МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальний университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

**И. И. КОВАЛЕНКО, Т. А. ФАРИОНОВА,
С. Б. ПРИХОДЬКО**

МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

*Рекомендовано Министерством образования
и науки Украины как учебное пособие*

Николаев 2009

УДК 519.8
ББК 22.18
К 56

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины, лист № 14/18-Г-2997 от 31.12.08

Рецензенти:

Ходаков В.Э., д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой информационных систем ХНТУ, заслуженный деятель науки и техники Украины;

Фисун Н.Т., д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой интеллектуальных информационных систем ЧГУ им. Петра Могилы

Коваленко И.И., Фарионова Т.А., Приходько С.Б.
К 56 Методы принятия решений: Учебное пособие. – Николаев: НУК, 2009. – 180 с.

ISBN 978–966–321–118–3

Рассмотрен ряд методов принятия решений, которые базируются на современных теориях исследования операций; статистических решений и игр; на методе анализа иерархий; методах анализа экспертных оценок.

Пособие рассчитано на студентов, аспирантов и специалистов, занимающихся задачами принятия решений.

УДК 519.8
ББК 22.18

ISBN 978–966–321–118–3

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время термин *принятие решений* (ПР) встречается в различных научных дисциплинах. Прежде всего следует указать на экономико-математические методы, нацеленные на исследование проблем рационального использования, например, ограниченных ресурсов. Это одно из направлений прикладной математики, получившее название *теория полезности для принятия решений*. Термин ПР, под которым понимается применение количественных математических методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности [4], присутствует в формулировке *исследование операций*.

Термин *принятие решений* используется в научном направлении, получившем название *искусственный интеллект*, в рамках которого создаются системы поддержки принятия решений (СППР) – в английском эквиваленте Decision Support System (DSS). В когнитивной психологии исследуются проблемы человеческой системы переработки информации и ее связь с принятием решений. В политологии одним из главных объектов изучения являются механизмы принятия решений политическими лидерами. Термин *принятие решений* можно встретить и в зоологии, когда исследуются проблемы социального поведения животных.

Приведенный перечень можно было бы продолжить, однако достаточно ясно, что в настоящее время сложилось многодисциплинарное научное направление, получившее название ***теория принятия решений***, в рамках которого изучаются процессы принятия решений на основе целого ряда моделей и методов выбора в различных ситуациях.

Многодисциплинарность этой теории определяется тем, что создание методов принятия решений требует рассмотрения психологических, математических, компьютерных и других проблем. В связи с этим в развитии данного научного направления принимают участие психологи, математики, специалисты по искусственному интеллекту, информатике, вычислительной технике и др.

Теория принятия решений, являясь сравнительно новым научным направлением (начало было положено в 60-х годах прошлого столетия западными учеными – английский эквивалент принятия решений Decision Science, Decision Making, дальнейшее развитие получило в трудах отечественных ученых), в последние 10–15 лет активно внедряется в учебные дисциплины, читаемые студентам, обучающимся по ряду специальностей направлений: "Компьютерные науки", "Компьютерная инженерия", "Программная инженерия" и др. Тем не менее следует отметить, что, несмотря на наличие достаточно многочисленных публикаций на эту тему (статьи в специальных журналах, монографии), наблюдается явно недостаточная обеспеченность читаемых дисциплин капитальными учебниками и учебными пособиями.

Пожалуй, можно сослаться лишь на классический учебник [14], изданный и переизданный в последние годы в России. Предлагаемое учебное пособие является попыткой восполнить в определенной степени указанный пробел и построено на материалах работ [3–5, 7–9, 13, 14], принадлежащих известным специалистам в области теории принятия решений.

Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОБЛЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1.1. Основные понятия и определения теории принятия решений

Среди различных областей применения математических методов и средств вычислительной техники есть одна, которая с точки зрения человеческой деятельности является крайне важной. Это область ***принятия решений*** в ситуациях, когда последствия результатов выбора определенного курса действий могут быть очень серьезными [9].

Определим, что ПР по существу не что иное, как выбор наилучшего варианта действий. Варианты действий принято называть *альтернативами*. Альтернативы – неотъемлемая часть проблемы ПР: если не из чего выбирать, то и нет выбора. Следовательно, для постановки задачи ПР необходимо иметь хотя бы две альтернативы [7].

Альтернативы характеризуются различными показателями их привлекательности, которые называют *критериями оценки альтернатив*. Процесс принятия решений (выбор) состоит из ряда этапов [9]. Прежде всего проводится информационный поиск по конкретной проблеме ПР, далее выполняется подбор вариантов выбора, т. е. формируется множество альтернатив. Первоначально множество альтернатив чаще всего аморфно, т. е. не имеет структуры. Другими словами, чаще всего сразу невозможно определить, какая альтернатива лучше, а какая хуже. Поэтому на заключительном этапе решения задачи выбора выполняется процедура структуризации множества первоначально сформированных альтернатив.

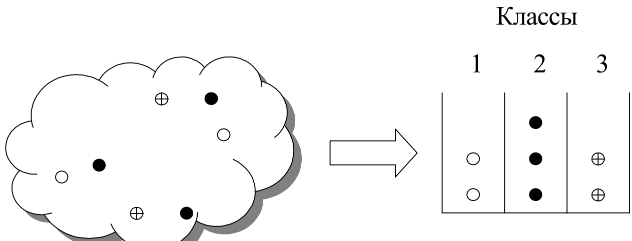
В работе [7] рассматриваются следующие процедуры структуризации:

классификация, заключающаяся в разбиении исходного множества альтернатив на ***классы*** (рис. 1.1). Можно считать, что каждый класс есть подмножество исходного множества альтернатив. Необходимо отметить, что классы *не упорядочены* относительно друг друга. Другими словами, нельзя сказать, что какой-то класс "важнее" (лучше, старше, дороже и т. п.) другого;

стратификация – это название произошло от английского термина *strata* ("страта"), что означает "слой", "пласт". Иными словами, стратификация есть разбиение множества на ряд уровней или слоев. В отличие от классов ***страты*** упорядочены. На рис. 1.2, например, альтернативы, показанные значками ○ и ⊕, помещены на верхнюю страту. Это означает, что они одинаковы по *значимости* и одновременно *важнее* (лучше) остальных альтернатив;

ранжирование заключается в упорядочении альтернатив по важности с присвоением каждой из них определенного номера (***ранга***). Например, ранг 1 принято присваивать наилучшему объекту. Один и тот же ранг может быть присвоен нескольким объектам. Такая ранжировка называется *нестрогой*, тогда как в *строгой* ранжировке каждой альтернативе присваивается *уникальный* (единственный) номер ранга. Процедура ранжировки альтернатив получила широкое распространение и выполняется на основе, как правило, *попарного* их сравнения. Если, например, имеются две альтернативы a и b, то при их попарном сравнении возможны только три варианта результата:

a лучше b (обозначим это как $a > b$);
a хуже b ($a < b$);
a и b равноценны ($a = b$).



а ***б***

Рис. 1.1. Графическое представление процедуры классификации альтернатив:

а – неструктурированное множество альтернатив;
б – структурированное (классическое)

Сравнивая попарно все альтернативы некоторого исходного множества, например $\{a, b, c, d\}$, можно получить нестрогую ранжировку: $a > b$, $b > d$, $d > c$, $c > a$, $a > d$, $b = c$ – и результат представить, как показано на рис. 1.3.

Рассмотренные процедуры структуризации альтернатив являются основой принятия решений и реализуются при помощи различных методов.

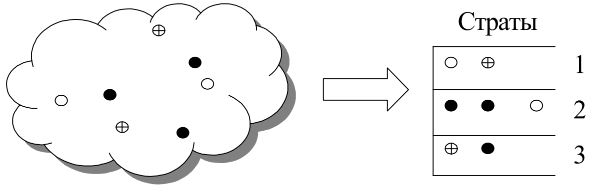
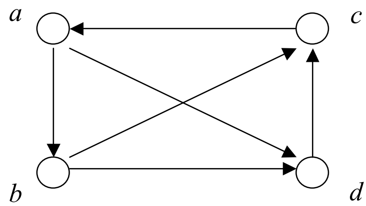


Рис. 1.2. Графическое представление процедуры стратификации альтернатив

Рис. 1.3. Графические представление процедуры ранжирования (упорядочения) альтернатив



1.2. Роль людей в процессе принятия решений

Выбор решений является исключительной прерогативой человека, так как он, с его непревзойденным умением решать неформальные задачи, принимать так называемые "компромиссные решения" (нестрого-оптимальные, но приемлемые по ряду критериев), может взять на себя ответственность за окончательный выбор. В процессе принятия решений люди могут играть различные роли [7, 9] и создавать определенные формы взаимодействия (рис. 1.4).

Будем называть человека, фактически осуществляющего выбор наилучшего варианта действий, лицом, принимающим решения (ЛПР). Он может быть единственным источником информации, позволяющим оценить варианты решений и самостоятельно выбрать из них наилучший.

Наряду с ЛПР в [9] выделяется как отдельная личность владелец проблемы (ВП) – человек, который должен ее решать и несет ответственность за принятые решения. Но это далеко не всегда означает, что ВП является ЛПР, хотя и бывают ситуации, когда ВП может быть председателем или членом коллективного органа, принимающего решения.

В определенных ситуациях ЛПР может принимать решения в условиях объективной действительности, которую принято называть *природной* и которая мыслится как некая незаинтересованная инстанция, не причиняющая вреда.

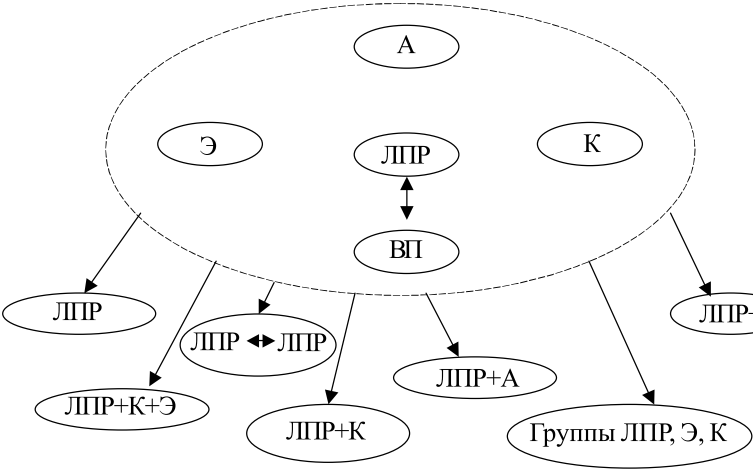


Рис. 1.4. Роль людей и формы их взаимодействия в процессе ПР:
ЛПР – лицо, принимающее решение; ВП – владелец проблемы; А – аналитик; К – консультант; Э – эксперт

Однако существуют ситуации, когда одному ЛПР противостоит другое, стремящееся нанести ему вред (ЛПР ↔ ЛПР). Такие ситуации, когда сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные, а порой противоположные цели, называются *конфликтными ситуациями*. Примерами конфликтных ситуаций могут служить ход боевых действий, конкуренция в экономических процессах, противодействие в судопроизводстве, спорте и др. (Математической теорией конфликтных ситуаций является теория игр, цель которой – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.)

В работах [4, 9] выделяется еще одна группа людей, участвующих в подготовке принятия решений, – аналитики (А) – специалисты в области исследования. Заказы на проведение исследования операций выдаются руководителями (ЛПР + А).

Получив такой заказ, аналитик исследует систему, внешнюю среду и пытается построить адекватную математическую модель.

Построение моделей рассматривается в рамках исследования операций как средство отображения объективно существующей реальности (например, транспортная задача линейного программирования). Когда модель, правильно отражающая действительность, определена, критерий установлен, оптимальное решение возникает единственно возможным образом. В этом взаимодействии сам руководитель (ЛПР) чаще всего не нужен, так как в описаниях многочисленных случаев применения методов исследования операций подчеркивается, что группа аналитиков сама находит удачное решение, а задачей ЛПР является только его внедрение [4].

В современном, постоянно усложняющемся мире ЛПР постоянно сталкиваются со сложными проблемами выбора при неопределенности последствий и при наличии многих критериев оценки качества решения. Именно в связи с этим особое значение имеет привлечение опытных и хорошо подготовленных консультантов (К), роль которых сводится к оказанию помощи ЛПР в правильной постановке проблемы, в четком выявлении предпочтений руководителя, в организации сбора и обработки необходимой информации (ЛПР + К). В приложении к общей схеме процесса принятия решений в обязанности консультантов входит еще и участие в разработке перечня критериев для выбора альтернатив [4].

По мере своего совершенствования консультанты могут стать экспертами (Э), т. е. профессионалами в той или иной области, которые оказывают помощь ЛПР (ЛПР + Э).

Эксперты выступают как своего рода "измерительные приборы" и оценивают альтернативы по шкале каждого из критериев.

До сих пор мы упоминали людей, участвующих в процессе принятия решения в единственном числе (есть один ЛПР, один эксперт или консультант). Однако достаточно часто предложения по принятию решений готовятся для ЛПР с учетом, например, нескольких экспертов. Такая процедура получила название *групповые решения*. При групповой экспертизе наиболее типичны следующие ситуации: у экспертов могут быть разные мнения по поводу набора критериев или о сравнительной значимости критериев; эксперты дают разные оценки альтернатив по критериям и др.

1.3. Понятие неопределенности в задачах принятия решений

Основой любого процесса принятия решений является информация, которая имеется у ЛПР. Однако достаточно часто часть информации, необходимой для принятия решения, отсутствует или не может быть формализована. Так возникает проблема решения в условиях неопределенности.

В работах [2, 14] авторы классифицируют выбор решений по следующим признакам:

при определенности, если относительно каждого действия известно, что оно неизменно приводит к некоторому конкретному исходу;

при риске, если каждое действие приводит к одному из множества всевозможных частных исходов, причем каждый исход имеет известную вероятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности известны;

при неопределенности, когда то или иное действие (или все действия) имеет следствием множество возможных исходов, но вероятности этих исходов ЛПР неизвестны.

Общее для выбора при риске и неопределенности состоит в наличии неконтролируемых со стороны ЛПР факторов и событий. Однако в ситуации риска предполагается, что вероятности возможных исходов известны или могут быть рассчитаны на основании статистических данных, тогда как в ситуации неопределенности эти вероятности нам неизвестны или мы не можем их рассчитать.

Автор работы [2] раскрывает понятие *неопределенность* с использованием двух условных терминов: "доброкачественная" неопределенность и "дурная" неопределенность. В первом случае полагается, что неизвестные факторы представляют собой обычные объекты изучения теории вероятностей – случайные величины (или случайные функции), статистические характеристики которых нам известны или могут быть получены. Такие задачи называются *стохастическими*, а присущая им неопределенность – *стохастической неопределенностью*. Для того чтобы привести пример данного вида неопределенности, вспомним, что под термином *случайное явление* в теории вероятностей принято понимать явление, относящееся к классу повторяемых и, главное, обладающее свойством статистической устойчивости. При повторении однородных опытов, исход которых случаен, их средние характеристики проявляют тенденции к устойчивости, стабилизируются. Частоты событий приближаются к их вероятностям, средние арифметические – к математическим ожиданиям. Если много раз бросать монету, частота появления герба постепенно стабилизируется, перестает быть случайной. Это пример "доброкачественной", стохастической неопределенности.

Второй вид неопределенности не имеет стохастической (случайной) природы, т. е. у неопределенных факторов, влияющих на процесс ПР, вообще не существует вероятностных характеристик. Другими словами, их нельзя считать "случайными" в обычном понимании. Такие факторы могут быть уникальными, описываться на качественном (вербальном) уровне. Например, планируется некая торгово-промышленная операция, успех которой зависит от того, юбки какой длины будут носить женщины через два года. Распределение вероятностей для возможной длины юбки, в принципе, не может быть получено ни из каких статистических данных. Даже если рассмотреть множество опытов (годов), начиная с далеких времен, когда женщины впервые надели юбки, и в каждом из них зарегистрировать длину, это вряд ли поможет в нашем прогнозе [2]. Вероятностные распределения их характеристик попросту не существуют, так как не существует массива однородных опытов, а следовательно, не приходится говорить ни о какой устойчивости. Зачастую единственно возможным методом преодоления данного вида неопределенности является метод экспертных оценок.

Рассмотрим наиболее важные для задач ПР виды неопределенности, описание которых представлено деревом (рис. 1.5).

Первый уровень данного дерева образован терминами, качественно характеризующими количество отсутствующей информации об элементах задачи принятия решений.

В ситуации неизвестности информация о задаче практически отсутствует (начальная стадия изучения задачи). В процессе сбора сведений на определенном этапе может оказаться, что собрана еще не вся возможная (неполнота) или не вся необходимая (недостаточность) информация; для некоторых элементов определены не их точные описания, а лишь множества, которым эти описания принадлежат (неопределенность); ряд элементов задачи временно описаны лишь по аналогии с уже решавшимися задачами, имеется лишь "замещающее" описание (неадекватность). Важно, что наличие данных видов неопределенности (недостоверности) связано либо с временной приостановкой процесса сбора информации (изучения задачи принятия решений), либо с нехваткой ресурсов, выделенных для сбора информации. Однако, в принципе, возможность результативного продолжения изучения задачи существует.

Дальнейшее изучение может привести либо к ситуации определенности, в которой все элементы описаны однозначно (классический пример – транспортная задача линейного программирования), либо к ситуации неоднозначности. Для последней предполагается, что вся возможная информация о задаче собрана, но полностью определенное описание не получено и не может быть получено.

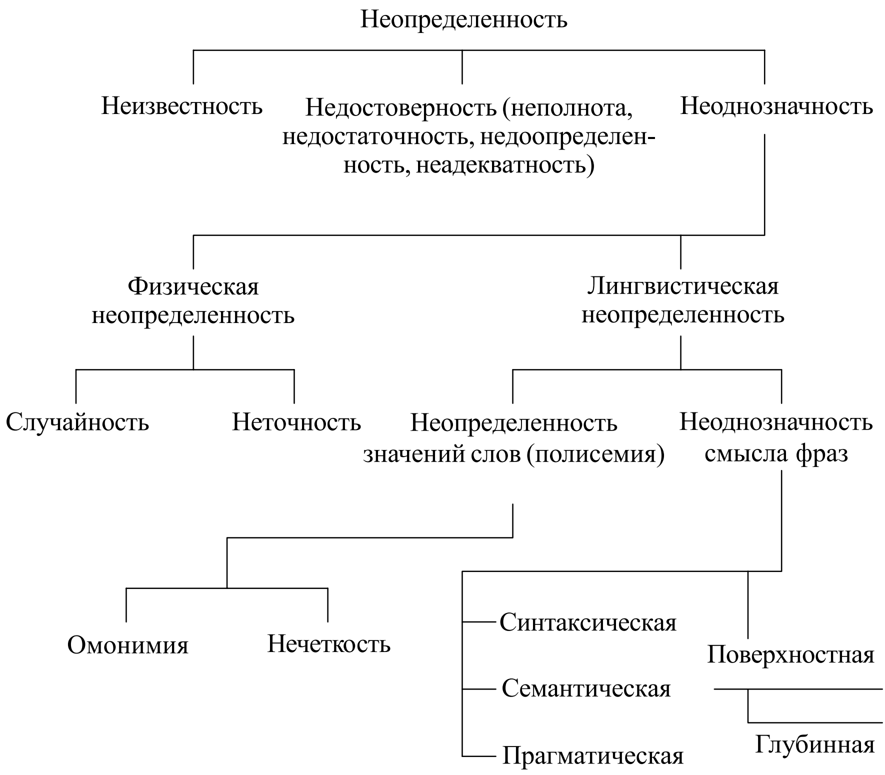


Рис. 1.5. Неопределенности описания задач принятия решений

Второй уровень дерева описывает источники (причины) возможной неоднозначности описания, которыми являются внешняя среда (физическая неопределенность) и используемый ЛПР профессиональный язык (лингвистическая неопределенность).

Физическая неопределенность может быть связана как с наличием во внешней среде нескольких возможностей, каждая из которых случайным образом становится действительностью (ситуация случайности, или стохастической неопределенности), так и с неточностью измерений вполне определенной величины, выполняемых физическими приборами (ситуация неточности). В рамках данной классификации отнесение случайности и неточности к неоднозначности предполагает знание соответствующих законов распределения вероятностей.

Лингвистическая неопределенность связана с использованием естественного языка (в частном случае – профессионального языка ЛПР) для описания задачи ПР. Эта неопределенность обусловливается необходимостью оперировать конечным числом слов и ограниченным числом структур фраз (предложений, абзацев, текстов) для описания за конечное время бесконечного множества разнообразных ситуаций, возникающих в процессе принятия решений. Лингвистическая неопределенность порождается, с одной стороны, множественностью значений слов (понятий, отношений) языка, которая условно названа полисемией, а с другой – неоднозначностью смысла фраз.

Для наших целей достаточно выделить два вида полисемии: омонимию и нечеткость. Если отображаемые одним и тем же словом объекты задачи ПР существенно различны, то соответствующую ситуацию отнесем к омонимии. Например, коса – вид побережья, сельскохозяйственный инструмент, вид прически.

Заканчивая рассмотрение видов неопределенности описания задач ПР, отметим следующее. Во-первых, учет физической неопределенности может усложниться появлением лингвистической неопределенности в описании вероятностного распределения. Другими словами, данные виды неопределенности могут накладываться один на другой. Во-вторых, проведенный анализ не касается того, какие элементы задачи ПР имеют неопределенное описание. В этом смысле схема рис. 1.5 достаточно универсальна. В частности, неопределенность описания целей, отражающаяся в многокритериальности выбора альтернатив, может иметь и нечеткий, и случайный характер. В игровых постановках задач, когда остальные ЛПР могут быть отнесены к среде, влияющей на результаты деятельности выбранного ЛПР специфическим образом, неопределенность описания среды для конкретного ЛПР может проявляться в виде и физической, и лингвистической неопределенности.

1.4. Типы проблем принятия решений

Существуют различные типы проблем ПР, которые подразделяются на три класса [9]:

хорошо структурированные, или количественно сформулированные, проблемы, в которых существенные зависимости выяснены настолько хорошо, что могут быть выражены в числах или символах, получающих в конце концов численные оценки;

неструктурированные, или качественно выраженные, проблемы, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми совершенно неизвестны;

слабоструктурированные, или смешанные, проблемы, которые содержат как качественные, так и количественные элементы, причем качественные, малоизвестные и неопределенные стороны проблем имеют тенденцию доминировать.

Хотя эта классификация не является устоявшейся и некоторые проблемы могут со временем изменить свою принадлежность к определенному классу, она позволяет понять многое.

Прежде всего отметим, что упоминавшиеся выше методы исследования операций предназначены для хорошо структурированных проблем. Термин "хорошо структурированные проблемы" совсем не означает, что эти проблемы легкие. Построение математической модели, отражающей основные черты проблемы, часто представляет значительные трудности, не говоря уже о математических методах решения задач исследований операций, которым посвящены многочисленные труды.

Большинство неструктурированных проблем решаются эвристическими методами, в которых отсутствует какая-либо упорядоченная логическая процедура отыскания решения, а сам метод целиком зависит от личности исследователя, решающего задачу. Чаще всего это методы интуитивных догадок, основанных на прошлом опыте, методы, о которых сам человек честно говорит: "Не знаю, как, но я могу это сделать" [9].

Между классами хорошо структурированных и неструктурированных находится класс слабоструктурированных проблем. Согласно принятым определениям, типичные слабоструктурированные проблемы имеют следующие особенности [9]:

- ♦ принимаемые решения относятся к будущему;
- ♦ имеется широкий диапазон альтернатив;

♦ решения зависят от текущей неполноты технологических достижений;

♦ применяемые решения требуют больших вложений ресурсов и содержат элементы риска;

♦ не полностью определены требования, относящиеся к стоимости и времени решения проблемы;

♦ проблема внутренне сложна вследствие того, что для ее решения необходимо комбинирование различных ресурсов.

Если сравнить эти особенности с особенностями проблем выбора в уникальных ситуациях, станет ясной их идентичность. Следовательно, проблемы выбора в уникальных ситуациях являются слабоструктурированными.

Важнейшая особенность слабоструктурированных проблем заключается в том, что их модель может быть построена только на основании дополнительной информации, получаемой от человека, участвующего в решении проблемы. При этом исчезает почва для построения беспристрастных, "объективных" моделей. Непонимание этого обстоятельства явилось причиной неудач в применении многих "объективных" математических моделей.

Многие системы, включающие в себя людей, очень трудны для изучения. Характеристики и поведение таких систем известны весьма неточно. Социологи и психологи, исследующие эти системы, обычно выдвигают качественные гипотезы об их поведении, которые иногда можно проверить путем социальных обследований.

1.5. Типы задач принятия решений

Предшественниками теории принятия решений являются методы исследования операций, с помощью которых разрабатываются модели, описывающие объективную реальность; определяется существование единственного очевидного критерия качества (оптимизации); рассчитывается оптимальное решение [2, 14]. Другими словами, типичные проблемы исследования операций являются хорошо структурированными.

Оптимизационная задача для такого типа проблем при наличии ограничений имеет следующий вид:

$$\max \{f(x) = z\} \text{ при } x \in S,$$

где $f(x)$ – критерий оптимизации (целевая функция), а S – множество допустимых значений переменной.

При этом требуется найти такую точку из множества S, в которой целевая функция принимает максимальное значение z. Если $f(x)$ – линейная функция, а множество S задается линейными ограничениями, получаем задачу линейного программирования с одним критерием. Если функция $f(x)$ линейна, множество S определяется линейными ограничениями и, кроме того, координаты точек из S целочисленные, приходим к однокритериальной задаче целочисленного программирования. Если, наконец, функция $f(x)$ или какие-либо из определяющих множество S ограничений нелинейны, получаем задачу нелинейного программирования. Данные задачи относятся к классу однокритериальных задач при объективных моделях.

Вместе с тем существует многокритериальный подход в решении задач оптимизации. Многокритериальность – это наличие нескольких критериев при оценке эффективности функционирования и развития систем различного назначения, причем, как правило, противоречивых (например, минимум затрат, максимум надежности, минимум загрязнения окружающей среды и др.). Все эти критерии необходимо учитывать при оптимизации, хотя их количественное соизмерение и сопоставление затруднительно, а иногда и невозможно. Такие действия могут быть выполнены только на качественном уровне и на основе предпочтений лица, принимающего решения.

В этом состоит существенное отличие проблем принятия решений от проблем исследования операций.

Задачи, решаемые в условиях многокритериальности, являются слабоструктурированными и встречаются достаточно часто при обосновании экономических, организационных и технических решений. Например, планирование производства может оцениваться по следующим критериям [15]:

max {суммарный чистый доход};
max {минимальный чистый доход за любой период};
min {число невыполненных заказов};
min {сверхурочное время};
min {запасы готовой продукции}.

Здесь мы можем обнаружить несколько целей, противоречащих друг другу. Слабоструктурированные проблемы анализируются многокритериальными решениями при объективных и субъективных моделях.

Многокритериальные решения при объективных моделях

Существует особый класс задач принятия решений, в которых модели имеют объективный характер (как в задачах исследования операций), но качество решений оценивается по многим критериям. Эти задачи получили название *многокритериальных задач с объективными моделями*. К числу таких относятся: многокритериальная задача линейного программирования; многокритериальная задача о назначениях; задача о заполнении контейнеров объектами, имеющими оценки по многим критериям; многокритериальная задача о рюкзаке [14]. Общие элементы во всех этих задачах:

♦ наличие объективной и субъективной составляющих, причем вторая в значительной степени определяет весь ход решения;

♦ постепенный процесс выработки решения ЛПР, в котором важную роль играет знакомство с возможностями, определяемыми объективной моделью.

Многокритериальные решения при субъективных моделях

Для такого типа принятия решений строится не модель окружающей нас реальности, а модель желаний, предпочтений ЛПР (субъективная модель). При этом для получения дополнительной информации привлекаются эксперты, обладающие специальными знаниями. Решения такого класса получили название к*ритериально-экспертного выбора*. Появление данного подхода было обусловлено ростом числа уникальных проблем в современном мире, критериев оценки альтернатив, получением оценок для каждой из альтернатив по каждому из критериев [4]. Примером решения таких задач является выбор инновационных проектов сложных социально-технических систем.

Вербальный анализ решений

Такой анализ предназначен для принятия решений при наличии неструктурированных проблем с качественными переменными. Можно выделить общие черты неструктурированных проблем [9]:

♦ уникальность выбора – проблема является новой для ЛПР либо обладает новыми особенностями по сравнению со встречавшейся ранее подобной проблемой;

♦ неопределенность в оценках альтернативных вариантов решения проблемы (недостаток информации на момент решения проблемы);

♦ оценки альтернативных вариантов имеют качественный характер и чаще всего сформулированы в словесном виде;

♦ общая оценка альтернатив может быть получена лишь на основе субъективных предпочтений ЛПР (либо группы ЛПР). Интуиция и уверенность ЛПР в тех или иных вариантах развития событий являются основой решающего правила, позволяющего перейти от оценок по отдельным критериям к общей оценке альтернатив;

♦ оценки альтернатив по отдельным критериям могут быть получены только от экспертов. Обычно отсутствует объективная шкала измерения оценок по отдельным критериям.

Данный анализ основан на построении модели лицом, принимающим решения, на его способности проводить измерения при многих факторах в качественных, вербальных, понятиях, расположенных на порядковых шкалах. Методы вербального анализа учитывают когнитивные и поведенческие аспекты ЛПР.

1.6. Системное представление основных аспектов проблемы принятия решения

Ранее говорилось о том, что в процедурах принятия решений основную роль играют люди. Однако по мере развития средств вычислительной техники и различных направлений прикладной математики появилось множество так называемых "инструментальных" методов, с применением которых могут быть подготовлены рекомендации для ЛПР. Другими словами, эти методы выполняют роль "поддержки" в принятии решений, поэтому они получили название *методы поддержки принятия решений*. В настоящее время сложился целый ряд классов таких методов, поэтому целесообразно дать их краткую характеристику (рис. 1.6) [7].

Прежде всего следует отметить, что все множество существующих методов поддержки принятия решения делят на два основных направления: методы повторяющихся решений (многократного выбора) и методы неповторяющихся решений (уникального выбора) [9]. Появление и развитие методов первого направления обусловлено существованием таких ситуаций принятия решений, которые характеризуются информационной определенностью, структурированностью и наличием объективных моделей. Такие методы отображают объективно существующую реальность, их параметры имеют количественное описание, критерий оптимальности, как правило, известен (например, классическая транспортная задача). Для реализации данных моделей широко используются методы исследования операций. Наличие ситуаций приня-

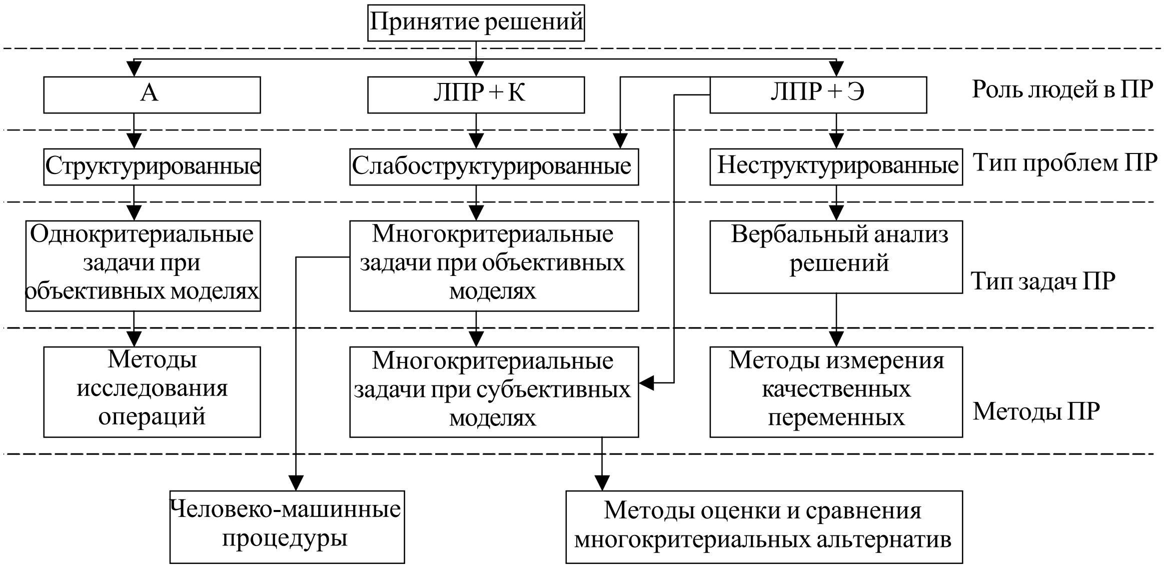


Рис. 1.6. Системное представление проблем, задач и методов принятия решений:
ЛПР – лицо, принимающее решение; Э – эксперт; К – консультант; А – аналитик; ПР – принятие решений

тия решений, характеризующихся стохастической ("доброкачественной") неопределенностью, обусловило появление на множестве однокритериальных задач при объективных моделях задач стохастического характера, решаемых обычно с помощью вероятностно-статистических методов. При условии, что вероятностные характеристики объективных моделей известны или могут быть определены, стохастическая неопределенность практически трансформируется в определенность.

Появление в задачах принятия решений многокритериальности, в частности критериев качественного характера, обладающих нестохастической неопределенностью, указывает на наличие слабоструктурированных и неструктурированных проблем принятия решений. Все это позволяет квалифицировать такие задачи как уникальные (отсутствуют статистические данные, позволяющие обосновать соотношение между различными критериями) [9], решение которых проводится с применением методов уникального выбора. Указанные проблемы рассматриваются в многокритериальных задачах при объективных и субъективных моделях, в анализе конфликтных ситуаций и вербальном анализе решений.

К числу наиболее широко известных многокритериальных задач при объективных моделях относятся, например, обобщенная транспортная задача и задача о назначениях линейного программирования. Эти задачи решаются с использованием хорошо развитого аппарата человеко-машинных процедур (ЧМП), метода STEM, в основе которого лежит идея последовательного наложения ограничений на критерии [9], и др.

Для решения многокритериальных задач при субъективных моделях применяются методы оценки сравнения многокритериальных альтернатив. Среди них можно особо выделить методы на основе многокритериальной теории полезности (Multi-Attribute Utility Theory – MAUT) [9] и метод аналитической иерархии (Analytic Hierarchy Process – ANP) [12, 13].

Наличие неструктурированных проблем принятия решений приводит к задачам анализа конфликтных ситуаций и вербальному анализу решений. В первом случае стремятся найти некое компромиссное решение, которое, не будучи оптимальным, будет все же приемлемым в целом диапазоне решений. В настоящее время в общей теории компромиссов наиболее развиты направления теории игр и статистических решений, во втором случае применяются методы вербального анализа решений, учитывающие когнитивное и поведенческие аспекты ЛПР и представляющие описательные модели.

В основе данных методов лежат процедуры измерения и оценивания качественных переменных, что дает возможность получить описание неструктурированной проблемы, близкое к реальному. Здесь также присутствуют специальные процедуры проверки информации на непротиворечивость, что обеспечивает надежность получаемой информации и создает для ЛПР возможности постепенной выработки решающего правила.

В качестве примера одного из методов вербального анализа решений можно указать на метод ЗАПРОС (замкнутые процедуры у опорных ситуаций), который позволяет на основе предпочтений ЛПР построить решающее правило упорядочения многокритериальных альтернатив и с его использованием упорядочить заданные альтернативы [9].

Контрольные вопросы

1. Дайте определение следующим понятиям: принятие решений, выбор, альтернатива, критерий оценки альтернативы.
2. Дайте характеристику основных процедур структуризации альтернатив.
3. Охарактеризуйте роль людей, принимающих участие в процессе принятия решений.
4. Представьте характеристику неопределенности в задачах принятия решений.
5. Что такое физическая неопределенность?
6. Что такое лингвистическая неопределенность?
7. Представьте характеристику типов проблем принятия решений.
8. Представьте характеристику основных типов задач принятия решений.
9. Что такое объективные и субъективные модели в задачах принятия решений?
10. Дайте характеристику основных классов методов принятия решений.
11. Что такое методы повторяющихся решений?
12. Что такое методы неповторяющихся решений?

Глава 2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

2.1. Роль и место методов исследования операций в проблеме принятия решений

В настоящее время методы исследования операций рассматриваются в качестве предшественников методов принятия решений [9]. С помощью этих методов исследования операций разрабатываются модели, описывающие объектную реальность; определяется единственный критерий оптимальности решения; рассчитывается оптимальное решение. Существенное отличие проблем принятия решений от проблем исследования операций состоит в наличии многих критериев оценки качества решения. Компромисс между критериями может быть найден только на основе предпочтений ЛПР. В то же время один из ведущих специалистов в области исследования операций Е.С. Вентцель [2] определяет данное научное направление как "…применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности". В этой связи, несмотря на то что дисциплина "Исследование операций" входит отдельным предметом в учебные программы ряда специальностей, представляется целесообразным привести в данном разделе некоторые сведения, характеризующие указанную дисциплину.

Исследование операций занимается кругом вопросов, которые можно представить следующей схемой [2]: "цель работы" – "ограниченность необходимых ресурсов" – "поиск вариантов возможных решений" – "определение способа действий". В исследовании операции для выработки вариантов решений, их анализа и сравнения используется математическое описание объектов исследования и процессов, т. е. ***математические модели***. Следующим важным понятием является понятие ***цель***. Цель – желаемый результат деятельности. Результат принятого решения стараются описать функцией, аргументами которой являются разные варианты решений, а значениями – числа, отражающие меру достижения цели. Эту функцию называют ***целевой функцией*** или ***критерием***, а лучшим будет то решение, которое делает значение целевой функции большим или меньшим (исходя из ее смысла).

Среди вариантов решений только некоторые удовлетворяют ограничениям, не нарушают их. Такие решения называются *допустимыми*. Допустимое решение, которое доставляет максимум (или минимум) целевой функции, называется ***оптимальным***. Введем следующие ограничения: $F(x)$ – целевая функция скалярного или векторного аргумента x; X – допустимое множество; $x \in X$ имеет обычный смысл (x принадлежит X, является одним из элементов X); $G(x) \leq 0$, …, $Q(x) \leq 0$ – функциональные ограничения, описывающие взаимосвязи переменных. Тогда в стандартной форме оптимизационную задачу максимизации можно записать, например, так:

$$F(x) \to \max;$$

$$G(x) \leq 0;$$

$$\ldots$$

$$Q(x) \leq 0;$$

$$x \in X.$$

Другими словами: найти то значение переменной x, которое доставляет максимум целевой функции $F(x)$, означает решить данную оптимизационную задачу.

2.2. Транспортная задача линейного программирования

Любую задачу линейного программирования (ЛП) можно представить в стандартной форме, сформулировав ее так [2]: найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, …, x_n, которые удовлетворяли бы условиям-равенствам вида

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

и обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \Rightarrow \max.$$

В данных выражениях a_{ij}, b_i, c_j – некоторые коэффициенты.

Решение задач ЛП сводится, как правило, к решению систем линейных уравнений различными способами.

Однако существует ряд задач ЛП, которые в силу своей особой структуры допускают решение более простыми методами. Транспортная задача – хороший содержательный пример таких задач ЛП.

Выполним ее постановку согласно работе [2]. Имеются m пунктов отправления (ПО): $A_1, A_2, \ldots, A_m$, в которых сосредоточены запасы определенных грузов в количестве соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц. Имеются n пунктов назначения (ПН): $B_1, B_2, \ldots, B_n$, подавших заявки соответственно на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц груза. Сумма всех заявок, например, равна суме всех запасов: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого ПО A_i до каждого ПН B_j ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

Все значения c_{ij} отображают матрицу вида

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько единиц груза везти), чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была минимальной.

Обозначим x_{ij} – количество единиц груза, отправляемого из i-го ПО (A_i) в j-й ПН (B_j). Тогда все возможные значения x_{ij} можно записать в виде матрицы:

$$\left(x_{ij}\right) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Данную совокупность значений (x_{ij}) будем называть "планом перевозок", а сами величины x_{ij} – "перевозками".

Эти неотрицательные переменные должны удовлетворять следующим условиям.

1. Суммарное количество груза, направляемого из каждого ПО во все ПН, должно быть равно запасу груза в данном пункте. Это дает m условий-равенств:

$$\left.\begin{array}{llll} x_{11} & +x_{12} & +\ldots+ & x_{1n}=a_1 \\ x_{21} & +x_{22} & +\ldots+ & x_{2n}=a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & +x_{m2} & +\ldots+ & x_{mn}=a_m \end{array}\right\}.$$

2. Суммарное количество груза, доставляемого в каждый ПН из всех ПО, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом. Это даст нам n условий-равенств:

$$\left.\begin{array}{llll} x_{11} & +x_{21} & +\ldots+ & x_{m1}=b_1 \\ x_{12} & +x_{22} & +\ldots+ & x_{m2}=b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & +x_{2n} & +\ldots+ & x_{mn}=b_n \end{array}\right\}.$$

3. Суммарная стоимость всех перевозок, т. е. сумма величин x_{ij}, умноженных на соответствующие стоимости c_{ij}, должна быть минимальной:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\Rightarrow \min,$$

где знак двойной суммы означает, что суммирование производится по всем комбинациям индексов i и j, т. е. по всем парам ПО – ПН.

Такая модель транспортной задачи, в которой суммарная мощность поставщиков равна суммарной мощности потребителей $\left(\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$, называется *сбалансированной* или *закрытой*.

Однако на практике встречаются более сложные задачи, когда возможны как перепроизводство, так и дефицит. В этих случаях говорят, что модель транспортной задачи открытая, или несбалансированная. При построении транспортной таблицы поступают следующим образом:

- в случае перепроизводства $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ вводят фиктивный пункт потребления

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{\text{ф}},$$

стоимость перевозок единицы продукции в который полагается равной стоимости складирования, а объемы перевозок – объемам складирования излишков продукции на фабриках;

- в случае дефицита $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ вводят фиктивный пункт отправления

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + a_{\text{ф}} = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

стоимость перевозок единицы продукции из которого полагается равной стоимости штрафов за недопоставку продукции, а объемы перевозок – объемам недопоставок продукции в пункты распределения.

Особенностью данной задачи является то, что все коэффициенты в записанных условия равны единице. Это позволяет решать данную задачу без решения систем линейных уравнений: все операции по нахождению оптимального плана сводятся к манипуляциям с табл. 2.1, где в определенном порядке записаны условия транспортной задачи (перечень ПО и ПН, заявки и запасы, а также стоимости перевозок). Пример транспортной таблицы, где приведены условия задачи, но нет еще самих перевозок, дан в таблице, где $m = 4$, $n = 5$.

Таблица 2.1. **Транспортная задача**

ПО	ПН					Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4	
A_1	13 Стоимость перевозки	7	14	7	5	30
A_2	11	8	12	6	8	48
A_3	6	10	10	8	11	20
A_4	14	8	10	10	15	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128

Прежде всего необходимо составить допустимый план перевозок (табл. 2.2). Это делается следующим образом. Пункт B_1 подал заявку на 18 единиц груза; удовлетворить ее можно из запасов пункта A_1. После этого в нем остается еще 30 – 18 = 12 единиц груза; их можно отдать пункту B_2. Но заявка этого пункта еще не удовлетворена; выделим недостающие 15 единиц груза из запасов пункта A_2 и т. д.

Таблица 2.2. **Составление допустимого плана**

ПО	ПН					Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4	
A_1	13 18	7 12	14	7	5	30
A_2	11	8 15	12 33	6 11	8	48
A_3	6	10	10 9	8 11	11	20
A_4	14	8	10	10 4	15 26	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128

Рассуждая точно таким же образом, заполним до конца перевозками x_{ij} табл. 2.2. Проверим, является ли этот план допустимым. Является, потому что в нем сумма перевозок по строке равна запасу соответствующего ПО, а сумма перевозок по столбцу – заявке соответствующего ПН, т. е. все заявки удовлетворены, все запасы израсходованы (сумма запасов равна сумме заявок и выражается числом 128, стоящем в нижнем правом углу табл. 2.2).

Следующий этап в решении транспортной задачи – процедура построения оптимального плана перевозок. Для этого используем так называемую "циклическую перестановку" перевозок между клетками таблицы, уменьшая при этом перевозки в клетках с высокой стоимостью и увеличивая их в клетках с низкой стоимостью. Например, уменьшив перевозки в "дорогой" клетке (2,3) со стоимостью 12, можно увеличить перевозки в "дешевой" клетке (2,4) со стоимостью 6. Далее можно двигаться по циклу (2,4) $\rightarrow$ (3,4) $\rightarrow$ (3,3) $\rightarrow$ (2,3). При этом число единиц груза в данном примере не должно превышать 11 единиц (иначе перевозки в клетке (3,4) стали бы отрицательными).

В результате такого переноса формируется оптимизационный план перевозок по циклу 1 (табл. 2.3).

Таблица 2.3. **Оптимизация плана перевозок по циклу 1**

ПО	ПН					Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4	
A_1	13 18	7 12	14	7	5	30
A_2	11	8 15	12 22	6 11	8	48
A_3	6	10	10 20	8	11	20
A_4	14	8	10	10 4	15 26	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128

Теперь проверим, наблюдается ли процесс снижения стоимости перевозок. Общая стоимость плана, показанного в табл. 2.2, $F_0 = 18 \cdot 13 + 12 \cdot 7 + 15 \cdot 8 + 33 \cdot 12 + 9 \cdot 10 + 11 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 26 \cdot 15 = 1442$; показанного в табл. 2.3, $F_0 = 18 \cdot 13 + 12 \cdot 7 + 15 \cdot 8 + 22 \cdot 12 + 11 \cdot 6 + 20 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 26 \cdot 15 = 1398$. Таким образом, удалось снизить стоимость перевозок на $1442 - 1398 = 44$ единицы.

Приведенные расчеты общих стоимостей плана перевозок можно провести по-иному. Для этого просуммировать стоимости, стоящие в вершинах цикла, со знаком "плюс", если перевозки в этой вершине увеличиваются, и со знаком "минус", если перевозки уменьшаются. Так называемая "цена цикла" в данном случае равна 6 – 8 + 10 – 12 = –4. Таким образом, при переносе одной единицы груза по этому циклу стоимость перевозок уменьшается на 4, а при переносе 11 единиц стоимость должна была уменьшиться на 11·4 = 44 единицы, что и произошло (см. табл. 2.3).

Далее можно попробовать еще раз улучшить план, приведенный в табл. 2.3. Например, обратим внимание на клетку (1,5) со стоимостью 5, в которую можно перебросить часть груза из клетки (1,2) со стоимостью 7. А далее цикл будет построен по следующей последовательности клеток: (1,2) → (1,5) → (4,5) → (4,4) → (2,4) → (2,2) → (1,2). Цена данного цикла будет –7 + 5 – 15 + 10 – 6 + 8 = –5. Так как цена цикла отрицательная, переброска грузов по этому циклу выгодна. Правомерным при построении циклов является вопрос о числе единиц груза, которое можно перебрасывать. Это определяется наименьшей перевозкой, стоящей в отрицательной вершине цикла. Общая стоимость нового плана перевозок будет F_2 = 1398 – 5·11 = 1343 (табл. 2.4).

Таблица 2.4. **Оптимизация плана перевозок по циклу 2**

ПО	ПН					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_4	a_i
A_1	13 18	(–) 7 12	14	7	(+) 5	30
A_2	11	(+) 8 15	12 22	(–) 6 11	8	48
A_3	6	10	10 20	8	11	20
A_4	14	8	10	(+) 10 4	(–) 15 26	30
Заявки b_j	18	27	42	15	26	128

Таким образом, определяя в транспортной таблице свободные клетки с отрицательной ценой цикла и перебрасывая по нему наибольшее возможное количество грузов, мы будем уменьшать общую стоимость перевозок и в конечном счете получим оптимальный план. Признаком того, что оптимальное решение найдено, является отсутствие свободных клеток с отрицательной ценой цикла.

2.3. Динамическое программирование на основе принципа оптимальности Беллмана

Смысл этого принципа состоит в том, что оптимальная стратегия при любом первоначальном состоянии и любом первоначальном решении предполагает, что последующие решения должны быть оптимальны относительно состояния, полученного в результате предыдущего решения.

Рассмотрим формальное описание алгоритма динамического программирования Беллмана. Пусть задано n неубывающих функций $f_i(x_i) \geq 0$. Сформулируем задачу:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \Rightarrow \max;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = A; \quad x_i \geq 0; \quad x_i \in d; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что при фиксированных функциях $f_i(x_i)$ результат определяется лишь значением параметра A. Пусть

$$G_n(A) = \max \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Для вычисления $G_n(A)$ выполним следующие шаги:

$$F_{1,2}(A) = \max\left[f_1(x) + f_2(A - x)\right], x \in d_1;$$

$$F_{1,2,3}(A) = \max\left[F_{1,2}(x) + f_3(A - x)\right], x \in d_2;$$

$$\ldots$$

$$F_{1,2,3,\ldots,i}(A) = \max\left[F_{1,2,\ldots,i-1}(x) + f_i(A - x)\right], x \in d_{i-1};$$

$$\ldots$$

$$G_n(A) = \max\left[F_{1,2,\ldots,n-1}(x) + f_n(A - x)\right], x \in d_{n-1}.$$

В этих соотношениях $F_{1,2,3,\ \dots,\ i}(x)$ – максимальное значение функции для заданного значения ресурса x, вложенного в проекты 1, 2, …, i.

Полученные соотношения перепишем в следующем виде. Пусть $G_k(x)$ – суммарный доход на шаге k при использовании ресурса x. Тогда имеем:

$$G_1(x) = f_1(x);$$

$$G_1(A) = f_1(A);$$

$$G_2(A) = \max\left[G_1(x) + f_2(A - x)\right],\ x \in d_1;$$

$$G_3(A) = \max\left[G_2(x) + f_3(A - x)\right],\ x \in d_2;$$

$$\dots$$

$$G_{k+1}(A) = \max\left[G_k(x) + f_{k+1}(A - x)\right],\ x \in d_k;$$

$$\dots$$

$$G_n(A) = \max\left[G_{n-1}(x) + f_n(A - x)\right],\ x \in d_{n-1}.$$

Приведенные соотношения ($k = 0, 1, \dots, (n - 1)$) называются уравнениями Беллмана. Эти рекуррентные соотношения позволяют вычислить $G_k(A)$ для любого значения A и всех $k = 0, 1, \dots, (n - 1)$, т. е. найти глобальный экстремум в задаче оптимизации.

В качестве примера, раскрывающего суть динамического программирования, рассмотрим задачу о распределении ресурсов между проектами. Пусть имеются четыре проекта, для реализации которых нужно вкладывать некоторые средства. Исходные данные приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5. **Исходные данные по проектам**

Вложения, млн грн	Прибыль			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15	0,20
2	0,45	0,41	0,25	0,35
3	0,65	0,55	0,40	0,42
4	0,78	0,65	0,50	0,48
5	0,90	0,75	0,62	0,53

В задаче ставится вопрос: как распределить вложения между проектами, чтобы получить максимальную прибыль? Задача носит переборный характер. Пусть $f_i(x)$ – прибыль, полученная при вложении средств x в проект i ($x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; $i = 1, 2, 3, 4$). Необходимо найти такие x_1, x_2, x_3 , x_4, чтобы

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \Rightarrow \max; \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = A; \qquad A \in [0; 5].$$

Введем обозначения:

$F_{1,2}(A)$ – максимальная прибыль, полученная от средств A, вложенных в проекты 1 и 2;

$F_{1,2,3}(A)$ – максимальная прибыль от средств A, вложенных в проекты 1, 2 и 3;

$F_{1,2,3,4}(A)$ – для проектов 1, 2, 3 и 4.

Пусть нужно найти $F_{1,2}(A)$, где $A = 2$. Для этого вычисляем:

$$f_1(0) + f_2(2) = 0 + 0{,}41 = 0{,}41;$$
$$f_1(1) + f_2(1) = 0{,}28 + 0{,}25 = 0{,}53;$$
$$f_1(2) + f_2(0) = 0{,}45 + 0 = 0{,}45.$$

Использованные записи можно представить следующим выражением:

$$F_{1,2}(A) = \max[f_1(x) + f_2(A - x)], \ x \in [0; A].$$

Тогда $F_{1,2}(2) = 0{,}53$ (1, 1) – в скобках указано распределение ресурсов между проектами, $x_1 = x_2 = 1$.

По этой формуле можно вычислить оптимальное распределение средств между двумя проектами для всех A.

Найдем, например, еще $F_{1,2}(A)$, где $A = 4$:

$$f_1(0) + f_2(4) = 0 + 0{,}65 = 0{,}65;$$
$$f_1(1) + f_2(3) = 0{,}28 + 0{,}55 = 0{,}83;$$
$$f_1(2) + f_2(2) = 0{,}45 + 0{,}41 = 0{,}86;$$
$$f_1(3) + f_2(1) = 0{,}65 + 0{,}25 = 0{,}90;$$
$$f_1(4) + f_2(0) = 0{,}78 + 0 = 0{,}78.$$

Тогда $F_{1,2}(4) = 0{,}90$ (3, 1); $x_1 = 3$; $x_2 = 1$.

Полученные результаты вычислений $F_{1,2}(A)$ для всех значений A можно записать в табл. 2.6.

Таблица 2.6. **Значения максимальной прибыли**

Вложения A	$F_{1,2}(A)$	$F_{1,2,3}(A)$	$F_{1,2,3,4}(A)$
0	0 (0, 0)	0 (0, 0, 0)	0 (0, 0, 0, 0)
1	0,28 (1, 0)	0,28 (1, 0, 0)	0,28 (1, 0, 0, 0)
2	0,53 (1, 1)	0,53 (1, 1, 0)	0,53 (1, 1, 0, 0)
3	0,70 (2, 1)	0,70 (2, 1, 0)	0,73 (1, 1, 0, 1)
4	0,90 (3, 1)	0,90 (3, 1, 0)	0,90 (3, 1, 0, 0)
5	1,06 (3, 2)	1,06 (3, 2, 0)	1,06 (3, 1, 0)

Перейдем к третьему проекту, воспользовавшись следующим рекуррентным соотношением:

$$F_{1,2,3}(A) = \max\left[F_{1,2}(A) + f_3(A - x)\right];\ x \in [0; A].$$

Значения $F_{1,2}(x)$ берутся из табл. 2.6, а величины $f_3(A - x)$ – из исходной табл. 2.5. Пусть $A = 4$. Аналогично предыдущим вычислениям получаем:

$$F_{1,2}(0) + f_3(4) = 0 + 0{,}50 = 0{,}50;$$
$$F_{1,2}(1) + f_3(3) = 0{,}28 + 0{,}40 = 0{,}68;$$
$$F_{1,2}(2) + f_3(2) = 0{,}53 + 0{,}25 = 0{,}78;$$
$$F_{1,2}(3) + f_3(1) = 0{,}70 + 0{,}15 = 0{,}85;$$
$$F_{1,2}(4) + f_3(0) = 0{,}90 + 0 = 0{,}90.$$

Тогда $F_{1,2,3}(4) = 0{,}90$ (3, 1, 0). Распределение средств между тремя проектами при $A = 4$: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$.

Для всех A данные запишем в табл. 2.6.

Наконец, можно вычислить $F_{1,2,3,4}$ (A) по формуле $F_{1,2,3,4}(A) = \max\left[F_{1,2,3}(A) + f_4(A-x)\right]$.

Вычислим $F_{1,2,3,4}$ (A), где $A = 4$:

$$F_{1,2,3}(0) + f_4(4) = 0 + 0{,}48 = 0{,}48;$$

$$F_{1,2,3}(1) + f_4(3) = 0{,}28 + 0{,}42 = 0{,}70;$$

$$F_{1,2,3}(2) + f_4(2) = 0{,}53 + 0{,}33 = 0{,}86;$$

$$F_{1,2,3}(3) + f_4(1) = 0{,}70 + 0.20 = 0{,}90;$$

$$F_{1,2,3}(4) + f_4(0) = 0{,}90 + 0 = 0{,}90.$$

Тогда $F_{1,2,3,4}$ (4) = 0,90 (3, 1, 0, 0); $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = x_3 = 0$.

Полученные значения $F_{1,2,3,4}$ (A) для всех значений A также занесем в табл. 2.6. После окончания всего процесса вычислений оптимальные решения задачи для всех целых значений $0 \le A \le 5$ содержатся в этой таблице.

Задачи рассмотренного типа называются *аддитивными*. При их решении оптимизация функции n переменных сводится к многошаговому процессу из n шагов, на каждом из которых оптимизируется функция одной переменной. Определим количество значений функций, вычисленных в процессе оптимизации. Число вычисленных значений каждой из функций $F_{1,2}$ (x); $F_{1,2,3}(x)$; $F_{1,2,3,4}$ (x) для каждого значения x равно $x + 1$. Если число значений параметра A равно m, то трудоемкость любого типа оценивается величиной

$$\sum_{x=0}^{m}(x+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Тогда общая трудоемкость T алгоритма проведенных вычислений имеет вид

$$T = \frac{n(m+1)(m+2)}{2}.$$

В рассмотренном примере эта трудоемкость равна 112 ($m = 6$; $n = 4$).

Таким образом, основная идея алгоритма состоит в том, что из всех вложений на каждом шаге для дальнейшего исследования оставляется то вложение, которое дает максимальную прибыль. В этом заключается смысл алгоритма динамического программирования.

Контрольные вопросы и задачи

1. Дайте определение дисциплины "Исследование операций".

2. Какова схема реализации задач исследования операций.

3. Характеристика целевой функции, допустимые и оптимальные решения.

4. Сформулируйте общую постановку транспортной задачи линейного программирования.

5. Что такое несбалансированная и сбалансированная модели транспортной задачи линейного программирования?

6. В чем суть табличного способа решения транспортной задачи? Дайте определение понятия "цикл" и правил его построения.

7. Решите транспортную задачу, исходные данные для которой представлены в таблице:

	1	2	3	4	
1	10 5	1 10	20	11	15
2	12	7 5	9 15	20 5	25
3	2	14	16	18 5	5
	5	15	15	10	

8. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30, третий – 40. Требуется поставить платформы потребителям: первому – 70, второму – 30, третьему – 20, четвертому – 40. Стоимость перевозки единицы груза от поставщика до потребителя, д. е., указана в таблице.

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте опорный план доставки грузовых автомобилей. Выполните два шага оптимизации опорного плана и рассчитайте их эффективность

9. Строительство магистральной дороги включает в себя задачу заполнения имеющихся на трассе выбоин до уровня основной дороги и срезания в некоторых местах дороги выступов. Срезанным грунтом заполняются выбоины. Перевозка грунта осуществляется грузовиками одинаковой грузоподъемности. Расстояние в километрах от срезов до выбоин и объем работ указаны в таблице:

Поставщики	Потребители			Наличие грунта, т
	I	II	III	
A	1	2	3	10
B	2	1	3	30
C	1	2	4	20
Требуемое количество грунта, т	100	140	60	

Составьте опорный план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков. Выполните два шага оптимизации опорного плана и рассчитайте их эффективность.

10. В данной транспортной задаче суммарный спрос превосходит суммарный объем производства. Пусть штрафы за недопоставку единицы продукции в пункты назначения 1, 2 и 3 равны соответственно 5, 3 и 2. Исходные данные приведены в таблице:

Заводы	Потребители			Объем производства, шт.
	1	2	3	
A_1	3	2	4	50
A_2	5	4	5	75
A_3	1	6	7	30
Потребность, шт.	60	40	70	

Составьте опорный план перевозок, минимизирующий общий пробег грузовиков. Выполните два шага оптимизации опорного плана и рассчитайте их эффективность

11. В чем заключается принцип оптимальности Беллмана?

12. Запишите целевую функцию в задаче распределения ресурсов между проектами.

13. Решите задачу динамического программирования. Пусть фирма имеет три торговые точки и знает зависимость прибыли в них от объема вложения определенного капитала. Как распределить имеющиеся шесть единиц капитала между тремя торговыми точками, чтобы прибыль была максимальной? Исходные данные приведены в таблице.

Вложения, ед. капитала	Торговые точки		
	1	2	3
0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15
2	0,45	0,41	0,25
3	0,65	0,55	0,40
4	0,78	0,65	0,50
5	0,90	0,75	0,62
6	1,02	0,80	0,73

Глава 3. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ТЕОРИИ ИГР

3.1. Характеристика критериев принятия решений в условиях неопределенности

Этот раздел посвящен рассмотрению критериев принятия решений при неопределенности в предположении, что никакие вероятностные характеристики не известны. Здесь представлены критерий Лапласа, минимаксный, критерий Сэвиджа и критерий Гурвица.

Основное различие между указанными критериями определяется стратегией поведения лица, принимающего решение в условиях большой неопределенности. Например, критерий Лапласа основан на более оптимистичных предположениях, чем минимаксный критерий. Критерий Гурвица, в свою очередь, можно использовать при различных подходах: от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. Таким образом, перечисленные критерии, несмотря на их количественную природу, отражают субъективную оценку ситуации, в которой приходится принимать решение. К сожалению, не существует общих правил оценки применимости того или иного критерия, так как поведение (часто меняющееся) лица, принимающего решение, обусловленное неопределенностью ситуации, по всей видимости, является наиболее важным фактором при выборе подходящего критерия.

Перечисленные критерии предполагают, что лицу, принимающему решение, не противостоит *разумный* противник. В случае, когда в роли противника выступает "природа", нет оснований полагать, что она стремится *причинить вред* лицу, принимающему решение [14].

Конечно, встречаются ситуации, когда в роли "природы" выступает разумный противник, интересы которого противоречат интересам лица, принимающего решение. Например, в военных действиях противоборствующие армии являются разумными противниками. При наличии разумного противника для построения подходящего критерия требуется специальный подход. Эти вопросы рассматриваются в теории игр, представленной в следующих разделах.

Данные, необходимые для принятия решений в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям, а столбцы – возможным состояниям системы (см. таблицу). Рассмотрим, например, ситуацию, когда на фирме происходит забастовка. В зависимости от продолжительности забастовки должен поддерживаться уровень запаса некоторого изделия. Возможные состояния системы (столбцы) представлены предполагаемой продолжительностью забастовки, а действия (строки) – уровнями запасов, которые необходимо иметь. При этом каждое действие и есть одно из возможных решений [14].

Форма представления данных

a	θ_1	θ_2	…	θ_n
a_1	$\nu(a_1, \theta_1)$	$\nu(a_1, \theta_2)$	…	$\nu(a_1, \theta_n)$
a_2	$\nu(a_2, \theta_2)$	$\nu(a_2, \theta_2)$	…	$\nu(a_2, \theta_n)$
…	…	…	…	…
a_m	$\nu(a_m, \theta_1)$	$\nu(a_m, \theta_2)$	…	$\nu(a_m, \theta_n)$

Каждому действию и каждому возможному состоянию системы соответствует результат (исход), определяющий выигрыш (или потери) при выборе данного действия и реализации данного состояния. Таким образом, если a_i представляет действие i ($i = 1, 2, ..., m$) и θ – возможное состояние j ($j = 1, 2, ..., n$), то $\nu(a_i, \theta_j)$ описывает соответствующий результат. В общем случае $\nu(a_i, \theta_j)$ может быть непрерывной функцией a_i и θ_j. В дискретном случае указанные данные представляются в форме матрицы. Такое представление будет в дальнейшем использовано при рассмотрении критериев принятия решений в условиях неопределенности.

3.2. Критерий Лапласа

Этот критерий опирается на известный принцип недостаточного обоснования: поскольку вероятности состояний θ_1, θ_2, ..., θ_n неизвестны, необходимая информация для вывода о различии этих вероятностей отсутствует. В противном случае можно было бы определить эти вероятности и ситуацию уже не следовало бы рассматривать как принятие решения в условиях неопределенности. Так как принцип недостаточного обоснования утверждает противоположное, то состояния θ_1, θ_2, ..., θ_n имеют равные вероятности. Если согласиться с приведенными доводами, то исходную задачу можно рассматривать как задачу принятия решения в условиях риска, когда выбирается действие a_i, дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Другими словами, находится действие a^*_i, соответствующее

$$\max_{a_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu\left(a_i, \theta_j\right),$$

где $1/n$ – вероятность реализации состояния θ_j ($j = 1, 2, ..., n$).

Рассмотрим пример [14].

Одно из предприятий должно определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящих праздников. Точное число клиентов не известно, но ожидается, что оно может принять одно из четырех значений: 200, 250, 300 или 350. Для каждого из этих возможных значений существует наилучший уровень предложения (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса. Ниже приводится матрица, определяющая потери в денежных единицах:

		Клиенты			
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
Уровень предложения	a_1	5	10	18	25
	a_2	8	7	8	23
	a_3	21	18	12	21
	a_4	30	22	19	15

Принцип Лапласа предполагает, что θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 равновероятны. Следовательно, $P\{\theta = \theta_j\}=1/4 = 1, 2, 3, 4$ и ожидаемые потери при различных действиях a_1, a_2, a_3 и a_4 составляют:

$$E\ \{a_1\}= (1/4)\cdot(5 + 10 + 18 + 25) = 14{,}5;$$

$$E\ \{a_2\}= (1/4)\cdot(8 + 7 + 8 + 23) = 11{,}5;$$

$$E\ \{a_3\}= (1/4)\cdot(21 + 18 + 12 + 21) = 18{,}0;$$

$$E\ \{a_4\}= (1/4)\cdot(30 + 22 + 19 + 15) = 21{,}5.$$

Таким образом, наилучшим уровнем предложения в соответствии с критерием Лапласа будет a_2.

3.3. Минимаксный (максиминный) критерий

Этот критерий является наиболее "осторожным", поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших возможностей. Если результат $\nu(a_i, \theta_j)$ представляет потери лица, принимающего решение, для действия a_i наибольшие потери независимо от возможного состояния θ_j будут $\max \theta_j \{\nu(a_i, \theta_j)\}$. По минимаксному критерию должно выбираться действие a_i, дающее $\min a_i \max \theta_j \{\nu(a_i, \theta_j)\}$. Аналогично в том случае, когда $\nu(a_i, \theta_j)$ представляет выигрыш, согласно минимаксному критерию выбирается действие a_i, дающее $\max a_i \min \theta_j \{\nu(a_i, \theta_j)\}$. В этом случае критерий называется максиминным [14].

Рассмотрим пример. Так как $\nu(a_i, \theta_j)$ здесь представляют потери, применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления представлены следующей матрицей:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4		
a_1	5	10	18	25	25	
a_2	8	7	8	23	23	
a_3	21	18	12	21	**21**	← Минимаксное значение
a_4	30	22	19	15	30	

3.4. Критерий Сэвиджа

Критерий минимакса, рассмотренный в разд. 3.3, настолько пессимистичен, что иногда может приводить к нелогичным выводам. Рассмотрим следующую матрицу *потерь* ($\nu(a_i, \theta_j)$), которая обычно приводится в качестве классического примера для обоснования необходимости использования "менее пессимистичного" критерия Сэвиджа:

	θ_1	θ_2
a_1	11000 дол.	90 дол.
a_2	10000 дол.	10000 дол.

Применение минимаксного критерия приводит к выбору a_2. Но интуитивно мы склонны выбрать a_1, поскольку не исключено, что θ будет равно θ_2 и потери составят только 90 дол., тогда как выбор a_2 всегда приводит к потерям в 10000 дол. при любом θ.

Критерий Сэвиджа "исправляет" положение введением новой матрицы потерь, в которой $\nu(a_i, \theta_j)$ заменяются на $r(a_i, \theta_j)$, определяющиеся следующим образом [14]:

$$r(a_i, \theta_j) = \begin{cases} \max\{\nu(a_k, \theta_j)\} - \nu(a_i, \theta_j), & \text{если } \nu - \text{доход;} \\ \nu(a_i, \theta_j) - \min\{\nu(a_k, \theta_j)\}, & \text{если } \nu - \text{потери.} \end{cases}$$

Это означает, что $r(a_i, \theta_j)$ есть разность между наилучшим значением в столбце θ_j и значением $\nu(a_i, \theta_j)$ при том же θ_j. По существу, $r(a_i, \theta_j)$ выражает "сожаление" лица, принимающего решение, по поводу того, что он не выбрал наилучшее действие относительно состояния θ_j. Функция $r(a_i, \theta_j)$ называется *матрицей сожаления*.

Чтобы показать, как введенные величины $r(a_i, \theta_j)$ помогают прийти к логичному выводу в приведенном выше примере, рассмотрим матрицу

	θ_1	θ_2
a_1	1000 дол.	0 дол.
a_2	0 дол.	9910 дол.

Как и ожидалось, исходя из минимаксного критерия следует выбрать a_1.

Отметим, что независимо от того, является $\nu(a_i, \theta_j)$ доходом или потерями, $r(a_i, \theta_j)$ – функция сожаления, в обоих случаях определяющая потери. Следовательно, к $r(a_i, \theta_j)$ можно применять только минимаксный (а не максиминный) критерий.

Рассмотрим пример.

Заданная матрица определяет потери. Соответствующая матрица сожаления получается вычитанием 5, 7, 8 и 15 из столбцов 1, 2, 3 и 4 соответственно:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	$\max\limits_{\theta_j}[r(a_i, \theta_j)]$	
a_1	0	3	10	10	10	
a_2	3	0	0	8	**8**	← Минимаксное значение
a_3	16	11	4	6	16	
a_4	25	15	11	0	25	

Несмотря на то что, как и в предыдущем примере, здесь использовался минимаксный критерий, введение $r(a_i, \theta_j)$ привело к выбору другого решения (a_2).

3.5. Критерий Гурвица

Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного. При наиболее оптимистичном подходе можно выбрать действие, дающее $\max\limits_{a_i} \max\limits_{\theta_j} \{\nu(a_i, \theta_j)\}$. (Предполагается, что $\nu(a_i, \theta_j)$ представляет выигрыш, или доход.) Аналогично при наиболее пессимистичных предположениях выбираемое действие соответствует $\max\limits_{a_i} \max\limits_{\theta_j} \{\nu(a_i, \theta_j)\}$. Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего оптимизма и крайнего пессимизма взвешиванием обоих способов поведения с соответствующими весами α и $1 - \alpha$, где $0 \le \alpha \le 1$. Если $\nu(a_i, \theta_j)$ представляет прибыль, то выбирается действие, дающее

$$\max_{a_i} \{\alpha \max_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j) + (1-\alpha) \min_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j)\}.$$

В том случае, когда $\nu(a_i, \theta_j)$ представляет затраты, критерий выбирает действие, дающее

$$\min_{a_i} \{\alpha \min_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j) + (1-\alpha) \max_{\theta_j} \nu(a_i, \theta_j)\}.$$

Параметр α определяется как *показатель оптимизма*:

при $\alpha = 1$ критерий слишком оптимистичный;
при $\alpha = 0$ он слишком пессимистичный.

Значение α между 0 и 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности $\alpha = 1/2$ представляется наиболее разумным [14].

Рассмотрим пример. Критерий Гурвица можно использовать в первом примере (см. разд. 3.2). Положим $\alpha = 1/2$. Оптимальное решение заключается в выборе a_1 или a_2. Результаты необходимых вычислений приведены ниже:

	$\min \nu(a_i, \theta_j)$	$\max \nu(a_i, \theta_j)$	$\alpha \min \nu(a_i, \theta_j) +$ $+ (1-\alpha) \max \nu(a_i, \theta_j)$	
a_1	5	25	**15**	$\leftarrow \min a_i$
a_2	7	23	**15**	
a_3	12	21	16,5	
a_4	15	30	22,5	

3.6. Краткая характеристика теории игр

В разд. 3.1 критерии принятия решений в условиях неопределенности рассматривались в предположении, что противником является "природа". Однако она не выступала в роли недоброжелателя. В этом разделе исследуются решения в условиях неопределенности, принимаемые двумя или более "разумными" противниками, каждый из которых стремится оптимизировать свои решения за счет других. К числу типичных примеров подобных ситуаций относятся рекламирование конкурирующих товаров и тактическое планирование противоборствующих армий.

В теории игр противников принято называть игроками. Каждый игрок имеет некоторое множество (конечное или бесконечное) возможных выборов, называемых стратегиями. Результаты или платежи в игре задаются функциями, зависящими от стратегий каждого из игроков. Игры с двумя игроками, в которых выигрыш одного равен проигрышу другого, известны как игры двух лиц с нулевой суммой. В такой игре достаточно задать результаты в виде платежей для одного из игроков. Матрицы, подобные той, что фигурировала в разд. 3.1, обычно используются для представления платежей одного из игроков, стратегии которого задаются строками или столбцами. В этом разделе рассматриваются главным образом игры двух лиц с нулевой суммой [14].

Для иллюстрации определений *игры двух лиц с нулевой суммой* рассмотрим игру на совпадение сторон монеты, в которой два игрока A и B выбирают герб (Г) или решетку (Р). Если результаты совпадают (т. е. Г и Г или Р и Р), то игрок A получает 1 дол. от игрока B. В противном случае игрок A платит 1 дол. игроку B.

В этой игре каждый из игроков имеет две стратегии (Г или Р), которые составляют матрицу игры размерами 2×2, представляющую выигрыш игрока A:

		Игрок *B*	
		Г	Р
Игрок *A*	Г	1	–1
	Р	–1	1

Оптимальное решение в такой игре может потребовать от игроков выбора *чистых стратегий* (т. е. либо Г, либо Р) или какой-нибудь комбинации чистых стратегий. Последний случай известен как выбор *смешанных стратегий*.

3.7. Оптимальное решение в играх двух лиц с нулевой суммой

Обычно выбор критерия в задачах принятия решений в значительной мере определяется имеющейся информацией. Игры представляют собой предельный случай полного отсутствия информации, когда разумные противники находятся в состоянии конфликта. В силу этого для решения игры двух лиц с нулевой суммой обычно предлагается очень пессимистичный критерий, так называемый критерий *минимакса-максимина*. Этот критерий был введен в разд. 3.3. Основное различие заключается в том, что ранее "природа" не рассматривалась как активный (или недоброжелательный) противник, тогда как в теории игр каждый игрок действует разумно и, следовательно, пытается активно помешать своему противнику.

Чтобы учесть, что каждый из игроков действует против другого, критерий минимакса выделяет из всех стратегий (чистых или смешанных) те, которые дают *наилучшие* или *возможные наихудшие* результаты. Говорят, что оптимальное решение достигнуто, если ни одному из игроков не выгодно изменить свою стратегию. В этом случае игра считается стабильной, или находящейся в состоянии равновесия [14].

Так как обычно матрица игры представляет выигрыши игрока *A* (стратегии которого определяются строками), критерий предписывает ему выбрать такую стратегию (чистую или смешанную), которая минимизирует его минимальный выигрыш, причем минимум берется по всем стратегиям игрока *B*. Точно так же игрок *B* выбирает стратегию, которая минимизирует его максимальный проигрыш. Максимум теперь берется по стратегиям игрока *A*.

Следующий пример показывает, каким образом подсчитываются минимаксное и максиминное значения игры.

Рассмотрим платежную матрицу, которая определяет выигрыши игрока *A*. Вычислим минимаксное и максиминное значения в заданной игре:

		Игрок B 1	2	3	4	*Минимумы в строках (Игрок A)*
Игрок A	1	8	2	9	5	2
	2	6	**5**	7	18	**5**
	3	7	3	–4	10	–4
Максимумы в столбцах (Игрок B)		8	**5**	9	18	

5 – максимин и минимакс

Если игрок *A* выбирает первую стратегию, он может получить 8, 2, 9 или 5 в зависимости от стратегии, выбранной игроком *B*. Его выигрыш будет не меньше min{8, 2, 9, 5} = 2 независимо от поведения игрока *B*. Аналогично при выборе игроком *A* второй стратегии гарантированный выигрыш будет min{6, 5, 7, 18} = 5, и, наконец, если он выбирает третью стратегию, гарантированный выигрыш будет min {7, 3, –4, 10}= –4. Таким образом, минимальные значения в каждой строке определяют минимально гарантированный выигрыш для игрока *A*, если он выбирает соответствующую стратегию. Эти значения указаны в столбце "Минимумы в строках". Теперь игрок *A*, выбирая вторую стратегию, максимизирует свой минимальный выигрыш. Его значение будет max{2, 5, –4} = = 5. Выбранная игроком *A* стратегия называется *максиминной* стратегией, а соответствующее ей значение выигрыша – *максиминным* (*нижним*) *значением игры* [14].

Игрок *B* хочет минимизировать свой проигрыш. Выбрав первую стратегию, он может проиграть не более чем max{8, 6, 7} = 8 независимо от выбора своего противника. Подобные рассуждения можно продолжить для остальных трех стратегий. Соответствующие результаты указаны выше в строке "Максимумы в столбцах". Игрок *B* выберет стратегию, которая минимизирует его максимальные проигрыши. Такой стратегией будет вторая, для которой проигрыш игрока *B* составит min{8, 5, 9, 18} = 5. Эта стратегия называется *минимаксной*, а соответствующее ей значение проигрыша игрока *B* – *минимаксным* (или *верхним*) *значением игры*.

Из условий, определяющих критерий минимакса, следует, что минимаксное (верхнее) значение всегда *больше*, чем максиминное (нижнее) значение, или *равно* ему. В случае, когда имеет место равенство, т. е. минимаксное значение равно максиминному, соответствующие чистые стратегии называются *оптимальными*, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку*. Значение игры, определяемое парой оптимальных чистых стратегий, равно минимаксному и максиминному значениям. Оптимальность здесь означает, что ни один игрок не стремится изменить свою стратегию, так как его противник может на это ответить выбором другой стратегии, дающей худший для первого игрока результат. Вообще значение игры должно удовлетворять неравенствам:

Максиминное (нижнее) значение	≤	Значение игры	≤	Минимаксное (верхнее) значение

В приведенном примере максиминное значение равно минимаксному (= 5). Это означает, что игра имеет седловую точку, задаваемую элементом матрицы (2,2). Значение игры, таким образом, равно 5. Отметим, что ни один из игроков не может улучшить свою позицию выбором какой-нибудь другой стратегии [14].

3.8. Смешанные стратегии в играх

В предыдущем разделе показано, что из существования седловой точки непосредственно следует существование оптимальных чистых стратегий в игре. Однако некоторые игры могут не иметь седловых точек. Рассмотрим, например, следующую игру с нулевой суммой [14]:

		Игрок В 1	2	3	4	*Минимумы в строках (Игрок А)*
Игрок А	1	5	–10	9	0	–10
	2	6	**7**	8	1	1
	3	8	7	15	2	**2**
	4	3	4	–1	4	–1
Максимумы в столбцах (Игрок В)		8	7	15	**4**	

4 – минимакс; **2** – максимин.

Минимаксное значение (равное 4) больше, чем максиминное (равное 2). Следовательно, данная игра не имеет седловой точки и максиминно-минимаксные стратегии неоптимальны. Это приводит к тому, что каждый из игроков может улучшить свое положение, выбрав другую стратегию. В таком случае говорят, что игра *нестабильна* (неравновесная).

Поскольку, пользуясь чистыми максиминно-минимаксными стратегиями, в общем случае невозможно получить оптимальные решения игры, появилась идея использования смешанных стратегий. Каждый игрок вместо выбора одной из чистых стратегий может выбирать любую из них с заранее заданными вероятностями. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – наборы вероятностей, с которыми игроки A и B соответственно выбирают свои чистые стратегии. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

где $x_i, y_j \geq 0$ для всех i и j.

Если a_{ij} – (i, j)-й элемент матрицы игры, то платежная матрица будет иметь следующий вид:

		Игрок B			
		y_1	y_2	…	y_n
Игрок A	x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
	x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
	…	…	…	…	…
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Подход к определению решения игры при смешанных стратегиях также основывается на критерии минимакса, введенном в разд. 3.3. Единственная разница заключается в том, что игрок A выбирает x_i так, чтобы максимизировать наименьший *ожидаемый* выигрыш по столбцам, тогда как игрок B выбирает y_j с целью минимизировать наибольший *ожидаемый* проигрыш по строкам. Математически критерий минимакса при смешанных стратегиях может быть описан следующим образом.

Игрок A выбирает стратегию $x_i (x_i \geq 0), \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, дающую

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, ..., \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\},$$

а игрок B – стратегию $y_j\left(y_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\right)$, дающую

$$\min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}.$$

Эти величины определяются как ожидаемые соответственно максиминные и минимаксные платежи [14]. Как и в случае чистых стратегий, выполняется соотношение

Минимаксный ожидаемый проигрыш	$\geq$	Максиминный ожидаемый выигрыш

Когда x_i и y_j соответствуют оптимальным решениям, выполняется строгое равенство и результирующее значение равно ожидаемому (оптимальному) значению игры. Это утверждение следует из *теоремы о минимаксе* и приведено здесь без доказательства. Если x_i^* и y_j^* – оптимальные решения для обоих игроков, каждому элементу платежной матрицы a_{ij} соответствует вероятность $x_i^* y_j^*$. Следовательно, оптимальное ожидаемое значение игры

$$\nu^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^* y_j^* .$$

Известно несколько методов нахождения оптимальных стратегий x_i^* и y_j^* в играх двух лиц с нулевой суммой. Достаточно подробно эти методы рассмотрены в работе [14].

Контрольные вопросы и задачи

1. Чем отличаются условия использования критериев статистических решений от методов теории игр?

2. Какой из критериев наиболее оптимистичный и какой наиболее пессимистичный?

3. Если платежная матрица представляет доход, то на каких условиях основывается оптимальный выбор по критерию Сэвиджа – максимина или минимакса?

4. Какое условия в игре двух лиц с нулевой суммой определяет оптимальную стратегию?

5. Дайте характеристику смешанной стратегии в игре.

6. Рассмотрите следующую платежную матрицу (матрицу доходов):

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
a_1	15	10	0	–6	17
a_2	3	14	8	9	2
a_3	1	5	14	20	–3
a_4	7	19	10	2	0

Вероятности состояний "природы" неизвестны. Сравните решения, получаемые при следующих критериях: а) Лапласа; б) максимина; в) Сэвиджа; г) Гурвица (положить $\alpha = 0{,}5$).

7. Какие критерии принятия решения применяются в случае отсутствия информации о вероятностях состояний окружающей среды?

8. Какие критерии принятия решения используются в условиях значительного риска потери выигрыша?

9. Какие критерии принятия решения используются при необходимости получения минимально гарантированного выигрыша?

10. Сельскохозяйственное предприятие занимается овощеводством. Оно имеет возможность хранить выращенные овощи в течение всего сезона реализации – с осени до начала лета следующего года. Хозяйство может выбрать одну из трех стратегических программ реализации продукции в период сезона реализации:

A_1 – реализовать весь урожай осенью, непосредственно после уборки;

A_2 – заложить часть урожая на хранение и реализовать его в течение осенних и зимних месяцев;

A_3 – заложить весь урожай на хранение и реализовать его в весенние месяцы.

Сумма затрат на производство, хранение и реализацию продукции для хозяйства при выборе им каждой из стратегий составляет соответственно 20, 30 и 40 тыс. денежных единиц (д. е.).

На региональном рынке может сложиться одна из следующих трех ситуаций:

θ_1 – поступление продукции на рынок происходит равномерно в течение всего сезона реализации и рынок не испытывает сезонных колебаний цен реализации продукта;

θ_2 – в осенние месяцы поступает процукции немного больше, чем зимой и весной. В связи с этим наблюдаются небольшие сезонные колебания цен – в начале зимы цены немного возрастают по сравнению с осенним уровнем и держатся стабильными в течение всех последующих месяцев сезона реализации;

θ_3 – в осенние месяцы поступает значительно больше продукции, чем зимой и весной. Объемы овощей, поступающих в течение сезона реализации, постоянно уменьшаются, поэтому рынок испытывает значительные сезонные колебания цен.

Значения суммы выручки предприятия от реализации овощей при выборе каждой из стратегий реализации и формировании различных ситуаций на рынке представлены в таблице.

Стратегии хозяйства	Выручка от реализации, тыс. д. е.		
	θ_1	θ_2	θ_3
A_1	30	25	22
A_2	30	40	33
A_3	30	40	60

Определить, какая стратегия хозяйства наиболее выгодна, если информация о вероятностях состояний рынка отсутствует и предприятию необходимо:

а) получить минимально гарантированный выигрыш;

б) учесть значения риска от принятия различных решений;

в) определить наиболее выгодную стратегию, если коэффициент пессимизма равен 0,3.

11. Дайте определение игры, стратегии.

12. Приведите пример записи игры с нулевой суммой в виде платежной матрицы.

13. Что такое нижняя и верхняя цена игры?

14. Что такое оптимальная чистая стратегия? При каких условиях существует оптимальная чистая стратегия?

15. Найдите седловую точку и значение игры для каждой из следующих игр:

	B			
A	8	6	2	8
	8	9	4	5
	7	5	3	5

	B			
A	4	–4	–5	6
	–3	–4	–9	–2
	6	7	–8	–9
	7	3	–9	5

	B		
A	1,0	1,2	1,6
	1,8	1,4	1,6
	1,4	1,2	1,2

16. Укажите область значений p и q, для которых партия (2,2) будет седловой:

	B		
A	1	q	6
	p	5	10
	6	2	3

17. Подсчитайте, будут ли больше, меньше или равны нулю значения следующих игр:

	B			
A	1	9	6	0
	2	3	8	4
	–5	–2	10	–3
	7	4	–2	–5

	B			
A	4	–4	–5	6
	–3	–4	–9	–2
	6	7	–8	–9
	7	3	–9	5

Глава 4. ТЕОРИЯ ПОЛЕЗНОСТИ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА

4.1. Основные положения теории полезности

Полезностью называют величину, которую в процессе выбора старается максимизировать лицо, принимающее решение. Можно также сказать, что полезность – это воображаемая мера психологической и потребительской ценности различных благ. С содержательной точки зрения делается предположение, что человек как бы взвешивает на некоторых "внутренних весах" различные альтернативы и выбирает из них ту, полезность которой больше [9].

Теория полезности экспериментально исследовалась в так называемых задачах с вазами (или урнами). Рассмотрим пример, приведенный в работе [9].

Пусть имеется n_1 = 700 ваз 1-го типа и n_2 = 300 ваз 2-го типа. Каждый тип содержит определенную комбинацию шаров различных цветов. Если перед ЛПР находится ваза 1-го типа и он угадает это, то получит m_1 = 350 д. е., если не угадает, его проигрыш составит m_2 = 50 д. е. Если перед ним ваза 2-го типа и он это угадает, то получит выигрыш k_1 = 500 д. е., если не угадает, его проигрыш составит k_2 = 100 д. е. Он может предпринять одно из следующих действий: d_1 – сказать, что ваза 1-го типа; d_2 – сказать, что ваза 2-го типа. Условие задачи представим в виде табл. 4.1.

Таблица 4.1. **Представление задачи с вазами**

Типы ваз	Вероятность выбора вазы данного типа P	Выигрыш при действии	
		d_1	d_2
1	$P_1 = 0{,}7$	350	–100
2	$P_2 = 0{,}3$	–50	500

В такой ситуации теория полезности рекомендует оценить среднюю (ожидаемую) полезность U каждого из действий и выбрать действие с максимальной ожидаемой полезностью. В соответствии с этой рекомендацией мы можем определить среднее значение выигрыша для каждого действия [9]:

$$U(d_1) = P_1 m_1 - P_2 m_2 = 0{,}7 \cdot 350 - 0{,}3 \cdot 50 = 230 \text{ д. е.}$$

или

$$U(d_2) = P_2 k_1 - P_1 k_2 = 0{,}3 \cdot 500 - 0{,}7 \cdot 100 = 80 \text{ д. е.}$$

Следовательно, разумный человек выбирает действие d_1, а не d_2. Из этого примера следует общий рецепт действий для рационального человека: определить исходы, помножить их на соответствующие вероятности, получить ожидаемую полезность и выбрать действие с наибольшей полезностью. Осуществляя рациональный, или разумный, выбор, ЛПР придерживается определенного логически согласованного набора правил-аксиом, которые отражают поведение субъекта при некоторой азартной игре – лотерее (рис. 4.1).

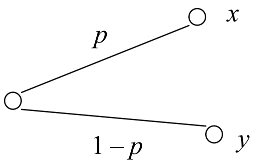


Рис. 4.1. Представление лотереи

Под лотереей $L(x, p, y)$ понимают ситуацию, в которой y принимается с вероятностью p, а x с вероятностью $(1 - p)$. Лотерею $L(x, 0{,}5, y)$ обозначают через $< x, y >$ и говорят, что эта лотерея 50 на 50. Ожидаемая (или средняя) цена (полезность) лотереи определяется по формуле $U(x, y, p) = pU(x) + (1 - p)U(y)$ – функция полезности.

Под лотереей $L(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ понимают ситуацию, в которой ЛПР может получить $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ соответственно. Если $x > y$, то говорят, что x предпочтительнее y; если $x = y$, то исходы одинаковы по предпочтению.

Рассмотрим содержание наиболее широко используемых аксиом Неймана–Моргенштерна, следуя [9].

Обозначим через x, y, z различные исходы (результаты) процесса выбора, а через p и q – вероятности тех или иных исходов.

Приведем аксиомы рационального выбора.

Аксиома 1. Исходы x, y, z принадлежат множеству A исходов.

Аксиома 2. Пусть P означает строгое предпочтение (похожее на алгебраический знак >); R – нестрогое предпочтение (похожее на отношение ≥); I – безразличие (похожее на отношение =). Ясно, что R включает в себя P и I. Аксиома 2 требует выполнения двух условий:

1) связанности – либо xRy, либо yRx, либо и то и другое вместе;

2) транзитивности – из xRy и yRz следует xRz.

Аксиома 3. Две представленные на рис. 4.2 лотереи находятся в отношении безразличия. Аксиома записывается в виде $((x, p, y)\, q, y)I(x, pq, y)$.

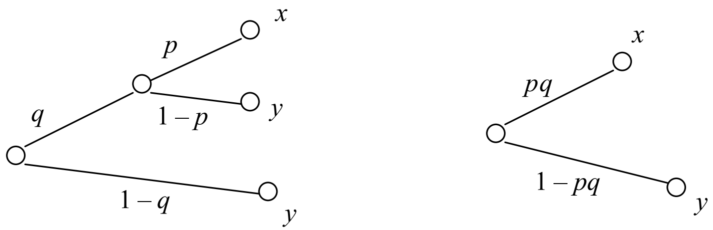


Рис. 4.2. Две лотереи, находящиеся в отношении безразличия

Аксиома 4. Если xIy, то $(x, y, z)I(y, p, z)$.

Аксиома 5. Если xPy, то $xP(x, py)\ Py$.

Аксиома 6. Если $xPyPz$, то существует такая вероятность p, что $I(x, p, z)$.

Если перечисленные аксиомы выполняются, то существует некоторая численная зависимость, получившая название *функции полезности* U. Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ – упорядоченное по предпочтению множество исходов.

Полезностью исхода x_i называется вероятность U_i, т. е. ЛПР безразлично, получить x_i наверняка или участвовать в лотерее $L(x_1, u_i, x_n)$. Значение U_i есть значение функции полезности U, определенной на упорядоченном по предпочтению множестве исходов.

Если действия ЛПР непротиворечивы, то значения U на упорядоченном по предпочтению множестве $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ будут находиться в следующих соотношениях:

$$0 = U(x_1) < U(x_2) < U(x_3) < U(x_4) < \ldots < U(x_n) = 1.$$

Последовательность действий, приводящих к выбору решения, можно представить в виде построения дерева решений.

4.2. Дерево решений

Дерево решений представляет задачу выбора рационального решения как последовательность альтернатив, каждая из которых отображается разветвлением дерева (рис. 4.3). Различают два типа разветвления дерева решений: *вилка решения* – это разветвление, отображающее альтернативу, где решение принимает ЛПР; *вилка шанса* (случая) – это разветвление, соответствующее альтернативе, где шанс выбирает исход. Обычно вилку решения графически изображают в виде небольшого квадрата, а вилку шанса – в виде точки.

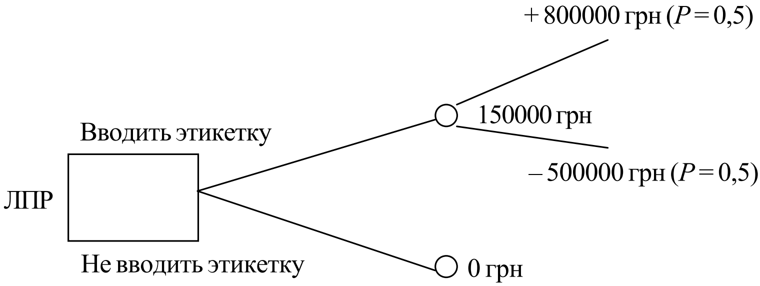


Рис. 4.3. Дерево решений

Рассмотрим задачу из [6]. Менеджер по маркетингу должен выбрать одно из двух решений: принимать новую этикетку для продукта или оставить старую. В этом случае выбор осуществляется между двумя альтернативами. Менеджер не знает наверняка, является ли новая этикетка лучше старой. Если новая этикетка лучше старой, то фирма увеличит прибыль на 800000 грн, а если нет, то потеряет 500000 грн. Предположим: если фирма принимает новую этикетку, то с вероятностью 0,5 новая этикетка окажется лучше старой и с вероятностью 0,5 – хуже.

В левой части диаграммы (см. рис. 4.3) изображена вилка решения, в которой менеджеру необходимо сделать выбор – принимать новую этикетку или оставить старую. Эта вилка решения изображена квадратом. Если менеджер выбирает нижнюю ветвь, соответствующую сохранению старой этикетки, то исход ясен: фирма не получит дополнительной прибыли, но и не понесет убытки. Следовательно, нулевая дополнительная прибыль отмечена в конце этой ветви. Если выбрана верхняя ветвь вилки решения, то мы приходим к вилке шанса, которая соответствует двум исходам – новая этикетка лучше старой и фирма получает дополнительную прибыль в размере 800000 грн, а если новая этикетка оказывается хуже старой, то фирма терпит убытки в размере 500000 грн.

Построив такое дерево решений, можно легко определить ту ветвь, которую выберет менеджер по маркетингу, чтобы максимизировать ожидаемую дополнительную прибыль. Задача решается методом обратной индукции, начиная с правого конца дерева решений. На первом шаге вычисляется ожидаемая прибыль в вилке шанса. Поскольку с вероятностью 0,5 шанс выберет ветвь, ведущую к прибыли 800000 грн, а с вероятностью 0,5 может выбрать ветвь, ведущую к убытку в размере 500000 грн, то ожидаемая прибыль в вилке шанса равна

$$0{,}5\cdot 800000 + 0{,}5\cdot(-500000) = 150000 \text{ грн.}$$

Этот результат определяет стоимость данного шанса. Двигаясь далее влево по дереву решений, отметим, что менеджер имеет возможность выбора между двумя альтернативами, или ветвями, одна из которых ведет к дополнительной прибыли в размере 150000 грн, а другая – к нулевой дополнительной прибыли. Если менеджер максимизирует ожидаемую прибыль, то выберет первую ветвь. Другими словами, он примет решение вводить новую этикетку.

Практической иллюстрацией применения статистической теории принятия решений в условиях неопределенности и риска является задача "обработки" ураганов. В начале 70-х годов Стэнфордский исследовательский институт в США анализировал эту проблему по заказу Министерства торговли США и для определения наиболее целесообразного решения использовал деревья решений. Дерево решений для этой задачи приведено на рис. 4.4 [6].

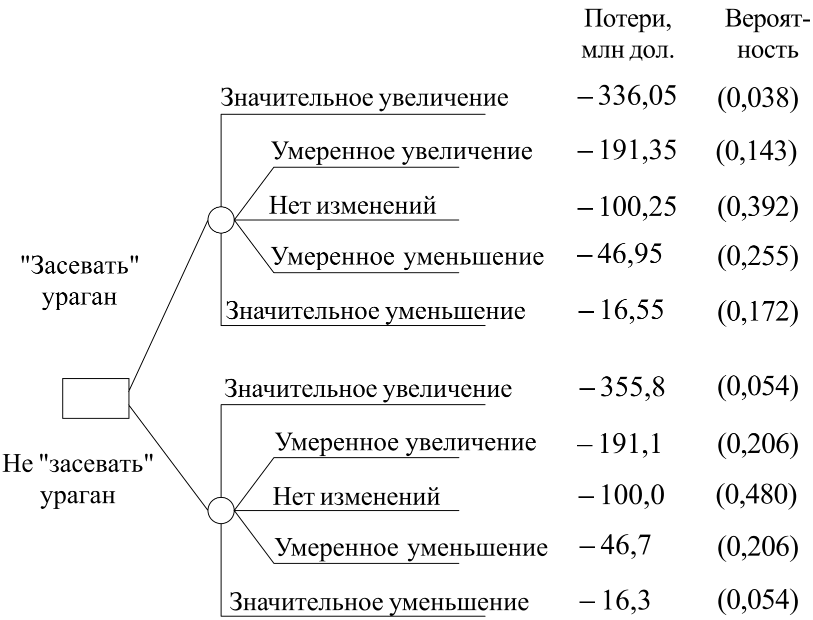


Рис. 4.4. Дерево решений для примера "обработки" ураганов

Правительство (ЛПР) должно сделать выбор между двумя возможными курсами действий – "засевать" ураган (т. е. "обработать" ураган с помощью специальных химических веществ, сбрасываемых с самолета) или его не "засевать". На рис. 4.4 дерево решений представляет собой вилку решений с двумя ветвями, одна из которых соответствует решению "засевать" ураган, а вторая – решению не "засевать" ураган. Если правительство выбирает ветку, соответствующую "засеванию", то далее исход определяет вилка шанса с пятью ветвями, соответствующими значительному увеличению, умеренному увеличению, неизменному, умеренному уменьшению или значительному уменьшению скорости ветра в эпицентре урагана. Имущественный ущерб, соответствующий каждому из этих исходов, показан на правом конце каждой из этих ветвей. Какой именно из этих исходов реализуется на практике, определяется "шансом". Вероятности каждого из этих исходов проставлены в скобках возле стоимости ущерба. Если же правительственное ведомство выбирает нижнюю ветвь дерева решений – ветвь, соответствующую решению не "засевать" ураган, то далее возможны те же пять исходов. Имущественный ущерб, соответствующий каждому из этих исходов, а также их вероятности проставлены на правом конце каждой из ветвей.

Для определения оптимального решения в случае "засевать" или не "засевать" ураган статистики Стэнфордского института вычислили ожидаемую стоимость ущерба в вершине вилки шанса, соответствующей "засеванию" и не "засеванию" урагана.

По данным первого варианта, ущерб составил

$$0{,}038\cdot(-336{,}05)+0{,}143\cdot(-191{,}35)+0{,}392\cdot(-100{,}25)+0{,}255\cdot(-46{,}95)+$$
$$+\,0{,}172\cdot(-16{,}55)=-34{,}31 \text{ млн дол.};$$

по данным второго варианта –

$$0{,}054\cdot(-335{,}8)+0{,}206\cdot(-191{,}0)+0{,}480\cdot(-100{,}0)+0{,}206\cdot(-46{,}7)+$$
$$+\,0{,}054\cdot(-16{,}3)=-116{,}0 \text{ млн дол.}$$

Анализ полученных результатов позволил сделать однозначный вывод – целесообразнее проводить "засевание" ураганов с целью снижения ущерба от производимых ими разрушений.

4.3. Максимизация ожидаемой полезности

Обсуждая задачу выбора этикетки менеджером по маркетингу, мы предполагали, что ЛПР желает максимизировать ожидаемый денежный выигрыш или минимизировать ожидаемый денежный проигрыш. Однако в некоторых случаях этот критерий не будет верным и нам понадобится сформулировать более подходящий. Для того чтобы проиллюстрировать, почему для ЛПР не всегда приемлем критерий максимизации ожидаемого денежного выигрыша, рассмотрим следующую ситуацию [6].

Предположим, что ЛПР должен сделать выбор из двух альтернатив:

♦ получить 1000000 грн наверняка;

♦ провести игру, в которой с вероятностью 0,5 выиграет 2100000 грн либо с вероятностью 0,5 проиграет 50000 грн.

Для того чтобы сделать рациональный выбор из двух предложенных альтернатив, необходимо рассчитать ожидаемый денежный выигрыш для игры и сравнить полученные результаты.

Ожидаемый доход от второй альтернативы составит

$$0{,}5 \cdot 2100000 + 0{,}5 \cdot (-50000) = 1025000 \text{ грн.}$$

Если использовать критерий максимизации ожидаемого денежного выигрыша, ЛПР должен предпочесть игру, а не получение суммы 1000000 грн наверняка. Однако большинство людей в этой ситуации, видимо, предпочтут гарантированность выигрыша первой альтернативы, даже несмотря на то, что больший ожидаемый выигрыш соответствует игре, представленной второй альтернативой. Напротив, вполне вероятно, что президент крупной фирмы может предпочесть альтернативу 2 альтернативе 1. Следовательно, на выбор предпочтительного управленческого решения влияет не только размер ожидаемого дохода от операции, но и отношение субъекта к риску. Существует три основных класса отношения людей к риску: расположенность, нерасположенность и нейтральное отношение. Для того чтобы проиллюстрировать данные классы, рассмотрим следующий пример.

Предположим, что доход брокера может быть получен двумя способами: 15000 грн в виде фиксированного заработка либо дохода от пакета акций с разбросом величины дохода от 10000 до 30000 грн. Вероятность альтернатив получения дохода от пакета акций составляет 0,5.

Функция полезности, отражающая соотношение уровня полезности и уровня дохода для рассматриваемых вариантов, представлена на рис. 4.5.

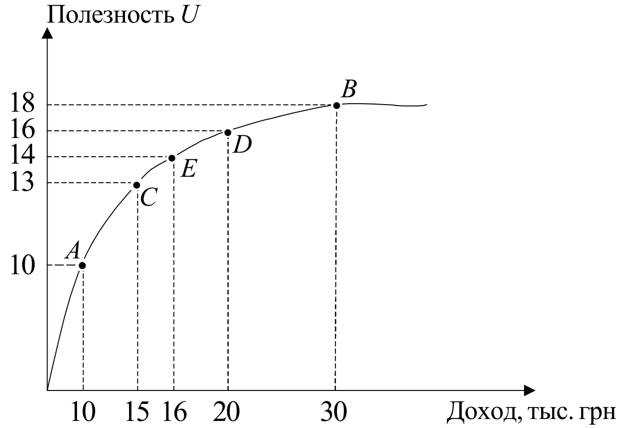


Рис. 4.5. Нерасположенность к риску

Приведенный рисунок показывает, что уровень полезности растет с 10 до 18 ед. по мере роста дохода с 10000 до 30000 грн. При этом предельная полезность постепенно уменьшается.

Чтобы оценить новый пакет акций, брокер может подсчитать ожидаемую величину конечного дохода. Ожидаемая полезность является суммой полезностей, связанных со всеми возможными результатами, умноженными на вероятность каждого из результатов.

Новый пакет акций, связанный с риском, является, таким образом, более предпочтительным, чем стабильный заработок, так как ожидаемая полезность 14 ед. больше полезности 13 ед., соответствующей доходу в 15000. В данном случае для пакета акций ожидаемая полезность составит

$$U(p) = 0{,}5 \cdot 10000 + 0{,}5 \cdot 30000 = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 18 = 14.$$

Как отмечалось выше, люди различаются по своей готовности пойти на риск. Человек, который предпочитает стабильный доход акциям, связанным с риском, считается ***нерасположенным к риску***. Для него характерна низкая предельная полезность дохода. Нерасположенность к риску – огромное число ситуаций, при которых люди страхуются. Множество людей не только заключают договоры по страхованию жизни, здоровья, автомобиля, но также ищут работу с относительно стабильной заработной платой, вкладывают деньги в наиболее стабильные ценные бумаги.

Рис. 4.5 иллюстрирует нерасположенность человека к риску. Предположим, что он может выбирать ценные бумаги со стабильным доходом 20000 грн или пакет акций с доходом 30000 грн и вероятностью 0,5 или с доходом в 10000 грн и вероятностью 0,5. В этом случае средний ожидаемый доход от владения пакетом рисковых акций составляет 20000 грн. Ожидаемая полезность пакета акций равна 14 (расчет приведен выше) и обозначена на рис. 4.5 точкой *E*. Затем сравнивается ожидаемая полезность акций, связанных с риском, с полезностью стабильного дохода в 20000 грн. Уровень полезности стабильного дохода составляет 16 и на рис. 4.5 обозначен точкой *D*. Очевидно, что ожидаемая полезность стабильного дохода на 2 ед. больше, чем полезность от пакета акций, связанных с риском. Следовательно, такой вид функции полезности характеризует негативное отношение человека к риску.

Рис. 4.6 отражает ***расположеность к риску***. В данном случае ожидаемая полезность дохода от владения пакетом акций выше, чем полезность стабильного дохода. В числовом выражении это выглядит следующим образом:

$$U(p) = 0{,}5 \cdot 10000 + 0{,}5 \cdot 30000 = 1{,}5 + 9 = 10{,}5;$$

$$U(20000) = 8; \quad 8 < 10{,}5.$$

Свидетельством расположенности к риску является прежде всего то, что многим людям нравится предпринимательство. Тем не менее можно утверждать, что очень немногие люди расположены к риску, особенно при крупных покупках или больших размерах дохода или ущерба.

Человеку, ***нейтрально относящемуся к риску***, безразлично – получать стабильный доход или купить акции с неопределенным доходом. В этом случае ожидаемая полезность от этих двух вариантов должна быть одинакова.

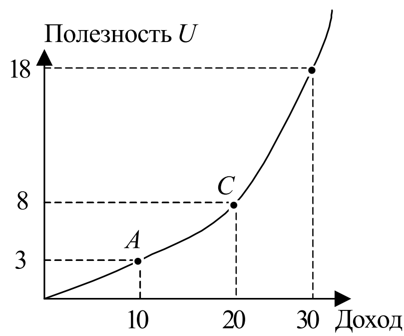


Рис. 4.6. Расположенность к риску

На рис. 4.7 ожидаемая полезность, связанная с акциями, дающими доход 10000 или 30000 грн с одинаковой вероятностью 0,5, составляет 13, тогда как и ожидаемая полезность при получении стабильного дохода в 20000 грн равна тоже 13:

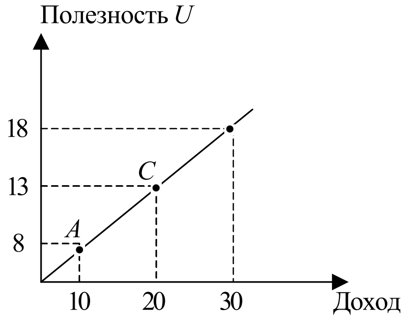


Рис. 4.7. Безразличие отношение к риску

$$U(p) = 0{,}5 \cdot 10000 + 0{,}5 \cdot 30000 =$$

$$= 0{,}5 \cdot 8 + 0{,}5 \cdot 18 = 13;$$

$$U(20000) = 13; \quad 13 = 13.$$

4.4. Построение функции полезности

Функция полезности отражает предпочтения ЛПР в отношении к риску, ее построение осуществляется в два этапа.

На *первом этапе* выбираются наилучшее и наихудшее значения исхода, выраженные в денежной форме. Полезность лучшего исхода устанавливается большей, чем полезность худшего. Зачастую полезность самого плохого исхода приравнивается к нулю, а полезность наилучшего исхода – единице.

В задаче про ураганы, например, можно установить полезность наихудшего исхода, соответствующего наибольшему возможному ущербу, т. е. $U(-336{,}05)$, равной нулю, а полезность наилучшего исхода $U(-16{,}3)$, т. е. самого маленького ущерба, равной единице. Нужно отметить, что конечные результаты анализа не зависят от выбора численных значений полезности до тех пор, пока выбранная полезность лучшего исхода будет больше полезности худшего. Таким образом, можно, например, установить полезность $U(-336{,}05)$ равной 4, а полезность $U(-16{,}3)$ равной 10.

Второй этап является более сложным. Необходимо предоставить ЛПР выбор между двумя альтернативами. Первая представляет собой определенное значение денежного выигрыша, которое ЛПР может получить наверняка. Вторая альтернатива представляет собой игру с двумя возможными исходами, полезности которых заданы нами произвольно на первом этапе. Предположим, например, что мы хотим определить значение $U(-191{,}1)$. Тогда мы должны задать ЛПР следующий вопрос: предпочитает он определенность потери, оцениваемой в 191,1 млн грн, либо игру, в которой потеря составляет 16,3 млн грн с вероятностью P и 336,05 млн грн с вероятностью $(1 - P)$. Задача ЛПР состоит в том, чтобы определить значение P, при котором для него потеря в 191,1 млн грн и игра будут иметь одинаковую полезность. Предположим, что значение P для условий данной задачи равно 0,45, тогда ожидаемая полезность потери в 191,1 млн грн равна ожидаемой полезности этой игры, т. е.

$$U(-191{,}1) = (1 - P)\ U(-336{,}5) + PU(-16{,}3);$$

$$U(-191{,}1) = 0{,}55\ U(-336{,}05) + 0{,}45\ U(-16{,}3).$$

Поскольку установлено, что полезность $U(-336{,}05)$ равна нулю, а полезность $U(-16{,}3)$ равна единице, полезность $U(-191{,}1)$ будет 0,45. Аналогичным образом можно найти $U(-100{,}0)$, $U(-46{,}7)$ и другие значения полезностей, которые необходимо знать для определения ожидаемой полезности "обработки" урагана. Например, полезность ущерба 100 млн грн:

$$U(-100{,}0) = 0{,}26U(-336{,}05) + 0{,}74U(-16{,}3) = 87{,}49 + 12{,}06 = 99{,}55.$$

Поскольку $U(-336{,}05)$ равна нулю, а $U(-16{,}3)$ равна единице, это означает, что $U(-100{,}0)$ равна 0,74.

Функцию полезности ЛПР можно представить в виде графика, отображающего значения уровня полезности, которые ЛПР приписывает тому или иному количественному значению денежного выигрыша или потери. По виду графика функции полезности можно судить о склонности ЛПР к риску.

Одной из характеристик отношения ЛПР к риску является функция несклонности к риску $r(x)$, которая определяется по формуле

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

где $u'(x), u''(x)$ – первая и вторая производные функции полезности ЛПР.

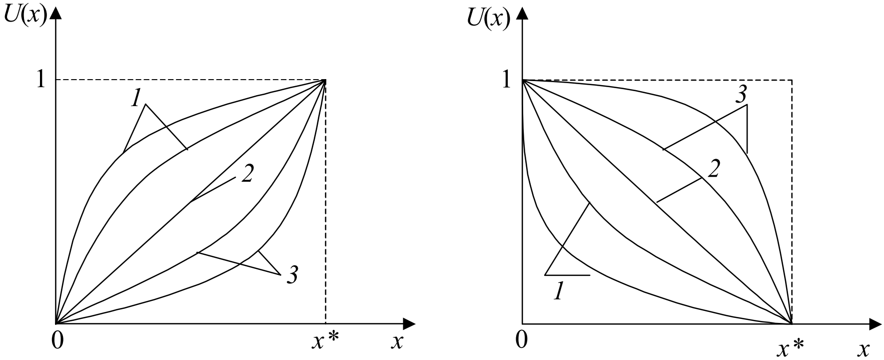
Возможные наборы значений данной функции представлены в табл. 4.2; в ней также приведены основные виды функций полезности ЛПР.

Таблица 4.2. **Соответствие функции несклонности ЛПР к риску видам функции полезности**

Характеристика ЛПР	Значение функции $r(x)$	Пример функции полезности
Возрастающая несклонность к риску	$r(x) > 0$; $r'(x) > 0$	$U(x) \sim a + bx - cx^2 \; \left(c > 0; x < \dfrac{b}{2c}\right)$
Убывающая несклонность к риску	$r(x) > 0$; $r'(x) < 0$	$U(x) \sim \log_a(x + b)$ $(x > -b;\ a > 1)$
Постоянная несклонность к риску	$r(x) > 0$; $r'(x) = 0$	$U(x) \sim -e^{-\alpha}$ $(c > 0)$
Убывающая склонность к риску	$r(x) < 0$; $r'(x) > 0$	$U(x) \sim a + bx + cx^2$ $(c > 0;\ x > -b/2c)$
Постоянная склонность к риску	$r(x) < 0$; $r'(x) = 0$	$U(x) \sim -e^{\alpha}$ $(c > 0)$
Нейтральное отношение к риску	$r(x) = 0$	$U(x) \sim a + bx$ $(b > 0)$

Общая форма функции полезности полностью определяется отношением к риску. Несклонность к риску (безразличие к риску, склонность к риску) означает, что функция полезности является вогнутой (линейной, выпуклой).

Все три случая иллюстрируются рис. 4.8 как для возрастающих, так и для убывающих функций полезности [5].



а *б*

Рис. 4.8. Влияние отношения к риску и функции полезности:

а – возрастающие функции полезности; ***б*** – убывающие функции полезности; *1* – несклонность к риску; *2* – безразличие к риску; *3* – склонность к риску

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия *полезность*.

2. Дайте характеристику лотереи и основных аксиом Неймана–Моргенштерна.

3. Что такое дерево решений? вилка решения? вилка шанса (случая)?

4. Как выполняются расчетные операции на дереве решений?

5. На какие категории можно разделить людей по их отношению к риску?

6. Представьте классификацию функций полезности в соответствии с отношением к риску.

7. Представьте алгоритм построения функций полезности.

8. Постройте функции полезности для значений дерева решений, изображенного на рис. 4.4.

Глава 5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

5.1. Основные положения теории нечетких множеств

Существует целый класс описаний, оперирующих с качественными характеристиками объектов (много, мало, сильный, очень сильный и т. п.). Эти характеристики обычно размыты, однако могут содержать важную информацию (например: одним из возможных признаков гриппа является высокая температура.)

Кроме того, в задачах, решаемых интеллектуальными системами, часто приходится пользоваться неточными знаниями, которые не могут быть интерпретированы как полностью истинные или ложные (логические true/false (да/нет) или 1/0). Существуют знания, достоверность которых выражается некоторыми промежуточными значениями, когда ответы могут иметь форму типа "может быть", "вероятнее всего". Например, 30-летнего человека можно отнести к "молодым" и к "немолодым" категориям (множествам) людей. Эта задача решается в основном интуитивно, предполагается, например, что 30-летний человек с коэффициентом истинности 0,65 является молодым, а с коэффициентом 0,35 – немолодым.

Для рассмотренных описаний качественного характера американский математик Лотфи Заде предложил в начале 70-х годов формальный аппарат нечеткой алгебры (fuzzy sets). Это и положило начало одной из ветвей искусственного интеллекта под названием "мягкие вычисления" (soft computing).

В основе данного аппарата лежит понятие *лингвистической переменной* (ЛП), значениями которой являются слова или предложения естественного или искусственного языка [3]. Например, *Возраст* – лингвистическая переменная, если она принимает лингвистические, а не числовые значения, т. е. значения *молодой*, *немолодой*, *очень молодой*, *вполне молодой* и т. п., а не 20, 40, 18, 22 и т. д.

Более точно ЛП описывается набором $\{X, T(X), U, G, M\}$, где X – название этой переменой; $T(X)$ – терм-множество X, т. е. совокупность ее лингвистических значений; U – универсальное множество; G – синтаксическое правило, порождающее термы множества $T(X)$; M – семантическое правило, которое каждому лингвистическому значению X

ставит в соответствие его смысл $M(X)$, причем $M(X)$ обозначает нечеткое подмножество A множества U.

Смысл лингвистического значения $x \in X$, называемого степенью принадлежности, характеризуется *функцией принадлежности* (ФП) $\mu_A(x)$, которая каждому элементу x ставит в соответствие какое-то число из отрезка [0; 1]. Например, принадлежность возраста 27 лет со значением *молодой* может быть равна 0,7, а возраста 35 лет – 0,2.

Совокупность значений ЛП составляет *терм-множество* этой переменной. Это множество может иметь, вообще говоря, бесконечное число элементов. Например, терм-множество ЛП *Возраст* можно записать так: T (*Возраст*) = молодой + немолодой + очень молодой + не очень молодой + очень-очень молодой + … + старый + нестарый + очень старый + …

Знак "+" обозначает здесь не арифметическое сложение, а *объединение*, присущее операциям над множествами. В случае ЛП *Возраст* числовая переменная, принимающая значения 0, 1, 2, 3, …, 100, является так называемой *базовой переменной* лингвистической переменной *Возраст*.

При этом такое, например, лингвистическое значение, как *молодой*, можно интерпретировать как название некоторого *нечеткого ограничения* на значения базовой переменной. Именно это ограничение и считается смыслом лингвистического значения *молодой*.

Рассмотрим, например, иерархическую структуру ЛП *Возраст* (рис. 5.1).

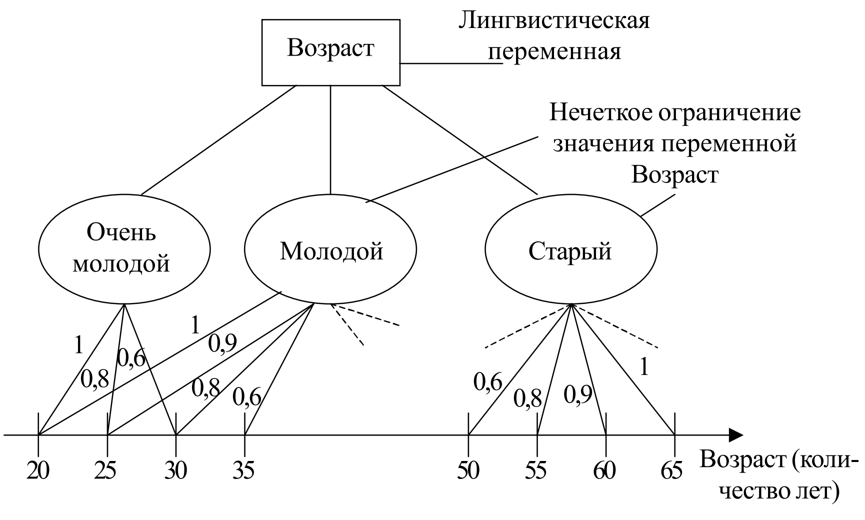


Рис. 5.1. Иерархическая структура лингвистической переменной

На рис. 5.1 отражено, как одни и те же значения базовой переменной (шкалы) могут участвовать в определении различных нечетких множеств (НМ). Например, определить значения НМ *молодой* возраст можно так:

$$\text{НМ(молодой)} = \left\{\frac{20}{1} + \frac{25}{0,9} + \frac{30}{0,8} + \frac{35}{0,6}\right\}.$$

Здесь эксперт с высокой степенью уверенности ($m = 1$) относит к молодым людей возрастом до 20 лет. Люди до 35 лет причисляются также к молодым, но с меньшей степенью уверенности ($0,6 \le m \ge 0,9$). Аналогично можно записать значения НМ для других категорий возраста. С учетом сказанного функцию принадлежности $\mu(x)$ можно представить в виде рис. 5.2.

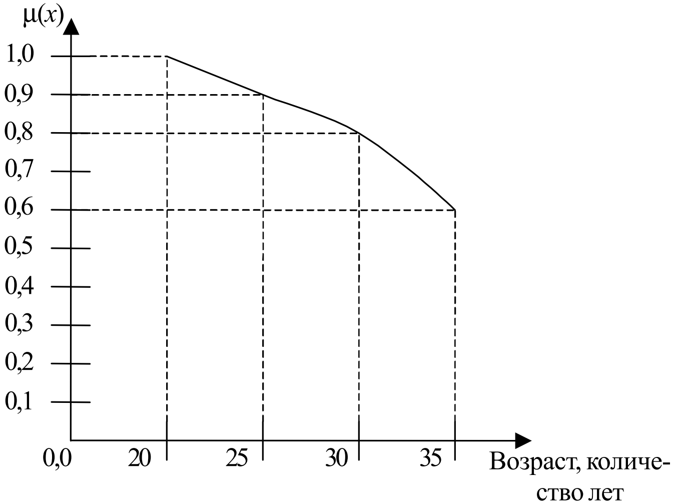


Рис. 5.2. График функции принадлежности нечеткому множеству *Молодой возраст*

Наиболее важными характеристиками НМ являются носитель и высота. При этом *носителем* $S_A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$НМ A называется множество всех элементов универсального множества U, которые имеют ненулевую степень принадлежности, а *высотой* – значение $\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)$, т. е., верхняя граница $\mu_A(x)$ [8].

Наиболее часто используют следующие свойства и операции над НМ [8].

1. Условие *равенства* НМ A и B с включением НМ A в НМ B есть соответственно

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X : \mu_A(x) = \mu_B(x) \text{ и } A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in X : \mu_A(x) \le \mu_B(x).$$

2. Если A и B – нечеткие подмножества универсального множества X, то их *пересечение* определяется как

$$A \cap B = \{\mu_{A \cap B}(x)/x\}(x \in X),$$

где $\mu_{A\cap B}(x) = \wedge(\mu_A(x), \mu_B(x))$, а объединение НМ A и B обозначается через $A \cup B$ и определяется как

$$A \cup B = \{\mu_{A \cup B}(x)/x\}(x \in X),$$

где $\mu_{A\cup B}(x) = \vee(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

3. Дополнением A есть НМ B, если $B = \overline{A}$, причем $\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x), (x \in X)$.

4. Если α – любое неотрицательное число, такое, что $\alpha \sup\limits_{x \in X} \mu_A(x) \le 1$

$\alpha \sup\limits_{x} \mu_A(x) \le 1$, то произведение числа α на множество A есть

$$\alpha A = \int \alpha(\mu_A(x))/x.$$

5. Декартово произведение НМ $A_1, A_2, ..., A_n$, $A_i \in X(i = \overline{1,n})$ определяется как НМ $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ в декартовом произведении $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ с ФП $\mu_A(x) = \{\mu_A(x_1), ..., \mu_A(x_n)\}$,а $x = \{x_1, ..., x_n\} \in X$.

Довольно часто для реализации многих приложений используют множество α-уровня.

Множеством α-уровня [3, 8] НМ A есть множество A_α всех элементов универсального множества X, степень принадлежности которых НМ A больше или равняется α:

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \ge \alpha\}.$$

Нечеткое множество A можно разложить на подмножества α-уровня таким образом:

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha \quad \text{или} \quad A = \bigcup_\alpha \alpha A_\alpha ,$$

где αA_α – произведение числа α ($\alpha \in [0; 1]$) на множество A_α.

Указанные расположения можно рассматривать как результат группирования членов НМ A по множествам, любое из которых соответствует определенному множеству уровня. Допустим, например, НМ A имеет вид [8]

$$A = \{0{,}2/4;\ 0{,}3/6;\ 0{,}8/9;\ 1/10;\ 0{,}7/11;\ 0{,}4/12;\ 0{,}1/14\}.$$

Тогда A можно представить в виде разложения на подмножества таким образом:

$$A_{0,1} = \{4, 6, 9, 10, 11, 12, 14\};$$
$$A_{0,2} = \{4, 6, 9, 10, 11, 12\};$$
$$A_{0,3} = \{6, 9, 10, 11, 12\};$$
$$A_{0,4} = \{9, 10, 11, 12\};$$
$$A_{0,7} = \{9, 10, 11\};$$
$$A_{0,8} = \{9, 10\};$$
$$A_{1,0} = \{10\}.$$

Разложение на подмножества уровней α_i значительно облегчает формализацию разных операций над нечетко определенными параметрами.

5.2. Функции принадлежности и методы их построения

Функции принадлежности, характеризующие нечеткое множество, могут быть заданы аналитически или графически, чаще всего представляют собой кусочно-линейные зависимости. На рис. 5.3 приведены зависимости $\mu_M(x)$, наиболее часто используемые на практике для описания нечетких множеств M, заданных в середине и по краям интервала базисной переменной x. Там же приведена функция принадлежности четкого множества M, содержащего лишь одну пару $\{x_1, \mu_M(x_1)\}$, где $\mu_M(x_1) = 1$, а сама пара называется *синглтоном*.

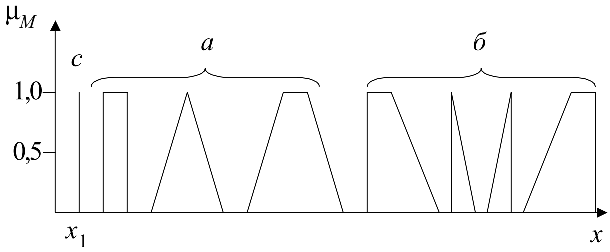


Рис. 5.3. Функции принадлежности:
а – внутренние; *б* – краевые; *с* – синглтон

Например, если температура в жилом помещении характеризуется такими нечеткими понятиями, как "холодно", "прохладно", "нормально", "тепло", "жарко", то совокупность M_t этих пяти значений рассматривается как лингвистическая переменная, принимающая перечисленные значения (термы). Лингвистическая переменная полностью определена, если заданы множество ее термов и соответствующих функций принадлежности (рис. 5.4). Заметим, что вместо абсолютных значений базисной переменной часто используют ее нормированные значения $\bar{x}$.

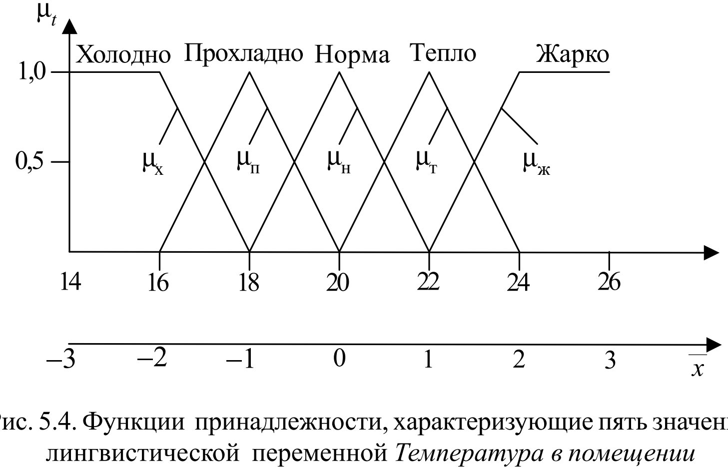


Рис. 5.4. Функции принадлежности, характеризующие пять значений лингвистической переменной *Температура в помещении*

Рассмотрим ряд методов построения функций принадлежности, используя результаты работы [8].

Метод экспертного опроса

Данный метод основан на проведении опроса экспертов. Пусть из всех m экспертов n_1 на вопрос о принадлежности элемента $x \in X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ НМ A отвечают положительно, а другие ($n_2 = m - n_1$) отрицательно. Тогда ФП определяют так:

$$\mu_A(x) = n_1/(n_1 + n_2),$$

а ее интерпретацией будет частотная вероятность использования объекта x как представителя класса A. В этом методе исходными данными для построения ФП будут значения n_1 и n_2.

Пусть, например, $X = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ – множество, которое определяет число разделов учебного пособия. Построим функцию принадлежности, которая формализует понятие: ***достаточное число разделов учебного пособия, которые обеспечивают необходимый уровень знаний, немного больше пяти***.

Предположим, что результаты опроса семи экспертов известны и представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1. **Результаты опроса экспертов**

m	X				
	$x_1 = 4$	$x_2 = 5$	$x_3 = 6$	$x_4 = 7$	$x_5 = 8$
n_1	0	0	7	6	4
n_2	7	7	0	1	3

Тогда, в соответствии с приведенным выше выражением для ФП, получим такие степени принадлежности элементов X НМ A: $\mu_A(x_1) = 0$; $\mu_A(x_2) = 0$; $\mu_A(x_3) = 1$; $\mu_A(x_4) = 0{,}857$; $\mu_A(x_5) = 0{,}571$.

По результатам выполненных операций получаем (рис. 5.5) искомую $\mu(x)$. Рассмотренный метод характеризуется простотой и удобством формирования функции принадлежности и часто применяется при решении различных практических задач.

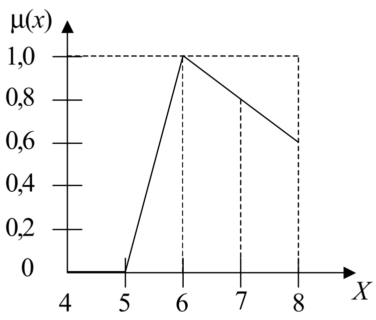


Рис. 5.5. Функция принадлежности, созданная по методу опроса экспертов

Числовой метод

Числовой метод также основан на опросе группы экспертов, которые определяют числовое значение для каждого из рассмотренных классов. Далее вычисляется среднее значение по данным всех экспертов, т. е. для n экспертов, которые дают числовую оценку принадлежности элемента $x \in X$ НМ A, ФП можно записать как

$$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) / n.$$

Исходные данные для построения ФП представляют собой числовые значения степеней принадлежности, которые находятся в интервале [0; 1].

Решим рассмотренную выше задачу с использованием числового метода. Числовые значения оценок каждого из пяти экспертов представим в табл. 5.2, где в последней строке разместим значения ФП, полученные по результатам преобразований согласно приведенной формуле. Функцию принадлежности представим на рис. 5.6.

Таблица 5.2. **Числовые значения оценок экспертов**

Номер эксперимента	X				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	0	1	0,9	0,7
2	0	0	1	0,7	0,6
3	0	0	1	0,8	0,6
4	0	0	1	0,9	0,7
5	0	0	1	0,7	0,5
Σ	0	0	7	4	3,1
ФП	0	0	1	0,8	0,62

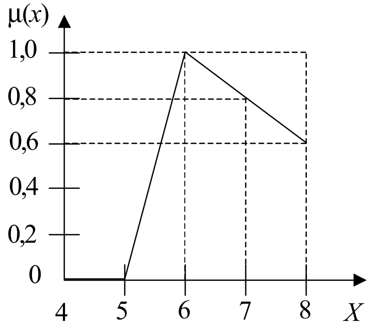


Рис. 5.6. Функция принадлежности, образованная по числовому методу

Метод нечеткого попарного сравнения

Пусть A – нечеткое множество из n элементов вида

$$A = \{\mu_A(x_1)/x_1, \mu_A(x_2)/x_2, ..., \mu_A(x_n)/x_n, \},$$

которое соответствует обязательному условию $\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) = 1.$

Степень принадлежности элементов определяется с помощью парных сравнений, а количество вопросов к эксперту составляет $n(n-1)/2$. По его оценке формируется матрица парных сравнений $A = \| a_{ij} \|$, где значение a_{ij} выбирается из табл. 5.3 (оценка элемента x_i в сравнении с x_j по свойствам A). Для обеспечения согласованности суждений экспертов допускается, что $a_{ij} = 1/a_{ji}$. После формирования матрицы A необходимо найти собственный вектор матрицы $w = (w_1, ..., w_n)$ путем подсчета значений среднего геометрического из соотношения $w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}$, $j = \overline{1,n}$. Вычисленные таким образом значения w_i, которые составляют собственный вектор, используются как степень принадлежности элементов x множеству A: $\mu_A(x_i) = w_i$, $i = \overline{1,n}$.

Таблица 5.3. **Шкала для построения матрицы суждений**

Оценка значимости	Качественная оценка	Примечание
1	Одинаковая значимость	Альтернативы имеют одинаковый ранг
3	Слабое преимущество	Преимущество одной альтернативы перед другой малоубедительное
5	Сильное (или важное) преимущество	Есть надежда доказательства существенного преимущества одной альтернативы
7	Очевидное преимущество	Существуют убедительные свидетельства в пользу одной альтернативы
9	Абсолютное преимущество	Свидетельство в пользу преимущества одной альтернативы над другой с наибольшей мерой убедительности
2, 4, 6, 8,	Промежуточные значения	Используются, если необходим компромисс

Рассмотрим пример. Пусть $X = \{5, 7, 8, 10\}$ – множество, определяющее количество разделов учебного пособия. Построим ФП, которая формализует понятие: ***достаточное количество разделов учебного пособия для обеспечения необходимого уровня знаний составляет семь***.

Матрица парных сравнений количества разделов, пронумерованных в порядке представления в множестве X, имеет вид

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1/9 & 1/3 & 1 \\ 9 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 1/7 & 1 & 7 \\ 1 & 1/9 & 1/7 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Определим весовые коэффициенты w_i следующим образом:

$$w_1=\sqrt[4]{1\cdot 1/9\cdot 1/3\cdot 1}=0{,}439\,;\; w_2=\sqrt[4]{9\cdot 1\cdot 7\cdot 9}=4{,}88\,;$$

$$w_3=\sqrt[4]{3\cdot 1/7\cdot 1\cdot 7}=1{,}316\,;\; w_4=\sqrt[4]{1\cdot 1/9\cdot 1/7\cdot 1}=0{,}355\,.$$

После их нормализации получим

$$\mu_A(x_1)=w_1=0{,}06;\ \mu_A(x_2)=w_2=0{,}7;\ \mu_A(x_3)=w_3=0{,}19;\ \mu_A(x_4)=w_4=0{,}05.$$

Функция принадлежности с учетом полученных коэффициентов w_i, определяющих степень принадлежности x_i к множеству A, показана на рис. 5.7.

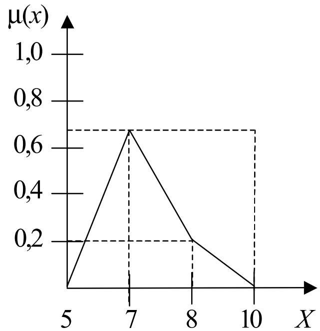


Рис. 5.7. Функция принадлежности, построенная по методу попарного сравнения

Метод попарных сравнений на ранговых оценках

Метод парных сравнений на основе ранговых оценок рассмотрен в работе [8], где в качестве исходных данных также используется матрица парных сравнений. Данный метод построения ФП состоит из таких этапов:

♦ определяется лингвистическая переменная;

♦ определяется универсальное множество, на котором задается лингвистическая переменная;

♦ определяется совокупность нечетких термов $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$, как и для оценивания переменной;

♦ формируется для каждого терма S_j матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{r_2}{r_1} & \dots & \frac{r_n}{r_1} \\ \frac{r_1}{r_2} & 1 & \dots & \frac{r_n}{r_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r_1}{r_n} & \frac{r_2}{r_n} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где $r_i = r(x_i)$, $i = \overline{1,n}$ – ранг элемента $x_i \in X$, который характеризует значимость этого элемента в формировании свойств, описываемых термом S;

♦ вычисляются элементы ФП для любого терма по формулам

$$\mu_A(x_1) = \left(1 + \frac{r_2}{r_1} + \dots + \frac{r_n}{r_1}\right)^{-1}; \mu_A(x_2) = \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 + \dots + \frac{r_n}{r_2}\right)^{-1};$$

$$\mu_A(x_n) = \left(\frac{r_1}{r_n} + \frac{r_2}{r_n} + \dots + 1\right)^{-1};$$

♦ нормализуются сформированные ФП.

Для примера рассмотрим задачу, которая использовалась в описании предыдущего метода. Матрица парных сравнений в соответствии с условиями метода будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9/1 & 9/3 & 1 \\ 1/9 & 1 & 1/3 & 1/9 \\ 3/9 & 3/1 & 1 & 3/9 \\ 1 & 9/1 & 9/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определяем степени принадлежности элементов НМ A:

$$\mu_A(x_1) = (1 + 9/1 + 9/3 + 1)^{-1} = 0{,}071;$$

$$\mu_A(x_2) = (1/9 + 1 + 1/3 + 1/9)^{-1} = 0{,}643;$$

$$\mu_A(x_3) = (3/9 + 3 + 1 + 3/9)^{-1} = 0{,}214;$$

$$\mu_A(x_4) = (1 + 9/1 + 9/3 + 1)^{-1} = 0{,}071.$$

Полученные значения $\mu_A(x)$ используем для построения функции принадлежности (рис. 5.8).

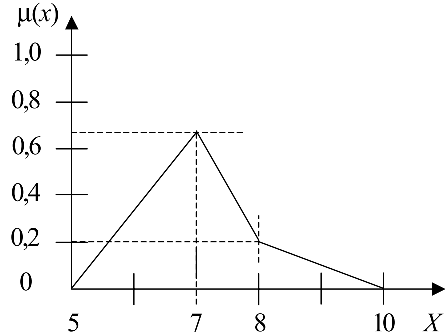


Рис. 5.8. Функция принадлежности, построенная для ранговых оценок

Метод назначения параметров

Данный метод позволяет формировать треугольные и трапециевидные функции принадлежности нечетких чисел. Здесь используется следующая экспертная информация о параметре: название параметра A; диапазон его изменения $[a; c]$; количество лингвистических термов m, с помощью которых оценивается параметр; название каждого лингвистического терма.

Трапециевидную форму нечеткого числа A определяет четверка: $A = (a, b_1, b_2, c)Lr$, где $a(c)$ – нижняя (верхняя) граница A на нулевом α-уровне; $b_1(b_2)$ – нижняя (верхняя) граница A на единичном α-уровне; L и R – линейные функции. Интервалы $[b_1; b_2]$ и $[a; c]$ можно назвать соответственно оптимистической и пессимистической оценкой параметра A. Такое представление отвечает ФП, показанной на рис. 5.9, и соответствует выражению

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < a; \\ \dfrac{x-a}{b_1-a}, & \text{если} \quad a \le x \le b_1; \\ 1, & \text{если} \quad b_1 \le x \le b_2; \\ \dfrac{c-x}{c-b_2}, & \text{если} \quad b_2 \le x \le c; \\ 0, & \text{если} \quad x > c. \end{cases}$$

В этом случае носителем нечеткого множества A будет интервал $[a; c]$, а ядром – $[b_1; b_2]$. Если A задано трапециевидной формой $A = (a, b_1, b_2, c)\sqcup r$, то переход к α-уровневому описанию $A = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} (a_\alpha, b_\alpha)$ осуществляется по формулам

$$a_\alpha = a + (b_1 - a)\alpha; \, c_\alpha = c - (c - b_2)\alpha.$$

Как вытекает из условия метода, в процессе формирования A его параметры назначает эксперт.

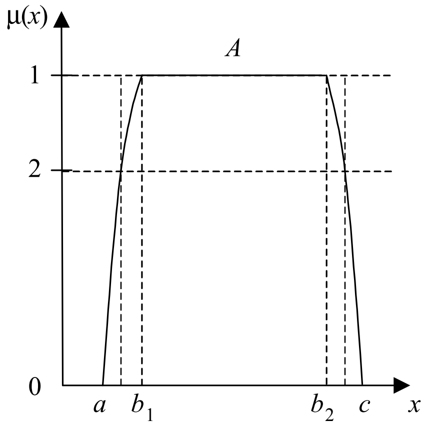


Рис. 5.9. Нечеткое число A с трапециевидной функцией принадлежности

Треугольную форму A определяет тройка вида $A = (a, b, c)\sqcup r$, где $a(c)$ – нижняя (верхняя) граница A на нулевом α-уровне; b – значение A на единичном α-уровне. Такое описание отвечает ФП, показанной на рис. 5.10 и имеющей следующий аналитический вид:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, \text{если} \quad x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{если} \quad a \le x \le b; \\ \\ \dfrac{c-x}{c-b}, \text{если} \quad b \le x \le c; \\ 0, \text{если} \quad x > c. \end{cases}$$

Носителем A в этом случае является интервал $[a; c]$, а ядром – число b. Интервал $[a; c]$ называют *пессимистической оценкой параметра A*, а число b – *оптимистической оценкой параметра A*. Если A задано треугольной формой, то переход к α-уровневому описанию величин выполняется по формулам

$$a_\alpha = a + (b - a)\alpha; \;\; c_\alpha = c - (c - b)\alpha.$$

Рассмотрим пример из работы [8]. При реализации криптографических преобразований на компьютере типа Pentium применяют открытые ключи размером от 768 до 2048 бит. Пусть нужно построить нечеткое множество A, которое формализует понятие: ***наилучшая длина ключа для оптимального обеспечения соотношения конфиденциальности информации и скорости шифрования находится в интервале от 1024 до 2048 бит***. В этом случае для A: a = 768 бит; b_1 = 1024 бит; b_2 = 2048 бит. Полученная ФП представлена на рис. 5.11 и является трапециевидной.

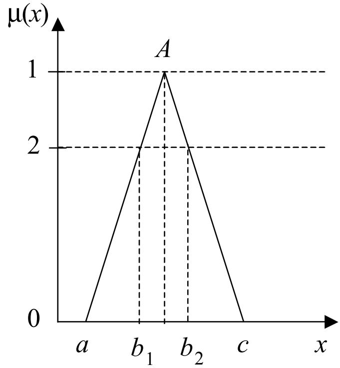


Рис. 5.10. Нечеткое число A с треугольной функцией принадлежности

Рассмотрим случай, когда формируется нечеткое множество в треугольной интерпретации. Пусть $X = \{2, 7, 10\}$ – множество, которое определяет количество символов длины секретного ключа. Нужно построить нечеткое множество A, формализующее понятие: ***достаточная длина секретного ключа для обеспечения конфиденциальности информации составляет семь символов***.

Здесь носителями A будет служить интервал [2; 10], его ядром – число 7, т. е. $A = (2, 7, 10)\llcorner r$, где $a = 2$, $b = 7$, $c = 10$, а графическое изображение ФП дано на рис. 5.12.

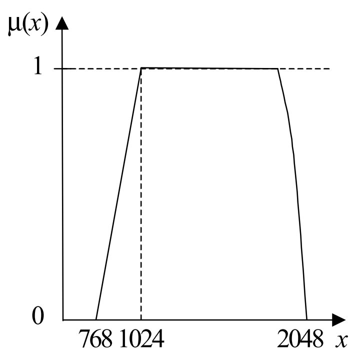


Рис. 5.11. Трапециевидная функция принадлежности

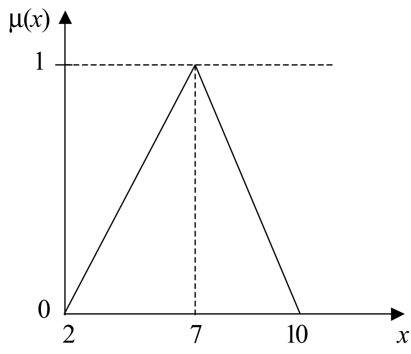


Рис. 5. 12. Треугольноподобная функция принадлежности

5.3. Многокритериальный выбор альтернатив на основе пересечения нечетких множеств

В данном случае критерии определяют некоторые понятия, а оценки альтернатив представляют собой степени соответствия этим понятиям. Пусть имеется множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и множество критериев $c = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. При этом оценки альтернатив по каждому i-му критерию представлены нечеткими множествами:

$$c_i = \{\mu_{c_1}(a_1)/a_1;\ \mu_{c_2}(a_2)/a_2;\ \mu_{c_i}(a_m)/a_m\}.$$

Правило выбора лучшей альтернативы можно представить как пересечение нечетких множеств, соответствующих критериям:

$$D = c_1 \cap c_2 \cap \cdots \cap c_n.$$

Операция пересечения НМ может быть реализована разными способами. Иногда пересечение выполняется путем арифметического умножения, но обычно этой операции соответствует взятие минимума:

$$\mu_D(a_j) = \min_{i=1,\ldots,m} \mu_D(a_j), \quad j = 1,\ldots,m.$$

Лучшей считается альтернатива a^*, имеющая наибольшее значение функции принадлежности:

$$\mu_D(a^*) = \max_{j=1,\ldots,m} \mu_D(a_j{}^*), \quad j = 1,\ldots,m.$$

Если критерии c_i имеют различную важность, то их вклад в общее решение можно представить как взвешенное пересечение:

$$D = c_1^{\alpha_1} \cap c_2^{\alpha_2} \cap \ldots \cap c_n^{\alpha_n},$$

где α_i – весовые коэффициенты соответствующих критериев, которые должны удовлетворять следующим условиям:

$$\alpha_j \ge 0; \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1; \quad i = 1,\ldots,n.$$

Коэффициенты относительной важности можно определить, используя процедуру парного сравнения критериев.

5.4. Многокритериальный выбор альтернатив на основе нечеткого отношения предпочтения

Постановка задачи в краткой форме представляется следующим образом. Пусть задано множество альтернатив A и каждая характеризуется несколькими критериями качества с номерами $i = 1,\ldots, m$. Информация о попарном сравнении альтернатив по каждому критерию i качества представлена в форме отношения предпочтения R_i. Требуется выбрать лучшую альтернативу из множества $\{A, R_i, \ldots, R_m\}$. Метод многокритериального выбора альтернатив на основе нечеткого отношения предпочтения основан на ряде определений.

Определение 1. Нечетким отношением R на множестве A называется нечеткое подмножество декартова произведения $A\times A$, характеризующееся функцией принадлежности μ_R: $A\times A \to [0; 1]$. Значение $\mu_R(a, b)$ этой функции понимается как степень выполнения отношения $a\wedge b$.

Определение 2. Нечетким отношением нестрогого предпочтения на множестве A называется любое заданное на нем рефлексивное нечеткое отношение, функция принадлежности которого вычисляется следующим образом:

$$\mu_{R_S}\sigma(a, b) = \begin{cases} \mu_R(a, b) - \mu_R(b - a), & \text{если} \quad \mu_R(a, b) \ge \mu_R(b, a); \\ 0, & \text{если} \quad \mu_R(a, b) \le \mu_R(b, a). \end{cases}$$

Определение 3. Пусть A – множество альтернатив и μ_R – заданное на нем нечеткое отношение предпочтения. Нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив множества (A, μ_R) описывается функцией принадлежности

$$\mu^{\text{НД}}{}_R = 1 - \sup_{a,b\in A} \left(\mu_{R_S}(b, a) - \mu_{R_S}(a, b)\right), \quad a \in A.$$

Определение 4. Четко недоминируемыми называются альтернативы, для которых $\mu_R^{\text{НД}}(a) = 1$, а множество таких альтернатив

$$A^{\text{ИНД}} = \left\{a \mid a \in A, \quad \mu_R^{\text{НД}} = 1\right\}.$$

Определение 5. Носителем нечеткого множества B с функцией принадлежности $\mu_B(a)$ является множество $\{a \mid a \in A,\ \mu_B(a) > 0\}$.

Процедура решения задачи выбора выполняется в несколько шагов.

Строится нечеткое отношение Q_1 как пересечение исходных отношений

$$\mu_{Q_1}(a,b)=\min(\mu_{R_1}(a,b),\ldots,\mu_{R_m}(a,b))$$

и определяется нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив в множестве $(A,\ \mu_{Q_2})$:

$$\mu^{\text{НД}}{}_{Q_1}(a)=1-\sup_{b\in A}(\mu_{Q_1}(b,a)-\mu_{Q_1}(a,b)).$$

Строится нечеткое отношение Q_2

$$\mu_{Q_2}(a,b)=\sum_{j=1}^{m}W_j\mu_{R_j}(a,b)$$

и определяется нечеткое подмножество недоминируемых альтернатив в множестве $(A,\ \mu_{Q_2})$

$$\mu^{\text{НД}}{}_{Q_2}(a)=1-\sup_{b\in A}(\mu_{Q_2}(b,a)-\mu_{Q_2}(a,b)).$$

Данная функция упорядочивает альтернативы по степени их недоминируемости. Числа W_j в приведенной свертке представляют собой коэффициенты относительной важности рассматриваемых критериев, для которых выполняется следующее условие:

$$\sum_{j=1}^{m}W_j=1;\quad W_j\geq 0;\quad j=\overline{1,m}.$$

Отыскивается пересечение множеств $\mu_{Q_1}^{\text{НД}},\mu_{Q_2}^{\text{НД}}$:

$$\mu^{\text{НД}}(a)=\min\left(\mu_{Q_1}^{\text{НД}}(a),\mu_{Q_2}^{\text{НД}}(a)\right).$$

Рациональным считается выбор альтернатив из множества

$$A^{\text{НД}}=\left\{a'\,|\,a'\in A,\ \mu^{\text{НД}}(a')=\sup_{a\in A}\left(\mu^{\text{НД}}(a')\right)\right\}.$$

Наиболее рациональной альтернативой из множества $A^{\text{НД}}$ является та, которая имеет максимальную степень недоминируемости.

5.5. Многокритериальный выбор альтернатив с использованием правила нечеткого вывода

Сущность этого метода заключается в следующем. Пусть U – множество элементов, A – его нечеткое подмножество, степень принадлежности элементов которого есть число из единичного интервала [0; 1]. Подмножество A_j является значениями лингвистической переменной X.

Допустим, что множество решений характеризуется набором критериев $x_1, x_2, \ldots, x_p$, т. е. лингвистических переменных на базовых множествах $u_1, u_2, \ldots, u_p$ соответственно. Набор из нескольких критериев с соответствующими значениями характеризует представление лица, принимающего решение, об удовлетворительности решения. Переменная S *Удовлетворительность* также является лингвистической. Ниже приведен пример высказывания.

Обозначим пересечение $(x_1 = A_{l1} \cap x_2 = A_{l2} \cap \cdots x_p = A_{lp})$ через $x = A_i$. Операции пересечения нечетких множеств соответствует нахождение минимума их функций принадлежности:

$$\mu_{A_i}(v) = \min_{v \in V}(\mu_{A_{1i}}(u_1),\ \mu_{A_{2i}}(u_2), \ldots,\ \mu_{A_{pi}}(u_p)).$$

Здесь $V = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_p$; $v = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$; $\mu_{A_{ij}}(u_j)$ – значение функции принадлежности элемента u_j нечеткому множеству A_{ij}.

Для придания общности суждениям обозначим базовые множества U и V через W. Тогда A_i – нечеткое подмножество W, в то время как B_i – нечеткое подмножество единичного интервала I.

Для представления правил используется операция Лукасевича, которая имеет вид

$$\mu_H(w, i) = \min_{w \in W}(1, (1 - \mu_A(w) + \mu_B(i))),$$

где H – нечеткое подмножество на $W \times I$, $w \in W$, $i \in I$.

Аналогичным образом высказывания $d_1, d_2, \ldots, d_q$ преобразуются в множества $H_1, H_2, \ldots, H_q$. Их объединением является множество

$$D = H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_q,$$

и для каждого $(w, i) \in W \times I$

$$\mu_D(w, i) = \min_{w \in W}(\mu_{Hi}(w, i)), \quad j = 1, q.$$

Удовлетворительность альтернативы, которая описывается нечетким подмножеством A из W, оценивается на основе композиционного правила вывода

$$G = C^\circ D,$$

где G – нечеткое подмножество интервала I. Тогда

$$\mu_G(i) = \min_{w \in W}(\min \mu_C(w),\ \mu_D(w, i)).$$

Сопоставление альтернатив происходит на основе точечных оценок. Для нечеткого множества $C \subset I$ определяем α-уровневое множество ($\alpha \in [0; 1]$):

$$C_\alpha = \{i \mid \mu_c(i) \geq \alpha,\ x \in I\}.$$

Для каждого C_α можно вычислить среднее число элементов – $M(C_\alpha)$.Тогда точечное значение для множества A

$$F(C) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} M(C_\alpha)\, d\alpha,$$

где $\alpha_{\max}$ – максимальное значение в множестве C.

При выборе альтернатив для каждой из них находится удовлетворительность и вычисляется соответствующая точечная оценка. Лучшей считается альтернатива с наибольшим ее значением.

5.6. Ранжирование альтернатив на множестве лингвистических векторных оценок

Пусть заданы множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и множество соответствующих исходов $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$. Каждый исход s_j характеризируется альтернативой a_j и вектором лингвистических оценок на множестве критериев $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$. Множество лингвистических векторных оценок $K = \{K(s_1), K(s_2), \ldots, K(s_m)\}$ исходов можно упорядочить, введя функцию принадлежности нечеткого отношения порядка $\mu_{\geq}$: $K \times K \to [0;\ 1]$. Для i-го критерия обозначим $\mu^{i}_{\geq}(K_i(s_j),\ K_i(s_k))$ через $\mu^{i}_{\geq}(s_j,\ s_k)$. Значение этой функции можно вычислить по формуле

$$\mu^{i}_{\geq}(s_j, s_k) = 1 - \mu^{i}_{<}(s_j, s_k) = \mu^{i}_{>}(s_j, s_k) = \mu^{i}_{=}(s_j, s_k).$$

Степень истинности $\mu_{<}(s_j, ..., s_k)$ нечеткого высказывания $s_j < s_k$ можно определить как вероятность того, что точное значение s_j будет меньше точного значения s_k. Предполагая, что исходы являются независимыми случайными величинами, отношение можно представить в виде

$$\mu_{<}(s_j, s_k) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(v_{sj}(x_i)\left(1 - w_{sk}(x_i + 1)\right)\right),$$

где $v_s(x)$ – вероятность того, что в качестве точного значения нечеткого числа s используется величина x; $w_s(x)$ – вероятность того, что в качестве точного значения s используется величина $y < x$;

$$v_s = \frac{\mu_s(x)}{\sum\limits_{y \in S} \mu_s(y)}; \quad w_s(x) = \sum_{y \in S, y < x} v_s(y).$$

Векторные оценки могут быть упорядочены на основе функции принадлежности

$$\mu_{\geq}(K(s_j),\ K(s_k)) = \times_{i \in n} \mu^{i}_{\geq}(s_j, s_k),$$

где символ "×" означает обобщенную операцию.

Так как между множеством альтернатив и исходов существует взаимно однозначное соответствие, функция принадлежности нечеткого отношения предпочтения на множестве альтернатив будет иметь вид

$$\mu^{F}_{\geq}(a_j, a_k) = \mu_{\geq}(K(s_j), K(s_k)).$$

Решение задачи ПР с использованием данного метода включает в себя следующие основные шаги:

- ♦ вычисление функции принадлежности $\mu_{<}$;
- ♦ построение нечеткого отношения порядка $\mu_{\geq}$;
- ♦ минимизация отношения $\mu_{\geq}$;

♦ определение отношений предпочтения на множестве альтернатив и выявление лучшей альтернативы. Для этого вычисляется отношение предпочтения между альтернативой a_j и всеми остальными альтернативами, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu^F_{\geq}\left(a_j;\{a_k\}, k\in I_j\right)=\times_{k\in I_j}\mu_{\geq jk},\ \ j\in m,$$

где I_j – множество индексов альтернатив, с которыми может сравниваться j-я альтернатива.

Решение задачи ранжирования можно описать соотношениями

$$r_j < r_l \Leftrightarrow \mu^F_{\geq}\left(a_j;\{a_k\},\ k\in I_j\right) > \mu^F_{\geq}\left(a_l;\{a_k\},\ k\in I_l\right),$$

где r_i – ранг альтернативы. Наиболее предпочтительная альтернатива имеет самый низкий ранг.

5.7. Анализ и оценка инвестиционных проектов с использованием теории нечетких множеств

Анализ и оценка инвестиционных проектов представляют собой достаточно сложную задачу в сфере экономики, производства и управления, что обусловлено значительной неопределенностью, так как при решении вопроса об инвестициях всегда нужно предвидеть будущее.

Эффективность инвестиционного проекта определяется на основе сопоставления притоков и оттоков денежных средств, связанных с его реализацией. В работе [1] для оценки эффективности инвестиционного проекта и сравнения проектов между собой предложено использовать следующие показатели: *NVP* – чистый дисконтированный доход; *IRR* – внутренняя норма доходности; *PI* – индекс доходности; *ROI* – рентабельность инвестиций; *PP* – срок окупаемости. Эти показатели характеризуют соотношение распределенных во времени доходов и расходов проекта с учетом стоимости денег во времени.

В настоящее время специалисты сводят этот вопрос к выбору *NVP* и *IRR*. В большинстве случаев у лучшего проекта максимально положительная *NVP* и одновременно более высокий *IRR*, чем у альтернативных проектов. Но нередки и противоположные ситуации. В этом случае рекомендуется ориентироваться на *NVP* как на показатель, дающий возможность наиболее объективно подойти к выбору проектов с точки зрения максимизации выгод. Если у предприятия ограничен капитал и оно не имеет широкого доступа к ссудному капиталу, его главной целью становится получение наибольшего прироста на собственный ограниченный капитал.

При использовании для оценки инвестиций традиционного подхода не учитываются такие факторы, как личные предпочтения инвестора, стратегия развития предприятия, отношения к риску, неэкономические требования к проекту. Для учета перечисленных факторов в процессе принятий решений о финансировании инвестиционного проекта целесообразно использовать методы принятия решений в условиях неопределенности, основанные на теории нечетких множеств. В этих методах экспертные оценки альтернативных вариантов по критериям могут быть представлены как нечеткие множества или числа, выраженные с помощью функций принадлежности. Для упорядочения нечетких чисел существует множество методов, которые отличаются друг от друга способом свертки и построения нечетких отношений. Последнее можно определить как отношения предпочтительности между объектами. Рассматривалась практическая задача выбора инвестиционного проекта по внедрению мощностей для выпуска новой продукции на одном из предприятий Волгоградской области. Освоение новых мощностей связано с закупкой, установкой и настройкой специального оборудования.

Рассматривали три варианта реализации этого инвестиционного проекта:

- использовать собственные средства для закупки оборудования (альтернатива A_1);
- взять кредит на пять лет под 37 % годовых (альтернатива A_2);
- взять необходимое оборудование в лизинг с последующим его выкупом (альтернатива A_3).

На основании себестоимости, цены, плана освоения производственных мощностей и норматива оборотных средств были рассчитаны основные экономические показатели эффективности инвестиционных проектов (табл. 5.4).

Таблица 5.4. **Значения критериев для вариантов инвестирования**

Вариант инвестиций	*NVP*, млн руб.	*PI*	*IRR*, %	*PP*, годы	*ROI*, %
A_1	9,8	1,42	49	5	65,5
A_2	2,9	5,63	43	7	21,7
A_3	7,9	1,85	64	5	84,9

Далее экспертом были построены функции принадлежности для рассматриваемых критериев:

$$\mu_{NVP} = 9{,}8/1{,}0 + 2{,}9/0{,}2 + 7{,}9/0{,}98;$$
$$\mu_{PI} = 1{,}42/0{,}3 + 5{,}63/1{,}0 + 1{,}85/0{,}5;$$
$$\mu_{IRR} = 49/0{,}95 + 43/0{,}8 + 64/1{,}0;$$
$$\mu_{PP} = 5/0{,}9 + 7/0{,}4 + 5/0{,}9;$$
$$\mu_{ROI} = 65{,}5/0{,}9 + 21{,}7/0{,}1 + 84{,}9/1{,}0.$$

Здесь "+" означает не сложение, а, скорее, объединение; символ "/" показывает, что значение μ_i соотносится к элементу, следующему за ним (а не означает деление).

Для получения весовых коэффициентов критериев использовали метод анализа иерархий. Была составлена матрица парных сравнений и рассчитан ее правый собственный вектор (табл. 5.5).

Таблица 5.5. **Матрица парных сравнений и весовые коэффициенты критериев**

	NVP	*PI*	*IRR*	*PP*	*ROI*	*W*
NVP	1	8	1	4	4	0,365
PI	1/8	1	1/8	1/4	1/4	0,035
IRR	1	8	1	5	5	0,4
PP	1/4	4	1/5	1	1	0,1
ROI	1/4	4	1/5	1	1	0,1

Для методов, реализующих лингвистический подход к принятию решений, экспертом были даны лингвистические оценки (табл. 5.6).

Таблица 5.6. **Лингвистическая оценка альтернатив**

Вариант инвестиций	μ_{NVP}	μ_{PI}	μ_{IRR}	μ_{PP}	μ_{ROI}
A_1	Очень высокая	Низкая	Очень высокая	Очень высокая	Высокая
A_2	Низкая	Очень высокая	Высокая	Средняя	Низкая
A_3	Очень высокая	Средняя	Очень высокая	Очень высокая	Очень высокая
Важность критерия	Высокая	Низкая	Высокая	Средняя	Средняя

Терм-множество лингвистической переменной *Оценка альтернативы* приведено на рис. 5.13.

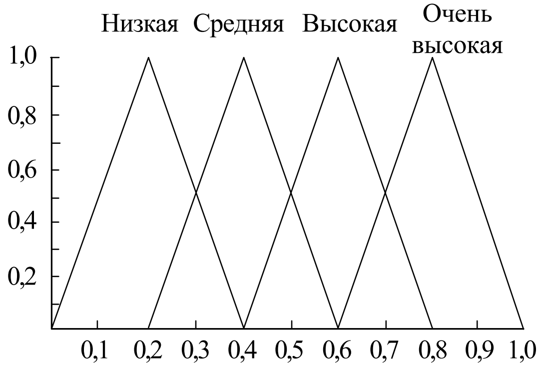


Рис. 5.13. Оценка альтернативы

Для нечеткого вывода были сформулированы следующие правила, отражающие представления эксперта о предпочтительных вариантах:

1. Если *NVP* = Отлично, и *IRR* = Отлично, и *PP* = Хорошо, и *ROI* = = Хорошо, и *PI* = Удовлетворительно, то альтернатива – Идеальная.

2. Если *NVP* = Хорошо, и *IRR* = Хорошо, и *PP* = Хорошо, то альтернатива – Хорошая.

3. Если *NVP* = Удовлетворительно, и *IRR* = Хорошо, и *PP* = Хорошо, то альтернатива – Удовлетворительная.

Результаты решения задачи выбора варианта инвестиций в производство новой продукции представлены на рис. 5.14. Как видно из диаграммы, во всех случаях альтернативы получили одинаковые ранги: наиболее предпочтительным является лизинг оборудования, наименее предпочтительным – взятие кредита. Несмотря на то что исходная информация во всех рассмотренных примерах является последовательной и непротиворечивой, полученные результаты заметно отличаются. Это объясняется разными способами представления экспертной информации и разными способами многокритериальной свертки.

Максиминная свертка и отношение порядка на множестве лингвистических векторных оценок реализуют пессимистический подход к принятию решений, когда определяющим является наихудший критерий, что объясняет низкие оценки первой и второй альтернатив, полученные этими методами. Аддитивная свертка и отношение предпочтения предполагают оптимистический подход, когда критерии с низкими оценками имеют такую же важность, как и высокие.

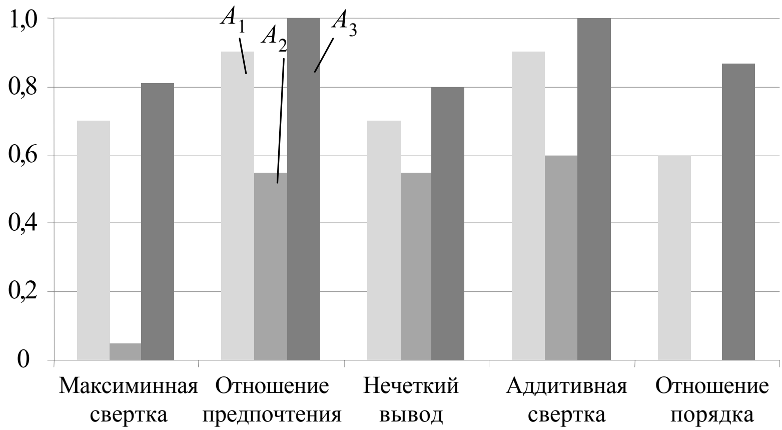


Рис. 5.14. Результаты выбора варианта инвестиций

Контрольные вопросы

1. Дайте определение и приведите пример лингвистической переменной.
2. Дайте характеристику функции принадлежности.
3. Задайтесь таблицей результатов опроса экспертов и постройте функцию принадлежности.
4. Задайтесь таблицей числовых значений оценок экспертов и постройте функцию принадлежности.
5. Задайтесь произвольной матрицей попарного сравнения и постройте функцию принадлежности.
6. Сформулируйте правило выбора альтернатив на основе пересечения нечетких множеств. Приведите числовой пример.
7. Дайте характеристику многокритериального выбора альтернатив с использованием правила нечеткого вывода.

Глава 6. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

6.1. Общая характеристика метода анализа иерархий

Метод анализа иерархий (МАИ) является системной процедурой для иерархического представления элементов, определяющих суть любой проблемы, и последующего структурирования многокритериальных альтернатив. Метод состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и в дальнейшей обработке суждений лица, принимающего решение. Решение проблемы есть процесс поэтапного установления приоритетов. На первом этапе выявляются наиболее важные элементы проблемы, на втором – наилучший способ проверки наблюдений, испытания и оценки элементов. Следующим этапом может быть выработка способа применения решения и оценка его качества.

В последние десятилетия в различных задачах нашел свое место *системный подход*, в рамках которого система рассматривается как "все то, что решает проблему", и определяется в таких основных терминах и определениях, как "цели" – "структура" – "функции".

Такой подход к решению проблемы выбора исходит из естественной способности людей думать логически и творчески, определять события и устанавливать отношения между ними.

При этом человеку присущи два характерных признака аналитического мышления: умение наблюдать и анализировать наблюдения; способность устанавливать отношения между ними, оценивая уровень взаимосвязей между отношениями, а затем синтезировать эти отношения в общее восприятие наблюдаемого. Это заложено в принцип ***идентичности и декомпозиции***, который предусматривает структурирование проблем в виде иерархии, или сети, что является первым этапом применения МАИ.

Иерархия – некоторая абстракция структуры системы, предназначенной для изучения функциональных взаимодействий ее компонент и их воздействий на всю систему в целом. Эта абстракция может принимать различные формы, в каждой из которых, по существу, производится спуск с вершины общей цели вниз к подцелям, далее к силам, которые влияют на эти подцели, к людям, влияющим на эти силы, к целям отдельных людей, далее к стратегиям и, наконец, к исходам, являющимся результатами выбранных стратегий. Все это определяет основные этапы метода аналитической иерархии [12, 13].

6.2. Основные этапы метода аналитической иерархии

Постановка задач, решаемых с помощью МАИ, заключается обычно в следующем. Дано: общая цель (или цели) решения задачи; критерии оценки альтернатив; альтернативы. Требуется: выбрать наилучшую альтернативу. В основе метода лежат следующие этапы [13].

Первый этап заключается в структуризации задачи посредством построения иерархических структур с несколькими уровнями. Рассмотрим ряд особенностей построения таких структур. Очень часто при анализе интересующей нас структуры число элементов и их взаимосвязей настолько велико, что превышает способность исследователя воспринимать информацию в полном объеме.

В таких случаях система делится на подсистемы, имеющие собственную схему и взаимосвязи. Иерархия есть определенный тип системы, основанный на предположении, что ее элементы могут группироваться в несвязные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием элементов некоторой вполне определенной группы и, в свою очередь, оказывают влияние на элементы другой группы. При этом считается, что элементы в каждой группе иерархии (называемой уровнем, кластером, стратой) могут быть как независимыми, так и зависимыми [12].

Рассмотрим пример общего построения иерархии (рис. 6.1). Пусть нас интересует вопрос, связанный с определением сценария, согласно которому будет обеспечено продолжительное существование университета. Назовем благосостояние университета *общей целью*.

На нее влияют следующие *силы*: качество обучения, наличие аудиторного фонда, наличие современного оборудования, общественная жизнь, внешняя деятельность и др. Эти силы определяются следующими *актерами* (действующими лицами): администрацией университета, профессорско-преподавательским составом, городской или региональной администрацией, студентами, спонсорами и др.

Различные актеры имеют определенные *цели*: профессорско-преподавательский состав может хотеть сохранить свою работу, расти профессионально, качественно проводить обучение; студенты могут быть заинтересованы в получении хорошего образования, в получении высокооплачиваемой работы и т. п. Наконец, возможен ряд таких *сценариев*: университет сохранит свой статус-кво; снизит свой уровень аккредитации; лишится лицензии на подготовку специалистов.

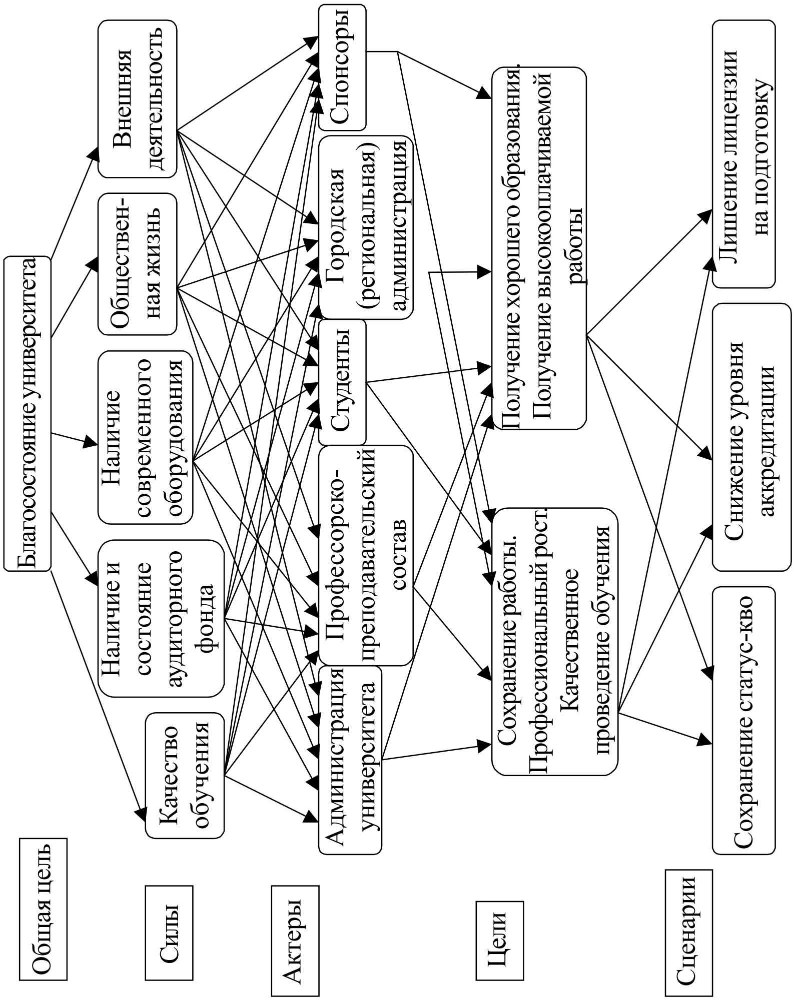


Рис. 6.1. Пример иерархии с общей целью "Благосостояние университета"

Сценарии определяют вероятность достижения целей, цели влияют на актеров, актеры направляют силы, наконец, воздействуют на благосостояние университета. Таким образом, мы получаем иерархию (см. рис. 6.1).

Иерархии являются основным способом, с помощью которого человек подразделяет реальность на кластеры и подкластеры. Это наиболее мощный метод классификации, используемый человеком для приведения в порядок опыта, наблюдений и информации [13]. Основная задача в иерархии – оценка высших уровней исходя из взаимодействия различных уровней иерархии, а не из непосредственной зависимости от элементов на этих уровнях. В работе [13] рассмотрен ряд видов иерархий, которые могут быть использованы при реализации МАИ:

1. Наиболее простая иерархия – ***линейная***, выходящая от одного уровня элементов к соседнему уровню. Ее еще называют *доминантной* иерархией, она похожа на перевернутое дерево с основой в вершине. Например, в процессе производства имеется уровень рабочих, доминируемый уровнем мастеров, который, в свою очередь, доминируется уровнем управляющих, и т. д. – до директора предприятия.

Двумя типами доминантных иерархий являются иерархия *прямого процесса*, которая проецирует существующее состояние проблемы на наиболее вероятное или логическое будущее (следствие); иерархия *обратного процесса*, которая определяет политику управления, чтобы помочь достичь желаемого будущего (или следствия).

Перечислим в *нисходящем порядке* уровни иерархии прямого процесса в наиболее общей форме [12]:

- ♦ макроограничения окружающей среды;
- ♦ социальные и политические ограничения;
- ♦ силы;
- ♦ цели;
- ♦ актеры;
- ♦ цели актеров;
- ♦ политика актеров;
- ♦ контрастные сценарии;
- ♦ обобщенный сценарий.

Уровни иерархии обратного процесса:

- ♦ предварительные сценарии;
- ♦ проблемы и возможности;

- ♦ актеры и коалиции;
- ♦ цели актеров;
- ♦ политика актеров;
- ♦ отдельные факторы политики управления, влияющие на результат.

2. В ***нелинейной*** иерархии верхний уровень может быть как в доминирующем положении по отношению к нижнему уровню, так и в доминируемом.

3. Иерархия считается ***полной***, если каждый элемент заданного уровня функционирует как критерий для *всех* элементов нижестоящего уровня. В противном случае иерархия – *неполная*.

Второй этап МАИ заключается в том, что после иерархического, или сетевого, воспроизведения проблемы необходимо установить приоритеты критериев (силы, актеры, цели и др.) и оценить каждую из альтернатив (сценарий) по критериям, чтобы выявить самую важную из них. Для этого используются попарные сравнения, рассмотренные ранее. Здесь, согласно [13], приведем описание указанной процедуры так, как она реализуется в методе МАИ.

Пусть A_1, A_2, A_3, …, A_n – множество из n элементов. Необходимо сравнить вес каждого элемента с весом любого другого элемента из множества по отношению к общей для них цели.

Попарные сравнения элементов выполняются с использованием субъективных суждений, численно задаваемых по шкале относительной важности (табл. 6.1) [12, 13].

Таблица 6.1. **Шкала относительной важности**

Вес (интенсивность) относительной важности	Определение	Объяснения
1	Равная важность	Равный вклад двух видов деятельности в цель
3	Умеренное превосходство над другими	Опыт и суждения дают легкое превосходство одному виду деятельности над другим
5	Существенное или сильное превосходство	Опыт и суждения дают сильное превосходство одному виду деятельности над другим

Продолж. табл. 6.1

Вес (интенсивность) относительной важности	Определение	Объяснения
7	Значительное превосходство	Одному виду деятельности дается настолько сильное превосходство, что оно становится практически значительным
9	Очень сильное превосходство	Очевидность превосходства одного вида деятельности над другим подтверждается наиболее сильно
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями	Применяются в компромиссном случае
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного вида деятельности с другим получено одно из указанных чисел (например, 3), то при сравнении второго вида деятельности с первым получают обратную величину (т. е. 1/3)	–

Суждения начинают посредством постановки вопроса: насколько один элемент важнее, чем другой. При сравнении элемента с самим собой отношение равно единице. Если первый элемент важнее, чем второй, то используется целое число из шкалы (см. табл. 6.1), в противном случае принимается обратная величина выбранного числа. Рассмотрим числовой пример.

Пусть имеются четыре элемента A_1, A_2, A_3, A_4, для которых проведем попарные сравнения с использованием значений из табл. 6.1. Результаты представим в табл. 6.2.

Если A_1 существенно превосходит A_2, заносим число 5; если A_1 умеренно превосходит A_3, заносим число 3; если A_1 значительно превосходит A_4, заносим число 7, и т. д.

При сравнении элемента с самим собой имеем равную важность, поэтому на пересечении (A_1 и A_1), (A_2 и A_2), (A_3 и A_3), (A_4 и A_4) заносим единицу. Таким образом, главная диагональ матрицы должна состоять из единиц. Далее заносятся обратные величины, получаемые при обратном сравнении: (A_2 и A_1), (A_3 и A_1), (A_4 и A_1), т. е. 1/5, 1/3, 1/7 и т. д.

Таблица 6.2. **Результаты попарных сравнений**

Сравниваемые элементы	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	5	3	7
A_2	1/5	1	9	5
A_3	1/3	1/9	1	3
A_4	1/7	1/5	1/3	1

Третий этап МАИ заключается в формировании набора (вектора) локальных приоритетов (весов). Для этого производятся вычисление собственного вектора матрицы (см. табл. 6.2) и нормализация его компонентов. Одним из лучших способов для таких вычислений является геометрическое среднее, когда перемножаются элементы в каждой строке матрицы и извлекается корень n-й степени, где n – число элементов в строке. Полученный таким образом столбец чисел нормализуется делением каждого числа на сумму всех чисел. Схему описанных вычислений приведем в табл. 6.3.

Таблица 6.3. **Вычисление значений собственного вектора и локальных приоритетов (весов) сравниваемых элементов**

Сравниваемые элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	Вычисление компонент собственного вектора d	Нормализация значений d и получение значений весов ω
A_1	1	5	3	7	$d_1 = \sqrt[4]{1\cdot 5\cdot 3\cdot 7} = 3{,}2$	$\omega_1 = \dfrac{d_1}{D} = 0{,}58$
A_2	1/5	1	9	5	$d_2 = \sqrt[4]{1/5\cdot 1\cdot 9\cdot 5} = 1{,}73$	$\omega_2 = \dfrac{d_2}{D} = 0{,}313$
A_3	1/3	1/9	1	3	$d_3 = \sqrt[4]{1/3\cdot 1/9\cdot 1\cdot 3} = 0{,}58$	$\omega_3 = \dfrac{d_3}{D} = 0{,}105$

Продолж. табл. 6.3

Сравни-ваемые элементы	A_1	A_2	A_3	A_4	Вычисление компонент собственного вектора d	Нормализация значений d и получение значений весов ω
A_4	1/7	1/5	1/3	1	$d_4 = \sqrt[4]{1/7 \cdot 1/5 \cdot 1/3 \cdot 1} = 0{,}01$	$\omega_4 = \dfrac{d_4}{D} = 0{,}002$

В табл. 6.3 $D = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 5{,}52$.

На ***четвертом этапе*** МАИ реализуется синтез решений, в основе которого лежит выявление локальных приоритетов на каждом уровне иерархии и глобального приоритета для всей иерархии. Рассмотрим пример анализа трехуровневой иерархии (рис. 6.2).

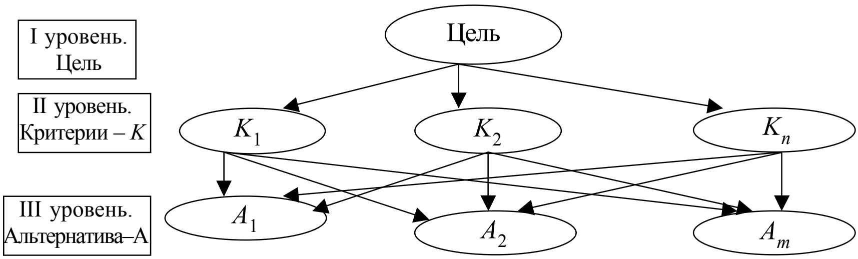


Рис. 6.2. Иерархия "цель" – "критерий" – "альтернатива"

Первоначально проводится попарное сравнение критериев (табл. 6.4), как показано в табл. 6.3.

Таблица 6.4. **Попарное сравнение критериев**

Критерии	K_1	K_2	…	K_n	d	ω
K_1	1					ω_1
K_2		1				ω_2
…			1			…
K_n				1		ω_n

Затем выполняются попарные сравнения альтернатив по отношению к каждому из критериев (табл. 6.5). Наконец подсчитываются глобальные (обобщенные) приоритеты. Для этого локальные приоритеты располагают по отношению к каждому критерию и каждый столбец векторов умножают на приоритет соответствующего критерия. Полученные результаты складывают вдоль каждой строки (табл. 6.6), т. е. имеем:

$$S_1 = (\omega_1 V_1^1) + (\omega_2 V_2^1) + \ldots + (\omega_n V_n^1);$$
$$S_2 = (\omega_1 V_1^2) + (\omega_2 V_2^2) + \ldots + (\omega_n V_n^2);$$
$$\ldots$$
$$S_m = (\omega_1 V_1^m) + (\omega_2 V_2^m) + \ldots + (\omega_n V_n^m).$$

В итоге решение принимается по большему значению S.

Таблица 6.5. **Попарное сравнение альтернатив относительно каждого критерия**

K_1	A_1	A_2	...	A_m	d	V_1
A_1	1					V_1^1
A_2		1				V_1^2
…			1			…
A_m				1		V_1^m
K_2	A_1	A_2	…	A_m	d	V_2
A_1	1					V_2^1
A_2		1				V_2^2
...			1			…
A_m				1		V_2^m
K_n	A_1	A_2	…	A_m	d	V_n
A_1	1					V_n^1
A_2		1				V_n^2
…			1			…
A_m				1		V_n^m

Таблица 6.6. **Определение обобщенных (глобальных) приоритетов**

Критерии	K_1	K_2	…	K_n	Значения обобщенного критерия
Значения вектора приоритетов критериев из табл.6.4	ω_1	ω_2	…	ω_n	
Значения вектора приоритетов альтернатив из табл. 6.5	V_1	V_2	…	V_n	
Альтернативы: A_1	V_1^1	V_2^1	…	V_n^1	S_1
A_2	V_1^2	V_2^2	…	V_n^2	S_2
…	…	…	…	…	…
A_m	V_1^m	V_2^m	…	V_n^m	S_m

Пятый этап МАИ заключается в проверке согласованности локальных приоритетов, для чего подсчитывается индекс согласованности (ИС) по формуле [12]

$$ИС = (\lambda_{\max} - k)/(k-1),$$

где k – число сравниваемых элементов (в нашем случае критериев или альтернатив); $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное число матрицы суждений (попарных сравнений).

Для вычисления значения $\lambda_{\max}$ сначала суммируется каждый столбец матрицы (см. табл. 6.4 или 6.5), затем сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца – на вторую компоненту и т. д. Затем полученные числа суммируются, что в итоге дает искомую величину $\lambda_{\max}$ [12].

Насколько плоха или хороша согласованность для определенной задачи, можно оценить путем сравнения полученного значения ИС с одним из значений случайного индекса (СИ) суждений (табл. 6.7) [12].

Таблица 6.7. **Значения случайного индекса суждений**

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
СИ	0,0	0,0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

Отношение величины ИС к величине СИ при определенном значении *n* называется *отношением согласованности* (ОС). Значение $ОС \le 0{,}1$ (10 %) считается приемлемым. В некоторых случаях допускается 20 %, но не более. Если ОС выходит из указанных пределов, то необходимо провести перепроверку суждений (попарных сравнений) [13].

6.3. Примеры применения метода аналитической иерархии

6.3.1. Выбор сценариев электронных учебников

Пусть сценарий электронного учебника (структура и содержание, объемы тем и разделов, технологии тестирования, анимационное сопровождение и др.) разрабатывается экспертными группами, в состав которых могут входить как представители профессорско-преподавательского состава, так и студенты, изучающие определенные дисциплины.

При этом формируется ряд критериев K, влияющих на качество учебника и имеющих соответствующий вес. Как альтернатива A выступает некоторое множество сценариев учебников. Проведем, используя МАИ, анализ возможных сценариев электронного учебника с целью выбора одного из них, удовлетворяющего определенным требованиям качества. К числу возможных критериев, определяющих качество учебника, можно отнести следующие:

K_1 – входное тестирование с целью определения начальных знаний читателей;

K_2 – наличие "навигации" по учебнику (оглавление с кратким изложением содержания глав и разделов, рекомендации по их излучению);

K_3 – наличие анимации (воспринимаемость материала учебника по стилю изложения, уровню математизации, наличию графики и др.);

K_4 – временные затраты на изучение материалов учебника (объем учебника и его отдельных разделов).

K_5 – наличие в учебнике тестов с "подсказками" (контрольные вопросы, задачи, лабораторные работы и т. п. с ответами и решениями);

K_6 – доступность приобретения (стоимость учебника).

В качестве альтернатив выступает множество сценариев учебников, сформированных экспертами: $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Проведем структуризацию (декомпозицию) задачи посредством формирования иерархии (рис. 6.3).

Выполним процедуры попарных сравнений и полученные результаты сведем в табл. 6.8–6.10.

Таблица 6.8. **Попарное сравнение критериев качества учебника**

Критерии	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	Собственный вектор d	Вектор приоритетов (веса критериев) ω
K_1	1	5	3	7	6	6	$d_1 = 3{,}95$	$\omega_1 = 0{,}45$
K_2	1/5	1	1/3	5	3	3	$d_2 = 1{,}76$	$\omega_2 = 0{,}20$
K_3	1/3	3	1	6	3	4	$d_3 = 1{,}34$	$\omega_3 = 0{,}15$
K_4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	$d_4 = 0{,}40$	$\omega_4 = 0{,}045$
K_5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	$d_5 = 0{,}56$	$\omega_5 = 0{,}06$
K_6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	$d_6 = 0{,}70$	$\omega_6 = 0{,}08$

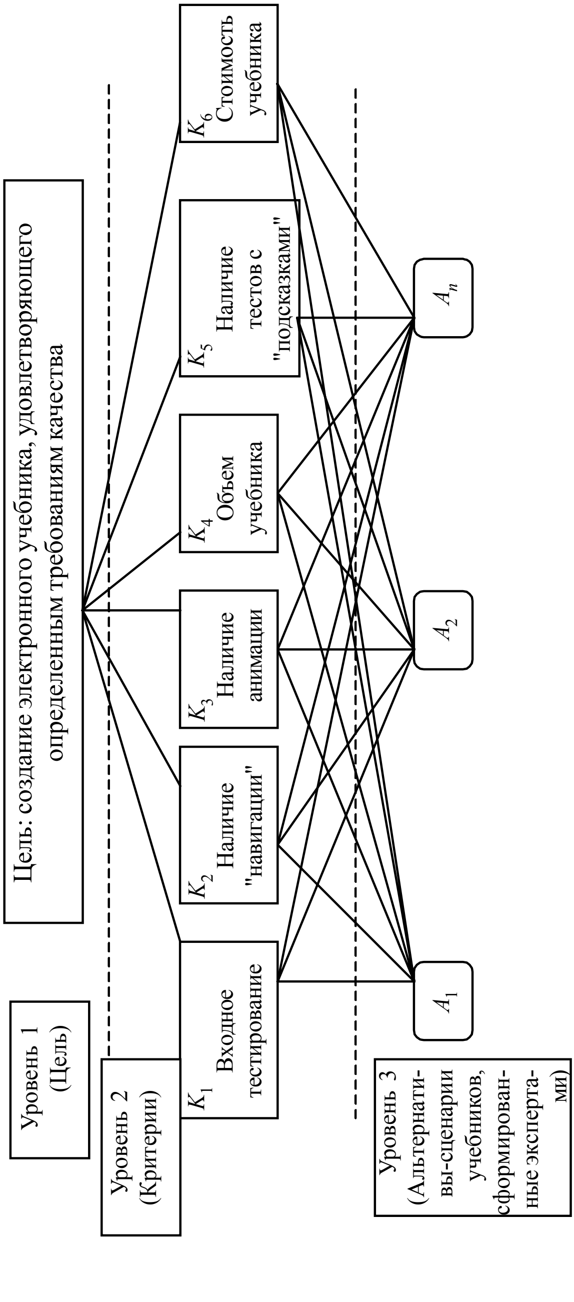


Рис. 6.3. Иерархия удовлетворенности качеством электронного учебника

Таблица 6.9. **Попарное сравнение альтернатив A_1–A_3 (сценариев учебников) по отношению к каждому из критериев**

K_1	A_1	A_2	A_3	Собственный вектор	Вектор-приоритет	K_2	A_1	A_2	A_3	Собственный вектор	Вектор-приоритет	K_3	A_1	A_2	A_3	Собственный вектор	Вектор-приоритет
A_1	1	6	8	3,63	0,755	A_1	1	5	4	2,70	0,675	A_1	1	7	1/5	1,12	0,14
A_2	1/6	1	4	0,87	0,180	A_2	1/5	1	1/3	0,40	0,100	A_2	1/7	1	1/8	0,26	0,03
A_3	1/8	1/4	1	0,31	0,065	A_3	1/4	3	1	0,90	0,225	A_3	5	8	1	6,54	0,83
$\lambda_{max} = 3,1$						$\lambda_{max} = 3,08$						$\lambda_{max} = 2,56$					
K_4	A_1	A_2	A_3	Собственный вектор	Вектор-приоритет	K_5	A_1	A_2	A_3	Собственный вектор	Вектор-приоритет	K_6	A_1	A_2	A_3	Собственный вектор	Вектор-приоритет
A_1	1	7	1/5	1,12	0,23	A_1	1	8	6	3,63	0,75	A_1	1	1/2	1/2	0,63	0,19
A_2	1/7	1	1/8	0,26	0,05	A_2	1/8	1	1/5	0,29	0,06	A_2	2	1	3	1,82	0,55
A_3	5	8	1	3,42	0,72	A_3	1/6	5	1	0,93	0,19	A_3	2	1/3	1	0,87	0,26
$\lambda_{max} = 3,15$						$\lambda_{max} = 3,14$						$\lambda_{max} = 3,12$					

Таблица 6.10. **Определение обобщенных, или глобальных, приоритетов**

Критерии	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	Значения обобщенного критерия
Значения вектора приоритетов из табл. 6.3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	
Значение вектора приоритетов альтернатив	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	
Альтернативы: A_1	V_1^1	V_2^1	V_3^1	V_4^1	V_5^1	V_6^1	S_1
A_2	V_1^2	V_2^2	V_3^2	V_4^2	V_5^2	V_6^2	S_2
A_3	V_1^3	V_2^3	V_3^3	V_4^3	V_5^3	V_6^3	S_3

В табл. 6.10

$$S_1 = (\omega_1 V_1^1) + (\omega_2 V_2^1) + (\omega_3 V_3^1) + \ldots + (\omega_6 V_6^1);$$
$$S_2 = (\omega_1 V_1^2) + (\omega_2 V_2^2) + (\omega_3 V_3^2) + \ldots + (\omega_6 V_6^2);$$
$$S_3 = (\omega_1 V_1^3) + (\omega_2 V_2^3) + (\omega_3 V_3^3) + \ldots + (\omega_6 V_6^3).$$

Решение принимается по большему значению S.

В числовом выражении получаем следующее:

$$S_1 = (0{,}45 \cdot 0{,}755) + (0{,}2 \cdot 0{,}675) + (0{,}15 \cdot 0{,}14) + (0{,}045 \cdot 0{,}23) + \\ + (0{,}06 \cdot 0{,}75) + (0{,}08 \cdot 0{,}19) = 0{,}57;$$

$$S_2 = (0{,}45 \cdot 0{,}18) + (0{,}2 \cdot 0{,}1) + (0{,}15 \cdot 0{,}03) + (0{,}045 \cdot 0{,}05) + \\ + (0{,}06 \cdot 0{,}29) + (0{,}08 \cdot 0{,}55) = 0{,}167;$$

$$S_3 = (0{,}45 \cdot 0{,}065) + (0{,}2 \cdot 0{,}225) + (0{,}15 \cdot 0{,}83) + (0{,}045 \cdot 0{,}72) + \\ + (0{,}06 \cdot 0{,}19) + (0{,}08 \cdot 0{,}26) = 0{,}27.$$

Таким образом, лучшим сценарием будет считаться A_1.

6.3.2. Анализ успешности социальных проектов

Реформирование системы социального обеспечения, охраны здоровья, социальная защита малообеспеченных слоев населения, преодоление последствий природных и социальных потрясений – все это примеры *социальных проектов*, которые имеют свою специфику: цели только намечаются и должны корректироваться в меру того, как достигаются промежуточные результаты; количественная и качественная их оценка значительно усложнена; длительность проектов зависит от вероятностных факторов; затраты на проекты, как правило, зависят от бюджетных ассигнований; ресурсы выделяются по мере потребности в границах возможного; присутствует большая степень неопределенности.

Реализации любого проекта предшествует так называемый "проектный анализ", одно из главных заданий которого – установление ценности проекта, что определяется разностью его позитивных результатов и негативных последствий.

Концепция проектного анализа представляет собой набор функциональных аспектов, основные из которых:

- маркетинговый анализ;
- технический анализ;
- экономический анализ;
- финансовый анализ;
- социальный анализ;
- экологический анализ;
- институционный анализ и др.

Количественные и качественные оценки, которые получают в результате выполнения перечисленных аспектов, являются основой *принятия решений* в плане успешности или неуспешности проектов.

Исходя из приведенных выше особенностей социальных проектов, определяющими аспектами проектного анализа для них можно считать: социальный анализ, экономический анализ, финансовый анализ и институционный анализ.

Дадим краткую характеристику каждому из них.

Социальный анализ

Целью данного анализа является определение вариантов реализации социального проекта с точки зрения характеристики населения, которое проживает в данном регионе или в стране в целом. Основные показатели такой характеристики:

демографические (численность населения и динамика его изменения, урбанизация (удельный вес населения, которое проживает в городах), возрастные пропорции, структура семей и др.);

занятость (численность трудоспособного населения, уровень безработицы, структура рабочей силы по возрасту и полу и др.);

социальная структура (образовательная культура населения, количество учащихся на 1 тыс. человек, количество особ с высшим образованием, профессиональная структура населения, занятость населения в материальном и нематериальном производстве и др.);

жилищные условия (удельный вес семей, проживающих в собственных домах; часть населения, которая проживает в собственных квартирах, величина жилой площади, приходящаяся на одну особу, и т. п.);

охрана здоровья (количество врачей из расчета на 1 тыс. человек; количество больничных коек на 1 тыс. человек; детская смертность; величина средств, которые выделяются на охрану здоровья из бюджета в расчете на одного жителя, и др.);

преступность (количество совершенных преступлений; число осужденных особ; количество особ, страдающих алкогольной и наркотической зависимостью, и др.).

Экономический анализ

Цель экономического анализа проекта – установление его привлекательности для общества, оценка его экономической эффективности на основе альтернативной стоимости ресурсов, которые используются в проекте, и определение возможности содействия национальному благополучию страны.

Экономическая привлекательность социальных проектов может определяться следующими показателями: структурными изменениями экономической политики, налоговой политики; динамикой объектов производства; платежеспособностью предприятий и др.

Финансовый анализ

Целью данного анализа является идентификация всех финансовых последствий проекта, определение его финансовой жизнеспособности для принятия решений о целесообразности инвестирования и финансирования проекта. Одно из наиболее важных заданий финансового анализа – расчет будущих денежных потоков, необходимых для реализации проекта. При этом различают два основных потока платежей:

- ♦ регулярный, у которого интервал между платежами одинаков;
- ♦ нерегулярный, у которого интервалы между платежами могут быть не равны друг другу.

Другим важным показателем финансового анализа проектов является определение ценности денег во времени, которая связана с величиной и темпом инфляционных процессов.

Институционный анализ

Целью институционного анализа проекта является определение степени влияния внешних (политических, правовых, социокультурных, экономических и др.) и внутренних (уровень квалификации персонала, привлекаемого к выполнению проекта, уровень менеджмента проектной организации и др.) факторов на возможность успешной реализации проекта.

К числу основных внешних факторов, влияющих на социальные проекты, можно отнести политическую ситуацию в стране, государственную политику регулирования, повышение самостоятельности регионов, наличие законов и законодательных актов по отношению к социальным проектам и др.

Оценки влияния внутренних факторов на проект в значительной мере зависят от качества менеджмента проекта, уровня квалификации и опыта персонала, привлекаемого к проекту, а также управленческой структуры организации – исполнителя проекта.

Рассмотрим факторы проектного анализа, присущие социальным проектам, и представим в виде табл. 6.11; на ее основе построим иерархию качественного анализа.

Таблица 6.11. **Основные факторы качественного анализа социальных проектов, влияющие на их успешность**

Факторы и их элементы	Факторы и их элементы
1. Институционные. 1.1. Политическая ситуация в стране. 1.2. Наличие законов и законодательных актов. 1.3. Государственное регулирование социальных проектов. 1.4. Качество управления социальным проектом (квалификация исполнителей проекта, уровень менеджмента проекта).	2. Социальные. 2.1. Демографические показатели и социальная структура. 2.2. Показатели занятости населения. 2.3. Жилищные условия. 2.4. Охрана здоровья.

Продолж. табл. 6.11

Факторы и их элементы	Факторы и их элементы
3. Финансовые. 3.1. Величина денежных потоков. 3.2. Регулярность потока платежей. 3.3. Динамика изменения ценности денег во времени	4. Экономические. 4.1. Структурные изменения в экономике. 4.2. Налоговая политика. 4.3. Динамика объемов производства. 4.4. Платежеспособность предприятий

На основании данной таблицы сформируем четырехуровневую иерархическую структуру (рис. 6.4):

Уровень I (Цель – получение представлений об успешности или неуспешности социального проекта).

Уровень II (Факторы: институционный, социальный, финансовый, экономический).

Уровень III (Элементы факторов – перечислены и пронумерованы в табл. 6.11).

Уровень IV (Альтернативы – уровни успешности социального проекта). В качестве альтернатив введем три условные градации уровня успешности проекта: L – малый уровень; M – средний уровень; H – высокий уровень.

Малому уровню успешности социального проекта соответствуют негативные состояния всех четырех принятых факторов (1–4), что может проявляться в виде нестабильной политической ситуации, крупных финансовых потерь, низкой динамикой развития экономики, плохих демографических показателей и др. Высокому уровню успешности будут соответствовать высокие показатели всех факторов. Средний уровень успешности будем связывать с временными нарушениями в показателях 1–4.

Формирование матриц попарных сравнений для различных уровней иерархии

Данная процедура начинается со II уровня иерархии, на котором выясняется вопрос: какой из факторов имеет наибольшее влияние на успешность реализации социального проекта (табл. 6.12)?

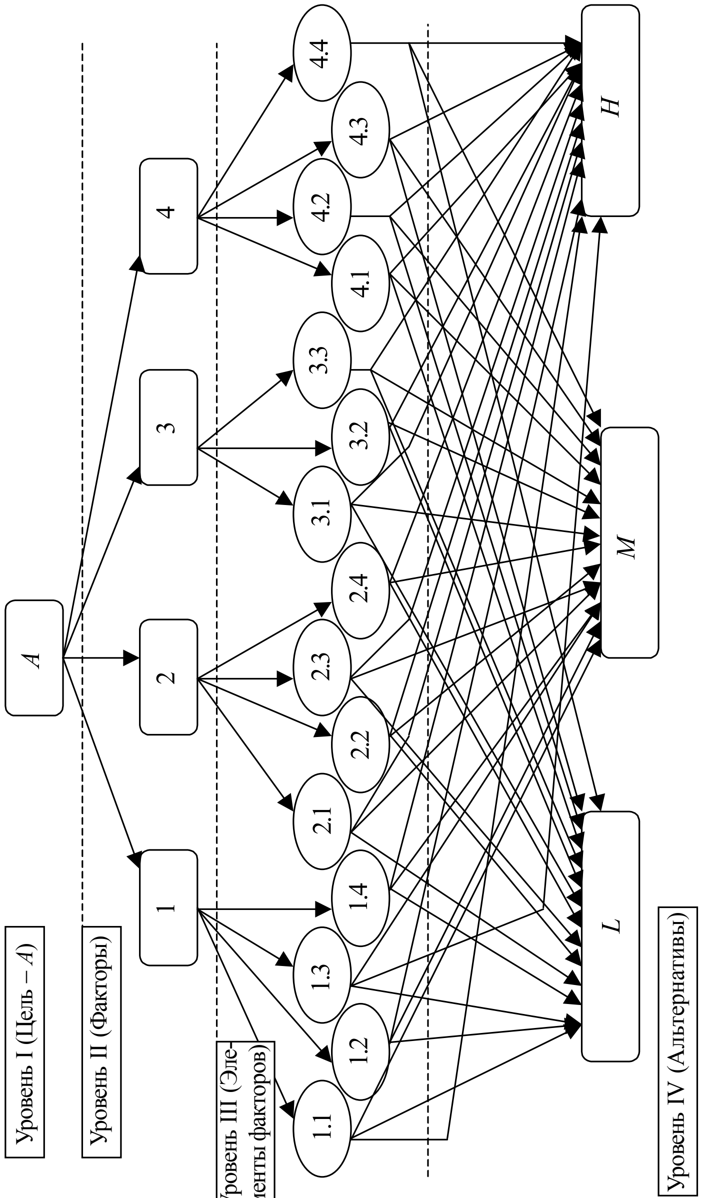


Рис. 6.4. Иерархия для проведения качественного анализа успешности социального проекта

Таблица 6.12. **Попарное сравнение факторов**

Успешность проекта	Экономический (4)	Институциональный (1)	Социальный (2)	Финансовый (3)	Вес
Экономический (4)	1	4	3	5	0,549
Институционный (1)	1/4	1	1/3	1	0,106
Социальный (2)	1/3	3	1	2	0,236
Финансовый (3)	1/5	1	1/2	1	0,109

Из этой матрицы видно, например, что экспертная группа считает экономический фактор доминирующим по степени воздействия на успешность реализации социального проекта.

На III уровне иерархии производится попарное сравнение совокупностей элементов с целью определения их воздействия на соответствующие факторы II уровня, т. е. необходимо сформировать четыре матрицы (табл. 6.13–6.16). При этом решаются следующие вопросы:

Какой из элементов обладает наибольшим влиянием на институционный фактор?

Какой из элементов обладает наибольшим влиянием на социальный фактор?

Какой из элементов обладает наибольшим влиянием на финансовый фактор?

Какой из элементов обладает наибольшим влиянием на экономический фактор?

Таблица 6.13. **Попарное сравнение элементов институционного фактора**

Институционный фактор (1)	Политическая ситуация (1.1)	Законы (1.2)	Государственное регулирование (1.3)	Качество управления (1.4)	Вес
Политическая ситуация (1.1)	1	3	2	5	0,462
Законы (1.2)	1/3	1	3	5	0,294
Государственное регулирование (1.3)	1/2	1/3	1	5	0,187
Качество управления (1.4)	1/5	1/5	1/5	1	0,055

Таблица 6.14. **Попарное сравнение элементов социального фактора**

Социальный фактор (2)	Демографические показатели (2.1)	Показатели занятости населения (2.2)	Жилищные условия (2.3)	Охрана здоровья (2.4)	Вес
Демографические показатели (2.1)	1	5	3	2	0,50
Показатели занятости населения (2.2)	1/5	1	15	3	0,127
Жилищные условия (2.3)	1/3	5	1	2	0,292
Охрана здоровья (2.4)	1/2	1/3	1/2	1	0,07

Таблица 6.15. **Попарное сравнение элементов финансового фактора**

Финансовый фактор (3)	Величина денежных потоков (3.1)	Регулярность потока платежей (3.2)	Нерегулярность потока платежей (3.3)	Ценность денег во времени (3.4)	Вес
Величина денежных потоков (3.1)	1	5	3	3	0,541
Регулярность потока платежей (3.2)	1/5	1	5	5	0,312
Нерегулярность потока платежей (3.3)	1/3	1/5	1	3	0,104
Ценность денег во времени (3.4)	1/3	1/5	1/3	1	0,043

Таблица 6.16. **Попарное сравнение элементов экономического фактора**

Экономический фактор (4)	Структурные изменения в экономике (4.1)	Налоговая политика (4.2)	Динамика объемов производства (4.3)	Платежеспособность предприятий (4.4)	Вес
Структурные изменения в экономике (4.1)	1	3	2	5	0,47

Продолж. табл. 6.16

Экономический фактор (4)	Структурные изменения в экономике (4.1)	Налоговая политика (4.2)	Динамика объемов производства (4.3)	Платежеспособность предприятий (4.4)	Вес
Налоговая политика (4.2)	1/3	1	3	2	0,274
Динамика объемов производства (4.3)	1/2	1/3	1	3	0,17
Платежеспособность предприятий (4.4)	1/5	1/2	1/3	1	0,08

Далее необходимо найти степень важности элементов относительно каждого соответствующего им фактора, влияющих на успешность социального проекта. Это можно сделать посредством умножения матрицы, составленной из значений векторов приоритетов элементов относительно каждого фактора (уровень III), на вектор приоритетов, который был получен для уровня II, т. е.

$$\begin{bmatrix} 0{,}462 & 0{,}510 & 0{,}541 & 0{,}470 \\ 0{,}294 & 0{,}128 & 0{,}312 & 0{,}280 \\ 0{,}188 & 0{,}292 & 0{,}104 & 0{,}170 \\ 0{,}056 & 0{,}070 & 0{,}040 & 0{,}080 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}106 \\ 0{,}236 \\ 0{,}109 \\ 0{,}549 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}49 \\ 0{,}25 \\ 0{,}19 \\ 0{,}07 \end{bmatrix}.$$

Так как на институционный, социальный и финансовый факторы приходится $(0{,}49 + 0{,}25 + 0{,}19) \cdot 100\ \% = 93\ \%$ воздействия на цель (успешность социального проекта), то в дальнейшем будем рассматривать эти факторы для получения весов сценариев. В свою очередь, наиболее весомыми элементами, определяющими важность перечисленных факторов, являются соответственно: политическая ситуация (0,462), демографический показатель (0,510) и величина денежных потоков (0,541). Именно полученный вектор весов (0,462; 0,510; 0,541) используем для анализа сценариев.

Для этого проведем попарное сравнение градаций успешности проекта относительно каждого из указанных элементов (табл. 6.17). При этом задается вопрос: какое влияние будет оказывать выбранный элемент на уровень успешности проекта?

Таблица 6.17. **Попарное сравнение альтернатив по каждому из рассматриваемых факторов**

Политическая ситуация (1.1)	*L*	*M*	*H*	Вес	Демографические показатели (2.1)	*L*	*M*	*H*	Вес	Величина денежных потоков (3.1)	*L*	*M*	*H*	Вес
L	1	1/5	1/9	0,05	*L*	1	1/3	1/7	0,08	*L*	1	1/2	1/5	0,12
M	5	1	1/7	0,17	*M*	3	1	1/5	0,19	*M*	2	1	1/3	0,23
H	9	7	1	0,77	*H*	7	5	1	0,73	*H*	5	7	1	0,65

Для получения весов сценариев необходимо умножить матрицу последних весов на вектор нормализованных весов трех наиболее важных элементов:

$$\begin{bmatrix} 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}12 \\ 0{,}17 & 0{,}19 & 0{,}23 \\ 0{,}78 & 0{,}73 & 0{,}65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}31 \\ 0{,}33 \\ 0{,}36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}09 \\ 0{,}19 \\ 0{,}72 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, наиболее успешный сценарий определяется весовым коэффициентом 0,72, который обеспечивается величиной денежных потоков, необходимых для реализации социальных проектов.

Контрольные вопросы и задачи

1. Характеристика иерархической структуры.
2. Способы построения иерархии.
3. Характеристика шкалы относительной важности.
4. Характеристика процедуры вычисления компонент собственного вектора в обратносимметричной матрице.
5. Синтез решений на основе линейной аддитивной свертки.
6. Проверка согласованности локальных приоритетов.
7. Используя метод анализа иерархий, выбрать оптимальный вариант покупки автомобиля по следующим исходным данным:

альтернативы (A):

A_1 – Toyota Corolla;
A_2 – Ford Focus;
A_3 – Mazda 3;
A_4 – ВАЗ 2110;

критерии оценки альтернатив (K):

K_1 – стоимость;
K_2 – пробег до капремонта;
K_3 – расход топлива;
K_4 – комфорт.

Для попарного сравнения альтернатив (критериев) использовать шкалу относительной важности (см. табл. 6.1).

Проверить полученные результаты на согласованности.

8. Используя метод анализа иерархий, выбрать оптимальный вариант покупки мобильного телефона по следующим исходным данным:

альтернативы (A):

A_1 – Nokia N9;
A_2 – Motorola K1;
A_3 – Samsung U600;

критерии оценки альтернатив (К):

K_1 – стоимость;
K_2 – функциональность;
K_3 – надежность.

Для попарного сравнения альтернатив (критериев) использовать шкалу относительной важности (см. табл. 6.1).

Проверить полученные результаты на согласованности.

Глава 7. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

7.1. Характеристика задач анализа экспертных оценок

К числу основных задач экспертных оценок относятся:

- ♦ проверка согласованности мнений экспертов;
- ♦ выявление различного рода рассогласованности: "еретиков" или "диссидентов" – экспертов, предлагающих оригинальные оценки, отличающиеся от оценок основной части экспертов; выделение "школ" – групп экспертов, оценки которых хорошо согласованы с оценками других экспертов или групп экспертов; выявление других видов рассогласованности оценок, существенных для условий определенной задачи;
- ♦ определение групп оценок, на которых в условиях решаемой задачи может основываться расчет обобщенной оценки;
- ♦ количественная характеристика согласованности экспертных оценок.

Определение обобщенной оценки (показателя обобщенного мнения) является во многих случаях основной целью статистической обработки. Но эта цель может быть достигнута только после того, как будет обеспечена возможность обобщения, т. е. после выявления "диссидентов" и "школ" и, возможно, проведения дополнительного опроса экспертов для уточнения ими ранее предложенных оценок.

Таким образом, можно выделить две основные задачи анализа экспертных оценок – проверка согласованности мнений экспертов (или классификации экспертов, если нет согласованности) и получение обобщенной (усредненной) оценки мнений экспертов внутри согласованной группы.

Существует определенное множество методов анализа экспертных оценок, тем не менее в настоящее время нет научно обоснованной их классификации и тем более – однозначных рекомендаций по их применению. Поэтому рассмотрим ряд современных научных взглядов, касающихся согласованности экспертных оценок и обобщенной (итоговой) оценки экспертной комиссии.

Считается, что решение может быть принято лишь на основе согласованных мнений экспертов. В связи с этим часто исключают из экспертной группы тех, чье мнение отличается от мнения большинства. При этом отсеиваются как неквалифицированные лица, попавшие в состав экспертной комиссии по недоразумению или по соображениям, не имеющим отношения к их профессиональному уровню, так и наиболее оригинальные мыслители, глубже проникшие в проблему, чем большинство. Следовало бы выяснить их аргументы, предоставить им возможность обосновать свои точки зрения. Вместо этого их мнениями пренебрегают.

Иногда считается, что в случае обнаружения двух или нескольких групп экспертов (вместо одной, согласованной во мнениях) опрос не достиг цели. Однако это не так: цель достигнута – установлено, что единого мнения нет, потому ЛПР должно это учитывать.

Поскольку число экспертов обычно не превышает 20–30, формальная статистическая согласованность их мнений может сочетаться с реально имеющимся разделением на группы, что делает дальнейшие расчеты не имеющими отношения к действительности. Если же обратиться к конкретным методам расчетов, например с помощью известных коэффициентов конкордации на основе коэффициентов ранговой корреляции Кендалла или Спирмена, то необходимо помнить, что на самом деле положительный результат проверки согласованности таким способом означает, ни больше ни меньше, отклонение гипотезы о независимости и равномерной распределенности мнений экспертов на множества всех ранжировок.

Модели поведения экспертов, как уже было сказано ранее, обычно предполагают, что эксперты оценивают интересующий ЛПР параметр (например, ранжировку образцов изделий по конкурентоспособности) с некоторыми ошибками, т. е. эксперта рассматривают как особого рода прибор с присущими ему метрологическими характеристиками. При этом оценки группы экспертов рассматривают как совокупность независимых, одинаково распределенных величин.

Описать их стараются параметрическими моделями (обычно нормальным законом распределения). Однако следует обратить внимание, что обосновать нормальность распределения ответов экспертов далеко не всегда возможно. Причины отсутствия нормальности в реальных данных, частным случаем которых являются экспертные оценки, достаточно подробно рассмотрены в ряде публикаций. Здесь же в качестве дополнительного фактора в пользу ненормальности распределения оценок укажем на ограниченность числа экспертов – обычно не более 10–30, что делает невозможным надежную проверку нормальности. Всего сказанного, очевидно, достаточно, чтобы с сомнением относиться к обоснованности применения параметрических моделей экспертных оценок.

Изложенные суждения системно представлены на рис. 7.1, где присутствует достаточно обширный арсенал методов анализа экспертных оценок.

Поскольку наиболее распространены ранговые экспертные оценки, получаемые в результате попарных сравнений, далее будут рассмотрены вопросы их анализа.

Рис 7.1. Системное представление проблемы анализа экспертных оценок

7.2. Анализ ранговых экспертных оценок

Ранговыми экспертными оценками называют оценки признаков объектов, полученные на основе устанавливаемого экспертом предпочтение одного объекта другим с точки зрения меры изучаемого качества и выражающиеся в виде чисел натурального ряда (рангов), присвоенных отдельным объектам. Однако ранги, присвоенные объектам, не являются числовой мерой изучаемого качества, а есть лишь символы, указывающие положение каждого объекта в построенном ряду предпочтений по отношению к другим объектам.

Одной из основных проблем, возникающих при обработке ранговых экспертных оценок, является выбор наилучшей альтернативы, для чего достаточно часто используется их проверка на транзитивность (правило логического вывода). Обобщенное условие наличия транзитивности выражается в виде: если aRb и bRc, то aRc, где R – отношение, принимающее формы (≥; ≤; =), а a, b, c – сравниваемые альтернативы. Достаточно часто используются следующие виды транзитивности:

если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;
если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$;
если $a > b$ и $b = c$, то $a > c$ и другие.

Рассмотрим некоторые методы выбора лучшей альтернативы, использующие принципы транзитивности.

Принцип и парадокс Кондорсе

Кондорсе впервые обратил внимание на недостаточность процедуры определения наилучшей альтернативы с помощью непосредственного подсчета голосов по правилу большинства и предложил следующий принцип: кандидат, который побеждает при сравнении один на один с любым из других кандидатов, является победителем на выборах [9].

Рассмотрим пример, иллюстрирующий точку зрения Кондорсе. Пусть выбрано 20 альтернатив: a_1, a_2, …, a_{20}. Их ранжирование, соответствующее мнению 10 экспертов, представлено в табл. 7.1.

Таблица 7.1. **Ранжирование мнения экспертов (n = 20, m = 10)**

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	…	P_{10}
a_2	a_2	a_1	a_3	a_4	…	a_9
a_1	a_1	a_3	a_1	a_1	…	a_1

Продолж. табл. 7.1.

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	…	P_{10}
a_3	a_3	a_4	a_4	a_3	…	a_3
a_4	a_4	a_5	a_5	a_5	…	a_4
…	…	…	…	…	…	…
a_{19}	a_{19}	a_2	a_{20}	a_{20}	…	a_{20}
a_{20}	a_{20}	a_2	a_2	a_2	…	a_2

По правилу большинства подсчитывается число экспертов, отдавших предпочтение каждой из альтернатив, и наилучшей объявляется альтернатива, которую назвали таковой большинство экспертов. В нашем примере это альтернатива a_2. Вряд ли такое решения покажется справедливым. С большим успехом a_2 можно объявить наихудшей альтернативой. Иногда при использовании правила большинства вводят дополнительные требования, позволяющие устранить указанный недостаток. В частности, наилучшей может быть объявлена альтернатива, которую считают наилучшей не менее половины экспертов. А как быть в случае, когда такой альтернативы не существует?

Между тем в реальных экспертизах эта ситуация возникает достаточно часто. Кондорсе был предложен следующий принцип определения наилучшей альтернативы. Каждый эксперт ранжирует альтернативы по предпочтениям. На основании полученных ранжирований для каждой пары альтернатив a_i, a_j подсчитывается S_{ij} – число экспертов, считающих a_i предпочтительней a_j. Если $S_{ij} > S_{ii}$ то альтернатива a_i признается более предпочтительной, чем a_j; a_i объявляется наилучшей альтернативой (альтернативой Кондорсе), если $S_{ij} > S_{ii}$ для всех $j \neq i$.

В нашем примере альтернативой Кондорсе является a_1. Выбор альтернативы a_1 представляется более обоснованным. Однако при использовании принципа выбора Кондорсе может возникать указанный им же парадокс, являющийся следствием нетранзитивности коллективных предпочтений. Проиллюстрируем его на примере. Пусть три эксперта проранжировали альтернативы a_1, a_2, a_3 следующим образом:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $S_{12} > S_{21}$; $S_{23} > S_{32}$; $S_{13} > S_{31}$. Альтернативы Кондорсе в этом случае не существует. Отметим, что число групп ранжирований, приводящих к парадоксу Кондорсе, составляет около 9 % при фиксированном числе ранжирований (при малом числе ранжирований несколько меньше). В реальных экспертизах, когда мнения экспертов существенно различаются, вероятность возникновения парадокса Кондоре выше.

Рассмотрим пример голосования в собрании представителей из 60 человек [9]. Пусть на голосование поставлены три кандидата: A, B и C – и голоса распределились, как в табл. 7.2.

Сравним предпочтения по отношению к парам кандидатов. Берем A и C, тогда A предпочитают 23 + 2 = 25; C по сравнению с A предпочитают 17 + 10 + 8 = 35. Следовательно, C предпочтительнее A ($C \to A$).

Таблица 7.2. **Распределение голосов (парадокс Кондорсе)**

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \to B \to C$
17	$B \to C \to A$
2	$B \to A \to C$
10	$C \to A \to B$
8	$C \to B \to A$

Всего 60 чел.

Сравнив попарно аналогичным образом A и B, B и C, получаем: $B \to C$ (42 против 18), $C \to A$ (35 против 25) и $A \to B$ (33 против 27).Следовательно, мы пришли к противоречию, к нетранзитивному отношению $A \to B \to C \to A$ = 33 $\to$ 42 $\to$ 25.

Столкнувшись с этим парадоксом, Кондорсе выбрал "наименьшее зло", а именно то мнение, которое поддерживается большинством голосов (избранным следует считать A) [9].

Изменим несколько результаты голосования, чтобы избежать парадокса Кондорсе. Предположим, что голоса распределились так, как показано в табл. 7.3. Нетрудно подсчитать, что при этих новых результатах голосования в соответствии с принципом Кондорсе избранным будет кандидат C, который при попарном сравнении побеждает двух других кандидатов.

Таблица 7.3. **Распределение голосов (правило большинства)**

Число голосующих	Предпочтения
23	$A \to C \to B$
19	$B \to C \to A$
16	$C \to B \to A$
2	$C \to A \to B$

Однако если мы используем другой принцип выбора: *большинство голосующих*, которые назвали данного кандидата лучшим, – то победителем оказывается кандидат A. Но при этом кандидат A не набрал абсолютного большинства голосов.

Мы видим, что способ определения победителя при демократической системе голосования (один человек – один голос) зависит от процедуры голосования [9].

Метод Борда

Необходимо учитывать ранжирования при определении наилучшей альтернативы – так считал и Борда. Способ, предложенный им, состоит в следующем. Альтернативам, проранжированным экспертом, приписываются числа: последней по предпочтениям – 0, предпоследней 1 и т. д. Если через s_i обозначить сумму чисел, приписанных альтернативе a_i, то результирующим ранжированием объявляется $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, $s_{i1} \geq s_{i2} \geq ... \geq s_{in}$, а наилучшей альтернативой – a_{i1}. Способ Борда также не лишен недостатков. В частности, альтернатива Кондорсе, т. е. альтернатива, которая лучше любой другой при парном сравнении альтернатив, может оказаться не выбранной в качестве наилучшей.

Пусть пять экспертов проранжировали альтернативы a_1 a_2, a_3, a_4, a_5 следующим образом:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_5 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}; \quad P_4 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}; \quad P_5 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \end{pmatrix}.$$

Альтернативой Кондорсе в этом примере является альтернатива a_1 ($S_{1j} > S_{j1,\ j}$ есть {2, …, 5}). Однако она не будет выбрана в качестве наилучшей альтернативы по способу Борда, поскольку $s_2 = 16$, а $s_1 = 15$ и, следовательно, $s_2 > s_1$.

Рассмотрим пример процедуры голосования по методу Борда.

Пусть число кандидатов равно n. Тогда за первое место присуждается n баллов, за второе – $(n - 1)$, за последнее – 1 балл. Применим метод Борда к приведеному выше примеру. Подсчитаем число баллов для каждого из кандидатов:

$$A: 23{\cdot}3 + 19{\cdot}1 + 16{\cdot}1 + 2{\cdot}2 = 108;$$

$$B: 23{\cdot}1 + 19{\cdot}3 + 16{\cdot}2 + 2{\cdot}1 = 114;$$

$$C: 23{\cdot}2 + 19{\cdot}2 + 16{\cdot}3 + 2{\cdot}3 = 138.$$

В соответствии с методом Борда мы должны объявить победителем кандидата C.

Однако с методом Борда, как и с принципом Кондорсе, возникают проблемы. Предположим, что результаты голосования в выборном органе представлены табл. 7.4. Подсчитав баллы в соответствии с методом Борда, получим: A – 124; B – 103; C – 137. В соответствии с методом Борда победителем следует объявить кандидата C. Однако в данном случае явным победителем является кандидат A, набравший абсолютное большинство голосов – 31 из 62.

Таблица 7.4. **Распределение голосов методом Борда**

Число голосующих	Предпочтения
31	$A \to C \to B$
12	$B \to C \to A$
17	$C \to B \to A$
2	$C \to A \to B$

Всего 62 чел.

Приведенные примеры позволяют понять, что парадоксы при голосовании не возникают лишь в случае, когда победитель определяется по принципу абсолютного большинства голосов. Однако такой случай нетипичен для большинства выборов в демократических странах. Обычно число кандидатов больше чем два и редки случаи, когда кто-то из них сразу же получает поддержку абсолютного большинства избирателей [9].

7.3. Анализ согласованности экспертных оценок, представленных результатами попарных сравнений

Важное место среди экспертных оценок занимают попарные сравнения. Так, например, в основе метода анализа иерархий лежат процедуры попарного сравнения элементов (альтернатив или критериев) задачи принятия решений с использованием субъективных суждений, численно оцениваемых по шкале относительной важности. В результате формируется матрица A со свойствами обратной симметричности следующего вида [13]:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \dfrac{1}{a_{21}} & 1 \ldots a_{2n} \\ \dfrac{1}{a_{1n}} & \dfrac{1}{a_{2n}} \ldots 1 \end{pmatrix},$$

n – число сравниваемых элементов; a_{ij} – некоторые положительные числа.

Далее по значениям этой матрицы формируется набор локальных приоритетов, которые выражают относительное влияние множества элементов одного уровня иерархии на элемент примыкающего сверху уровня иерархии. Для этого подсчитываются значения собственного вектора матрицы, который в процессе нормализации приводит к искомому вектору (набору) локальных приоритетов. Ставится задача определения согласованности локальных приоритетов, так как матрица в общем случае несогласованная [13].

Существует ряд способов определения собственных значений обратносимметричной матрицы, дающих различные результаты в плане определения согласованности (несогласованности) локальных приоритетов. Особенно это касается сравнительно больших матриц с числом сравнимых элементов $n \geq 7$, в которых часто трудно достигнуть высокого уровня согласованности [13]. Тем не менее уровень согласованности должен соответствовать тому риску, который сопутствует работе с несогласованными результатами. Например, при сравнении воздействия лекарственных препаратов на организм необходимо иметь очень высокий уровень согласованности.

С учетом сказанного представляет интерес исследование способов определения значений собственного вектора обратносимметричных матриц в плане их влияния на оценки степени отклонения от согласованности локальных приоритетов.

В работе [13] рекомендованы и рассмотрены в описательной форме четыре способа нахождения собственных векторов для обратно-симметричной матрицы. Предварительно формализуем их реализацию посредством следующих схем.

Способ 1:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} = A_1 \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{24} = A_2 \\ \ldots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = A_n \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} \Rightarrow \left\{\frac{A_1}{A} = \omega_1^{(1)}, \frac{A_2}{A} = \omega_2^{(1)}, \ldots, \frac{A_n}{A} = \omega_n^{(1)}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \ldots, \omega_n^{(1)})$ – ***вектор приоритетов.***

Способ 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} = B_1 \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{24} = B_2 \\ \ldots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn} = B_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{B^{-1} = B_1^{-1} + B_2^{-1} +, \ldots, B_n^{-1}\} \Rightarrow \left\{\frac{B_1^{-1}}{B^{-1}} = \omega_1^{(2)}, \frac{B_2^{-1}}{B^{-1}} = \omega_2^{(2)}, \ldots, \frac{B_n^{-1}}{B^{-1}} = \omega_n^{(2)}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \ldots, \omega_n^{(2)})$ – ***вектор приоритетов.***

Способ 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n} = C_1 \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n} = C_2 \\ \ldots \\ a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{1n} = C_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \frac{a_{11}}{C_1} = C_{11}, \frac{a_{12}}{C_1} = C_{12} \ldots \frac{a_{12}}{C_1} = C_{1n} \\ \frac{a_{21}}{C_2} = C_{21}, \frac{a_{22}}{C_2} = C_{22} \ldots \frac{a_{12}}{C_2} = C_{2n} \\ \ldots \\ \frac{a_{11}}{C_1} = C_{n1}, \frac{a_{12}}{C_1} = C_{n2} \ldots \frac{a_{12}}{C_1} = C_{nn} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \left(C_{11}+C_{12}+...+C_{1n}\right)/\,n=\omega_1^{(3)} \\ \left(C_{21}+C_{22}+...+C_{2n}\right)/\,n=\omega_2^{(3)} \\ ... \\ \left(C_{n1}+C_{n2}+...+C_{nn}\right)/\,n=\omega_n^{(3)} \end{Bmatrix} \Rightarrow (\omega_1^{(3)},\, \omega_2^{(3)},...,\, \omega_n^{(3)}) -$$ ***вектор приоритетов.***

Способ 4:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...\ a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...\ a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}a_{12}...\,a_{1n}}=d_1 \\ \sqrt[n]{a_{21}a_{22}...\,a_{2n}}=d_2 \\ ... \\ \sqrt[n]{a_{n1}a_{n2}...\,a_{nn}}=d_n \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d_1}{D}=\omega_1^{(4)},\ \frac{d_2}{D}=\omega_2^{(4)},...,\ \frac{d_n}{D}=\omega_n^{(4)},\ \Rightarrow d_1+d_2+...+d_n=D\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\omega_1^{(4)},\, \omega_2^{(4)},...,\ \omega_n^{(4)})\ -$$ ***вектор приоритетов.***

Необходимо проанализировать рассмотренные способы с точки зрения обеспечения степени согласованности компонент векторов локальных приоритетов.

Из работы [12] следует, что согласованность положительной обратносимметричной матрицы эквивалентна требованию равенства ее максимального собственного числа $\lambda_{\max}$ с n, а отклонение от согласованности определяется индексом согласованности, $\text{ИС}=\dfrac{(\lambda_{\max}-n)}{(n-1)}$ сгенерированной случайным образом обратно-симметричной матрицы с определенным числом сравниваемых элементов n называется случайным индексом. Его значения приведены в табл. 6.7. Отношение величины ИС к СИ для матрицы определенного порядка называется *отношением согласованности*. Значение ОС ≤ 10 % считают приемлемым. Индекс согласованности в каждой матрице может быть получен следующим образом [12]. Сначала суммируется каждый столбец суждений, затем сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца – на вторую компоненту и т. д. Полученные числа суммируются. Таким образом получают максимальное собственное число $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{\max} = \left(\sum_{j=1}^{n1} a_j \right) \omega_1 + \left(\sum_{j=1}^{n2} a_j \right) \omega_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{nn} a_j \right) \omega_n .$$

Для выполнения числовых расчетов произвольным образом была сформирована обратносимметричная матрица (табл. 7.5) с максимальным числом сравниваемых элементов $n = 15$.

Расчет производится начиная с $n = 3$ с последующим наращиванием числа сравниваемых элементов, т. е. $n = 4$, $n = 5$, ... , $n = 15$. На каждом шаге подсчитываются значения ω, $\lambda_{\max}$, ИС и ОС. Полученные результаты сведены в табл. 7.6 и графически представлены на рис. 7.2.

Анализ полученных результатов позволяет сделать ряд выводов:

♦ наибольшая согласованность локальных приоритетов наблюдается при использовании 2, 3 и 4-го способов с числом сравниваемых элементов $n \leq 6$;

♦ при увеличении числа сравниваемых элементов $n > 6$ наблюдается общая тенденция резкого увеличения степени несогласованности при применении всех четырех способов;

♦ наиболее точные способы 2 и 4, причем при $n \geq 12$–13 сравниваемых элементов последний способ обеспечивает лучший показатель величины ОС.

Таблица 7.5. **Матрица сравнения элементов *n* = 3...15**

n	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}
1	1,000	5,000	3,000	7,000	6,000	6,000	0,333	0,250	9,000	5,000	8,000	6,000	4,000	4,000	2,000
2	0,200	1,000	0,333	5,000	3,000	3,000	0,200	0,143	5,000	3,000	5,000	4,000	1,000	7,000	1,000
3	0,333	3,000	1,000	6,000	3,000	4,000	6,000	0,200	3,003	1,000	6,000	5,000	3,000	8,000	4,000
4	0,143	0,200	0,170	1,000	0,333	0,250	0,143	0,125	3,003	0,250	2,000	3,000	8,000	5,000	5,000
5	0,166	0,333	0,333	3,000	1,000	0,500	0,200	0,170	4,000	0,333	7,000	6,000	3,000	6,000	2,000
6	0,166	0,333	0,250	4,000	2,000	1,000	0,200	0,170	6,000	6,000	4,000	6,000	5,000	5,000	3,000
7	3,000	5,000	0,170	7,000	5,000	5,000	1,000	0,500	7,000	0,125	5,300	7,000	7,000	2,000	2,000
8	4,000	7,000	5,000	8,000	6,000	6,000	2,000	1,000	7,000	8,000	4,000	3,000	6,000	4,000	3,003
9	0,111	0,200	0,333	0,333	0,250	0,166	0,143	0,143	1,000	4,000	3,000	1,000	5,000	9,000	9,000
10	0,200	0,333	1,000	4,000	3,000	0,166	8,000	0,125	0,250	1,000	7,000	4,000	4,000	3,000	7,000
11	0,125	0,200	0,167	0,500	0,143	0,250	0,125	0,250	0,333	0,143	1,000	3,000	6,000	5,000	6,000
12	0,167	0,250	0,200	0,333	0,167	0,167	0,143	0,333	1,000	0,250	0,333	1,000	7,000	7,000	2,000
13	0,250	1,000	0,333	0,125	0,333	0,200	0,143	0,167	0,200	0,250	0,167	0,143	1,000	6,000	3,000
14	0,250	0,143	0,125	0,200	0,167	0,200	0,500	0,250	0,111	0,333	0,200	0,143	0,167	1,000	6,000
15	0,500	1,000	0,250	0,200	0,500	0,333	0,500	0,333	0,111	0,143	0,167	0,500	0,333	0,167	1,000

Таблица 7.6. **Сравнительные характеристики λ_{max}, ИС и ОС**

Число сравниваемых элементов *n*	Способы определения вектора приоритетов											
	1			2			3			4		
	λ_{max}	ИС	ОС	λ_{max}	ИС	ОС	λ_{max}	ИС	ОС	λ_{max}	ИС	ОС
3 (СИ = 0,58)	3,12	0,059	10,64	3,02	0,0087	1,56	3,05	0,0274	4,89	3,04	0,019	3,38
4 (СИ = 0,9)	4,72	0,239	26,59	4,11	0,0366	4,07	4,35	0,1150	12,78	4,22	0,0725	8,05
5 (СИ = 1,12)	5,84	0,2095	17,32	5,13	0,0330	2,76	5,45	0,1113	9,20	5,3	0,0740	6,12
6 (СИ = 1,24)	7,10	0,2199	17,74	6,21	0,0410	3,31	6,62	0,1238	9,98	6,42	0,0840	6,77
7 (СИ = 1,32)	9,49	0,4148	31,42	7,38	0,0639	4,84	8,89	0,3150	23,87	9,09	0,3479	26,35
8 (СИ = 1,41)	10,93	0,4185	29,68	8,51	0,0732	5,19	10,21	0,3160	22,41	9,87	0,2671	18,94
9 (СИ = 1,45)	12,67	0,4592	31,67	9,94	0,1180	8,13	11,63	0,3290	22,70	11,16	0,2700	18,62
10 (СИ = 1,49)	16,08	0,6761	45,37	14,53	0,5000	33,78	15,31	0,5902	39,61	13,65	0,4060	27,25
11 (СИ = 1,51)	17,62	0,6617	43,82	13,50	0,2501	16,57	16,66	0,5662	37,5	15,14	0,4138	27,40
12 (СИ = 1,48)	19,09	0,6445	43,55	14,91	0,2649	17,9	18,08	0,5524	37,33	16,66	0,4240	28,65
13 (СИ = 1,56)	21,55	0,7127	45,69	17,98	0,4147	26,58	20,02	0,5851	37,51	18,22	0,4354	27,91
14 (СИ = 1,57)	23,94	0,7643	48,68	19,06	0,3893	24,80	21,90	0,6078	38,71	19,92	0,4551	28,99
15 (СИ = 1,59)	26,25	0,8032	50,52	22,52	0,5373	33,79	24,11	0,6507	40,92	21,80	0,4854	30,53

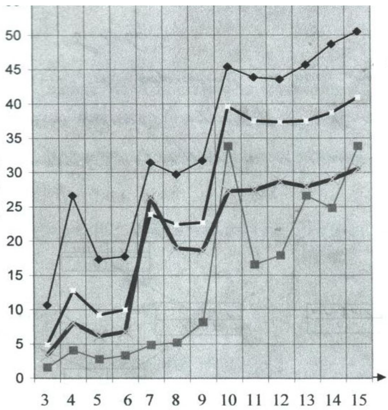


Рис. 7.2. Графическое представление результатов исследования согласованности локальных приоритетов:
–◆– – способ 1; –■– – способ 2;
—— – способ 3; —— – способ 4

7.4. Анализ согласованности экспертных оценок, представленных категоризированными данными

Одной из важных задач, которую приходится решать при проведении анализа экспертных оценок, является определение их согласованности, так как считается, что решение может быть принято лишь на основе согласованных мнений экспертов. Одно из современных направлений обработки экспертных оценок учитывает, что ответы экспертов во многих процедурах экспертного опроса – не числа, а градации качественных признаков: ранжировки, разбиения, результаты парных сравнений, нечеткие предпочтения и т. д.

Помимо перечисленных форм ответов, экспертные оценки можно характеризовать категоризированными данными, т. е. данными, представленными в виде частот наблюдений, попадающих в некоторые категории или классы с определенными признаками (свойствами) [2].

Для анализа таких данных могут быть использованы также таблицы сопряженности признаков.

Основные принципы формирования таблиц сопряженности признаков

Пусть эксперты изучают серию объектов, извлеченных по некоторому правилу из общей совокупности. Пусть также каждый объект описывается p свойствами: $X^{(1)}, X^{(2)}, ..., X^{(p)}$, так что фиксация этих свойств для N извлекаемых и наблюдаемых объектов приводит к таблице данных

$$X(N)=\begin{pmatrix} X_1^{(1)} & X_2^{(1)} & \dots & X_N^{(1)} \\ X_1^{(2)} & X_2^{(2)} & \dots & X_N^{(2)} \\ & & \dots & \\ X_1^{(P)} & X_2^{(P)} & \dots & X_N^{(P)} \end{pmatrix},$$

где $X_j^{(i)}$ – реализованное значение 1-го свойства $X^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, p$) у j-го изучаемого объекта. Одна из частных ситуаций на практике – наблюдение объектов со свойствами, о которых можно сказать лишь, что они либо есть, либо нет. Если таких свойств всего два ($p = 2$) и если наличие свойства заносится в таблицу как 1, а его отсутствие – как 0, то вся таблица $X(N)$ будет представлять собой последовательность столбцов: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, т. е. исходная таблица, по сути, заменяется таблицей из четырех чисел:

$$X(N)=\begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} \\ n_{10} & n_{11} \end{pmatrix},$$

где n_{00}, n_{01}, n_{10} и n_{11} – число столбцов вида $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, и $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ соответственно, а $n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11} = N$.

Другими словами, исходная таблица $X(N)$ заменяется таблицей с определенным количеством долей или пропорций (по числу указанных столбцов) и используется для изучения связей между признаками.

Такие таблицы называются еще *четырехклеточными таблицами сопряженности признаков*. Модель такой таблицы представляется табл. 7.7.

Таблица 7.7. **Четырехклеточная таблица сопряженности признаков**

Признак А	Признак В		
	Наличие	Отсутствие	Всего
Наличие	n_{11}	n_{12}	$n_{1\bullet}$
Отсутствие	n_{21}	n_{22}	$n_{2\bullet}$
Всего	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet\bullet}$

Здесь

n – объем исследуемой выборки ($n_{\bullet\bullet} = n_{1\bullet} + n_{2\bullet}$ или $n_{\bullet\bullet} = n_{\bullet 1} + n_{\bullet 2}$);

$n_{1\bullet} = n_{11} + n_{12}$ – подвыборка, характеризующаяся одновременным наличием признаков A и B и отсутствием признаков B;

$n_{2\bullet} = n_{21} + n_{22}$ – подвыборка, в которой одновременно отсутствуют признаки A и B и присутствует признак B;

$n_{\bullet 1} = n_{11} + n_{21}$ – одновременно присутствуют признаки A и B и отсутствует признак A;

$n_{\bullet 2} = n_{11} + n_{22}$ – одновременно отсутствуют признаки A и B и присутствует признак A.

Следует отметить, что такие таблицы формируются с применением трех основных методов выбора объектов:

♦ метода перекрестного выбора, состоящего в том, что из некоторой совокупности выбирается $n_{\bullet\bullet}$ объектов и для каждого объекта устанавливается, присутствуют или отсутствуют у него признаки A и B. До сбора данных назначается лишь размер выборки $n_{\bullet\bullet}$;

♦ целевого метода выбора, заключающегося в том, что для анализа отбираются заранее установленное число $n_{1\bullet}$ объектов, которые имеют признак A, и заранее установленное число $n_{2\bullet}$ объектов, не имеющих признака A;

♦ метода случайного формирования двух выборок заранее определенного объема.

Проведенный анализ литературных источников [3–15] показал, что такие таблицы с успехом используются для решения ряда задач, в том числе и определения степени согласованности экспертов, проводящих классификацию объектов на категоризованной шкале. Рассмотрим две такие задачи.

Случай двух экспертов

Пусть два эксперта независимо классифицируют каждый из n объектов выборки. Шкала, на которой проводится классификация, образована k категориями. Рассмотрим гипотетический пример (табл. 7.8), где каждый элемент (кроме сумм) обозначает пропорцию объектов, отнесенных экспертом A к одной из трех категорий и экспертом B – к одной из тех же категорий.

Здесь, например, 0,05 (5 %) всех объектов (n = 100) были отнесены экспертом A к категории K_2 и одновременно экспертом B – к категории K_1. Ставится задача определения степени согласованности экспертов как отдельно по каждой категории, так и в целом.

Таблица 7.8. **Числовые значения категорий**

<table>
<tr><td rowspan="2">Эксперт A</td><td colspan="4">Эксперт B</td></tr>
<tr><td>K_1</td><td>K_2</td><td>K_3</td><td>Сумма</td></tr>
<tr><td>K_1</td><td>0,75</td><td>0,01</td><td>0,04</td><td>0,80</td></tr>
<tr><td>K_2</td><td>0,05</td><td>0,04</td><td>0,01</td><td>0,10</td></tr>
<tr><td>K_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0,10</td><td>0,10</td></tr>
<tr><td>Сумма</td><td>0,80</td><td>0,05</td><td>0,15</td><td>1,00</td></tr>
</table>

Анализ начинается со сжатия исходной таблицы $K \times K$ (см. табл. 7.8) в таблицу 2×2, в которой все категории, кроме изучаемой, объединены в одну категорию "все остальные". В табл. 7.9 представлены результаты сжатия в общем виде и конкретно – для категории K_2 по данным табл. 7.8.

Таблица 7.9. **Четырехклеточная таблица для определения согласованности по одной категории**

<table>
<tr><td colspan="4">Общий вид</td><td colspan="4">По категории K_2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Эксперт A</td><td colspan="3">Эксперт B</td><td rowspan="2">Эксперт A</td><td colspan="3">Эксперт B</td></tr>
<tr><td>K_2</td><td>Все остальные</td><td>Сумма</td><td>K_2</td><td>K_1 и K_2</td><td>Сумма</td></tr>
<tr><td>Категория K_2</td><td>a</td><td>b</td><td>P_1,</td><td>K_2</td><td>0,04</td><td>0,06</td><td>0,10</td></tr>
<tr><td>Все остальные</td><td>c</td><td>d</td><td>q_1</td><td>K_1 и K_3</td><td>0,01</td><td>0,89</td><td>0,90</td></tr>
<tr><td>Сумма</td><td>P_2</td><td>q_2</td><td>1</td><td>Сумма</td><td>0,05</td><td>0,95</td><td>1,00</td></tr>
</table>

Здесь имеется в виду, что элементы a, b, c, d означают пропорции объектов, а не их числа.

По данным этой таблицы подсчитываются различные индексы согласованности. Рассмотрим их более подробно.

1. Суммарная пропорция согласия $P_0 = a + d$.

2. Для случая, когда изучаемая категория (в нашем примере K_2) относительно редкая, что может повлечь за собой рост пропорции d

и, соответственно, значения P_0, была предложена так называемая "пропорция частного согласия" (proportion of specific agreement) вида

$$P_S = \frac{2a}{2a+b+c} = \frac{a}{\overline{P}}, \tag{7.1}$$

где $\overline{P} = (P_1 + P_2)/2$ имеет здравую вероятностную интерпретацию.

Случайно выберем одного из экспертов и сфокусируем внимание на выделенной категории. Тогда величина P_S есть условная вероятность того, что второй эксперт отнесет объект к этой категории, если выбранный эксперт также отнес данный объект к этой категории.

3. В ситуациях, когда предсказания даются при известном и при неизвестном результатах одновременной классификации объекта двумя экспертами, предложен индекс согласованности

$$\lambda_r = \frac{(a+d)-\overline{q}}{1-\overline{q}} = \frac{2a-(b+c)}{2a+(b+c)},$$

где $\overline{q} = 1-q$ или $\overline{q} = (q_1+q_2)/2 = d+(b+c)/2$ и $\overline{q} > \overline{P}$.

Ввиду тождества $\lambda_r = 2P_S - 1$ порядок значений обоих индексов для трех исследуемых категорий одинаков.

4. В выражение (7.1) для пропорции частного согласия не входит d. Если, наоборот, исключить a, то получим индекс

$$\overline{P}_S = \frac{d}{\overline{q}} = \frac{2d}{2d+b+c}.$$

При решении вопроса выбора между P_S и $\overline{P}_S$ было предложено использовать в качестве меры согласованности их среднее

$$\overline{A} = \frac{P_S + \overline{P}_S}{2} = \frac{a}{P_1+P_2} + \frac{d}{q_1+q_2}.$$

5. Рассмотренные выше индексы согласованности могут не учитывать некоторую степень согласованности (табл. 7.10) экспертов лишь за счет случайности. Например, если эксперт A использует при классификации объекта одни критерии, а эксперт B – совершенно другие, не зависящие от критериев первого эксперта, то вся наблюдаемая согласованность будет обусловлена случайным совпадением.

В связи с этим был предложен естественный способ учета случайности в расчетах.

Таблица 7.10. **Значение категорий**

Общий вид				По категории K_2			
Эксперт A	Эксперт B			Эксперт A	Эксперт B		
	K_2	Все остальные	Сумма		K_2	K_1 и K_3	Сумма
Категория K_2	P_1P_2	P_1q_2	P_1	K_2	0,005	0,095	0,10
Все остальные	q_1P_2	q_1q_2	q_1	K_1 и K_3	0,045	0,855	0,90
Сумма	P_2	q_2	1	Сумма	0,050	0,950	1

Рассмотрим любой индекс I, принимающий значение 1 при полной согласованности. Пусть I_0 обозначает наблюдаемое значение индекса (т. е. вычисленное по пропорциям табл. 7.8), а I_e – значение, ожидаемое при чисто случайных совпадениях (вычисленное по пропорциям табл. 7.10).

Прирост наблюдаемой согласованности по сравнению со случайной равен $I_0 - I_e$, тогда как максимально возможный прирост есть $1 - I_e$. Отношение этих разностей определяет коэффициент, получивший название "каппа":

$$\tilde{\ae} = \frac{I_0 - I_e}{1 - I_e} \text{ или } \tilde{\ae} = \frac{2(ad - bc)}{P_1q_2 + P_2q_1}. \qquad (7.2)$$

Коэффициент $\tilde{\ae}$ (7.2) есть мера согласованности со следующими свойствами:

- ♦ при полной согласованности $\tilde{\ae} = +1$;
- ♦ если наблюдаемая согласованность больше или равна случайной согласованности, $\tilde{\ae} \geq 0$, в противном случае $\tilde{\ae} < 0$.

В ряде практических приложений $\tilde{\ae} > 0{,}75$ соответствует прекрасной согласованности, $\tilde{\ae} < 0{,}4$ указывает на слабый прирост согласованности, $\tilde{\ae} = 0{,}40...0{,}75$ относится к достаточно хорошей согласованности.

Довольно часто возникает задача определения общей меры согласованности по всей исследуемой совокупности категорий. Для этого вводят общее значение $\tilde{æ}$, определив его как взвешенное среднее значений каппа для отдельных категорий с весами, равными знаменателям в выражении для значений каппа (т. е. величинам $P_1q_2 + P_2q_1$).

Наглядно такую процедуру можно представить в виде табл. 7.11.

Таблица 7.11. **Пропорции совместной классификации двух экспертов при *k* категориях**

Эксперт *A*	Эксперт *B*				
	1	2	…	k	Сумма
1	P_{11}	P_{12}	…	P_{1k}	$P_{1\bullet}$
2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2k}	$P_{2\bullet}$
…	…	…	…	…	…
k	P_{k1}	P_{k2}	…	P_{kk}	$P_{k\bullet}$
Сумма	$P_{\bullet 1}$	$P_{\bullet 2}$	…	$P_{\bullet k}$	1

Суммарная пропорция наблюдаемой согласованности есть

$$P_0 = \sum_{i=1}^{k} P_{ii}, \tag{7.3}$$

суммарная пропорция случайной согласованности

$$P_e = \sum_{i=1}^{k} P_{i\bullet} P_{\bullet i}. \tag{7.4}$$

Тогда общее значение

$$\overline{æ} = \frac{P_0 - P_e}{1 - P_e}. \tag{7.5}$$

Для проверки гипотезы о независимости классификаций различных экспертов (это означает, что истинная каппа равна нулю) подходит следующая оценка стандартной ошибки каппа:

$$S(\overline{æ}) = \frac{1}{(1-P_e)\sqrt{n}} \sqrt{P_e + P_e^2 - \sum_{i=1}^{k} P_{i\bullet} P_{\bullet i} (P_{i\cdot} + P_{\bullet i})}, \tag{7.6}$$

где P_e определена в (7.4). Гипотеза проверяется против альтернативы – согласованность лучше случайной – с помощью статистики:

$$Z = \frac{\tilde{æ}}{S(\tilde{æ})},$$

сравниваемой со значениями стандартного нормального закона распределения. Гипотеза отвергается, если Z достаточно велика (предпочтение отдается одностороннему критерию). Формулы (7.3)–(7.6) применимы и при числе категорий $k = 2$, следовательно, их можно использовать при изучении достоверности классификации для каждой отдельной категории.

Рассмотрим пример вычисления описанных показателей согласованности, используя значения из табл. 7.8, а результаты сведем в табл. 7.12.

Таблица 7.12. **Значения индексов согласованности**

Категория	P_0	P_S	λ_r	P'_S	A	$\tilde{æ}$	$\overline{æ}$	$S(\overline{æ})$
K_1	0,90	0,94	0,88	0,75	0,84	0,69		
K_2	0,93	0,53	0,06	0,96	0,75	0,50	0,68	0,076
K_3	0,95	0,80	0,60	0,97	0,89	0,77		

Для исследуемой категории K_2 имеем:

$$P_0 = 0{,}04 + 0{,}89 = 0{,}93; \quad P_S = \frac{2 \cdot 0{,}04}{2 \cdot 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}01} = 0{,}53;$$

$$\lambda_r = \frac{2 \cdot 0{,}04 - (0{,}06 + 0{,}01)}{2 \cdot 0{,}04 + (0{,}06 + 0{,}01)} = 0{,}06;$$

$$P'_S = \frac{2 \cdot 0{,}89}{2 \cdot 0{,}89 + 0{,}06 + 0{,}01} = 0{,}96; \quad P_S = \frac{0{,}04}{0{,}10 + 0{,}05} + \frac{0{,}89}{0{,}90 + 0{,}95} = 0{,}75;$$

$$\tilde{æ} = \frac{2 \cdot (0{,}04 \cdot 0{,}89 - 0{,}06 \cdot 0{,}01)}{0{,}10 \cdot 0{,}95 + 0{,}05 \cdot 0{,}90} = 0{,}50; \quad P_0 = 0{,}75 + 0{,}40 + 0{,}10 = 0{,}894;$$

$$P_e = 0{,}80 \cdot 0{,}80 + 0{,}10 \cdot 0{,}05 + 0{,}10 \cdot 0{,}15 = 0{,}66; \quad \overline{æ} = \frac{0{,}89 - 0{,}66}{1 - 0{,}66} = 0{,}68;$$

$$S(\overline{æ}) = \frac{1}{(1 - 0{,}66)\sqrt{100}} \sqrt{0{,}66 + 0{,}66^2 - 1{,}0285} = 0{,}076; \quad Z = \frac{0{,}68}{0{,}076} = 8{,}95.$$

Следовательно, общее значение каппа статистически высокозначимо, а ее величина ($\overline{æ} = 0{,}68$) соответствует хорошей согласованности.

Случай нескольких экспертов

Здесь предполагается, что проведено исследование n объектов, в котором i-й объект классифицировали m_i экспертов.

Считается, что состав группы экспертов может меняться от объекта к объекту. Сначала полагается, что k = 2, т. е. классификация состоит в отнесении объекта к одной из двух категорий. Обозначают x_i число экспертов, отнесших i-й объект к первой ("положительной"), произвольно выбранной категории. Значит, ко второй ("отрицательной") категории i-й объект отнесен $m_i - x_i$ раз.

Далее определяется каппа-статистика с помощью тождеств, связывающих коэффициент внутриклассовой корреляции и каппа, посредством выполнения следующих действий.

1. Находится общая порция положительных классификаций

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\,\overline{m}} x_i ,$$

где $\overline{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{n}$ – среднее число экспертов на объект.

Если число объектов велико (например, $n \geq 20$), то вычисляются средний межобъектный квадрат (mean square between subjects)

$$BMS = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m_i \overline{p})}{m_i} \qquad (7.7)$$

и средний внутриобъектный квадрат (mean square within subjects)

$$WMS = \frac{1}{n(\overline{m}-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(m_i - x_i)}{m_i}. \tag{7.8}$$

2. Формальной оценкой внутриклассового коэффициента корреляции является

$$r = \frac{BMS - WMS}{BMS + (m_0 - 1)WMS}, \tag{7.9}$$

где $m = \overline{m} - \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \overline{m})^2}{n(n-1)\overline{m}}$.

Если n очень велико, значения m_0 и $\overline{m}$ будут близки.

3. Заменив m_0 в (7.9) на $\overline{m}$, получают окончательное выражение для коэффициента внутриклассовой корреляции, т. е. для каппа:

$$\tilde{æ} = \frac{BMS - WMS}{BMS + (\overline{m}-1)WMS} = 1 - \frac{1}{n(\overline{m}-1)\overline{pq}} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i(m_i - x_i)}{m_i},$$

где $\overline{q} = 1 - \overline{p}$.

Статистика $\tilde{æ}$ для рассматриваемого случая имеет следующие свойства. Если пропорция положительных классификаций постоянна от объекта к объекту, т. е. $(x_i/m_i) = \overline{p}$ для всех i и $\overline{p}$ не равняется 0 или 1, имеется несогласованность внутри объектов, но не между объектами. В этом случае $\tilde{æ}$ принимает свое минимальное значение, т. е. $1/(\overline{m}-1)$.

Если пропорции x_i/m_i ведут себя в точности, как биномиальные пропорции с параметрами m_i и общей вероятностью p_i, то между объектами сходства столько же, сколько внутри объектов. В этом случае $\tilde{æ} = 0$.

Если любая пропорция x_i/m_i принимает одно из двух значений – 0 или 1, то имеется идеальная согласованность внутри объектов. В этом случае $\tilde{æ} = 1$.

4. Вычисляется стандартная ошибка $\tilde{æ}$:

$$S(\tilde{æ}) = \frac{1}{(\overline{m}-1)\sqrt{n\overline{m}_H}}\sqrt{2(\overline{m}_H-1)+\frac{(\overline{m}-\overline{m}_H)(1-4\overline{p}\overline{q})}{\overline{m}\,\overline{p}\overline{q}}}, \qquad (7.10)$$

где $\overline{m}_H = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{m_i}}$ – гармоническое среднее число экспертов на объект.

Гипотезу проверяют, сравнивая $Z = \dfrac{\tilde{æ}}{S(\tilde{æ})}$ с критическим значением стандартного нормального распределения.

Рассмотрим числовой пример с данными, приведенными в табл. 7.13. Для данной таблицы были получены следующие результаты:

$\overline{m} = \dfrac{81}{25} = 3{,}24$ – среднее число экспертов на объект;

$\overline{p} = \dfrac{46}{25\cdot 3{,}24} = 0{,}568$ – суммарная пропорция положительных классификаций;

$\sum\limits_{i=1}^{25}\dfrac{x_i(m_i-x_i)}{m_i} = 6{,}30$ – значение суммы из (7.7);

$\tilde{æ} = 1 - \dfrac{6{,}30}{25\cdot(3{,}24-1)\cdot 0{,}568\cdot 0{,}432} = 0{,}54$, что указывает на умеренную согласованность экспертов;

$$S(\tilde{æ}) = \frac{1}{(3{,}24-1)\sqrt{25\cdot 2{,}935}}\times$$

$$\times\sqrt{2\cdot(2{,}935-1)+\frac{(3{,}24-2{,}935)\cdot(1-4\cdot 0{,}568\cdot 0{,}432)}{3{,}24\cdot 0{,}568\cdot 0{,}432}} = 0{,}103;$$

$Z = \dfrac{0{,}54}{0{,}103} = 5{,}24$ указывает, что $\tilde{æ}$ значимо отличается от нуля.

Таблица 7.13. **Классификация n = 25 объектов, проводимая различными группами экспертов**

Объект i	Число экспертов m_i	Число положительных классификаций x_i	Объект i	Число экспертов m_i	Число положительных классификаций x_i
1	2	2	15	2	0
2	2	0	16	2	2
3	3	2	17	3	1
4	4	3	18	2	1
5	3	3	19	4	1
6	4	1	20	5	4
7	3	0	21	3	2
8	5	0	22	4	0
9	2	0	23	3	0
10	4	4	24	3	3
11	5	5	25	2	2
12	3	3	Сумма	81	46
13	4	4			
14	4	3			

Далее рассмотрим случай, когда число категорий $k \geq 2$. Обозначим через $\overline{p}_j$ общую пропорцию классификаций в j-ю категорию, через $\tilde{æ}_j$ – значение каппа для этой категории, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Было предложено в качестве общей меры согласованности экспертов брать взвешенное среднее

$$\hat{\bar{æ}}_j = \frac{\sum_{j=1}^{k} \overline{p}_j \overline{q}_j \tilde{æ}_j}{\sum_{j=1}^{k} \overline{p}_j \overline{q}_j}, \tag{7.11}$$

где $\overline{q}_j = 1 - \overline{p}_j$.

Выражение (7.11) при условии одинакового числа экспертов $m_i = m$ можно представить в ином виде. Если x_{ij} – число классификаций i-го объекта (i = 1, 2, …, n) в j-ю категорию (j = 1, 2, …, k), то, поскольку

$$m = \sum_{j=1}^{k} x_{ij},$$

$$\tilde{\text{æ}}_j = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}(m - x_{ij})}{nm(m-1)\bar{p}_j \bar{q}_j}; \tag{7.12}$$

$$\tilde{\text{æ}} = 1 - \frac{nm^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2}{nm(m-1)\sum_{j=1}^{k} \bar{p}_j \bar{q}_j}. \tag{7.13}$$

Формулы для стандартных ошибок $\tilde{\text{æ}}_j$ и $\tilde{\text{æ}}$, которые можно использовать для проверки гипотезы о равенстве соответствующего истинного значения нулю, имеют следующий вид:

$$S(\tilde{\text{æ}}_j) = \sqrt{\frac{2}{nm(m-1)}}; \tag{7.14}$$

$$S(\hat{\bar{\text{æ}}}_j) = \frac{\sqrt{2}}{\sum_{j=1}^{k} \bar{p}_j \bar{q}_j \sqrt{nm(m-1)}} \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{k} \bar{p}_j \bar{q}_j\right)^2 - \sum_{j=1}^{k} \bar{p}_j \bar{q}_j (\bar{p}_j \bar{q}_j)}.$$

Здесь $S(\tilde{\text{æ}}_j)$ не зависит от $\bar{p}_j$ и $\bar{q}_j$. Кроме того, (7.14) – частный случай выражения (7.10), когда все m_i равны, поскольку при этом $\bar{m} = \bar{m}_{ii} = m$.

Рассмотрим табл. 7.14, которая содержит данные результатов классификации каждого из n = 10 объектов m = 5 экспертами по k = 3 категориям.

Таблица 7.14. **Данные результатов классификации**

Объект	Число классификаций в j-ю категорию			
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$m = \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2$
1	1	4	0	17
2	2	0	3	13
3	0	0	5	25
4	4	0	1	17
5	3	0	2	13
6	1	4	0	17
7	5	0	0	25
8	0	4	1	17
9	1	0	4	17
10	3	0	2	13
Сумма	20	12	18	174

Выполненные расчеты привели к следующим результатам:

♦ общие пропорции равны: $\overline{p}_1 = 20/50 = 0{,}40$, $\overline{p}_2 = 12/50 = 0{,}24$, $\overline{p}_3 = 18/50 = 0{,}36$;

♦ числитель в (7.12) для первой категории $\sum_{i=1}^{k} x_{i1}(5 - x_{i1}) = 1 \cdot (5-1) +$ $+ 2 \cdot (5-2) + 3 \cdot (5-3) = 34$, значит,

$$\tilde{æ}_1 = 1 - \frac{34}{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}60} = 0{,}29;$$

аналогично $\tilde{æ}_2 = 0{,}67$ и $\tilde{æ}_3 = 0{,}35$;

♦ общее значение $\tilde{æ}$, согласно (7.13), будет

$$\hat{\bar{æ}} = 1 - \frac{10 \cdot 25 - 174}{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left(0{,}40 \cdot 0{,}60 + 0{,}24 \cdot 0{,}76 + 0{,}36 \cdot 0{,}64\right)} = 0{,}42$$

или, согласно (7.11),

$$\hat{\bar{æ}} = 1 - \frac{10 \cdot 25 - 174}{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left(0{,}40 \cdot 0{,}60 + 0{,}24 \cdot 0{,}76 + 0{,}36 \cdot 0{,}64\right)} = 0{,}42;$$

♦ для данных табл. 7.14

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{p}_j \overline{q}_j = 0{,}40 \cdot 0{,}60 + 0{,}24 \cdot 0{,}76 + 0{,}36 \cdot 0{,}64 = 0{,}653;$$

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{p}_j \overline{q}_j (\overline{q}_j - \overline{p}_j) = 0{,}40 \cdot 0{,}60 \cdot (0{,}60 - 0{,}40) + 0{,}24 \cdot 0{,}76 \cdot (0{,}76 - 0{,}24) +$$

$$+ 0{,}36 \cdot 0{,}64 \cdot (0{,}64 - 0{,}36) = 0{,}2074,$$

поэтому

$$S(\hat{\bar{\text{æ}}}) = \frac{\sqrt{2}}{0{,}653\sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4}} \sqrt{0{,}653^2 - 0{,}2074} = 0{,}072.$$

Поскольку $z = \dfrac{\hat{\bar{\text{æ}}}}{S(\tilde{\text{æ}})} = \dfrac{0{,}42}{0{,}072} = 5{,}83$, общее значение каппа существенно отличается от нуля (хотя ее величина указывает на весьма посредственную согласованность).

Согласно (7.14) приближенная стандартная ошибка любой из трех будет

$$S(\tilde{\text{æ}}_j) = \sqrt{\frac{2}{10 \cdot 5 \cdot 4}} = 0{,}10.$$

Все каппа значимо ($p < 0{,}01$) отличаются от нуля, хотя лишь $\tilde{\text{æ}}_2$ достигает значения, соответствующего довольно высокой согласованности.

Каппа-статистики первоначально разрабатывались для измерения степени согласованности экспертов, однако область их применения значительно шире. Они могут быть полезны при определении по категоризованным данным таких качеств, как "сходства", "соответствие", "кластерная структура", и других приложений.

7.5. Анализ согласованности экспертных оценок, представленных числовыми данными

Вопрос повышения точности и надежности экспертных оценок чрезвычайно важен для всех типов экспертиз.

Выбор статистических характеристик, применяемых при обработке точечных оценок, зависит от вида распределения экспертных оценок. Однако по вопросу о виде функции плотности распределения экспертных оценок нет единого мнения. Поэтому можно считать, что распределения точечных экспертных оценок могут быть унимодальными и полимодальными. Появление полимодального распределения свидетельствует о наличии в экспертной группе определенного числа экспертов с существенно различным мнением о значении оцениваемой величины. Вычисление статистических средних в этом случае не имеет смысла, так как они будут обладать определенной величиной смещения. В связи с этим рассмотрим подход, позволяющий повысить достоверность точечных экспертных оценок.

Пусть мнения, высказанные группой экспертов, представлены числовой выборкой вида

$$X = (x_1, x_2, x_3', \ldots, x_i, x_{i+1}', x_n), \tag{7.15}$$

где x' – значения, данные определенной подгруппой экспертов, отличающиеся от показаний основной группы. Удельный вес их определим как $0 < \varepsilon \le 0{,}5$. В (7.15) присутствует подсовокупность данных

$$X_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n), \quad X_0 \in X,$$

которая характеризуется соответствующей параметрической моделью вероятностного распределения $F_0(x)$, принадлежащей некоторому параметрическому пространству R, т. е. $F_0(x) \in R$. Однако наличие значений x' говорит о том, что исходное распределение $F(x)$ может располагаться в некоторой окрестности вероятностного пространства параметрической модели, которая представляется более реалистичной. Поэтому будем полагать, что распределение $F(x)$ исходной совокупности данных принадлежит полному параметрическому пространству G, т. е. $F_0(x) \in G$ и $R \in G$.

Таким образом, возникает задача ***классификации исходной совокупности экспертных данных*** X, при этом необходимо выделить подсовокупность данных $X_0 \in X$, вероятностное распределение которой соответствует определенному классу моделей на параметрическом пространстве R. Данная задача в приложении к экспертным высказываниям интерпретируется как выделение той большей подгруппы экспертов, мнения которых считаются согласованными.

Для решения поставленной задачи необходимо определить критерии, на основании которых могут быть построены решающие правила классификации. В качестве этих критериев используем такие понятия, как функция чувствительности и пороговые точки, описанные в работе.

Функция чувствительности описывает эффекты, которые отличают выделяющиеся наблюдения различных оценок, например выборочного среднего. Этим понятием формализуется смещение оценок, имеющее своей причиной появление хотя бы одного "засоряющего" наблюдения.

Пусть $T = \{T_n\}$ – некоторая последовательность оценок. Обозначим через $T_n(X)$ оценку T, построенную на выборке $X = (x_1, x_n)$, а через $T_{n+1}(x, X)$ – аналогичную оценку, построенную на выборке (x, x_i, x_n), где x – дополнительное значение, присоединенное к исходной выборке. Функция $\varphi_n(x, X) = T_{n+1}(x, X) - T_n(X)$ называется кривой чувствительности оценки T_n к добавлению одного изменения в точке x. На рис. 7.3 представлены кривые чувствительности для выборочного среднего, медианы и урезанных средних с различными уровнями усечения. В частности, для выборочного среднего $T_n = \overline{x}$

$$\varphi_n(x, X) = \frac{x}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} n \sum x_i = \frac{x}{n+1} - 0\left(\frac{1}{n}\right).$$

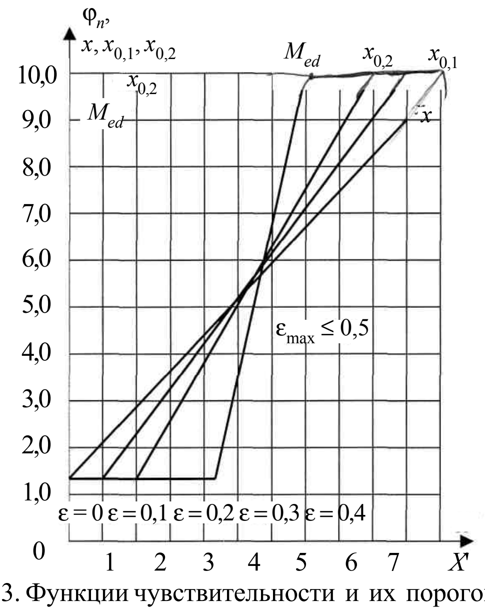


Рис. 7.3. Функции чувствительности и их пороговые точки

Для выборочной медианы в случае нечетной выборки, т. е. для $n = 2m + 1$, имеем

$$\varphi_n(x, X) = \begin{cases} 0{,}5\,(x_n - x_{n-1}), & x \le x_n; \\ 0{,}5(x - x_{m-1}), & x_m \le x \le x_{m+2}; \\ 0{,}5\,(x_{m+2} - x_{m+1}), & x \le x_{m+2}. \end{cases}$$

Здесь для удобства положено $x_{m+1} = 0$. Для урезанного среднего с отбрасыванием, например, двух крайних порядковых статистик главная часть φ_n с точностью до $0(1/n)$ имеет вид

$$\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{x_1}{n-1}, & x \le x_1; \\ \dfrac{x}{n-1}, & x_1 \le x \le x_n; \\ \dfrac{x_n}{n-1}, & x \le x_n. \end{cases}$$

Из рассмотрения кривых видно, что разность $T_{n+1}(x, X) - T_n(X)$ представляет собой при $x_m \le \; x \le x_{m+2}$ и $x_1 \le x \le x_n$ отрезок прямой с определенным углом наклона, а при условии $x \le x_m$, $x \le x_1$ и $x \ge x_{m+2}$, $x \ge x_n$ – константы. Отсюда следует, что кривая чувствительности для среднего арифметического не ограничена, поэтому одно резко выделяющееся наблюдение может привести к сколько угодно большому его смещению. В то же время для медианы и урезанного среднего кривые чувствительности ограничены. Так, например, для урезанного среднего смещение никогда не может превзойти $(x_n - x_1)/(n - 1)$.

Таким образом, рассмотренная функция характеризует меру чувствительности к ошибкам. В то же время ей присуща определенная ограниченность. По построению она оказывается только локальным понятием, поэтому возникает необходимость в определении особых точек кривых чувствительности, за которыми линейная аппроксимация теряет смысл.

Пороговая точка ε – это наименьшая доля ошибок (значений), которая определяет то расстояние от принятого в модели распределения, по достижении которого статистика становится совершенно ненадежной и неинформативной. Например, из рассмотрения кривых чувствительности (см. рис. 7.3) можно видеть, что выборочное среднее и выборочная медиана имеют соответственно пороговые точки $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0{,}5$, а усредненное среднее – пороговую точку $\varepsilon = \alpha$, равную уровню урезания.

Перейдем непосредственно к формированию решающих правил классификации на основе использования функций чувствительности, их пороговых точек и набору оценок типа "среднее": выборочного среднего $\bar{x}$, урезанных средних x_α с различными уровнями урезания и выборочной медианы x_{med}. Выбор такого типа оценок обусловлен известным фактором: они характеризуют только однородные совокупности данных, что и определяет понятие "класс".

Решение задачи описывается следующими итерациями.

1. Исходная совокупность данных X преобразуется в вариационный ряд вида $x_1 \le x_2 \le x_n$, и по нему вычисляются перечисленные выше оценки. На данном шаге решающее правило классификации имеет следующий вид:

$$X \in \begin{cases} S_{F_0(x)} \subset R, & \begin{array}{c} |\bar{x} - x_{\alpha 1}| \le \delta; \\ |\bar{x} - x_{\alpha 2}| \le \delta; \\ \ldots \\ |\bar{x} - x_{med}| \le \delta; \end{array} \\ S_{F(x)} \subset R, & \begin{array}{c} |\bar{x} - x_{\alpha 1}| \le \delta; \\ |\bar{x} - x_{\alpha 2}| \le \delta; \\ \ldots \\ |\bar{x} - x_{med}| \le \delta, \end{array} \end{cases} \tag{7.16}$$

где $X_\alpha = \dfrac{1}{n-2m} \sum\limits_{i=m+1}^{n-m} x_i$ – урезанное среднее уровня α $(0 \le \alpha \le 0{,}5)$; $\delta \ge 0$ – достаточно малая величина, не препятствующая установлению равенства между значениями полученных оценок; $S_{F0(x)}$, $S_{F(x)}$ – классы данных, характеризуемые строгими "загрязненными" параметрическими моделями.

При выполнении первого условия (7.15) делается вывод о том, что исходная выборка X характеризуется параметрической моделью (высказывания экспертов согласованы), при выполнении второго условия (7.16) – что в исходной выборке X присутствуют "засоряющие" значения x', которые характеризуют степень рассогласованности экспертных высказываний. Данные значения необходимо выделить с целью приведения X к распределению $F_0(x)$.

2. Для этого выполняется второй шаг итерационной процедуры, который заключается в том, что оценка $\bar{x}$ выводится из рассмотрения, задается пороговая точка, например ε = 0,1, и вычисляются усеченные оценки $x_{\alpha 1} = 0{,}1;\ x_{\alpha 2}, \ldots, x_{med}$.

На данном шаге решающее правило классификации принимает вид

$$X \in \begin{cases} S_{F_0(x)} \subset R, & \begin{array}{c} \left|\bar{x}_{\alpha 1} - x_{\alpha 2}\right| \le \delta; \\ \left|\bar{x}_{\alpha 1} - x_{\alpha 3}\right| \le \delta; \\ \ldots \\ \left|\bar{x}_{\alpha 1} - x_{med}\right| \le \delta; \end{array} \\ S_{F(x)} \subset R, & \begin{array}{c} \left|\bar{x}_{\alpha 1} - x_{\alpha 2}\right| \le \delta; \\ \left|\bar{x}_{\alpha 1} - x_{\alpha 3}\right| \le \delta; \\ \ldots \\ \left|\bar{x} - x_{med}\right| \le \delta. \end{array} \end{cases} \qquad (7.17)$$

Если выполняется первое условие (7.17), то можно сделать вывод, что после усечения исходного вариационного ряда по уровню α = 0,1 оставшаяся часть значений примет вид искомой параметрической модели $F_0(x)$. Выполнение второго условия (7.17) свидетельствует о том, что оценка $x_{\alpha 1}$ не справилась со всеми "засоряющими" значениями x', а значит, их удельный вес больше, чем заданный точкой $\varepsilon_1 = \alpha = 0{,}1$ пороговый.

3. В этом случае оценка $x_{\alpha 1}$ выводится из дальнейшего рассмотрения и задается очередная пороговая точка, например $\varepsilon_2 = 0{,}2$, вычисляются оценки $x_{\alpha 2} = 0{,}2,\ x_{\alpha 3}, \ldots, x_{med}$ и решающее правило классификации записывается в виде, аналогичном (7.16) и (7.17).

4. Итерационная процедура заканчивается при достижении порого-

вой точки $\varepsilon_{\max} = 0{,}5$, при которой x_{med} теряет свои свойства устойчивости и становится резко чувствительной оценкой по величине смещения. При дальнейшем увеличении ε ($\varepsilon > 0{,}5$) медиана опять восстанавливает свои свойства устойчивости (см. рис. 7.3), однако в этом случае "засоряющие" данные будут уже интерпретированы как однородные.

Необходимо отметить, что описанный подход позволяет работать не только с резко выделяющимися значениями данных, но и с данными, отличие которых от основной совокупности не может быть определено однозначно. Это дает возможность получать не только несмещенные, но и эффективные экспертные оценки.

7.6. Проверка согласованности экспертных оценок с помощью непараметрических критериев проверки гипотез

Экспертные оценки могут считаться достаточно надежными только при условии хорошей согласованности ответов опрашиваемых специалистов. Поэтому статистическая обработка информации, полученной от экспертов, должна включать в себя оценку степени согласованности мнений экспертов, в основе которой лежит процедура выделения их однородных групп.

Рассмотрим случай, когда эксперты не имеют никакой информации о функции распределения вероятностей событий. Тогда статистический анализ требует привлечения аппарата непараметрической статистики. Пусть имеется некоторая совокупность числовых выборок $\{X_i\}$, $i=\overline{1,k}$, полученная по высказываниям k экспертов, каждая из которых имеет одинаковый объем q_j, $j=\overline{1,n}$. Сформируем из них случайно чередующуюся последовательность и следующие гипотезы:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = \ldots = F_k(x); \quad H_1 : F_1(x) \neq F_2(x) \neq \ldots \neq F_k(x), \quad (7.18)$$

где $F(x)$ – некоторая функция распределения вероятностей, соответствующая высказываниям каждого из экспертов.

Нулевая гипотеза H_0 (гипотеза однородности, соответствующая согласованности мнений экспертов) состоит в том, что исследуемые выборки имеют одинаковые функции распределения и принадлежат одной генеральной совокупности. Альтернативная гипотеза H_1 свидетельствует об обратном.

Для проверки гипотез (7.18) используем непараметрический $2k$ клеточный критерий Брандта и Снедекора χ^2, в основе которого лежит составление таблицы сопряженности признаков (табл. 7.15). Значение критериальной статистики вычисляется по формуле

$$\chi^2 = \frac{q^2}{x(q-x)}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^2}{q_j} - \frac{x^2}{q}\right) \tag{7.19}$$

с ν степенями свободы. Здесь $\nu = k - 1$ – объем всех выборок; q_j – объем отельной j-й выборки; x – общее число элементов выборок с признаком "+"; x_j – частота признака "+" в j-й выборке.

Таблица 7.15. **Таблица сопряженности признаков**

Выборка	Признак		Σ
	"+"	"–"	
1	x_1	$q_1 - x_1$	q_1
2	x_2	$q_2 - x_2$	q_2
…	…	…	…
j	x_j	$q_j - x_j$	q_j
…	…	…	…
k	x_k	$q_k - x_k$	q_k
Σ	x	$q - x$	q

Нулевая гипотеза принимается, если вычисленное значение χ^2 меньше, чем табличное значение χ^2_ν. В случае, когда приходится анализировать небольшое число выборок, например $k = 2$, с числом степеней свободы $\nu = 1$, можно использовать точный критерий Фишера и таблицы размером 2×2 (табл. 7.16). Критериальная статистика при этом вычисляется по формуле

$$\chi^2 = \frac{q\left[x_1(q_2 - x_2) - x_2(q_1 - x_1)\right]^2}{\{[x_1 + (q_1 - x_1)][q_2 + (q_2 - x_2)](x_1 + x_2)[(q_1 - x_1) + (q_2 - x_2)]\}}, \tag{7.33}$$

где $q = x_1 + (q_1 - x_1) + x_2 + (q_2 - x_2)$.

Таблица 7.16. **Таблица сопряженности признаков 2×2**

Выборка	Признак		Σ
	"+"	"–"	
1	x_1	$q_1 - x_1$	$q_1 = x_1 + q_1 - x_1$
2	x_2	$q_2 - x_2$	$q_2 = x_2 + q_2 - x_2$
Σ	$x_1 + x_2$	$q_1 - x_1 + q_2 - x_2$	$q_1 + q_2 = q$

Таким образом, принятие нулевой гипотезы H_0 позволяет сделать вывод, что все исследуемые выборки являются однородными. Если же выполняется альтернативная гипотеза, то делается предварительный вывод о том, что выборки могут принадлежать, по крайней мере, к двум различным совокупностям A и B. Данное обстоятельство требует выполнения дополнительной проверки, подтверждающей вывод. С этой целью сформируем следующие гипотезы:

$$\begin{aligned} &H_{0A}: F_1^A(x) = F_2^A(x) = \ldots = F_m^A(x);\\ &H_{0B}: F_1^B(x) = F_2^B(x) = \ldots = F_m^B(x); \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned} &H_{1A}: F_1^A(x) \neq F_2^A(x) \neq \ldots \neq F_m^A(x);\\ &H_{1B}: F_1^B(x) \neq F_2^B(x) \neq \ldots \neq F_m^B(x); \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned} &H_{1A}: F_1^A(x) \neq F_2^A(x) \neq \ldots \neq F_m^A(x);\\ &H_{0B}: F_1^B(x) = F_2^B(x) = \ldots = F_m^B(x); \end{aligned} \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned} &H_{0A}: F_1^A(x) = F_2^A(x) = \ldots = F_m^A(x);\\ &H_{1B}: F_1^B(x) \neq F_2^B(x) \neq \ldots \neq F_m^B(x). \end{aligned} \tag{7.23}$$

Выполнение нулевых гипотез (7.20) окончательно подтверждает вывод о том, что выборки принадлежат только двум различным совокупностям. Выполнение альтернативных гипотез (7.21)–(7.23) является показателем того, что выборки, отнесенные первоначальной проверкой (7.18) только к двум совокупностям, в действительности относятся к большему числу классов.

Для проверки гипотез (7.21)–(7.23) используем более строгий непараметрический U-критерий Манна и Уитни, который проверяет нуль-гипотезу: две независимые совокупности выборок принадлежат одному классу и их функции распределения вероятностей равны. Для вычисления статистики U упорядочим $(q_A + q_B)$ – значения объединенной выборки по величине, причем каждому рангу припишем, к какой выборке он относится. Пусть сумма рангов в первой совокупности выборок равна b_1, второй – b_2. Вычисляем:

$$U_1 = q_A q_B + \frac{q_A\left(q_A + 1\right)}{2} - b_1;$$

$$U_2 = q_A q_B + \frac{q_B\left(q_B + 1\right)}{2} - b_2$$

– и проверяем правильность расчета по формуле

$$U_1 + U_2 = q_A q_B.$$

Искомая статистика есть меньшее из значений U_1 и U_2. Нуль-гипотеза отвергается, когда вычисленное U-значение меньше критического табличного значения $U(q_A + q_B)$. Для достаточно больших выборок (q_A и $q_B > 600$) справедлива аппроксимация

$$U\left(q_A + q_B\right) = \frac{q_A q_B}{2} \delta \sqrt{\frac{q_A q_B \left(q_A + q_B + 1\right)}{12}},$$

где δ – табличное значение нормального распределения для двух- или одностороннего критерия.

Для случая, когда величина уровня значимости не может быть заранее задана или нет таблиц критических значений $U(q_A + q_B)$ и когда объемы выборок не слишком малы (q_A и $q_B \geq 8$), используется выражение

$$\delta = \frac{\left|U - \frac{q_A q_B}{2}\right|}{\sqrt{\frac{q_A q_B (q_A + q_B + 1)}{12}}}.$$

Полученное значение δ сравнивается с таблицами стандартного нормального распределения. Если нужно сравнить между собой больше чем две независимые выборки, то выполняют попарное сравнение.

Пример. Положим, что число экспертов $k = 6$ и по высказываниям каждого из них формируется выборка значений $q = 120$. Произвольно сформируем таблицу сопряженности признаков "плюс" и "минус" (табл. 7.17). Вычислим значение статистики χ^2:

$$\chi^2 = \frac{720^2}{380 \cdot 340}\left[\frac{82^2}{120}+\frac{80^2}{120}+\frac{46^2}{120}+\frac{50^2}{120}+\frac{86^2}{120}+\frac{36^2}{120}-\frac{380^2}{720}\right]=19{,}66.$$

Поскольку полученное значение χ^2 = 19,66 больше, чем табличное $\chi^2_{(5;0,05)}$, нулевая гипотеза: выборки относятся к одной совокупности, т. е. однородные, – отклоняется. Результат данной проверки позволяет сгруппировать анализируемые выборки по принадлежности, по крайней мере, к двум совокупностям – A и B – и провести вторую проверку на однородность внутри каждой из этих совокупностей.

Таблица 7.17. **Таблица сопряженности признаков при k = 6**

Выборка	Признак		Σ
	"+"	"–"	
1	82	38	120
2	46	74	120
3	80	40	120
4	50	70	120
5	86	34	120
6	36	84	120
Σ	380	340	720

Например, к совокупности A относятся выборки со значениями признака "+": 82, 80, 86 (см. табл. 7.17), а к совокупности B – выборки 46, 50, 36. Сформируем, например, из выборок, принадлежащих B-совокупности, две упорядоченные выборки (табл. 7.18):

$$A_1\colon\ 34, 36, 38, 40, 46\,(q_1^b = 5);$$

$$A_2\colon\ 32, 35, 39, 41, 44\,(q_1^b = 5).$$

Вычислим:

$$U_1 = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot (5+1)}{2} - 28 = 12;$$

$$U_1 = 5 \cdot 5 + \frac{5 \cdot (5+1)}{2} - 27 = 13.$$

Таблица 7.18. **Упорядоченные выборки**

Ранг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значение	32	34	35	36	38	39	40	41	44	46
Выборка	A_2	A_1	A_2	A_1	A_1	A_2	A_1	A_2	A_2	A_1
$b_1 = 28$		+2		+4	+5		+7			+10
$b_2 = 27$	+1		+3			+6		+8	+9	

Так как $U_1 = 12 > U_{(5;\,0,5)}$ (табличное значение) и $U_2 = 13 > U_{(5;\,0,5)} = 4$, то принимается альтернативная гипотеза: выборки, составляющие совокупность B, – однородные, т. е. оценки экспертов согласованные. Таким образом, рассмотренный алгоритм позволяет при полном отсутствии у экспертов априорной информации о законе распределения вероятностей событий определить, по крайней мере, две группы экспертов, оценки которых не являются согласованными.

Контрольные вопросы и задачи

1. Охарактеризуйте основные задачи экспертных оценок.
2. Каковы задачи анализа экспертных оценок?
3. Что такое системное представление проблемы анализа экспертных оценок?
4. В чем заключается парадокс Кондорсе?
5. Основные положения метода Борда.
6. Принять решение и определить победителей с использованием метода Кондорсе при следующих вариантах распределения голосов по принципу и парадоксу Кондорсе:

а

Число голосующих	Предпочтения
2	$A \to B \to C$
8	$B \to C \to A$
23	$B \to A \to C$
10	$C \to B \to A$
8	$C \to A \to B$

Всего 51 чел.

б

Число голосующих	Предпочтения
23	$C \to B \to C$
17	$C \to A \to B$
2	$B \to A \to C$
10	$B \to C \to A$
8	$A \to B \to C$

Всего 60 чел.

в

Число голосующих	Предпочтения
7	$B \to C \to A$
5	$A \to B \to C$
25	$B \to A \to C$
12	$C \to A \to B$
6	$C \to B \to A$

Всего 55 чел.

7. Принять решение с использованием метода Борда:

а

Число голосующих	Предпочтения
7	$A \to C \to B$
2	$B \to C \to A$
18	$C \to B \to A$
3	$C \to A \to B$

Всего 30 чел.

б

Число голосующих	Предпочтения
14	$B \to C \to A$
6	$C \to B \to A$
3	$C \to A \to B$
7	$A \to C \to B$

Всего 30 чел.

в

Число голосующих	Предпочтения
11	$C \to B \to A$
9	$C \to A \to B$
2	$A \to C \to B$
8	$B \to C \to A$

Всего 30 чел.

ГЛАВА 8. СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

8.1. Характеристика системы поддержки принятия решений

Процесс автоматизации принятия решений явился стимулом к появлению и развитию так называемых систем поддержки принятия решений (СППР) – человеко-машинных систем, помогающих человеку в принятии сложных решений.

Под СППР, называемой за рубежом Decision Support System (DSS), подразумеваются интерактивные прикладные системы, которые обеспечивают конечным пользователям, принимающим решения, легкий и удобный доступ к данным и моделям с целью принятия решений в слабоструктурированных и неструктурированных ситуациях из различных областей человеческой деятельности.

Основная задача СППР состоит в сопоставлении предметных ситуаций и рекомендуемых вариантов решения: СИТУАЦИЯ $\rightarrow$ ВАРИАНТ РЕШЕНИЯ [11].

Данная схема реализуется на основе базы знаний (БЗ), находящейся в составе СППР, которая может быть построена различными способами. Она может быть настроена самим ЛПР в ходе анализа конкретной предметной ситуации, тогда она содержит описание ситуации выбора и решающее правило, принадлежащее ЛПР – пользователю СППР.

К другому виду СППР относятся такие системы, БЗ которых содержат решающие правила, полученные на основе предпочтений экспертов, знакомых с данной конкретной предметной областью. В промежутке между этими крайними случаями находятся СППР, включающие в себя как модели и решающие правила экспертов, так и некоторые решающие правила ЛПР.

Очевидно, что СППР, содержащие решающие правила опытных экспертов, близки к так называемым экспертным системам (ЭС). С практической точки зрения часто бывает трудно, если не невозможно, провести четкую границу между СППР и ЭС. Авторы работы [11] видят различие между указанными системами в следующем. При построении ЭС основное внимание уделяется способам представления знаний (что характерно для работ по искусственному интеллекту), структурам БЗ (отражающим представление о структурах долговременной памяти человека) и т. д. При построении СППР основное внимание направлено на сам метод принятия решений, на способ построения решающего правила. Таким образом, основным элементом СППР является метод принятия решений.

Важнейшая цель СППР – обеспечение технологией формирования информации, а также технологическая поддержка принятия решения в целом.

Технология поддержки решения, в отличие от технологии формирования традиционного отчета, выполняется не полностью автоматически, поскольку она осуществляется под управлением менеджера. СППР – это такая человеко-машинная система, в которой процессы формирования и использования информации не разделены. Промежуточный результат машинного этапа решения немедленно оценивается менеджером. Владея некоторым набором потенциально возможных вариантов технологии, а также понимая, какую информацию необходимо получить, менеджер будет формировать информацию, неформально оценивая ее на каждом технологическом шаге решения и в зависимости от этого выбирая следующий шаг, или другой метод, или другой технологический инструмент (программный модуль). Такой творческий процесс трудно, неэффективно или вообще невозможно описать заранее с помощью блок-схем, т. е. в классическом стиле традиционных отчетных систем с предопределенной технологией формирования отчетов.

Системы поддержки принятия решений ориентированы не на процесс, а на набор возможностей, интерактивно выбираемых менеджером. Таким образом, СППР должна предоставлять конечному пользователю не поддержку однозначно описанного процесса обработки данных, а набор возможностей, не зависящих от процесса. Такая творческая работа с СППР требует от менеджера глубоких знаний своей деловой сферы, высокого интеллекта, профессионального владения набором технологических возможностей компьютерной поддержки решений.

8.2. Обобщенная функционально-структурная СППР

Системы поддержки принятия решений являются основной категорией управленческих информационных систем, которые поддерживают менеджеров в процессе принятия неструктурированных и полуструктурированных решений. В СППР используются аналитические модели, специализированные базы данных, интерактивный процесс моделирования решения на компьютере, а также субъективные суждения пользователя. Иными словами, СППР – это мобильные, уникальные, зачастую разовые, сложные системы, которые управляются и контролируются менеджерами, использующими их для принятия специфических решений. Основными компонентами СППР являются: оборудование, программное обеспечение, данные, модели и труд менеджера (ЛПР).

В состав оборудования СППР входят рабочие станции с телекоммуникационными возможностями для обеспечения доступа к другим ресурсам.

Специфическое программное обеспечение СППР называют СППР-генераторами. Как уже отмечалось, электронные таблицы относят к ограниченным СППР-генераторам, специализированные генераторы – к развитым. Они включают в себя программные модули управления базами данных, моделями и диалогами. Модуль управления базами данных на основе возможностей СУБД обеспечивает создание, запрос, консолидацию и поддержку базы данных СППР. Модуль управления моделями обеспечивает построение и манипулирование моделями (пакетами моделирования из состава электронных таблиц, а также специально написанными программами). Модуль управления диалогом обеспечивает создание диалогов на интерфейсе между пользователем и СППР – контакт с пользователем через команды, меню, запросы, подсказки, пиктограммы, отчеты, графики [11].

База данных СППР создается для поддержки уникального решения и может содержать информацию из других БД (внутренних и внешних), данные из личных БД менеджера, а также итоговую информацию.

Человеческие ресурсы СППР – это "штаб" конечных пользователей-менеджеров, которые могут создавать свои небольшие СППР. Однако большие, сложные СППР, как программные продукты, создаются коллективом профессионалов в области обработки данных и группой высококвалифицированных менеджеров-экспертов.

Характерной отличительной чертой и важной составной частью СППР является использование базы моделей для поддержки решений. Кибернетика предоставляет различным наукам метод упрощения и анализа реальности с помощью построения моделей. Модели – это упрощенные абстракции реальных основных элементов системы и их отношений, существенных для принятия решения. Наряду со сферами науки и техники в сфере менеджмента и бизнеса также широко применяются специальные модели в качестве простого способа анализа и формализации деловых проблем. Обычно эти модели имеют табличный (матричный), математический или графический вид.

Использование базы моделей существенно отличает СППР от традиционных информационных систем. База моделей для СППР – это прежде всего специально организованный набор математических моделей (общецелевых и специфических).

Наметились два основных подхода к созданию СППР [11]: построение, использующее в готовом виде только некоторый инструментарий (например, электронные таблицы, специальные ППП, средства графики и т. д.), и построение на основе генератора СППР.

Генератор СППР представляет собой готовый программный продукт, позволяющий развить на его основе системы для конкретных применений в некоторой предметной области. В [11] указано на наличие 60 генераторов СППР, ориентированных на широкий круг задач из финансово-экономической области. Эти генераторы включают в себя, как правило, следующие интегрированные модули: построение моделей и интерактивное исследование моделей (анализ "что, если", позволяющий проверять различные предположения и проигрывать различные сценарии; анализ чувствительности и т. д.); прогнозирование; статистический анализ; генерирование отчетов; машинная графика. Если рассматривать генераторы СППР с точки зрения пользователя, то в их концептуальной архитектуре можно выделить пять основных компонент: управление интерфейсом пользователя; управление представлением; управление анализом; системное управление; управление извлечением данных (базой данных знаний).

Примером прототипа генератора СППР является KE01ME8, разработанный на ПЭВМ. В его состав входят такие компоненты: командный процессор, диалоговый процессор, процессор представления (в виде таблиц и графиков), управление анализом (регрессионный анализ), системные администратор и тренажер, три словаря (данных, графики и анализа в БД, в графической базе и в базе анализа (моделей)).

Обобщенная функциональная модель СППР включает в себя (рис. 8.1): интерфейс "Пользователь–система"; управление диалогом; управление базами данных, базами моделей и базами знаний; моделирование и решение проблем; инструментальное и сервисное обеспечение пользователей; БД, БМ, БЗ, базы текстов (БТ) [11].

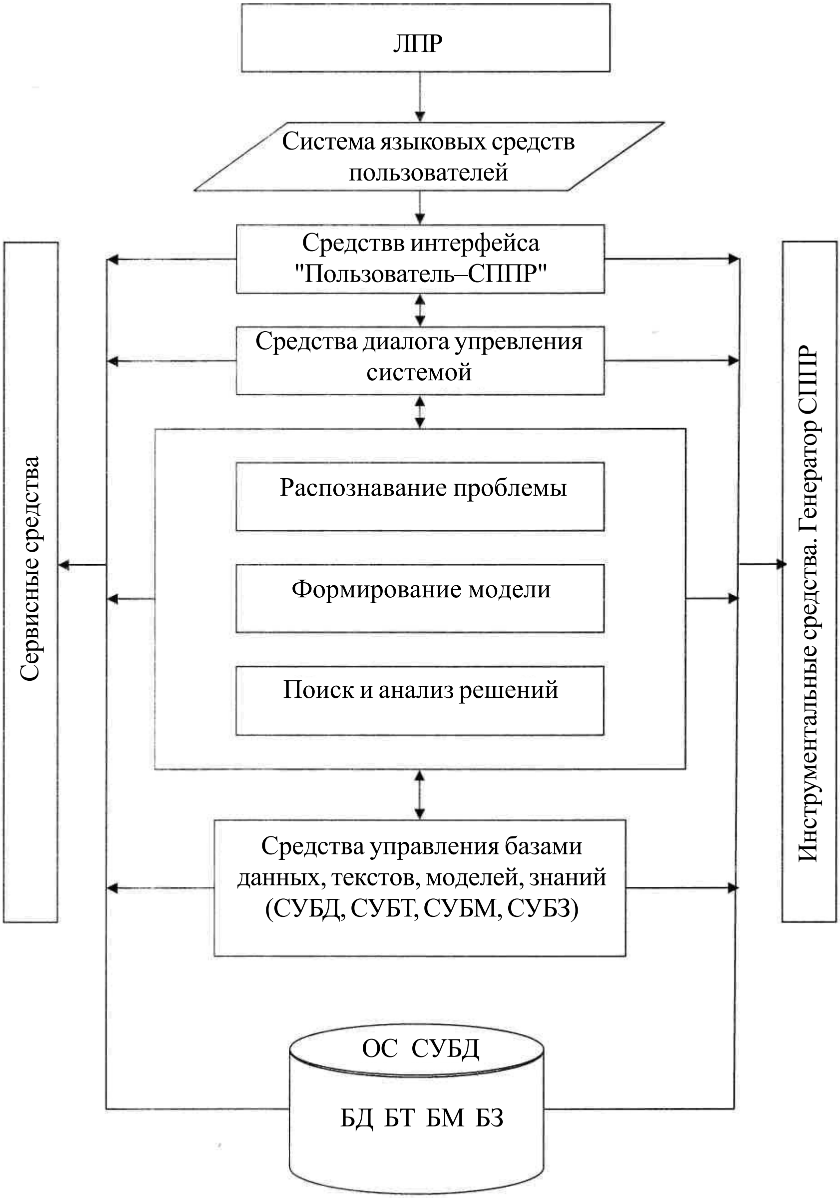


Рис. 8.1. Обобщенная функционально-структурная модель СППР

Интерфейс "Пользователь–СППР" должен обеспечивать удобство и эффективность работы пользователей, лучшую производительность их труда, снижение времени на подготовку и уменьшение ошибок. Он должен удовлетворять таким требованиям, как управление разнообразными стилями диалога и изменение их по выбору пользователей, наличие непроцедурных языковых средств общения (команды, меню), наличие средств представления результатов в различных формах и видах (тексты, таблицы, графика, цвет, голос и др.).

Современные СППР должны иметь развитые средства описания и манипулирования данными, поэтому в них широко используются СУБД различных типов для управления БД, БМ, БЗ. Система управления базой данных в составе СППР должна обладать такими возможностями в диалоговом режиме, как ввод, редактирование и тестирование данных, представление их в виде деловых таблиц и отчетов различных форматов, графическая и многоцветовая поддержка, общение с помощью меню, подсказок и команд на естественном языке, работа в режимах новичка и эксперта, самодокументирование и др. В составе СППР наиболее широко применяются реляционные и сетевые СУБД.

Управление диалогом должно удовлетворять требованиям современных развитых диалоговых систем. Оно строится на базе современных диалоговых систем как готовых компонентов. Подсистема диалога вместе с СУБД и СУБМ является триединым ядром СППР, отличающим эти системы от СУБД и информационных систем, с одной стороны, и ЭС – с другой.

Функциями, делающими СППР уникальной системой, являются диалоговое моделирование и решение задач ПР, управление БМ. Выделяются следующие: сбор информации о проблемной области; распознавание проблемы; формирование концептуальной и эмпирической моделей, их верификация и анализ; поиск допустимых решений; проверка обоснованности решения и генерация решения.

В СППР первого и второго поколений используется широкий набор моделей ПР: от моделей теории ПР и математических моделей (многокритериальные оптимизационные модели, эконометрические и др.) до имитационных моделей и моделей логического вывода.

Функциональная модель архитектуры СППР при ее реализации призвана обеспечивать всестороннюю поддержку ЛПР: модельную, информационную, интеллектуальную, диалоговую, сервисную и инструментальную [11].

Технология функционирования СППР основана на современной технологии поддержки процесса подготовки и принятия индивидуальных и коллективных решений, на средствах общения (команды, меню) и представления решений (тексты, таблицы, графики, диаграммы и т. п.).

Рассмотрим ключевые компоненты архитектуры СППР и связи между ними – подсистемы управления диалогом, данными и моделями. Управление диалогом приведено на рис. 8.2. Пользовательский интерфейс характеризует синтаксические аспекты взаимодействия и специфики устройств ввода/вывода.

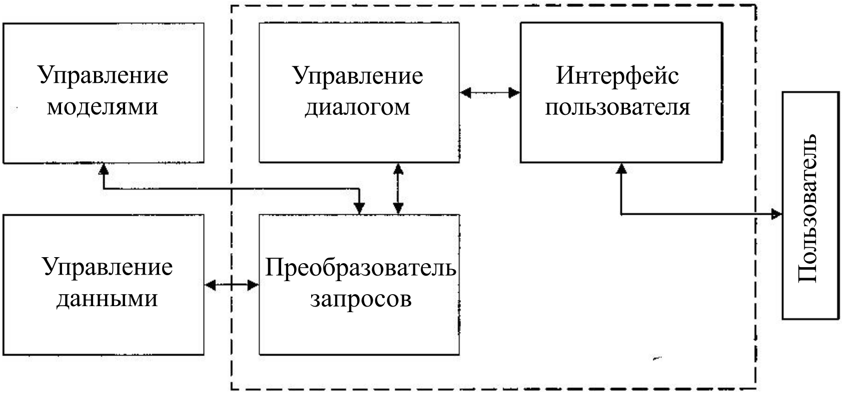


Рис. 8.2. Схема управления диалогом в СППР

Функцией управления диалогом определяется семантика взаимодействий, поддерживаемая контекстом взаимодействия – от строго предопределенного до свободного, направляемого пользователем. Преобразователь запросов обеспечивает двустороннюю трансляцию между пользовательским и внутренним словарями данных и моделей, а также обеспечивает доступ к данным и моделям системы.

Управление данными (рис. 8.3) занимает центральное место в СППР, так как уровни поддержки процесса выработки решения (от поиска и представления данных до предложения или выбора окончательных решений) основываются на доступе к данным. Справочник данных предназначен для поддержки определений данных, описания их типов и источников. Средства запросов используются для формулирования и интерпретации запросов, определения стратегии получения ответов. Функция переноса предназначена для установления внешних источников данных, выделения данных и связи СППР по данным с другими системами.

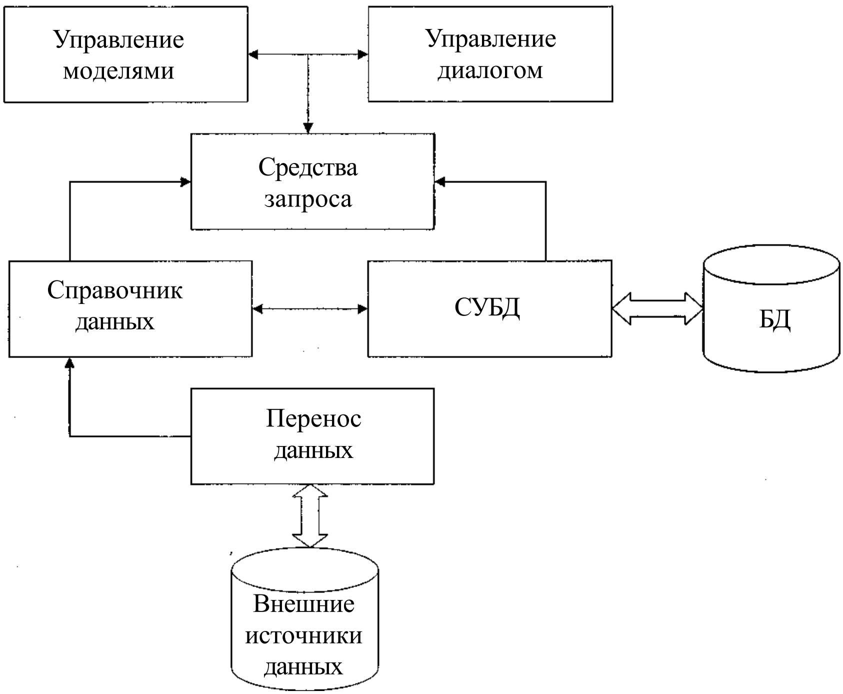


Рис. 8.3. Схема управления данными в СППР

Управление моделями (рис. 8.4) вытекает из природы задач принятия решений, которые лишь частично структурируемы и требуют для решения манипуляции не только данными, но и описывающими их моделями. Наличие явного управления моделями и вообще поддержка деятельности, связанной с моделированием, является специфической чертой СППР, которая отличает их от традиционных информационных систем. Возможность вызывать, испытывать в действии, изменять, комбинировать и проверять модели – важное средство ядра СППР. Средства управления моделями, приведенные на рис. 8.3, взаимосвязаны с управлением данными и диалогом. Система управления БМ и сама БМ предназначены для поиска, генерации, преобразования параметров и реконструкции моделей, для введения справочника моделей. Блок выполнения моделей управляет их прогонкой и осуществляет связь между ними.

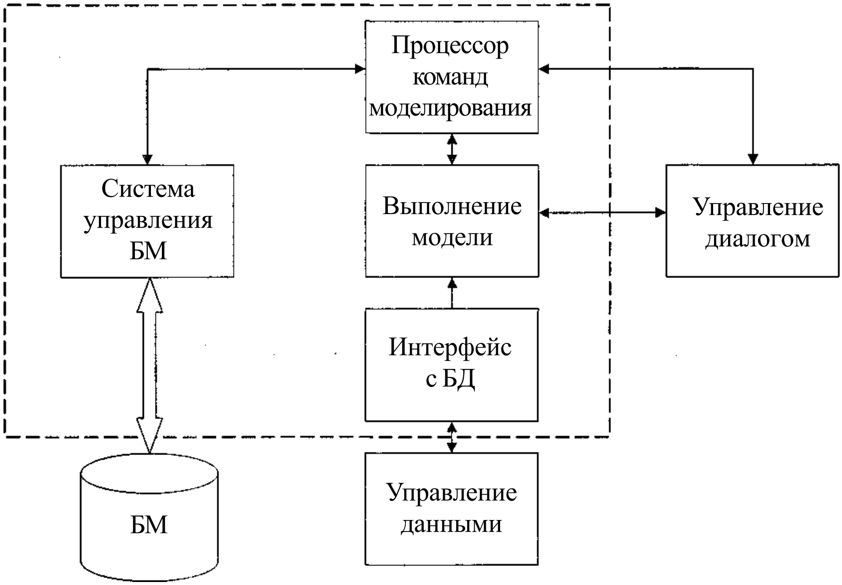


Рис. 8.4. Схема управления моделями в СППР

Процессор команд моделирования интерпретирует команды, получаемые в диалоге, и направляет выработанные команды в СУБМ и в блок выполнения моделей. Интерфейс с БД и БМ реализует поиск элементов в БМ, прогонки моделей и хранение выходной информации.

8.3. Принципы проектирования СППР

Основная проблема при проектировании СППР – анализ и выяснение процесса принятия решения ЛПР, определения ограничений, которые накладываются на процесс принятия решения, а также выбор методов и вычислительных процедур, позволяющих снять подобные ограничения. В общем случае проектирование СППР выполняется в три этапа [2]:

♦ декомпозиция процесса принятия решения на элементарные операции и описание выполнения этого процесса лицом, которое принимает решение;

♦ анализ конкретной задачи относительно принятия решения и проектирования СППР на функциональном уровне;

♦ подробная спецификация функций системы, ее реализация и верификация (тестирование).

Процесс проектирования представлен графически на рис. 8.5. Центральный ряд прямоугольников показывает, какие конкретно этапы или действия необходимо выполнить, чтобы спроектировать систему. Для выполнения конкретных этапов необходимо иметь в распоряжении специальный инструментарий, а также описание результата выполнения каждого этапа. Виды инструментария и спецификации результатов приведены соответственно слева и справа от центрального ряда.

Процесс проектирования начинается с выбора задачи, для решения которой необходимо создать систему поддержки принятия решений. В соответствии с рис. 8.5 на первом этапе выполняется декомпозиция задачи на элементарные операции и описывается выполнение этого процесса лицом, которое принимает решение. Основная цель этого этапа состоит в следующем:

1) определить преграды ("узкие места"), которые необходимо преодолеть при принятии решений с помощью проектируемой СППР;

2) определить набор компьютерных алгоритмов, которые нужно использовать для преодоления "узких мест", связанных с оперативным принятием правильных решений.

Для того чтобы правильно решить задачу проектирования СППР, необходимо максимально структурировать описание процесса принятия решения. Такая структура представляется подробным, но четко определенным протоколом, в котором указывается, какие данные необходимо собрать, и описываются все частные решения, которые должны быть приняты при проектировании СППР. Результатом выполнения этого этапа является структурированная таблица, в которую сводятся все результаты, относящиеся к декомпозиции проблемы проектирования СППР.

Важный этап при построении СППР – анализ ситуации принятия решений, которую целесообразно представлять в виде таблицы.

Рис. 8.5. Когнитивный процесс проектирования СППР

Не менее важным вопросом является определение ее функций. Современные технологии проектирования СППР дают возможность использовать соответственно шесть функций для поддержки принятия решений со стороны ЛПР [2]:

- ♦ инструментарий, этапы, промежуточные продукты;
- ♦ ситуация принятия решения: название ситуации;
- ♦ динамика задачи: тип динамики – итерации в замкнутом цикле, последовательность действий или одноразовое действие;
- ♦ ситуативные цели: цель наивысшего уровня, определяющая ситуацию и выраженная через события – физические или любые другие, которые можно наблюдать;
- ♦ критерии оценки: перечень индивидуальных критериев, при помощи которых будет оцениваться возможное решение;
- ♦ физический процесс: краткое описание (одно предложение) основного процесса, относительно которого принимается решение.

Информационная поддержка

Входы: перечень информации, которая может быть использована при принятии решений и может изменить значение в процессе работы.

Выходы: перечень информации, которая создается в процессе принятия решения, например, относительно различных аспектов решения.

Параметры: перечень информации, которая может быть использована при принятии решений и не изменяется в течение одной ситуации, но может изменяться в дальнейшем.

Промежуточный анализ: перечень этапов процесса принятия решения, которые выполняет ЛПР, принимая решение без компьютера.

Представление ситуации: короткое описание принятия решений ЛПР и используемых средств (лингвистические, визуальные и т. п.).

Необходимые суждения: перечень эвристических суждений, которые должно выполнить ЛПР при принятии решения.

1. *Моделирование процесса*. Используя существующие модели реальных процессов (или создавая новые), можно создавать подсистемы прогнозирования их протекания и подсистемы синтеза оптимальных решений на основе текущих экспериментальных данных (измерений).

2. *Моделирование критериев*. При помощи математических методов можно найти математические выражения или правила для автоматического объединения атрибутов, которые характеризуют разные варианты решений, что снимает когнитивные ограничения ЛПР.

3. *Информационный менеджмент*. Для хранения, чтения и обработки информации, данных, знаний используют современные компьютерные технологии. Благодаря этому значительно расширяются возможности ЛПР по принятию решений и обработке данных.

4. *Автоматизированный и полуавтоматизированный анализ и логический вывод*. Для частичной или полной автоматизации процесса логического вывода необходимо использовать методы искусственного интеллекта и численные методы. Это даст возможность повысить качество результата и уменьшить время на решение подобной задачи.

5. *Способы поддержки представления результатов*. Для того чтобы реализовать функции доступа к другим СППР, базам данных и знаниям, необходимо применять средства компьютерной графики и инструментарий для обработки языков.

6. *Повышение качества суждений*. С целью устранения систематических ошибок, которые вытекают из некоторых количественных эвристических суждений человека, необходимо внедрять статистические и другие методы коррекции результатов.

При выборе технологии (методов) для реализации СППР используются следующие виды математического инструментария [2]:

- математические модели реальных процессов, для руководства которыми или контроля которых создается СППР;
- модели выбора возможных альтернатив при поиске решения;
- инструментарий для информационного менеджмента;
- методы автоматизированного анализа/логического вывода;
- методы и инструментарий для представления результатов;
- методы реализации и повышения качества суждений.

Каждая категория состоит из ряда конкретных методов, которые могут быть использованы в конкретных случаях создания системы с целью реализации функций поддержки. Организация методов в пределах каждой категории базируется на специфических чертах или измерениях, которые определяют степень их производительности в конкретном случае.

Рассмотрим более подробно выбор инструментария для информационного менеджмента.

Информация поступает в СППР не менее чем в двух видах: данные, которые характеризуют значения конкретных атрибутов или факты относительно реальной ситуации, и знания, которые структурно и семантически описывают предыдущий опыт и дают возможность экстраполировать новые ситуации. Если некоторые данные характеризуют ту часть проблемы, о которой ЛПР имеет определенные знания, то говорят, что эти данные конкретизируют знания.

Очевидно, что сами по себе данные, без знания того, как их интерпретировать, смысла не имеют. С другой стороны, знания сами по себе, без конкретных данных можно характеризовать как "интересные", но применить их невозможно. При помощи этого определения можно сформулировать две разные проблемы информационного менеджмента, которые встречаются при принятии решений, т. е. ЛПР может:

- ♦ иметь потенциально полезные данные, но не иметь достаточно знаний для их интерпретации;
- ♦ иметь потенциально полезные знания, но не иметь конкретных данных, чтобы применить эти знания.

Для многих ситуаций, связанных с принятием решений, характерно присутствие одной или обеих этих проблем. Первая проблема особенно характерна для систем реального времени, поскольку возможности ЛПР относительно обработки данных ограничены. При ограниченном объеме рабочей памяти и сравнительно длинном цикле работы когнитивного процессора для ЛПР может понадобиться довольно длинный отрезок времени, чтобы выполнить анализ данных и получить полезную для дальнейшего рассмотрения информацию. В таких случаях умственную работу ЛПР необходимо поддержать методикой (методом) менеджмента данных.

Проблема другого типа связана с отсутствием необходимого обучения и опыта ЛПР. Здесь играет роль также специфическая архитектура процессора обработки данных человеческого организма. Знания, приобретенные человеком, сохраняются в долгосрочной памяти и "читаются" оттуда при помощи семантических методов, т. е. по смыслу. Такой тип доступа к памяти характеризуется высокой скоростью, но низкой надежностью. Люди часто не могут вспомнить ту часть знания или данных, которая срочно необходима в конкретный момент времени. Эта проблема стоит особенно остро при работе в режиме реального времени. Ее решают при помощи методов менеджмента знаний.

Правила выбора метода менеджмента данных приведены на рис. 8.6. Поскольку необходимость управления структурами данных определяется внешними условиями, правила базируются на характеристиках информационной среды ситуации принятия решений. Если данные изменяются перед каждым сеансом принятия решений, то информационную среду называют динамичной, в противном случае – статичной.

Отдельный случай менеджмента данных возникает в динамичной информационной среде, когда ЛПР ставит требование высветить изменения значений множества данных, т. е. требование мониторига.

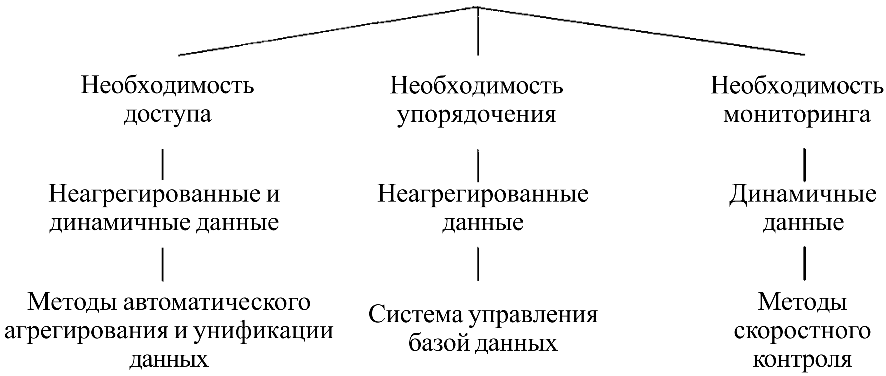


Рис. 8.6. Выбор метода управления данными

8.4. Краткий обзор существующих СППР

Имеется большое количество СППР различного уровня, назначения, отраслевой или функциональной принадлежности:

СППР для решения сложных комплексных задач предприятия (например, для решения задач стратегического планирования), называемые институциональными;

СППР для решения относительно несложных одноразовых проблем, называемые "ad hoc" (специальные, для данного случая);

СППР для решения проблем в конкретных отраслях (машиностроении, банковском деле), относящиеся к отраслевым или функциональным (финансы, маркетинг).

Известны также СППР государственного уровня.

Возможно комбинирование обычных программных продуктов, выпускающих отчеты, с СППР. Практически это может осуществляться переключением в автономный режим работы пользователя, копированием ряда файлов базы данных и предоставлением пользователю возможности свободного, интерактивного аналитического моделирования средствами базы моделей СППР.

В настоящее время развитые специализированные СППР признаны главной категорией информационных систем в области управления проектами. На программных рынках актуального программного обеспечения менеджмента проектов можно выделить ряд программных продуктов. Среди производителей программных пакетов наиболее известны: фирма "Альт" (пакеты Альт-Инвест, Альт-Финансы, Альт-План и др.); фирма "ПроИнвест Консалтинг" (пакеты Biz Planner, Project Expert-4, Project Expert-5, Project Expert-6, Questionnari & Risk, Forecast Expert и др.); фирма "ИнЭк" (пакеты Инвестор, Аналитик и др.); корпорация "Галактика" (система "Галактика"), корпорация "Primavera" (Sure Trak Project Manager 1.5) и др.

Рассмотрим наиболее универсальные программные продукты из числа перечисленных.

Прежде всего остановимся на СППР ***Project Expert-6***, относящейся к новому поколению программ для разработки инвестиционных проектов и контроля за их реализацией. Возможности этой компьютерной системы позволяют создавать финансовую модель нового или действующего предприятия вне зависимости от его масштабов и отраслевой принадлежности. Основное предназначение этого инструмента – планирование и анализ эффективности инвестиций через разработку профессионального бизнес-плана развития действующего предприятия или создания нового, независимо от рода деятельности. Как и программные продукты других фирм-разработчиков, Project Expert-6 создан на базе эффективной имитационной модели денежных потоков в соответствии с методическими рекомендациями ведущих международных финансовых институтов с учетом специфики стран с переходной экономикой.

К отличительным особенностям Project Expert относится структурная характеристика программы, связанная с разработкой специального модуля "Инвестиционный план", на базе которого строятся сетевой график проекта и диаграмма Гантта. Данный модуль представляет собой профессиональную систему создания календарных планов, включает в себя формирование списка ресурсов, описание характеристик объектов инвестирования непосредственно в календарном плане и др. Выходная информация, формируемая пакетом Project Expert, структурирована в следующих форматах: отчет о прибылях и убытках, баланс, отчет о движении денежных средств, а также расчет, отражающий финансовое состояние проекта (рентабельность, ликвидность, эффективность инвестиций).

Все программы семейства Project Expert позволяют проводить количественный анализ рисков на уровне анализа чувствительности и сценарного подхода, иллюстрировать исследование графическими материалами. Программа содержит блок оценки риска (анализ чувствительности) – таблицу, содержащую возможные факторы риска. Оценка каждого фактора осуществляется пользователем на основе субъективного опыта, а программа выдает интегральную оценку рискованности осуществления проекта.

Особое место в сфере анализа рисков занимает пакет ***Questionnaire & Risk***, направленный на качественный аспект анализа и базирующийся на экспертном подходе. Модули этого продукта являются специализированным инструментом, который позволяет проводить профессиональную экспертизу инвестиционных процессов средствами качественного анализа. Основанные на использовании экспертных оценок, они предоставляют пользователю удобный механизм оценки эффективности проекта при различных вариантах и условиях. Модули пакета Questionnaire & Risk, являясь самостоятельными программными продуктами, дополняют Project Expert до системы, обеспечивающей полную организационно-технологическую поддержку инвестиционного процесса.

Их совместное использование позволяет охватить все ключевые стадии процесса анализа инвестиций: предварительный анализ предложений; первоначальный отсев; экспертизу проекта, включая финансовый анализ, анализ риска, заключительный анализ и принятие решения о финансировании проекта.

Программа ***Forecast Expert*** предназначена для уменьшения рисков принимаемых решений при управлении большими коммерческими проектами с помощью всестороннего рассмотрения различных прогнозов. Программа используется при прогнозировании объема продаж и доходов компании, спроса на услуги и изделия, курсов валют, акций и фьючерсов, деловой активности участников рынка и др.

В программе реализована широко признанная в мировой практике прогнозирования сезонная модель авторегрессии интегрированного скользящего среднего Бокса–Дженкинса. Результаты представляются в табличном и графическом виде, а также сохраняются в файлах. Программа Forecast Expert может строить прогноз одного ряда в зависимости от поведения другого, что может быть полезным при прогнозе стоимости изделия, в ценообразовании которого один фактор играет определяющую роль (например, стоимость стального проката в зависимости от цены на электроэнергию).

Audit Expert – это программа, специализированная на проведении комплексного анализа финансового состояния и результатов проектной деятельности. Основной исходной информацией для анализа служат финансовые отчеты, а дополнительной – описание структуры активов, собственного капитала, а также специальные таблицы по структурам пользователя.

Информационным продуктом системы являются аналитические таблицы, соответствующие требованиям Международных стандартов бухгалтерского учета. По данным полученных таблиц вычисляются показатели баланса на основе детального описания структуры активов и пассивов проекта; стандартные показатели ликвидности, устойчивости, рентабельности и деловой активности предприятия; собственные финансовые показатели; сравнительные финансовые показатели (в сравнении со среднеотраслевыми или показателями других предприятий); горизонтальный анализ финансовых данных, характеризующий изменения отдельных компонентов финансовой отчетности по годам, и др.

Одной из характерных тенденций на зарубежных и отечественных рынках программных продуктов является рост продаж комплексных корпоративных информационных систем. Такие системы, как правило, охватывают практически все основные управленческие процессы в проектах. В качестве примеров рассмотрим систему Sure Track (Project Manager 1.5) фирмы "Primavera" (Великобритания) и программный продукт "Галактика", разработанный корпорацией "Галактика".

Основной особенностью ***Sure Track*** является возможность реализовать в управлении проектами следующие функции:

- моделирование групп проектов (выполнение 10000 работ на проект, расчет расписания и разрешение ресурсных конфликтов, анализ освоенного объема работ, одновременный доступ к проектам внутри проектных групп, шаблоны проектов и др.);
- расчет расписания (расчет критического пути, вычисление свободного, полного и отрицательного резервов времени, календари работ и ресурсов, определение дат приостановки и возобновления для выполняющихся работ, автоматическая и ручная корректировка работ и др.);
- управление ресурсами и стоимостью (расчет ресурсных календарей, разрешение ресурсных конфликтов с настраиваемыми приоритетами, стоимость и доходность единицы ресурса, графики движения денег и освоенного денежного объема, отслеживание бюджета и факти-

ческих затрат, расхождение с целевым планом по стоимости, расписанию и бюджету);

♦ презентации, отчеты, графики (неограниченное число экранных макетов для презентаций, многократное использование экранных макетов в любом проекте, более 40 настроенных отчетов и графиков и др.);

♦ обмен данными, который обеспечивается встроенной электронной почтой для различных запросов об изменениях в проектах.

Система ***"Галактика"*** обеспечивает выполнение следующих функций:

♦ детальную проработку предметной области проекта на этапах системных исследований и системного анализа;

♦ качественную и быструю программную реализацию сложных проектов за счет применения современных методов разработки программного обеспечения (прототипирования, CASE-технологии и др.);

♦ техническую и методическую поддержку на этапах системного внедрения и системной эксплуатации;

♦ настройку и модернизацию компьютерного и телекоммуникационного оборудования.

Система "Галактика", как многопользовательская система управления проектами, разработана под комплекс следующих основных требований:

♦ адаптивность по отношению к профилю проекта за счет параметров, позволяющих настроить систему на специфику хозяйственной, финансовой и производственной деятельности организации-пользователя;

♦ разграничение оперативно-управленческих и финансово-учетных задач при полной их интеграции на уровне базы данных;

♦ поддержка распределенных баз данных для обеспечения информационного взаимодействия многоофисных корпораций и территориально удаленных подразделений;

♦ охват всего спектра типовых производственных и административных функций;

♦ единообразие пользовательского интерфейса для всех решаемых задач;

♦ предоставление удобного инструментария для развития системы пользователем;

♦ ускоренная подготовка системных администраторов по эксплуатации системы.

Корпоративные информационные системы в дальнейшем будут оказывать все большее влияние на теорию и практику менеджмента проектов.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризуйте основное различие между экспертными системами и системами поддержки принятия решений.
2. Дайте характеристику основных компонент систем поддержки принятия решений.
3. Что такое генераторы систем поддержки принятия решений?
4. Какова общая функциональная модель системы поддержки принятия решений?
5. Представьте схему управления диалогом в СППР.
6. Что такое схема управления данными в СППР?
7. Что такое схема управления моделями в СППР?
8. Дайте характеристику основных этапов проектирования СППР.
9. Представьте характеристику формата таблицы для описания процесса принятия решений.
10. Охарактеризуйте выбор метода управления данными.
11. Представьте классификацию систем поддержки принятия решений.
12. Дайте характеристику СППР Project-Expert-6, "Галактика".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андрейчиков А.В.*, *Андрейчикова О.Н.* Оценка и выбор инвестиционных проектов с использованием многокритериальных методов теории принятия решений // Вестник машиностроения. – 2002. – № 8. – С. 54–58.

2. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1980. – 206 с.

3. *Заде Л.* Лингвистическая переменная и теория нечетких множеств. – М.: Мир, 1979. – 168 с.

4. *Емельянов С.В.*, *Ларичев О.И.* Многокритериальные методы принятия решений. – М.: Знание, 1985. – 32 с.

5. *Кини Р.*, *Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях. – М.: Радио и связь, 1981. – 304 с.

6. *Клебанова Т.С.*, *Раевнева Е.В.* Теория экономического риска. – Х.: ИД "ИНЖЕК", 2007. – 207 с.

7. *Коваленко И.И.* Методы поддержки принятия решений. Системные аспекты. – Николаев: Илион, 2007. – 43 с.

8. *Корченко А.Г.* Построение систем защиты информации на нечетких множествах. – К.: МК-Пресс, 2006. – 316 с.

9. *Ларичев О.Н.* Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2000. – 296 с.

10. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация. Методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

11. *Редько В.Н.*, *Сергиенко И.В.* Прикладные программные системы. – К.: Наукова думка, 1992. – 316 с.

12. *Саати Т.*, *Керис К.* Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 223 с.

13. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993. – 278 с.

14. *Таха Х.* Введение в исследование операций: В 2 кн. – М.: Мир, 1985. – 496 с.

15. *Штоер Р.* Многокритериальная оптимизация. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………………... 3
Глава 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОБЛЕМЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ…………………………...……………………… 5
1.1. Основные понятия и определения теории принятия решений. 5
1.2. Роль людей в процессе принятия решений…………………… 7
1.3. Понятие неопределенности в задачах принятия решений…... 9
1.4. Типы проблем принятия решений………………...……… 14
1.5. Типы задач принятия решений…………………………...…. 15
1.6. Системное представление основных аспектов проблемы принятия решений……………………………………………………….. 18
Глава 2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ……..……………..……… 22
2.1. Роль и место методов исследования операций в проблеме принятия решений……………………………………………………….. 22
2.2. Транспортная задача линейного программирования…………. 23
2.3. Динамическое программирование на основе принципа оптимальности Беллмана……………………………………………… 30
Глава 3. МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ И ТЕОРИИ ИГР…………………………………………………………… 38
3.1. Характеристика критериев принятия решений в условиях неопределенности…………………………………………………… 38
3.2. Критерий Лапласа……………………………………………… 39
3.3. Минимаксный (максиминный) критерий……………………… 41
3.4. Критерий Сэвиджа…………………………………………… 41
3.5. Критерий Гурвица……………………………………………. 43
3.6. Краткая характеристика теории игр………………………… 44
3.7. Оптимальные решения в играх двух лиц с нулевой суммой… 45
3.8. Смешанные стратегии в играх……………………………… 47
Глава 4. ТЕОРИЯ ПОЛЕЗНОСТИ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА………………………………………… 53
4.1. Основные положения теории полезности…………….……….. 53
4.2. Дерево решений……………………………………………… 55
4.3. Максимизация ожидаемой полезности………………………... 59
4.4. Построение функции полезности……………………………… 62

Глава 5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ………………..……………………………………….. 66
5.1. Основные положения теории нечетких множеств…………..... 66
5.2. Функции принадлежности и методы их построения………… 70
5.3. Многокритериальный выбор альтернатив на основе пересечения нечетких множеств……………………………………………… 80
5.4. Многокритериальный выбор альтернатив на основе нечеткого отношения предпочтения…………………………………………… 81
5.5. Многокритериальный выбор альтернатив с использованием правила нечеткого вывода……………………………………………... 83
5.6. Ранжирование альтернатив на множестве лингвистических векторных оценок……...……………………………………………… 84
5.7. Анализ и оценка инвестиционных проектов с использованем теории нечетких множеств……………………………………….. 86
Глава 6. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ……...…………………..………... 91
6.1. Общая характеристика метода анализа иерархий..…………… 91
6.2. Основные этапы метода аналитической иерархии...………….. 92
6.3. Примеры применения метода аналитической иерархии…..…. 100
Глава 7. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК……. 115
7.1. Характеристика задач анализа экспертных оценок………….... 115
7.2. Анализ ранговых экспертных оценок………………………… 118
7.3. Анализ согласованности экспертных оценок, представленных результатами попарных сравнений………………………………… 122
7.4. Анализ согласованности экспертных оценок, представленных категоризированными данными……………………………… 129
7.5. Анализ согласованности экспертных оценок, представленных числовыми данными……………………………………….. 143
7.6. Проверка согласованности экспертных оценок с помощью непараметрических критериев проверки гипотез…………………… 149
ГЛАВА 8. СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ. 156
8.1. Характеристика системы поддержки принятия решений...….. 156
8.2. Обобщенная функционально-структурная СППР…………….. 157
8.3. Принцип проектирования СППР……………………………… 164
8.4. Краткий обзор существующих СППР………………………… 170
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……………………………………… 176

УДК 519.8
ББК 22.18

Коваленко І.І., Фаріонова Т.А., Приходько С.Б.

К 56 Методи прийняття рішень: Навчальний посібник. – Миколаїв: НУК, 2009. – 180 с.

Розглянуто методи прийняття рішень, що базуються на сучасних теоріях дослідження операцій; статистичних рішень та ігор; на методі аналізу ієрархій; методах аналізу експертних оцінок.

Посібник розрахований на студентів, аспірантів і спеціалістів, які займаються задачами прийняття рішень.

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Ігор Іванович
ФАРІОНОВА Тетяна Анатоліївна
ПРИХОДЬКО Сергій Борисович

МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Навчальний посібник

(*російською мовою*)

Редактор *Н.О. Шайкіна*
Комп'ютерна правка та верстка *М.В. Удод*
Коректор *М.О. Паненко*
Дизайн обкладинки *Л.М. Струкачова*

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 09.07.09. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 10,3. Обл.-вид. арк. 11,1.
Тираж 100 прим. Вид. № 6. Зам. № 108. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

ДЛЯ НОТАТОК