

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О. Б. Шнейдер, П. В. Лук'яненко, Н. Р. Книрік

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт з дисципліни
"Сучасна теорія управління"

Частина 1

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2004

УДК 65.011.56(076)

Шнейдер О.Б., Лук'яненко П.В., Книрік Н.Р. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни "Сучасна теорія управління". – Миколаїв: НУК, 2004. – Ч. 1. – 68 с.

Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

Методичні вказівки містять п'ять лабораторних робіт з дисципліни "Сучасна теорія управління" і включають теоретичні основи курсу, приклади виконання завдань до лабораторних робіт, розв'язання задач з основних розділів дисципліни.

Призначено для студентів четвертого курсу спеціальності 7.080401 "Інформаційні управляючі системи та технології", а також для всіх студентів напрямку "Комп'ютерні науки".

Рецензент канд. техн. наук, проф. В.І. Тімофєєв

ВСТУП

Мета методичних вказівок – проілюструвати прикладами методи сучасної теорії управління; навчити студентів вирішувати складні задачі управління, реалізуючи їх сучасними мовами програмування, а також у середовищі MatLab із використанням пакета прикладних програм Control System Toolbox.

Структура методичних вказівок: кожний розділ містить дані про ціль роботи, постановку задачі, необхідні теоретичні відомості, приклади виконання робіт. Пропонуються завдання до лабораторних робіт, а також задачі для самостійного розв’язання, у тому числі індивідуальні (залежать від параметрів m – остання цифра номера навчальної групи – і n – номер студента за списком групи).

Вказівки містять методики і приклади розв’язання задач аналізу вихідних процесів і стійкості лінійних безупинних систем управління при детермінованих і випадкових впливах. Використовуються такі форми опису систем, як диференціальні рівняння, перехідні функції, інтегральні та спектральні перетворення. В основі викладу лежить уявлення про систему як про різноманітні (рівнобіжні, послідовні, із зворотним зв’язком) з’єднання ланок, що входять до її складу.

Методичні вказівки не містять початкових відомостей з мов програмування, а також відомостей про роботу з пакетом MatLab. З цих тем написана достатня кількість посібників і керівництв, існує вільно поширена документація.

Методичні вказівки можуть бути корисними для всіх студентів напрямку "Комп’ютерні науки", а також для студентів та аспірантів інших спеціальностей, що вивчають теоретичні основи управління складними системами.

ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ ЛАНКИ

Мета роботи – знайомство з типовими динамічними ланками, моделювання ланок з використанням передатних функцій і електричних кіл, визначення впливу параметрів ланок на їх характеристики.

1.1. Постановка задачі

Для заданої ланки одержати передатну функцію. За передатною функцією знайти імпульсну і перехідну характеристики. Визначити залежність характеристик ланки від її параметрів.

1.2. Теоретичні відомості

Для аналізу і синтезу системи автоматичного управління (САУ) зручно представляти у вигляді взаємозалежної сукупності окремих елементів – *динамічних ланок*. Під динамічною ланкою у загальному випадку розуміють абстрактний пристрій, який має вхід і вихід і для якого задане рівняння, що зв'язує сигнали на вході і виході (рис. 1.1).

Рис. 1.1

Якщо рівняння, яке зв'язує сигнали $x_{\text{вх}}(t)$ і $x_{\text{вих}}(t)$, лінійне, то говорять про лінійну динамічну ланку.

Рівняння лінійної динамічної ланки має вигляд

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x_{\text{вих}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_{\text{вих}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_n x_{\text{вих}}(t) = \\ = b_0 \frac{d^m x_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_m x_{\text{вх}}(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ – постійні коефіцієнти; $m \leq n$.

Використовувати такий опис динамічної ланки в задачах аналізу і синтезу систем і об'єктів управління не раціонально, тому існують й інші форми опису динамічних ланок і систем в цілому.

Піддамо рівняння (1.1) перетворенню Лапласа, вважаючи початкові умови нульовими і замінюючи оригінали сигналів їх зображеннями за Лапасом, отримаємо

$$x_{\text{вх}}(p) = L\{x_{\text{вх}}(p)\}; \quad x_{\text{вих}}(p) = L\{x_{\text{вих}}(p)\}.$$

Використовуючи теореми перетворення Лапласа, одержимо операторне рівняння, що зв'язує зображення вхідного і вихідного сигналів:

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) x_{\text{вих}}(p) = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) x_{\text{вх}}(p). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Одержимо з (1.2) відношення зображень вихідного і вхідного сигналів:

$$\frac{x_{\text{вих}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (1.3)$$

Відношення (1.3) не залежить від зображень сигналів, а визначається тільки параметрами динамічної ланки a_i , b_i і має вигляд дробово-раціональної функції.

Відношення зображень вихідного і вхідного сигналів називають передатною функцією динамічної ланки:

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)}. \quad (1.4)$$

Рівняння виду

$$A(p) = 0, \quad a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

називають характеристичним рівнянням динамічної ланки, оскільки знаменник передатної функції – це характеристичний поліном диференціального рівняння, що описує динамічну ланку.

Часовою або імпульсною характеристикою динамічної ланки називають реакцію ланки на $\delta(t)$, позначаючи її як $w(t)$. З'ясуємо,

що являє собою часова характеристика. Для цього розглянемо динамічну ланку з передатною функцією $W(p)$ (рис. 1.2).

У цьому випадку, відповідно до (1.4), маємо

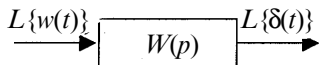


Рис. 1.2

$$L\{w(t)\} = W(p)L\{\delta(t)\} = W(p) \cdot 1 = W(p).$$

Таким чином, $W(p) = L\{w(t)\}$.

Отже, передатна функція ланки – це зображення за Лапласом імпульсної характеристики динамічної ланки. У свою чергу, при використанні розкладання у форму Хевісайта і зворотного перетворення Лапласа імпульсна характеристика може бути визначена за передатною функцією:

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (1.5)$$

Знання імпульсної характеристики дозволяє визначити реакцію динамічної ланки на сигнал будь-якої форми.

Перехідною характеристикою, або перехідною функцією, динамічної ланки називають реакцію динамічної ланки на $1(t)$, позначаючи її як $h(t)$.

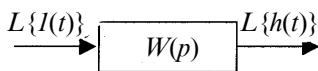


Рис. 1.3

Для аналізу перехідної характеристики розглянемо динамічну ланку з передатною функцією $W(p)$ (рис. 1.3).

У цьому випадку, згідно з (1.4), маємо

$$L\{h(t)\} = W(p)L\{1(t)\} = W(p) \cdot \frac{1}{p}.$$

Перехідна функція є інтегралом за часом від імпульсної характеристики, і навпаки. Перехідна характеристика динамічної ланки може бути визначена за передатною функцією:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}W(p)\right\}. \quad (1.6)$$

До типових відносяться такі динамічні ланки:

безінерційна	$W(p) = k$;
диференціююча	$W(p) = Tp$;
інтегруюча	$W(p) = \frac{1}{Tp}$;
апериодична	$W(p) = \frac{1}{Tp+1}$;
коливальна	$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}$;
форсуюча	$W(p) = Qp + 1, W(p) = Q^2 p^2 + 2Q\xi p + 1$;
реальна диференціююча	$W(p) = \frac{kTp}{Tp+1}$;
інтегральна з уповільненням	$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}$;
пропорційно-інтегральна	$W(p) = \frac{1}{Tp} + k$.

Зауваження. Останні три ланки не є елементарними в повному розумінні цього слова, але їх часто відносять до типових в силу їх широкого використання.

Характеристики (часові та частотні) типових ланок можуть бути отримані аналітично за їх передатними функціями.

1.3. Приклад виконання роботи

Нехай задана ланка (рис. 1.4), де $L = 25$ мГн; $C = 0,1$ мкФ; $R = 1000$ Ом.

1. Визначимо передатну функцію ланки. Для цього скористаємося операторним методом розрахунку електричних кіл: елементи схеми замінимо їх образами, опір яких знаходиться за формулами

$$Z_C = 1/(pC); \quad Z_L = pL; \quad Z_R = R.$$

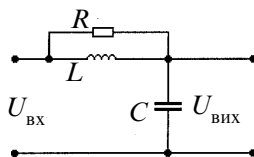


Рис. 1.4

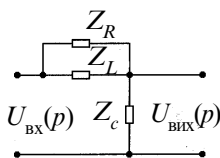


Рис. 1.5

Таким чином, схема на рис. 1.4 заміняється схемою на рис. 1.5. Спростуючи її, одержимо схему, зображену на рис. 1.6. При цьому

$$Z_1 = \frac{Z_L Z_R}{Z_L + Z_R}; \quad Z_2 = Z_C.$$

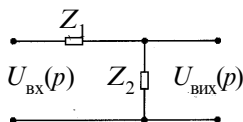


Рис. 1.6

Дану схему можна умовно представити як дільник напруги, вихідна напруга якого, перетворена за Лапласом, знаходиться за формулою

$$U_{\text{вих}}(p) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_{\text{вх}}(p) = \frac{Z_C}{\frac{Z_L Z_R}{Z_L + Z_R} + Z_C} U_{\text{вх}}(p). \quad (1.7)$$

За формулами (1.4) і (1.7) визначимо передатну функцію досліджуваної ланки:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{Z_C}{\frac{Z_L Z_R}{Z_L + Z_R} + Z_C} = \frac{1}{pC \left(\frac{pLR}{pL + R} + \frac{1}{pC} \right)}. \quad (1.8)$$

Перетворивши (1.8), одержимо

$$W(p) = \frac{pL + R}{LRCp^2 + Lp + R}; \quad W(p) = \frac{pL/R + 1}{LCp^2 + L/Rp + 1}. \quad (1.9)$$

Уведемо підстановки:

$$T_2 = L/R; \quad T_1 = LC. \quad (1.10)$$

Підставивши (1.10) у (1.9), одержимо

$$W(p) = (T_2 p + 1) / (T_1 p^2 + T_2 p + 1).$$

2. Оскільки дана передатна функція не є передатною функцією типової ланки, представимо її як суму найпростіших дробів:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p);$$

$$W_1(p) = \frac{T_2 p}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}; \quad (1.11)$$

$$W_2(p) = \frac{1}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}. \quad (1.12)$$

Використовуючи теорему про лінійність і таблицю перетворень для кожного елемента суми, визначимо імпульсну функцію і перехідну характеристику ланки.

Згідно з (1.5) імпульсна функція являє собою передатну функцію, перетворену за допомогою зворотного перетворення Лапласа. Для виразу (1.11)

$$w_1(t) = L^{-1}\{W_1(p)\} = L^{-1}\{W_3(p)p\}, \quad (1.13)$$

де

$$W_3(p) = \frac{T_2}{T_1 p^2 + T_2 p + 1} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (1.14)$$

За теоремою про диференціювання вираз (1.13) можна представити у вигляді

$$w_1(t) = L^{-1}\{W_3(p)p\} = \frac{dw_3(t)}{dt}, \quad (1.15)$$

де $w_3(t) = L^{-1}\{W_3(p)\}$.

Використовуючи дод. А, знаходимо оригінал, що відповідає виразу (1.14):

$$w_3(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}\right\} = k C e^{-\gamma t} \sin \lambda t,$$

де

$$\lambda = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2}; \quad C = \frac{1}{\lambda T^2}; \quad \gamma = \frac{\xi}{T}. \quad (1.16)$$

З урахуванням (1.15) одержимо

$$w_1(t) = \frac{dw_3(t)}{dt} = -\gamma k C e^{-\gamma t} \sin \lambda t + k C e^{-\gamma t} \cos \lambda t.$$

Для виразу (1.12)

$$w_2(t) = L^{-1} \{W_2(p)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{T_1 p^2 + T_2 p + 1} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \right\}.$$

Використовуючи дод. А, знайдемо $w_2(t) = C e^{-\gamma t} \sin \lambda t$, де λ, C, γ визначаються за допомогою (1.16).

Імпульсна функція ланки

$$w(t) = w_1(t) + w_2(t) = -\gamma k C e^{-\gamma t} \sin \lambda t + k C e^{-\gamma t} \cos \lambda t + C e^{-\gamma t} \sin \lambda t. \quad (1.17)$$

Використовуючи (1.10) і (1.16), визначимо невідомі коефіцієнти:

$$T^2 = T_1 \Rightarrow T = \sqrt{T_1} = \sqrt{LC} = \sqrt{25 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{-5};$$

$$T_2 = 2\xi T \Rightarrow \xi = \frac{T_2}{2T} = \frac{L}{2RT} = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 1000 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 0,25;$$

$$k = T_2 = \frac{L}{R} = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{1000} = 2,5 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = \frac{\xi}{T} = \frac{0,25}{5 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^3;$$

$$\lambda = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} \sqrt{1 - 0,25^2} = 1,94 \cdot 10^4;$$

$$C = \frac{1}{\lambda T^2} = \frac{1}{1,94 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = 2,07 \cdot 10^4.$$

Підставляючи отримані значення в (1.17), будемо графік імпульсної характеристики (рис. 1.7).

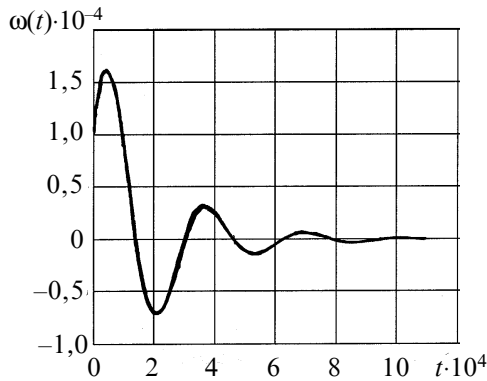


Рис. 1.7

3. Визначимо перехідну функцію і характеристику ланки. Згідно з (1.6)

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W(p) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W_1(p) + \frac{1}{p} W_2(p) \right\},$$

де $W_1(p)$ і $W_2(p)$ визначені в (1.11) і (1.12).

Використовуючи теорему про лінійність, одержимо

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W_1(p) \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W_2(p) \right\}. \quad (1.18)$$

Згідно з дод. А

$$h_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W_1(p) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \right\} = k C e^{-\gamma t} \sin \lambda t;$$

$$h_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} W_2(p) \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \right\} = 1 - Z e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta),$$

де λ, C, γ визначаються за допомогою (1.16);

$$Z = \frac{1}{\lambda T}; \quad \theta = \arctan \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Знайдемо невідомі величини:

$$Z = \frac{1}{\lambda T} = \frac{1}{1,94 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 1,03$$

та

$$\theta = \arctan \frac{\lambda}{\gamma} = \arctan \frac{1,94 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^3} = 1,318 \text{ рад.}$$

Підставляючи отримані значення в (1.18), будемо графік перехідної характеристики (рис. 1.8).

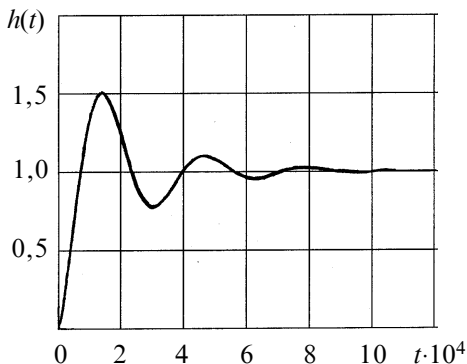
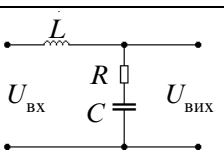
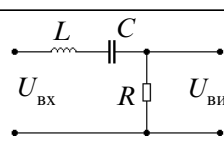
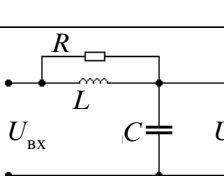
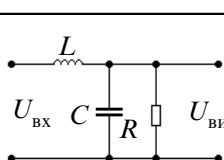


Рис. 1.8

1.4. Варіанти завдань

Схема	Варіант	Параметри
	1	$L = 20 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	2	$L = 30 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	3	$L = 40 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	4	$L = 50 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 100 \text{ Ом}$
	5	$L = 60 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	6	$L = 70 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$

Продовж. табл.

Схема	Варіант	Параметри
	7	$L = 20 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	8	$L = 30 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	9	$L = 40 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	10	$L = 50 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 100 \text{ Ом}$
	11	$L = 60 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	12	$L = 70 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	13	$L = 20 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	14	$L = 30 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	15	$L = 40 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	16	$L = 50 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 100 \text{ Ом}$
	17	$L = 60 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	18	$L = 70 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	19	$L = 20 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	20	$L = 30 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	21	$L = 40 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	22	$L = 50 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	23	$L = 60 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	24	$L = 70 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 10000 \text{ Ом}$
	25	$L = 20 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	26	$L = 30 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	27	$L = 40 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	28	$L = 50 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	29	$L = 60 \text{ мГн}; C = 0,10 \text{ мкФ}; R = 1000 \text{ Ом}$
	30	$L = 70 \text{ мГн}; C = 0,01 \text{ мкФ}; R = 10000 \text{ Ом}$

Звіт включає в себе:

- 1) досліджувану ланку та її параметри;
- 2) рівняння імпульсної та перехідної характеристик ланки;
- 3) графіки імпульсної та перехідної характеристик, отримані за допомогою ЕОМ;
- 4) програми розрахунку і побудови характеристик;
- 5) висновки про вплив параметрів ланки на форму імпульсної та перехідної характеристик.

1.5. Контрольні питання і завдання

1. Як визначити порядок дробово-раціональної функції?
2. Пояснити процедуру перетворення функції у форму Боде.

3. Які полюси дробово-раціональної функції називають простими?

4. У чому полягає ідеалізація зображення реального сигналу у вигляді одиничної східчастої функції?

5. Представити у формі Боде дробово-раціональну функцію

$$W(p) = (p^2 + 2)/(p^2 + 6p + 10).$$

6. Представити у формі Хевісайта дробово-раціональну функцію:

а) $H(p) = (p + 2)/(p^2 + 1);$

б) $W(p) = 1/(p^3 + 6p^2 + 10p).$

7. Які обмеження накладаються на пряме і зворотне перетворення Фур'є?

8. Як за допомогою таблиць перетворення Лапласа одержати частотний спектр реального сигналу – неперіодичної функції часу?

9. У якій формі (Боде або Хевісайта) зручніше представляти зображення дробово-раціональної функції за Лапласом з метою одержання оригіналу?

10. Визначити оригінали наступних зображень за Лапласом:

а) $x(p) = \frac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)};$

б) $x(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}.$

11. Знайти $x(t)$, розв'язавши диференціальні рівняння:

а) $\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = \frac{df(t)}{dt} + 2f(t),$

де $x(0) = 0, f(0) = 1(t);$

б) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = f(t),$

де $x(0) = 3, x^{(1)}(0) = -2, f(t) = 1(t).$

12. Що таке лінійна динамічна ланка?
13. Як визначити передатну функцію лінійної динамічної ланки?
14. Як визначити часові (імпульсну і перехідну) характеристики динамічної ланки за її передатною функцією?
15. Як визначити імпульсну характеристику динамічної ланки за її перехідною характеристикою?
16. Визначити передатну функцію динамічної ланки за її принциповою електричною схемою (рис. 1.9).

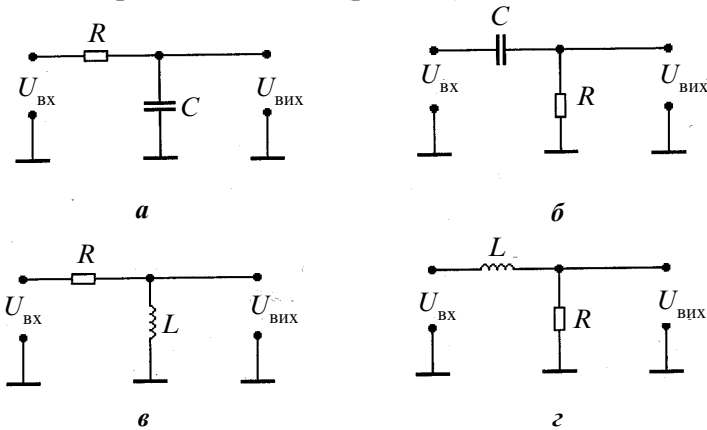


Рис. 1.9

17. Дати визначення типової динамічної ланки.
18. З якою метою проводиться докладне вивчення типових динамічних ланок?
19. Перелічити динамічні ланки, що відносять до типових (елементарних).
20. Яка типова ланка зміщує гармонійний сигнал будь-якої частоти на кут $\pi/2$ у бік запізнювання (випередження)?
21. Яка типова ланка не змінює фазу гармонійного сигналу будь-якої частоти?

Лабораторна робота № 2

ЛІНІЙНА СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

Мета роботи – ознайомлення з основними принципами лінійних систем автоматичного регулювання, вивчення основних властивостей безперервних законів регулювання, дослідження впливу параметрів законів регулювання на динамічні та статичні властивості систем.

2.1. Постановка задачі

Визначити імпульсну і перехідну характеристики об'єкта управління. Визначити зазначені характеристики для замкнутої системи із заданим об'єктом управління при різних законах регулювання, побудувати криву помилки. Для кожного закону регулювання оцінити властивості статизму (астатизму), сформулювати і записати висновки. Дослідити вплив зміни параметрів регулятора на часові характеристики при заданому об'єкті управління, сформулювати і записати висновки.

2.2. Теоретичні відомості

Основні принципи управління. Завдання управління полягає в забезпеченні виконання необхідних функцій об'єктом управління в умовах реальної експлуатації. Фактичний стан об'єкта управління визначається одним або кількома робочими параметрами $y(t)$. Найчастіше робочі параметри являють собою фізичні величини: швидкість, температуру, напругу електричного струму, лінійні та кутові переміщення тощо. У реальних умовах на об'єкт управління впливають зовнішні чинники, які називаються збурюючими ($z(t)$). Вони викликають зміну внутрішнього стану об'єкта і, як наслідок, – робочих параметрів. У зв'язку з цим для виконання робочих функцій за заданими алгоритмами необхідно організувати подачу керуючих впливів $u(t)$ на об'єкт управління (рис. 2.1).



Рис. 2.1

Заданий алгоритм звичайно пе-

редбачає підтримування сталості робочого параметра у часі або ж зміну його за відомим або невідомим законом.

Завдання управління полягає у формуванні такого закону зміни керуючого впливу, який забезпечив би заданий алгоритм при наявності збурюючих впливів.

Для вирішення цього завдання використовуються три фундаментальних принципи управління: розімкнуте управління, управління за збуренням (принцип компенсації) і замкнуте управління (принцип зворотного зв'язку або управління за відхиленням). Структурні схеми представлені на рис. 2.2., де КП – керуючий пристрій; ОУ – об'єкт управління; В – вимірник збурення; К – коригувальний пристрій.

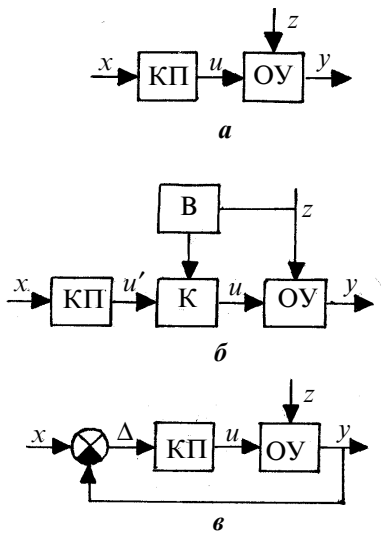


Рис. 2.2

При розімкнутому принципі (див. рис. 2.2,а) керуючий пристрій виробляє сигнал управління u , що надходить на виконавчі елементи об'єкта управління. На вхід керуючого пристрою подається сигнал x – завдання, яке дає людина або спеціальний пристрій. Даний принцип відрізняється простотою технічної реалізації, але виявляється малоефективним при недостатній інформації про характер збурення.

Для того щоб врахувати характер збурень у процесі управління об'єктом, застосовують управління за збуренням (див. рис. 2.2,б). Керуючий пристрій виробляє сигнал управління u' відповідно до завдання x . Одночасно вимірюються збурення, що діють на об'єкт, і корегується сигнал управління u' . Отриманий у результаті корекції сигнал управління u надходить на об'єкт управління. Даний принцип є більш ефективним у порівнянні з розімкнутим управлінням за умови, що є технічна можливість вимірювання зовнішніх впливів. Зазначена умова обмежує застосування даного принципу.

Принцип замкнутого управління (див. рис. 2.2,в) дозволяє вирішити задачу управління при будь-якому характері діючих збурень. У цьому випадку сигнал завдання надходить на один із входів

елемента порівняння, на інший вхід якого по ланцюгу зворотного зв'язку подається обмірюване за допомогою датчиків фактичне значення робочого параметра об'єкта управління. На виході елемента порівняння маємо сигнал Δ (помилку, відхилення), що є різницею між заданим і фактичним значеннями параметрів, тобто $\Delta = x - y$. Залежно від величини і знака помилки керуючий пристрій виробляє сигнал управління. Таким чином, принцип замкнутого управління враховує не тільки завдання, але і фактичний стан об'єкта і діючих збурень. Цей принцип є найбільш універсальним і дозволяє успішно вирішувати задачі управління, незважаючи на невизначеність об'єкта управління і характеру збурень. Клас автоматичних систем, побудованих на основі принципу замкнутого управління, одержав назву систем автоматичного регулювання (САР).

Закони регулювання визначають основні якісні та кількісні характеристики систем. САР містить у собі керуючий пристрій, який називається регулятором і виконує основні функції управління шляхом вироблення керуючого впливу u в залежності від помилки (відхилення), тобто $u = f(\Delta)$. Закон регулювання визначає вид цієї залежності без урахування інерційності елементів регулятора.

Найпростішим є пропорційний закон, регулятор у цьому випадку називають П-регулятором. При цьому $u = u_0 + k\Delta$, де u_0 – постійна величина, k – коефіцієнт пропорційності. Основним достоїнством П-регулятора є простота, оскільки це є підсилювач постійного струму з коефіцієнтом підсилення k . Недолік П-регулятора – невисока точність регулювання, особливо для об'єктів з поганими динамічними властивостями.

Інтегральний закон регулювання і відповідний І-регулятор реалізує залежність

$$u = u_0 + \frac{1}{T} \int_0^t \Delta dt,$$

де T – постійна часу інтегрування.

Технічна реалізація І – регулятора являє собою підсилювач постійного струму з ємнісним негативним зворотним зв'язком. І-регулятори забезпечують високу точність у сталому режимі. Ра-

зом з тим І-регулятор викликає зменшення стійкості перехідного процесу і системи в цілому.

Пропорційно-інтегральний закон регулювання дозволяє об'єднати позитивні властивості пропорційного та інтегрального законів регулювання. У цьому випадку ПІ-регулятор реалізує залежність

$$u = k_1 \Delta + k_2 \frac{1}{T} \int_0^t \Delta dt.$$

Дієвим засобом поліпшення поведінки САР у перехідному режимі є введення до закону регулювання похідної від помилки. Часто ця похідна вводиться до пропорційного закону регулювання. У цьому випадку маємо пропорційно-диференціальний закон і ПД-регулятор, що реалізує залежність

$$u = k_1 \Delta + k_2 \frac{d\Delta}{dt}.$$

Крім ПІ- та ПД-регуляторів, на практиці часто використовують ПІД-регулятори, що реалізують пропорційно-інтегрально-диференціальний закон регулювання

$$u = k_1 \Delta + k_2 \frac{d\Delta}{dt} + k_3 \frac{1}{T} \int_0^t \Delta dt.$$

Оцінки якості регулювання. Якість регулювання це – сукупність точності в сталому режимі і якості перехідних процесів. Оцінки якості можуть бути прямими і непрямими. Вони, у свою чергу, поділяються на статичні та динамічні. Динамічні оцінки характеризують перехідний процес, а статичні – сталий режим. Прямі оцінки визначаються безпосередньо за перехідною характеристикою по каналу управління або збурення (рис. 2.3).

До прямих показників якості відноситься величина перерегулювання, динамічний коефіцієнт регулювання і час регулювання, ступінь згасання.

Перерегулювання δ визначається відношенням першого макси-

мального відхилення керованої перемінної $y(t)$ від її сталого значення $y(\infty)$ до цього сталого значення для перехідних процесів, викликаних зміною впливу, що задає:

$$\delta = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\% = \frac{A_1}{y(\infty)} \cdot 100\%.$$

Якість вважається задовільною, якщо перерегулювання не перевищує 30...40 %.

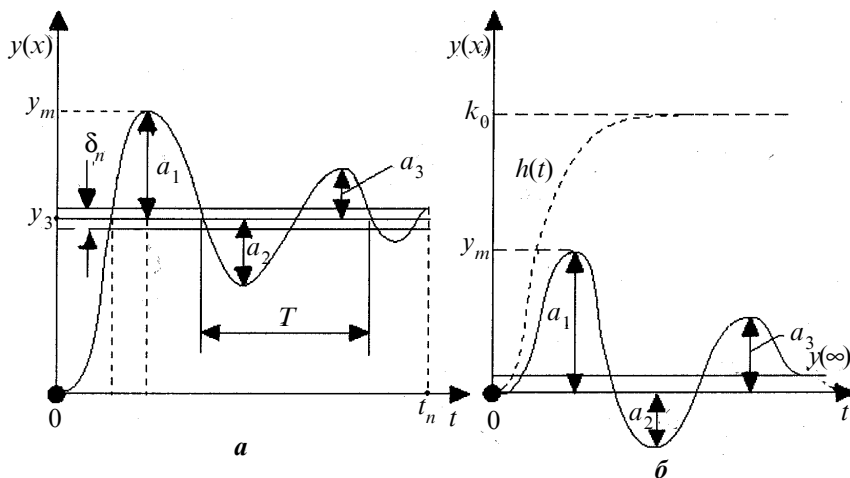


Рис. 2.3

Для перехідних процесів, викликаних збурюючим впливом на вході об'єкта (див. рис. 2.3, б), перерегулювання можна визначити як відношення другого (негативного) максимального відхилення a_2 до першого максимального відхилення a_1 :

$$\delta = \frac{A_2}{y_m - y(\infty)} \cdot 100\% = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100\%.$$

Відзначимо, що найперше максимальне відхилення y_m , яке спричинене збуренням на вході об'єкта, є показником якості регулювання. При формуванні вимог до системи вказують припустиме максимальне відхилення.

Динамічний коефіцієнт регулювання. R_g дорівнює відношенню першого максимального відхилення y_m до відхилення вихідної перемінної $y(t)$ нерегульованого об'єкта, викликаного тим же збуренням, тобто $R_g = (y_m/k_0) \cdot 100\%$, де коефіцієнт R_g показує, наскільки ефективна компенсуюча дія регулятора на об'єкт.

Час регулювання t_n визначається інтервалом часу від моменту подачі одиничного впливу до моменту, після якого відхилення керованої величини $y(t)$ від її нового сталого значення $y(\infty)$ стають менші від деякого заданого числа δ_n , тобто до моменту, після якого виконується умова $|y(t) - y(\infty)| \leq \delta_n$. На практиці величину δ_n звичайно приймають рівною 5 % від сталого значення $y(\infty)$.

Додатковими часовими показниками якості є час наростання t_n , час досягнення першого максимуму t_m і період загасання коливань T (див. рис. 2.3, *a*). Ці показники разом з t_n характеризують швидкодію системи регулювання.

До прямих показників якості відноситься також *ступінь згасання* $\psi = \frac{a_1 - a_3}{a_1} = 1 - \frac{a_3}{a_1}$, де a_1 і a_2 – сусідні максимальні відхилення (амплітуди) одного знака (див. рис. 2.3). Інтенсивність згасання коливань вважається задовільною, якщо $\psi = 0,75 \dots 0,95$.

Поряд з показниками δ і ψ коливальність системи можна оцінювати числом переходів N величини $y(t)$ через стале значення $y(\infty)$ на інтервалі t_n .

У статичному режимі САР оцінюється коефіцієнтом статизму (астатизму) $\Delta = (x - y_{уст})/x = 1 - W(S)$, де x – завдання, $y_{уст}$ – стале значення робочого параметра.

Розглянуті прямі показники якості зручно використовувати в тих випадках, коли графік перехідного процесу $y(t)$ можна одержати експериментально в реальній системі регулювання або шляхом моделювання системи на ЕОМ.

2.3. Приклад виконання роботи

Нехай задана система автоматичного управління з об'єктом, визначеним передатною функцією $W_o(p) = (p+1)/(T_1 p^2 + T_2 p + 1)$ з постійними часу $T_1 = 1$ і $T_2 = 2$. Загальна структурна схема САР зображена на рис. 2.4: $W_p(p)$ – передатна функція регулятора,

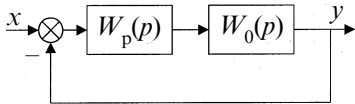


Рис. 2.4

Передатна функція замкнутої системи

$$W(p) = \frac{W_p(p)W_o(p)}{1 + W_p(p)W_o(p)} = \frac{k_3 p^2 + k_3 p}{TT_1 p^3 + (TT_2 + T_1 + K_3)p^2 + (T + T_2 + k_3)p + 1}.$$

У загальному вигляді

$$W(p) = \frac{y(p)}{z(p)} = \frac{b_0 p^2 + b_1 p + b_2}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}.$$

Розглянемо дану систему як послідовне з'єднання двох ланок (рис. 2.5).

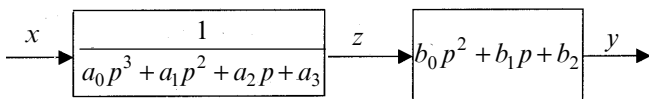


Рис. 2.5

Одержимо значення вихідних сигналів для кожного блоку:

$$a_0 p^3 z(p) + a_1 p^2 z(p) + a_2 p z(p) + a_3 z(p) = x(p);$$

$$y(p) = b_0 p^2 z(p) + b_1 p z(p) + b_2 z(p).$$

Перейдемо в часову область:

$$a_0 \frac{d^3 z(t)}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dz(t)}{dt} + a_3 z(t) - x(t) = 0;$$

$$y(t) = b_0 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dz(t)}{dt} + b_2 z(t).$$

Уведемо підстановки:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t); \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t); \\ \dot{z}_3(t) = \frac{1}{a_0}(x(t) - a_1 z_3(t) - a_2 z_2(t) - a_3 z_1(t)); \end{cases} \quad (2.1)$$

$$y(t) = b_0 z_3(t) + b_1 z_2(t) + b_2 z_1(t). \quad (2.2)$$

Систему диференціальних рівнянь (2.1) вирішуємо за методом Ейлера. При цьому будемо використовувати наступні формули:

$$\begin{cases} z_{1i} = z_{1i-1} + h z_{2i-1}; \\ z_{2i} = z_{2i-1} + h z_{3i-1}; \\ z_{3i} = z_{3i-1} + \frac{h}{a_0}(x_{i-1} - a_1 z_{3i-1} - a_2 z_{2i-1} - a_3 z_{1i-1}), \end{cases} \quad (2.3)$$

де h – крок інтегрування;

$$y_i = b_0 z_{3i} + b_1 z_{2i} + b_2 z_{1i}. \quad (2.4)$$

Прийmemo $h = 0,01\text{с}$; кількість точок $N = 10$. Знайдемо значення коефіцієнтів:

$$b_0 = b_1 = k_3 = 40; \quad b_2 = 0; \quad a_0 = TT_1 = 0,5 \cdot 1 = 0,5;$$

$$a_1 = TT_2 + T_1 + k_3 = 0,5 \cdot 2 + 1 + 40 = 42 ;$$

$$a_2 = T + T_2 + k_3 = 0,5 + 2 + 40 = 42,5 ; a_3 = 1 .$$

Початкові значення приймемо рівними нулю: $z_{1_0} = 0; z_{2_0} = 0; z_{3_0} = 0; y_0 = 0$.

Криву помилки можна знайти за формулою $E_i = |1 - y_i|$.

Для одержання перехідної характеристики приймемо $X_i = 1$ (одичинний східчастий сигнал). Змінюючи значення i у (2.3) і (2.4) від 1 до 10, одержимо рішення системи у вигляді табл. 1.

Таблиця 1. Розрахунок перехідної характеристики методом Ейлера

i	t	z_{1i}	z_{2i}	z_{3i}	y_i	E_i
0	0	0	0	0	0	1
1	0.01	0	0	.02	.8	.1999
2	0.02	0	.0002	.0232	.936	.0639
3	0.03	2.00e-06	.0004	.0235	.9589	.0410
4	0.04	6.32e-06	.0006	.0233	.9626	.0373
5	0.05	1.29e-05	.0009	.0231	.9631	.0368
6	0.06	2.20e-05	.0011	.0229	.9629	.0370
7	0.07	3.33e-05	.0013	.0227	.9627	.0372
8	0.08	4.69e-05	.0015	.0224	.9625	.0374
9	0.09	6.28e-05	.0018	.0222	.9623	.0376
10	0.1	8.10e-05	.0020	.0220	.9620	.0379

Графік перехідного процесу y_i і крива помилки E_i зображені на рис. 2.6 (розрахунок методом Ейлера, $h = 0,001$ с).

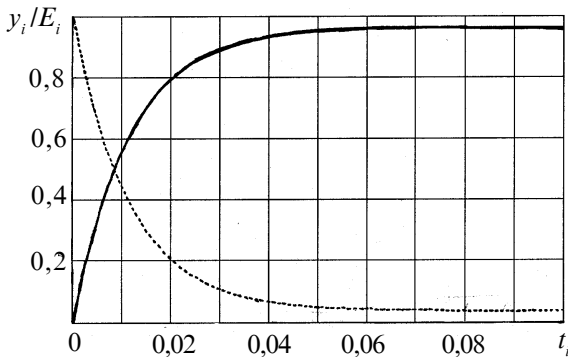


Рис. 2.6

2.4. Варіанти завдань

Об'єкт управління $W(p)$	Варіант	Параметри
$\frac{kp}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}$	1	$k = 3; T_1 = 1; T_2 = 2$
	2	$k = 2,5; T_1 = 3; T_2 = 0,5$
	3	$k = 2; T_1 = 0,4; T_2 = 0,8$
	4	$k = 1; T_1 = 0,5; T_2 = 3$
	5	$k = 1,6; T_1 = 2,4; T_2 = 1,7$
$\frac{k}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}$	6	$k = 2,7; T_1 = 0,4; T_2 = 0,2$
	7	$k = 3,5; T_1 = 2; T_2 = 0,8$
	8	$k = 4; T_1 = 0,1; T_2 = 0,9$
	9	$k = 5,8; T_1 = 3; T_2 = 0,6$
	10	$k = 8; T_1 = 0,5; T_2 = 1,6$
$\frac{p+1}{T_1 p^2 + T_2 p + 1}$	11	$T_1 = 0,7; T_2 = 3,4$
	12	$T_1 = 0,9; T_2 = 3,2$
	13	$T_1 = 1,6; T_2 = 4,6$
	14	$T_1 = 1,2; T_2 = 0,8$
	15	$T_1 = 0,5; T_2 = 0,9$
$\frac{-kp+1}{p^2 + p + 1}$	16	$k = 4,6; T_1 = 0,2; T_2 = 0,1$
	17	$k = 8,5; T_1 = 1; T_2 = 2$
	18	$k = 9,5; T_1 = 2; T_2 = 3$
	19	$k = 2; T_1 = 0,2; T_2 = 0,6$
	20	$k = 5; T_1 = 0,5; T_2 = 0,1$
$\frac{kp+1}{p^2 + p + 1}$	21	$k = 7; T_1 = 0,8; T_2 = 0,3$
	22	$k = 6; T_1 = 0,7; T_2 = 0,8$
	23	$k = 9,5; T_1 = 2; T_2 = 3$
	24	$k = 7,6; T_1 = 2,1; T_2 = 1,3$
	25	$k = 5,4; T_1 = 1,5; T_2 = 1,5$

Використовуються наступні закони регулювання: $R(p) = k_1$ – пропорційний; $R(p) = k_2/p$ – інтегральний; $R(p) = k_3 p/(Tp+1)$ – диференціальний.

Чисельні значення параметрів закону регулювання: $k_1 = 10$; $k_2 = 20$; $k_3 = 40$; $T = 0,5$.

Звіт включає в себе:

- 1) структуру системи із заданим об'єктом управління;
- 2) передатні функції системи при різних законах регулювання;
- 3) графіки імпульсних і перехідних характеристик, отримані за допомогою ЕОМ;

- 4) програми розрахунку і побудови характеристик;
- 5) висновки за роботою.

2.5. Контрольні питання і завдання

1. Знайти передатну функцію системи (рис. 2.6), якщо ланки цієї системи задані в такий спосіб

а) ланка 1 описується диференціальним рівнянням $\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{\epsilon} + \epsilon$; ланка 2 має імпульсну перехідну функцію $k_2(t, \tau) = e^{2(t-\tau)}$; ланка 3 – інтегруюча;

б) ланка 1 – аперіодична з постійною часу $T = 1/n$; ланка 2 має імпульсну перехідну функцію $k_2(t, \tau) = nl(t - \tau)$; ланка 3 – підсилювальна з коефіцієнтом підсилення, рівним 3.

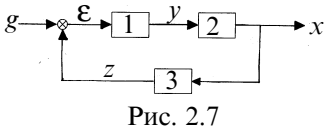
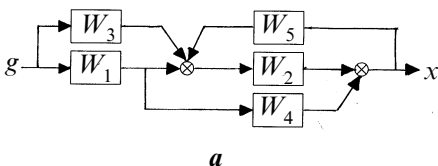
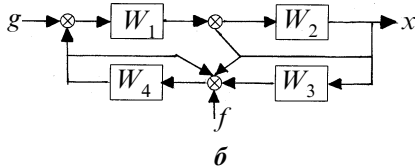


Рис. 2.7

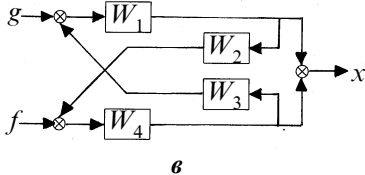
2. За передатними функціями ланок знайти передатні функції з'єднань, представлених на рис. 2.8.



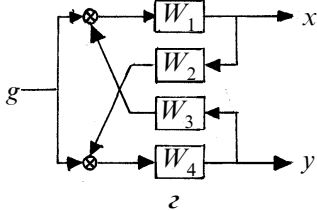
а



б



в



г

Рис. 2.8

ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ

Мета роботи – засвоїти методику теоретичної і наближеної побудови частотних характеристик систем управління.

3.1. Постановка задачі

Об'єктом дослідження виступають лінійні (лінеаризовані) динамічні стаціонарні системи управління з одним входом і одним виходом. При цьому модель одномірної САУ задана у вигляді комплексної передатної функції, записаної як відношення поліномів:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Необхідно вивести формулу амплітудної характеристики заданої САУ $A(\omega) = |W(j\omega)|$; з використанням наближеної методики побудувати ЛАЧХ, ЛФЧХ і ФЧХ САУ; розрахувати і побудувати за допомогою ЕОМ ЛАЧХ $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$, ЛФЧХ $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ та ФЧХ $A(\omega) = f(\varphi(\omega))$, де $\omega = [0, \infty]$.

3.2. Теоретичні відомості

Методи дослідження САУ можна умовно поділити на дві великі групи. У першій групі знаходяться частотні методи, у другій – часові, а також методи простору станів.

Для класичної теорії управління більш традиційними є частотні методи. Вони дуже ефективні у вирішенні всіх основних задач ТАУ (стійкість-якість-синтез коректорів і т. п.), але лише в тому випадку, коли в САУ один вхід і один вихід.

Математична основа частотних методів – перетворення Лапласа і Фур'є. Вона застосовується у рівняннях із постійними коефіцієнтами.

Проведемо перетворення Лапласа від вхідних і вихідних сиг-

налів САУ:

$$u(p) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt;$$

$$y(p) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt.$$

Лінійна САУ тому і називається лінійною, що вона робить лінійне перетворення вхідного сигналу у вихідний: $y = L(u)$, де оператор L є лінійним, тобто $L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(u_1) + \beta L(u_2)$, де α, β – будь-які комплексні числа.

Зауважимо тепер, що можна вибрати $p = j\omega$, тобто розглядати не будь-які комплексні величини p в перетворенні Лапласа, а лише ті, що належать уявній осі. При цьому перетворення Лапласа обертається на перетворення Фур'є за умови, що усі функції дорівнюють нулю при від'ємному часі.

Оператор L , заданий у зображеннях передатною функцією $W(p)$, перетворюється на $W(j\omega)$. Оскільки суть перетворення Фур'є – розкладання за системою функцій $\{\sin \omega t, \cos \omega t\}$ при $-\infty < \omega < \infty$, то запис $u(j\omega)$, наприклад, трактується як нескінченна сума синусоїдальних складових із частотами $\omega < \infty$. Користуючись лінійністю системи, стверджуємо, що кожна така складова входу з частотою ω дає відповідну компоненту вихідного сигналу з частотою ω і компоненти для різних частот не взаємодіють між собою. Тому можна розглядати лише реакцію лінійної САУ на синусоїдальний вхідний сигнал із частотою ω , такий розгляд дозволяє обчислити реакцію на будь-який інший сигнал (той, що має перетворення Фур'є). Таким чином, маємо

$$y(p) = W(p) u(p);$$

$$y(j\omega) = W(j\omega) u(j\omega);$$

$W(j\omega)$ – комплексний коефіцієнт передачі ланки (системи).

Частотні характеристики дозволяють обчислити амплітуду і фазу вихідного гармонійного сигналу в сталому режимі.

Наведемо $W(j\omega)$ в показовій формі:

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j \arg W(j\omega)}, \quad |W(j\omega)| = \sqrt{\text{Im}^2 + \text{Re}^2},$$

$$\arg W(j\omega) = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}}.$$

Комплексна функція $W(j\omega)$ скалярного аргументу ω називається *годографом*. Це годограф АФЧХ (амплитудно-фазочастотна характеристика). Її модуль називається АЧХ, а аргумент (фаза) – ФЧХ.

Графік АФЧХ зображують на комплексній площині (рис. 3.1), при цьому наочно видна одночасна зміна амплітуди і фази в залежності від частоти.

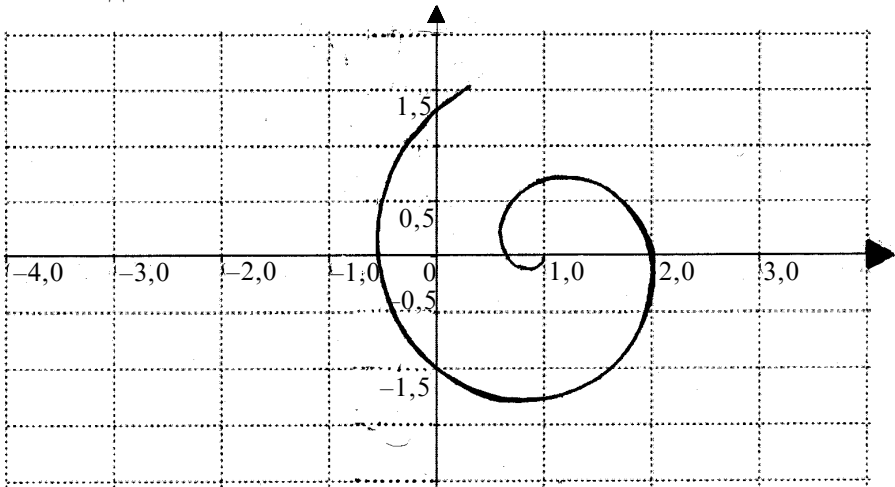


Рис. 3.1

Для аналізу систем зручно розглядати логарифмічні частотні характеристики: $L(\omega), \delta\beta = 20 \lg |W(j\omega)|$ – логарифмічна амплітудно-частотна характеристика (ЛАЧХ), $\varphi(\omega) = \arctg (\text{Im}(j\omega)) / (\text{Re}(j\omega))$ – логарифмічна фазочастотна характеристика (ЛФЧХ).

Частота ω в обох характеристиках зображується в логарифмічному масштабі.

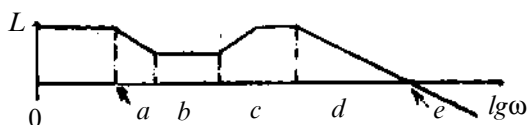


Рис. 3.2

При наближеній побудові ЛАЧХ зручно зображувати ламаними лініями (рис. 3.2). Такі графіки називаються *асимптотичними* ЛАЧХ.

Точки зламу графіка пов'язані з коренями поліномів чисельника і знаменника передатної функції, кожний корінь чисельника викликає злам характеристики вгору на один і той самий кут, кожний корінь знаменника – на такий само кут униз. Точкам a, b, c, d відповідають значення частот, що визначаються постійними часу системи $\omega_1 = 1/T_1$; $\omega_2 = 1/T_2$ і т. д.

Постійні часу системи знаходять, розкладаючи поліноми у чисельнику і знаменнику передатної функції на співмножники виду $Tr + 1$ для дійсних коренів і $T^2p + 2\xi Tr + 1$ для комплексних коренів. Це відповідає розумінню передатної функції системи як послідовного з'єднання типових ланок першого і другого порядку.

Наближений метод побудови ЛАЧХ. Для побудови ЛАЧХ наближеним методом необхідно виконати наступні дії:

1. Проаналізувати склад передатних функцій. Ланки, що входять до передатної функції, повинні бути спочатку приведені до вигляду типових ланок, тобто таких, що мають типові передатні функції.

2. Знайти результуючий коефіцієнт передачі та постійні часу з передатних функцій типових ланок.

3. Знайти величину $20Lg k$ і спрягаючі частоти.

4. Побудувати координатні осі ЛАЧХ у логарифмічному масштабі і відкласти на осі абсцис значення спрягаючих частот, а на осі ординат – точку $20Lg k$.

5. Визначити нахил першої асимптоти. Якщо передатна функція не містить інтегральних та ідеальних диференціюючих ланок, то нахил першої асимптоти дорівнює нулю. У протилежному випадку нахил першої асимптоти визначається за показником ступеня при p .

6. Першу асимптоту провести до першої спрягаючої частоти. Далі визначити нахил наступної асимптоти шляхом підсумову-

вання величини нахилу першої асимптоти і величини нахилу ланки, якій належить ця спрягаюча частота. Другу асимптоту провести до наступної спрягаючої частоти.

7. Величини нахилів усіх наступних асимптов знайти аналогічно, шляхом підсумовування величини попереднього нахилу і величини нахилу ланки, що має спрягаючу частоту, до якої була проведена попередня асимптота.

Наближений метод побудови ЛФЧХ. Для побудови ЛФЧХ наближеним методом необхідно виконати такі дії:

1. Проаналізувати склад передатних функцій. Ланки, що входять до передатної функції, повинні бути спочатку приведені до вигляду типових ланок, тобто таких, що мають типові передатні функції.

2. Знайти постійні часу з передатних функцій типових ланок і спрягаючі частоти.

3. Побудувати координатні осі ЛФЧХ і відкласти на осі x значення спрягаючих частот у логарифмічному масштабі.

4. Побудувати початкову ділянку ЛФЧХ, починаючи з ідеальних ланок (відкладається максимальне значення $\varphi(\omega)$ (див. примітку далі)).

5. Знайти значення $\varphi(\omega)$, що відповідає першій спрягаючій частоті, і підсумувати з початковим значенням. При наступній спрягаючій частоті підсумувати початкове значення, максимальне значення $\varphi(\omega)$ для попередньої ланки і $\varphi(\omega)$ ланки, що відповідає спрягаючій частоті.

Примітка. Значення $\varphi(\omega)$ для конкретної ланки визначається показником ступеня при p : $p = 1 - \varphi(\omega) = 45$; $p = -1 - \varphi(\omega) = -45$; $p = 2 - \varphi(\omega) = 90$; $p = -2 - \varphi(\omega) = -90$ і т. д. Максимальне значення $\varphi(\omega)$ для даної ланки є вдвічі більшим.

6. Знайти значення $\varphi(\omega)$ на кінцевій ділянці (знаходиться як сума всіх максимальних значень $\varphi(\omega)$).

3.3. Приклади виконання роботи

Виведемо ЛАЧХ і ЛФЧХ для ланки другого порядку. Неважко побачити, що всі типові ланки утворюються з неї при конкретних значеннях коефіцієнтів:

$$W(p) = \frac{k(dp + e)}{ap^2 + bp + c} = (dp + e) \frac{k}{ap^2 + bp + c} = W_1(p)W_2(p);$$

$$W_2(j\omega) = \frac{k}{-a\omega^2 + bj\omega + c} = \frac{k(c - a\omega^2)}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} - j \frac{k b \omega}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2};$$

$$|W_2(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}; \quad W_1(j\omega) = jd\omega + e;$$

$$|W_1(j\omega)| = \sqrt{d^2\omega^2 + e}.$$

Тому

$$|W(j\omega)| = |W_1(j\omega)| |W_2(j\omega)| = \frac{k\sqrt{d^2\omega^2 + e}}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2}};$$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega)W_2(j\omega) = (jd\omega + e) \times \left(\frac{k(c - a\omega^2)}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} - j \frac{k b \omega}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \right);$$

$$W(j\omega) = \left(\frac{ke(c - a\omega^2) - kdb\omega^2}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \right) + j \left(\frac{k(c - a\omega^2)d\omega - kbe}{(c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \right);$$

$$L(j\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg k + 10 \lg (d^2\omega^2 + e) - 10 \lg \left((c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2 \right);$$

$$\varphi(j\omega) = \arg W(j\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)} = \arctan \frac{k(c - a\omega^2)d\omega - kbe}{ke(c - a\omega^2) - kdb\omega^2},$$

де величина $L(j\omega)$ характеризує залежність амплітуди від частоти

ти ω , дБ; $\varphi(j\omega)$ показує зрушення фаз між вхідним і вихідним сигналами.

Приклад наближеної побудови ЛАЧХ. Побудуємо ЛАЧХ для передатної функції

$$W(p) = \frac{10(p+1)(0,1p+1)}{p(0,001p^2 + 0,05p+1)}. \quad (3.1)$$

1. Ланки, що входять у передатну функцію, мають вигляд типових передатних функцій. Знаходимо коефіцієнт передачі та постійні часу: $k = 10$; $T_1 = \sqrt{0,001} = 0,03$ с; $T_2 = 0,1$ с; $T_3 = 1$ с;

$$W(p) = \frac{k(T_3p+1)(T_2p+1)}{p(T_1^2p^2 + 0,05p+1)}.$$

2. Знаходимо величину $20 \lg k$ і спрягаючі частоти:

$$20 \lg k = 20 \lg 10 = 20; \quad \omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,03} = 33,3 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{1} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

3. Будуємо координатні осі ЛАЧХ і відкладаємо на осі x значення спрягаючих частот, а на осі y ($\omega = 1$) точку $20 \lg k$.

4. Оскільки передатна функція містить ідеальну інтегруючу ланку $1/p$, нахил першої асимптоти визначається ступенем при p , тобто (-1) .

Примітка. Ступінь p (-1) відповідає нахилу асимптоти на графіку: -20 дБ на декаду; $(-2) - (-40)$ дБ на декаду і т. д.

5. Проводимо асимптоту під нахилом (-1) до спрягаючої частоти $\omega_3 = 1 \text{ с}^{-1}$.

6. Розраховуємо кут нахилу наступної асимптоти: частота ω_3 відноситься до ланки $T_3p + 1$ у чисельнику передатної функції, тобто ступінь при $p = 1$. Таким чином, кут нахилу асимптоти $(-1) + (+1) = (0)$.

7. Проводимо асимптоту під нахилом (0) до спрягаючої частоти $\omega_2 = 1 \text{ с}^{-1}$.

8. Розраховуємо кут нахилу третьої асимптоти: частота ω_2 відноситься до ланки $T_2 p + 1$ у чисельнику передатної функції, тобто ступінь при $p = 1$. Таким чином, кут нахилу асимптоти (0) + (+1) = (+1).

9. Проводимо асимптоту під нахилом (+1) до спрягаючої частоти $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$.

10. Розраховуємо кут нахилу останньої асимптоти: частота ω_1 відноситься до ланки $T_1^2 p^2 + 0,05p + 1$ у знаменнику передатної функції, тобто ступінь при $p = -2$. Таким чином, кут нахилу асимптоти (+1) + (-2) = (-1).

11. Проводимо асимптоту під нахилом (-1).

Результуючий графік ЛАЧХ поданий на рис. 3.3 жирною лінією. Тонкою лінією показаний реальний графік ЛАЧХ для даної передатної функції.

Приклад наближеної побудови ЛФЧХ. Для передатної функції (3.1) побудуємо ЛФЧХ наближеним способом:

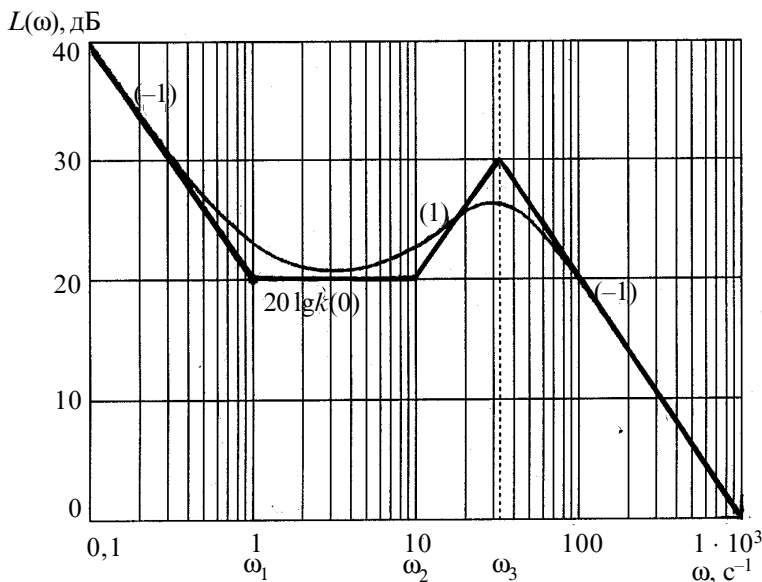


Рис. 3.3

1. Знаходимо спрягаючі частоти (див. попередній приклад) і відкладаємо їх на графіку:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,03} = 33,3 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{1} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

2. Розраховуємо значення $\varphi(\omega)$:

ω	Ступінь при p	$\varphi(\omega)$, град
$\omega < \omega_3$	-1	-90
$\omega = \omega_3$	1	-90 + 45 = -45
$\omega = \omega_2$	1	-90 + 90 + 45 = 0 + 45 = 45
$\omega = \omega_1$	-2	0 + 90 - 90 = 90 - 90 = 0
$\omega > \omega_1$	-	90 - 180 = -90

Примітка. Жирним шрифтом показане початкове значення $\varphi(\omega)$ при даній спрягаючій частоті, курсивом – максимальне значення $\varphi(\omega)$ попередньої ланки.

3. Будуємо криву, що відповідає отриманим значенням. Графік ЛФЧХ, отриманий наближеним методом, зображено на рис. 3.4 жирною лінією. Тонкою лінією показано реальний графік ЛФЧХ для даної передатної функції.

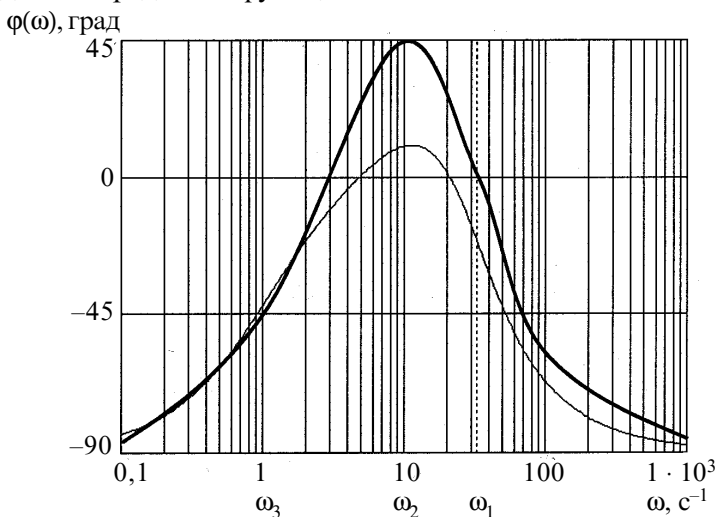


Рис. 3.4

3.4. Варіанти завдань

Варіант	$W(p)$	Значення				
		k	T_1	T_2	T_3	T_4
1	1	4	0,1	0,01	0,8	0,2
2	2	5	0,2	0,02	0,7	0,3
3	3	6	0,3	0,03	0,6	0,4
4	4	7	0,4	0,04	0,5	0,2
5	5	8	0,5	0,05	0,9	0,3
6	6	9	0,6	0,06	0,3	0,4
7	1	10	0,7	0,07	0,2	0,5
8	2	4	0,8	0,08	0,1	0,6
9	3	5	0,9	0,09	0,2	0,7
10	4	6	0,1	0,09	0,3	0,8
11	5	7	0,2	0,08	0,4	0,9
12	6	8	0,3	0,07	0,5	0,2
13	1	9	0,4	0,06	0,6	0,3
14	2	10	0,5	0,05	0,7	0,4
15	3	4	0,6	0,04	0,8	0,5
16	4	5	0,7	0,03	0,9	0,6
17	5	6	0,8	0,02	0,9	0,7
18	6	7	0,9	0,01	0,8	0,2
19	1	8	0,1	0,09	0,7	0,3
20	2	9	0,2	0,08	0,6	0,1
21	3	10	0,3	0,07	0,5	0,2
22	4	4	0,4	0,06	0,4	0,3
23	5	5	0,5	0,05	0,3	0,4
24	6	6	0,6	0,04	0,2	0,5
25	1	7	0,7	0,03	0,1	0,6

Варіант			
	1	2	3
$W(p)$	$\frac{k(T_1s+1)}{T_2s^2+T_3s+1}$	$\frac{k(T_1s+1)}{(T_2s^2+T_3s+1)s}$	$\frac{k(T_1s+1)(T_4s+1)}{(T_2s^2+T_3s+1)s}$
	4	5	6
$W(p)$	$\frac{k(T_1s+1)}{(T_2s+1)(T_3s+1)s}$	$\frac{k(T_1s+1)}{(T_2s+1)(T_3s+1)}$	$\frac{k(T_1s+1)(T_4s+1)}{(T_2s+1)(T_3s+1)s}$

Звіт включає в себе:

1) вихідну передатну функцію САУ із наведенням значень коефіцієнтів;

2) формули і асимптотичні графіки АЧХ, ФЧХ і АФХ для заданої ланки;

3) графіки логарифмічних частотних характеристик для заданої ланки, отримані на ЕОМ;

4) програми розрахунку і побудови характеристик;

5) висновки за роботою (порівняння наближених і точних графіків частотних характеристик).

3.5. Контрольні питання і завдання

1. Перелічити частотні характеристики і дати їх визначення.

2. Описати теоретичні методи знаходження частотних характеристик.

3. Знайти частотні характеристики і намалювати їх графіки для наступних ланок: а) подвійний інтегратор; б) форсуєча ланка $(p + 2)/(p + 1)$; в) послідовно включені інтегратор і аперіодична ланка; г) послідовно включені диференціатор і аперіодична ланка; ґ) дві послідовно включені аперіодичні ланки; д) паралельно включені інтегратор і аперіодична ланка; е) диференціююча ланка.

4. Побудувати амплітудно-фазові частотні характеристики систем, структурні схеми яких зображені на рис. 3.5 і 3.6.

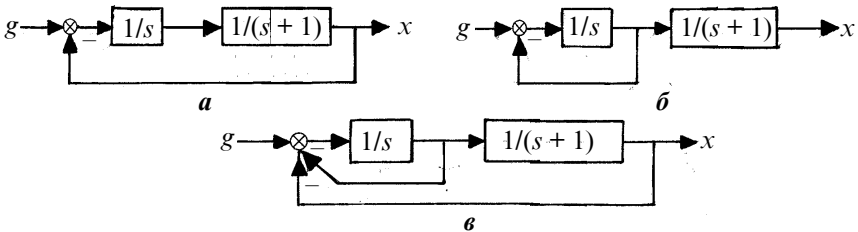


Рис. 3.5

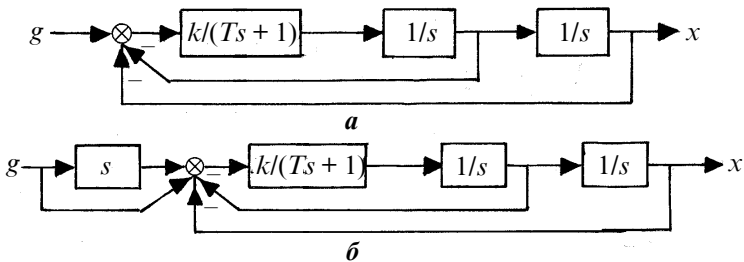


Рис. 3.6

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ САУ

Мета роботи – ознайомлення з алгебраїчними і частотними критеріями стійкості системи.

4.1. Постановка задачі

Задано одновірну розімкнуту лінійну систему управління, що описується передатною функцією $W(p)$. Використовуючи критерії стійкості Гурвица, Михайлова і Найквіста, визначити, чи стійка задана система в замкнутому стані.

4.2. Теоретичні відомості

Розглянемо одновірну стаціонарну систему управління, поводження якої описується диференціальним рівнянням

$$a_n x^{(n)}(t) + \dots + a_0 x(t) = b_m g^{(m)}(t) + \dots + b_0 g(t) \quad (4.1)$$

із початковими умовами $x(t_0) = x_0$; $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$, де $g(t)$ і $x(t)$ – вхідний і вихідний сигнали; t_0 – початковий момент часу.

Відповідно до зображення вихідного сигналу системи у вигляді суми вільного і вимушеного рухів, $(x(t) = x_{\text{в}}(t) + x_{\text{вм}}(t))$ вводяться певні поняття стійкості системи.

Система управління називається *стійкою за початковими даними*, якщо при ненульових обмежених початкових умовах вільний рух $x_{\text{в}}(t)$ обмежено при всіх $t \in [t_0, +\infty)$ і $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{\text{в}}(t) = 0$.

Система управління називається *стійкою за входом*, якщо при будь-якому обмеженому впливі $g(t)$ реакція системи $x_{\text{вм}}(t)$ є обмеженою в будь-який момент часу $t \in [t_0, +\infty)$.

Більш короткий термін – стійка система управління – вживається, якщо система стійка і за входом, і за початковими даними.

Алгебраїчні критерії стійкості. Для стійкості системи (4.1) за

початковими даними необхідно і достатньо, щоб корені лі характеристичного рівняння

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (4.2)$$

мали від'ємні дійсні частини: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$ – тобто розташовувалися в лівій півплощині комплексної площини.

Для перевірки від'ємності дійсних частин коренів характеристичного рівняння (4.2) можна використовувати *критерій Рауса–Гурвіца*.

Для стійкості системи (4.1) за початковими даними необхідно і достатньо, щоб кутові мінори Δ_i матриці

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

були позитивними: $\Delta_i > 0; i = 1, \dots, n$, де $\Delta_1 = a_{n-1}$, $\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{pmatrix}$

і т. д.

При заповненні квадратної порядку n матриці (4.3) відсутні в рівнянні (4.2) коефіцієнти a_{n-i} і a_i при $i > n$ замінюються нулями.

Якщо система стійка за початковими даними і порядок m диференціального оператора $M(p) = b_m p^m + \dots + b_0$ правої частини рівняння (4.1) не більший за порядок n диференціального оператора $D(p) = a_n p^n + \dots + a_0$ лівої частини, тобто $m \leq n$, то система (4.1) стійка за входом.

Необхідна умова стійкості: якщо система (4.1) стійка, то всі коефіцієнти характеристичного рівняння (4.2) позитивні.

Зауваження:

1. Перший критерій стійкості називається прямим, а другий – непрямим, тому що в цьому випадку процедура аналізу стійкості не потребує визначення коренів рівняння (4.2).

2. Коефіцієнт a_n у рівнянні (4.2) завжди можна зробити позитивним, наприклад, примноживши рівняння на (-1) .

3. Аналіз стійкості елементарних і типових ланок систем управління можна також виконати, використовуючи визначення і сформульовані критерії. Стійкими є підсилювальна, аперіодична (при $T > 0$) і коливальна (при $T > 0$, $0 < \xi < 1$) ланки. Диференціююча ланка не стійка за входом, а інтегруюча ланка не стійка і за входом, і за початковими даними.

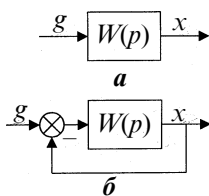


Рис. 4.1

Аналіз стійкості лінійних стаціонарних систем управління зручно проводити на основі двох **частотних критеріїв**. Критерій Михайлова застосовується для систем із відомою частотною характеристикою $W(j\omega)$ (рис. 4.1,*а*), а критерій Найквіста–Михайлова дозволяє судити про стійкість замкнутої системи (рис. 4.1,*б*) за частотною характеристикою $W(j\omega)$ розімкнутої системи.

Критерій Михайлова полягає в тому, що для стійкості (за початковими даними) системи управління (див. рис. 4.1) із передатною функцією

$$W(p) = \frac{M(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0} \quad (4.4)$$

необхідно і достатньо, щоб годограф характеристичного багаточлена $\Delta(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ охоплював початок координат на кут $\varphi = \pi/2n$, де n – порядок характеристичного багаточлена. Цей критерій дозволяє зробити висновок про стійкість системи за годографом характеристичного багаточлена.

Задача розв'язується за таким алгоритмом:

1. Визначити порядок n знаменника $\Delta(j\omega)$ передатної функції $W(j\omega)$ системи.
2. Побудувати на комплексній площині годограф багаточлена $\Delta(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ .
3. Обчислити величину кута j , на який годограф охоплює початок координат (точка $z = 0$): $\varphi = \Delta \underset{0 \leq \omega < \infty}{\text{Arg}} D(j\omega)$.
4. Перевірити здійснення умови $\varphi = \pi/2n$. Якщо умова вико-

нана, то система стійка за початковими даними. Якщо, крім того, порядок m чисельника передатної функції не більший за порядок n її знаменника, то система стійка і за входом. Якщо годограф характеристичного багаточлена проходить через початок координат, то система знаходиться на межі стійкості, залишаючись хитливою. На рис. 4.2 наведені приклади годографів характеристичних багаточленів стійких систем.

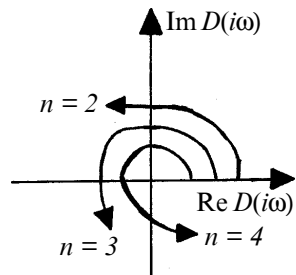


Рис. 4.2

За критерієм Найквіста–Михайлова аналізуються системи управління (див. рис. 4.1,б), замкнуті від'ємним одиничним зворотним зв'язком. Передатна функція розімкнутої системи має вигляд функції (4.4), причому багаточлени $M(p)$ і $D(p)$ не мають спільних коренів і порядок m чисельника не більший за порядок n знаменника.

Нехай передатна функція (4.4) має Π полюсів (з урахуванням їх кратності), що лежать у правій півплощині, і N полюсів, що лежать на уявній осі. У цьому випадку (при $\Pi + N > 0$) розімкнута система є хитливою. Незважаючи на це, замкнута система може виявитися стійкою.

Критерій формулюється таким чином: для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб годограф частотної характеристики $W(j\omega)$ розімкнутої системи при зміні частоти ω від 0 до ∞ охоплював точку $z = -1 + i0$ на кут $\pi/2(2\Pi + N)$:

$$\Delta \operatorname{Arg} (1 + W(j\omega)) = \frac{\pi}{2} (2\Pi + N). \quad (4.5)$$

$0 \leq \omega < \infty$

Задача розв'язується за таким алгоритмом:

1. Знайти передатну функцію $W(p)$ розімкнутої системи. Визначити кількість коренів знаменника передатної функції $W(p)$, що лежать у правій півплощині Π і на уявній осі N .

2. Побудувати на комплексній площині годограф функції $W(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ .

3. Підрахувати розмір кута φ , на який побудований годограф охоплює точку $z = -1 + i0$. Для цього потрібно побудувати вектор

із початком у критичній точці $-1 + i0$ та кінцем, що переміщається по годографу $W(j\omega)$, і обчислити розмір кута, на який повертається вектор при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$.

Перевірити здійснення умови $\varphi = \pi/2 (2П + Н)$. Якщо умова виконується, то система стійка, у противному разі – хитлива.

4.3. Приклади виконання роботи

Приклад 4.1. Дослідити стійкість системи, що описується диференціальним рівнянням $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x + 4x = g$. Тут $a_3 = 1$; $a_2 = 2$; $a_1 = 3$; $a_0 = 4$. Необхідна умова стійкості виконується. Складемо матрицю (4.3):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Обчислюємо кутові мінори:

$$\Delta_1 = 2 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\Delta_2 = 8 > 0.$$

Вони позитивні, отже, за другим критерієм, робимо висновок, що система є стійкою за початковими даними. Крім того, порядок $m = 0$ правої частини рівняння менший за порядок $n = 0$ лівої частини. Відповідно до третього критерія система стійка і за входом, тобто є стійкою.

Приклад 4.2. З'ясувати при яких значеннях параметра k система, що описується диференціальним рівнянням $x^{(4)} + 4x^{(3)} + 2x^{(2)} + 3\dot{x} + kx = g$, буде стійкою.

Тут $a_4 = 1$; $a_3 = 4$; $a_2 = 2$; $a_0 = k$. Необхідна умова стійкості виконується, якщо $k > 0$. Складемо матрицю (4.3):

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Для задоволення всіх умов критерія Рауса-Гурвіца повинні виконуватися такі нерівності:

$$\Delta_1 = 4 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 16k > 0; \Delta_4 = k\Delta_3 > 0.$$

Звідси $0 < k < 15/16$. Крім того, порядок $m = 0$ правої частини рівняння менший за порядок $n = 4$ лівої частини. Відповідно до другого і третього критеріїв система стійка при $0 < k < 15/16$.

Приклад 4.3. Знайти всі позитивні значення коефіцієнта підсилення k , при яких система, задана структурною схемою (рис. 4.3), буде стійкою.

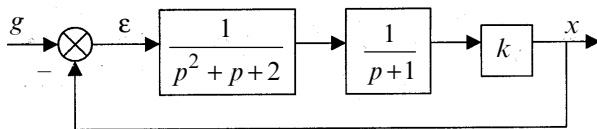


Рис. 4.3

За структурною схемою складаємо диференціальне рівняння. Рівняння елементів системи в операторній формі має вигляд

$$x = \frac{k}{(p+1)(p^2 + p + 2)} \varepsilon; \varepsilon = g - x.$$

Виключаючи ε , одержуємо рівняння $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x + (k+2)x = kg$. Складаємо матрицю (4.3):

$$\begin{pmatrix} 2 & k+2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & k+2 \end{pmatrix},$$

обчислюємо її кутові мінори: $\Delta_1 = 2 > 0$; $\Delta_2 = 4 - k$; $\Delta_3 = \Delta_2(k+2)$.

З умови їх позитивності робимо висновок, що при всіх система $k \in (0;4)$ буде стійкою за початковими даними. Оскільки порядок $n = 3$ диференціального оператора лівої частини більший за порядок $m = 0$ диференціального оператора правої частини, то при $k \in (0;4)$ система буде стійкою і за входом.

Приклад 4.4. Знайти всі позитивні значення коефіцієнта підсилення k , при яких система буде стійкою (рис. 4.4).

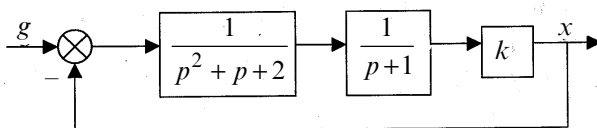


Рис. 4.4

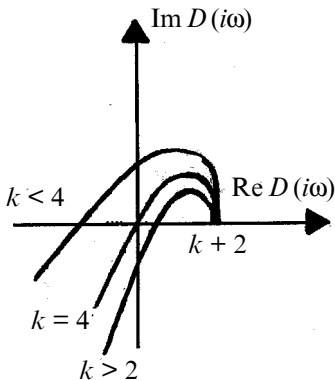
Передатна функція замкнутої системи має вигляд

$$W(p) = \frac{k}{p^3 + 2p^2 + 3p + k + 2}.$$

Знаменник цієї функції є багаточленом 3-го ступеня, тобто $n = 3$.

Побудуємо годограф цього багаточлена, розрахувавши значення $D(j\omega) = k + 2 - 2\omega^2 + j\omega(3 - \omega^2)$ при деяких частотах ω (рис. 4.5).

Як бачимо, при $k \in (0; 4)$ годограф проходить послідовно через I, II, III квадранти, охоплюючи точку $z = 0$ на кут $\varphi = 3\pi/2$.



ω	$D(j\omega)$
0	$k + 2$
$\sqrt{1 + \frac{k}{2}}$	$j \sqrt{1 + \frac{k}{2}} \left(2 - \frac{k}{2} \right)$
$\sqrt{3}$	$k - 4$
3	$k - 16 \cdot 18i$
∞	$-\infty - j\infty$

Рис. 4.5

При $k \in (4; \infty)$ годограф проходить через I, IV, III квадранти, а $\varphi = -\pi/2$.

Таким чином, при всіх $k \in (0; 4)$ система буде стійкою.

Приклад 4.5. Дослідити стійкість замкнутих систем (рис. 4.6).

Запишемо передатні функції для розімкнутих систем і визначимо кількість полюсів, що лежать на уявній осі та у правій півплощині:

$$\text{а) } W(p) = \frac{k}{Tp+1}; \quad H=0; \quad \Pi=0;$$

$$\text{б) } W(p) = \frac{k}{Tp-1}; \quad H=0; \quad \Pi=1.$$

Побудуємо годографи частотних характеристик (рис. 4.7).

Для системи "а" при будь-якому позитивному значенні k годограф не охоплює критичну точку $-1+i0$, тобто $\varphi = 0$. Тому рівняння (4.5) буде виконуватися і замкнута система буде стійкою при всіх $k > 0$. Для системи "б" можливі два випадки. Якщо $k \in (0; 1)$, то годограф частотної характеристики не охоплює критичної точки $-1+i0$, тобто $\varphi = 0$, і рівняння (4.5) не виконується:

$\Delta \text{Arg}(1+W(j\omega)) \neq \pi$. Отже, система хитлива.

Якщо $k > 1$, то годограф буде охоплювати точку $-1+i0$ на кут $\varphi = \pi$. Отже, система "б" стійка при всіх $k \in (1; \infty)$.

Приклад 4.6. Розімкнута система має передатну функцію $W(p) = (p+1)/(p^2+1)$. Чи буде замкнута система стійкою?

Дана передатна функція має два суто уявні полюси: $p_1 = i$; $p_2 = -i$, тобто $H = 2$ і $\Pi = 0$.

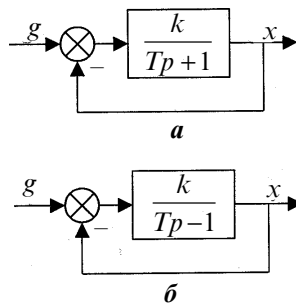


Рис. 4.6

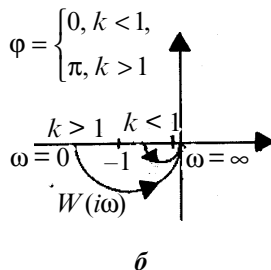
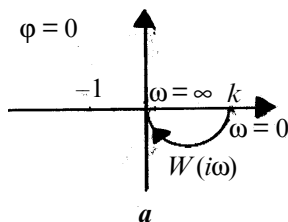
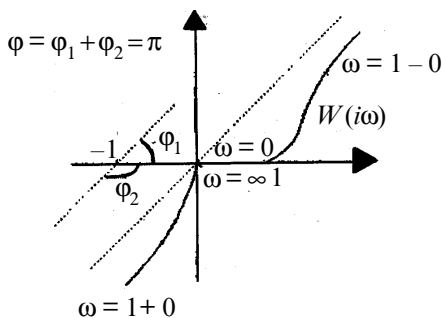


Рис. 4.7

За годографом частотної характеристики (рис. 4.8) з'ясовуємо величину $\Delta \text{Arg}(1+W(j\omega)) = \pi$.



ω	$W(i\omega) = \frac{1+i\omega}{1-\omega^2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$
$1-0$	$\infty + i\infty$
$1+0$	$-\infty + i\infty$
2	$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$
∞	$-0 - i0$

Рис. 4.8

Порівнюючи її з величиною $\varphi = (\pi/2)(2P + N) = \pi$, переконуємося, що критерій Найквіста–Михайлова виконується. Отже, замкнута система є стійкою.

4.4. Варіанти завдань

Об'єкт управління $W(p)$	Варіант	Параметри
$\frac{k(Tp+1)}{(T_1p+1)(T_2p+1)}$	1	$k = 3; T = 0,5; T_1 = 1; T_2 = 2$
	2	$k = 2,5; T = 0; T_1 = 3; T_2 = 0,5$
	3	$k = 2; T = 1,5; T_1 = 0,4; T_2 = 0,8$
	4	$k = 1; T = 4; T_1 = 0,5; T_2 = 3$
	5	$k = 1,6; T = 1; T_1 = 2,4; T_2 = 1,7$
	6	$k = 1,4; T = 0,5; T_1 = 0; T_2 = 0$
	7	$k = 2,4; T = 1,5; T_1 = 0,1; T_2 = 0,6$
$\frac{k(T_1p+1)(T_2p+1)}{p(Tp+1)}$	8	$k = 3,5; T = 1,4; T_1 = 0,2; T_2 = 1,3$
	9	$k = 2; T = 0,9; T_1 = 0,8; T_2 = 1,8$
	10	$k = 7; T = 0,4; T_1 = 1,7; T_2 = 0$
	11	$k = 2,7; T = 0,5; T_1 = 0,4; T_2 = 0,2$
	12	$k = 2,7; T_1 = 0,4; T_2 = 0,2$
	13	$k = 3,5; T_1 = 2; T_2 = 0,8$
	14	$k = 4; T_1 = 0,1; T_2 = 0,9$

Продовження

Об'єкт управління $W(p)$	Варіант	Параметри
$\frac{k}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$	15	$k = 5,8; T_1 = 3; T_2 = 0,6$
	16	$k = 8; T_1 = 0,5; T_2 = 1,6$
	17	$k = 6,5; T_1 = 0,7; T_2 = 3,4$
	18	$k = 4,8; T_1 = 0,9; T_2 = 3,2$
	19	$k = 5,7; T_1 = 1,6; T_2 = 4,6$
	20	$k = 7; T_1 = 1,2; T_2 = 0,8$
	21	$k = 7,4; T_1 = 2,3; T_2 = 0,8$
	22	$k = 8,5; T_1 = 1,9; T_2 = 0,5$
	23	$k = 6; T_1 = 0,85; T_2 = 0,3$
	24	$k = 5; T_1 = 0,18; T_2 = 0,3$
$\frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$	25	$k = 3; T_1 = 0,3; T_2 = 0,5$
	26	$k = 4; T_1 = 0,4; T_2 = 0,7$
	27	$k = 2; T_1 = 0,2; T_2 = 0,6$
	28	$k = 5; T_1 = 0,5; T_2 = 0,1$
	29	$k = 7; T_1 = 0,8; T_2 = 0,3$
	30	$k = 6; T_1 = 0,7; T_2 = 0,8$

Звіт включає в себе:

- 1) передатну функцію розімкнутої і замкнутої САУ з наведенням значень коефіцієнтів;
- 2) виведення розрахункових формул за всіма критеріями;
- 3) графіки годографів Михайлова і Найквіста, отримані на ЕОМ;
- 4) програми розрахунку і побудови характеристик. Висновки за роботою.

4.5. Контрольні питання і завдання

1. Характеристичне рівняння системи автоматичного регулювання двигуна має четвертий порядок ($n = 4$). Оцінити стійкість цієї системи, якщо коефіцієнти мають значення $a_4 = 3 \cdot 10^{-9}$; $a_3 = 1,7 \cdot 10^{-5}$; $a_2 = 4 \cdot 10^{-3}$; $a_1 = 0,185$ і $a_0 = 93$.

2. Оцінити стійкість роботи системи автоматичного регулювання у двох рівноважних режимах, якщо перехідні процеси системи описуються диференціальним рівнянням третього порядку ($n = 3$). У першому режимі $a_3 = 0,01$; $a_2 = 0,5$; $a_1 = 1,4$; $a_0 = 20$; у другому режимі $a_3 = 0,01$; $a_2 = 0,3$; $a_1 = 1,5$; $a_0 = 70$. Скористатися критеріями стійкості Рауса–Гурвіца.

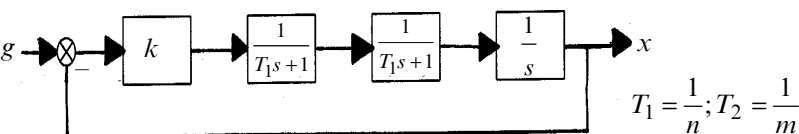
3. Визначити стійкість системи автоматичного регулювання двигуна внутрішнього згорання за допомогою критеріїв Рауса–Гурвіца, якщо перехідні процеси системи описуються диференціальним рівнянням виду

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3} + 400\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 6040\frac{d\varphi}{dt} + 10600\varphi = 0.$$

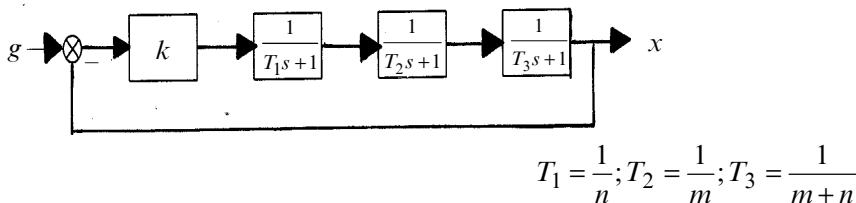
4. Визначити стійкість системи автоматичного регулювання двигуна, якщо рівняння системи має третій порядок ($n = 3$), а коефіцієнти мають значення $a_3 = 0,1 \cdot 10^{-3}$; $a_2 = 4 \cdot 10^{-2}$; $a_1 = 0,604$ і $a_0 = 1,06$. Скористатися критерієм стійкості Михайлова.

5. Визначити стійкість системи автоматичного регулювання за допомогою критерія стійкості Михайлова, якщо коефіцієнти лінійного диференціального рівняння мають значення $a_3 = 17,25 \cdot 10^{-6}$; $a_2 = 85,95 \cdot 10^{-4}$; $a_1 = 9,35 \cdot 10^{-2}$ і $a_0 = 125,65 \cdot 10^{-2}$.

6. Використовуючи критерій Михайлова, знайти всі позитивні значення коефіцієнта підсилення k , при яких системи, зображені на рис. 4.9, будуть стійкими.

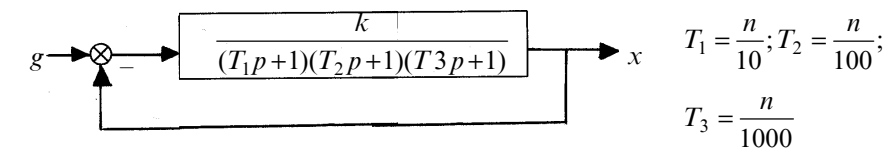


а

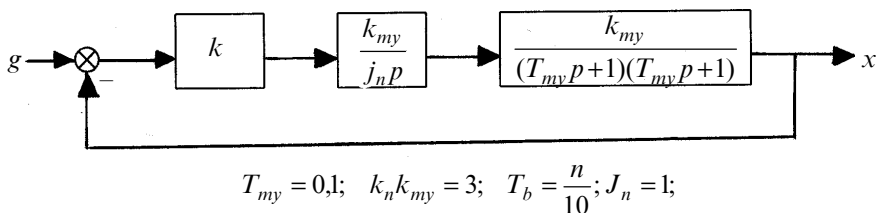


б

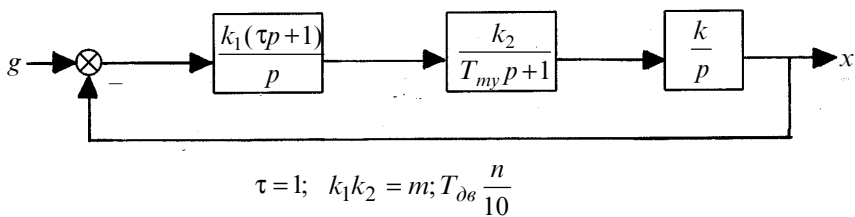
Рис. 4.9



a



б



в

Рис. 4.10

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ

Мета роботи – вивчити поведінку лінійних систем управління при випадкових впливах.

5.1. Постановка задачі

Відомі вхідний сигнал $g(t)$, заданий своїми статистичними характеристиками $m_g(t), R_g(t_1, t_2)$; система, що описується диференціальним рівнянням (5.4); нульові початкові умови: $m_0 = 0; D_0 = 0$.

Знайти статистичні характеристики вихідного сигналу $m_x(t); R_x(t_1, t_2)$.

5.2. Теоретичні відомості

У системах управління, що схильні до випадкових впливів, сигнали є випадковими процесами. Їх характеризують кілька моментів:

математичне чекання $m_g(t) = M[g(t)] = \int_{R^n} gp(t, g) dg$, де M – операція обчислення математичного чекання; $g(t)$ – вектор вхідного сигналу; $p(t, g)$ – щільність ймовірності випадкового процесу $g(t)$;

кореляційна функція $R_g(t_1, t_2) = M\{[g(t_1) - m_g(t_1)][g(t_2) - m_g(t_2)]^T\}$,

де t_1 і t_2 – два моменти часу. Кореляційна функція є симетричною: $R_g(t_1, t_2) = R_g(t_2, t_1)$. При $t_1 = t_2$ кореляційна функція являє собою кореляційну матрицю $R_g(t) = R_g(t, t)$, на головній діагоналі якої знаходяться дисперсії кожної компоненти вектора $g(t)$: $D_i = R_{g_{ii}}(t) = M\{[g_i(t) - m_{g_i}(t)]^2\}$.

окремим варіантом випадкових процесів є білий шум $N(t)$, що має нульове математичне чекання і кореляційну функцію $R_N(t_1, t_2) = S_0(t_1)\delta(t_1 - t_2)$, де $S_0(t_1)$ – інтенсивність шуму, симетрична невід'ємно визначена матриця; $\delta(t_1 - t_2)$ – симетрична дельта-функція.

ція, що задовольняє умові

$$\int_a^b f(t)\delta(t-\tau)dt = \begin{cases} 0, \tau \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty), \\ f(\tau), \tau \in (a, b), \\ 0,5 f(a), \tau = a, \\ 0,5 f(b), \tau = b \end{cases}$$

для будь-якої безупинної в точці τ функції $f(t)$.

Стационарні випадкові процеси мають постійні в часі математичні чекання, а їх кореляційні функції залежать від різниці своїх аргументів: $t_1 - t_2 = \eta$. Тому останні можна розглядати як функції одного аргументу: $R_g(t_1, t_2) = R_g(t_1 - t_2) = R_g(\eta)$.

Дисперсія стаціонарних процесів постійна і дорівнює $D = R_g(0)$. Наприклад, стаціонарний білий шум має нульове математичне чекання і кореляційну функцію $R_N(t_1, t_2) = R_g(t_1 - t_2) = R_g(\eta)$, або $R_N(\eta) = S_0 \delta(\eta)$, де S_0 – постійна матриця шуму.

Спектральною щільністю називається перетворення Фур'є кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу:

$$S_g(\omega) = F[R_g(\eta)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta. \quad (5.1)$$

Ця функція частоти в силу парності функції $R_g(\eta)$ є парною. Формула переходу від спектральної щільності до кореляційної функції визначається оберненим перетворенням Фур'є:

$$R_g(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) e^{j\omega\eta} d\omega. \quad (5.2)$$

При $\eta = 0$ у силу симетрії $S_g(\omega)$ одержимо формулу для обчислення дисперсії

$$D_g = R_g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_g(\omega) d\omega. \quad (5.3)$$

Поведінка одновірних систем управління описується диференціальним рівнянням

$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + \dots + a_0(t)x(t) = b_m(t) \frac{d^m g(t)}{dt^m} + \dots + b_0(t)g(t), \quad (5.4)$$

де $g(t)$, $x(t)$ – вхідний і вихідний сигнали; n і m – числа; $a_n(t), \dots, a_0(t)$, $b_m(t), \dots, b_0(t)$ – коефіцієнти, що залежать від поточного часу t .

Вхідний вплив подається на систему в момент $t = t_0 = 0$. Початкові умови вважаються нульовими, тому параметри розподілу вектора $x(0)$ $m_0 = 0$; $D_0 = 0$ – відповідно початкові математичне чекання і дисперсія.

Закон зміни математичного чекання вихідного сигналу має вигляд

$$m_x(t) = \int_0^t k(t, \tau) m_g(\tau) d\tau, \quad (5.5)$$

де $k(t, \tau)$ – імпульсна перехідна функція системи; $m_g(t)$ – математичне чекання вхідного сигналу.

Кореляційна функція вихідного сигналу визначається за формулою

$$R_x(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} k(t_1, \tau_1) k(t_2, \tau_2) R_g(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \quad (5.6)$$

де $R_g(\tau_1, \tau_2)$ – кореляційна функція вхідного сигналу.

Для будь-якого моменту часу $t \geq 0$ дисперсія знаходиться, якщо у формулі (5.6) покласти $t_1 = t_2 = t$:

$$D_x(t) = \int_0^t \int_0^t k(t, \tau_1) k(t, \tau_2) R_g(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1. \quad (5.7)$$

Якщо вхідний сигнал є стаціонарним білим шумом із кореляційною функцією $R_g(t_1, t_2) = S_0 \delta(t_1 - t_2)$, формули (5.6) та (5.7) мають вигляд

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} S_0 \int_0^{t_2} k(t_1, \tau_2) k(t_2, \tau_2) d\tau_2, & t_1 \geq t_2, \\ S_0 \int_0^{t_1} k(t_1, \tau_1) k(t_2, \tau_1) d\tau_1, & t_2 \geq t_1, \end{cases} \quad D_x(t) = S_0 \int_0^t k^2(t, \tau) d\tau. \quad (5.8)$$

Розв'язання задачі здійснюється за одним із двох алгоритмів.

I. 1. Знайти імпульсну перехідну функцію системи.

2. За формулою (5.5) визначити закон зміни математичного чекання вихідного сигналу.

3. За формулами (5.6) та (5.7) знайти кореляційну функцію і дисперсію вихідного сигналу.

II. 1. Знайти спектральну щільність вхідного сигналу $S_g(\omega)$ за формулою (5.1). Оскільки функція $R_g(\eta)$ є парною, тобто $R_g(-\eta) = R_g(\eta)$, може бути використана еквівалентна форма косинуса-перетворення Фур'є:

$$S_g(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\eta) \cos(\omega \eta) d\eta. \quad (5.9)$$

2. Визначити частотну характеристику системи $W(j\omega)$.

3. Знайти математичне чекання вихідного сигналу в стаціонарному режимі:

$$m_x = \frac{b_0}{a_0} m_g. \quad (5.10)$$

4. Обчислити спектральну щільність вихідного сигналу за формулою

$$S_x(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_g(\omega). \quad (5.11)$$

5. Знайти кореляційну функцію $R_x(\omega)$ і дисперсію D_x вихідного сигналу за формулами (5.2) та (5.3). Тут іноді корисним виявляється опис спектральної щільності у вигляді

$$S_x(\omega) = S_x(j\omega) + S_x(-j\omega). \quad (5.12)$$

Тоді, замінюючи $j\omega = s$ і застосовуючи обернене перетворення Лапласа, маємо

$$R_x(\eta) = \begin{cases} L^{-1}[S_x(s)], & \eta \geq 0, \\ L^{-1}[S_x(-s)], & \eta < 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

5.3. Приклади виконання роботи

Приклад 5.1. Для системи, що описується рівнянням $\dot{x}(t) + 2x(t) = g(t)$, де $m_g(t) = 0$; $R_g(t_1, t_2) = \delta(t_1, t_2)$, знайти $m_x(t)$; $D_x(t)$; $R_x(t_1, t_2)$ при нульових початкових умовах.

Знайдемо імпульсну перехідну функцію системи. Одинична перехідна функція системи задовольняє рівнянню $\dot{h}(\eta) + 2h(\eta) = 1$, де $h(0) = 0$. Звідси $h(\eta) = 1/2(1 - e^{-2\eta})$, а імпульсна перехідна функція $k(\eta) = \dot{h}(\eta) = e^{-2\eta}$ або $k(t, \tau) = e^{-2(t-\tau)}$, тому що $\eta = t - \tau$.

За формулою (5.5) з урахуванням $m_g(t) = 0$ маємо $m_x(t) = 0$.

З (5.8) маємо

$$D_x(t) = \int_0^t e^{-4(t-\tau)} d\tau = \frac{e^{-4(t-\tau)}}{4} \Big|_0^t = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t});$$

$$R_x(t_1, t_2) = \begin{cases} \int_0^{t_2} e^{-2(t_1-\tau_2)} e^{-2(t_2-\tau_2)} d\tau_2, & t_1 \geq t_2, \\ \int_0^{t_1} e^{-2(t_1-\tau_1)} e^{-2(t_2-\tau_1)} d\tau_1, & t_2 \geq t_1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-2(t_1+t_2)} [e^{4t_2} - 1], & t_1 \geq t_2, \\ \frac{1}{4} e^{-2(t_1+t_2)} [e^{4t_1} - 1], & t_2 \geq t_1. \end{cases}$$

Зауважимо, що вхідний сигнал – стаціонарний білий шум, а вихідний сигнал у силу стаціонарності й стійкості системи стає стаціонарним при $t \rightarrow +\infty$. Тоді

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D_x(t) = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow +\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} R_x(t_1, t_2) = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow +\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{4} [e^{-2(t_1-t_2)} - e^{-2(t_1+t_2)}] = \frac{1}{4} e^{-2\eta} = D_x(\eta),$$

де $\eta = t_1 - t_2, t_1 \geq t_2$.

Приклад 5.2. Знайти спектральну щільність стаціонарного білого шуму з інтенсивністю S_0 .

Оскільки $R_g(\eta) = S_0 \delta(\eta)$, використовуючи (5.1), одержуємо

$$S_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \delta(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta = S_0.$$

Приклад 5.3. Знайти спектральну щільність сигналу, кореляційна функція якого

$$R_g(\eta) = \begin{cases} 1 - |\eta|, & |\eta| < 1, \\ 1 - |\eta|, & |\eta| \geq 1. \end{cases}$$

За формулою (5.9)

$$\begin{aligned} S_g(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\eta) \cos(\omega\eta) d\eta = 2 \int_0^1 (1 - \eta) \cos(\omega\eta) d\eta = \\ &= \frac{2}{\omega} \int_0^1 (1 - \eta) d \sin(\omega\eta) = \frac{2}{\omega} \left[(1 - \eta) \sin \omega\eta \Big|_0^1 + \int_0^1 \sin \omega\eta d\eta \right] = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega). \end{aligned}$$

Приклад 5.4. Знайти кореляційну функцію і дисперсію для стаціонарного випадкового процесу зі спектральною щільністю

$$S_g(\omega) = \begin{cases} S, & |\omega| \leq \omega_{\Pi}, \\ 0, & |\omega| > \omega_{\Pi}, \end{cases}$$

де $\omega_{\Pi} > 0$.

У силу парності заданої функції $S_g(\omega)$ за формулою (5.2) маємо

$$\begin{aligned} R_g(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) e^{j\omega\eta} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) \cos \omega\eta \, d\omega + \\ &+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) \sin \omega\eta \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_g(\omega) \cos \omega\eta \, d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\Pi}} S_g(\omega) \cos \omega\eta \, d\omega = \frac{S \sin \omega\eta}{\pi \eta} \Big|_0^{\omega_{\Pi}} = \frac{S}{\pi\eta} \sin \omega_{\Pi}\eta; \\ D_g &= R_g(0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{S \sin \omega_{\Pi}\eta}{\pi\eta} = \frac{S\omega_{\Pi}}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_{\Pi}\eta}{\omega_{\Pi}\eta} = \frac{S\omega_{\Pi}}{\pi}. \end{aligned}$$

Приклад 5.5. Визначити дисперсію і кореляційну функцію вхідного сигналу системи, що описується диференціальним рівнянням $T\dot{x}(t) + x(t) = kg(t)$, на вхід якої подається стаціонарний білий шум із математичним чеканням m_g та інтенсивністю S_0 .

Кореляційна функція вхідного сигналу $R_g(\eta) = S_0\delta(\eta)$. З прикладу 5.3 витікає, що $S_g(\omega) = S_0$.

Знайдемо частотну характеристику системи:

$$W(j\omega) = \frac{M(p)}{D(p)} \Big|_{p=s=j\omega} = \frac{k}{Tp+1} \Big|_{p=s=j\omega} = \frac{k}{Tj\omega+1}.$$

За формулою (5.10) з урахуванням того, що $a_0 = 1$; $b_0 = k$, отримаємо

$$m_x = \frac{k}{1} m_g = k m_g.$$

Обчислюємо спектральну щільність вихідного сигналу. Оскільки

$$|W(i\omega)|^2 = \left| \frac{k}{Ti\omega + 1} \right|^2 = \frac{k^2}{|Ti\omega + 1|^2} = \frac{k^2}{1 + T^2\omega^2},$$

то

$$S_x(\omega) = \frac{k^2}{1 + T^2\omega^2} S_0 = \frac{S_0 k^2}{2} \left(\frac{1}{1 + Ti\omega} + \frac{1}{1 - Ti\omega} \right)$$

За формулою (5.12) $S_x(i\omega) = \frac{S_0 k^2}{2(1 + Ti\omega)}$, а з (5.13) витікає, що

$$R_x(\eta) = L^{-1}[S_x(s)] = L^{-1} \left[\frac{S_0 k^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + Ts} \right] = L^{-1} \left[\frac{S_0 k^2}{2T} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right] = \frac{S_0 k^2}{2T} e^{-\frac{\eta}{T}};$$

$$\eta \geq 0.$$

Скориставшись парністю $R_x(\eta)$, одержуємо

$$R_x(\eta) = \frac{S_0 k^2}{2T} e^{-\frac{|\eta|}{T}}; \quad D_x = R_x(0) = \frac{S_0 k^2}{2T}.$$

При $T = 1$, $k = 1$, $S_0 = 1$, $m_g = 1$: $m_x = 1$, $R_x(\eta) = 1/2 e^{-|\eta|}$, $D_x = 1/2$.

Приклад 5.6. Задана система (рис. 5.1) з

$W_p(s) = k/s$, на вхід якої надходить сигнал із

кореляційною функцією $R_g(\eta) = N/2T e^{-\frac{|\eta|}{T}}$;

$k = 3$; $T = 2$; $N = 10$ і $m_g = 2$.

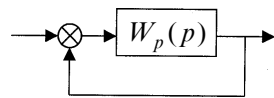


Рис. 5.1

Потрібно знайти математичне чекання m_x і дисперсію D_x вхідного сигналу в стаціонарному режимі.

Використовуючи результат прикладу (5.6), визначаємо спектральну щільність вхідного сигналу:

$$S_g(\omega) = \frac{N}{1 + T^2 \omega^2}.$$

Одержимо частотну характеристику. Для цього знайдемо передатну функцію за формулою для з'єднання з від'ємним зворотним зв'язком:

$$W(s) = \frac{\frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s}} = \frac{k}{k + s}.$$

Відповідне диференціальне рівняння в операторній формі має вид $(p + k)x = kg$ або $\dot{x} + kx = kg$.

$$W(i\omega) = \left. \frac{k}{k + s} \right|_{s=i\omega} = \frac{k}{k + i\omega}.$$

Оскільки $a_0 = k$; $b_0 = k$, за формулою (5.10) одержуємо $m_x = (k/k)2 = 2$.

Знайдемо спектральну щільність вихідного сигналу. Оскільки

$$|W(i\omega)|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2}, \quad \text{то } S_x(\omega) = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2} \cdot \frac{N}{1 + T^2 \omega^2}.$$

За формулою (5.10)

$$D_x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{Nk^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{T^2 \omega^4 + (1 + T^2 k^2) \omega^2 + k^2}.$$

Користуючись таблицями інтегралів, маємо

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^4 + 2bx^2 + c} = \frac{\pi}{2\sqrt{2c(b + \sqrt{ac})}},$$

де $a = T^2$; $b = \frac{1+T^2k^2}{2}$; $c = k^2$. Отже, $D_x = 15/7$.

5.4. Варіанти завдань

1. Для системи, що описується диференціальними рівняннями (табл. 5.1), на вхід якої надходить випадковий сигнал $g(t)$ із відомим математичним чеканням $m_g(t)$ і кореляційною функцією $R_g(t_1, t_2)$, знайти закони зміни математичного чекання $m_x(t)$ і кореляційної функції вихідного сигналу $R_x(t_1, t_2)$.

Таблиця 5.1

Варіант	Диф. рівняння	$R_g(t_1, t_2)$	$m_g(t)$	$m_0(t)$	R_0	T	k
1	$T\ddot{x}(t) + x(t) = kg(t)$	$R_g(t_1, t_2) = e^{-2t_1}\delta(t_1 - t_2)$	2	1	0	1	1
2			0	1	1	1	2
3			4	2	0	2	1
4			1	2	1	1	2
5			3	1	0	1	1
6	$T\ddot{x}(t) + 2x(t) = kg(t)$	$R_g(t_1, t_2) = \delta(t_1 - t_2)$	2	1	1	2	2
7			0	2	0	1	1
8			4	2	1	1	2
9			1	1	0	2	1
10			3	1	1	1	2

2. Задана система (див. рис. 5.1) з $W_p(p)$ (див. таб. 5.2), на вхід якої надходить сигнал із кореляційною функцією $R_g(\eta) = N/2T e^{\frac{-|\eta|}{T}}$; $k=3$; $T=2$; $N=10$ і $m_g=2$.

Потрібно знайти математичне чекання m_x і дисперсію D_x вихідного сигналу в стаціонарному режимі.

Таблиця 5.2

Варіант	$W_p(s)$	$m_g(t)$	N	T	k
1	$\frac{k}{s+1}$	2	10	1	1
2		0	10	1	2
3		4	20	2	1
4		1	20	1	2
5		3	10	1	1
6	$\frac{k}{s^2}$	2	10	2	2
7		0	20	1	1
8		4	20	1	2
9		1	10	2	1
10		3	10	1	2

Звіт включає в себе:

- 1) вихідну передатну функцію САУ з наведенням значень коефіцієнтів;
- 2) вхідний сигнал $g(t)$, заданий своїми статистичними характеристиками $m_g(t)$, $Rg(t_1, t_2)$;
- 3) розрахунок $m_x(t)$, $R_x(t_1, t_2)$, D_x ;
- 4) графіки заданих та отриманих характеристик, одержані на ЕОМ;
- 5) програми розрахунку і побудови характеристик;
- 6) висновки за роботою: порівняння заданих та отриманих графіків статистичних характеристик сигналів.

5.5. Контрольні питання і завдання

1. Диференціальне рівняння системи автоматичного регулювання двигуна з регулятором прямої дії при $T_p^2 \approx 0$ можна представити у вигляді

$$A_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + A_1 \frac{d\varphi}{dt} + A_0\varphi = B_1 \frac{d\alpha_\delta}{dt} - B_0\alpha_\delta,$$

де $A_2 = 0,04 \text{ с}^2$; $A_1 = 0,604 \text{ с}$; $A_0 = 1,06 \text{ с}$; $B_1 = T_\alpha = 0,2 \text{ с}$; $B_0 = Q_\alpha = 0,6 \text{ с}$.

На систему автоматичного регулювання впливає випадкове збурення у вигляді зміни навантаження $\alpha_\delta(t)$. Спектральна щіль-

ність цього процесу $S_{\alpha_\delta}(\omega) = 2T(DA)_{\alpha_\delta} / (1 + T^2\omega^2)$, де $T = 0,2$ с; $(DA)_{\alpha_\delta} = 0,005$. Визначити спектральну щільність помилки на виході системи. Побудувати графіки $S_{\alpha_\delta}(\omega)$, $S_\varphi(\omega)$, порівняти їх і зробити висновок про особливості проходження випадкового сигналу через динамічну систему.

2. Якщо $T_p^2 \neq 0$, то диференціальне рівняння системи автоматичного регулювання двигуна з регулятором прямої дії приймає вид

$$A_3 \frac{d^3\varphi}{dt^3} + A_2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + A_1 \frac{d\varphi}{dt} + A_0\varphi = -B_2 \frac{d\alpha_\delta}{dt} - B_1 \frac{d\alpha_\delta}{dt} - B_0\alpha_\delta,$$

де $A_3 = 0,0001$ с³, $B_2 = 0,009$ с², а інші коефіцієнти мають ті ж самі значення, що і у п. 1. Приймавши випадковий процес $\alpha_\delta(t)$ так само, як і у п. 1, визначити спектральну щільність помилки на виході $S_\varphi(\omega)$ системи. Побудувати графік $S_\varphi(\omega)$. Порівняти результати, отримані при розв'язанні задач 5.1 і 5.2.

Зображення за Лапласом й оригінали

Зображення $L\{f(t)\}$	Оригінал $f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{S}$	$1(t)$
$\frac{1}{S^2}$	$t \cdot 1(t)$
$\frac{1}{TS+1}$	$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{S(TS+1)}$	$1 - e^{-\frac{t}{T}}$
$\frac{1}{T^2 S^2 + 1}$	$\frac{1}{T} \sin \frac{1}{T} t$
$\frac{1}{S(T^2 S^2 + 1)}$	$1 - \cos \frac{1}{T} t$
$\frac{1}{(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}$	$\frac{1}{T_1 - T_2} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} + e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$
$\frac{1}{S(T_1 S + 1)(T_2 S + 1)}$	$1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$
$\frac{1}{T^2 S^2 + 2\xi TS + 1}$	$C e^{-\gamma t} \sin \lambda t, \lambda = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2},$ $C = \frac{1}{\lambda T^2}, \gamma = \frac{\xi}{T}$
$\frac{1}{S(T^2 S^2 + 2\xi TS + 1)}$	$1 - C e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \theta), \gamma = \frac{\xi}{T},$ $\lambda = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \xi^2}, C = \frac{1}{\lambda T}, \theta = \arctg \frac{\lambda}{\gamma}$
$\frac{1}{S} e^{-\tau S}$	$1(t - \tau)$

Правила структурних перетворень

Перетворення	Структурна схема	
	Вихідна	Еквівалентна
Перенос точки розгалуження через елемент		
Перенос суматора через елемент		
Винос точки розгалуження з рівнобіжного з'єднання		
Винос точки розгалуження з контуру зворотного зв'язку		

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Крутов В.И. Сборник задач по автоматическому регулированию двигателей внутреннего сгорания: Учеб. пособие для студентов вузов по спец. "Двигатели внутреннего сгорания". – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1990. – 320 с.
2. Кубрак А.И., Ярощук Л.Д. Програмування та розрахунок автоматичних систем. – К.: Вища шк., 1992. – 366 с.
3. Михайлов В.С. Теория управления. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 312 с.
4. Никольцев Е.В. Практикум по теории управления в среде MATLAB: Учеб. пособие. – М.: МГАПИ, 2002. – 88 с.
5. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1997. – 264 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 315.
7. Тютюнник А.Г. Оптимальні і адаптивні системи автоматичного керування: Навч. посіб. – Житомир: ЖІТІ, 1998. – 512 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
<i>Лабораторна робота № 1. Типові динамічні ланки</i>	4
1.1. Постановка задачі	4
1.2. Теоретичні відомості	4
1.3. Приклад виконання роботи	7
1.4. Варіанти завдань	12
1.5. Контрольні питання і завдання	13
<i>Лабораторна робота № 2. Лінійна система автоматичного регулювання</i>	16
2.1. Постановка задачі	16
2.2. Теоретичні відомості	16
2.3. Приклад виконання роботи	21
2.4. Варіанти завдань	25
2.5. Контрольні питання і завдання	26
<i>Лабораторна робота № 3. Частотні характеристики САУ</i>	27
3.1. Постановка задачі	27
3.2. Теоретичні відомості	27
3.3. Приклади виконання роботи	31
3.4. Варіанти завдань	36
3.5. Контрольні питання і завдання	37
<i>Лабораторна робота № 4. Аналіз стійкості САУ</i>	38
4.1. Постановка задачі	38
4.2. Теоретичні відомості	38
4.3. Приклади виконання роботи	42
4.4. Варіанти завдань	46
4.5. Контрольні питання і завдання	47
<i>Лабораторна робота № 5. Випадкові процеси в системах управління</i>	50
5.1. Постановка задачі	50
5.2. Теоретичні відомості	50
5.3. Приклади виконання роботи	54
5.4. Варіанти завдань	59
5.5. Контрольні питання і завдання	60
Додаток А	62
Додаток В	63
Список літератури	64

**ШНЕЙДЕР Олена Борисівна
ЛУК'ЯНЕНКО Петро Вадимович
КНИРІК Наталія Ромуальдівна**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт з дисципліни
"Сучасна теорія управління"**

Частина 1

Видавництво НУК, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1150 від 12.12.2002 р.

Редактор Л.К. Сокол
Комп'ютерна правка та верстка Н.В. Чудновцева
Коректор Н.О. Шайкіна

Підписано до друку 18.11.04. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 3,8. Обл.-вид. арк. 4,1. Тираж 100 прим.
Вид. № 7. Зам. № 323.
Ціна договірна.



ВИДАВНИЦТВО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ



Шановні панове!

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника в повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати *підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки*, – ми до Ваших послуг.

© Національний університет кораблебудування

✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5,

видавництво НУК

☎ 8(0512) 47-83-86; 39-81-42, 39-73-39, fax 8(0512) 42-46-52;

E-mail: publishing@usmtu.edu.ua

ДЛЯ НОТАТОК