. Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda \rightarrow 0$ має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області G на частини G_i , ні від вибору точок P_i , то ця границя називається потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області G , тобто:

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i; \mu_i) \cdot \Delta V_i, \quad (2)$$

де $f(x, y, z)$ – функція, інтегровна в області G ; G – область інтегрування; x, y, z – змінні інтегрування; $dx dy dz$ (або dV) – елемент об'єму.

Механічний зміст потрійного інтеграла. Якщо по тілу G розподілено масу з об'ємною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$ в точці $(x, y, z) \in G$, то маса m цього тіла знаходиться за формулою:

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz. \quad (3)$$

Геометричний зміст. Якщо всюди в області G $\gamma(x, y, z) \equiv 1$, то з формули (3) випливає формула для обчислення об'єму V тіла G :

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (4)$$

Теорема (достатня умова інтегровності функції). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G , то вона в цій області інтегровна.

Властивості потрійних інтегралів

1. Сталій множник можна винести за знак потрійного інтеграла:

$$\iiint_G C \cdot f(x, y, z) dV = C \cdot \iiint_G f(x, y, z) dV.$$

2. Потрійний інтеграл від суми інтегровних функцій дорівнює сумі потрійних інтегралів від доданків:

$$\iiint_G (f(x, y, z) \pm \varphi(x, y, z)) dV = \iiint_G f(x, y, z) dV \pm \iiint_G \varphi(x, y, z) dV.$$

3. Якщо в області G функція $f(x, y, z) \geq 0$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y, z)$ та $\varphi(x, y, z)$ визначені в області G і $f(x, y, z) \geq \varphi(x, y, z)$, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \geq \iiint_G \varphi(x, y, z) dV.$$

5. (Адитивність потрійного інтеграла). Якщо область інтегрування G розбити на частини G_1 і G_2 , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV.$$

6. (Оцінка потрійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G , яка має об'єм V , то

$$mV \leq \iiint_G f(x, y, z) dV \leq MV,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y, z)$ в області G .

7. (Середнє значення функції). Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області G , яка має об'єм V , то в цій області існує така точка $(x_0; y_0; z_0)$, що

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = f(x_0; y_0; z_0) \cdot V.$$

Величина $f(x_0; y_0; z_0) = \frac{1}{V} \iiint_G f(x, y, z) dV$ – називається

я середнім значенням функції $f(x, y, z)$ в області G .

Обчислення потрійних інтегралів

Нехай область інтегрування G обмежена знизу і зверху поверхнями

$$z = z_1(x, y) \text{ і } z = z_2(x, y),$$

а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz (рис. 25). Область G називається правильною в напрямі осі Oz , якщо область D , яка є проекцією G на площину Oxy і обмежується кривими

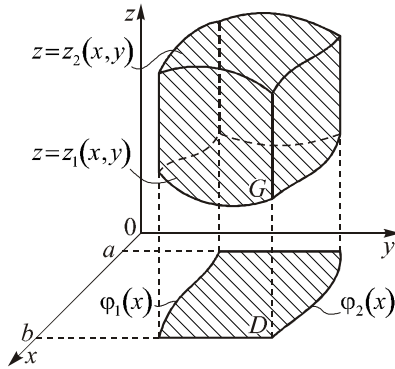


Рис. 25

$$y = \varphi_1(x) \text{ і } y = \varphi_2(x)$$

та прямими $x = a$ і $x = b$, є правильною. Тоді обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів, тобто

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (5)$$

Порядок інтегрування може бути й іншим, наприклад, якщо область G правильна в напрямі осі Ox , тобто

$$G = \{x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z), \psi_1(y) \leq z \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\},$$

де $x_1(y, z)$, $x_2(y, z)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, – неперервні функції, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dz \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx.$$

Приклад 1. Обчислити трикратні інтеграли:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \int_0^a y dy \int_0^h dx \int_0^{a-y} dz = \int_0^a y dy \int_0^h dx \cdot z \Big|_0^{a-y} = \\ & = \int_0^a y(a-y) dy \int_0^h dx = \left(a \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a \cdot x \Big|_0^h = \\ & = \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) \cdot h = \frac{a^3 \cdot h}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_{1-x}^{2-2x} dz = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \cdot z \Big|_{1-x}^{2-2x} = \\ & = \int_0^1 (1-x) dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy = \int_0^1 (1-x) dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned} \text{В)} \quad & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \cdot \sqrt{x+y+z+1} \Big|_0^1 = \\ & = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 (\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}) dy = \\ & = 2 \int_0^1 dx \left(\frac{(x+y+2)^{3/2}}{3/2} - \frac{(x+y+1)^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^1 = \\ & = \frac{4}{3} \int_0^1 \left((x+3)^{3/2} - (x+2)^{3/2} - (x+2)^{3/2} + (x+1)^{3/2} \right) dx = \\ & = \frac{4}{3} \left(\frac{(x+3)^{5/2}}{5/2} - \frac{2 \cdot (x+2)^{5/2}}{5/2} + \frac{(x+1)^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^1 = \\ & = \frac{8}{15} \left(4^{5/2} - 2 \cdot 3^{5/2} + 2^{5/2} - 3^{5/2} + 2 \cdot 2^{5/2} - 1 \right) = \\ & = \frac{8}{15} \left(32 - 3 \cdot 3^{5/2} + 3 \cdot 2^{5/2} - 1 \right) = \frac{8}{15} \left(31 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{г)} \quad & \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyz \, dz = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \, dy \cdot \frac{z^2}{2} \bigg|_0^{1-x-y} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 \, dy = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \left((1-x)^2 - 2y(1-x) + y^2 \right) dy = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} \left((1-x)^2 y - 2y^2(1-x) + y^3 \right) dy = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^1 x \, dx \cdot \left((1-x)^2 \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \cdot (1-x) + \frac{y^4}{4} \right) \bigg|_0^{1-x} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^1 x \left(\frac{(1-x)^4}{2} - \frac{2}{3}(1-x)^4 + \frac{(1-x)^4}{4} \right) dx = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^4}{12} dx = \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) dx = \\
 & = \frac{1}{24} \int_0^1 (x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5) dx =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{24} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^4}{2} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{24} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{720}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{д)} \quad & \int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)} dz = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} \frac{dy}{x+y-e} \int_e^{x+y+e} \ln(z-x-y) dz = \\
 &= \left[\int \ln t dt = t(\ln t - 1) + C \right] = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} \frac{dy}{x+y-e} \cdot (z-x-y)(\ln(z-x-y)-1) \Bigg|_e^{x+y+e} = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} \frac{dy}{x+y-e} \cdot (e(\ln e - 1) - (e-x-y)(\ln(e-x-y)-1)) = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} \frac{dy}{x+y-e} \cdot (x+y-e)(\ln(e-x-y)-1) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \int_0^{e-x-1} (\ln(e-x-y)-1) dy = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \cdot \left((e-x-y)(\ln(e-x-y)-1) - y \right) \Big|_0^{e-x-1} = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \cdot \left(-(\ln 1 - 1) - e + x + 1 + (e-x)(\ln(e-x)-1) \right) = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{dx}{x-e} \cdot (1 - e + x + 1 + (e-x)(\ln(e-x)-1)) = \\
 &= \int_0^{e-1} \frac{2-e+x}{x-e} dx - \int_0^{e-1} (\ln(e-x)-1) dx = \\
 &= \int_0^{e-1} \left(\frac{2}{x-e} + 1 \right) dx - \int_0^{e-1} \ln(e-x) dx + \int_0^{e-1} dx = \\
 &= \left(2 \ln|x-e| + 2x + (e-x)(\ln(e-x)-1) \right) \Big|_0^{e-1} = \\
 &= 2 \ln 1 + 2e - 2 + \ln 1 - 1 - (2 \ln e + 0 + e(\ln e - 1)) = \\
 &= 2e - 2 - 1 - 2 = 2e - 5.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити потрійні інтеграли:

а) $I_1 = \iiint_G (2x + 3y - z) \, dx dy dz;$

$G : \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad z = 3,$
 $x + y = 2$ (рис. 26).

$$I_1 = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^3 (2x + 3y - z) \, dz =$$

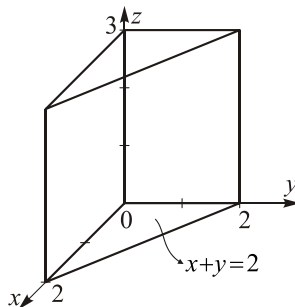


Рис. 26

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \left((2x + 3y)z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^3 =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(6x + 9y - \frac{9}{2} \right) dy = \int_0^2 dx \left(\left(6x - \frac{9}{2} \right) y + \frac{9}{2} y^2 \right) \Big|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 \left(\left(6x - \frac{9}{2} \right) (2-x) + \frac{9}{2} (2-x)^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(12x - 6x^2 - 9 + \frac{9}{2}x + 18 - 18x + \frac{9}{2}x^2 \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + 9x \right) \Big|_0^2 = -\frac{8}{2} - 3 + 18 = 11.$$

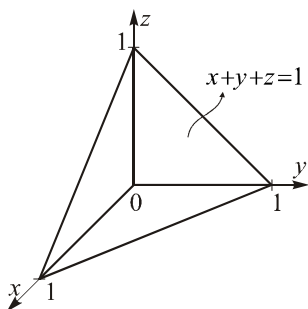


Рис. 27

$$\text{б) } I_2 = \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3};$$

$G: x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$
(рис. 27).

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \cdot \frac{1}{(x+y+z+1)^2} \Big|_0^{1-x-y} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{4} y + \frac{1}{x+y+1} \right) \Big|_0^{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} x - \frac{x^2}{8} - \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2 \right) = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

$$\text{в)} I_3 = \iiint_G (4+z) \, dx dy dz;$$

$G : y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 2$
(рис. 28).

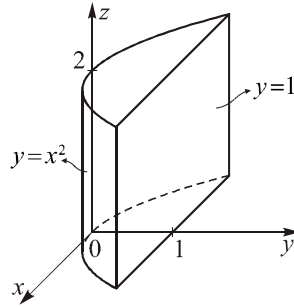


Рис. 28

$$I_3 = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^2 (4+z) \, dz =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \left(4z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 10 \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy = 10 \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx =$$

$$= 10 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 10 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) = 20 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{40}{3}.$$

$$\text{г)} I_4 = \iiint_G xy \, dx dy dz; \quad G : z = xy, \quad x + y = 1, \quad z = 0.$$

$$I_4 = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \, dy \int_0^{xy} dz = \int_0^1 x^2 \, dx \int_0^{1-x} y^2 \, dy = \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 \, dx \cdot (1-x)^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 x^2 (1 - 3x + 3x^2 - x^3) \, dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 - 3x^3 + 3x^4 - x^5) \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{180}.$$

$$\text{д) } I_5 = \iiint_G y \cos(z+x) dx dy dz; \quad G: y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$x+z = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_0^{\pi/2-x} \cos(z+x) dz = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \cdot \sin(z+x) \Big|_0^{\pi/2-x} = \\ &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy = \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (x - x \sin x) dx = \\ &= \left[\begin{array}{ll} x = u, & dx = du, \\ \sin x dx = dv, & v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + x \cdot \cos x \right) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Лекція 4. Циліндричні та сферичні координати.
Застосування потрійного інтеграла**

Нехай обмежена замкнена область G взаємооднозначно відображається на область G^* за допомогою неперервно диференційовних функцій $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, якобіан J в області G^* не дорівнює нулю:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

і $f(x, y, z)$ – неперервна в G функція, то справедлива формула:

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \\ = \iiint_{G^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J| \, du dv dw. \end{aligned} \quad (1)$$

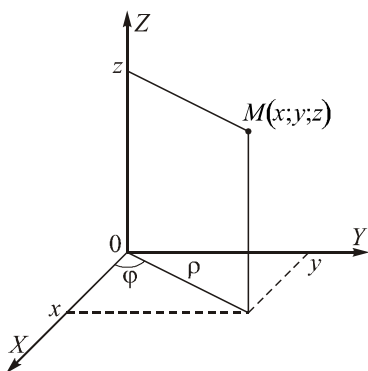


Рис. 29

При переході від прямокутних координат x, y, z до циліндричних ρ, φ, z (рис. 29), пов'язаних з x, y, z співвідношеннями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = z;$$

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$-\infty < z < +\infty,$$

якобіан перетворення $J = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$

З формули (1) знаходимо потрібний інтеграл у циліндричних координатах:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2)$$

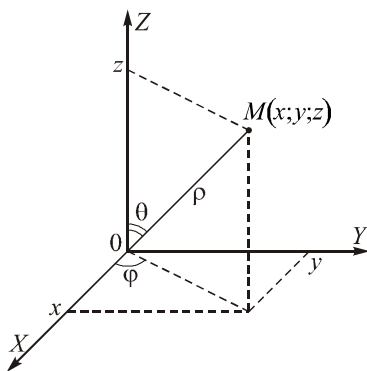


Рис. 30

При переході від прямокутних координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ (рис. 30), пов'язаних з x, y, z формулами

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \theta;$$

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$0 \leq \theta < \pi,$$

якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

З формули (1) знаходимо потрібний інтеграл у сферичних координатах:

$$\begin{aligned} & \iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \\ & = \iiint_{G^*} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta. \quad (3) \end{aligned}$$

Приклад 1. Обчислити $I = \iiint_G (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, де об-

ласть G обмежена поверхнями $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ і $z = 2$.

Проекцією області інтегрування G на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 = 4$, рівняння якого в полярній системі координат $\rho = 2$. Застосуємо формулу (2) переходу до циліндричних координат, тоді

$$I = \iiint_{G^*} \rho^3 \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \int_{\rho^2/2}^2 dz = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^2 \rho^3 \left(2 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^2 \left(2\rho^3 - \frac{\rho^5}{2} \right) d\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^4}{2} - \frac{\rho^6}{12} \right) \Big|_0^2 = \\
 &= 2\pi \left(8 - \frac{64}{12} \right) = 2\pi \left(8 - \frac{16}{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $I = \iiint_G \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, де область G

розміщена в першому октанті і обмежена конусом $4z^2 = x^2 + y^2$ і площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{G^*} \frac{\rho^3 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{z}} d\rho d\varphi dz = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\rho/2}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \cdot 2\sqrt{z} \Big|_{\rho/2}^1 = \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \left(1 - \sqrt{\frac{\rho}{2}} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \cos 2\varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^2 \left(\rho^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^{7/2} \right) d\rho = \\
 &= -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) \cdot \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{2}{9\sqrt{2}} \rho^{9/2} \right) \Big|_0^2 = \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot (-2) \left(4 - \frac{\sqrt{2}}{9} \cdot \sqrt{2^9} \right) = 4 - \frac{32}{9} = \frac{4}{9}.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити $I = \iiint_G dx dy dz$, де область G – куля

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Застосуємо формулу (3) переходу до сферичних координат:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{G^*} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^R \rho^2 \, d\rho = \\ &= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^\pi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = \\ &= 2\pi(\cos 0 - \cos \pi) \cdot \frac{R^3}{3} = 4\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити $I = \iiint_G (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, G визначається нерівностями $z \geq 0$, $r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{G^*} (\rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \iiint_{G^*} \rho^4 \sin^3 \theta \, d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta \int_r^R \rho^4 \, d\rho = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_r^R = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\pi}{5} (R^5 - r^5) \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \\
 &= \frac{2\pi}{5} (R^5 - r^5) \cdot \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{2\pi}{5} (R^5 - r^5) \cdot \left(0 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right) = \frac{2\pi}{5} (R^5 - r^5) \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{15} (R^5 - r^5)
 \end{aligned}$$

Застосування потрійного інтеграла до розв'язування задач геометрії та механіки

Якщо задано тіло, яке є обмеженою і замкнутою областю G , що має об'єм V , то згідно з геометричним змістом потрійного інтеграла:

$$V = \iiint_G dx dy dz. \quad (4)$$

Нехай G – обмежена замкнена область простору R^3 , яку займає матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ – неперервна в області G функція, тоді згідно з механічним змістом потрійного інтеграла маса цього тіла:

$$m = \iiint_G \gamma dV. \quad (5)$$

Моменти інерції тіла відносно координатних осей Ox , Oy , Oz відповідно дорівнюють

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) \gamma \, dV; \quad I_y = \iiint_G (x^2 + z^2) \gamma \, dV;$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) \gamma \, dV. \quad (6)$$

Моменти інерції відносно координатних площин Oxy , Oxz , Oyz відповідно обчислюються за формулами

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \gamma \, dV; \quad I_{xz} = \iiint_G y^2 \gamma \, dV;$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \gamma \, dV. \quad (7)$$

Момент інерції тіла відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \gamma \, dV. \quad (8)$$

Координати центра маси тіла визначаються за формулами

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m}. \quad (9)$$

де

$$M_{xy} = \iiint_G z \gamma \, dV, \quad M_{xz} = \iiint_G y \gamma \, dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_G x \gamma \, dV \quad (10)$$

– це статичні моменти тіла відносно координатних площин Oxy , Oxz , Oyz відповідно.

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндрами $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ і площинами $x = -1$, $x = 2$.

Циліндри $z = 4 - y^2$ і $z = y^2 + 2$, твірні яких паралельні осі Ox , перетинаються по прямих: $4 - y^2 = y^2 + 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Тоді шуканий об'єм знаходимо за формулою (4):

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz = \int_{-1}^2 dx \int_{-1}^1 dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = x \Big|_{-1}^2 \cdot \int_{-1}^1 (2 - 2y^2) dy = \\ &= 3 \cdot 2 \left(y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 6 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 8 \text{ (куб. од.)} \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдами $z = x^2 + y^2$, $z = x^2 + 2y^2$ і площинами $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

Об'єм заданого тіла за формулою (4) буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy = \int_0^1 dx \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_x^{2x} = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (8x^3 - x^3) dx = \frac{7}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{7}{12} \text{ (куб. од.)} \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

Задане тіло обмежується знизу конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і зверху параболоїдом $z = x^2 + y^2$, які перетинаються по площині, проекцією якої на площину Oxy є круг $x^2 + y^2 = 1$ ($\rho = 1$ полярне рівняння). Обчислимо об'єм тіла за формулою (4), перейшовши до циліндричних координат:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz = \iiint_{G^*} \rho \, d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} dz = \\ &= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 \rho (\rho - \rho^2) d\rho = 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = 2\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ (куб. од.)} \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти масу куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, якщо густина в кожній його точці $\gamma(x, y, z) = x + y + z$.

Обчислимо масу заданого тіла за формулою (5):

$$\begin{aligned} m &= \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G (x + y + z) dx dy dz = \\ &= \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \cdot \left((x + y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^a dx \int_0^a \left(ay + ax + \frac{a^2}{2} \right) dy = \int_0^a dx \cdot \left(\frac{ay^2}{2} + \left(ax + \frac{a^2}{2} \right) \cdot y \right) \Big|_0^a = \\
 &= \int_0^a \left(\frac{a^3}{2} + a^2x + \frac{a^3}{2} \right) dx = \left(\frac{a^2x^2}{2} + a^3x \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{2} + a^4 = \frac{3a^4}{2}.
 \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти масу тіла, обмеженого циліндричною поверхнею $x^2 = 2y$ і площинами $y + z = 1$, $2y + z = 2$, якщо в кожній точці тіла густина дорівнює ординаті точки.

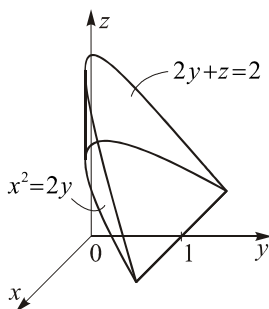


Рис. 31

Проекцією заданого тіла (рис. 31) на площину Oxy є частина параболу

$y = \frac{x^2}{2}$, яка відтинається прямою

$y = 1$, звідки $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Тоді за формулою (5) знаходимо масу тіла:

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_G \gamma \, dx \, dy \, dz = \iiint_G y \, dx \, dy \, dz = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2/2}^1 y \, dy \int_{1-y}^{2-2y} dz = \\
 &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2/2}^1 y(1-y) \, dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2/2}^1 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{24} \right) \right) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{24} \right) dx = \\
 &= \left(\frac{x}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{148} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{40} + \frac{8\sqrt{2}}{148} \right) = \\
 &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{21} \right) = \frac{8\sqrt{2}}{35}.
 \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти момент інерції куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ відносно його ребра.

Моменти інерції куба з ребром рівним a відносно кожного з його ребер будуть однаковими. Знайдемо нехай I_x , застосовуючи формулу (6):

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iiint_G (y^2 + z^2) \rho \, dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (y^2 + z^2) dz = \\
 &= \int_0^a dx \int_0^a dy \left(y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a = \int_0^a dx \int_0^a \left(ay^2 + \frac{a^3}{3} \right) dy = \\
 &= \int_0^a dx \left(\frac{ay^3}{3} + \frac{a^3}{3} y \right) \Big|_0^a = \int_0^a \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) dx = \frac{2a^4}{3} \cdot x \Big|_0^a = \frac{2a^5}{3}.
 \end{aligned}$$

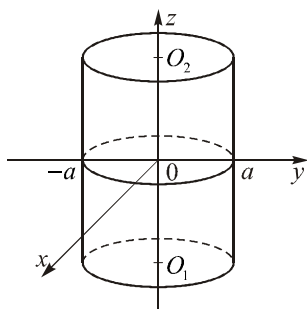


Рис. 32

Приклад 7. Знайти момент інерції кругового циліндра, висота якого $O_1O_2 = h$ і радіус основи a , відносно осі, яка є діаметром основи циліндра.

Нехай висота циліндра $O_1O_2 \in Oz$ (рис. 32), тоді діаметр належить осі Oy . Отже, знайдемо момент інерції заданого циліндра відносно осі Oy :

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iiint_G (x^2 + z^2) \rho \, dx dy dz = \iiint_{G^*} (\rho^2 \cos^2 \varphi + z^2) \cdot \rho \, d\rho d\varphi dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \, d\rho \int_0^h (\rho^2 \cos^2 \varphi + z^2) dz = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \, d\rho \left(\rho^2 z \cos^2 \varphi + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \, d\rho \left(\rho^2 h \cos^2 \varphi + \frac{h^3}{3} \right) = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\rho^3 h \cos^2 \varphi + \frac{h^3}{3} \rho \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} h \cos^2 \varphi + \frac{h^3}{3} \cdot \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^a = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^4}{4} h \cos^2 \varphi + \frac{h^3 a^2}{6} \right) d\varphi = \frac{a^4 h}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi + \frac{a^2 h^3}{6} \Big|_0^{2\pi} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^4 h}{8} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} + \frac{\pi a^2 h^3}{3} = \frac{a^4 h}{8} \cdot 2\pi + \frac{\pi a^2 h^3}{3} = \\
 &= \frac{\pi a^4 h}{4} + \frac{\pi a^2 h^3}{3} = \frac{\pi a^2 h}{12} (3a^2 + 4h^2)
 \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти координати центра маси однорідного ($\gamma = 1$) призматичного тіла, обмеженого площинами $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 3$, $x + 2z = 3$ (рис. 33).

Застосувавши формули (9) і (10), знаходимо:

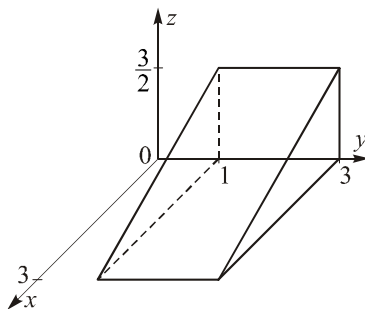


Рис. 33

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_G \gamma \, dx \, dy \, dz = \\
 &= \int_1^3 dy \int_0^{3/2} dz \int_0^{3-2z} dx = y \Big|_1^3 \cdot \int_0^{3/2} (3-2z) \, dz = 2 \left(3z - z^2 \right) \Big|_0^{3/2} = \\
 &= 2 \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2};
 \end{aligned}$$

$$M_{yz} = \iiint_G x \gamma \, dx \, dy \, dz = \int_1^3 dy \int_0^{3/2} dz \int_0^{3-2z} x \, dx = 2 \int_0^{3/2} dz \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{3-2z} =$$

$$= \int_0^{3/2} (9 - 12z + z^2) dz = \left(9z - 6z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{3/2} = \frac{27}{2} - \frac{54}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{2};$$

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_G y \gamma \, dx dy dz = \int_1^3 y \, dy \int_0^{3/2} dz \int_0^{3-2z} dx = \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 \cdot \int_0^{3/2} (3 - 2z) dz = \\ &= \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) \left(3z - z^2 \right) \Big|_0^{3/2} = 4 \left(\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right) = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_G z \gamma \, dx dy dz = \int_1^3 dy \int_0^{3/2} z \, dz \int_0^{3-2z} dx = 2 \int_0^{3/2} z(3 - 2z) dz = \\ &= 2 \left(\frac{3z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} \right) \Big|_0^{3/2} = 2 \left(\frac{27}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{8} \right) = \frac{27}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{4}; \end{aligned}$$

тоді $x_C = 1$, $y_C = 2$, $z_C = \frac{1}{2}$.

Приклад 9. Знайти координати центра маси тіла, обмеженого поверхнями $z^2 = xy$, $x = 5$, $y = 5$, $z = 0$.

Знаходимо масу і статичні моменти заданого тіла:

$$m = \iiint_G dx dy dz = \int_0^5 dx \int_0^5 dy \int_0^{\sqrt{xy}} dz = \int_0^5 \sqrt{x} \, dx \int_0^5 \sqrt{y} \, dy =$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^5 \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} \Big|_0^5 = \frac{4}{9} \cdot 5^{3/2} \cdot 5^{3/2} = \frac{4}{9} \cdot 125;$$

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_G x \, dx \, dy \, dz = \int_0^5 x \sqrt{x} \, dx \int_0^5 \sqrt{y} \, dy = \frac{2}{5} \cdot x^{5/2} \Big|_0^5 \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{3/2} \Big|_0^5 = \\ &= \frac{4}{15} \cdot 5^{5/2} \cdot 5^{3/2} = \frac{4}{15} \cdot 5^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_G y \, dx \, dy \, dz = \int_0^5 \sqrt{x} \, dx \int_0^5 y \sqrt{y} \, dy = \\ &= \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \Big|_0^5 \cdot \frac{2}{5} \cdot y^{5/2} \Big|_0^5 = \frac{4}{15} \cdot 5^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \int_0^5 dx \int_0^5 dy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{xy}} = \frac{1}{2} \int_0^5 x \, dx \int_0^5 y \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{1}{8} \cdot 5^4. \end{aligned}$$

За формулами (9) знаходимо координати центра маси:

$$x_C = y_C = 3; \quad z_C = \frac{45}{32}.$$

**Лекція 5. Криволінійний інтеграл I роду:
означення та обчислення**

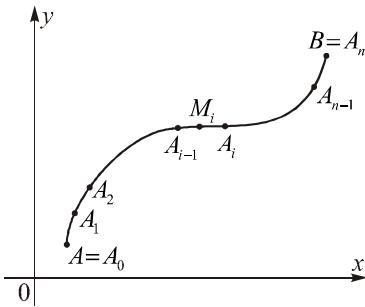


Рис. 34

Нехай у площині Oxy задано гладку криву AB (рис. 34), на якій визначено обмежену функцію $f(x, y)$.

Неперервна крива $x = x(t)$, $y = y(t)$ називається *гладкою* на відрізку $\alpha \leq t \leq \beta$, якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ мають на $[\alpha; \beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ і $y'(t)$,

які одночасно не дорівнюють нулю.

Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин.

На деякій дузі $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ виберемо довільну точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i, \quad (1)$$

де Δl_i – довжина дуги $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$.

Сума (1) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x, y)$ по кривій AB . Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$ найбільша з довжин окремих дуг $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$.

Означення. Якщо інтегральна сума (1) при $\lambda \rightarrow 0$ має границю, яка не залежить від розбиття кривої AB і від вибору точок M_i , то цю границю називають *криволінійним інтегралом I роду (по довжині дуги)* від функції $f(x, y)$ по кривій AB , тобто

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i) \Delta l_i. \quad (2)$$

Якщо границя (2) існує, то функція $f(x, y)$ називається інтегровною на кривій AB ; AB – контур інтегрування; A – початкова, B – кінцева точки інтегрування.

Геометричний зміст криволінійного інтеграла I роду:

$$L = \int_{AB} dl \quad \text{– довжина дуги } AB.$$

Фізичний зміст криволінійного інтеграла I роду:

$$m = \int_{AB} \gamma(x, y) dl \quad \text{– маса неоднорідної матеріальної}$$

кривої AB з лінійною густиною $\gamma(x, y)$.

Основні властивості криволінійного інтеграла I роду

1. Криволінійний інтеграл I роду не залежить від напрямку шляху інтегрування:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl.$$

$$2. \int_L (f_1(x, y) \pm f_2(x, y)) dl = \int_L f_1(x, y) dl \pm \int_L f_2(x, y) dl.$$

$$3. \int_L C \cdot f(x, y) dl = C \int_L f(x, y) dl, \quad C - \text{const.}$$

4. Якщо контур інтегрування L розбито на дві частини L_1 і L_2 , то

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl.$$

Обчислення криволінійних інтегралів I роду

1. Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, де функція $y(x)$ неперервна разом зі своєю похідною $y'(x)$ на $[a; b]$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (3)$$

2. Якщо крива AB задається рівнянням $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$ та функції $x(y)$ і $x'(y)$ неперервні на $[c; d]$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (4)$$

3. Якщо крива AB задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ і функції $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ неперервні на $[\alpha; \beta]$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (5)$$

4. У випадку просторової кривої AB , яку задано рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ – функції, які є неперервними разом зі своїми першими похідними по параметру t на відрізку $[\alpha; \beta]$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(x, y, z) dl &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L (x - y) dl$, де L – відрізок прямої

від т. $A(0; 0)$ до т. $B(4; 3)$.

Складемо рівняння прямої AB : $y = \frac{3}{4}x$, тоді $y' = \frac{3}{4}$. Застосуємо формулу (3):

$$\int_L (x - y) dl = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x \right) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \frac{5}{16} \int_0^4 x dx = \frac{5}{32} x^2 \Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл

$$I = \int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl \text{ між точками } E(-1; 0) \text{ і } H(0; 1):$$

а) по прямій EH ;

б) по дузі астріїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

а) Рівняння прямої EH : $x = y - 1$, $x' = 1$, тоді за формулою (4):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (4\sqrt[3]{y-1} - 3\sqrt{y}) \cdot \sqrt{2} dy = \sqrt{2} \left(\frac{4(y-1)^{4/3}}{4/3} - \frac{3y^{3/2}}{3/2} \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= \sqrt{2} \left(3\sqrt[3]{(y-1)^4} - 2\sqrt{y^3} \right) \Bigg|_0^1 = \sqrt{2}(-2-3) = -5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

б) Якщо $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, то $x'_t = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)$, $y'_t = 3\sin^2 t \cdot \cos t$. Тоді за формулою (5) знаходимо спочатку:

$$dl = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt = 3\sin t \cos t dt,$$

тоді

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_{\pi}^{\pi/2} \left(4\sqrt[3]{\cos^3 t} - 3\sqrt{\sin^3 t} \right) \sin t \cdot \cos t dt = \\ &= 12 \int_{\pi}^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \sin t dt - 9 \int_{\pi}^{\pi/2} \sin^{5/2} t \cdot \cos t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -12 \int_{\pi}^{\pi/2} \cos^2 t \, d(\cos t) - 9 \int_{\pi}^{\pi/2} \sin^{5/2} t \, d(\sin t) = \\
 &= -4 \cos^3 t \Big|_{\pi}^{\pi/2} - 9 \frac{\sin^{7/2} t}{7/2} \Big|_{\pi}^{\pi/2} = \\
 &= -4 \left(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 \pi \right) - \frac{18}{7} \left(\sin^{7/2} \frac{\pi}{2} - \sin^{7/2} \pi \right) = \\
 &= -4(0+1) - \frac{18}{7}(1-0) = -4 - \frac{18}{7} = -4 - 2\frac{4}{7} = -6\frac{4}{7}.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити $\int_L (x^2 + y^2)^n dl$, де L – коло; $x = a \cos t$,

$y = a \sin t$.

Оскільки

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = a \cos t, \quad dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} \, dt = a \, dt,$$

тоді за формулою (5)

$$\begin{aligned}
 \int_L (x^2 + y^2)^n dl &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^n a \, dt = \int_0^{2\pi} (a^2)^n \cdot a \, dt = \\
 &= a^{2n+1} \int_0^{2\pi} dt = a^{2n+1} \cdot t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \cdot a^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити $I = \int_L \frac{dl}{x^2 + y^2 + z^2}$, де L – перший

виток гвинтової лінії, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

Знайдемо

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = a \cos t, \quad z'_t = b,$$

$$dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt,$$

тоді за формулою (6)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} dt}{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2 t^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bt}{a} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}. \end{aligned}$$

Приклад 5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L xy \, dl$, де

L – чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, яка лежить у першому квадранті.

Виразимо з рівняння еліпса змінну x :

$$x^2 = a^2 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

тоді

$$x'(y) = \frac{a}{b} \cdot \frac{(-2y)}{2\sqrt{b^2 - y^2}} dy = -\frac{a}{b} \cdot \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}} dy.$$

За формулою (5) обчислюємо інтеграл:

$$\begin{aligned}
 \int_L xy \, dl &= \int_0^b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \cdot y \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^2}{b^2 - y^2}} \, dy = \\
 &= \frac{a}{b} \int_0^b y \cdot \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \sqrt{\frac{b^2(b^2 - y^2) + a^2 y^2}{b^2 \cdot (b^2 - y^2)}} \, dy = \\
 &= \frac{a}{b} \int_0^b y \cdot \frac{\sqrt{b^4 - b^2 y^2 + a^2 y^2}}{b} \, dy = \frac{a}{b^2} \int_0^b y \cdot \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2) y^2} \, dy = \\
 &= \frac{a}{b^2} \cdot \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \int_0^b 2(a^2 - b^2) \cdot y \cdot \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2) y^2} \, dy = \\
 &= \frac{a}{2b^2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{(b^4 + (a^2 - b^2) \cdot y^2)^{3/2}}{3/2} \Bigg|_0^b = \\
 &= \frac{a}{3b^2(a^2 - b^2)} \left((b^4 + a^2 b^2 - b^4)^{3/2} - (b^4)^{3/2} \right) = \\
 &= \frac{a}{3b^2(a^2 - b^2)} (a^3 b^3 - b^6) = \frac{ab^3(a^3 - b^3)}{3b^2(a^2 - b^2)} = \\
 &= \frac{ab(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3(a-b)(a+b)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}.
 \end{aligned}$$

Застосування криволінійних інтегралів I роду

Нехай у площині Oxy задано гладку криву AB , на якій визначено неперервну функцію $f(x, y)$. Тоді *площу* P *циліндричної поверхні*, заданої функцією $z = f(x, y)$, обчислюють за формулою

$$P = \int_{AB} f(x, y) dl, \quad (7)$$

а довжину L кривої AB –

$$L = \int_{AB} dl. \quad (8)$$

Якщо вздовж неоднорідної матеріальної кривої L розподілено масу з лінійною густиною $\gamma(x, y)$, тоді *маса кривої* L обчислюється за формулою:

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl. \quad (9)$$

Координати центра маси кривої L знаходять за формулами:

$$x_C = \frac{M_y}{m}, \quad y_C = \frac{M_x}{m}, \quad (10)$$

де

$$M_x = \int_L y\gamma(x, y) dl, \quad M_y = \int_L x\gamma(x, y) dl \quad (11)$$

– *статичні моменти кривої* L відносно осей Ox і Oy відповідно.

Моменти інерції кривої L відносно осей Ox , Oy і початку координат відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_L y^2 \gamma(x, y) dl, \quad I_y = \int_L x^2 \gamma(x, y) dl, \\ I_0 &= \int_L (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dl. \end{aligned} \quad (12)$$

Приклад 1. Знайти площу бічної поверхні параболічного циліндра $y = \frac{3}{8}x^2$, обмеженого площинами $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

Розглянемо циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі Oz ; основа – контур інтегрування – це дуга AB параболи $y = \frac{3}{8}x^2$, що сполучає точки $A(0; 0)$ і $B(4; 6)$; і висотами, які рівні значенням підінтегральної функції. Отже, за формулою (7):

$$\begin{aligned} P &= \int_{AB} f(x, y) dl = \int_0^4 x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} dx = \int_0^4 x \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 x \sqrt{16 + 9x^2} dx = \frac{1}{72} \int_0^4 18x \cdot \sqrt{16 + 9x^2} dx = \\ &= \frac{1}{72} \int_0^4 (16 + 9x^2)^{1/2} d(16 + 9x^2) = \frac{1}{72} \cdot \frac{2}{3} (16 + 9x^2)^{3/2} \Big|_0^4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{108} \left((16 + 9 \cdot 16)^{3/2} - 16^{3/2} \right) = \frac{1}{108} \cdot 16^{3/2} (10^{3/2} - 1) = \\
 &= \frac{1}{108} \cdot 4^3 (10\sqrt{10} - 1) = \frac{64}{108} (10\sqrt{10} - 1) = \frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1).
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти довжину кардіоїди

$$x = 2a \cos t - a \cos 2t, \quad y = 2a \sin t - a \sin 2t.$$

Знаходимо похідні:

$$x'_t = -2a \sin t + 2a \sin 2t, \quad y'_t = 2a \cos t - 2a \cos 2t,$$

тоді

$$\begin{aligned}
 dl &= \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \\
 &= 2a \sqrt{\sin^2 t - 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t} dt = \\
 &= 2a \sqrt{2 - 2(\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t)} dt = \\
 &= 2a \sqrt{2 - 2 \cos t} = 2a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\
 &= 2a \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4a \cdot \sin \frac{t}{2} dt.
 \end{aligned}$$

Тоді за формулою (8) довжина кардіоїди:

$$L = \int_{AB} dl = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -8a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -8a(\cos \pi - \cos 0) = 16a.$$

Приклад 3. Знайти довжину дуги AB кривої

$$e^{2y}(e^{2x} - 1) = e^{2x} + 1; \quad x_A = 1, x_B = 2.$$

Диференціюємо рівняння заданої кривої, попередньо прологарифмувавши його:

$$\ln e^{2y} + \ln(e^{2x} - 1) = \ln(e^{2x} + 1); \quad 2y = \ln(e^{2x} + 1) - \ln(e^{2x} - 1);$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right);$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x} - 1) - 2e^{2x}(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} - 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{2x} + 1} \cdot \frac{2e^{4x} - 2e^{2x} - 2e^{4x} - 2e^{2x}}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4e^{2x}}{e^{4x} - 1} = -\frac{2e^{2x}}{e^{4x} - 1}. \end{aligned}$$

Застосуємо формулу (8):

$$\begin{aligned} L &= \int_{AB} dl = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4e^{4x}}{(e^{4x} - 1)^2}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{e^{8x} - 2e^{4x} + 1 + 4e^{4x}}{(e^{4x} - 1)^2}} dx = \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{(e^{4x} + 1)^2}{(e^{4x} - 1)^2}} dx = \int_1^2 \frac{e^{4x} + 1}{e^{4x} - 1} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{e^{4x} - 1}\right) dx = \\ &= x \Big|_1^2 + I_1 = 1 + I_1; \end{aligned}$$

$$I_1 = 2 \int_1^2 \frac{dx}{e^{4x} - 1} = \left[\begin{array}{l} e^{4x} - 1 = t; \quad e^{4x} = t + 1; \\ 4x = \ln(t + 1); \quad x = \frac{1}{4} \ln(t + 1); \\ dx = \frac{dt}{4(t + 1)}; \quad t_1 = e^4 - 1, \quad t_2 = e^8 - 1 \end{array} \right] =$$

$$2 \int_{e^4 - 1}^{e^8 - 1} \frac{dt}{4(t + 1) \cdot t} = \frac{1}{2} \int_{e^4 - 1}^{e^8 - 1} \frac{dt}{t(t + 1)};$$

$$\frac{1}{t(t + 1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t + 1} \Rightarrow A = 1, \quad B = -1 \Rightarrow \frac{1}{t(t + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1};$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{e^4 - 1}^{e^8 - 1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln|t| - \ln|t + 1| \right) \Big|_{e^4 - 1}^{e^8 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln(e^8 - 1) - \ln e^8 - \ln(e^4 - 1) + \ln e^4 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{e^8 - 1}{e^4 - 1} - 8 + 4 \right) = \frac{1}{2} \left(\ln(e^4 + 1) - 4 \right).$$

Знаходимо довжину дуги кривої:

$$L = 1 + \frac{1}{2} \ln(e^4 + 1) - 2 = \frac{1}{2} \ln(e^4 + 1) - 1 = \frac{1}{2} \ln(e^4 + 1) - \ln e =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^4 + 1) - \frac{1}{2} \ln e^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{e^4 + 1}{e^2} = \frac{1}{2} \ln(e^2 + e^{-2}).$$

Приклад 4. Знайти масу дуги кола $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$), якщо лінійна густина в кожній точці дорівнює ординаті точки.

За умовою $\gamma(x, y) = y$, тоді за формулою (9) одержимо:

$$\begin{aligned} m &= \int_L \gamma(x, y) \, dl = \int_L y \, dl = \int_0^\pi \sin t \cdot \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt = \\ &= -\cos t \Big|_0^\pi = \cos 0 - \cos \pi = 2. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти масу дуги AB кривої $y = \ln x$, якщо в кожній її точці лінійна густина пропорційна квадрату абсциси точки; $x_A = 1$, $x_B = 3$.

Оскільки $\gamma(x, y) = kx^2$, $y = \ln x$ і $y' = \frac{1}{x}$, тоді, застосувавши формулу (9), маємо:

$$\begin{aligned} m &= \int_L \gamma(x, y) \, dl = \int_L kx^2 \, dl = \\ &= k \int_1^3 x^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \, dx = k \int_1^3 x \sqrt{x^2 + 1} \, dx = \\ &= \frac{k}{2} \int_1^3 \sqrt{1 + x^2} \, d(1 + x^2) = \frac{k}{2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_1^3 = \\ &= \frac{k}{3} (10^{3/2} - 2^{3/2}) = \frac{k}{3} (10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчислити координати центра маси піварки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Знайдемо за формулами (11) статичні моменти лінії відносно осей Ox і Oy відповідно, розрахувавши спочатку dl :

$$dl = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a\sqrt{2 - 2\cos t} dt =$$

$$2a\sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt;$$

$$M_x = \int_L \gamma(x, y)y dl = a \int_0^\pi (1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 2a^2 \int_0^\pi \left(1 - 2\cos^2 \frac{t}{2} + 1\right) \cdot \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= 4a^2 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt - 4a^2 \int_0^\pi \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt =$$

$$= -8a^2 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + 8a^2 \int_0^\pi \cos^2 \frac{t}{2} d\left(\cos \frac{t}{2}\right) =$$

$$= 8a^2 + \frac{8a^2}{3} \cdot \cos^3 \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = 8a^2 - \frac{8}{3}a^2 = \frac{16a^2}{3},$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_L \gamma(x, y) x \, dl = a \int_0^\pi (t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} \, dt = \\
 &= 2a^2 \int_0^\pi t \cdot \sin \frac{t}{2} \, dt - 4a^2 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \, dt = \\
 &= 2a^2 \cdot I_1 - 8a^2 \int_0^\pi \sin^2 \frac{t}{2} \, d\left(\sin \frac{t}{2}\right) = \\
 &= 8a^2 - 8a^2 \cdot \frac{1}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = 8a^2 - \frac{8a^2}{3} = \frac{16a^2}{3},
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\pi t \cdot \sin \frac{t}{2} \, dt = \left[\begin{array}{ll} t = u, & dt = du, \\ \sin \frac{t}{2} dt = dv, & v = -2 \cos \frac{t}{2} \end{array} \right] = \\
 &= -2t \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + 2 \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} \, dt = 4 \sin \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = 4.
 \end{aligned}$$

Маса лінії:

$$\begin{aligned}
 m &= \int_L \gamma(x, y) \, dl = 2a \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} \, dt = -4a \cdot \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi = \\
 &= -4a \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 4a.
 \end{aligned}$$

Тоді, застосувавши формули (10), обчислюємо координати центра маси лінії:

$$x_C = y_C = \frac{16a^2}{3 \cdot 4a} = \frac{4a}{3}.$$

Приклад 7. Обчислити моменти інерції відносно координатних осей першого витка гвинтової лінії $x = a \cos t$, $y = a \sin t$,

$$z = \frac{h}{2\pi} t.$$

Знаходимо моменти інерції за формулами (12), причому

$$dl = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt = \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt,$$

тоді

$$\begin{aligned} I_x &= \int_L \gamma(y^2 + z^2) dl = \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} (1 - \cos 2t) + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot t^2 \right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} \cdot 2\pi + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{8\pi^3}{3} \right) = \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_L \gamma(x^2 + z^2) dl = \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) dt = \\
 &= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \right) + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{t^3}{3} \right) \bigg|_0^{2\pi} = \\
 &= \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_L \gamma(x^2 + y^2) dl = \\
 &= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) dt = \\
 &= \frac{a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \cdot t \bigg|_0^{2\pi} = a^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.
 \end{aligned}$$

**Лекція 6. Обчислення та застосування
криволінійних інтегралів II роду. Формула Гріна.
Інтегрування повних диференціалів**

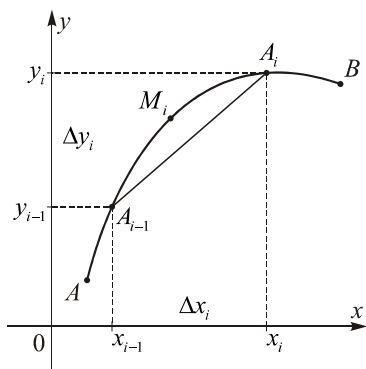


Рис. 35

Нехай у площині Oxy задано гладку криву AB (рис. 35), на якій визначено обмежену функцію $P(x, y)$. Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n довільних частин; на кожній частинній дузі $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ виберемо точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta x_i, \quad (1)$$

де Δx_i – проекція вектора $\overline{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox .

Якщо існує скінченна границя при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$ інтегральної суми (1), яка не залежить ні від розбиття кривої AB , ні від вибору точок M_i , то цю границю називають *криволіній-*

ним інтегралом від функції $P(x, y)$ по координаті x вздовж кривої AB :

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta x_i. \quad (2)$$

Аналогічно криволінійний інтеграл від функції $Q(x, y)$ по координаті y :

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta y_i, \quad (3)$$

де Δy_i – проекція вектора на вісь Oy (див. рис. 35).

Сума (4) називається криволінійним інтегралом по координатах або *криволінійним інтегралом II роду*.

Обчислення криволінійних інтегралів II роду

Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, де функції $x(t)$ та $y(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ неперервні разом зі своїми похідними $x'(t)$ і $y'(t)$; точки A кривої відповідає параметр α , а точки B – параметр β ; функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – неперервні на кривій AB , тоді

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, де функція $y(x)$ та її похідна $y'(x)$ неперервні на $[a; b]$, тоді

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)) dx. \quad (6)$$

Аналогічно, якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, де функції $x(y)$ і $x'(y)$ неперервні на $[c; d]$, то

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d (P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y)) dy. \quad (7)$$

Поняття криволінійного інтеграла II роду можна поширити на випадок просторових кривих. Нехай функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій AB , яку задано рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ та їхні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[\alpha; \beta]$, тоді справедлива формула:

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Криволінійний інтеграл II роду залежить від напрямку шляху інтегрування і при зміні напрямку змінює свій знак:

$$\int_{AB} P dx + Q dy = - \int_{BA} P dx + Q dy. \quad (9)$$

Криволінійні інтеграли, в яких початкова і кінцева точки контуру інтегрування збігаються (замкнені контури без точок самоперетину), є *інтегралами по замкнутому контуру*. Для замкнутого контуру існує два напрями обходу: проти стрілки годинника (додатна орієнтація контуру) та за стрілкою годинника (від'ємна орієнтація контуру). Криволінійний інтеграл II роду по додатно орієнтованому контуру L позначається так:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Застосування криволінійного інтеграла II роду

Нехай на площині задана правильна область (рис. 36):

$$D = \{y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

Межу області D , тобто криву $PNQM$, позначимо L і вважатимемо додатно орієнтованою.

Тоді *площа S правильної області D* , обмеженої кривою L , знаходиться за формулою

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (10)$$

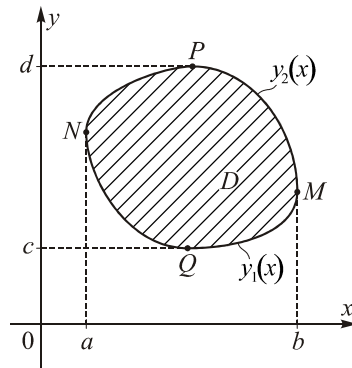


Рис. 36

Якщо сила $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ виконує роботу A при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L , функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні на кривій L , тоді

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (11)$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл II роду

$$\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy, \text{ де } AB - \text{ дуга параболи } y = x^2$$

від точки A(1; 1) до точки B(2;4).

Застосуємо формулу (6), тоді:

$$\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy = \int_1^2 ((x^2 - 2x^3) + (2x^3 + x^4) \cdot 2x)dx =$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{3} \right) \Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{16}{2} + \frac{128}{5} + \frac{64}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{70}{3} - \frac{15}{2} + \frac{124}{5} = \frac{1219}{30} = 40 \frac{19}{30}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – верх-

ня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, напрям обходу – за годинниковою стрілкою.

Оскільки $x'(t) = -a \sin t$ і $y'(t) = b \cos t$, то за формулою (5)

$$\int_L y^2 dx + x^2 dy = \int_0^\pi (b^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= -ab^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \cdot \sin t \, dt + a^2 b \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 t) \cdot \cos t \, dt = \\
 &= -ab^2 \int_0^{\pi} \sin t \, dt - ab^2 \int_0^{\pi} \cos^2 t \, d(\cos t) + \\
 &\quad + a^2 b \int_0^{\pi} \cos t \, dt - a^2 b \int_0^{\pi} \sin^2 t \, d(\sin t) = \\
 &= ab^2 \cos t \Big|_0^{\pi} - ab^2 \cdot \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} + a^2 b \cdot \sin t \Big|_0^{\pi} - a^2 b \cdot \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\pi} = \\
 &\quad -2ab^2 + \frac{2}{3}ab^2 = -\frac{4ab^2}{3}
 \end{aligned}$$

Ураховуючи, що обхід контуру здійснюється за годинниковою стрілкою, тобто у від'ємному напрямку, знак результату змінюємо на протилежний, тому

$$\int_L y^2 dx + x^2 dy = \frac{4ab^2}{3}.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_{(0;0)}^{(\pi;2\pi)} -x \cos y \, dx + y \sin x \, dy$ вздовж

відрізка, що сполучає точки $(0;0)$ і $(\pi;2\pi)$.

Рівняння прямої, що сполучає точки $(0;0)$ і $(\pi;2\pi)$:

$\frac{x}{\pi} = \frac{y}{2\pi}$ або $y = 2x$, тоді $y' = 2$. За формулою (6)

$$\int_{(0;0)}^{(\pi;2\pi)} -x \cos y \, dx + y \sin x \, dy =$$

$$= \int_0^{\pi} (-x \cdot \cos 2x + (2x \cdot \sin x) \cdot 2) dx = I_1 + I_2 = 4\pi,$$

де

$$I_1 = - \int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x \, dx = \left[\begin{array}{l} x = u, \quad dx = du, \\ \cos 2x \, dx = dv, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] =$$

$$= - \left(\frac{x}{2} \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx \right) = - \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = 0;$$

$$I_2 = 4 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} x = u, \quad dx = du, \\ \sin x \, dx = dv, \quad v = -\cos x \end{array} \right] =$$

$$= 4 \left(-x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \right) = 4 \left((-\pi \cos \pi) + \sin x \Big|_0^{\pi} \right) = 4\pi.$$

Приклад 4. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж

заданих ліній: $I = \int_{(0;0)}^{(1;1)} xy \, dx + (y-x) \, dy$; а) $y = x$; б) $y = x^2$;

в) $y^2 = x$.

У завданнях а), б) використаємо формулу (6), у завданні в) – (8).

а) Оскільки $y = x$, $dy = dx$, то $I = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$;

б) Тут $y = x^2$, $y' = 2x$, тоді

$$I = \int_0^1 (x^3 + (x^2 - x) \cdot 2x) dx = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2) dx = \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

в) Запишемо функцію $x = y^2$, тоді $dx = 2y \, dy$, отже

$$I = \int_0^1 (y^3 \cdot 2y + y - y^2) dy = \left(\frac{2y^5}{5} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{17}{30}.$$

Приклад 5. Обчислити $I = \int_L \frac{x^2 \, dy - y^2 \, dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, де L – чверть

астроїди $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$ від точки $(R; 0)$ до точки $(0; R)$.

Заданим точкам відповідає значення параметра $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$,

тоді враховуючи, що

$$x'(t) = -3R \cos^2 t \cdot \sin t, \quad y'(t) = 3R \sin^2 t \cdot \cos t,$$

за формулою (5) одержуємо:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{3R^3 \sin^2 t \cdot \cos^7 t + 3R^3 \sin^7 t \cdot \cos^2 t}{(R \cos^3 t)^{5/3} + (R \sin^3 t)^{5/3}} dt = \\ &= \frac{3R^3}{R^{5/3}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t \cos^2 t (\cos^5 t + \sin^5 t)}{\cos^5 t + \sin^5 t} dt = \\ &= \frac{3R^{4/3}}{4} \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{4} R^{4/3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{3}{8} R^{4/3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3}{8} R^{4/3} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{3}{8} R^{4/3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi R \sqrt[3]{R}. \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчисліть $I = \int_L x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, де L –

відрізок прямої від точки $(1; 1; 1)$ до точки $(2; 3; 4)$.

Складемо рівняння прямої, яка проходить через задані точки $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$, звідки виражаємо $y = 2x - 1$. Тоді $dy = 2 dx$ і $z = 3x - 2$, $dz = 3 dx$. Отже, за формулою (8)

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 (x + (2x-1) \cdot 2 + (x+2x-2) \cdot 3) dx = \\ &= \int_1^2 (14x - 8) dx = \left(7x^2 - 8x \right) \Big|_1^2 = 13. \end{aligned}$$

Приклад 7. Обчислити $I = \int_{OA} xy dx + yz dy + zx dz$, де OA –

чверть кола, заданого параметричними рівняннями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$; обхід здійснюється у напрямку зростання параметра t .

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} (-\cos t \cdot \sin^2 t + \sin t \cdot \cos t) dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t - \sin^2 t) d(\sin t) = \\ &= \left(\frac{\sin^2 t}{2} - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$.

Для знаходження площі візьмемо формулу (10):

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((2 \cos t - \cos 2t)(2 \cos t - 2 \cos 2t) - (2 \sin t - \sin 2t)(-2 \sin t + 2 \sin 2t)) dt = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t - 2 \cos t \cdot \cos 2t - \cos t \cdot \cos 2t + \cos^2 2t - \\
 &\quad - (-2 \sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + \sin t \sin 2t - \sin^2 2t)) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t - 3 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t + 2 \sin^2 t - 3 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t) dt = \\
 &= \int_0^{2\pi} (3 - 3(\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t)) dt = 3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 3(t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = 6\pi.
 \end{aligned}$$

Приклад 9. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на координатні осі Ox і Oy відповідно дорівнюють $P(x, y) = xy$ і $Q(x, y) = x + y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки з початку координат $(0; 0)$ в точку $(1; 1)$: а) по прямій $y = x$; б) по параболі $y = x^2$.

Для знаходження роботи сили $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ застосуємо формулу (11):

$$\text{а) } A = \int_{(0;0)}^{(1;1)} xy dx + (x + y) dy = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3};$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } A &= \int_{(0;0)}^{(1;1)} xy \, dx + (x+y) \, dy = \int_0^1 \left(x^3 + (x+x^2) \cdot 2x \right) dx = \\
 &= \int_0^1 (3x^3 + 2x^2) \, dx = \left(\frac{3x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{17}{12}.
 \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти роботу силового поля, в кожній точці $(x; y)$ якого напруженість (сила, яка діє на одиницю маси) $\vec{p} = (x+y) \cdot \vec{i} - x \cdot \vec{j}$, коли точка масою m описує коло $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, рухаючись за годинниковою стрілкою.

Оскільки точка рухається по колу за годинниковою стрілкою, тобто у від'ємному напрямку, то формула (11) запишеться так:

$$\begin{aligned}
 A &= \oint_{-L} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy = \oint_{-L} m(x+y) \, dx - mx \, dy = \\
 &= \int_0^{-2\pi} (m(a \cos t + a \sin t) \cdot (-a \sin t) - ma \cos t \cdot a \cos t) \, dt = \\
 &= -ma^2 \int_0^{-2\pi} (1 + \sin t \cdot \cos t) \, dt = -ma^2 \int_0^{-2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \, dt = \\
 &= -ma^2 \left(t - \frac{1}{4} \cos 2t \right) \Big|_0^{-2\pi} = 2\pi ma^2.
 \end{aligned}$$

Формула Гріна

Формула Гріна пов'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Нехай D – деяка правильна область, обмежена замкненим контуром L (див. рис. 36), і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в цій області. Тоді справедлива формула Гріна:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy. \quad (12)$$

Приклад 1. Обчислити $I = \oint_L 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$ за

формулою Гріна, якщо L – контур трикутника LMN з вершинами $L(1; 1)$, $M(2; 2)$, $N(1; 3)$, обхід здійснюється проти годинникової стрілки. Результат перевірити безпосереднім інтегруванням.

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y$. Область інтегрування D – це трикутник LMN , рівняння сторін якого LM : $y = x$, MN : $y = -x + 4$, NL : $x = 1$. Тоді за формулою (12)

$$\begin{aligned} \oint_L 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy &= \iint_D (2(x + y) - 4y) dx dy = \\ &= 2 \iint_D (x - y) dx dy = 2 \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_1^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_x^{4-x} dx = 2 \int_1^2 \left(x(4-x) - \frac{1}{2}(4-x)^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \\
 &= 4 \int_1^2 (4x - x^2 - 4) dx = 4 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right) \Bigg|_1^2 = -\frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Обчислимо інтеграл безпосередньо – по контуру трикутника LMN , тоді $I = I_1 + I_2 + I_3$:

$$I_1 = \int_{LM} 2(x^2 + x^2) dx + (x+x)^2 dx = 8 \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{56}{3};$$

$$I_2 = \int_{MN} 2(x^2 + (4-x)^2) dx + (x-x+4)^2 (-dx) =$$

$$= \int_2^1 (4x^2 - 16x + 16) dx = \left(\frac{4}{3} x^3 - 8x^2 + 16x \right) \Bigg|_2^1 = -\frac{4}{3};$$

$$I_3 = \int_{NL} (1+y)^2 dy = \int_3^1 (1+y)^2 dy = \frac{1}{3} (1+y)^3 \Big|_3^1 = \frac{1}{3} (8 - 64) = -\frac{56}{3};$$

$$I = \frac{56}{3} - \frac{4}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл $\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$, обхід контуру проти годинникової стрілки.

Знаходимо $\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2$, тоді за формулою (12):

$$\begin{aligned} \oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D^*} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 3. За формулою Гріна обчислити інтеграл $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left(xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) dy$, де L – контур прямокутника $1 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$.

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= y \left(y + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) = \\ &= y \left(y + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \end{aligned}$$

$$= y \left(y + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{і} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

то

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} \, dx + y \left(xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) dy = \\ = \iint_D \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy = \\ = \iint_D y^2 dx dy = \int_1^4 dx \int_0^2 y^2 dy = x \Big|_1^4 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^2 = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8. \end{aligned}$$

Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування

Значення криволінійного інтеграла, як було показано, залежить від того, якою кривою сполучено крайні точки шляху інтегрування. Проте існують інтеграли, значення яких не залежить від форми шляху інтегрування. З'ясуємо умови, за яких значення інтеграла залишається однаковим по всіх можливих кривих, які сполучають кінцеві точки кривої інтегрування.

Теорема. Нехай функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ визначені і неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q}{\partial x}$

в деякій замкненій однозв'язній області D . Тоді наступні

чотири умови еквівалентні, тобто виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання інших трьох:

1) для довільної замкненої гладкої кривої, що належить області D ,

$$\oint_L P dx + Q dy = 0;$$

2) для довільних двох точок M та N області D значення інтеграла

$$\int_{MN} P dx + Q dy$$

не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D ;

3) вираз $P dx + Q dy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D , тобто існує така функція $F(x, y)$, визначена в області D , що $dF = P dx + Q dy$;

4) в усіх точках області D виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (13)$$

З еквівалентності умов 1–4 теореми випливає, що умови 3 і 4 є необхідними і достатніми, за яких криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування. Проте для застосування найбільш зручною, необхідною і достатньою умовою є рівність (13).

Теорема справедлива для випадку криволінійного інтеграла II роду вздовж просторових кривих.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy$$

по довільній кривій, яка сполучає точки $A(0;0)$ та $B(1;1)$. Оскільки для заданого інтеграла виконується рівність (13):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y, \text{ то значення інтеграла не залежить від фор-}$$

ми шляху інтегрування, а залежить лише від точок A і B . Обчислимо інтеграл по прямій $y = x$, яка ці точки сполучає, тоді

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy &= \int_0^1 ((x^2 - x^2) - 2x^2) dx = \\ &= -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Інтегрування повних диференціалів

Нехай у деякій однозв'язній області D функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ і їхні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні, причому

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \text{ Зафіксуємо точку } M(x_0; y_0) \text{ і розглянемо функцію}$$

$$F(x, y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy,$$

тоді повний диференціал цієї функції

$$dF = P dx + Q dy. \quad (14)$$

Проте існує нескінченна кількість функцій двох змінних, для яких (14) є повним диференціалом. Всі такі функції визначаються формулою $u(x, y) + C$, де $u(x, y)$ – яка-небудь з первісних, а $C = \text{const}$.

Кожну з цих функцій називають *первісною* для повного диференціала (14):

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy = u(x, y) + C.$$

Поклавши $x = x_0, y = y_0$, знаходимо $C = u(x_0; y_0)$, тому

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P dx + Q dy = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

Зокрема при $x = x_1, y = y_1$ маємо

$$\int_{(x_0; y_0)}^{(x_1; y_1)} P dx + Q dy = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0). \quad (15)$$

Вираз (15) називається *формулою Ньютона–Лейбніца для криволінійного інтеграла від повного диференціала*.

Оскільки криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, то для знаходження первісної $u(x, y)$ досить обчислити інтеграл по довільній лінії, яка сполучає точки M_0 і M . Проте найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, яка сполучає точки M_0 і M так, що сторони ламаної паралельні осям координат (рис. 37).

Тоді на відрізку M_0N $y = y_0$, $dy = 0$, а на відрізку NM $x = \text{const}$, $dx = 0$. Отже,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \quad (16)$$

де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому значенні $y = y_0$, а другий – при сталому значенні x .

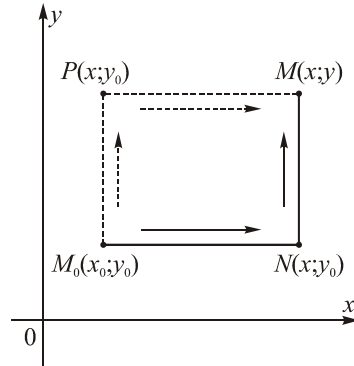


Рис. 37

Аналогічно при інтегруванні по ламаній M_0PM (див. рис. 37):

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C \quad (17)$$

Формули (16), (17) дають змогу знайти первісну; початкову точку $(x_0; y_0)$ треба вибирати так, щоб підінтегральні вирази якомога спрощувались.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{(0;0)}^{(2;1)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy.$$

Оскільки для даного інтеграла виконується рівність (13), тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y$, то він не залежить від шляху

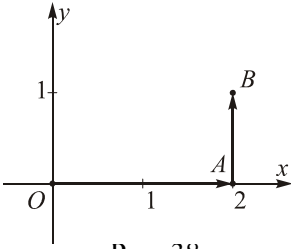


Рис. 38

інтегрування. Виконаємо інтегрування по ламаній OAB (рис. 38).

На відрізку OA : $y=0$, $dy=0$, $0 \leq x \leq 2$; на відрізку AB : $x=2$, $dx=0$, $0 \leq y \leq 1$, тоді

$$I = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (4 - 4y + y^2) dy =$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 + \left(4y - 2y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} + 4 - 2 + \frac{1}{3} = 5.$$

Приклад 2. Обчислити $I = \int_{(1;1)}^{(2;3)} (x+3y)dx + (y+3x)dy$.

Заданий інтеграл не залежить від шляху інтегрування, оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3$. Здійснимо інтегрування по ламаній, ланки якої паралельні осям координат; на першій ланці $y=1$, $dy=0$, $1 \leq x \leq 2$; на другій ланці $x=2$, $dx=0$, $1 \leq y \leq 3$, отже,

$$I = \int_1^2 (x+3)dx + \int_1^3 (y+6)dy = \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2} + 6y \right) \Big|_1^3 =$$

$$= 2 + 6 - \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{1}{2} - 6 = 20\frac{1}{2}.$$

Приклад 3. Знайти первісну функцію $u(x, y)$, якщо її повний диференціал:

а) $du = (4x + 2y)dx + (2x - 6y)dy$;

б) $du = (y + \ln(x + 1))dx + (x + 1 - e^y)dy$;

в) $du = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$.

а) Умова (13) виконується: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2$; візьмемо $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, тоді

$$u(x, y) = \int_0^x 4x dx + \int_0^y (2x - 6y) dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C$$

або

$$u(x, y) = \int_0^y -6y dy + \int_0^x (4x + 2y) dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C.$$

б) Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, тоді нехай $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, звідки первісна функція

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x \ln(x + 1) dx + \int_0^y (x + 1 - e^y) dy = \\ &= (x \cdot \ln(x + 1) - x + \ln(x + 1)) \Big|_0^x + (xy + y - e^y) \Big|_0^y = \\ &= (x + 1) \ln(x + 1) - x + xy + y - e^y + 1 + C. \end{aligned}$$

в) Знаходимо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$. За початкову точку поча-

ток координат $(0; 0)$ взяти не можна, оскільки в цій точці функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ не визначені. Тому за початкову точку візьмемо нехай $(1; 1)$, тоді первісна

$$u(x, y) = \int_1^x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = \ln x + 2 \ln y + \frac{x}{y} - 1 + C.$$

Лекція 7. Поверхневі інтеграли

Нехай у точках деякої гладкої поверхні σ визначена обмежена функція $f(M) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо поверхню σ на n довільних частин σ_i без спільних внутрішніх точок (рис. 39).

Нехай $\Delta\sigma_i$ — площа, а $\text{diam}(\sigma_i)$ — діаметр частини поверхні σ_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині σ_i виберемо довільну точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \mu_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i; \mu_i) \cdot \Delta\sigma_i, \quad (1)$$

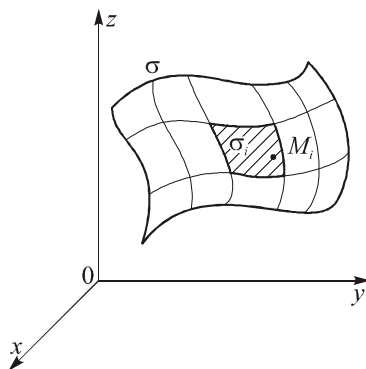


Рис. 39

яку назвемо *інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по поверхні σ* .

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (1) при $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam}(\sigma_i) \rightarrow 0$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини σ_i , ні від вибору точок M_i , то цю

границю називають *поверхневим інтегралом I роду*:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i; \mu_i) \cdot \Delta\sigma_i. \quad (2)$$

Функція $f(x, y, z)$ називається інтегровною по поверхні σ , а поверхня σ – областю інтегрування. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ , то вона інтегровна по σ .

Нехай гладка поверхня σ , задана рівнянням $z = z(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D . Припустимо, що функція $f(x, y, z)$ неперервна на поверхні σ , а функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ неперервні в області D , тоді поверхневий інтеграл (2) обчислюється за формулою:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy. \quad (3)$$

Формула (3) виражає поверхневий інтеграл I роду через подвійний інтеграл по проекції поверхні σ на площину Oxy .

Аналогічно, якщо поверхня σ задається рівнянням $y = y(x, z)$ або $x = x(y, z)$, то

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz$$

або

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

де D_{xz} , D_{yz} – проекції поверхні σ на координатні площини Oxz і Oyz відповідно.

Якщо у формулі (2) покласти $f(x, y, z) = 1$ на поверхні σ , то інтеграл $P = \iint_{\sigma} d\sigma$ (4) виражає площу поверхні σ .

Якщо на гладкій поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то:

а) маса матеріальної поверхні

$$m = \iint_{\sigma} \gamma(x, y, z) d\sigma; \quad (5)$$

б) координати центра маси поверхні:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m}, \quad (6)$$

де

$$M_{yz} = \iint_{\sigma} x\gamma d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_{\sigma} y\gamma d\sigma, \quad M_{xy} = \iint_{\sigma} z\gamma d\sigma \quad (7)$$

статичні моменти поверхні σ відносно координатних площин Oyz , Oxz , Oxy відповідно;

в) моменти інерції поверхні відносно осей координат і початку координат:

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \gamma d\sigma, \quad I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \gamma d\sigma, \\ I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \gamma d\sigma, \quad I_O = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \gamma d\sigma. \quad (8)$$

Приклад 1. Обчислити $\iint_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma$, σ – частина

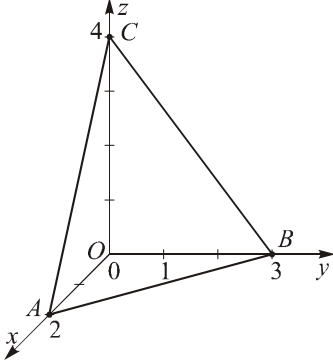


Рис. 40

площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, яка розміщена в I октанті.

Поверхнею інтегрування є $\triangle ABC$ (рис. 40), проекцією якого на площину Oxy є $\triangle AOB$:

$$0 \leq y \leq 3\left(1 - \frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Обчислимо $d\sigma$:

$$z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) \Rightarrow z'_x = -2, \quad z'_y = -\frac{4}{3};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{3} dx dy.$$

Застосуємо формулу (3):

$$\iint_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) d\sigma = \frac{\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} \left(4 - 2x - \frac{4}{3}y + 2x + \frac{4}{3}y \right) dx dy =$$

$$= \frac{4\sqrt{61}}{3} \iint_{D_{xy}} dx dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \int_0^2 dx \int_0^{3\left(1 - \frac{x}{2}\right)} dy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \int_0^2 3\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= 4\sqrt{61} \left(x - \frac{x^2}{4} \right) \bigg|_0^2 = 4\sqrt{61}(2-1) = 4\sqrt{61}.$$

Приклад 2. Обчислити $\iint_{\sigma} xyz \, d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$, розміщена в I октанті.

Рівняння поверхні $z = 1 - x - y$, звідки $z'_x = z'_y = -1$, тоді $d\sigma = \sqrt{1+1+1} \, dx dy = \sqrt{3} \, dx dy$. Отже,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} xyz \, d\sigma &= \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y) \, dx dy = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} ((1-x)y - y^2) dy = \sqrt{3} \int_0^1 x \, dx \left((1-x) \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \bigg|_0^{1-x} = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 x \left(\frac{1}{2}(1-x)^3 - \frac{1}{3}(1-x)^3 \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \int_0^1 x(1-x)^3 dx = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4) dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \bigg|_0^1 = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{20} = \frac{\sqrt{3}}{120}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, де σ – частина ко-

нічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, розміщена між площинами $z = 0$ і $z = 1$.

Оскільки рівняння поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, тоді

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

отже поверхневий інтеграл:

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}^*} \rho^3 d\rho d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \sqrt{2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити $\iint_{\sigma} x d\sigma$, де σ – частина сфери

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, яка розміщена в I октанті.

З рівняння сфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ знаходимо

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

тоді

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy = \frac{R \, dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

отже,

$$\iint_{\sigma} x \, d\sigma = R \iint_{D_{xy}} \frac{x \, dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \iint_{D_{xy}^*} \frac{\rho \cos \varphi \cdot \rho \, d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} =$$

$$= R \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2 \, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \rho = R \sin z, \quad z = \arcsin \frac{\rho}{R}, \\ d\rho = R \cos z \, dz, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = \pi/2 \end{array} \right] =$$

$$= R \cdot \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin^2 z \cdot R \cos z \, dz}{\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 z}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= R \cdot R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 z \, dz = \frac{R^3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2z) \, dz = \\
 &= \frac{R^3}{2} \left(z - \frac{1}{2} \sin 2z \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^3}{4}.
 \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти момент інерції півсфери

$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ відносно осі Oz .

За формулами (8):

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \, d\sigma = \\
 &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy = \\
 &= a \iint_{D_{xy}} \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy = a \iint_{D_{xy}^*} \frac{\rho^3 \, d\rho \, d\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\rho^3 \, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \\
 &= \left[\begin{aligned} \sqrt{a^2 - \rho^2} = t, \quad d\rho = \frac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \, dt, \\ \rho = \sqrt{a^2 - t^2}, \quad t_1 = a, \quad t_2 = 0 \end{aligned} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi a \int_a^0 \frac{(a^2 - t^2) \sqrt{a^2 - t^2} \cdot (-t) dt}{t \cdot \sqrt{a^2 - t^2}} = \\
 &= 2\pi a \int_0^a (a^2 - t^2) dt = 2\pi a \left(a^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^a = 2\pi a \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^4.
 \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчислити координати центра маси частини площини $z = x$, яка обмежена площинами $x + y = 1, y = 0, x = 0$. Застосуємо формули (6) і (7):

$$z = x \Rightarrow z'_x = 1, z'_y = 0, d\sigma = \sqrt{2} dx dy,$$

тоді

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \\
 &= \sqrt{2} \int_0^1 (1-x) dx = \sqrt{2} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\
 M_{yz} &= \iint_{\sigma} x d\sigma = \sqrt{2} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{2} \int_0^1 x(1-x) dx = \\
 &= \sqrt{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xz} &= \iint_{\sigma} y \, d\sigma = \sqrt{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y \, dy = \sqrt{2} \int_0^1 dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}; \\
 M_{xy} &= \iint_{\sigma} z \, d\sigma = \sqrt{2} \iint_{\sigma} x \, d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{6}.
 \end{aligned}$$

Таким чином, $x_C = y_C = z_C = \frac{1}{3}$.

Приклад 7. Знайти центр маси однорідної поверхні конуса $a^2 z^2 = b^2 (x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq b$.

Конус $z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ проектується на площину Oxy в коло радіуса a :

$$\begin{cases} z = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = b \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2} = b \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a;$$

$$z'_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{b}{a} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

тоді

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dxdy = \\
 &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}} \, dxdy = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \, dxdy; \\
 m &= \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \, dxdy = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_{D_{xy}^*} \rho \, d\rho d\varphi = \\
 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho \, d\rho = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \varphi \bigg|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^2}{2} \bigg|_0^a = \\
 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} = \pi a \sqrt{a^2 + b^2}; \\
 M_{yz} &= \iint_{\sigma} x \, d\sigma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_{D_{xy}^*} \rho^2 \cos \varphi \, d\rho d\varphi = \\
 &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^a \rho^2 \, d\rho = 0;
 \end{aligned}$$

$$M_{xz} = \iint_{\sigma} y d\sigma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_{D_{xy}^*} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho = 0;$$

$$M_{xy} = \iint_{\sigma} z d\sigma = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \iint_{D_{xy}} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy =$$

$$= \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \iint_{D_{xy}^*} \rho^2 d\rho d\varphi = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \cdot 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot ab\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$x_C = y_C = 0; \quad z_C = \frac{2}{3}b.$$

Приклад 8. Знайти момент інерції частини бічної поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$ відносно осі Oz .

За умовою $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, тоді

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отже

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Шуканий момент інерції:

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy = \sqrt{2} \iint_{D_{xy}^*} \rho^3 d\rho d\varphi = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho^3 d\rho = \sqrt{2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^h = \sqrt{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi h^4. \end{aligned}$$

Приклад 9. Знайти площу частини поверхні конуса $z^2 = 2xy$, розміщеної в першому октанті між площинами $x = 2$, $y = 4$.

Застосуємо формулу (4):

$$\begin{aligned} P &= \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{y^2}{2xy} + \frac{x^2}{2xy}} dx dy = \iint_{D_{xy}} \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dx dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\frac{x}{\sqrt{xy}} + \frac{y}{\sqrt{xy}} \right) dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 dx \int_0^4 \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 dx \cdot \left(\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{y^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left(4\sqrt{x} + \frac{16}{3\sqrt{x}} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(4 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{16}{3} \cdot 2\sqrt{x} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3} x^{3/2} + \frac{32}{3} \sqrt{x} \right) \Big|_0^2 = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{16}{3} \sqrt{2} + \frac{32}{3} \sqrt{2} \right) = \frac{48}{3} = 16 \text{ (кв. од.)}.
 \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти масу півсфери, якщо в кожній її точці поверхнева густина дорівнює відстані від точки до радіуса, перпендикулярного до основи півсфери.

Рівняння півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, звідки

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

тоді

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Знайдемо масу за формулою (5):

$$m = \iint_{\sigma} \gamma d\sigma, \text{ де густина } \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} \, d\sigma = R \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\
 &= R \iint_{D_{xy}^*} \frac{\rho^2 \, d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho^2 \, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{\pi^2 R^3}{2},
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \int_0^R \frac{\rho^2 \, d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} &= \left[\begin{array}{l} \rho = R \sin t, \quad t = \arcsin \frac{\rho}{R}, \\ d\rho = R \cos t \, dt, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin^2 t \cdot R \cos t \, dt}{\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t}} = R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \\
 &= \frac{R^2}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Поверхневі інтеграли II роду

Розглянемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні σ довільну точку M , проведемо в ній нормаль $\vec{n}$ певного напрямку і розглянемо на поверхні σ довільний замкнений контур, який виходить з точки M і повертається в точку M , не перетинаючи при цьому межі поверхні σ . Якщо у довільну

точку M поверхні σ після обходу довільного замкненого контуру, який розміщений на поверхні σ і не перетинає її межу, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі $\vec{n}$, то поверхню називають *двосторонньою*; якщо напрям нормалі змінюється на протилежний, то *односторонньою*.

Двосторонню поверхню називають *орієнтовною*, а вибір певної її сторони – *орієнтацією поверхні*. Надалі розглядатимемо двосторонні поверхні.

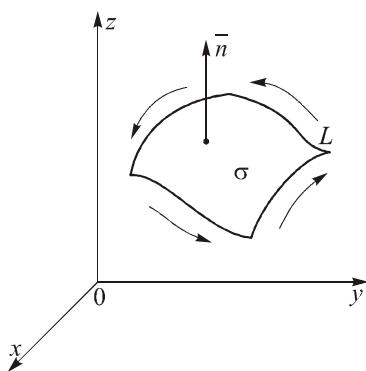


Рис. 41

Нехай σ – орієнтовна поверхня, обмежена контуром L , який не має точок самоперетину. Вважатимемо за *додатній* той напрям обходу контуру L , при якому спостерігач, розміщений так, що напрям нормалі збігається з напрямом від ніг до голови при русі, залишає поверхню зліва від себе (рис. 41). Протилежний напрям обходу називається *від'ємним*. Якщо змінити орієнтацію поверхні, то і напрями

обходу контуру L поміняються місцями.

Нехай σ – гладка поверхня, задана рівнянням $z = f(x, y)$, і $R(x, y, z)$ – обмежена функція, визначена в точках поверхні σ . Розіб'ємо σ на n довільних частин. Позначимо: D_i – проекція i -ї частини поверхні σ_i на площину Oxy , а ΔS_i – площа D_i , взята зі знаком "+", якщо обрана зовнішня сторона поверхні σ , і знаком "-" – якщо внутрішня.

Виберемо в кожній частині σ_i довільну точку $M_i(\xi_i; \eta_i; \mu_i)$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i; \eta_i; \mu_i) \Delta S_i, \quad (9)$$

яку назовемо інтегральною сумою. Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(\sigma_i)$ – мак-

симальний діаметр поверхонь σ_i .

Якщо при $\lambda \rightarrow 0$ існує границя інтегральних сум (9), яка не залежить ні від способу розбиття поверхні σ , ні від вибору точок M_i , то цю границю називають *поверхневим інтегралом II роду*:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i; \eta_i; \mu_i) \Delta S_i. \quad (10)$$

При зміні сторони поверхні на протилежну інтеграл змінює знак, бо змінює знак ΔS_i .

Якщо поверхню σ проектувати на координатні площини Oxz і Oyz , то матимемо ще два поверхневі інтеграли:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dx dz \quad \text{і} \quad \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dy dz,$$

де $P(x, y, z)$ і $Q(x, y, z)$ – функції, визначені в точках поверхні σ .

Оскільки

$$dx dy = \cos \gamma \, d\sigma,$$

$$dx dz = \cos \beta \, d\sigma,$$

$$dy dz = \cos \alpha \, d\sigma$$

(рис. 42), де $d\sigma$ – елемент площі поверхні σ ; α , β , γ – кути між нормаллю до поверхні σ та осями Ox , Oy , Oz відповідно, то справедливі формули:

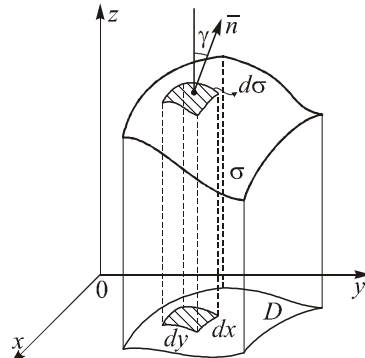


Рис. 42

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz = \iint_{\sigma} P(x, y, z) \cos \alpha d\sigma,$$

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dxdz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z) \cos \beta d\sigma,$$

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{\sigma} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma.$$

На практиці часто застосовують формулу

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P dydz + Q dxdz + R dxdy = \\ & = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma. \end{aligned} \quad (11)$$

Для обчислення загального інтеграла (11) поверхню σ проєктують на всі три координатні площини, тоді має місце формула

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dxdz + R(x, y, z) dxdy = \\ & = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dxdz \pm \\ & \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dxdy, \end{aligned} \quad (12)$$

де D_{yz}, D_{xz}, D_{xy} – проекції поверхні σ на координатні площини Oyz, Oxz, Oxy відповідно. Знак "+" у формулі (12) беремо тоді, коли нормаль до поверхні утворює відповідно з віссю Ox, Oy, Oz гострий кут; знак "-" коли тупий. Правильність вибору знаків перед подвійними інтегралами у формулі (12) можна перевірити за допомогою формули

$$\bar{n}_0 = \pm \frac{\varphi'_x \cdot \bar{i} + \varphi'_y \cdot \bar{j} + \varphi'_z \cdot \bar{k}}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}},$$

яка визначає одиничний нормальний вектор до поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$. Подвійний знак у цій формулі відповідає двом сторонам поверхні σ . З формули (11) випливає, що знак перед подвійним інтегралом збігається зі знаком відповідного напрямного косинуса нормалі $\bar{n}$:

$$\cos \alpha = \cos \left(\bar{n}, \overline{Ox} \right) = \bar{n}_0 \cdot \bar{i}; \quad \cos \beta = \cos \left(\bar{n}, \overline{Oy} \right) = \bar{n}_0 \cdot \bar{j};$$

$$\cos \gamma = \cos \left(\bar{n}, \overline{Oz} \right) = \bar{n}_0 \cdot \bar{k}.$$

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл

$$\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dydz,$$

де σ – зовнішня сторона частини параболоїда $x = a^2 - y^2 - z^2$, яка відтинається площиною Oyz .

Проекцією параболоїда на площину Oyz буде коло $y^2 + z^2 = a^2$ або $\rho = a$, тоді

$$\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dydz = \iint_{D_{yz}} (y^2 + z^2) dydz = \iint_{D_{yz}^*} \rho^3 d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^3 d\rho = \varphi \bigg|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^4}{4} \bigg|_0^a = 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити

$$I = \iint_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

де σ – зовнішня сторона поверхні півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($z \geq 0$).

Оскільки рівняння площини Oxy $z = 0$, то

$$\iint_{\sigma} z^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} 0 dxdy = 0;$$

проекції півсфери на площини Oyz і Oxz – це півкола радіуса a , тоді

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} x^2 dydz &= \iint_{D_{yz}} (a^2 - y^2 - z^2) dydz = \iint_{D_{yz}^*} (a^2 - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 \rho - \rho^3) d\rho = \pi \cdot \left(\frac{a^2 \rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \bigg|_0^a = \pi \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{\pi a^4}{4}; \end{aligned}$$

$$\iint_{\sigma} y^2 dzdx = \iint_{D_{zx}} (a^2 - x^2 - z^2) dzdx = \iint_{D_{zx}^*} (a^2 - \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi a^4}{4};$$

таким чином $I = \frac{\pi a^4}{4} + \frac{\pi a^4}{4} + 0 = \frac{\pi a^4}{2}$.

Приклад 3. Обчислити

$$I = \iint_{\sigma} 2 dx dy + y dx dz - x^2 z dy dz,$$

де σ – зовнішня сторона частини еліпсоїда $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, розміщена в першому октанті.

Знайдемо проекції частини еліпсоїда на координатні площини:

$$D_{xy} = \left\{ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - 4x^2}; 0 \leq x \leq 1 \right\}$$

$$D_{xz} = D_{xz}^* = \left\{ 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$D_{yz} = \left\{ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - 4z^2}; 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

тоді

$$I_1 = \iint_{\sigma} 2 dx dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{4-4x^2}} dy = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\begin{array}{l} x = \sin t, \quad t = \arcsin x, \\ dx = \cos t \, dt, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \\
 &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) \, dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi; \\
 I_2 &= \iint_{\sigma} y \, dx dz = \iint_{D_{xz}} \sqrt{4 - 4x^2 - 4z^2} \, dx dz = 2 \iint_{D_{xz}^*} \sqrt{1 - \rho^2} \, \rho \, d\rho d\varphi = \\
 &= - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 (-2\rho) \sqrt{1 - \rho^2} \, d\rho = -\varphi \Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{(1 - \rho^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 = \\
 &= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} (0 - 1) = \frac{\pi}{3}; \\
 I_3 &= \iiint_{\sigma} x^2 z \, dy dz = \iint_{D_{yz}} \left(1 - \frac{y^2}{4} - z^2 \right) dy dz = \\
 &= \int_0^1 z \, dz \left(\left(1 - z^2 \right) y - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_0^{\sqrt{4 - 4z^2}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 z \, dz \left(2(1-z^2)\sqrt{1-z^2} - \frac{1}{12} \left(2\sqrt{1-z^2} \right)^3 \right) = \\
 &= \int_0^1 z \, dz \left(2(1-z^2)^{3/2} - \frac{8}{12} (1-z^2)^{3/2} \right) = \frac{4}{3} \int_0^1 z (1-z^2)^{3/2} \, dz = \\
 &= -\frac{2}{3} \int_0^1 (-2z) (1-z^2)^{3/2} \, dz = -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1-z^2)^{5/2}}{5/2} \bigg|_0^1 = -\frac{4}{15}.
 \end{aligned}$$

Отже, інтеграл $I = I_1 + I_2 - I_3 = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{4}{15} = \frac{4\pi}{3} - \frac{4}{15}$.

Приклад 4. Обчислити

$$I = \iint_{\sigma} x \, dydz + y \, dxdz + z \, dxdy,$$

де σ – додатня сторона куба, складеного площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Три грані куба – це координати площини Oxy , Oxz , Oyz , рівняння яких $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$; $dz = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$. Отже, поверхневий інтеграл по цих трьох гранях дорівнює нулю. Обчислимо інтеграл по трьох гранях: $x = 1$ ($dx = 0$, $y = 0$, $z = 0$); $y = 1$ ($dy = 0$, $x = 0$, $z = 0$); $z = 1$ ($dz = 0$, $x = 0$, $y = 0$), тоді

$$I_1 = \iint_{\sigma} x \, dydz = \iint_{D_{yz}} dydz = \int_0^1 dy \int_0^1 dz = 1,$$

аналогічно

$$I_2 = \iint_{\sigma} y \, dx dz = \iint_{D_{xz}} dx dz = 1,$$

$$I_3 = \iint_{\sigma} z \, dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy = 1.$$

Таким чином, $I = 1 + 1 + 1 = 3$.

Приклад 5. Обчислити

$$I = \iint_{\sigma} z \, dx dy + x \, dx dz + y \, dy dz,$$

де σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного при перетині площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами.

Область інтегрування σ та її проекції на координатні площини Oxy , Oxz , Oyz зображено на рис. 43 та рис. 44, **a–в** відповідно.

Визначимо нормальний вектор $\bar{n}_0$ до поверхні σ :

$$\varphi(x, y, z) = x - y + z - 1;$$

$$\varphi'_x = 1, \quad \varphi'_y = -1, \quad \varphi'_z = 1;$$

$$\bar{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{i} - \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{k}.$$

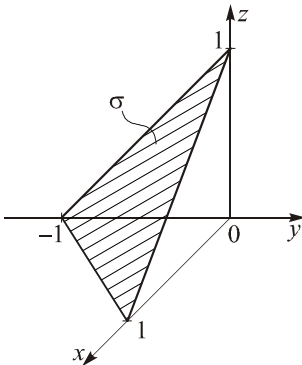


Рис. 43

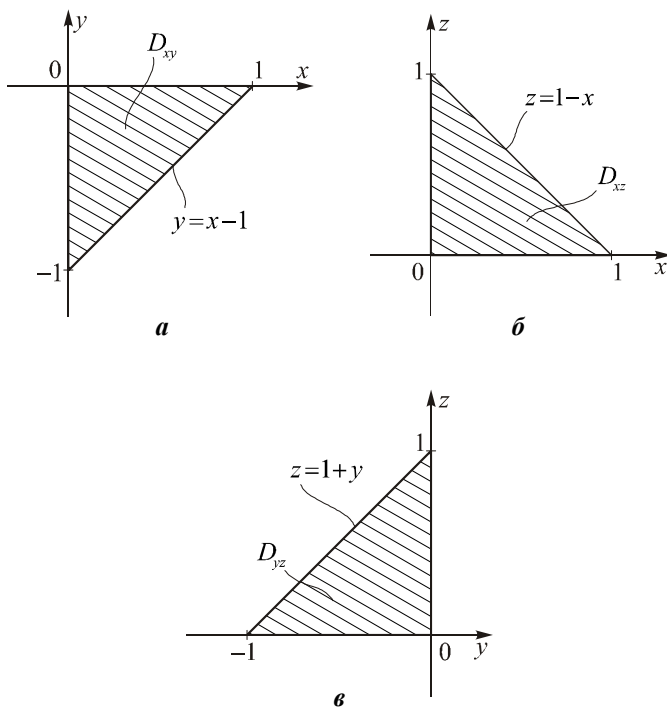


Рис. 44

Оскільки

$$\cos \alpha = \cos \left(\vec{n}, \overrightarrow{Ox} \right) = \vec{n}_0 \cdot \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0,$$

$$\cos \beta = \cos \left(\vec{n}, \overrightarrow{Oy} \right) = \vec{n}_0 \cdot \vec{j} = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0,$$

$$\cos \gamma = \cos \left(\vec{n}, \overrightarrow{Oz} \right) = \vec{n}_0 \cdot \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0,$$

то перед першим і третім інтегралами будуть знаки "+", а перед другим – знак "-", тобто $I = I_1 - I_2 + I_3$, де

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\sigma} z \, dx dy = \iint_{D_{xy}} (x - y - 1) \, dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (x - 1 - y) \, dy = \\ &= \int_0^1 dx \left((x-1)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x-1}^0 = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x-1)^2 \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint_{\sigma} x \, dx dz = \iiint_{D_{xz}} x \, dx dz = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} dz = \int_0^1 x(1-x) \, dx = \\ &= \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint_{\sigma} y \, dy dz = \iiint_{D_{yz}} y \, dy dz = \int_{-1}^0 y \, dy \int_0^{1+y} dz = \int_{-1}^0 y(1+y) \, dy = \\ &= \int_{-1}^0 (y + y^2) \, dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } I = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Лекція 8. Формули Остроградського-Гаусса і Стокса. Елементи теорії поля

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Нехай σ – замкнена гладка поверхня, яка обмежує об'єм G , і функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області G . Тоді справедлива *формула Остроградського-Гаусса*:

$$\iint_{\sigma} P \, dydz + Q \, dxdz + R \, dxdy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz. \quad (1)$$

За формулою Остроградського-Гаусса обчислити наступні поверхневі інтеграли.

Приклад 1. $I = \iint_{\sigma} x^2 \, dydz + y^2 \, dxdz + z^2 \, dxdy$, де σ – зовнішня сторона поверхні куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

Тут $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$, тоді

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 2z.$$

Скористаємося формулою (1):

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G (2x + 2y + 2z) dx dy dz = 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz = \\ &= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \left((x + y)z + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a = 2 \int_0^a dx \int_0^a \left(a(x + y) + \frac{a^2}{2} \right) dy = \\ &= 2 \int_0^a dx \left(\left(ax + \frac{a^2}{2} \right) y + \frac{ay^2}{2} \right) \Big|_0^a = 2 \int_0^a \left(a^2 x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx = \\ &= 2 \left(\frac{a^2 x^2}{2} + a^3 x \right) \Big|_0^a = 2 \left(\frac{a^4}{2} + a^4 \right) = 3a^4. \end{aligned}$$

Приклад 2. $I = \iiint_{\sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, σ – зовнішня

сторона піраміди, обмеженої площинами $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то за формулою (1)

$$\begin{aligned}
 I &= 3 \iiint_G dx dy dz = 3 \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz = 3 \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a-x-y) dy = \\
 &= 3 \int_0^a dx \left((a-x)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{a-x} = 3 \int_0^a dx \left((a-x)^2 - \frac{(a-x)^2}{2} \right) dx = \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^a (a-x)^2 dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(a-x)^3}{3} \Big|_0^a = -\frac{1}{2} (0 - a^3) = \frac{a^3}{2}.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. $I = \iint_{\sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, де σ – зовні-

шня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2$, $\frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$, то за формулою (1):

$$\begin{aligned}
 I &= 3 \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 3 \iiint_{G^*} \rho^4 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^a \rho^4 d\rho = 3 \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^a = \\
 &= 3 \cdot 2\pi \cdot (\cos 0 - \cos \pi) \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{12\pi a^5}{5}.
 \end{aligned}$$

Приклад 4. $I = \iiint_{\sigma} x dydz + y dxdz + z dxdy$, де σ – зовнішня

сторона поверхні циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-h \leq z \leq h$.

За формулою (1)

$$\begin{aligned} I &= 3 \iiint_G dxdydz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho d\rho \int_{-h}^h dz = \\ &= 3 \cdot \varphi \bigg|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^2}{2} \bigg|_0^a \cdot z \bigg|_{-h}^h = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 2h = 6\pi a^2 h. \end{aligned}$$

Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами. Нехай σ – поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$, функції $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ – неперервні в області D – проекції поверхні σ на площину Oxy ; L – контур, який обмежує σ , l – проекція контуру L на площину Oxy , тобто l – межа області D . Тоді має місце *формула Стокса*:

$$\begin{aligned} &\oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ &= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad (2) \end{aligned}$$

Формула (2) дає змогу обчислювати криволінійні інтеграли на замкнених контурах за допомогою поверхневих інтегралів.

З формули Стокса випливає, що за умови виконання рівностей

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

криволінійний інтеграл по довільному просторовому замкненому контуру L дорівнює нулю: $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$, тоб-

то криволінійний інтеграл не залежить від форми контуру інтегрування, а вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$, знайти яку можна за формулою

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, y_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \quad (3)$$

За формулою Стокса обчислити наступні інтеграли.

Приклад 1. $I = \oint_{ABCA} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де $ABCA$ – контур

$\triangle ABC$ з вершинами $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$.

Тут $P = y^2$, $Q = z^2$, $R = x^2$, тоді

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 - 2z = -2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 2x = -2x,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 2y = -2y.$$

Застосуємо формулу (2):

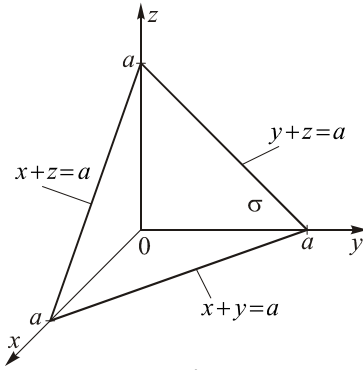


Рис. 45

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\sigma} -2z \, dydz - 2x \, dx dz - 2y \, dx dy = \\
 &= -2 \iint_{D_{yz}} z \, dydz - 2 \iint_{D_{xz}} x \, dx dz - \\
 &\quad - 2 \iint_{D_{xy}} y \, dx dy,
 \end{aligned}$$

де D_{yz} , D_{xz} , D_{xy} – проєкції поверхні σ на координатні площини Oyz , Oxz , Oxy відповідно (рис. 45). Тоді

$$\begin{aligned}
 I &= -2 \int_0^2 dy \int_0^{a-y} z \, dz - 2 \int_0^a x \, dx \int_0^{a-x} dz - 2 \int_0^a dx \int_0^{a-x} y \, dy = \\
 &= -2 \int_0^a dy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{a-y} - 2 \int_0^a x(a-x) \, dx - 2 \int_0^a dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{a-x} = \\
 &= - \int_0^a (a-y)^2 \, dy - 2 \int_0^a (ax - x^2) \, dx - \int_0^a (a-x)^2 \, dx = \\
 &= \frac{(a-y)^3}{3} \Big|_0^a - 2 \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \frac{(a-x)^3}{3} \Big|_0^a = \frac{1}{3}(0 - a^3) - \\
 &\quad - 2 \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) + \frac{1}{3}(0 - a^3) = -\frac{2a^3}{3} - 2 \cdot \frac{a^3}{6} = -\frac{2}{3}a^3 - \frac{a^3}{3} = -a^3.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. $I = \oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, де L – коло $x^2 + y^2 = r^2$,

$z = 0$.

Оскільки $P = x^2 y^3$, $Q = 1$, $R = z$, то

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2.$$

Тоді за формулою (2)

$$\begin{aligned} I &= -3 \iint_{\sigma} x^2 y^2 dx dy = -3 \iint_{D_{xy}} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^r \rho^5 d\rho = -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \cdot \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^r = \\ &= -\frac{r^6}{8} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = -\frac{r^6}{16} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{r^6}{16} \cdot 2\pi = -\frac{\pi r^6}{8}. \end{aligned}$$

Елементи теорії поля

Застосування інтегрального числення до питань математичної фізики і механіки часто зручно здійснювати у векторній формі. Розглянемо основні поняття векторного аналізу, які приводять до векторної інтерпретації інтегральних перетворень і формул інтегрального числення, які ці перетворення пов'язують.

Скалярним полем називається плоска чи просторова область, з кожною точкою P якої пов'язане певне значення

деякої скалярної фізичної величини $u = u(P)$. Задання поля скалярної величини u рівносильне заданню скалярної (числової) функції $u(P) = f(x, y, z)$.

Поверхнею рівня просторового скалярного поля називається сукупність точок площини, в яких функція цього поля має однакові значення.

Градiєнтом поля $u = f(P)$ в точці P називається вектор

$$\text{grad } u(P) = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}. \quad (4)$$

Напрямок вектора $\text{grad } u$ в кожній точці P збігається з напрямом нормалі до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

Якщо напрям задано одиничним вектором

$$\bar{l}(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \bar{l} = \text{grad}_l u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos \gamma \quad (5)$$

– похідна функції u за напрямом $\bar{l}$.

Із всіх похідних функції $u(P)$, взятих за різними напрямками, найбільше значення завжди буде за напрямом градієнта:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{gr}} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \quad (6)$$

тобто градієнт є вектором швидкості найбільшого зростання (спадання) функції.

Приклад 1. Знайти похідну функції $u = xy + yz + 1$ за напрямом вектора $\vec{l} = (12; -3; -4)$ в будь-якій точці та в точках $A(0; -2; -1)$ і $B(3; 3; 5)$.

Знайдемо частинні похідні функції u і напрямні косинуси вектора l :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y;$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos \beta = -\frac{3}{13}, \quad \cos \gamma = -\frac{4}{13}.$$

Тоді, застосувавши формулу (5), знайдемо похідну функції u за напрямом вектора $\vec{l}$ в будь-якій точці:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{12}{13}y - \frac{3}{13}(x + z) - \frac{4}{13}y = \frac{8y - 3(x + z)}{13},$$

та в точках A і B :

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial l}(B) = 0.$$

Приклад 2. З якою найбільшою швидкістю може зростати функція $u(P) = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ при переході точки $P(x; y; z)$ через точку $P_0(-1; 2; -2)$?

Найбільша за абсолютною величиною швидкість зміни (зростання чи спадання) функції $u(P)$ при переході точки P через точку P_0 числово дорівнює модулю градієнта функції в точці P .

Тоді за формулами (4) і (6) відповідно знаходимо:

$$\text{grad } u = -\left(\frac{20}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}\right) \cdot (x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}),$$

$$\text{grad } u(P_0) = \frac{1}{5}(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}),$$

$$|\text{grad } u(P_0)| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Приклад 3. Знайти точки, в яких функція

$$z = e^x(x - y^3 + 3y)$$

стаціонарна (тобто точки, в яких похідна за будь-яким напрямом дорівнює нулю).

$$\text{Знаходимо } \frac{\partial z}{\partial x} = e^x(x - y^3 + 3y + 1) \text{ і } \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^x(1 - y^2), \text{ тоді,}$$

розв'язавши систему $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, знаходимо точки $A(-3; 1)$ і $B(1; -1)$, в яких задана функція стаціонарна.

Векторне поле. Потік, дивергенція, циркуляція і ротор векторного поля

Векторним полем називається плоска чи просторова область, з кожною точкою P якої пов'язане певне значення деякої векторної фізичної величини $\vec{a} = \vec{a}(P)$.

Потоком векторного поля, створеного вектором $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, через поверхню σ називається поверхневий

інтеграл (скаляр):

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy. \quad (7)$$

Якщо вектор $\vec{a}$ визначає поле швидкостей протікаючої рідини, то інтеграл Π виражає кількість рідини, яка протікає через поверхню σ за одиницю часу. Якщо σ – замкнена поверхня, яка обмежує область G , то при $\Pi > 0$ із області G витікає рідини більше, чим у неї затікає, що вказує на наявність у цій області джерел, які живлять потік рідини. При $\Pi < 0$ із області G витікає рідини менше, чим затікає, що вказує на наявність у цій області стоків, де рідина відділяється від потоку. При $\Pi = 0$ із області G витікає рідини стільки ж, скільки в неї і затікає.

Дивергенцією векторного поля, яке визначається вектором $\vec{a}$, називається скаляр

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (8)$$

Якщо $\operatorname{div} \vec{a}(P_0) > 0$, то точка P_0 називається джерелом; якщо $\operatorname{div} \vec{a}(P_0) < 0$, то точка P_0 називається стоком. Абсолютна величина $\operatorname{div} \vec{a}(P_0)$ характеризує потужність джерела або стоку.

Векторне поле, у всіх точках якого дивергенція дорівнює нулю, називається *соленоїдальним*. Потік такого поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.

За формулою Остроградського–Гаусса, потік і дивергенція векторного поля пов'язані між собою рівністю

$$\begin{aligned} \Pi &= \oint_{\sigma} a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy = \\ &= \iiint_G \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_G \operatorname{div} \bar{a} dx dy dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Лінійним інтегралом вектора $\bar{a}$ вздовж лінії l називається криволінійний інтеграл

$$C = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz. \quad (10)$$

У силовому полі інтеграл (10) виражає роботу сил поля при переміщенні точки вздовж лінії l . У випадку замкненої кривої інтеграл (10) називається *циркуляцією* поля вектора $\bar{a}$ по контуру l . Циркуляція характеризує обертальну здатність поля на контурі l .

Ротором векторного поля, яке визначається вектором $\bar{a}$, називається вектор

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо через точку P поля $\bar{a}$ провести площину α , задану одиничним нормальним вектором $\bar{n}$, то скалярний добуток $\operatorname{rot} \bar{a}(P) \cdot \bar{n}$ характеризує обертальну здатність цього

поля в точці P , яка досягає найбільшої величини, рівної $|\operatorname{rot} \vec{a}(P)|$, тоді, коли площина α перпендикулярна вектору $\operatorname{rot} \vec{a}(P)$.

Векторне поле, у всіх точках якого вектор $\operatorname{rot} \vec{a}(P)$ дорівнює нулю, називається *потенціальним* (або безвихровим). У потенціальному полі лінійний інтеграл (робота) не залежить від форми лінії, що сполучає будь-які дві його точки, а циркуляція завжди рівна нулю.

Векторне поле, яке одночасно і соленоїдальне, і потенціальне, називається *гармонічним*.

Згідно з формулою Стокса, циркуляція і вихровий вектор (ротор) поля пов'язані між собою рівністю:

$$\oint_l a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_{\sigma} (\operatorname{rot} \vec{a})_x dydz + (\operatorname{rot} \vec{a})_y dx dz + (\operatorname{rot} \vec{a})_z dx dy. \quad (12)$$

Циркуляція вектора по замкненому контуру l дорівнює потоку ротора (вихора) вектора через поверхню σ , обмежену цим контуром.

Приклад 1. Знайти дивергенцію векторного поля:

а) $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

б) $\vec{p} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt[3]{(x + y + z)^2}}$;

в) $\vec{q} = e^{xy}(y\vec{j} - x\vec{i} + xy\vec{k})$.

Застосуємо формулу (8):

$$\text{а) } \operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3, \text{ що означає,}$$

що кожна точка поля вектора $\bar{a}$ є джерелом постійної потужності;

$$\begin{aligned} \text{б) } p_x &= p_y = p_z = (x + y + z)^{-2/3}, \\ \frac{\partial p_x}{\partial x} &= \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{\partial p_z}{\partial z} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{(x + y + z)^5}}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \bar{p}(M) = -2(x + y + z)^{-5/3} = f(M),$$

тобто точка M поля вектора $\bar{p}$ в залежності від її координат може бути джерелом або стоком; наприклад точка $M_1(0; 0; 1)$, в якій $\operatorname{div} \bar{p}(M_1) = -2 < 0$, є стоком, а точка $M_2(-1; 0; 0)$, де $\operatorname{div} \bar{p}(M_2) = 2 > 0$, є джерелом;

$$\text{в) } q_x = -x \cdot e^{xy}, \quad q_y = y \cdot e^{xy}, \quad q_z = xy \cdot e^{xy};$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -e^{xy}(1 + xy), \quad \frac{\partial q_y}{\partial y} = e^{xy}(1 + xy), \quad \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0;$$

$$\operatorname{div} \bar{q}(M) = 0.$$

отже, в полі вектора $\bar{q}$ немає ні джерел, ні стоків; потік такого соленоїдального поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\bar{q} = x^3 \bar{i} + y^3 \bar{j} + z^3 \bar{k}$ через повну поверхню конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq H$ зсередини цієї поверхні.

Ураховуючи формули (8) і (9), знаходимо:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \iiint_G \operatorname{div} \bar{q} \, dx dy dz = 3 \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz = \\
 &= 3 \iiint_{G^*} (\rho^2 + z^2) \rho \, d\rho d\varphi dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \rho \, d\rho \int_0^H (\rho^2 + z^2) \, dz = \\
 &= 6\pi \int_0^H \rho \, d\rho \cdot \left(\rho^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^H = 6\pi \int_0^H \rho \, d\rho \left(H\rho^2 + \frac{H^3}{3} - \rho^3 - \frac{\rho^3}{3} \right) = \\
 &= 6\pi \int_0^H \left(H\rho^3 + \frac{H^3}{3} \rho - \frac{4}{3} \rho^4 \right) d\rho = 6\pi \left(H \cdot \frac{\rho^4}{4} + \frac{H^3}{3} \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^H = \\
 &= 6\pi \left(\frac{H^5}{4} + \frac{H^5}{6} - \frac{4H^5}{15} \right) = \frac{9\pi H^5}{10}.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Перевірити, що векторне поле $\bar{p} = yz(4x \cdot \bar{i} - y \cdot \bar{j} - z \cdot \bar{k})$ є соленоїдальним.

Тут $p_x = 4xyz$, $p_y = -y^2z$, $p_z = -yz^2$; тоді $\frac{\partial p_x}{\partial x} = 4yz$,

$$\frac{\partial p_y}{\partial y} = -2yz, \quad \frac{\partial p_z}{\partial z} = -2yz.$$

Дійсно, $\operatorname{div} \bar{p} = \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = 4yz - 2yz - 2yz = 0$, а то-

му поле вектора $\bar{p}$ є соленоїдальним, тобто потік такого вектора через будь-яку поверхню дорівнює нулю.

Приклад 4. Обчислити циркуляцію поля вектора:

а) $\vec{r} = x\vec{j}$ вздовж кола $x = a \cos t$, $y = a \sin t$;

б) $\vec{p} = (x-2)\vec{i} + (x+y)\vec{j} - 2z\vec{k}$ вздовж периметра трикутника з вершинами $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$;

в) $\vec{q} = (xz; -yz^2; xy)$ вздовж замкненої лінії $L: z = x^2 - y^2 + 2a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$ і вихровий вектор цього поля в точці $A(0; -a; a^2)$.
Застосуємо формулу (10):

$$\begin{aligned} \text{а) } C &= \oint_L x dy = a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi a^2; \end{aligned}$$

$$\text{б) } C = \oint_{ABCA} (x-2)dx + (x+y)dy - 2z dz.$$

Периметр $ABCA$ складається з трьох відрізків, тому криволінійний інтеграл по контуру $ABCA$ обчислюється як сума інтегралів по відрізках AB , BC і CA , рівняння яких:

$$AB: x + y = 1, z = 0;$$

$$BC: y + z = 1, x = 0;$$

$$CA: x + z = 1, y = 0.$$

Тоді

$$I_1 = \int_{AB} (x-2)dx + (x+1-x) \cdot (-dx) = \int_1^0 (x-3)dx = \frac{(x-3)^2}{2} \Big|_1^0 = \frac{5}{2},$$

$$I_2 = \int_{BC} y dy - 2(1-y) \cdot (-dy) = \int_1^0 (2-y) dy = -\frac{(2-y)^2}{2} \Big|_1^0 = -\frac{3}{2},$$

$$I_3 = \int_{CA} (x-2) dx - 2(1-x)(-dx) = \int_0^1 (-x) dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $C = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

в) $C = \oint_L xz dx - yz^2 dy + xy dz.$

Перетворимо задані рівняння кривої L в параметричні:

нехай $x = a \cos t$, тоді $y = a \sin t$, $z = a^2(2 + \cos 2t).$

Отже,

$$C = \oint_L a^3 \cos t (2 + \cos 2t) \cdot (-a \sin t) dt - a^5 \sin t (2 + \cos 2t)^2 \cdot a \cos t dt +$$

$$+ a^2 \sin t \cos t \cdot (-2a^2 \sin 2t) dt = -\frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin 2t (2 + \cos 2t) dt -$$

$$-\frac{a^6}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2t (2 + \cos 2t)^2 dt - a^4 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} (2 + \cos 2t) d(2 + \cos 2t) + \frac{a^6}{4} \int_0^{2\pi} (2 + \cos 2t)^2 d(2 + \cos 2t) -$$

$$-\frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{(2 + \cos 2t)^2}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{a^6}{4} \cdot \frac{(2 + \cos 2t)^3}{3} \Big|_0^{2\pi} -$$

$$-\frac{a^4}{2} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{2\pi} = -\pi a^4.$$

Знайдемо вихровий вектор (ротор) за формулою (11):
 $\text{rot } \bar{q} = (x + 2yz) \cdot \bar{i} + (x - y) \cdot \bar{j}$, який у точці $A(0; -a; a^2)$ дорівнює
 $\text{rot } \bar{q}(A) = a\bar{j} - 2a^3 \cdot \bar{i}$.

Приклад 5. Довести, що векторне поле градієнта функції
 $u = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[4]{z}$ є потенціальним.

За формулою (4) знаходимо градієнт функції $u(x, y, z)$:

$$\text{grad } u = \frac{\sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[4]{z}}{2\sqrt{x}} \bar{i} + \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{z}}{3\sqrt[3]{y^2}} \bar{j} + \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{4\sqrt[4]{z^3}} \bar{k}.$$

Тоді ротор вектора градієнта за формулою (11) буде:

$$\text{rot}(\text{grad } u) = \left(\frac{\sqrt{x}}{4\sqrt[4]{z^3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} - \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{z^3}} \right) \bar{i} +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt[3]{y}}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{z^3}} - \frac{\sqrt[3]{y}}{4\sqrt[4]{z^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \bar{j} +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt[4]{z}}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[4]{z}}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \right) \bar{k} = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}.$$

Отже поле градієнта функції $u(x, y, z)$ є потенціальним.

Приклад 6. Перевірити, чи буде векторне поле вектора

$$\bar{a} = \frac{x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \text{ гармонічним.}$$

Координати вектора $\bar{a}$:

$$a_x = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \quad a_y = \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

$$a_z = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial x} &= \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - x \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}.$$

$$\text{Тоді за формулою (8) } \operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0. \text{ Отже,}$$

поле вектора $\bar{a}$ є соленоїдальним.

Знайдемо ротор вектора $\bar{a}$ за формулою (11):

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} = z \cdot \left(-\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \right) \cdot 2y = -3yz (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2},$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial z} = y \cdot \left(-\frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \right) \cdot 2z = -3yz (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2},$$

$$\text{тоді } \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = -3xz (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} + 3xz (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} = 0,$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = -3xy (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} + 3xy (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} = 0,$$

тобто $\text{rot } \bar{a} = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$, а тому поле вектора $\bar{a}$ є потенціальним.

Таким чином, оскільки поле $\bar{a}$ є соленоїдальним і потенціальним, то воно є гармонічним.



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 382 с.
2. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1986. – Ч. 2. – 304 с.
3. **Демидович, В. П.** Задачи и упражнения по математическому анализу [Текст] / В. П. Демидович. – М. : Наука, 1966. – 472 с.
4. **Дубовик, В. П.** Вища математика [Текст] : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.
5. **Запорожец, Г. И.** Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] / Г. И. Запорожец. – М. : Высшая школа, 1966. – 464 с.
6. **Кузнецов, А. М.** Курс лекцій з математичного аналізу [Електронний ресурс] : навч. посіб. / А. М. Кузнецов, Н. О. Романчук // Електронне видання на DVD-ROM. – Миколаїв : Видавництво НУК, 2015.
7. **Фихтенгольц, Г. М.** Основы математического анализа [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – 464 с.

ЗМІСТ

Лекція 1. Подвійний інтеграл: означення, властивості, обчислення	3
Лекція 2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Полярні координати. Застосування подвійного інтеграла до задач геометрії, механіки	16
Лекція 3. Означення та обчислення потрійних інтегралів	32
Лекція 4. Циліндричні та сферичні координати. Застосування потрійного інтеграла	45
Лекція 5. Криволінійний інтеграл I роду: означення та обчислення	60
Лекція 6. Обчислення та застосування криволінійних інтегралів II роду. Формула Гріна. Інтегрування повних диференціалів	78
Лекція 7. Поверхневі інтеграли	101
Лекція 8. Формули Остроградського-Гаусса і Стокса. Елементи теорії поля	127
Список літератури	147



Навчальне видання

РОМАНЧУК Наталя Олександрівна
ШАПОВАЛ Наталя Олександрівна
МАЙБОРОДА Олександр Валерійович

**КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ,
ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ**

Навчальний посібник

Редактор *М. П. Фоміна*

Комп'ютерне складання та верстання *В. В. Москаленко*

Коректор *М. О. Паненко*

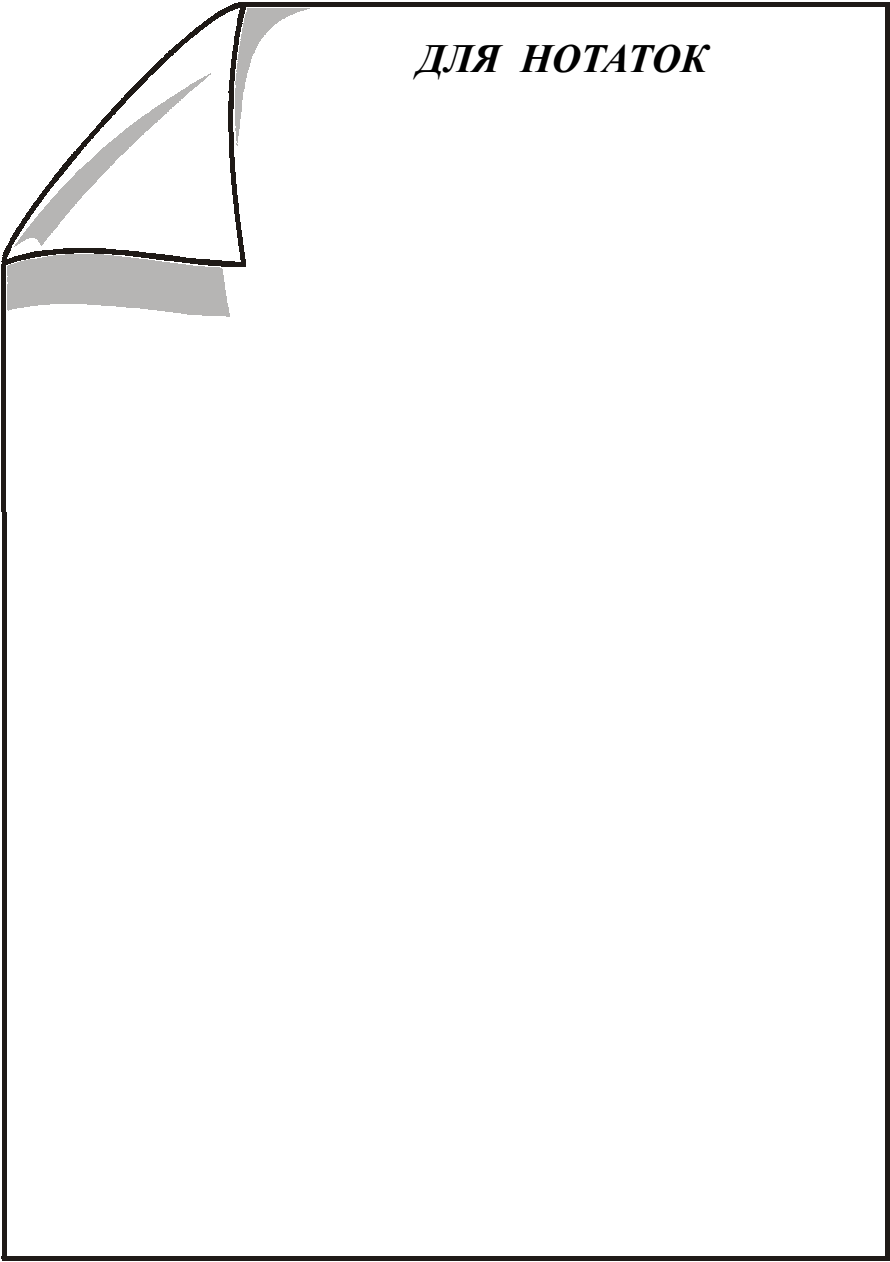
Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 8,8. Тираж 100 прим. Вид № 23. Зам. № 2905-01.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

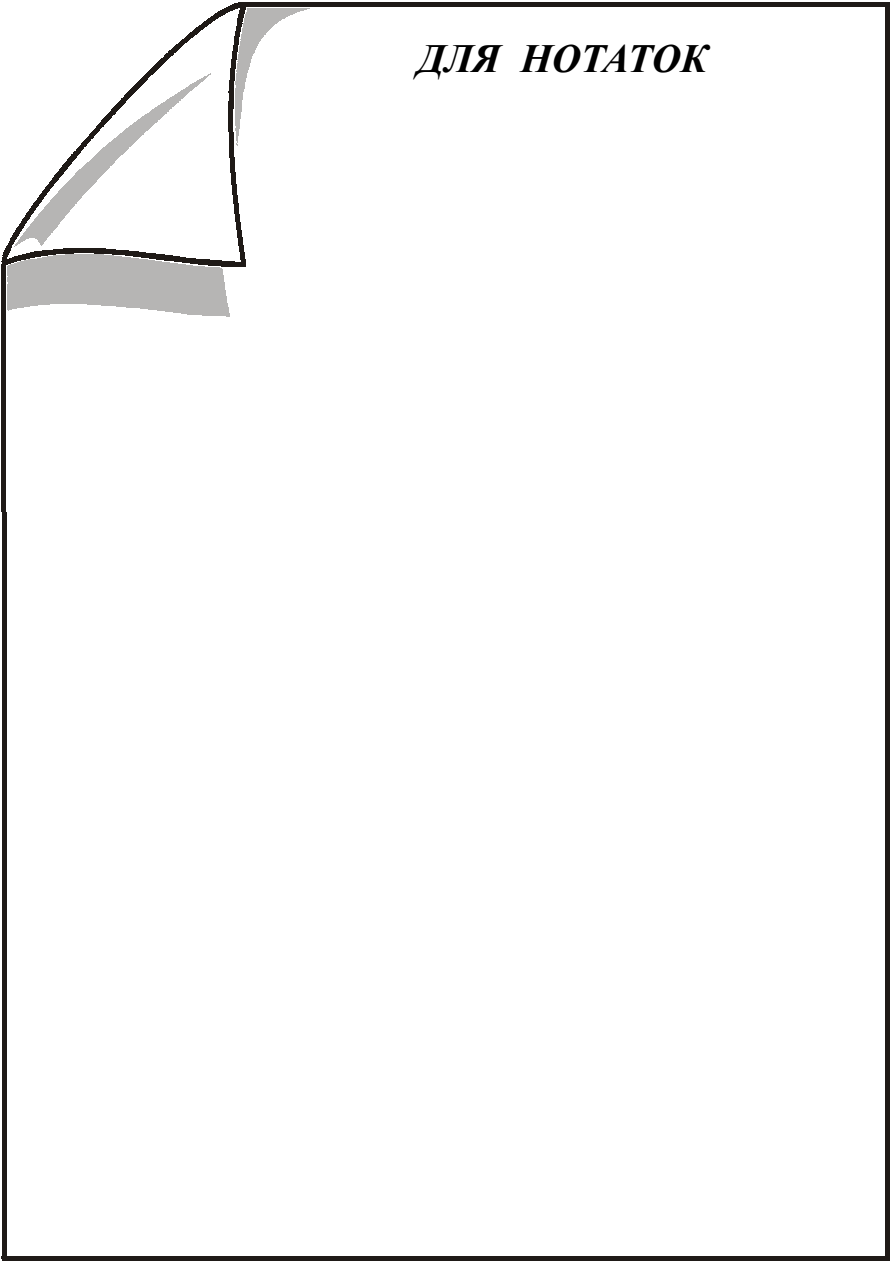
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2019 р.



ДЛЯ ЗАДАТОК

ДЛЯ ЗАДАТОК



ДЛЯ ЗАДАТОК