

И.А. Астионенко, Е.И. Литвиненко, А.Н. Хомченко
**КОГНИТИВНО-ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
КРИВЫХ ЭРМИТА-КУНСА 5-ГО ПОРЯДКА**

Аннотация. Рассматриваются кривые Кунса 5-го порядка, обеспечивающие непрерывность функции, а также первой и второй производной (C^2 -гладкость). Обычно для построения полинома Кунса составляют и решают систему линейных алгебраических уравнений с матрицей 6×6 . В статье предложен нематричный метод конструирования кривых Кунса, который сводится к интегрированию простого дифференциального уравнения 2-го порядка. Получены полиномы Кунса на двух канонических интервалах: $[0,1]$ и $[-1,1]$. Когнитивно-графический анализ обнаруживает тесные связи полиномов Кунса 5-го порядка с полиномами 2-го порядка Бернулли и Лежандра, определяющими координаты расчетных узлов квадратуры Гаусса повышенной точности (модифицированная формула трапеций).
Ключевые слова: интерполяционные функции Кунса, конечный элемент, когнитивно-графический анализ.

Введение. В теории полиномиальной интерполяции наибольшее распространение получили две версии: интерполирование с простыми узлами (по Лагранжу) и интерполирование с кратными узлами (по Эрмиту). Интерполяционные полиномы Кунса – частный случай интерполяции по Эрмиту.

С 1967 г. кривые Кунса успешно применяются в САПР кузова легкового автомобиля. Полиномы 3-го порядка обеспечивают C^1 -гладкость, когда непрерывна сама функция и ее касательные. Впоследствии с учетом требований аэродинамики потребовалась C^2 -гладкость, обеспечивающая еще и непрерывность кривизны. Для этого уже необходимы полиномы Кунса 5-го порядка. Традиционный подход предусматривает составление и решение СЛАУ с матрицей 6×6 . Представляет интерес разработка других (нематричных) методов конструирования кривых Кунса.

Анализ предшествующих публикаций. О кривых Кунса и их роли в САПР автомобиля можно почитать в [1]. Там же приведены выражения для полиномов Кунса 3-го и 5-го порядков. Вероятностно-геометрический метод конструирования полиномов Кунса 3-го порядка описан в [2].

Цель статьи – построение кривых Кунса 5-го порядка путем когнитивно-графического анализа их особенностей, что освобождает от необходимости составлять и решать СЛАУ. Подобный анализ порождает новые знания о кривых Кунса, в частности, их связи с функциями распределения вероятностей и квадратурными формулами Гаусса. Фактически, для кривых Кунса 5-го порядка мы решаем обратную задачу на кривизну, для кривых третьего порядка – это обратная задача на касательную.

Основная часть. Ниже получены полиномы Кунса 5-го порядка на конечных носителях $[0,1]$ и $[-1,1]$. Сначала рассмотрим интервал $[0,1]$ и сформулируем интерполяционную гипотезу Эрмита-Кунса.

Наша задача – построить базис Кунса, т.е. симметричную пару кривых, каждая из которых ассоциируется с конкретным узлом на конце интервала. Главная особенность модели Эрмита – использование кратных узлов. Полный полином 5-го порядка содержит 6 параметров, поэтому кратность узла равна 3. Предполагается, что в каждом узле известно не только значение функции (как в модели Лагранжа), но и значения первой и второй производных.

Сохраняя обозначения [1], запишем интерполяционный полином в виде:

$$G_i = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 + \alpha_6 x^5, \quad i = 0, 1, \quad (1)$$

где i – номер полинома.

Граничные условия:

$$G_i(x) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad G'_i(x_k) = 0, \quad G''_i(x_k) = 0, \quad k = 0, 1, \quad (2)$$

где k – номер узла.

Граничные условия (2) сводят задачу к определению коэффициентов α_j ($j = \overline{1,6}$). Опуская процедуру составления и решения СЛАУ с матрицей 6×6 , запишем искомые полиномы

$$G_0 = 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5, \quad (3)$$

$$G_1 = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5.$$

Графики кривых Кунса показаны на рис. 1.

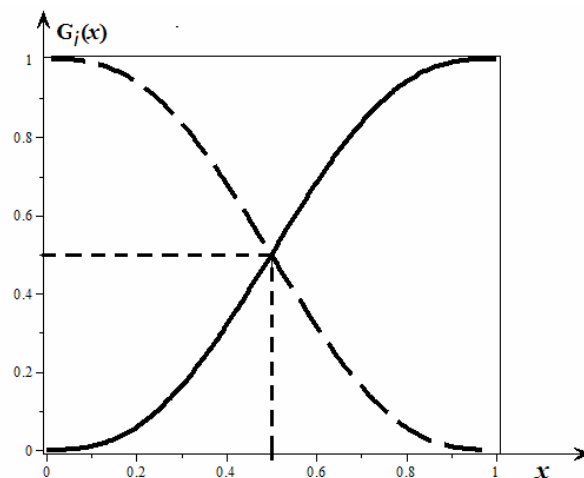


Рисунок 1 - Кривые Кунса (сплошная кривая - $G_1(x)$,
пунктирная - $G_0(x)$)

Стоит отметить, что на $[0,1]$ можно указать, по крайней мере, три пары симметричных полиномов (1-го, 3-го и 5-го порядков), обладающих одинаковыми свойствами. Иначе говоря, в этой иерархии каждая пара полиномов наследует типичные свойства предыдущих пар. Легко убедиться, что здесь мы имеем дело с противоположными событиями:

$$A = \{\text{попадание случайной точки в } (0, x)\},$$

$$\bar{A} = \{\text{попадание случайной точки в } (x, 1)\}.$$

Полиномы с номером 1 обладают типичными свойствами функции распределения вероятностей. Они определяют вероятность $p(A)$. Полиномы с номером 0 определяют $p(\bar{A})$. Поэтому сумма каждой пары полиномов дает единицу. Например, $G_0(x) + G_1(x) = 1$.

Укажем на еще одно важное свойство:

$$\int_0^1 G'_1(x) dx = 1. \quad (4)$$

Наследственность проявляется в том, что эти свойства присущи полиномам 3-го порядка:

$$F_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad F_1(x) = -2x^3 + 3x^2, \quad (5)$$

а также полиномам 1-го порядка:

$$L_0(x) = 1 - x, \quad L_1(x) = x. \quad (6)$$

В теории вероятностей равенство (4) называют условием нормировки, где $G'_1(x)$ - плотность распределения вероятностей.

Чтобы восстановить полиномы $G_i(x)$, достаточно схематически изобразить графики $G'_i(x)$ и $G''_i(x)$ (рис. 2).

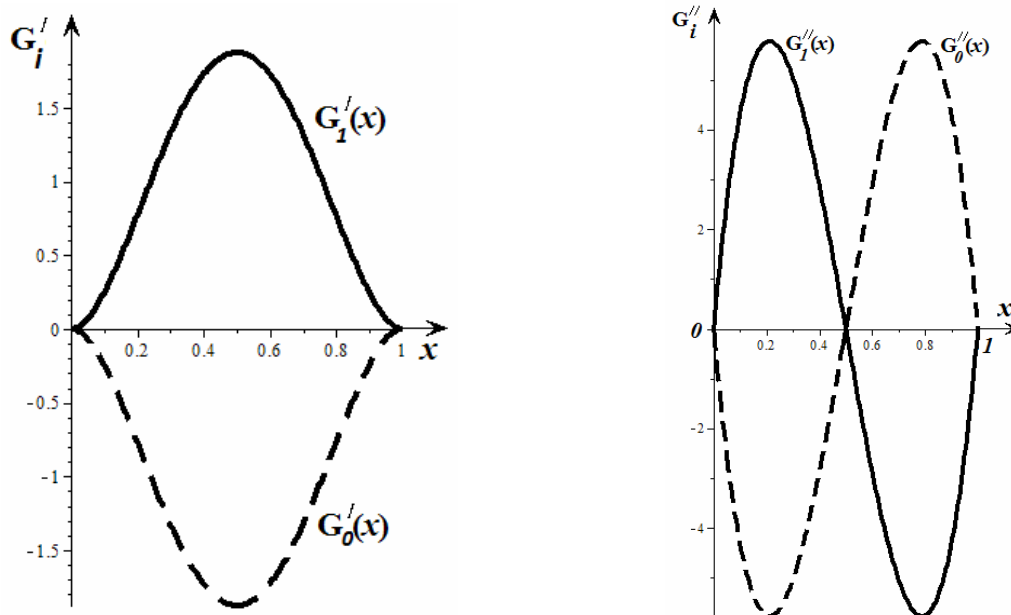


Рисунок 2 - Графики производных $G'_i(x)$ и $G''_i(x)$

Напомним, что $G'_i(x)$ описывает закон изменения тангенса угла наклона касательной к кривой $G_i(x)$, а $G''_i(x)$ отражает характер изменения кривизны кривой $G_i(x)$.

Процедура восстановления $G_i(x)$ заключается в последовательном интегрировании производных, начиная с $G''_i(x)$. Например, полином 3-го порядка $G''_1(x)$ легко представить в виде произведения трех линейных функций

$$G''_1(x) = \mu x(1-x)(1+x), \quad (7)$$

где μ - параметр, подлежащий определению.

Дифференциальное уравнение (7) интегрируется дважды с учетом граничных условий (2), а нормирующий множитель определяется из условия (4).

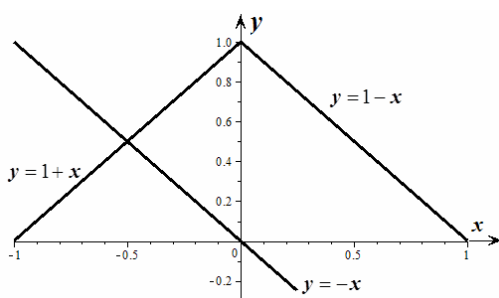
Таким образом, на отрезке $[0,1]$ полиномы Кунса 5-го порядка имеют вид:

$$G_1 = 10x^3 - 15x^4 + 6x^5, \quad G_0 = 1 - 10x^3 + 15x^4 - 6x^5. \quad (8)$$

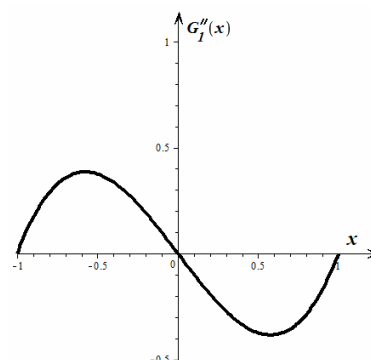
Интересно, что экстремумы $G_i''(x)$ в точности соответствуют нулям полинома Бернулли второго порядка $G_i'''(x)=0$, т.е. совпадают с узлами высокоточной квадратуры Гаусса-Бернулли. Напомним, что эти узлы лежат в точках: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Процесс восстановления функции $G_1(x)$ на отрезке $[-1,1]$ показан на рис. 3 и практически не нуждается в пояснениях.

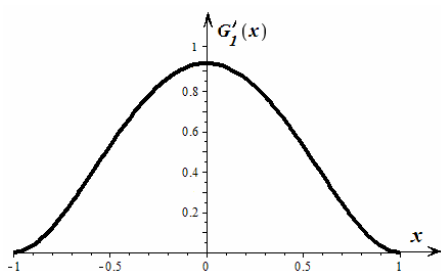
Шаг 1



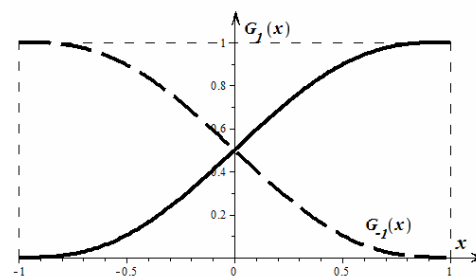
Шаг 2



Шаг 3



Шаг 4

Рисунок 3 - Геометрия процесса восстановления $G_1(x)$

На 1-м шаге выбраны три прямые, обеспечивающие нули в точках пересечения $G_1''(x)$ с осью Ox . Это абсциссы точек перегиба графика $G_1(x)$ (см. граничные условия). На 2-м шаге путем перемножения линейных функций получаем полином 3-го порядка:

$$G_1''(x) = \mu x(x^2 - 1).$$

На 3-м шаге путем интегрирования $G_1''(x)$ получаем

$$G_1'(x) = \frac{15}{16}(x^2 - 1)^2.$$

Наконец, 4-й шаг (интегрирование $G_1'(x)$) дает

$$G_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{15}{16}x - \frac{5}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^5.$$

Тогда

$$G_{-1}(x) = \frac{1}{2} - \frac{15}{16}x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{3}{16}x^5.$$

Легко догадаться, что в этом случае экстремум функции соответствует нулям полинома Лежандра 2-го порядка, т.е. совпадает с узлами квадратуры Гаусса-Лежандра. Как известно, эти узлы лежат в точках $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Выводы. В задачах интерполяции по Эрмиту узлы интерполяции хранят содержательную геометрическую информацию об интерполяционном полиноме. Когнитивно-графический подход к построению полинома позволяет отказаться от традиционной процедуры составления и решения СЛАУ, заменив ее интегрированием простого дифференциального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жермен-Лакур П. Математика и САПР. /П. Жермен-Лакур, П.Л. Жорж, Ф. Пистр, П. Безье. – Кн. 2. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
2. Хомченко А.Н. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность /А.Н. Хомченко, Н.А. Козуб // Проблеми інформаційних технологій. – Вип. 5. – Херсон: ХНТУ, 2009. – С. 145-148.