

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Рябенський В.М., Буряк В.С.

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ І ПРАКТИКИ
ВИКОРИСТАННЯ СИГНАЛІВ У СИСТЕМАХ ЗВ'ЯЗКУ**

Навчальний посібник

Миколаїв

НУК

2022

УДК 621.372.54(072)

Р98

*Рекомендовано Методичною Радою
Навчально-наукового інституту автоматики та електротехніки*

Рекомендовано Вченою Радою НУК

Укладачі:

Рябенський В.М., доктор технічних наук, професор,
зав. кафедри програмованої електроніки, електротехніки і телекомунікацій
Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова

Буряк В.С., старший викладач
кафедри програмованої електроніки, електротехніки і телекомунікацій
Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова

Рецензенти:

Ушкаренко О.О., доктор технічних наук, професор,
професор кафедри програмованої електроніки, електротехніки і телекомунікацій
Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова

Смирнов В.С., доктор технічних наук, професор,
професор кафедри автоматизації теплоенергетичних процесів
Національного технічного університету «Київський політехнічний інститут
ім. Ігоря Сікорського»

Р98 Рябенський В.М., Буряк В.С. Основи теорії і практики використання сигналів у системах зв'язку. – Миколаїв: НУК, 2022. – 122 с.

УДК 621.372.54(072)

© Рябенський В.М., Буряк В.С., 2022

© НУК ім. адмірала Макарова, 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	5
ТЕМА 1. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ, ЇХ МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТА ВИКОРИСТАННЯ.....	6
1.1. Основні теоретичні положення.....	6
1.2. Аналіз та використання джерел сигналів віртуальної лабораторії Multisim	11
1.3. Питання до теми	12
ТЕМА 2. ДИНАМІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИГНАЛІВ.....	14
2.1. Елементарні функції представлення сигналів	14
2.2. Практична реалізація різних типів сигналів з використанням віртуальної лабораторії Multisim	18
2.3. Питання до теми	23
ТЕМА 3. СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ	24
3.1. Основні теоретичні положення. Тригонометричний ряд Фур'є. Спектр періодичного сигналу	24
3.2. Амплітудний і фазовий спектри періодичної послідовності прямокутних імпульсів.....	26
3.3. Комплексна форма ряду Фур'є	32
3.4. Практична оцінка спектральних характеристик різних типів сигналів	34
3.5. Питання до теми	35
ТЕМА 4. ВИВЧЕННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДИНИЧНИХ ІМПУЛЬСІВ.....	37
4.1. Основні теоретичні положення.....	37
4.2. Властивості спектральної щільності	41
4.3. Спектри неінтегрованих сигналів.....	44
4.4. Енергетичний спектр сигналів.....	46
4.5. Практичне дослідження спектрів одиничних імпульсів та їх властивостей	50
4.6. Питання до теми	52
ТЕМА 5. ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ.....	54
5.1. Основні теоретичні положення.....	54
5.2. Використання Multisim для генерування випадкових процесів	57
5.3. Оцінка ймовірнісних характеристик випадкових процесів.....	60
ТЕМА 6. КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ	61
6.1. Основні теоретичні положення.....	61
6.2. Спектри ймовірнісних процесів.....	68
6.3. Практичні схеми для визначення кореляційних характеристик двох процесів.	71
6.4. Експериментальна перевірка кореляційних процесів.....	72
6.5. Питання до теми	73

ТЕМА 7. СПЕКТРАЛЬНО-КОРЕЛЯЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	74
7.1. Спектри ймовірнісних процесів.....	74
7.2. Властивості спектральної щільності	76
7.3. Спектральна щільність на комплексній площині.....	78
7.4. Зв'язок між спектральною щільністю та кореляційною функцією	78
7.5. Ефективна ширина спектра	80
7.6. Взаємна спектральна щільність	80
7.7. Безпосереднє використання спектрально-кореляційних характеристик сигналів.....	81
7.8. Практичне вивчення спектральних характеристик випадкових процесів	83
7.9. Завдання та приклади до теми	85
ТЕМА 8. ПРОХОДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНІ ІНЕРЦІЙНІ КОЛА	86
8.1. Коротка характеристика лінійних систем.....	86
8.2. Знаходження спектрально-кореляційних характеристик процесів на виході лінійної системи	87
ТЕМА 9. ДОСЛІДЖЕННЯ ЙМОВІРІСНИХ ТА СПЕКТРАЛЬНО-КОРЕЛЯЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВУЗЬКОПОЛОСНИХ ПРОЦЕСІВ	90
9.1. Основні теоретичні положення.....	90
9.2. Практична реалізація і аналіз вузькополосного процесу	92
9.3. Експериментальне дослідження вузькополосного випадкового процесу	93
ТЕМА 10. ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ПРОХОДЖЕННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ І ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ НЕЛІНІЙНІ ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ.....	94
10.1. Основні теоретичні положення.....	94
10.2. Питання та завдання до теми	98
ТЕМА 11. МОДУЛЬОВАНІ СИГНАЛИ.....	100
11.1. Загальна характеристика модуляції.....	100
11.2. Спектри амплітудно-модульованих коливань.....	101
11.3. Спектри сигналів з кутовою модуляцією.....	107
11.4. Сигнали з дискретною модуляцією	112
11.5. Питання та завдання до теми	121

ВСТУП

Протягом останніх десятиліть відбувається поступове зближення таких навчально-наукових напрямів, як радіотехніка, електроніка і телекомунікації. Підґрунтям такого зближення є інформаційна складова, що є характерною для вказаних напрямів, незважаючи на різні задачі їх використання. На практиці виникла така галузь, як інфокомунікації, що охоплює розподілені на значному просторі об'єкти контролю та керування.

Основою інформаційного забезпечення різних галузей є інформаційні системи, до яких відносяться системи телекомунікацій, радіозв'язку, телебачення, радіолокації, радіонавігації, радіотелеметрії тощо. Їхньою загальною характеристикою є сигнали, що дозволяють їх вивчати і проектувати з використанням спільного підходу – технологій обробки сигналів.

У будь-якій інформаційній системі можна виділити три основні складові:

- засоби передачі повідомлень;
- середовище передачі повідомлень (лінії зв'язку);
- засоби прийому повідомлень.

В свою чергу, засоби передачі повідомлень включають в себе джерело інформації, перетворювач потоку інформації та передавач. Відповідно, засоби прийому повідомлень повинні включати приймач інформаційного потоку, засоби виділення повідомлень та їх отримувач.

Оскільки джерело інформації (повідомлень) може мати будь-яку фізичну природу, то інформація, яку вони генерують, не тільки повинна бути перетворена в електричний сигнал, а й перетворена у форму, що відповідає властивостям середовища передачі повідомлень, – наприклад, перенесена у відповідний частотний діапазон, перетворена в оптичний сигнал і т.п.

Як лінії зв'язку, так і засоби передачі та прийому повідомлень можуть припускатися помилок у своїй роботі – наприклад, через наявність нелінійних перетворень, обмежені частотні властивості, паразитні зв'язки між елементами, власні шуми та завади тощо. Для зменшення впливу вказаних факторів на повідомлення необхідно засвоїти властивості і характеристики різних типів сигналів, а також середовища їх перетворення і передачі з метою створення безпомилкових систем обміну інформацією.

Сучасні програмні засоби дозволяють більш ефективно вивчати розділи теорії сигналів, наглядно демонструючи як самі сигнали із заданими параметрами, так і їхні часові та частотні властивості, а також особливості проходження сигналів крізь інерційні та нелінійні кола. У даному посібнику

для цієї мети використовується віртуальна лабораторія Multisim, за допомогою якої вивчення теоретичних аспектів теорії сигналів дозволяє є більш глибоко і більш практично засвоїти матеріал.

Теоретичні аспекти теорії сигналів фундаментально викладені у роботах ряду авторів [], які взяті за основу даного навчального посібника.

ТЕМА 1. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ, ЇХ МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТА ВИКОРИСТАННЯ

1.1. Основні теоретичні положення

Термін «сигнал» нерозривно пов'язаний з такими термінами, як «повідомлення», «інформація». Останні мають досить широкі галузі використання, оскільки інформація, поряд із речовиною та полем, є найважливішими філософськими категоріями природознавства. Але лише у 40-х роках XX століття К. Шенон своїми працями заклав основи теорії інформації. Інформація передається за допомогою сигналів, тому важливо знати їх основні типи, характеристики та властивості.

Сигнал $s(t)$ являє собою фізичну величину, що змінюється у часі і з цієї точки зору характеризується множиною значень $\{S\}$ та множиною моментів часу $\{t\}$, у які вона може набувати ці значення. Як множина $\{S\}$, так і множина $\{t\}$ можуть бути *безперервними* (континуальними) або *дискретними*. Покладемо ці дві ознаки в основу класифікації сигналів.

На рис. 1.1 представлені графіки зміни величини S в залежності від моментів часу t у координатах (S, t) .

Якщо множини $\{S\}$ і $\{t\}$ є безперервними, тобто у будь-який момент часу t сигнал може набувати конкретного значення з множини $\{S\}$, то такі сигнали називають *аналоговими* (рис. 1.1, а). Аналогові сигнали мають місце на виході аналогових датчиків різноматних призначень.

Якщо множина $\{S\}$ безперервна, а множина $\{t\} = \{t_k\}$, $k = \overline{0, \infty}$ дискретна і сигнал може набувати конкретних значень з множини $\{S\}$ у строго фіксовані моменти часу $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k$ та не змінюватись протягом вказаного інтервалу часу, або $s_d(t) = s(t_k)$, то такі сигнали називають *дискретними* (рис. 1.1, б). Прикладом дискретного сигналу може служити сигнал, відбитий від цілі на вході приймача радіолокаційної станції. Дійсно, моменти часу t_k визначаються часом одного оберту антени, а значення S сигнал може приймати будь-які у межах множини $\{S\}$, оскільки ціль може мати довільне розташування у просторі.

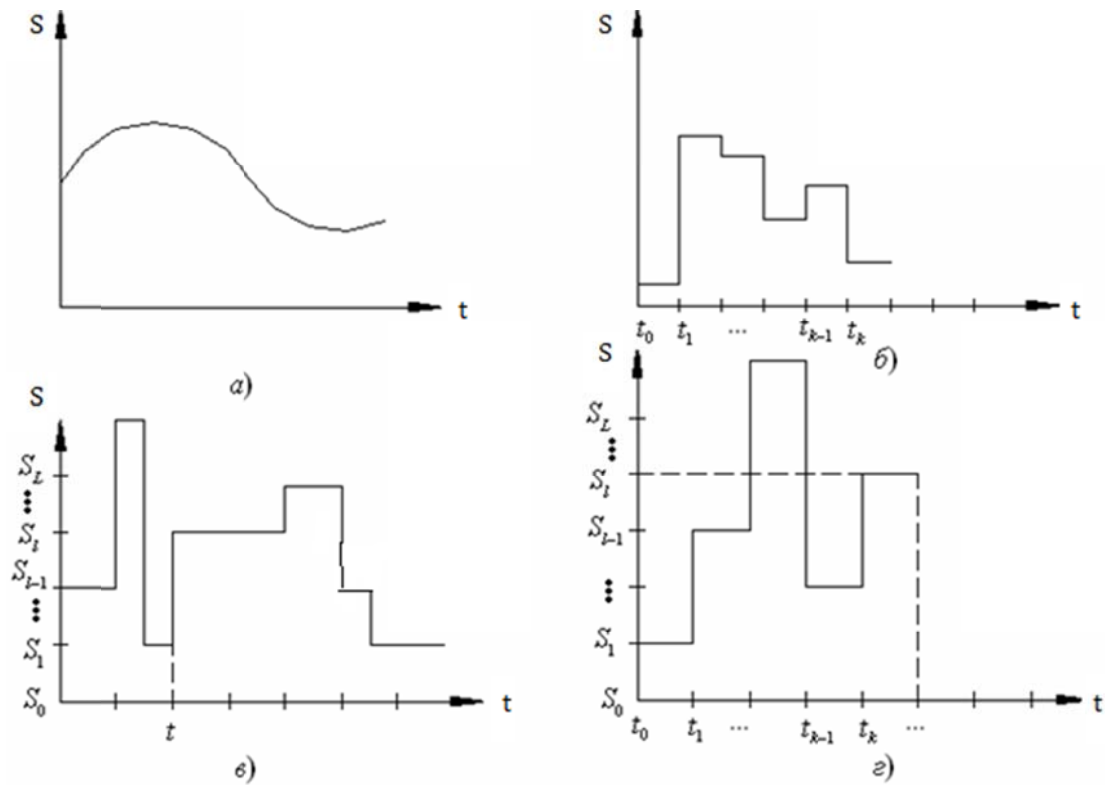


Рис. 1.1

Якщо множина значень $\{S\} = \{S_l\}$, $l = \overline{0, L}$ – дискретна, а множина моментів часу $\{t\}$ – неперервна, тобто сигнал приймає строго фіксовані значення S_l у будь-який довільний момент часу t , то такі сигнали називають *квантованими* (рис. 1.1, в). До квантованих сигналів можна віднести сигнал на виході контролера-автомата метрополітену. Кількість пасажирів, які проходять через контролер-автомат, завжди приймає цілі числа, а інтервали часу між ними – довільні.

Якщо множини $\{S\} = \{S_l\}$, $l = \overline{0, L}$ і $\{t\} = \{t_k\}$, $k = \overline{0, \infty}$ дискретні, то такі сигнали $s_{\text{ц}}(t) = s_l(t_k)$ називають *цифровими* (рис. 1.1, г). Свою назву такі сигнали отримали через те, що значення S_l сигналу та моменти t_k часу зміни значень можуть бути представлені числами натурального ряду. Прикладами цифрових сигналів є сигнали обміну між цифровими системами, персональними комп'ютерами. Особливістю цифрових систем є те, що числа в них представляються у форматі двійкових чисел, наприклад:

...100011100011....,

Двійкові числа формуються у вигляді окремих слів, які складаються з байтів (8 розрядів). Одиниці та нулі в них з'являються в дискретні моменти часу у вигляді сигналів одиничної чи нульової амплітуд або в іншій формі.

Слід відмітити, що в дискретному і цифровому сигналі значення S зберігаються протягом певного інтервалу часу. Якщо тривалість дискретного сигналу менша фіксованого інтервалу часу, то такі сигнали називають *імпульсними*. Приклади одиничних імпульсних сигналів наведено на рис. 1.2, а, б. На рис. 1.2, в наведено імпульсну послідовність.

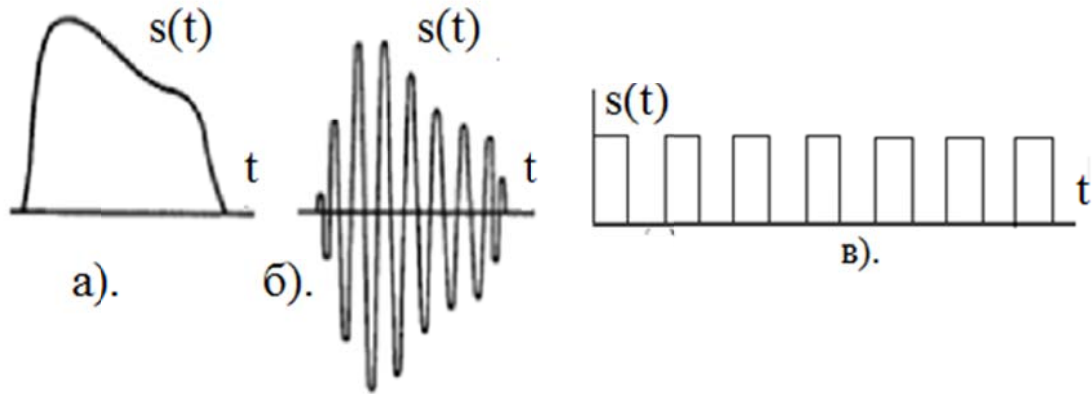


Рис. 1.2

Якщо на інтервалі часу $(0, T_c)$ сигнал описується однією елементарною функцією, то він називається простим (елементарним).

Якщо на визначеному інтервалі сигнал описується сукупністю простих сигналів, наприклад:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t),$$

де $s_i(t)$ має тривалість $T_{ci} = \frac{T_c}{N}$, то такі сигнали називають складними.

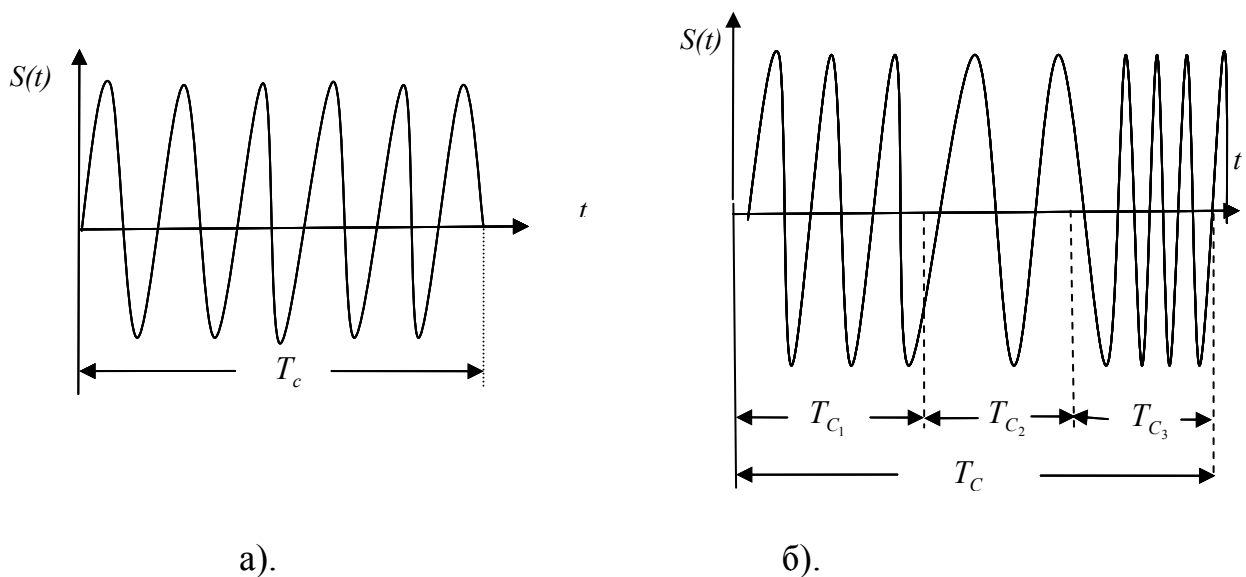


Рис. 1.3

На рис. 1.3, б зображено складний сигнал, створений сукупністю трьох простих сигналів, що описуються гармонічними функціями.

Оскільки в цифрових системах кількість значень первинних сигналів обмежена, для їх передачі можна використовувати обмежене число сигналів $s(t)$. Сукупність таких сигналів створюють ансамбль сигналів. Однією з найважливіших характеристик ансамблю сигналів є його обсяг M , тобто число сигналів, що входить до ансамблю. Від цього показника залежить інформативність кожного сигналу окремо і ансамблю в цілому, перешкодостійкість, час доступу до отримувача, тобто все те, що визначає ефективність телекомунікаційної системи.

Теоретичні дослідження сигналів виконуються на основі їх математичних моделей, які представляють собою функцію часу. Математичні моделі не враховують конкретну фізичну природу сигналу. Однією і тією ж математичною моделлю можуть бути описані різні фізичні явища.

Неможливо за допомогою математичних моделей точно відобразити реальні фізичні сигнали, але у більшості практичних випадків завжди можливо підібрати такі математичні моделі, за допомогою яких вдається відобразити основні властивості сигналів.

Функції, які описують реальні сигнали, можуть бути дійсними та комплексними, одновимірними та багатовимірними, детермінованими та випадковими, аналоговими (непереривними) та імпульсними. Вид функції $s(t)$ характеризує форму сигналу.

Як функція часу сигнал може бути визначений як на обмеженому, так і на нескінченному інтервалі часу. Реальні сигнали завжди обмежені у часі.

Оскільки сигнал є матеріальним носієм інформації, він характеризується енергетичними характеристиками. До основних енергетичних характеристик відноситься енергія сигналу:

$$\mathcal{E}_c = \int_0^{T_c} s^2(t) dt,$$

середня потужність

$$P_c = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} s^2(t) dt$$

та норма сигналу:

$$N = \sqrt{\mathcal{E}}.$$

Оскільки вважається, що сигнал являє собою зміну напруги у часі, то енергія, яка виділяється на навантаженні з опором 1 Ом, має розмірність ($\text{В}^2 \cdot \text{сек}$), а середня потужність – відповідно, (В^2).

Приклад. Сигнал $s(t)$ є трикутним імпульсом напруги з амплітудою U та тривалістю τ . Обчислити енергію і норму сигналу.

Розв'язання: На інтервалі часу $(0; \tau)$ сигнал описується лінійною залежністю:

$$s(t) = Ut / \tau.$$

Енергія сигналу:

$$E = \frac{U^2}{\tau^2} \int_0^{\tau} t^2 dt = \frac{U^2 \cdot \tau}{3};$$

Норма сигналу:

$$H = \sqrt{E} = U\sqrt{\tau/3}.$$

Будь-який сигнал є функцією часу, що визначений на обмеженому часовому інтервалі. Якщо сигнал визначений на часовому відрізку $(0; T)$, то, відповідно, величина T і є тривалістю сигналу. При теоретичному аналізі сигналів вони можуть розглядатись як на нескінченному $[-\infty, \infty]$, так і на напівнескінченному $[0, \infty]$ інтервалі часу.



Рис. 1.4

Ще одним типом сигналів є випадкові сигнали. Це група сигналів, характер зміни яких у часі передбачити не можливо. В теорії зв'язку такі сигнали спочатку розглядались як завади, обумовлені тепловими процесами в електронних приладах. У подальшому, в процесі розвитку математичного опису таких процесів, вони знайшли більш конкретні описи з використанням математичного апарату теорії ймовірності та теорії випадкових процесів. Відповідно, вони знайшли своє використання у різних задачах радіолокації та радіозв'язку.

На рис. 1.4, *а* наведено приклад безперервного випадкового процесу, а на рис. 1.4, *б* – квазідетермінованого процесу.

1.2. Аналіз та використання джерел сигналів віртуальної лабораторії Multisim

Програма Multisim має велику кількість джерел різних сигналів, як джерел напруги, так і джерел струму. Частина джерел мають властивість змінювати параметри своїх вихідних сигналів під дією зовнішніх впливів, що значно розширює функціональні можливості віртуальної лабораторії. Всі джерела сигналів мають вікна установок, за допомогою яких є можливість встановлювати амплітудні та часові параметри сигналів. Для цього джерело сигналу, яке планується використовувати, встановлюється на робочий стіл, а потім подвійним натиском лівої кнопки «миші» активізувати віно установок. Для аналізу роботи джерела слід його заземлити, навантажити зовнішнім резистором і підключити осцилограф.

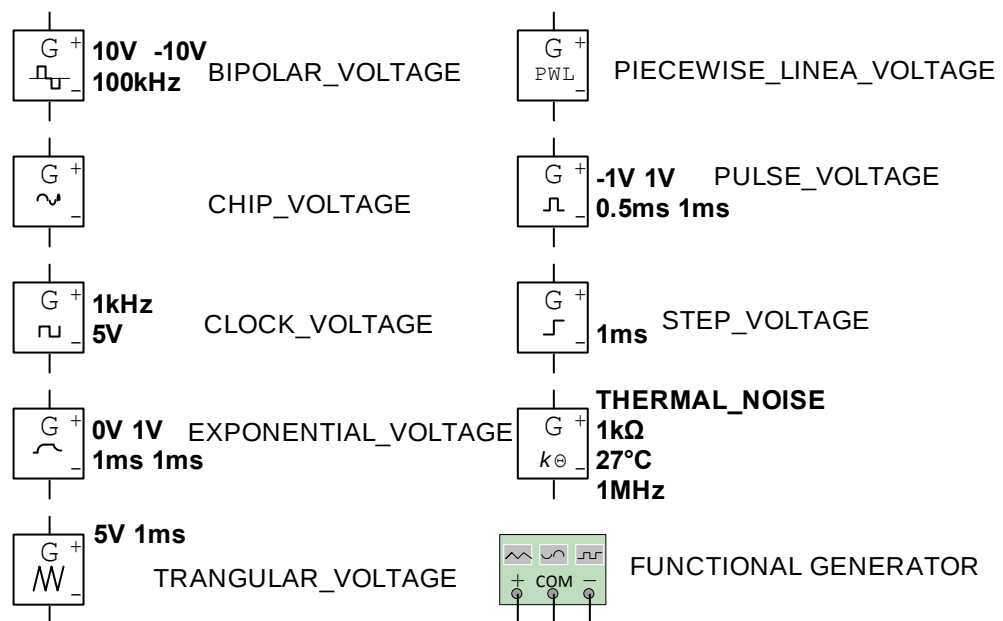


Рис. 1.5

Читачам пропонується самостійно ознайомитись з роботою джерел, що наведені на рис. 1.5, і характеристиками їх вихідних сигналів.

Кожне джерело сигналу має своє вікно установок (рис. 1.6, а). Необхідно приєднати джерело сигналу до виходу осцилографа (рис. 1.6, б) і з його допомогою оцінити характер сигналу, його вигляд, амплітуду, частоту (рис. 1.6, в) та інші характерні для сигналу параметри.

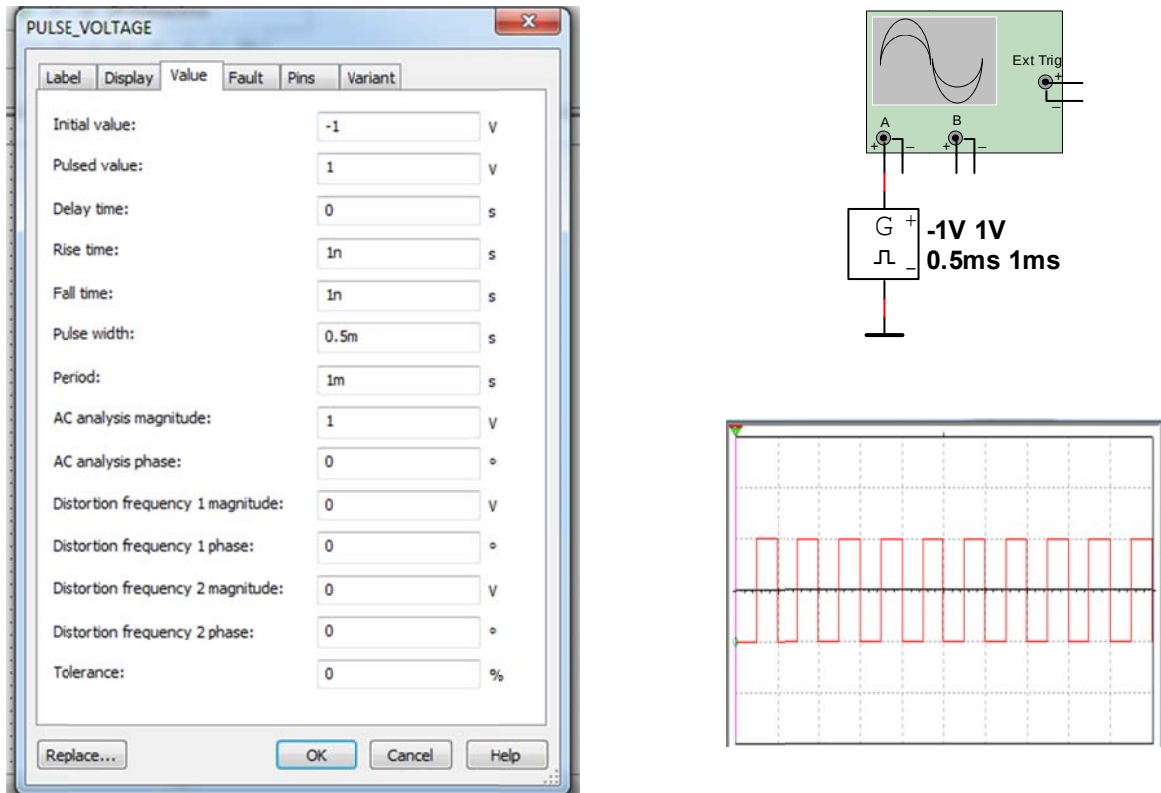


Рис. 1.6

1.3. Питання до теми

1. Дайте визначення термінам «непреривний сигнал», «дискретний сигнал», «імпульсний сигнал», «випадковий сигнал».
2. Дайте визначення терміну «складний сигнал». Наведіть приклади складних сигналів.
3. Дайте визначення терміну «ансамбль сигналів». Чим характеризується ансамбль сигналів? Наведіть можливі приклади ансамблю сигналів на основі прямокутних імпульсів.
4. Використовуючи блоки математичних перетворень Multisim (меню Control functional blocks в опції Place source), створити складний сигнал.

5. Скласти схеми з використанням джерел напруги, що наведені на рис. 1.5, і навести їх часові діаграми з поясненням їх координатних параметрів (тривалості імпульсу, паузи, амплітуди, фронту, зрізу).

ТЕМА 2. ДИНАМІЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

2.1. Елементарні функції представлення сигналів

При побудові телекомунікаційних систем постають задачі аналізу та синтезу сигналів. Суть аналізу полягає у тому, що сигнали, які вивчаються, розбиваються на складові, після чого кожна з них досліджується окремо. При цьому складовими є більш прості сигнали, властивості яких добре вивчені. Таке представлення, наряду зі спрощенням аналізу, дозволяє ефективно розв'язувати задачі синтезу сигналів із заданими властивостями.

У загальному випадку сигнал $s(t)$ описується функцією часу, що дозволяє розглядати його як процес, що розвивається у часі. Тому представлення сигналу $s(t)$ складної форми сукупністю простих, які також описуються функціями часу, отримало назву *динамічного* або *часового представлення*.

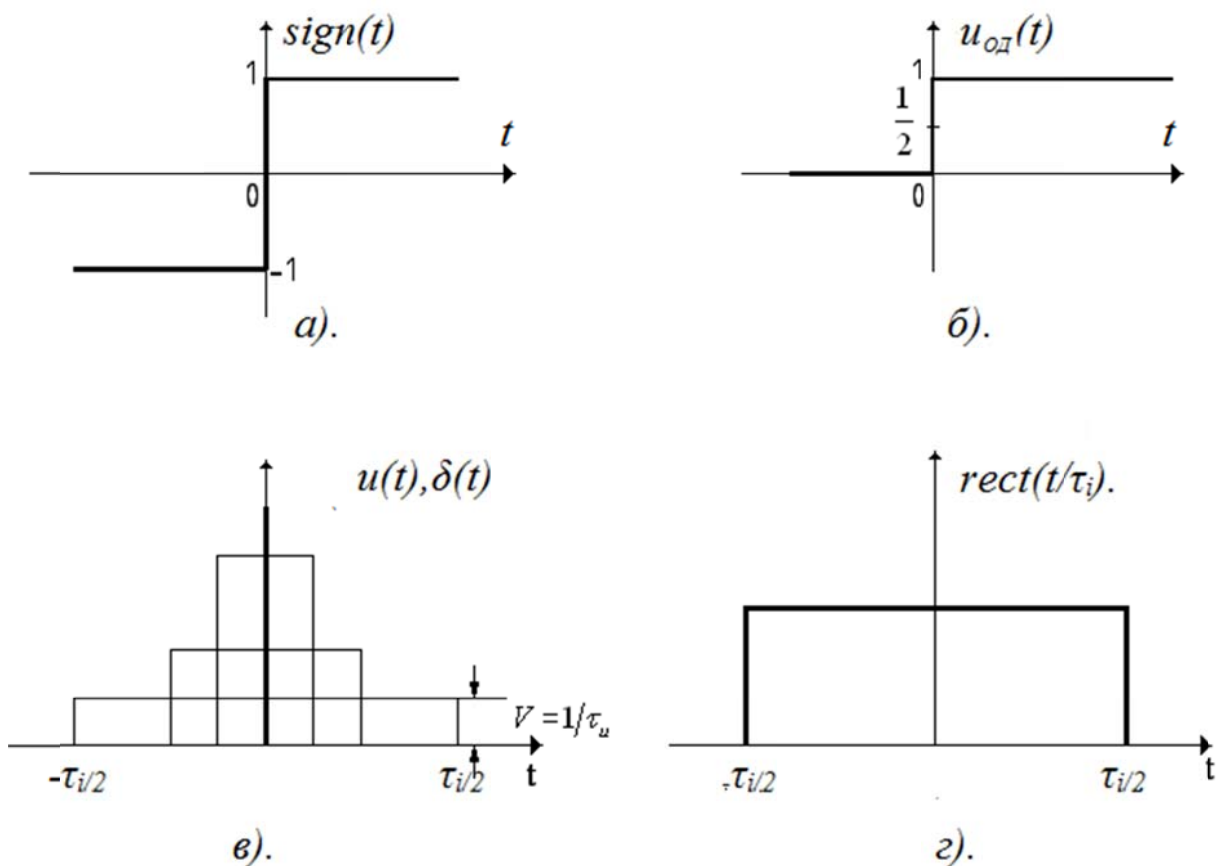


Рис. 2.1

В теорії телекомунікаційних сигналів для динамічного представлення використовуються наступні елементарні функції: функція знаку $sign(t)$ (рис. 2.1, а) (сигнум-функція), одинична функція $u_{од}(t)$ (рис. 2.1, б) (функція

включення, функція Хевісайда), дельта-функція $\delta(t)$ (рис. 2.1, в) (функція Дірака) та прямокутний імпульс з одиничною висотою $rect(t/\tau)$ (рис. 2.1, г).

Функція знаку $sign(t)$ має постійне значення, що дорівнює одиниці. Її знак змінюється на протилежний в момент $t=0$. Математичний опис функції має вигляд:

$$sign(t) = \begin{cases} -1, & \text{при } t < 0, \\ 0, & \text{при } t = 0, \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Помноження $s(t)$ на $sign(t)$ означає зміну знаку сигналу в момент часу $t=0$.

Зміну знаку сигналу можна забезпечити у будь-якому інтервалі часу за рахунок прогнозованої затримки. У такому випадку функція матиме вигляд:

$$sign(t) = \begin{cases} -1, & \text{при } (t - \tau) < 0; \\ 0, & \text{при } (t - \tau) = 0; \\ 1, & \text{при } (t - \tau) > 0 \end{cases};$$

На рис. 2.2, а наведена схема, що дозволяє реалізувати операцію інвертування синусоїдальної функції, а на рис. 2.2, б – часові діаграми, що пояснюють її роботу.

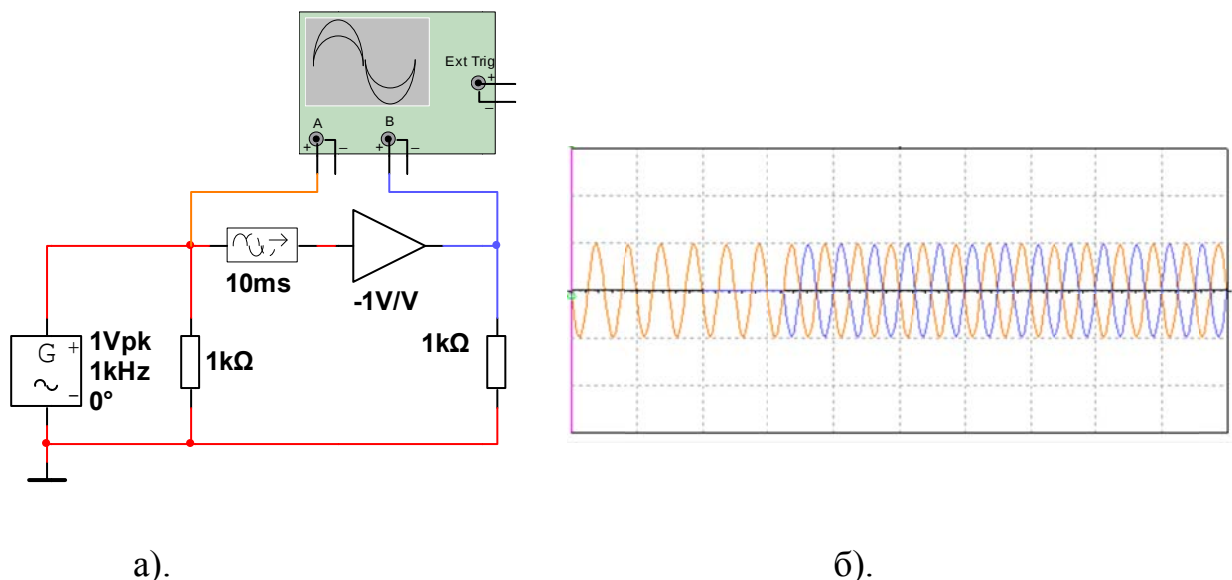


Рис. 2.2

Функція включення $u_{OD}(t)$ представляє собою зміну її стану з 0 в 1 при переході аргументу t через нуль. Її математичний вираз має вигляд:

$$u_{\text{ед}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } t = 0, \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Добуток функції $s(t)$ на $u_{\text{ОД}}(t)$ еквівалентно включенню цього сигналу в момент часу t . За допомогою функції включення можна формувати різні типи одиничних сигналів.

Приклад. Розробити схему реалізації прямокутного імпульсу тривалістю 1 мс амплітуди 10 В, який починається через 1 мс з моменту відліку.

Розв’язання: Поява одиничного скачка амплітуди 10 В описується рівнянням:

$$u(t) = 10\sigma(t - 10^{-3}).$$

Для того, щоб сигнал став рівним нулю, слід відняти аналогічний ступінчатий імпульс через інтервал 10^{-3} с після появи першого.

Схема, що реалізує одиничний імпульс, наведена на рис. 2.3, а. На рис. 2.3, б наведена часова діаграма імпульсу. Віднімання імпульсів реалізується суматором.

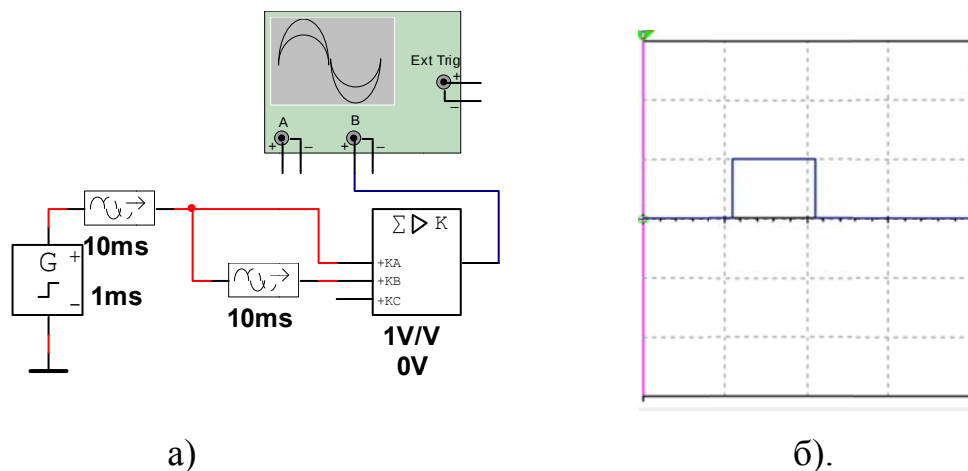


Рис. 2.3

За допомогою функції включення можна реалізовувати як складні форми імпульсів, так і обмежені послідовності імпульсів.

Дельта-функція $\delta(t)$ є досить важливим інструментом в теорії сигналів, який використовується для аналізу цифрових сигналів. Тому її фізичні властивості слід пояснити більш детально.

З курсу шкільної фізики відомі закони, які широко використовуються в механіці та електротехніці. Вони описуються наступними формулами:

$$F = m \cdot a = m \frac{dv}{dt};$$

$$M = J \frac{d\omega}{dt};$$

$$e = -L \frac{di}{dt}.$$

Перша формула, що відома як другий закон Ньютона, описує поведінку предмета масою m при зміні його швидкості v . Друга формула пояснює зміну динамічного моменту M_d на валу з моментом інерції J , що обертається з частотою ω . Третя формула пояснює створення електрорушійної сили e в індуктивності L при зміні струму i , що протікає крізь неї.

У будь-якому випадку, як витікає з наведених формул, для миттєвої зміни швидкості, частоти обертів чи струму важливими є не сама сила, момент або напруга, а їхній імпульс (похідна).

Дельта-функція і є математичним відображенням такого імпульсу. Вона була введена в математичний апарат фізиком П. Діраком, а її фізична інтерпретація досить просто пояснюється наступним уявним дослідом.

Припустимо, що маємо прямокутник з площею, рівною 1. Будемо зменшувати довжину основи прямокутника, забезпечуючи незмінною його площу. При довжині основи, що наближається до нуля, висота прямокутника буде направлена у нескінченність. Це і є дельта-функція, тобто:

$$\delta(t) = \lim_{\tau_u \rightarrow 0} u(t) = \lim_{\tau_u \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_u}. \quad (2.1)$$

Математичний вираз для δ -функції має вигляд:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, \text{при } t = 0, \\ 0, \text{при } t \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Порівнюючи (2.1) і (2.2), знаходимо:

$$\delta(t) = \frac{du_{ed}(t)}{dt} \quad (2.3)$$

Розглянемо деякі властивості δ -функції.

1) δ -функція є парною функцією.

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

2) Враховуючи, що площа вихідного імпульсу рівна одиниці, тобто:

$$\int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}} u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt = 1,$$

то

$$\lim_{\tau_u \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

3) δ - функція має фільтруючу властивість:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0), \quad (2.4)$$

тобто, інтеграл добутку $s(t)$ на $\delta(t - t_0)$ має значення $s(t)$ в момент часу t_0 .

δ -функція відноситься до узагальнених функцій. Властивостю δ -функції володіють багато відомих математичних функцій, наприклад:

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin at}{at} \\ \delta(t) &= \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{t^2}{2b^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Ще однією властивістю δ -функції є те, що її розмірність така ж, як і розмірність частоти.

Реальне практичне застосування δ -функція знайшла при використанні її в згортці функції, яка має вигляд (2.4).

2.2. Практична реалізація різних типів сигналів з використанням віртуальної лабораторії Multisim

2.2.1 Динамічне представлення сигналів за допомогою функції Хевісайда

Динамічне представлення сигналу за допомогою функції включення має вигляд:

$$s(t) = s_0 \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) \sigma(t - k\Delta).$$

В меню Signal voltage source знаходимо пристрій – джерело ступінчатої напруги – Step Voltage (рис. 2.4, а). В меню Control function Blocks знаходимо пристрій затримки – Delay (рис. 2.4, б), а також арифметичний суматор сигналів (рис. 2.4, в).

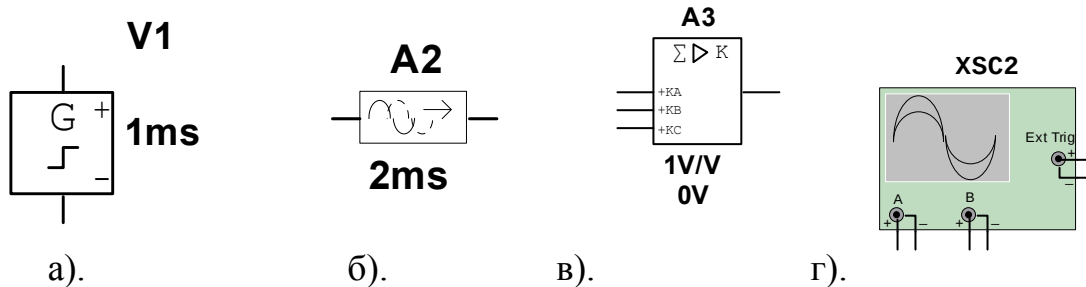
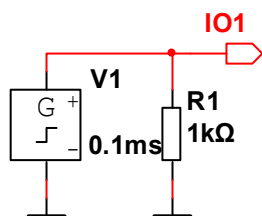


Рис. 2.4

Кожен з приладів, за винятком осцилографа (рис. 2.4, г), має своє вікно налаштувань, у якому задаються необхідні параметри вихідного сигналу, затримки, виконання операцій. Вони досить прості і не потребують додаткових пояснень.

Послідовність виконання роботи



2.2.1. Вивчаються особливості використання джерела ступінчатої функції. Змінюючи параметри налаштувань (величину напруги, тривалість фронту) розглянути і зафіксувати осцилограми сигналу.

2.2.2. Провести аналогічні дослідження з використанням опції Transient Analuses, яка знаходиться в меню Analuses. Для проведення такого дослідження слід джерело ступінчатої напруги навантажити резистором (Рис.2.5.) і вихідним конектором, а у вікні налаштувань ступінчатої функції в опції step time встановити затримку, наприклад, 0.1 мС.

(Рис.2.5.) Резистор можна вибрати 1кОм і більше.

Після налаштувань загальних параметрів і вибору вихідного сигналу натискається кнопка Run. Появляється екран плоттера (рис.2.6.), на якому наведено графік ступінчатої функції.

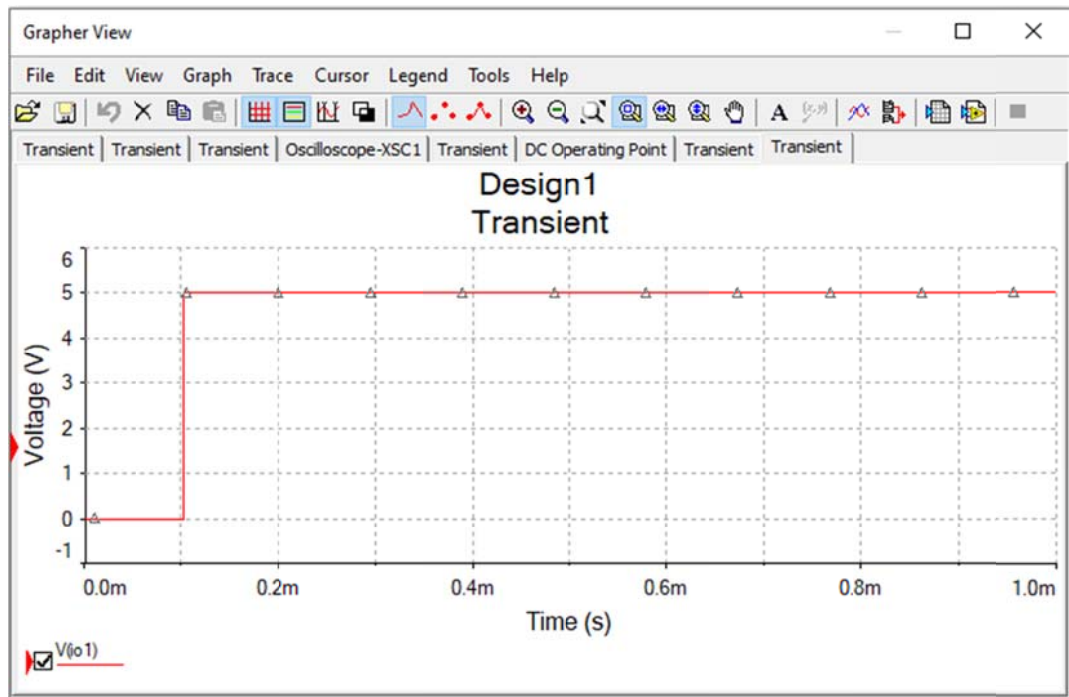


Рис. 2.6

2.2.3. Створити одиничний прямокутно ступінчатий імпульс довільної форми і тривалості. Для створення такого імпульсу слід використати декілька ступінчатих функцій, різних по тривалості часових затримок і суматори, які можуть додавати, або віднімати сигнали в залежності від установок його входів. Слід провести ряд дослідів з суматором, оскільки у вікні налаштувань є можливість змінювати масштабні коефіцієнти по кожному з входів, встановлювати величини зміщень також по кожному входу і по виходу. Все це відкриває досить широкі можливості при створенні сигналів різної форми. Поряд з суматором для об'єднання імпульсів можливо використовувати і перемножувач, або пристрій для ділення, які знаходяться в опції Control functional blocs. Рекомендується самостійно пофантазувати і придумати різні форми імпульсів.

2.2.4. Проводиться дослід по створенню періодичної послідовності імпульсів довільної форми. Для цього джерелами з меню Signal_Voltage_Sources, що наведені на рис. 2.7. Особливість їх полягає в тому, що в їх вікні установок одночасно з

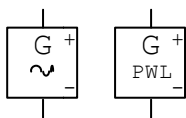


Рис. 2.7 можливість задання характеру зміни сигналу є можливість забезпечувати періодичність його повторення (рис. 2.8).

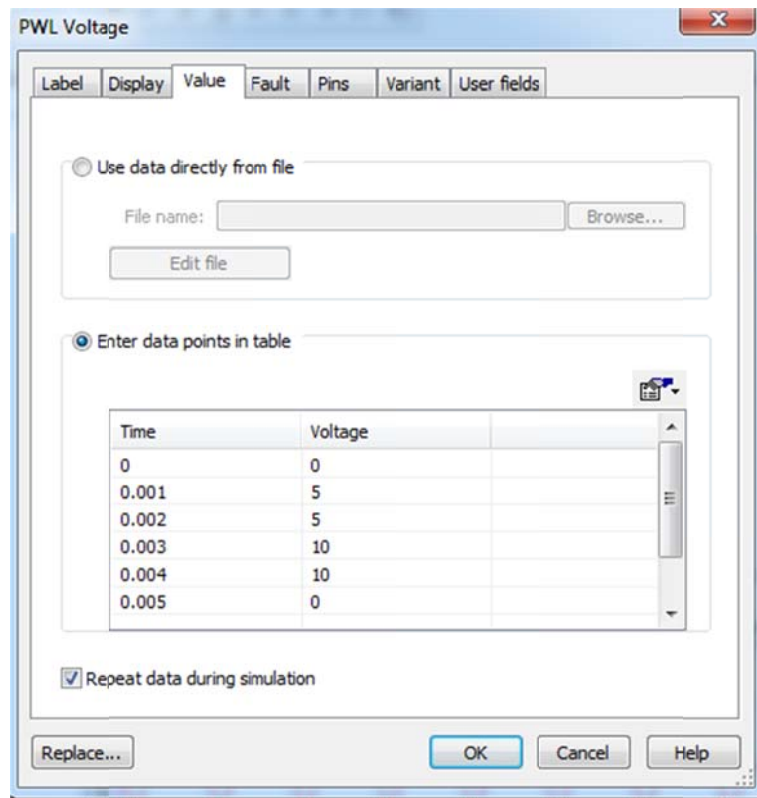


Рис. 2.8

Часова діаграма послідовності імпульсів, характер яких встановлений в таблиці вікна установок , наведено на рис. 2.9.

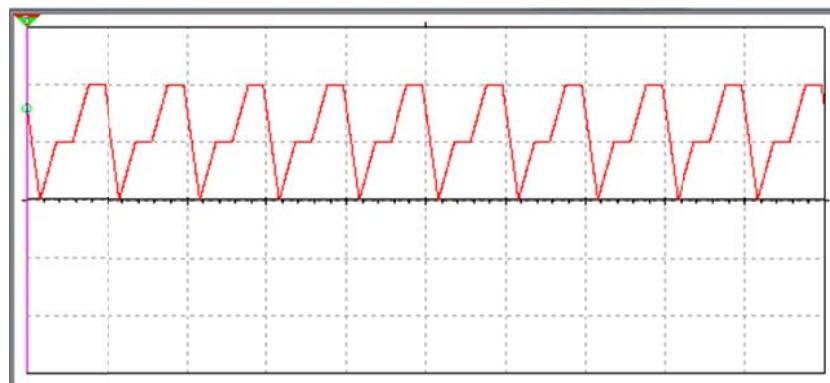


Рис. 2.9

2.2.5. Проводиться дослід по побудові періодичної послідовності імпульсів за допомогою керованого джерела напруги. Voltage_Controlled_Piecewise_Linear_Source з меню Controlled_Voltage_Sources. Схема такого генераторі імпульсної послідовності наведена на рис.2.10, а. На рис.2.10, б наведена функціональна таблиця у відповідності до якої вихідна напруга джерела V2 буде змінюватись в залежності від напруги керування, що створюється джерелом V1. Напругу джерела V1 встановлено, як пиловидну з тривалістю зрізу 0.05 періоду. а амплітуда

напруги керування рівна 10 В. На рис. 2.10, в наведені осцилограми напруги керування (верхня осцилограма) і осцилограма вихідного імпульсу (нижня).

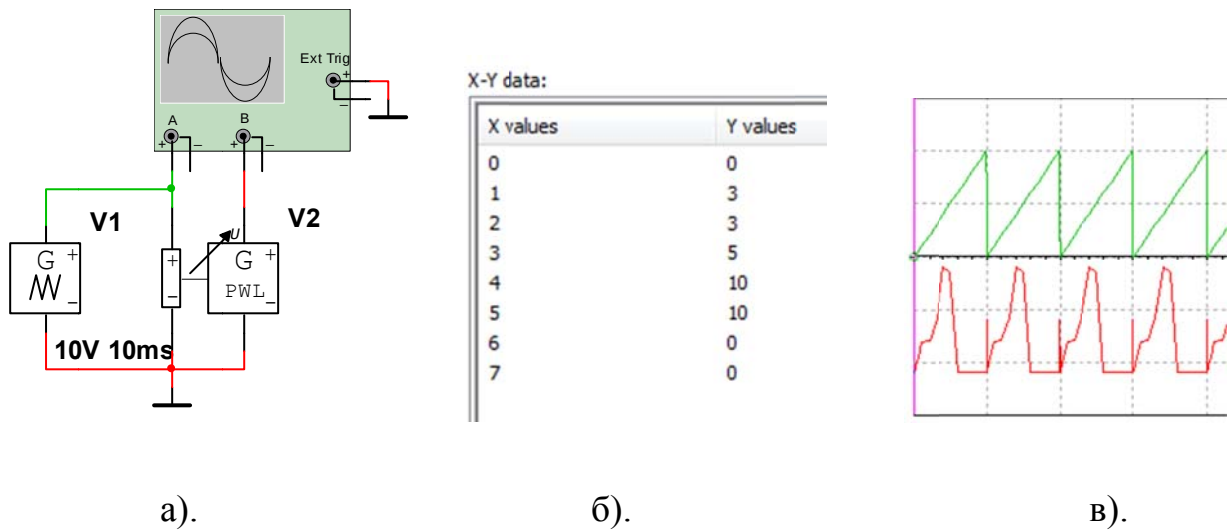


Рис. 2.10

2.2.2. Динамічне представлення сигналу за допомогою функції Дірака

З формули (2.4) витікає, що якщо сигнал $s(t)$ помножити на δ -функцію і добуток про інтегрувати в часі, то результат буде рівним значенню сигналу в точці, де сконцентрований дельта-імпульс. Вираз (2.4.) як раз і відображає фільтруючі властивості δ -функції. Тобто, будь-який неперервний сигнал може бути представлений у вигляді послідовності коротких по тривалості імпульсів, значення амплітуд яких буде відповідати значенню цього сигналу в даній дискретній точці.

На рис. 2.11 наведено приклад схеми, що у спрощеному вигляді реалізує операцій, що відображають фільтруючу властивість δ -функції.

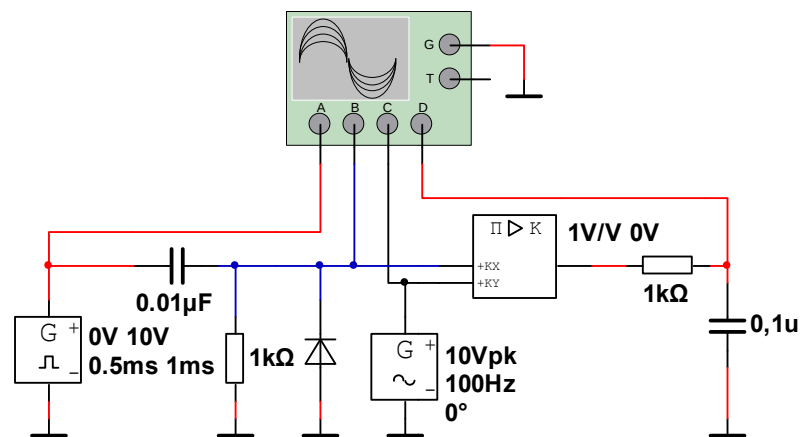


Рис. 2.11

Для отримання періодичного сигналу типу δ - функції скористаємось формулою (2.3), з якої витікає, що такий сигнал можна отримати шляхом диференціювання по фронту досить короткого імпульсу. Для цього скористаємось генератором періодичної послідовності прямокутних імпульсів V1. Операцію диференціювання виконаємо у спрощеному вигляді за допомогою відповідної C1-R1 ланки, постійна часу якої як мінімум на порядок більша ніж тривалість фронту прямокутного імпульсу. Для знищення імпульсу від'ємної полярності, що появляється внаслідок диференціювання зрізу імпульсу встановлено діод D1. Отримана послідовність імпульсів перемножується в перемножувачі з сигналом синусоїдальної форми, що подається з генератора V2. Сигнал, що пропорційний добутку цих сигналів подається на інтегратор, виготовлений на пасивних компонентах – R2-C2.

Осцилограми відповідних перетворень наведені на рис. 2.12.

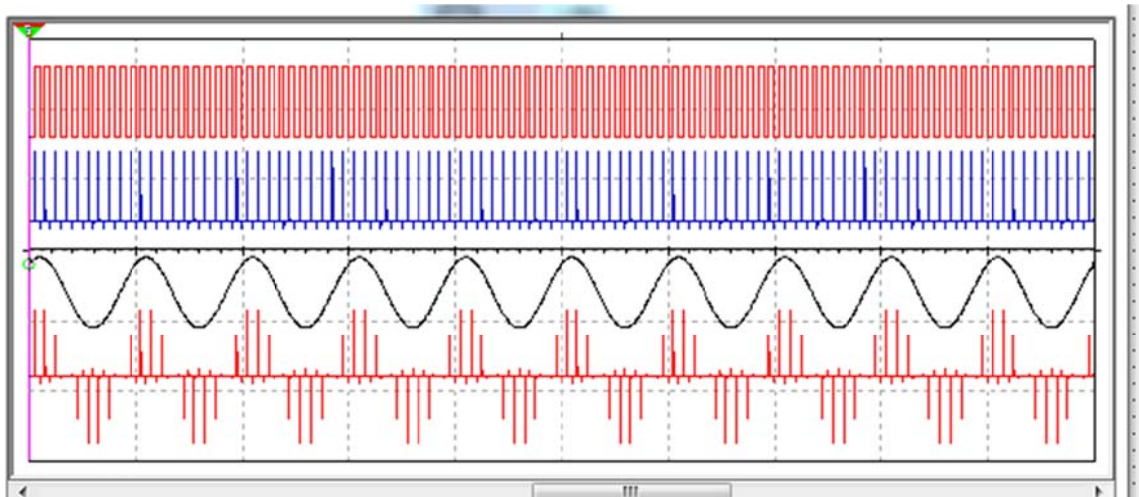


Рис. 2.12

2.3. Питання до теми

- 2.3.1. Наведіть та поясніть основні властивості дельта-функції.
- 2.3.2. Навіщо використовується динамічне представлення сигналів?
- 2.3.3. У чому полягає фізична суть динамічного представлення сигналів?

ТЕМА 3. СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ

3.1. Основні теоретичні положення. Тригонометричний ряд Фур'є. Спектр періодичного сигналу

В теорії сигналів особливе місце посідають синусоїдальні та косинусоїдальні функції, які просто називаються гармонічними. Їх важливість обумовлена рядом причин. Це перш за все те, що вони є інваріантними до перетворень, які можуть використовуватись в лінійних колах, тобто після будь-яких лінійних перетворень, сигнал залишається гармонічним, а змінюються лише амплітуда і фаза сигналу. Друга особливість полягає в тому, що періодичні сигнали можуть представлятись у вигляді суми гармонічних складових. Якщо якийсь сигнал представляється у вигляді суми гармонічних коливань, то говорять, що використане спектральне представлення цього сигналу в базисі гармонічних функцій. Сума окремих гармонічних складових називається спектром сигналу. Спектр сигналу можна одержати використовуючи його розклад в ряд Фур'є, тобто:

Детерміновані (періодичні) сигнали характеризуються тим, що в будь-який наперед заданий момент часу t його значення точно визначаються. Це сигнали відомої форми, що періодично повторяються через інтервал часу T , що називається періодом повторення. Математично періодичний сигнал описується виразом:

$$s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT), \quad (3.1)$$

До таких сигналів відносяться гармонічні коливання, визначені на нескінченному інтервалі часу, послідовність імпульсів з відомою амплітудою, тривалістю і періодом повторення.

Функції $s(t - kT)$ можуть бути різними і називаються базисними функціями. Найбільше розповсюдження отримали в якості базисних тригонометричні функції, що обумовлено тим, що при перетворенні таких функцій різними радіотехнічними пристроями їх форма зберігається, а змінюються лише амплітуди та фази. Їх реалізація забезпечується досить простими засобами.

Сигнали, що описуються тригонометричними функціями, називаються гармонічними сигналами, а спектральний аналіз в системі базисних тригонометричних функцій – гармонічним аналізом.

Формула (3.1) з врахуванням вище сказаного може бути представлена у вигляді:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (3.2)$$

де

$$\omega_k = k\omega_1 = \frac{2k\pi}{T} \quad (3.3)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos \omega_k t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin \omega_k t dt. \quad (3.4)$$

Вираз (3.2.) називається тригонометричним рядом Фур'є і представляє собою розкладання сигналу $s(t)$ на складові в системі тригонометричних функцій.

В практиці систем зв'язку часто використовують іншу форму ряду: Виділимо з (3.2.) k -ту складову:

$$s_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t \quad (3.5)$$

і зобразимо її у вигляді:

$$s_k(t) = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \cos \omega_k t + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \sin \omega_k t \right), \quad (3.6.)$$

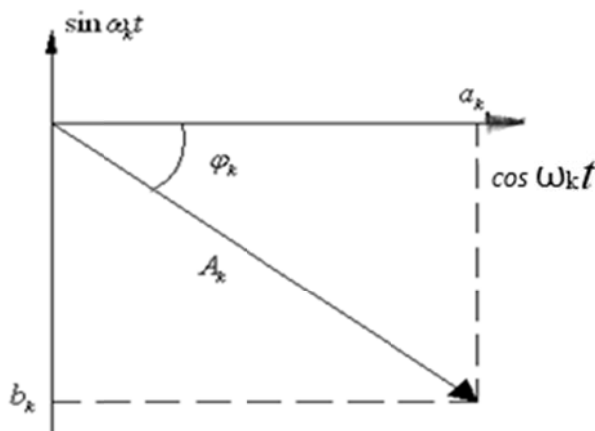


Рис. 3.1

З геометричної точки зору складову $s_k(t)$ можна розглядати як вектор в системі координат $\{\cos \omega_k t, \sin \omega_k t\}$ (рис. 3.1). Довжина його $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, а φ_k -кут, на який повернуто вектор відносно осі $\cos \omega_k$. При цьому:

$$\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \cos \varphi_k, \quad -\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin \varphi_k,$$

а вираз (3.5) прийме вигляд:

$$s_k(t) = A_k (\cos \varphi_k \cos \omega_k t - \sin \varphi_k \sin \omega_k t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (3.7)$$

де $\varphi_k = -\arctg \frac{b_k}{a_k}$.

З урахуванням (3.7), ряд Фур'є (3.2) можна записати у вигляді:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (3.8)$$

Складова

$$s_k(t) = A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (3.9)$$

називається k -тою гармонічною складовою або просто k -тою гармонікою.

У відповідності з визначенням спектра сукупність $a_0/2$ та A_k складають амплітудний спектр, а сукупність φ_k – фазовий спектр сигналу. Таким образом, амплітудний спектр періодичного сигналу містить постійну складову $a_0/2$ і нескінченну кількість амплітуд A_k відповідних гармонік. Те ж саме відноситься і до фазового спектру. При спектральному аналізі спектри зручно представляють у вигляді спектральних діаграм, що представляють собою вертикальні прямі лінії в координатах частота-амплітуда. На кожній з частот ω_k гармоніка буде відображатись у вигляді вертикальної лінії, розміри якої відповідають амплітуді k -ї гармоніки.

3.2. Амплітудний і фазовий спектри періодичної послідовності прямокутних імпульсів

В якості прикладу приведемо розкладання в ряд Фур'є періодичної послідовності імпульсів (рис.3.2) з амплітудою S_0 , тривалістю τ_i та періодом T , симетричною відносно нуля, тобто:

$$s(t) = S_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT}{\tau_u}\right), \quad (3.10)$$

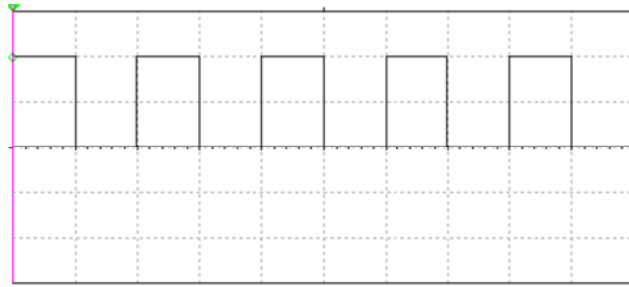


Рис. 3.2

Розкладання такого сигналу в ряд Фур'є дає:

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega_k \tau_u}{2}}{\frac{\omega_k \tau_u}{2}} \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right], \quad (3.11)$$

де $q = T/\tau_i$ – скважність.

Спектр гармонік прямокутного імпульсу має вигляд, що наведений на рис. 3.3, отриманий моделюванням у віртуальній лабораторії Multisim.

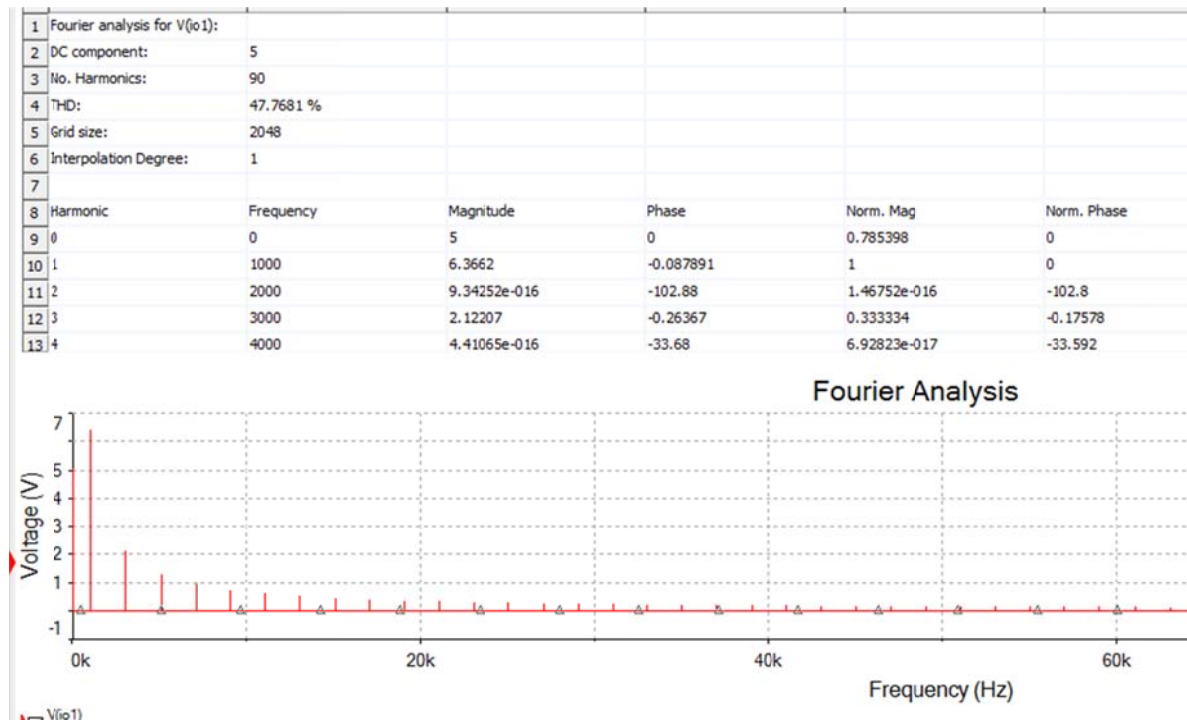
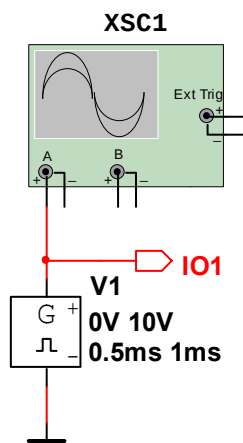


Рис. 3.3

Для забезпечення процесу моделювання вибирається джерело імпульсу, наприклад Pulse_Voltage, з бібліотеки джерел напруги Signal_Voltage_Source. Складається схема для моделювання (рис. 3.4), виходом якої повинен бути вихідний конектор IO1. Далі вибираються команди Simulate, Analuses and Simulation, Fourier. З'являються змінні вікна налаштувань, в першому з яких (Fourier) встановлюється частота імпульсної послідовності та кількість гармонік.



В другому – Output – додається конектор IO1 у вікно аналізованих параметрів (select variables for analysis). Після цього натискається кнопка Run і за результатами моделювання з'явиться лінійчатий спектр гармонік (рис. 3.3) На рис. 3.5 наведена спектральна діаграма, що охоплює значно ширший частотний діапазон гармонік, в наслідок чого спостерігається огинача спектру. Установками в першому вікні налаштувань можна вивести і діаграму фазових характеристик гармонік.

Рис. 3.4

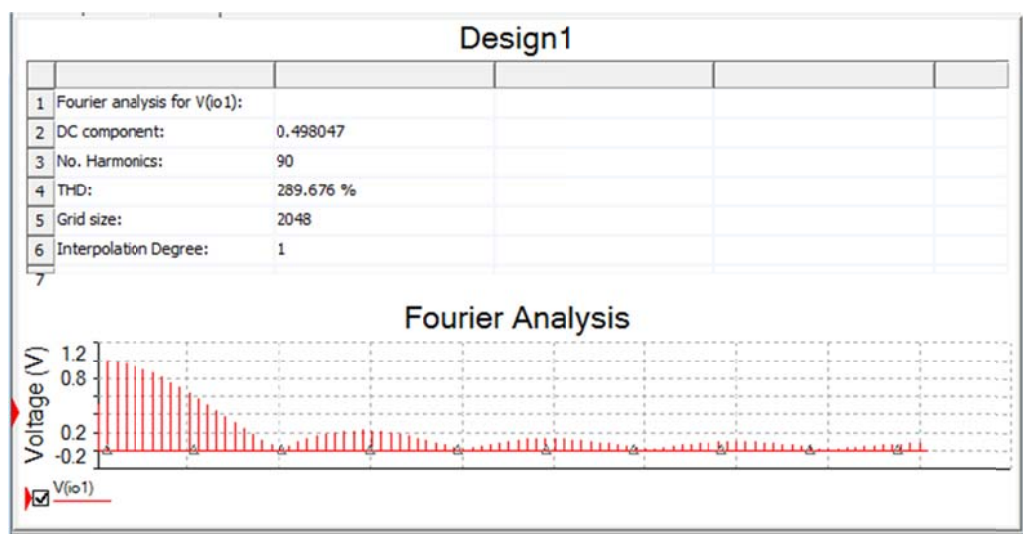


Рис. 3.5

Для спрощення запису формули (3.11) введемо позначення:

$$\frac{\sin \frac{\omega_k \tau_u}{2}}{\frac{\omega_k \tau_u}{2}} = \text{sinc} \frac{\omega_k \tau_u}{2} = \text{sinc} \frac{2\pi k \tau_u}{2T} = \text{sinc} \frac{k\pi}{q}, \quad (3.12)$$

Тоді вона прийме вигляд:

$$s(t) = \frac{S_0}{q} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \frac{k\pi}{q} \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k) \right], \quad (3.13)$$

Огинача спектру (рис. 3.4) пропорційна $\text{sinc}(k\pi/q)$. Відстань по осі частот між двома сусідніми складовими спектра рівняється $2\pi/T$, а між двома нульовими значеннями (ширина лепестка спектра) $-2\pi/\tau_i$. Число гармонічних складових у межах одного лепестка складає $\lfloor q \rfloor$, где знак $\lfloor \quad \rfloor$ означає

округлення до найближчого цілого числа, меншого Q (якщо скважність – дробне число), або Q (при цілому значенні скважності). При зростанні періоду T основна частота $\omega = 2\pi/T$ зменшується, спектральні складові на діаграмі зближуються, амплітуди гармонік також зменшуються. При цьому форма згинаючої зберігається.

При розв’язанні практичних задач гармонічного аналізу замість кутових частот ω_k використовують циклічні частоти $f_k = \omega_k/2\pi = k/T$, що вимірюються в Гц. Очевидно, відстань між сусідніми гармоніками на діаграмі складає $1/T$, а ширина одного лепестка спектра – $1/\tau_i$.

В практиці часто використовують спектральні діаграми амплітудного та фазового спектрів. Амплітудний спектр послідовності прямокутних імпульсів зображено на рис. 3.4.

Стосовно фазового спектру то виходять з того, що початкові фази гармонічних складових змінюються скачком на величину $-\pi$ при зміні знаку огинаючої $\text{sinc } k\pi/q$. Початкові фази першого лепестка вважають рівними нулю. Тоді початкові фази гармонік другого лепестка складають $\varphi = -\pi$, третього лепестка $\varphi = -2\pi$ и т.д.

На рис. 3.3 поверх спектральної діаграми наведена таблиця, в якій відображені фази перших п’яти гармонік спектру.

Розглянемо тепер розподіл енергії та потужності в спектрі періодичного сигналу. Для цього скористуємось рівністю Парсеваля.

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k .$$

Енергія постійної складової:

$$\mathcal{E}_0 = \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 dt = \frac{a_0^2 T}{4} ,$$

а енергія k -тої гармоніки

$$\mathcal{E}_k = \int_0^T A_k^2 \cos^2 (\omega_k t + \varphi_k) dt = \frac{A_k^2 T}{2} .$$

Тоді енергія сигналу

$$\mathcal{E}_c = \frac{a_0^2 T}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2 T}{2} . \quad (3.14)$$

Оскільки середня потужність сигналу

$$P_c = \frac{\mathcal{E}_c}{T},$$

то

$$P_c = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}. \quad (3.15)$$

Наведені формули дозволяють виконати розрахунки і побудувати спектральні діаграми розподілу енергій, або потужностей, тобто, енергетичні спектри періодичного сигналу.

Приклад. При проходженні періодичної послідовності прямокутних імпульсів крізь ФНЧ (РС-ланку) на виході буде отримана послідовність імпульсів з експоненціальними фронтами. Розкладіть таку послідовність у ряд Фур'є. Покажіть сигнал, відновлений за рядом Фур'є.

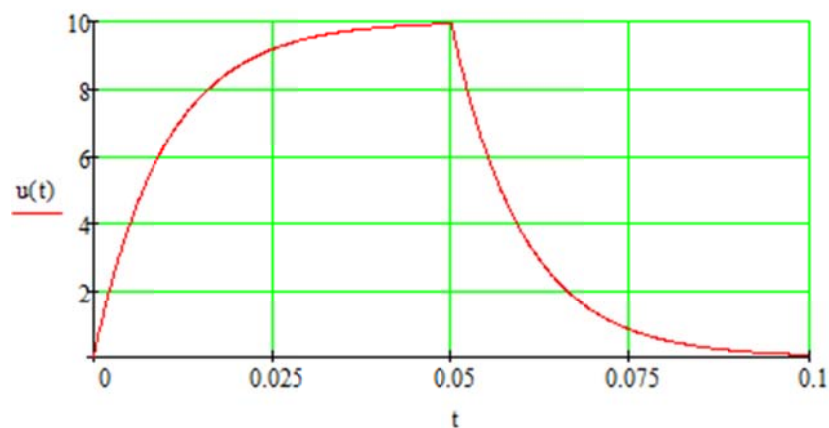
Розв'язання:

$$u(t) := \begin{cases} 10 - 10e^{-100t} & \text{if } t \leq 0.05 \\ 10e^{-100(t-0.05)} & \text{if } t > 0.05 \end{cases}$$

$$T := 0.1$$

$$f := \frac{1}{T} = 10$$

$$\omega := 2\pi f = 62.832$$



$$A_0 := \frac{1}{T} \left[\int_0^{0.05} (10 - 10e^{-100t}) dt + \int_{0.05}^{0.1} 10e^{-100(t-0.05)} dt \right] = 5$$

$$n := 1, 2 \dots 5$$

$$B_n := \frac{2}{T} \left[\int_0^{0.05} (10 - 10e^{-100t}) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt + \int_{0.05}^{0.1} [10e^{-100(t-0.05)}] \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt \right]$$

	0
0	0
1	4.552
2	0
3	0.455
4	0
5	0.109
6	...

$$C_n := \frac{2}{T} \left[\int_0^{0.05} (10 - 10e^{-100t}) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt + \int_{0.05}^{0.1} [10e^{-100(t-0.05)}] \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt \right]$$

	0
0	0
1	-2.887
2	0
3	-0.884
4	0
5	-0.37
6	...

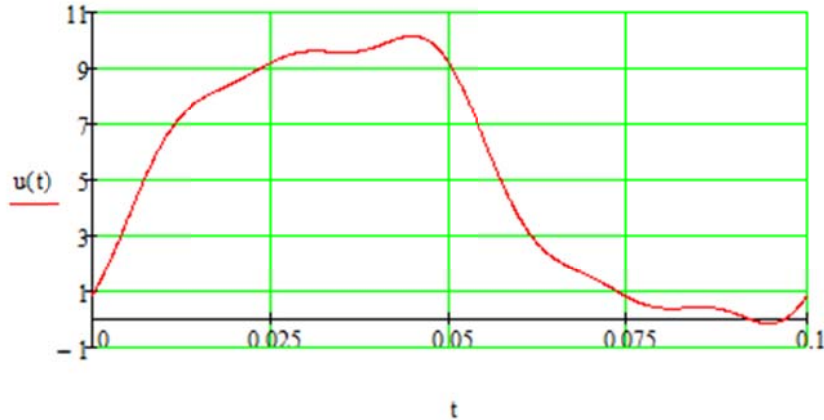
$$A_n := \sqrt{(B_n)^2 + (C_n)^2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.391 \\ 0 \\ 0.995 \\ 0 \\ 0.386 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_n := \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{C_n}{B_n}\right) & \text{if } B_n > 0 \wedge C_n < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ -32.384 \\ 0 \\ -62.781 \\ 0 \\ -73.556 \end{pmatrix} \text{ deg}$$

$$u(t) := A_0 + \sum_{n=1}^5 (A_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t + \varphi_n))$$



3.3. Комплексна форма ряду Фур'є

Представимо тепер загальну форму розкладу сигналу в ряд Фур'є в комплексній формі, використовуючи формули Ейлера:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}); \quad \sin x = -\frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx})$$

Гармонічна складова ряду буде мати таке представлення:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}) - j(b_n (e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}))] = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [e^{jn\omega_1 t} (a_n - jb_n) + e^{-jn\omega_1 t} (a_n + jb_n)] \end{aligned}$$

Введемо позначення: $C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$; і $C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$. Звернемо увагу на те, що a_n – парні коефіцієнти, тобто $a(-n) = a(n)$, а b_n непарні, $b(-n) = -b(n)$. Враховуючи таку властивість можемо записати комплексну форму ряду Фур'є:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (3.16)$$

де в загальному випадку коефіцієнти:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3.17)$$

З формули (3.16) витікає, що неперервний сигнал в комплексній формі представляється від'ємними частотами. В (3.16) складові з позитивними і негативними частотами складають пари. Якщо виконати перетворення над ними:

$$c_n e^{jn\omega_1 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_1 t} = |c_n| e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + |c_n| e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2|c_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \quad (3.18)$$

Звідси витікає, що від'ємна частота – це лише математична умовність, яка пов'язана зі способом подання комплексних чисел.

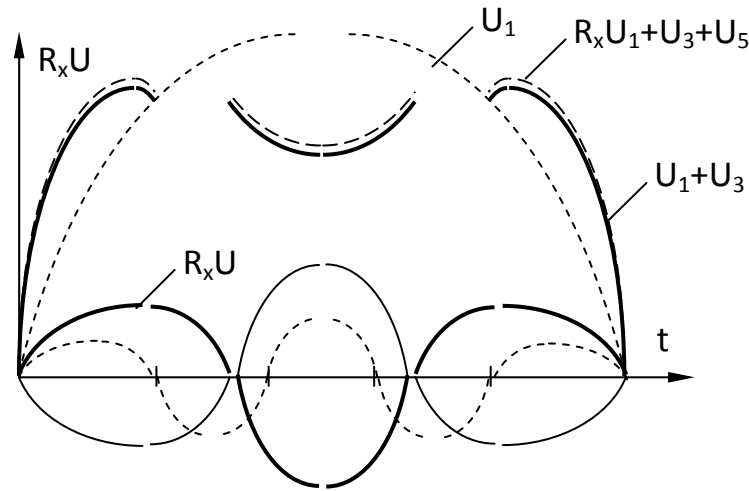


Рис. 3.6

Розглянемо тепер фізичну суть подання неперервного сигналу у вигляді ряду Фур'є в дійсній і комплексній формі.

При поданні у вигляді дійсної форми ряду реальний сигнал може бути одержаний завдяки знаходженню суми амплітуд складових з врахуванням їх кутових зміщень. Рис. 3.6 демонструє представлення прямокутного імпульсу такими складовими. Збільшення кількості враховуваних складових буде наближати її суму до форми реального імпульсу.

Дещо інша форма подання сигналу в комплексній формі. Якщо аналізувати формулу Ейлера:

$$\cos \omega_1 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}),$$

то перша складова відображає вектор на комплексній площі довжиною $\frac{1}{2}$, який обертається в напрямку зростання полярного кута $\omega_1 t$, а друга з вектором такої ж довжини обертається в протилежному напрямку. Їх векторна сума дає дійсне число. Така картина відображається на рис. 3.7, а.

Сума векторних складових (рис. 3.7, б) дає можливість спочатку знайти складові C_+ та C_- як амплітуди векторів при позитивній і від'ємній частотах, а їх векторна сума дає можливість визначити миттєве значення функції в системі полярних координат.

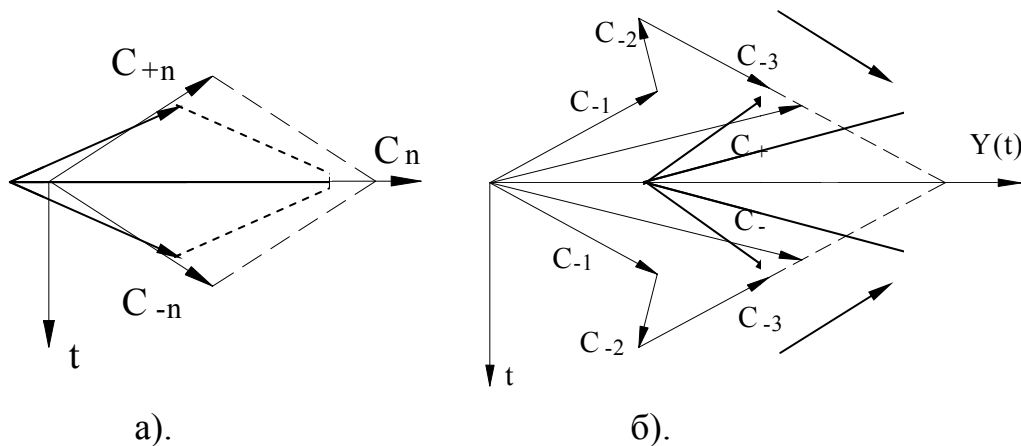


Рис. 3.7

3.4. Практична оцінка спектральних характеристик різних типів сигналів

Віртуальна лабораторія Multisim має широкі можливості як по створенню періодичних сигналів різної форми і гармонічного складу, так і по засобах гармонічного аналізу. З приладів, що генерують сигнали, які використовуються в електронних системах і системах зв'язку слід виділити функціональний генератор. На рис. 3.7 наведені його зображення в схемах (рис. 3.8, а) та для вибору і налагодження параметрів сигналів (рис. 3.8, б).

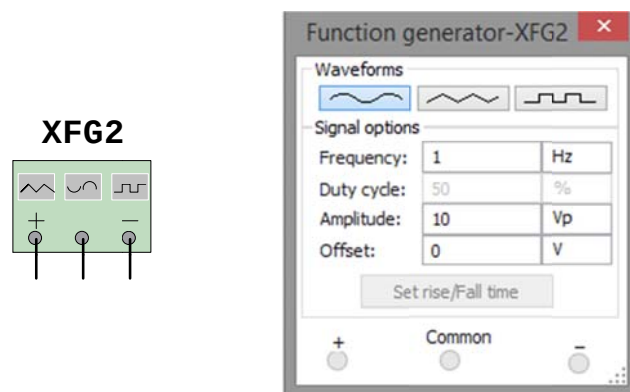


Рис. 3.8

До того ж, як відмічалось вище, в бібліотеці джерел сигналів є досить велика кількість різноманітних джерел, та можливостей по створенню імпульсів довільної форми. Для практичного вивчення спектрів різних сигналів використаємо декілька типових сигналів, спектральні характеристики яких можна отримати за допомогою функціонального генератора. Рекомендується наступна послідовність проведення дослідів.

3.4.1. Вибирається для проведення досліджень прямокутний імпульс з відношенням $t_i/T = 0,5$. Імпульс двополярний., амплітуда дорівнює 10 В. Заміряється амплітудний спектр гармонік, їх частоти.

Змінюючи відношення t_i/T імпульсів від 0,5 до 0,05, заміряти амплітуди перших п'яти гармонік і виконати їх порівняння.

3.4.2. Зробити імпульс одно полярним і провести аналогічні досліді. Виконати порівняння з результатами попереднього досліді.

3.4.3. Повернутись до двополярного імпульсу і збільшити тривалість фронту та зрізу до 10% від попереднього значення. Заміряти спектральний склад і порівняти з попередніми досліді.

3.4.4. Переключитись на імпульс пиловидної форми з симетричними сторонами. Амплітуда імпульсу залишається 10 В. Заміряти спектральний склад пиловидного сигналу, зменшуючи відношення одної сторони до іншої до рівня 99%. На кожному кроці виконувати вимірювання амплітуд гармонік і порівнювати з режимом симетричного пиловидного імпульсу.

3.4.5. Обчислити для вибраного імпульсу потужність постійної складової та потужності гармонічних складових. Результати порівняти з експериментальними.

3.4.6. Обчислити енергію гармонічних складових для вибраного типу імпульсу і порівняти зміну енергії зі зміною порядку гармонік.

3.5. Питання до теми

3.4.1. Наведіть формули знаходження коефіцієнтів для розкладання у ряд Фур'є періодичного сигналу.

3.4.2. Поясніть фізичну суть розкладання сигналів у ряд Фур'є.

3.4.3. Дайте пояснення рівності Парсеваля.

3.4.4. Поясніть фізичну суть потужності та енергії гармонічних складових сигналу.

3.4.5. Поясніть послідовність проведення дослідів, способи установок параметрів імпульсів, способи налаштувань для проведення гармонічного аналізу.

3.4.6. Поясніть призначення вікон плотера. Поясніть графіки, що зображені на плотері, призначення таблиць та значення параметрів у цих таблицях.

3.4.7. Дайте визначення спектру сигналу.

3.4.8. Якими коефіцієнтами визначається розкладання у ряд Фур'є парної функції?

3.4.9. Якими коефіцієнтами визначається розкладання у ряд Фур'є непарної функції?

3.4.10. Як зміниться амплітудний і фазовий спектри послідовності прямокутних імпульсів при зсуві на T_i і на $T_i/4$?

ТЕМА 4. ВИВЧЕННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДИНИЧНИХ ІМПУЛЬСІВ

4.1. Основні теоретичні положення

Розглянемо формулу (3.17). Змінюючи $T = \frac{2\pi}{\omega}$, можемо переписати:

$$2c_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

Для нескінченно малого частотного діапазону $\Delta\omega \rightarrow 0$ можемо записати приблизне співвідношення. Такий перехід фактично приводить до визначення спектральної щільності одиночного імпульсу.

$$2c_n = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} S(\omega) \quad (4.1)$$

Величина

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} d\omega t \quad (4.2)$$

називається спектральною щільністю сигналу $s(t)$.

Фізично спектральна щільність позначає ту частку комплексної амплітуди сигналу, яка перепadaє на визначений частотний діапазон $\Delta\omega$.

Формула (4.2) називається перетворенням Фур'є сигналу $s(t)$, який в даному випадку вже не являється періодичною функцією часу.

Скористуємось знову формулами (3.16) і (3.17). Використовуючи взаємозв'язок (4.1), формулу (3.16) можемо записати у вигляді:

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1) e^{+jn\omega_1 t} \quad (4.3)$$

Якщо згадати, що T – це інтервал між сусідніми гармоніками, то T^{-1} – це інтервал між частотами сусідніх гармонік, тобто:

$$T^{-1} = [n\omega_1 - (n-1)\omega_1](2\pi)^{-1} \quad (4.4)$$

З використанням (4.4), формула (4.3) буде мати вигляд:

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1) e^{+jn\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1]$$

Зважаючи на те, що з ростом періоду частотні інтервали між сусідніми гармонічними складовими скорочуються, то з врахуванням (3.18) буде:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (4.5)$$

Формула (4.5) називається зворотним перетворенням Фур'є для неперіодичного сигналу.

Наведені вище перетворення – одержання формул прямого і зворотного перетворення Фур'є для неперіодичного сигналів, як буде видно з наступного матеріалу, відкриває великі можливості дослідження широкого плану сигналів, їх перетворення для використання в комп'ютерних системах в реальному часі.

Для розглянутого раніше прикладу прямокутного імпульсу (рис. 4.1) тепер знайдемо спектральну щільність:

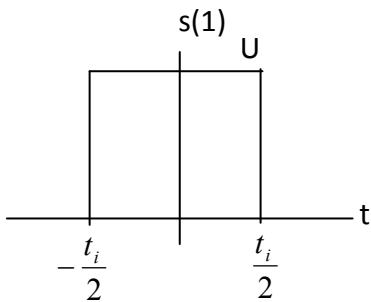


Рис. 4.1

$$S(\omega) = U \int_{-t_i/2}^{t_i/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega t_i}{2}$$

Якщо записати $\omega t_i/2 = \varepsilon$, маємо:

$$S(\omega) = U t_i \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \quad (4.6)$$

При $\omega \rightarrow 0$, використовуючи відомі перетворення знаходимо $S(0) = U t_i$, тобто для постійної складової спектральна щільність перетворюється в площу імпульсу.

Розглянемо ще один приклад, який має дуже важливе значення як для теорії, так і для практики перетворення сигналів, це δ -функція.

Математичну модель її запишемо у вигляді:

$$s(t) = \delta(t).$$

Спектральна щільність функції:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Використовуючи фільтруючу властивість функції, знаходимо для $t=0$

$$S(\omega) = I = \text{const.} \quad (4.7)$$

Формула (4.7) говорить про те, що δ -імпульс має рівномірний спектр на всіх частках. В теорії і практиці спектрів він називається шумом, а деякі його нові властивості будуть визначені пізніше.

Спектральна щільність постійного в часі сигналу $s(t) = U$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(0) \quad (4.8)$$

Фізично це означає, що найбільший в часі сигнал має спектральну компоненту тільки на нульовій частоті.

Спектр комплексного експоненціального сигналу:

$$s(t) = e^{j\omega_0 t}.$$

Особливість цього сигналу полягає в тому, що при $t \rightarrow \pm\infty$ функція не має межі. Тому інтегральні перетворення над такими функціями виконуються інакше.

Скористаємось методом аналогії. Для відомої спектральної щільності находимо оригінал:

$$e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Використовуючи фільтруючу властивість δ -функції, одержуємо:

$$S(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (4.9)$$

Тобто спектральна щільність комплексного сигналу рівна нулю скрізь, крім точки $\omega = \omega_0$. Остання формула дає можливість узагальнити поняття спектра на дискретні сигнали.

Як приклади:

$$s(t) = \cos \omega_0 t.$$

Використовуючи формулу Ейлера і вираз (4.9), знаходимо:

$$S(\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Функція $s(t) = \sin \omega_0 t$.

$$S(\omega) = -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)].$$

Спектральна щільність комплексного періодичного сигналу, що розкладається в ряд Фур'є:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

матиме вигляд:

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

Не вдаючись в деталі взаємозв'язку можна сказати, що для будь-якого імпульсу між його тривалістю та шириною спектру існують взаємозв'язки:

$$t_i f_B = K, \quad (4.10)$$

де K – постійний коефіцієнт, який близький до 1.

Формула (4.10) має дуже важливе значення в теорії інформації, вимірювальній техніці. Фізично вона відображає властивість, близьку до принципу невизначеності в квантовій фізиці. Для нашого прикладу вона означає, що чим коротші імпульси використовуються для передачі інформації, тим більш широкополосною повинна бути система передачі.

Лінійність перетворень. Якщо маємо суму сигналів

$$\sum s_i(t),$$

то спектральна щільність теж буде визначатись сумою спектрів кожної складової

$$\sum s_i(t) \Leftrightarrow \sum S_i(\omega).$$

Приклад. Колоколоподібний (гаусів) імпульс є класичним прикладом сигналу з найбільш компактним спектром. Описується виразом:

$$u(t) = U_m \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_T^2}\right),$$

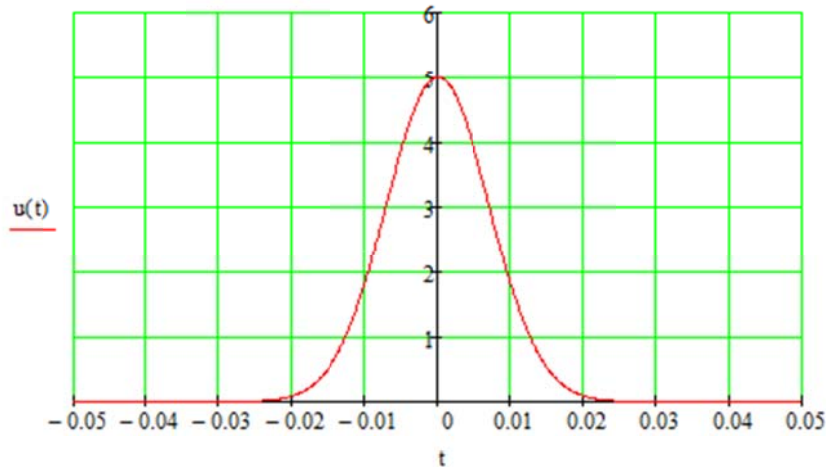
де t_0 – положення центру (вершини) імпульсу; τ_T – параметр імпульсу, який визначає його тривалість.

Покажіть графік спектральної щільності цього імпульсу.

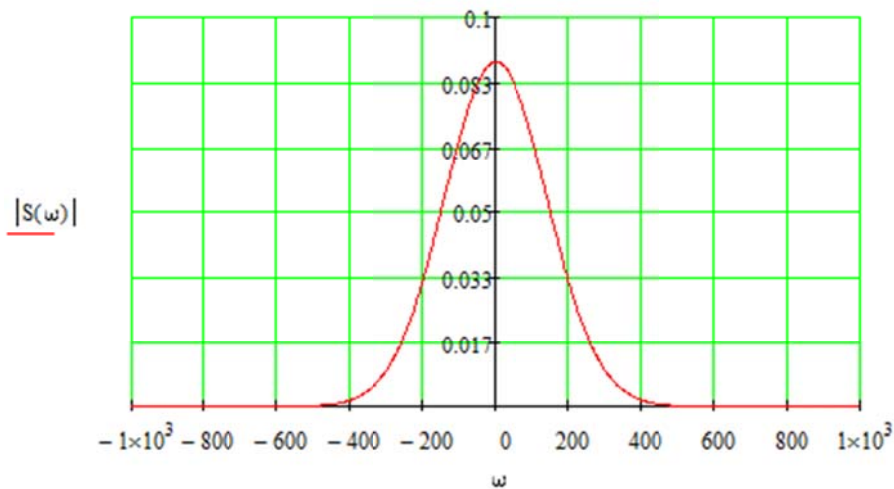
Розв'язання:

$$U_m := 5 \quad t_0 := 0 \quad \tau_T := 10 \cdot 10^{-3}$$

$$u(t) := U_m \cdot \exp\left[-\frac{(t - t_0)^2}{\tau_T^2}\right]$$



$$S(\omega) := \int_{-0.025}^{0.025} u(t) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t) dt$$



4.2. Властивості спектральної щільності

Ми вже розглянули достатньо прикладів, які надають можливість проаналізувати зв'язок між тривалістю імпульса та шириною його спектра. З проведеного аналізу витікає, що чим менше тривалість імпульсу, тим ширший його спектр. В подальшому під шириною спектра будемо мати весь частотний інтервал, в якому:

$$|S(\omega)| > 0,1 |S_{\max}|.$$

Спектр сигналу, зміщеного в часі. Якщо маємо сигнал $s_I(t)$, зміщений відносно вихідного сигналу $s(t)$ на інтервалі t_0 , тобто

$$s(t-t_0),$$

то його спектр:

$$S_I(\omega) = S(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}. \quad (4.11)$$

Одержання формули (1.25) досягається заміною змінних $t-t_0$.

Спектр сигналів, що реєструється в різних масштабах часу.

Припустимо, що над сигналом $s(t)$ виконане перетворення, пов'язане зі зміною масштабу часу. Як приклад, відома ситуація, коли грампластівка обертається з іншою частотою. Зміна часу полягає в тому, що функція часу виконується в новому масштабі часу kt – де $k > 1$ або менше 1, але більше нуля. В першому випадку маємо “зжимання” сигналу, а при $k < 1$ – “розтягування”.

Для цього випадку можемо записати:

$$S(\omega) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\frac{\omega}{k}x} dx,$$

що приводить до формули:

$$y(kt) \Leftrightarrow \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right) \quad (4.12)$$

З (4.12) витікає, що для того, щоб знати сигнал в часі необхідно розмістити його в більш широкому частотному діапазоні з пропорційним зменшенням амплітуд.

Важливою особливістю масштабування часу є випадок, коли $k=-1$. В такому випадку

$$y(-t) \Leftrightarrow -S(-\omega) \quad (4.13)$$

Фізично це явище не існує в реальних сигналах і є тільки математичним перетворенням. Але воно має важливе значення на практиці. Воно полягає в тому, що дає можливість знаходити “дзеркальну копію” сигналу, а також в тому, що при передачі і прийомі модульованих сигналів можливо використовувати одну бокову полосу.

Спектральна щільність похідної від сигналу

$$\frac{d}{dt} s(t) \Leftrightarrow j\omega S(\omega). \quad (4.14)$$

Якщо виконується диференціювання сигналу, то швидкість зміни похідної підвищується, і як результат спектр сигналу буде збільшуватися в

області більш високих частот порівняно з вихідним сигналом. Можна нагадати диференціювання прямокутного імпульсу.

Формула (1.28) справедлива для похідної будь-якого порядку, якщо вона існує, тобто:

$$\frac{d^n}{dt^n} s(t) = (j\omega)^n S(\omega).$$

Спектральна щільність добутку сигналів. Якщо ми маємо сигнали $s(t)=u(t) \cdot v(t)$ і відповідний їм спектр $u(t) \Leftrightarrow U(\omega) : v(t) \Leftrightarrow V(\omega)$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (4.15)$$

Підставимо в (4.15) спектральну щільність $v(t)$ в інтегральному вигляді:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) e^{j\xi t} d\xi \right] e^{-j\omega t} dt$$

Змінюючи порядок інтегрування, находимо:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j(\omega-\xi)t} dt \right] d\xi$$

Звідки спектр добутку:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) V(\omega - \xi) d\xi = v(\omega) * u(\omega) \quad (4.16)$$

тобто спектр добутку визначається згорткою спектрів окремих сигналів.

Операція згортки комутативна:

$$V(\omega) * U(\omega) = U(\omega) * V(\omega).$$

Якщо відомий спектр сигналу, що представляється у вигляді добутку спектрів:

$$S(\omega) = S_1(\omega) \cdot S_2(\omega), \quad (4.17)$$

то справедливе буде відношення:

$$S_1(\omega) \cdot S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \omega) s_2(t) dt \quad (4.18)$$

Властивості дійсної та уявної частки щільності. Виходячи з формули (4.2), можемо записати:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega)$$

Скористаємось тепер знову формулою зворотнього перетворення Фур'є:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(j\omega) - jB(j\omega)] \cos \omega t + j \sin \omega t d\omega.$$

В результаті одержуємо чотири інтегральні вирази, які в цілому повинні дати істинне значення функції $s(t)$.

Це можливо лише при умові, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega = 0; \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega = 0.$$

Приведена рівність може бути забезпечена лише, якщо $A(\omega)$ є функцією парною, а $B(\omega)$ – непарною, тобто:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= A(-\omega) \\ B(\omega) &= -B(-\omega). \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

4.3. Спектри неінтегрованих сигналів

Одною з умов використання перетворення Фур'є до функції $s(t)$, яка описує форму сигналів, є її абсолютна інтегрованість, що означає обмежену енергію сигналу. Разом з тим, ряд функцій не задовольняють цим умовам. Це може бути гармонічне коливання з амплітудною модуляцією; сигнали, що описуються одиничними функціями і т.п. На ці сигнали також може бути розповсюджений апарат перетворення Фур'є.

Розглянемо спочатку сигнал виду:

$$s(t) = S_0 \sin(\omega t). \quad -\infty \leq t \leq +\infty$$

Зрозуміло, що такий сигнал має нескінченну енергію. Застосуємо формально до цього сигналу перетворення Фур'є:

$$S_z(j\omega) = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Оскільки:

$$\cos x = \frac{1}{2} [e^{jx} + e^{-jx}],$$

то маємо:

$$S_c(j\omega) = \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{S_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t} dt.$$

Скориставшись табличним інтегралом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \delta(\omega),$$

отримуємо:

$$S_c(j\omega) = S_0 \cdot \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (4.20)$$

Звідси витікає, що спектр гармонічного коливання, визначеного на інтервалі часу $(-\infty, \infty)$, рівняється нулю на всіх частотах, за винятком $\omega = -\omega_0$ и $\omega = \omega_0$. На цих частотах значення спектральних складових обертається в нескінченність (рис.4.3,а).

Якщо прийняти $\omega_0 = 0$, що відповідає постійному сигналу $s_{nc}(t) = S_0$, то з (4.20) маємо:

$$S_{nc}(j\omega) = 2S_0\pi\delta(\omega).$$

Таким чином, спектр постійного сигналу відрізняється від нуля лише при $\omega = 0$

Можна показати, що спектр ступінчатого сигналу

$$s_c(t) = s_0 \cdot u_{e0}(t),$$

визначається формулою:

$$S_c(j\omega) = S_0\pi\delta(\omega) + \frac{S_0}{j\omega}.$$

З наведеного вище витікає, що спектри неінтегруємих сигналів можливо обчислити, використовуючи перетворення Фур'є з використанням— δ -функції. Визначимось зі спектром δ -функції,

$$s_\delta(t) = S_0 \cdot \delta(t).$$

Використовуючи спектральне перетворення до цього сигналу і враховуючи фільтруючі властивості δ -функції, отримаємо:

$$S_{\delta}(j\omega) = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t \neq 0) e^{-j\omega t} dt = S_0.$$

Тобто, сигнал, що представляє собою добуток S_0 на δ -функцію має рівномірний спектр в усьому частотному діапазоні. Така властивість дельта – функції широко буде використовуватись в майбутньому.

Спектральне представлення сигналів відкриває прямий шлях до аналізу проходження сигналів через широкий клас електронних кіл, пристроїв та систем.

Порівняння спектральних діаграм одиничного імпульсу і імпульсної послідовності показує, що форми огинаючої лінійчатого і сплошного спектрів співпадають. При цьому як огинаюча лінійчатого, так і огинаюча сплошного спектрів досягають нульового значення на частотах $\omega = 2l\pi/\tau$, где $l = \pm 1, \pm 2, \dots$. При $\omega = 0$ значення спектральної функції рівно площі $S_0 \cdot \tau_u$ імпульсу.

4.4. Енергетичний спектр сигналів

При практичній оцінці властивостей сигналів широко використовуються їхні енергетичні характеристики.

Відомо, що енергія однозначно пов'язана з потужністю:

$$E = P * T.$$

У той же, час потужність

$$P = U * I = U * \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

При обумовленсті, наприклад, такого фактора, що заміряється потужність, яка виділяється на опорі в 1 Ом можемо записати:

$$P = U^2,$$

Якщо напруга U змінюється в часі, то ми можемо відповідно записати:

$$E = \int_0^t u^2(t) dt \quad (4.21)$$

У такому випадку енергія одиночного імпульсу визначається за формулою:

$$E = \int_0^{t_i} U^2 dt = U^2 t_i$$

Знайдемо енергію, що виділяється на опорі на періоді 2π синусоїди з амплітудою U_m :

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_m^2 \sin^2 \omega t) d\omega t = \frac{\omega t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4} \Big|_0^{2\pi} = \frac{U_m^2}{2}.$$

Тобто енергія синусоїдального сигналу виражається в його дійсному значенні.

Тепер спробуємо узагальнити ці початкові знання.

Формула (4.21) може бути записана, по аналогії з (4.1), для одного імпульсу:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad (4.22)$$

Скористуємось тепер зворотнім перетворенням Фур'є для сигналу $s(t)$.

і змінимо порядок інтегрування по t і по ω :

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt$$

Розглянемо тепер внутрішній інтеграл,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt = S(-\omega)$$

який відрізняється від прямого перетворення Фур'є позитивним значенням знаку при $j\omega$. Враховуючи властивості (4.19) реальної і уявної складових, можемо записати.

$$S(-\omega) = S_y^*(\omega)$$

$S^*(\omega)$ – спряжена спектральна щільність відносно $S(\omega)$.

В результаті знаходимо:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) S_y^*(\omega) d\omega \quad (4.23)$$

Формула (4.23) має одну особливість. Вираз зліва є дійсним, а складові $S(\omega)$ і $S^*(\omega)$ – в загальному плані – комплексними. Сумісність правої і лівої частин полягає в тому, що інтегрування ведеться в симетричних межах.

Скориставшись відомим співвідношенням

$$S_y(\omega) \cdot S_y^*(\omega) = |S_y^*(\omega)|^2 = W_y(\omega).$$

Запишемо:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_y(\omega) d\omega \quad (4.24)$$

Функція $W_y(\omega)$, що визначається як квадрат модуля спектральної щільності, називається енергетичним спектром сигналу $s(t)$. Звернемось тепер до формули потужності, з якої витікає, що енергія може бути обчислена і як добуток двох сигналів, які взаємно залежні між собою $u(t)$ і $i(t)$.

Враховуючи, що $W(t)$ – є дійсною величиною, добуток $u(t)$ і $i(t)$ визначає тільки активну складову потужності, тобто

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \cdot \cos \varphi(t) = \operatorname{Re}[u(i) \cdot i(t)]$$

$$\operatorname{Re}[u(t) \cdot i(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) \cdot S_i^*(\omega) d\omega \quad (4.25)$$

яке в теорії сигналів відома як узагальнена формула Релея

Відповідно, функція

$$W_{u,i}(\omega) = |S_u(\omega) \cdot S_i(\omega)| \quad (4.26)$$

називається взаємним енергетичним спектром сигналів $u(t)$ і $i(t)$.

Формула (4.23) відносно енергетичного спектру одиничного сигналу відома як формула Релея в узькому розумінні. Фізична інтерпретація її полягає в том, що енергія любого сигналу може розглядатись як результат знаходження суми складових усіх інтервалів частотної осі, тобто

сигналів і практиці їх перетворення.

Незважаючи на те, що порівняно з спектральною щільністю в енергетичному спектрі губиться інформація про фазові характеристики складових спектра, його використання відкриває широкі можливості в вирішенні теоретичних і практичних задач.

Взаємний енергетичний спектр розкриває взаємозв'язки між двома сигналами. Графік $W_{u_i}(\omega)$ демонструє, долю окремих частотних сигналів, відкриваючи шлях створення фільтрів для виділення або подавлення взаємної енергії.

Приведемо приклади енергетичних спектрів:

Приклад 1. Для прямокутного імпульсу, спектральна щільність якого описується формулою (4.5), маємо:

$$W_U(\omega) = |S_U(\omega)|^2 = U^2 t_i^2 \frac{\sin^2 \frac{\omega t_i}{2}}{(\frac{\omega t_i}{2})^2}$$

Аналізуючи графік спектральної щільності, можна стверджувати, що, найбільша величина енергії імпульсу сконцентрована в діапазоні низьких частот.

Обчислення енергії імпульсу використовується в відповідності з формулою (4.24)

$$E = \frac{U^2 t_i^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega t_i}{2}}{(\frac{\omega t_i}{2})^2} d\omega = U^2 t_i$$

Результат співпадає зі значенням, що обчислюється прямим інтегруванням. Приклад 2. Сигнал задається в вигляді гармонічного ряду.

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Використовуючи формули для спектральної щільності синусної та косинусної тригонометричних функцій, одержуємо:

$$W(\omega) = \pi \sum \frac{U_{nm}^2}{2} [\delta(\omega + n\omega_0) + \delta(\omega - n\omega_0)]$$

4.5. Практичне дослідження спектрів одиничних імпульсів та їх властивостей

Для проведення досліджень спектрів одиничних імпульсів скористаємось результатами дослідів, що проведені в матеріалі другої теми.

4.5.1. Складається схема, що відповідає рис. 2.3. Для отримання спектру одиничного імпульсу слід скористуватись фур'є аналізом. Але на відміну від попереднього розгляду у перше вікно установок слід внести деякі зміни. (Рис. 4.2)

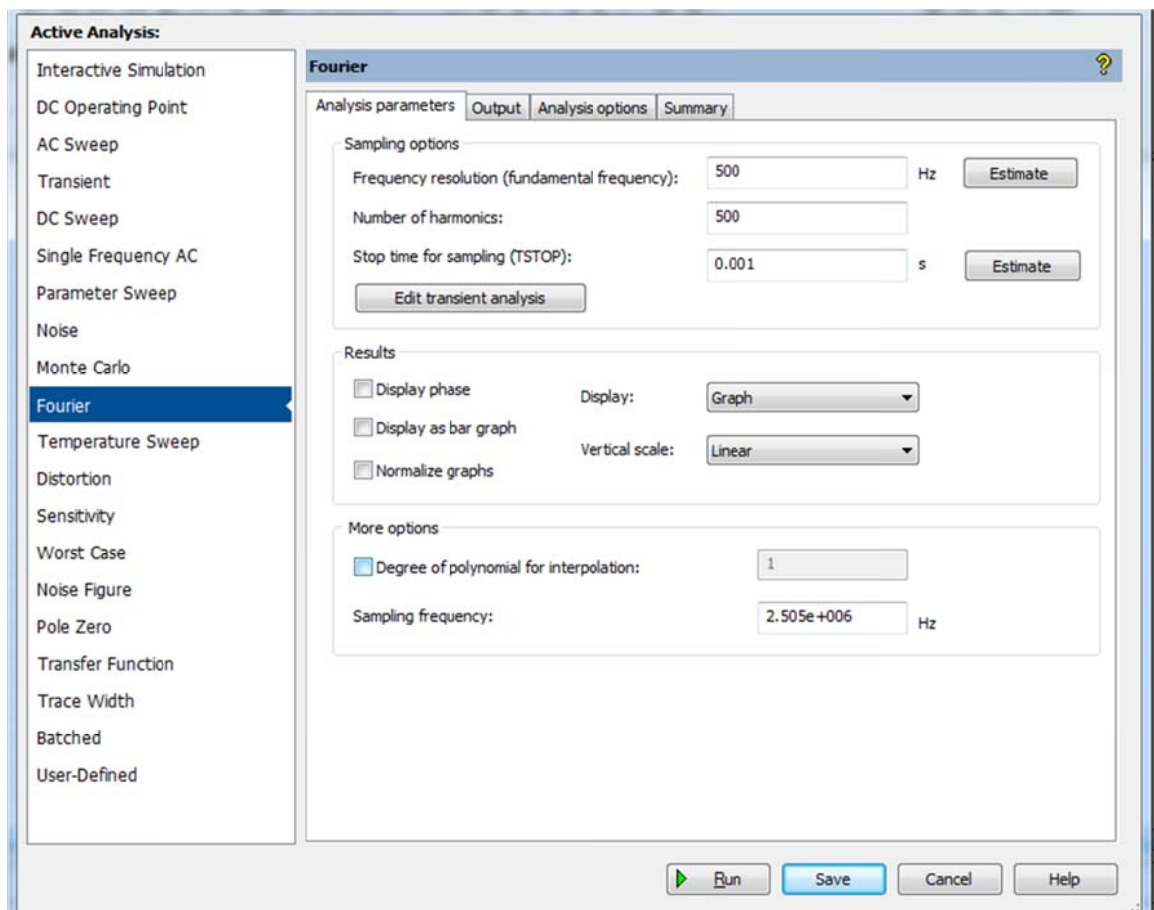


Рис. 4.2

Це стосується, перш за все, опції Frequency resolution, де слід встановити часту 500 Гц; опції number of garmonics, де слід встановити досить велике число. В діаграмі, що наведена нижче закладено їх

кількість рівною 500. а також в опції display встановити graph. В результаті моделювання з'явиться спектрограма, що наведена на рис. 4.3.

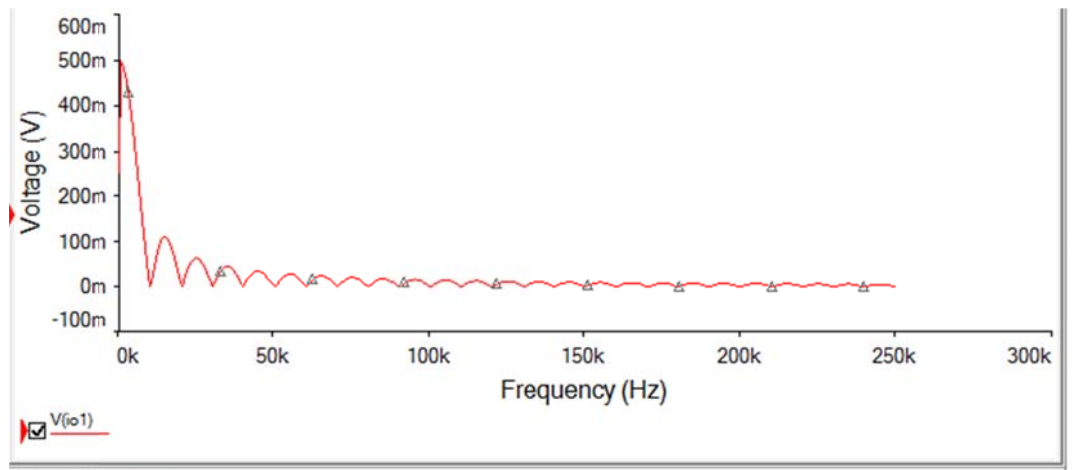


Рис. 4.3

Результати слід порівняти з спектром періодичної послідовності імпульсів. (Рис.4.4).

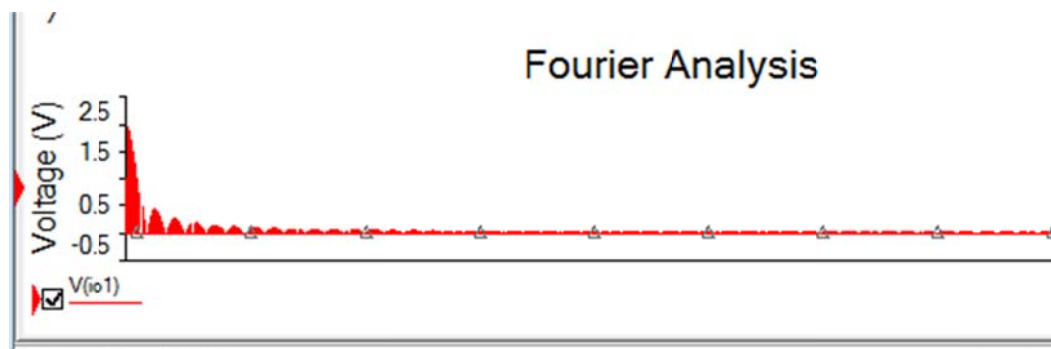


Рис. 4.4

4.5.2. Проводиться дослід по оцінці спектру одиничного імпульсу при зменшенні його тривалості.

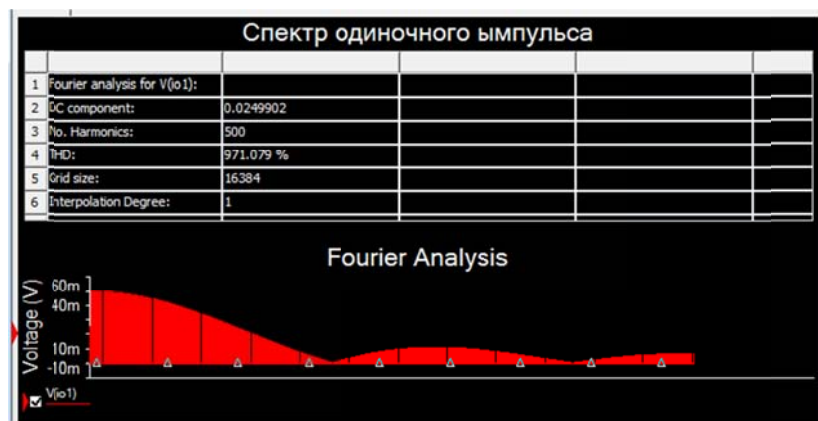
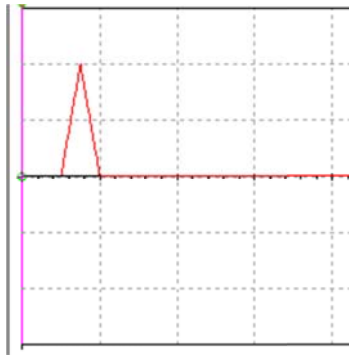


Рис. 4.5

Тривалість імпульсу задається другою затримкою. Рекомендується зменшувати тривалість від одної мСек до декількох мікросекунд. При цьому слід аналізувати характер зміни спектру при одній і тій же кількості встановлених гармонік. Зробити висновки в

яких слід оцінити вплив тривалості імпульсу на характер спектру. Рекомендується скористатись формулою 4.10 і перевірити її приблизну вірність. Приклад спектру прямокутного імпульсу при його тривалості 20 мксек наведено на рис. 4.5.



4.5.3. Провести дослід по визначенню спектру одиничного імпульсу пиловидної форми. (Рис.4.6.)

Рис. 4.6 Для цього слід створити такий імпульс тривалістю 1 мС і амплітудою 10 В, використовуючи джерело `PIECE_WISE_LINEAR_VOLTAGE`. Порівняти спектри пиловидного імпульсу і прямокутного.

4.5.4. Провести дослід по визначенню спектру суми прямокутного імпульсу і пиловидного, що співпадають в часі. Виконати порівняння зі спектрами кожного з імпульсів окремо. Окремо провести дослід у випадку, коли імпульси не співпадають в часі. Виконати аналіз спектрів і зробити висновки.

4.5.5. Провести дослід по визначенню спектру добутку двох сигналів у випадку, коли вони співпадають в часі. Провести аналіз отриманого спектру.

4.5.6. Провести дослід по визначенню спектру імпульсу після його диференціювання. Для цього на виході суматора слід встановити R-C ланку для диференціювання імпульсу. Параметри ланки можна взяти з прикладу схеми, що наведена на рис.2.11. Оцінити вплив операції диференціювання на спектр імпульсу.

4.6. Питання до теми

4.6.1 Дайте фізичну інтерпретацію спектральної щільності.

4.6.2. Що являє собою графік спектральної щільності дельта-імпульсу? Яким фізично реалізованим дослідом це можна підтвердити?

4.6.3. Як зміна масштабу часу впливає на графік спектральної щільності сигналу?

4.6.4. Як визначається спектральна щільність суми (добутку) двох сигналів?

4.6.5 Як впливає операція диференціювання сигналу на його спектральну щільність?

4.6.6. Наведіть графік спектральної щільності синусоїдальної функції амплітудою 10 В і частотою 1000Гц з постійною складовою 5 В.

4.6.7. У чому полягає взаємозв'язок між шириною спектру і тривалістю імпульсу? Рекомендується продемонструвати цей взаємозв'язок експериментально з використанням програми Multisim.

4.6.8. Як визначається ширина спектру?

4.6.9. Зобразіть амплітудні спектри трикутного та пилоподібного сигналів. У чому полягає їх схожість та різниця?

ТЕМА 5. ЙМОВІРІСНІ ПРОЦЕСИ

5.1. Основні теоретичні положення

Функції часу, які раніше вивчались, мають ту особливість, що значення їх можна визначити у будь-який момент часу.

Але в практиці систем обробки інформації існує багато функцій, для яких спрогнозувати їх значення в довільний момент часу можливо лише з деяким наближенням. До них відносяться перш за все неперіодичні функції, а також функції, значення яких має ймовірнісний характер. Вони можуть бути як неперервними, так і дискретними.

Математичними моделями випадкових сигналів і перешкод є випадкові процеси. Випадковим процесом (ВП) називається зміна випадкової величини у часі. До випадкових процесів відноситься більшість процесів, що протікають в радіотехнічних пристроях, а також перешкоди, супроводжуючі передачу сигналів по каналах зв'язку. Випадкові процеси можуть бути неперервними (НВП) або дискретними (ДВП) в залежності від того, яка випадкова величина – неперервна чи дискретна змінюється в часі. В роботі будемо розглядати НВП.

Візьмемо конкретний приклад. Попробуємо записати на будь-який носій перетворену в електричний сигнал (напругу) інформацію з гучномовця, або зображення на телевізорі.

Допустимо тепер, що, записуючи протягом тривалого часу, наприклад, тижня, необхідно привести таку реалізацію у вигляді графіка. В такому випадку вибирається такий інтервал часу, щоб можна було впевнено говорити, що сигнали на початку та в кінці інтервалу повністю незалежні. В такому випадку можемо записати весь процес у вигляді ряду реалізацій (ансамблю реалізацій), наприклад, у вигляді, що відповідає рис.5.1.

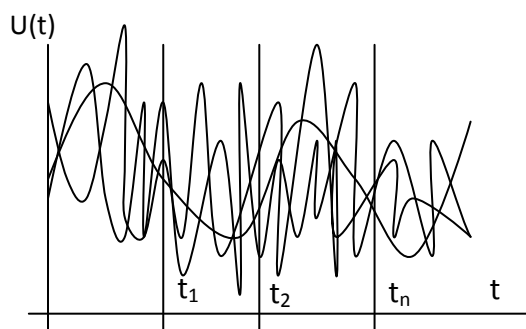


Рис.5.1.

Функції часу, для яких можливо підібрати вказаний інтервал часу називають **фінітними**.

Розглянемо випадковий процес, що зображено у вигляді ансамблю реалізацій.. Якщо зафіксувати момент часу t_1 і значення, що приймають реалізації $\{u_1(t_1), u_2(t_1), \dots, u(t_1)\}$ в в цей момент часу, то сукупність їх створює одновірний переріз процесу і являє собою випадкову величину $U(t_1)$.

Як відомо, вичерпною характеристикою випадкової величини $U(t_1)$ є функція розподілу $F(u, t_1) = P[U(t_1) \leq u]$, або одновимірна щільність імовірності:

$$f(u, t_1) = \frac{dF(u, t_1)}{du}.$$

Зрозуміло, що як $F(u, t_1)$, так і $f(u, t_1)$, володіють всіма властивостями функції розподілу і щільності розподілу імовірності.

Числові характеристики в перерізі t_1 визначаються у відповідності з відомими виразами. Наприклад, математичне очікування ВП в перерізі t_1 визначається за формулою:

$$m_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u, t_1) du, \quad (5.1)$$

а дисперсія:

$$D_x(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} [u - m_u(t_1)]^2 f(u, t_1) du \quad (5.2)$$

Допустимо, що при вибраному інтервалі часу на графіку маємо достатньо велику кількість реалізацій. В такому випадку візьмемо переріз таких реалізацій, наприклад, в момент часу t_1 , складемо таблицю значень кожної з реалізацій і так як їх набір буде випадковим, визначимо експериментально середнє арифметичне.

У подальшому будемо позначати випадковий процес через (t) , а його конкретну реалізацію – через $u(t)$. $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$ – перша, друга, ..., k -а реалізації процесу. Процес може бути представленим у вигляді одної реалізації на досить великому інтервалі часу T .

Але законів розподілу і числових характеристик тільки в перерізі t_1 недостатньо для опису ВП, який розвивається в часі. Тому необхідно розглянути другий переріз в момент часу t_2 (рис.6.1.). В такому випадку ВП буде описуватись вже двома випадковими величинами $U(t_1)$ і $U(t_2)$, рознесеними між собою на інтервал часу $\tau = t_2 - t_1$ і характеризуватись двовимірною функцією розподілу $F(u_1, u_2, t_1, t_2)$ і двовимірною щільністю $f(u_1, u_2, t_1, t_2)$, де $u_1 = u(t_1)$, $u_2 = u(t_2)$. Очевидно, якщо ввести в розгляд третій, четвертий і т. д переріз, можна перейти до багатовимірної (N-

вимірної) функції розподілу $F(u_1, u_2, \dots, u_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$ і, відповідно, до багатовимірної щільності розподілу.

Представлення ВП у вигляді ансамблю реалізацій приводить до поняття стаціонарності процесу. ВП стаціонарним, якщо всі початкові і центральні моменти не залежать від часу, тобто

$$m_u^{(n)}(t_1) = m_u^{(n)}(t_2), M_u^{(n)}(t_1) = M_u^{(n)}(t_2).$$

Це жорсткі умови, тому при їх виконанні ВП вважається стаціонарним у вузькому сенсі.

На практиці використовується поняття стаціонарності в широкому сенсі – коли його математичне очікування і дисперсія не залежать від часу, тобто

$$m_u(t_1) = m_u(t_2) = m_u; D_u(t_1) = D_u(t_2) = D_u, \quad (5.3)$$

В подальшому будемо розглядати лише стаціонарні в широкому сенсі процеси.

Якщо процес може бути зображеним у вигляді одної реалізації на інтервалі часу T , то всі характеристики можуть бути отримані осередненням значень процесу в часі.

Математичне очікування ВП при осередненні в часі визначається наступною формулою:

$$m_u = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (5.4)$$

Звідси витікає фізичне розуміння m_u : математичне очікування – це середнє значення (постійна складова) процесу.

Дисперсія ВП визначається за виразом:

$$D_u = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [u(t) - m_u]^2 dt. \quad (5.5)$$

і має фізичну інтерпретацію, як середня потужність змінної складової процесу.

ВП називається ергодичним, якщо його імовірності характеристики, отримані осередненням по ансамблю співпадають з імовірністними характеристиками, отриманими осередненням в часі по одній з реалізацій. Ергодичні процеси є стаціонарні.

Використання виразів (5.4), (5.5) вимагає, строго говорячи, реалізації випадкового процесу великої тривалості. При розв'язанні практичних задач

інтервал часу T обмежений. При цьому більшість процесів вважаються приблизно ергодичними і імовірності характеристики визначаються у відповідності до виразів:

$$m_u = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt;$$

$$D_u = \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - m_u]^2 dt;$$

Випадкові процеси, в яких математичне очікування рівне нулю називаються центрованими. В подальшому під $u(t)$ будуть вважатись значення центрованих ВП, дисперсія для яких:

$$D_u = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt;$$

Серед різноманіття ВП найбільш широко розповсюджений є нормальний випадковий процес. Для нього всі числові характеристики, за винятком математичного очікування і дисперсії рівні нулю.

5.2. Використання Multisin для генерування випадкових процесів

Для отримання випадкового процесу, який міг би бути використаним для моделювання краще за все підходить генератор теплового шуму. На практиці в якості генератора теплового шуму може бути використаним будь-який резистор. Рівень шуму в пасивних резисторах знаходиться на рівні одиниць мікровольт на вольт прикладеної напруги.

Генератор теплового шуму Thermal Noise Sources знаходиться в бібліотеці Signal Voltage Sources.

На рис. 5.2. наведена схема генератора, яка забезпечує генерацію нормального білого шуму у визначеному частотному діапазоні. Шумові характеристики повністю відповідають вимогам, необхідним для проведення дослідів. Недолік такого генератора – досить малий рівень вихідної напруги, обумовлений обмеженням коефіцієнтом підсилення шумового сигналу.

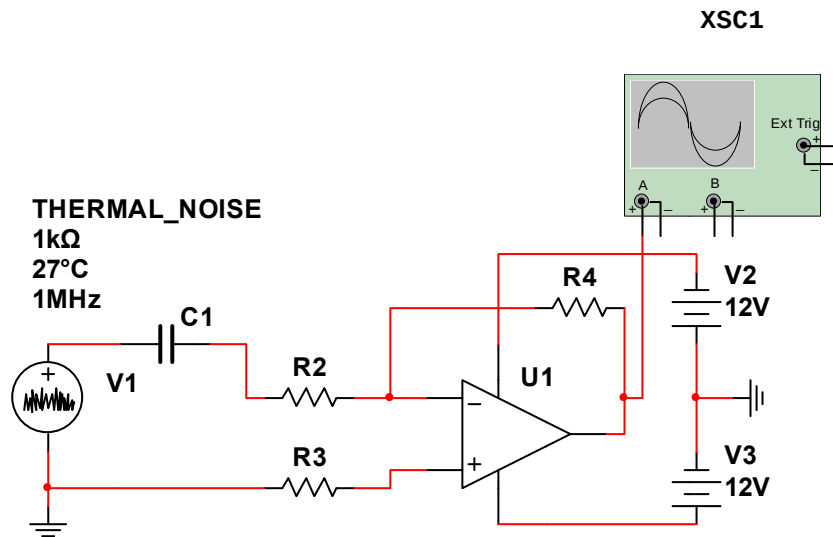


Рис. 5.2



Рис. 5.3

На рис. 5.3 наведені осцилограми шумового сигналу. Конденсатор призначений для відділення постійної складової вихідного сигналу підсилювача. Він практично не впливає на параметри шумового сигналу, зате дає можливість отримати його в чистому вигляді без помилок підсилювача.

На рис. 5.4 наведена схем із збільшеним коефіцієнтом підсилення.

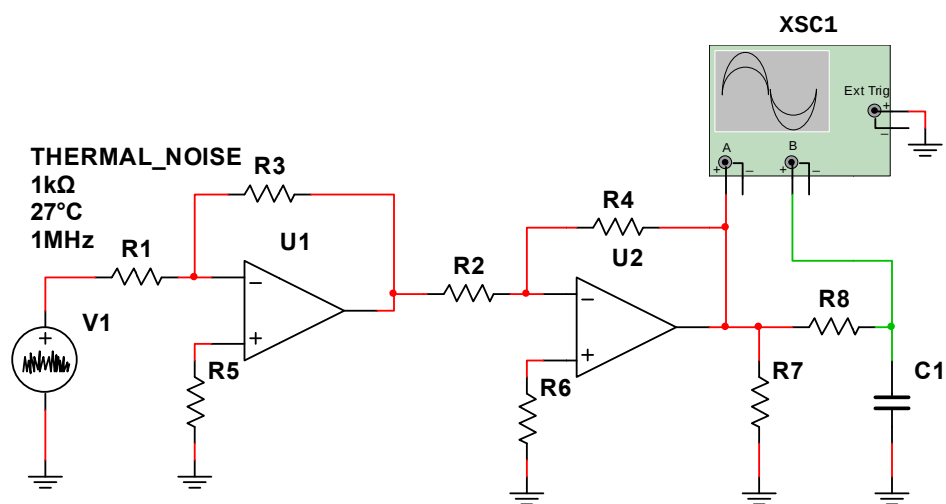


Рис. 5.4

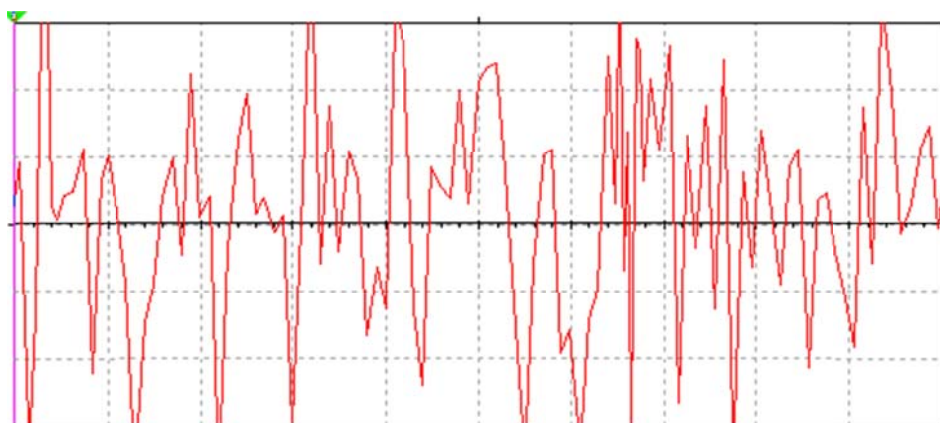


Рис. 5.5

Осцилограми процесу наведені на рис. 5.5.

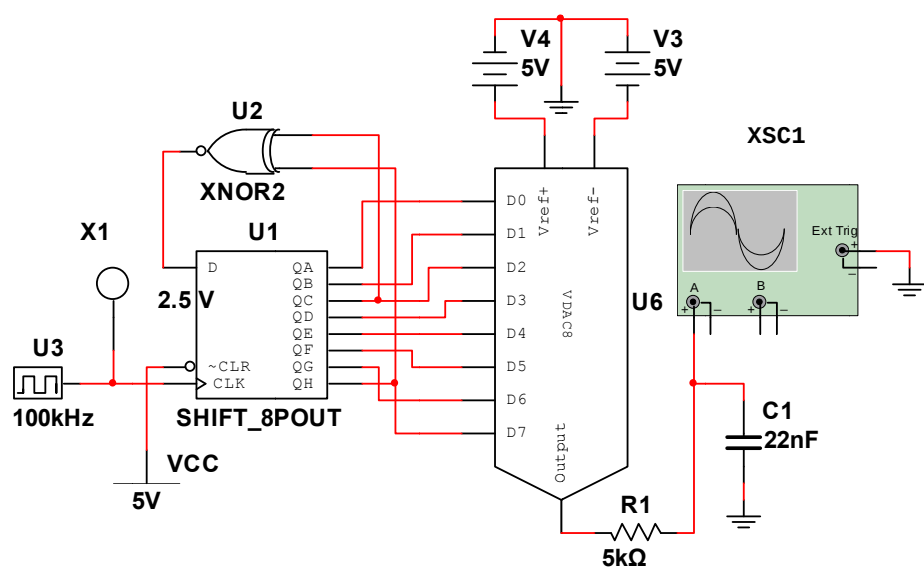


Рис. 5.6.

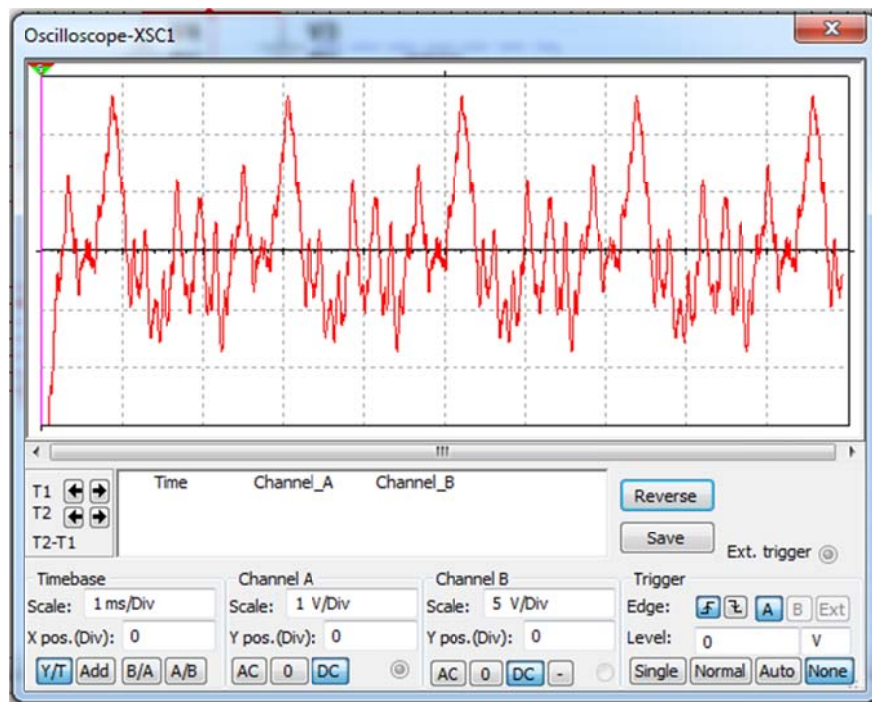


Рис. 5.7

Більші можливості має генератор, схема якого наведена на рис. 6.6. Цей генератор генерує випадковий процес, рівень напруги якого задається одиницями вольт. Осцилограми вихідної напруги наведені на рис. 6.7.

В роботі не визначається швидкодія процесу, а визначаються лише параметри перерізу по ансамблю реалізацій, або їх еквіваленти по одній реалізації.

5.3. Оцінка ймовірнісних характеристик випадкових процесів

5.3.1. Складається схема для генерації випадкового процесу, запускається і перевіряється в роботі.

5.3.2. Після запуску схеми записується досить велика за обсягом часова діаграма процесу, виходячи з того, щоб бути впевненим, що між процесами, вибраними на початку і в кінці інтервалу не було зв'язку, тобто, вони не залежали один від іншого.

5.3.3. Для виконання роботи необхідно визначити наступні параметри випадкового процесу: математичне очікування; дисперсію; Для визначення кількості точок заміру необхідно виходити з наступних рекомендацій. Для побудови гістограми щільності розподілу випадкових величин необхідно весь діапазон її зміни розділити на 8 – 12 ділянок. В кожену ділянку повинно попасти щонайменше 4 – 8 результатів заміру.

Побудувати діаграму статистичного розподілу і на її основі виконати апроксимацію з метою визначення щільності розподілу, і функції розподілу.

ТЕМА 6. КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

6.1. Основні теоретичні положення

Одержані результати дають можливість оцінити тільки ймовірнісні характеристики, але не дають можливості оцінювати ряд властивостей, що характерні для самого процесу. Наприклад, як швидко змінюються складові представленого для дослідження ансамблю реалізацій.

Для цього необхідно провести одночасне дослідження в двох перерізах t_1 і t_2 і визначити двомірну щільність ймовірності. При цьому, як відомо, визначається коефіцієнт кореляції $k_{u_1 u_2}$. Наприклад, взявши переріз в t_1 як розподілення величини u_x , а в t_2 як величина u_y . Знайдемо:

$$k_{x,y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_{x_i} - m^*) (u_{y_i} - m^*) \quad (6.1)$$

Змінюючи відстань τ між перерізами t_1 і t_2 як $\tau = t_1 - t_2$, зможемо обчислювати $k_{x,y}$, який для $\tau=0$ зводиться до дисперсії.

Для стаціонарного процесу коефіцієнт кореляції буде залежати від інтервалу τ , але не повинен залежати від місяця вибору перетину, тобто, від t .

Функція, що буде одержана в результаті такого експерименту називається кореляційною функцією ймовірносного стаціонарного процесу і позначається $B(\tau)$.

Тепер розглянемо більш детально формулу (6.1).

Перш за все достатньо зрозуміло, що різниці $(u_{xi} - m^*)$ і $(u_{yi} - m^*)$ це не що інакше, як центровка функції відносно математичного очікування. Зрозуміло, що відкинувши цю центровку ми фактично встановлюємо реальні точки розміщення координат, що, звичайно відобразиться і на величині $k_{x,y}$.

Суть формули не зміниться, якщо ми (6.1) представимо у вигляді:

$$B_{x,y} = k_{xy} + (m^*)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{xi} u_{yi} \quad (6.2)$$

Реально, для досліджуваного процесу m^* – постійна складова, яка вже визначена і ніякого впливу на характер процесу не має. В електричних колах вона може бути відсічена, наприклад, конденсатором.

Тому ми можемо переписати (6.2) у вигляді

$$B_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(t)u(t + \tau)$$

Враховуючи той факт, що інтервал τ можна змінювати як вправо від вибраної точки, так і вліво, а кількість реалізацій може бути нескінченною, то

$$\begin{aligned} B_{xy}(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u(t)u(t + \tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t + \tau)dt = M[u(t)u(t + \tau)] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ергодичність ймовірносних процесів

Стаціонарний процес називається ергодичним, якщо при обчисленні будь-яких статистичних характеристик осереднення за статистичним ансамблем може бути замінено осередненням за часом. Це дає можливість виконувати осереднення по єдиній реалізації $x(t)$, тривалість якої $T \rightarrow \infty$. Фізично це значить, що кожна реалізація має ті ж властивості, що і весь ансамбль. Властивість ергодичності характерна лише для стаціонарних процесів, тому можна вважати, що ергодичний процес є стаціонарним.

З точки зору обчислення моментів ймовірносного процесу справедливою буде рівність:

$$M^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t)dt \quad (6.4)$$

Розглянемо тепер деякі властивості функції автокореляції.

Перш за все з наведеного аналізу видно, що величина $B(\tau)$ має максимальне значення при $\tau=0$ і воно рівняється енергії сигналу $u(t)$, тобто

$$k_v(0) = E$$

Друга важливість функції $B(\tau)$ є її парність

$$B(\tau) = B(-\tau)$$

Фізично ця властивість випливає з того, що при визначенні коефіцієнту кореляції не мало значення, який з перерізів ансамблю реалізацій вибирати – t_x чи t_y .

Властивість ця випливає також з формули (6.3). Зробивши заміну змінних $x=t+\tau$; $t=x-\tau$ знаходимо

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x-\tau)u(x)dx \quad (6.5)$$

Ще одна властивість полягає в тому, що при будь-якому значенні τ

$$|B(\tau)| < B(0)$$

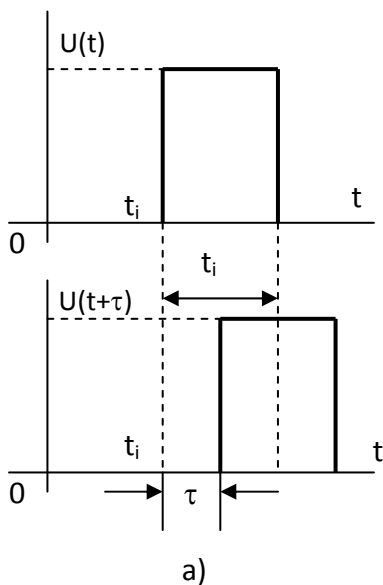
Кореляційна функція суми не залежить від функції $u(t) - B_u(\tau)$; $V(t) - B_v(\tau)$; $B(u+v)=B_u+B_v$.

Така властивість також зрозуміла і випливає з властивості коефіцієнта кореляції.

Розглянемо деякі приклади кореляційних функцій.

Функція кореляції прямокутного імпульсу (автокореляційна функція (АКФ)) (рис.5.3). Визначення інтегралу (6.4.) у такому випадку достатньо просто, так як добуток сигналів визначається лише тою частиною площі

імпульсів, яка перекривається. Якщо $\tau > t_i$ то добуток дорівнює нулю, а при $\tau=0$ він визначається енергією $U^2 t_i$.



Звідси

маємо

$$B(\tau) = \begin{cases} U^2 t_i (1 - \frac{|\tau|}{t_i}) & \text{при } |\tau| < t_i \\ 0 & \text{при } |\tau| > t_i \end{cases}$$

Функція $B(\tau)$ буде мати вигляд трикутника (рис. 6.1, б з основою $2t_i$).

Обчислимо тепер кореляційну функцію гармонічного сигналу, виконавши інтегрування за період:

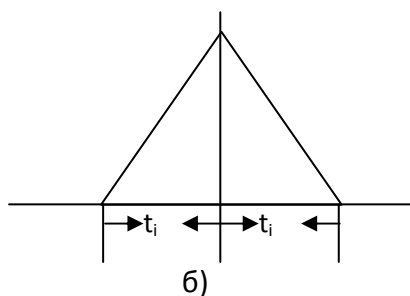


Рис.6.1

$$B(\tau) = \frac{U^2}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t - \varphi) \cos(\omega(t - \tau) - \varphi) dt = \frac{U^2}{T} \cos \omega \tau$$

З приведених прикладів можемо зробити наступні висновки:

- функція кореляції, яка виводилась до ймовірносного процесу може виконуватись і стосовно періодичних сигналів;
- АКФ періодичного сигналу є періодичною функцією з тим же періодом.
- АКФ періодичного сигналу є парною функцією аргумента τ .
- При $\tau = 0$ значення $B_p(0)$ представляє собою середню потужність, яка виділяється на опорі в 1 Ом і має розмірність $[B^2]$.
- АКФ періодичного сигналу не містить інформацію про початкову фазу сигналу.
- Інтервал кореляції періодичного сигналу $\tau_k \rightarrow \infty$.

Взаємна функція кореляції двох ймовірнісних процесів.

Часто є необхідність визначення статистичного зв'язку між процесами $x(t)$ і $y(t)$. Для такого випадку використовується взаємна кореляційна функція.

Для стаціонарних ергодичних сигналів, відповідно можемо записати:

$$\left. \begin{aligned} B_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt \\ B_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t+\tau)dt \end{aligned} \right\}$$

Слід зазначити наступний взаємний зв'язок $B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau)$.

Слід запам'ятати одне важливе правило, яке приводиться від доказу: по аналогії з формулою

$$P(x,y) = P(x) * P(y),$$

яке говорить про те, що дві статистично незалежні величини є некорельованими, впливає, що два статично незалежні процеси є некорельованими. В загальному плані зворотнє твердження несправедливе.

Обчислимо ВКФ двох гармонічних сигналів однакової частоти, з різними початковими фазами:

$$s_1(t) = s_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{и} \quad s_2(t) = s_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2).$$

Використовуючи вирази для взаємно кореляційних функцій (ВКФ), отримуємо:

$$B_{1,2p}(\tau) = \frac{s_1 \cdot s_2}{2} \cdot \cos(\omega_0 \tau + \Delta\varphi),$$

де $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця початкових фаз сигналів $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Маємо:

- ВКФ двох періодичних сигналів містить інформацію про різницю початкових фаз. Ця важлива властивість широко використовується при побудові різних радіотехнічних систем, систем радіо автоматики та інших.

- Значення взаємної кореляційної функції при довільних τ представляють собою значення взаємної енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t + \tau)$.

- При $\tau = 0$ взаємна кореляційна функція не завжди досягає максимуму.

- Якщо сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ описуються парними функціями часу, то ВКФ теж парна.. Якщо ж навіть один з сигналів описується непарною функцією, то ВКФ теж непарна. Це легко показати, якщо обчислити ВКФ двох прямокутних імпульсів протилежної полярності.

$$s_1(t) = \begin{cases} S_0, & -\frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \frac{\tau_u}{2}, \\ 0, & \text{при остальных } t, \end{cases} \quad \text{и} \quad s_2(t) = \begin{cases} -S_0, & -\frac{\tau_u}{2} \leq t \leq \frac{\tau_u}{2}, \\ 0, & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Взаємна кореляційна функція таких сигналів:

$$B_{1,2}(\tau) = -S_0^2 \tau_u \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_u}\right),$$

є парною функцією τ .

Іноді використовують нормовану АКФ.

$$\rho(\tau) = \frac{1}{B(0)} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s(t + \tau) dt = \frac{B(\tau)}{B(0)},$$

І нормовану ВКФ:

$$\rho_{1,2}(\tau) = \frac{B_{1,2}(\tau)}{\sqrt{\mathcal{E}_{c1} \cdot \mathcal{E}_{c2}}},$$

де $\mathcal{E}_{c1}$ и $\mathcal{E}_{c2}$ – власні енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$. При $\tau = 0$ значення нормованої ВКФ $\rho_{1,2}(0) = \rho_{1,2}$ називають коефіцієнтом взаємної кореляції. Якщо $\mathcal{E}_{c1} = \mathcal{E}_{c2} = \mathcal{E}_c$, то коефіцієнт взаємної кореляції

$$\rho_{1,2}(0) = \frac{B_{1,2}(0)}{\mathcal{E}_c}.$$

Значення $\rho_{1,2}$ лежать в межах від -1 до +1. Розрахуємо коефіцієнт взаємної кореляції для розглянутих вище прикладів. Так, як енергія сигналу прямокутного імпульсу складає:

$$\mathcal{E}_{c1} = S_0^2 \tau_u,$$

а трикутного:

$$\mathcal{E}_{c2} = \frac{S_0^2 \tau_u}{2},$$

то коефіцієнт взаємної кореляції буде рівним $\rho_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Для двох прямокутних імпульсів однакової амплітуди і тривалості, але протилежної полярності $\rho_{1,2} = -1$.

Для періодичних сигналів АКФ и ВКФ обчислюються усередненням по періоду і мають фізичну інтерпретацію, як середня потужність (власна, або взаємна). Тобто, АКФ періодичного сигналу:

$$B_\rho(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot s(t + \tau) dt,$$

а взаємна кореляційна функція двох періодичних сигналів з кратними періодами:

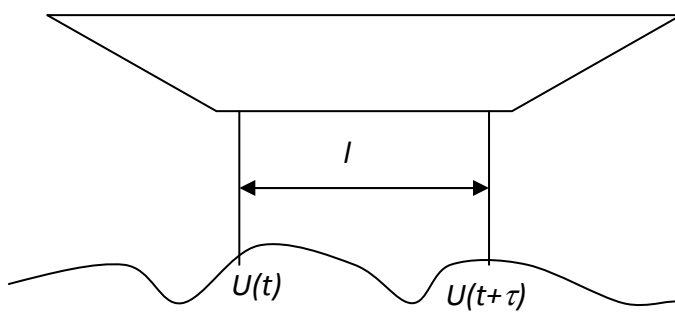
$$B_{1,2p} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t) \cdot s_2(t + \tau) dt,$$

де T – найбільше значення періоду.

Для отримання АКФ використовують перемножувач, на один з входів якого подається сигнал $s(t)$, а на другий – цей же сигнал, але затриманий на час τ . Сигнал, пропорційний добутку $s(t) \cdot s(t + \tau)$, підлягає операції інтегрування. На виході інтегратора формується напруга, пропорційна значенню АКФ при фіксованому τ . Змінюючи час затримки, можна побудувати АКФ сигналу.

Описаний пристрій називається корелятором і широко використовується в різних радіотехнічних системах для прийому і обробки сигналів.

Розглянемо декілька прикладів використання кореляційних функцій.



Приклад 1. Як визначити миттєву швидкість судна, що знаходиться у відкритому океані. Два ехолотатори випромінюють імпульсну послідовність сигналів і отримують відображення глибини. (Рис.6.2) Обидва ехолотатори

будуть приймати одну й ту ж

інформацію, але з запізненням τ_x . Але ця величина невизначена. Сигнал, що приходить з заднього локатора, перемножується з сигналом $u(t)$, який проходить через декілька паралельних каналів з різними затримками. (Рис.6.3). Після інтегрування знаходиться канал з найбільшим значенням $B(\tau_i)$, яке дозволить визначити швидкість як $V = \frac{l}{\tau_i}$.

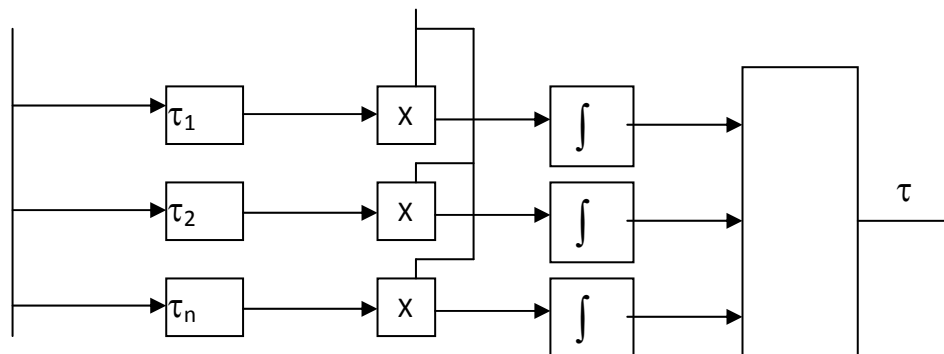


Рис. 6.3

Приклад. Припустимо, що розроблена нова система зв'язку і необхідно визначити її “шумові” характеристики. (Рис.6.4.) Знаючи $B(0)$ сигналу $u(t)$ і $B_{\tau}(0)$ сигналу $u(t) + \xi(t)$, обчислюється шумова характеристика

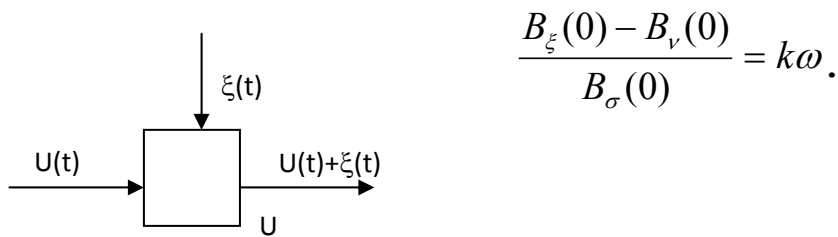


Рис. 6.4

Приклад. Маємо суміш сигналу з шумом. Характеристики можливого сигналу попередньо відомі. Необхідно визначити наявність сигналу в суміші.

Ця задача також вирішується за допомогою функцій кореляції.

На базі функцій кореляції працює велика кількість прикладів для визначення технічних характеристик інформаційних систем. Методи кореляційного аналізу використовують радіолокатори різного призначення, ехо локаори і т.п.

Інтервал кореляції.

Ймовірнісні процеси інформаційних систем мають наступну властивість. Їх функції зменшуються з ростом τ . Чим швидше зменшується $R(\tau)$, тим меншим буде статистичний зв'язок між миттєвими значеннями сигналу в два не співпадаючі моменти часу.

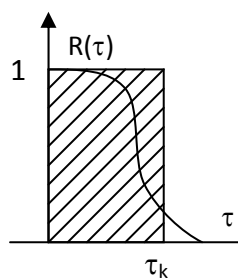


Рис.6.5

Числовою характеристикою, яка використовується для оцінки швидкості зміни реалізацій процесу є інтервал кореляції τ_k , який визначається з формули

$$\tau_k = \frac{1}{B(0)} \int_0^{\infty} B(\tau) d\tau \quad (6.6.)$$

Фізична інтерпретація параметру τ_k полягає в тому, що ймовірнісний прогноз поведінки будь-якої реалізації процесу можливий лише в інтервалі τ_k . При $\tau > \tau_k$ можна вважати відсутність будь-якого кореляційного зв'язку.

6.2. Спектри ймовірнісних процесів

З попереднього матеріалу ми вже впевнились, що спектральні методи можуть використовуватись для детермінованих процесів, для сигналів, які є

обмеженими за часом. Звичайно, стає питання можливості представлення в частотній області і ймовірнісних сигналів.

Але на жаль процедура використання прямого перетворення Фур'є для випадку що розглядається недопустима. Пояснюється це перш за все тим, що ймовірнісна функція часу немає визначеної математичної форми запису. По-друге, якщо ж можливо знайти математичну форму запису реалізації, то це не буде справедливо для ансамблю. Одержати відповідний спектр для ансамблю можливо, якщо виконати процедуру осереднення по множені реалізації. Але головна проблема полягає в тому, що функція $S(\omega)$ для стаціонарних ймовірнісних процесів не існує тому, що передумовою перетворення Фур'є є збіжність інтегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (6.7)$$

Для вирішення вказаних проблем звернемось до ергодичного статистичного процесу, для якого можливо використати поняття фінітної функції $x_T(t)$, що існує в мережному інтервалі часу T , тобто

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

При обмеженій величині дисперсії процесу така функція буде задовольняти обмеженню (6.7.), а також більш жорстким вимогам інтегрування в середньоквадратичному:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt < \infty$$

Для функції $x_T(t)$ існує перетворення Фур'є:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt, \quad T < \infty$$

і відповідно з'являється можливість до функцій $x_T(t)$ і $S_x(\omega)$ використати теорему Парсеваля, відповідно до якої, якщо функції часу $a(t)$ і $b(t)$ мають перетворення Фур'є $A(\omega)$ і $B(\omega)$, то буде справедливою рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(-\omega)d\omega \quad (6.8)$$

Рівність (6.8.) дає можливість для $x_T(t)$ записати

$$\int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega \quad (6.9)$$

якщо до множити обидві частини (6.9.) на $(2T)^{-1}$, одержимо зліва середню потужність сигналу $x_T(t)$ на інтервалі $-T, T$. Виконуючи після цього осереднення по ансамблю і переходячи до межі $T \rightarrow \infty$, одержуємо наступну групу перетворень:

$$M \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T^2(t) dt \right] = M \left[\frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega \right],$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T M_x^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} M \left[|S_x(\omega)|^2 \right] d\omega \quad (6.10)$$

де M – операція осереднення по ансамблю, тобто, знаходження математичного очікування.

Для стаціонарного процесу осереднений за часом середній квадрат випадкової функції дорівнює самому середньому квадрату, тому (6.10.) може бути записаним у вигляді:

$$M_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M \left[|S_x(\omega)|^2 \right]}{2T} d\omega. \quad (6.11)$$

Підінтегральний вираз формули (6.10), будемо називати енергетичним спектром ймовірнісного процесу, тобто

$$W_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M \left[|S_x(\omega)|^2 \right]}{2T},$$

що дає можливість одержати формулу:

$$M_x^2 = G_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega, \quad (6.12)$$

G_x –середньоквадратичне відхилення.

Формула (6.12) має наступну фізичну інтерпретацію. Якщо $x(t)$ процес, що описує напругу, що прикладається до резистора з опором в 1 Ом, то M_x^2 – це середня потужність, що виділяється на резисторі. Енергетичний спектр

можемо розглядати як середню потужність, що може бути виділена в частотному діапазоні в 1 Гц з центральною частотою $\omega/2\pi$.

Використання енергетичного спектру відкриває великі можливості в теорії перетворення сигналів та теорії фільтрів, а головне узагальнює частотний підхід до аналізу систем.

6.3. Практичні схеми для визначення кореляційних характеристик двох процесів.

В бібліотеці Control Function Block є модуль Delay, який забезпечує вхідний сигнал на величину, що задається в установочних параметрах. Приклад схеми, що реалізує вказану затримку, наведено на рис. 6.6.

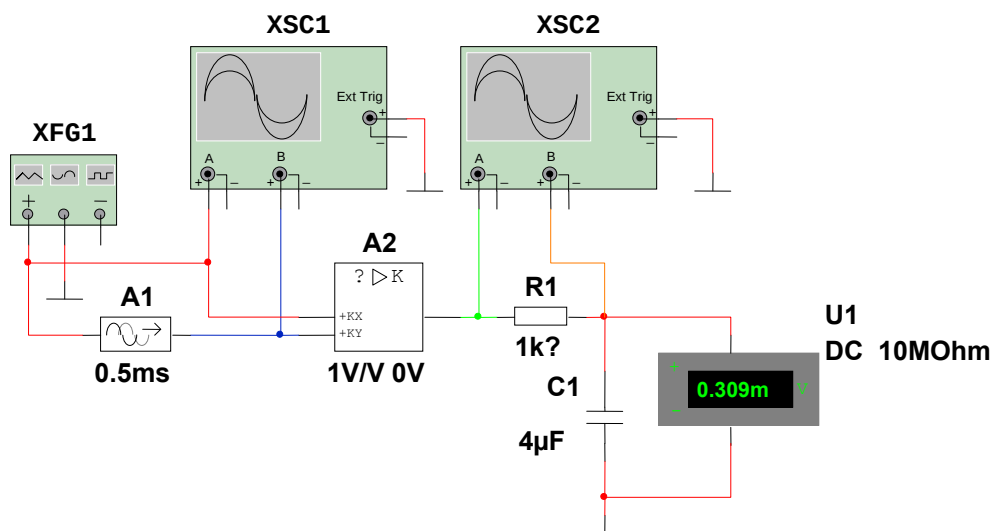


Рис. 6.6

Однополярний прямокутний імпульс з функціонального генератора XFG1 подається як безпосередньо на перемножувач A2, так і через затримку A1. Сигнал, отриманий в результаті перемноження подається на пасивний інтегратор, виконаний на елементах R1C1. Напруга на виході інтегратора заміряється вольтметром U1.

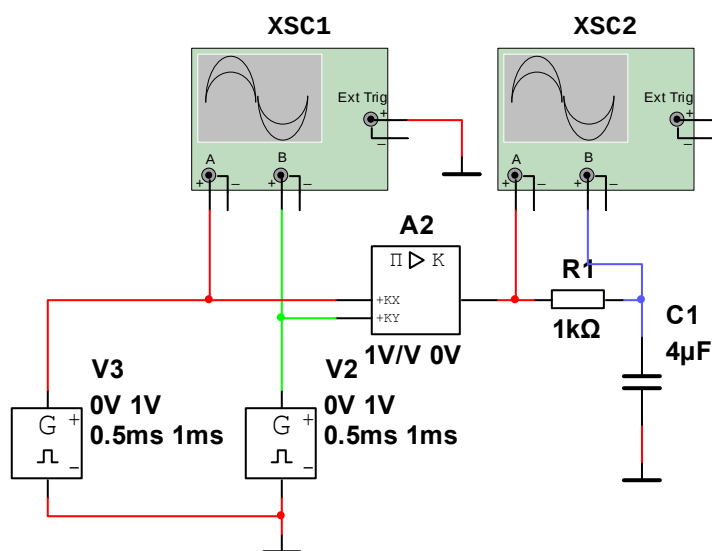


Рис. 6.7

Інший варіант схеми з використанням спеціального джерела прямокутних імпульсів, наведено на рис. 5.6. такий генератор знаходиться в бібліотеці Signal Voltage Sourcer і називається Pulse Voltage. Він генерує періодичні двополярні прямокутні імпульси, але в його установках є можливість встановлювати як амплітуду кожної полярності, тривалість імпульсу і частоту, так і початкову фазу. Тому при використанні таких джерел відпадає необхідність використання пристрою затримки.

6.4. Експериментальна перевірка кореляційних процесів

6.4.1. Складається схема відповідно до рис.5.5. задається частота, амплітуда однополярного імпульсу і скважність у відповідності до варіанту, що задається в додатку.

6.4.2. Задається інтервал зміни параметра τ і у встановленому діапазоні задається 6-10 точок в яких заміряється вихідна напруга.

6.4.3. За допомогою двох функціональних генераторів задається прямокутний імпульс зі скважністю 90% і однополярний пилоподібний імпульс і аналогічним шляхом заміряються параметри взаємно кореляційної функції.

6.4.4. Задається два синусоїдальних сигнали однакової частоти і для різниці фаз між ними в 0° , 30° , 60° , 90° заміряються параметри взаємно кореляційних характеристик.

Слід обробити експериментальні результати, побудувати графіки експериментальних кореляційних функцій. Дати їм пояснення і зробити висновки.

6.5. Питання до теми

6.5.1. Дайте визначення АКФ та ВКФ.

6.5.2. Як зміниться АКФ, якщо при її визначенні один з імпульсів матиме іншу амплітуду?

6.5.3. Дайте визначення інтервалу кореляції.

6.5.4. Поясніть призначення АКФ та ВКФ.

6.5.5. Наведіть основні властивості автокореляційної функції.

6.5.6. Наведіть основні властивості взаємної кореляційної функції.

ТЕМА 7. СПЕКТРАЛЬНО-КОРЕЛЯЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

7.1. Спектри ймовірнісних процесів

З попереднього матеріалу ми вже впевнились, що спектральні методи можуть використовуватись для детермінованих процесів, для сигналів, які є обмеженими за часом. Звичайно, постає питання можливості представлення в частотній області і ймовірнісних сигналів.

Але, на жаль, процедура використання прямого перетворення Фур'є для розглядаємого випадку недопустима. Пояснюється це, перш за все, тим, що ймовірнісна функція часу немає визначеної математичної форми запису. По-друге, якщо навіть можливо знайти математичну форму запису реалізації, вона не буде справедливою для ансамблю. Одержати відповідний спектр для ансамблю можливо, якщо виконати процедуру осереднення по множині реалізації. Але головна проблема полягає в тому, що функція $S(\omega)$ для стаціонарних ймовірнісних процесів не існує тому, що передумовою перетворення Фур'є є збіжність інтеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (7.1)$$

Для вирішення вказаних проблем звернемося до ергодичного статистичного процесу, для якого можливо використати поняття фінітної функції $x_T(t)$, що існує в мережному інтервалі часу T , тобто

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

При обмеженій величині дисперсії процесу така функція буде задовільнять обмеженню (7.1), а також більш жорстким вимогам інтегрування в середньоквадратичному:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt < \infty$$

Для функції $x_T(t)$ існує перетворення Фур'є:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt, \quad T < \infty$$

і відповідно з'являється можливість до функцій $x_T(t)$ і $S_x(\omega)$ використати теорему Парсеваля, відповідно до якої, якщо функції часу $a(t)$ і $b(t)$ мають перетворення Фур'є $A(\omega)$ і $B(\omega)$, то буде справедливою рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(w)B(-w)dw \quad (7.2)$$

Рівність (7.2) дає можливість для $x_T(t)$ записати

$$\int_{-T}^T x_T^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(w)|^2 dw \quad (7.3)$$

Якщо до множити обидві частини (7.3) на $(2T)^{-1}$, одержимо зліва середню потужність сигналу $x_T(t)$ на інтервалі $-T, T$. Виконуючи після цього осереднення по ансамблю і переходячи до межі $T \rightarrow \infty$, одержуємо наступну групу перетворень:

$$M \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T^2(t)dt \right] = M \left[\frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega \right],$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T M_x^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} M \left[|S_x(w)|^2 \right] dw \quad (7.4)$$

де M – операція осереднення по ансамблю, т.т. знаходження математичного очікування.

Для стаціонарного процесу осереднений за часом середній квадрат випадкової функції дорівнює самому середньому квадрату, тому (7.4) може бути записаним у вигляді:

$$M_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M \left[|S_x(w)|^2 \right] dw}{2T}. \quad (7.5)$$

Підінтегральний вираз формули (7.5), будемо називати спектральною щільністю ймовірнісного процесу, тобто

$$W_x(w) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M \left[|S_x(w)|^2 \right]}{2T}, \quad (7.6)$$

що дає можливість одержати формулу:

$$M_x^2 = G_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega, \quad (7.7)$$

G_x – середньоквадратичне відхилення.

Формула, (7.7) має наступну фізичну інтерпретацію. Якщо $x(t)$ процес, що описує напругу, що прикладається до резистора з опором в 1 Ом, то M_x^2 – це середня потужність, що виділяється на резисторі. Спектральну щільність можемо розглядати як середню потужність, що може бути виділена в частотному діапазоні в 1 Гц з центральною частотою $\omega/2\pi$.

Використання спектральної щільності відкриває великі можливості в теорії перетворення сигналів та теорії фільтрів, а головне узагальнює частотний підхід до аналізу систем.

7.2. Властивості спектральної щільності

Більшість властивостей спектральної щільності випливають з того, що $W(\omega)$ є дійсною, позитивною і парною функцією частоти ω . Виходячи з цього, загальна форма запису її має вигляд:

$$W(\omega) = \frac{W_0(\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \dots + a_2\omega^2 + a_0)}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \dots + b_2\omega^2 + b_0} \quad (7.8)$$

де m, n – цілі числа, причому, за винятком спектра δ -функції завжди виконується умова $m > n$.

Формула (7.8) задовольняє вимогам, які обумовлювались вище. Дійсно $W(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$. Як результат цього, ймовірнісний процес буде мати обмежене значення дисперсії.

Розглянемо тепер особливості спектрів, які не відносяться до ймовірнісних. Як приклад, визначасмо спектральну щільність сигналу

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

в якого U_0, U_m, ω_0 – постійні величини, а φ – випадкова величина, що підкоряється закону рівномірної щільності в інтервалі $0 \div 2\pi$.

Одержимо перетворення Фурє обмеженої реалізації

$$S_x(\omega) = \int_{-T}^T [U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)] e^{-j\omega t} dt = \frac{2U_0 \sin \omega T}{\omega} + U_m \left[\frac{e^{j\varphi} \sin(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0} + \frac{e^{-j\varphi} \sin(\omega + \omega_0)T}{\omega + \omega_0} \right]$$

Для використання формули (7.6), як проміжний результат знаходимо:

$$M[S_x(\omega)^2] = 4U_0^2 \left[\frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2} \right] + \frac{U_m^2 T}{2} \left\{ \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{(\omega - \omega_0)T} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{(\omega + \omega_0)T} \right] \right\} \quad (7.9)$$

Обмеження межі по (7.5) при $T \rightarrow \infty$ розглянемо, як приклад, тільки першу складову:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2.$$

Ясно, що межа має нульове значення для будь-якої частоти, крім $\omega=0$ ($\sin \omega T / \omega T = 1$) і відповідна межа дорівнює нескінченості. Як результат, можемо записати

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2 = k \delta(\omega), \quad (7.10)$$

де k —масштабний коефіцієнт, який необхідно до визначити.

Його значення може бути знайденом, якщо порівняти площі функцій (7.10), що стоять зліва та справа, тобто:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} T \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2 d\omega = k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega$$

звідки находимо: $k = \pi$.

Використовуючи подібні перетворення відносно решти складових формули (7.9) одержимо результат:

$$W_x(\omega) = 2\pi U_0^2 \delta(0) + \frac{\pi}{2} U_m^2 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)],$$

який на частотній осі відображається трьома δ -функціями з відповідними амплітудами.

Звернемо увагу на те, що використання формули (7.7) дає

$$M_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega = U_0^2 + \frac{U_m^2}{2},$$

що повністю співпадає зі значеннями для детермінованого процесу.

7.3. Спектральна щільність на комплексній площині

Відомо, наскільки потужний метод комплексних змінних як при аналізі рівнянь, так і при обчисленні інтегралів. Тому, звичайно, часто з'являється необхідність виражати спектральну щільність через комплексну частоту ν . Таке представлення легко реалізується простою підстановкою ν замість $j\omega$. Формально така заміна виконується шляхом заміни ω на $-j\nu$, або ω^2 на $-\nu^2$. При цьому спектральна щільність буде мати зображення у вигляді $W_x(\nu)$.

Як приклад – формула

$$W_x(\omega) = \frac{A(\omega^2 + b)}{\omega^4 + c\omega^2 + d}$$

в комплексній формі буде мати вигляд:

$$W_x(-j\nu) = \frac{A(b - \nu^2)}{\nu^4 - c\nu^2 + d}.$$

Відомо, що суттєво полегшуються різні види обчислень, якщо комплексну функцію зобразити з використанням нулів і полюсів комплексної площини, наприклад:

$$W_x(\nu) = \frac{A_1(\nu + a_1)(\nu - a_1)}{(\nu + b_1)(\nu - b_1)(\nu + b_2)(\nu - b_2)} \quad (7.11)$$

Така форма представлення спектральної щільності суттєво полегшує графічні обчислення на комплексній площі, а також обчислення інтегралів.

7.4. Зв'язок між спектральною щільністю та кореляційною функцією

Дисперсія процесу може бути обчислена як через кореляційну функцію, так і через функцію спектральної щільності. Враховуючи зв'язок між часовими і спектральними характеристиками детермінованого процесу і одиночних сигналів, є всі підстави вважати, що існує взаємозв'язок між кореляційними та спектральними характеристиками ймовірнісного процесу.

Для встановлення взаємозв'язку між $B(\tau)$ та $W(\omega)$ скористаємось формулою (7.6).

Враховуючи, що $|S(\omega)|^2 = S_x(j\omega)S_x(-j\omega)$ і використовуючи формули зворотного перетворення Фур'є, знаходимо:

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} M \left[\int_{-T}^T x(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \int_{-T}^T x(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2 \right], \quad (7.12)$$

де t , тимчасово замінена в функціях часу на t_1 та t_2 . Формула (7.12) може бути представлена у вигляді:

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt_2 \cdot \int_{-T}^T e^{-j\omega(t_2-t_1)} M[x(t_1)x(t_2)] dt_1 \quad (7.13)$$

Враховуючи (6.5), а також використовуючи підстановки: $t_2-t_1=\tau$; $dt_2=d\tau$, а також розглядаючи тільки стаціонарні процеси, формулу (7.13) представимо у вигляді:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B_x(\tau) \right] e^{-j\omega\tau} d\tau ;$$

а з урахуванням ергодичності процесу, маємо:

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau . \quad (7.14)$$

Приведене співвідношення (7.14) одержане у 1932 році російським математиком Хінчіним і носить його назву.

Враховуючи властивості перетворень Фур'є можна привести і відповідну формулу зворотного перетворення

$$B_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (7.15)$$

Перетворення (7.14) і (7.15) носять назву перетворень Вінера-Хінчіна.

Для стаціонарних ергодичних процесів формули (7.14) і (7.15) можуть бути зображені у більш простій формі:

$$W(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (7.16)$$

$$B_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (7.17)$$

Функції (7.16) та (7.17) називаються односторонніми.

Приклад. Знайти функцію $W(\omega)$, якщо відома кореляційна функція одностороннього виду:

$$R(\tau) = G^2 \exp(-\alpha|\tau|)$$

Знаходимо:

$$W(\omega) = 2G^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega\tau d\tau = \frac{2G^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

7.5. Ефективна ширина спектра

Використовується для одностороннього спектру з максимальним значенням W_m . Ефективна ширина визначається зі співвідношення:

$$\Delta\omega_{ef} = \frac{1}{W_{\max}} \int_0^{\omega} W(\omega) d\omega$$

Ця числова характеристика використовується часто для знаходження дисперсії шумової напруги:

$$G^2 = W_{\max} \Delta\omega_{ef}$$

“Білий шум”. Цей термін використовується для ймовірнісного процесу, спектральна щільність якого постійна для всього частотного діапазону, тобто $W_x(\omega) = W_0$. Не зважаючи на те, що фізично такий процес існувати не може, він є математичною моделлю, яка дуже спрощує ряд математичних обчислень.

Кореляційна функція цього процесу має вигляд:

$$R_x(\tau) = W_0 \cdot \delta(\tau),$$

звідки випливає, що будь-які вибірки реалізації процесу є не корельованими.

7.6. Взаємна спектральна щільність

За аналогією зі взаємною кореляційною функцією в практиці аналізу систем широко використовується взаємна спектральна щільність. Формально можна дати їй наступне визначення: якщо існують обмежені реалізації

ймовірнісних процесів $x(t)$ та $y(t)$ з відповідними перетвореннями Фур'є. $S_x(\omega)$; $S_y(\omega)$, то взаємні енергетичні спектри їх визначаються формулами:

$$W_{x,y}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M[S_x(-\omega)S_y(\omega)]}{2T}$$

$$W_{y,x}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M[S_y(-\omega)S_x(\omega)]}{2T}.$$

На відміну від спектрів одиночних сигналів, взаємні спектри $W_{x,y}$, $W_{y,x}$ не завжди є дійсними, позитивними і парними функціями частоти, що підтверджуються їх основними властивостями:

- $W_{x,y}(\omega)$ і $W_{y,x}(\omega)$ є комплексно спряженими функціями;
- $Re[W_{x,y}(\omega)]$ і $Re[W_{y,x}(\omega)]$ – є парними функціями ω .
- $J_m[W_{x,y}(\omega)]$ і $J_m[W_{y,x}(\omega)]$ – непарні функції частоти.

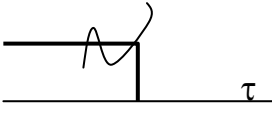
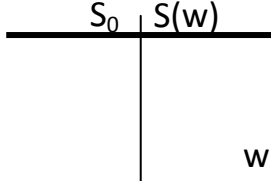
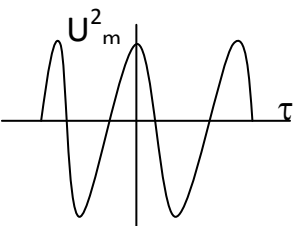
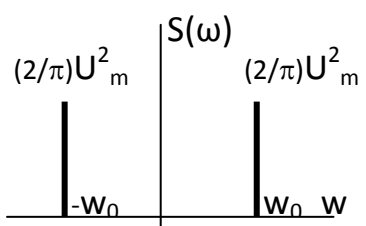
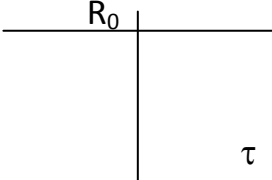
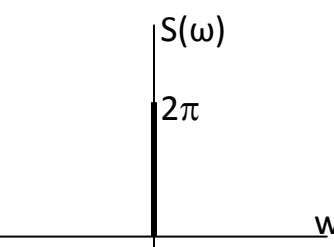
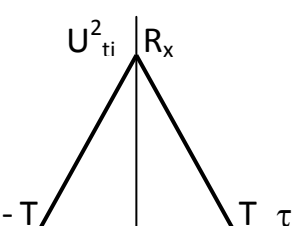
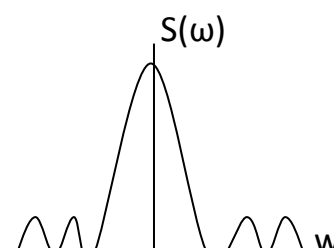
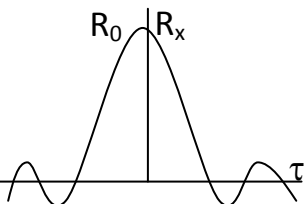
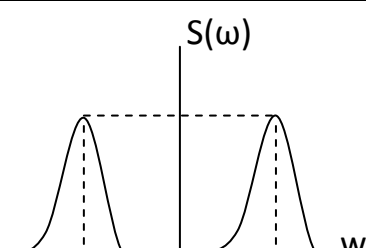
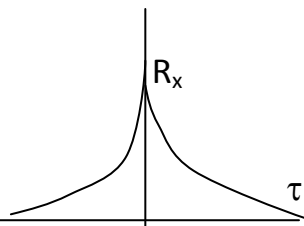
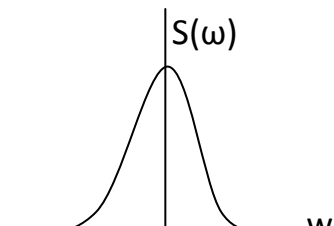
Взаємні енергетичні спектри і взаємні кореляційні функції зв'язані між собою прямим і зворотнім перетвореннями Вінера-Хінчіна.

7.7. Безпосереднє використання спектрально-кореляційних характеристик сигналів

В інформаційних системах спектрально-кореляційні характеристики використовуються для аналізу і синтезу ряду безпосередньо використовуваних сигналів, серед яких важливе місце займають звуки.

Незважаючи на широку гаму ймовірнісних сигналів спектрально-кореляційна теорія в більшості використовує обмежену кількість кореляційних характеристик та відповідних ним енергетичних спектрів. Деякі з них приведені в табл.7.1.

Табл. 7.1

$R_x(\tau)$		$S_x(\omega)$	
Графік	Формула	Формула	Графік
	$S_0 \delta(\tau)$	S_0	
	$\frac{1}{2} U_m^2 \cos \omega_0 \tau$	$\frac{1}{2} U_m^2 \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \right]$	
	U_0^2	$2\pi \delta(\omega)$	
	$U^2 t_i \left(1 - \frac{ \tau }{T} \right) \leq T$ $0, \tau > T$	$\frac{U^2 t_i^2 \sin^2 \left(\frac{\omega t_i}{2} \right)}{\left(\frac{\omega t_i}{2} \right)^2}$	
	$R_0 e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$	$\frac{R_0 \alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{R_0 \alpha}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}$	
	$\frac{U_m^2}{2} e^{-\alpha \tau }$	$\frac{U_m^2}{2} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	

На практиці складні спектральні характеристики, або складні кореляційні функції можуть шляхом апроксимації замінюватись на суму більш простих, які легко розпізнаються і перетворюються. Така можливість

лінійної апроксимації базується на тому, що формули, які описують енергетичні спектри в більшості своїй можуть бути представлені у вигляді (7.11). Така форма запису дає можливість перейти до іншої форми запису:

$$W_x(\nu) = \frac{A_1}{\nu + a_1} + \frac{A_2}{\nu + a_2} + \dots = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\nu + a_i}, \quad (7.18)$$

яка, з урахуванням парності коефіцієнтів може бути представлена у вигляді:

$$W_x(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{G_i^2 \alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2} \quad (7.19)$$

У задачах аналізу синтезу тривалих сигналів, наприклад, звукових, використання формул (7.18), (7.19) має свою специфіку.

Спрощена форма пояснення її полягає у наступному. Будь-який процес, як відмічалось раніше, може бути розбитим на окремі реалізації. З урахуванням інтервалу кореляції тепер можна сказати, що тривалість реалізації може бути вибрана приблизно рівною інтервалу кореляції, або ефективній ширині спектру. В такому випадку спектр реального сигналу буде представляти собою послідовну зміну спектрів, яким відповідають свої кореляційні характеристики. Оскільки кожне слово або вираз матиме свою спектрально-кореляційну характеристику, яка може бути представлена у вигляді суми елементарних, або типових характеристик, то програми, які вирішують задачі аналізу (розпізнавання) звукових сигналів та їх синтезу, базуються на використанні методів спектрально-кореляційної теорії.

7.8. Практичне вивчення спектральних характеристик випадкових процесів

У віртуальній лабораторії Multisim є генератор білого шуму в бібліотеці. Signal Voltage Sources –Thermal Noise. Генератор з джерелом струму. Початковий рівень його сигналу складає 1 мкВ. Що є досить слабким сигналом. Є можливість масштабувати цей рівень до величини, достатньої для того, щоб потім підсилити до одиниць вольт. Схема генератора наведена на рис.7.3,а, а на Рис.7.3, б його спектрограма при навантаженні опором 10 кОм

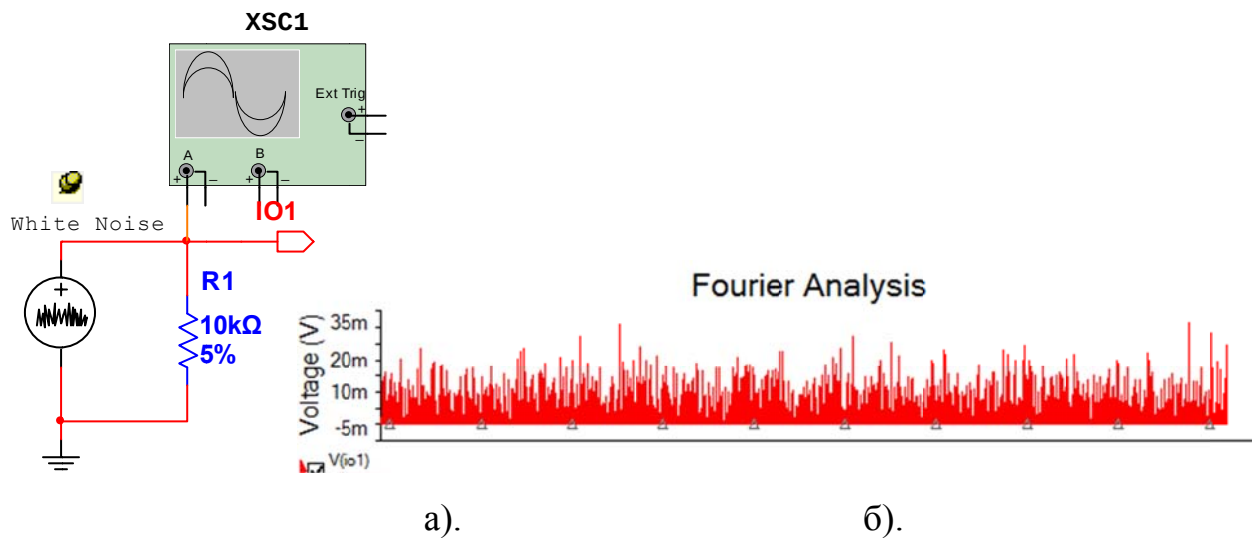
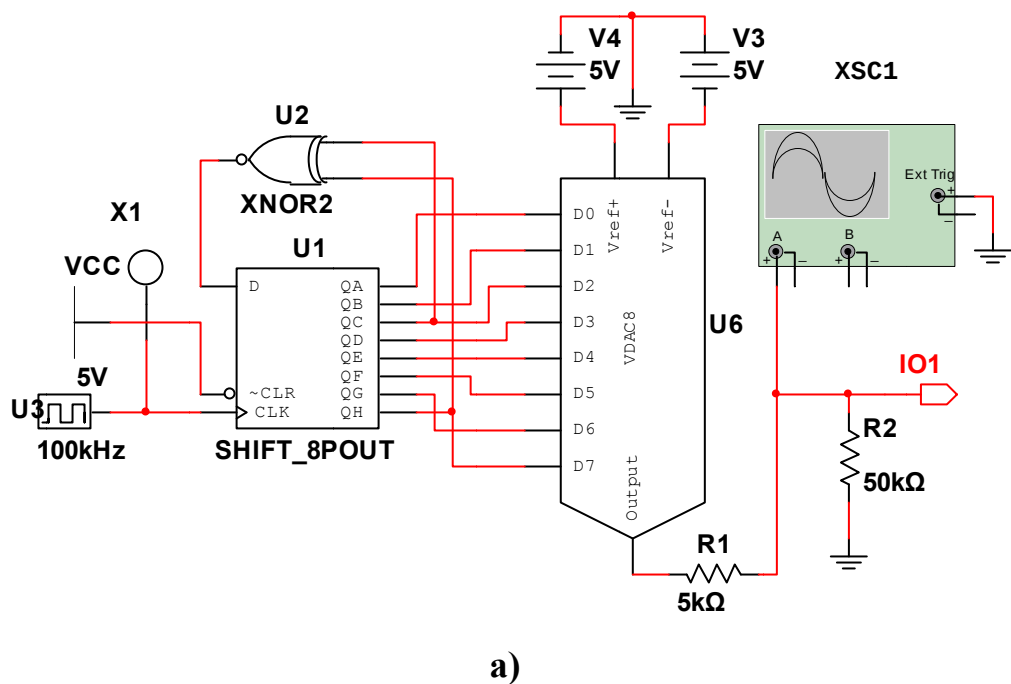
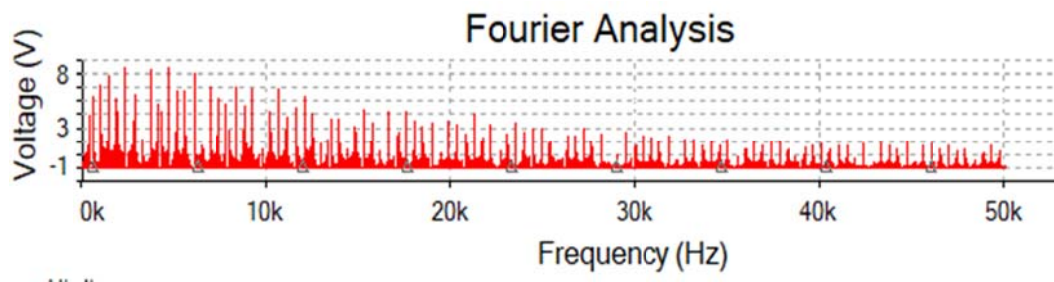


Рис. 7.3

На рис. 7.4 демонструється інший тип генератора випадкових сигналів, побудований з використання регістра зсуву і аналого –цифрового перетворювача. Його спектральна характеристика в нижньому частотному діапазоні має незначне затухання, але починаючи з частоти 20 кГц її можна вважати рівномірною в досить широкому частотному діапазоні.





б)

Рис. 7.4

7.9. Завдання та приклади до теми

7.9.1 Складіть у програмі Multisim схему, яка на виході давала б сигнал типу:

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) .$$

Виконайте перетворення Фур'є для цього сигналу, дайте фізичну інтерпретацію отриманому результату.

ТЕМА 8. ПРОХОДЖЕННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ ЛІНІЙНІ ІНЕРЦІЙНІ КОЛА

8.1. Коротка характеристика лінійних систем

В практиці систем передачі інформації здебільшого використовуються лінійні системи з зосередженими параметрами.

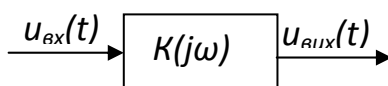
Особливість таких систем полягає в тому, що в них завжди можливо виділити області концентрованого розположення активних індуктивних та ємносних елементів, властивості яких не змінюються при зміні характеру сигналів або конфігурації з'єднання таких елементів. Системи зі сконцентрованими елементами розраховуються за допомогою відомих законів Кірхгофа та Ома.

Але вже в ряді випадків навіть на частотах в десятки-сотні мегагерц окремі інформаційні канали можуть бути віднесені до систем з розподіленими параметрами. До них відносяться, в першу чергу, кабельні лінії зв'язку, в яких активний опір та реактивні параметри розподілені рівномірно по всій довжині кабелю, а довжина його в ряді випадків може співпадати з довжиною хвилі періодичних сигналів.

Нижче ми будемо розглядати лише кола, які можна віднести до лінійних кіл з зосередженими параметрами.

Які б кола ми не розглядали, завжди можна в них виділити вхід, на який подаються сигнали, а також вихід, з якого знімаються перетворені сигнали. Як входів, так і виходів може бути декілька, але враховуючи той факт, що ми розглядаємо лише лінійні системи, для яких справедливим є метод суперпозиції, в подальшому розгляді будемо мати на увазі лише структури з одним входом і одним виходом (рис.3.1). Взаємозв'язок між вхідним і вихідним сигналами встановлюється оператором перетворення W ,

тобто



$$u_{вих}(t) = W u_{вх}(t)$$

Рис.8.1

Оператор W повинен задаватись в тій системі координат, в якій задаються вхідні і

вихідні сигнали.

Так як $u_{вх}$ може задаватись як функція часу, або як функція частоти, то відповідно і оператор W повинен забезпечувати необхідне перетворення.

Вважається, що система стаціонарна, якщо її вихідний сигнал не залежить від того, в який момент часу поступає вхідний сигнал. Фактично, до стаціонарних систем відносяться такі, параметри яких не залежать від часу.

Імпульсна характеристика. В теорії перетворення сигналів для опису системи використовують її імпульсну характеристику, що представляє собою реакцію системи (тобто залежність вихідного сигналу від часу) при дії вхідного сигналу у вигляді δ -функції, тобто

$$h(t) = H\delta(t)$$

Фізично наведена формула відображає реакцію системи на вхідний імпульсний сигнал з одиничною площею при виконанні умови, що тривалість дії сигналу набагато менша тривалості перехідних процесів в системі, або, іншими словами, тривалість дії сигналу набагато менше найбільшої постійної часу системи.

Така її фізична сутність дає можливість використати δ -представлення вхідного сигналу у вигляді згортки функції:

$$U_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

і виконати це представлення для визначення вихідного сигналу:

$$U_{\text{вих}}(t) = HU_{\text{вх}} = W \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Враховуючи вищесказане відносно співвідношення між тривалістю вхідного сигналу і постійними часу системи, остання формула може бути представлена у вигляді:

$$U_{\text{вих}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\tau)H\delta(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Отримана формула відома як інтеграл Дюамеля, але на відміну від раніше визначеного призначення в випадку, що розглядається, вона дає можливість встановити часові залежність сигналу на виході лінійної системи на основі часової залежності вхідного сигналу і імпульсної перехідної функції системи.

8.2. Знаходження спектрально-кореляційних характеристик процесів на виході лінійної системи

Вказана задача зводиться до визначення імовірнісних характеристик (математичного очікування і дисперсії) та кореляційної функції вихідного

сигналу при відомих відповідних характеристиках вхідного. В цьому плані найбільш зрозумілим і наглядним способом знаходження вихідного сигналу лінійної системи є спектральний метод, який при відомому комплексному коефіцієнті передачі лінійної системи $K(j\omega)$ і відомих параметрах вхідного сигналу $u_{ex}(t)$ з енергетичним спектром $W_{ex}(j\omega)$ дає можливість визначити параметри енергетичного спектру $W_{вих}(j\omega)$ на виході системи.

З попереднього матеріалу відомо, що при стаціонарному в широкому сенсі вхідному випадковому процесі у відповідності з загальним визначенням спектральної щільності ця характеристика для вихідного стаціонарного процесу рівна:

$$W_y(j\omega) = ((S_y(j\omega))^2 / T). \quad (8.1)$$

Величина $((S_y(j\omega))^2)$ представляється у наступному вигляді:

$$((S_y(j\omega))^2 = S_y(j\omega) S_y(-j\omega) \quad (8.2)$$

де $S_y(j\omega)$ – спектр реалізації $y(t)$ випадкового процесу значної тривалості T

Враховуючи, що реалізація $x(t)$ відома, маємо:

$$\begin{aligned} S_y(j\omega) &= S_x(j\omega) K(j\omega), \\ S_y(-j\omega) &= S_x(-j\omega) K(-j\omega), \end{aligned} \quad (8.3)$$

Враховуючи (8.3), (8.2) буде мати вигляд:

$$(S_y(\omega))^2 = S_x(j\omega) K(j\omega) S_x(-j\omega) K(-j\omega) = (S_x(\omega))^2 K^2(\omega), \quad (8.4)$$

Аналогічно, підставляючи (8.4) в (8.1), отримуємо:

$$W(\omega) = ((S_x(j\omega))^2 K^2(j\omega) / T = W_x(\omega) K^2(\omega), \quad (8.5)$$

тобто, енергетичний спектр випадкового процесу на виході лінійної системи визначається добутком енергетичного спектру вхідного випадкового процесу і квадрата її амплітудно – частотної характеристики.

Автокореляційна функція випадкового процесу на виході лінійної системи визначається у відповідності до теореми Вінера – Хінчіна.

Дисперсія випадкового процесу на виході системи :

$$D_y = B_y(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) K^2(\omega) d\omega \quad (8.7)$$

При наявності числового значення математичного очікування випадкового процесу на вході системи, математичне очікування на її виході визначається виразом.

$$m_y = m_x K(0). \quad (8.8)$$

При розв'язанні практичних задач, пов'язаних з перетворенням випадкових процесів лінійними системами ефективна ширина енергетичного спектра у більшості випадків набагато перевищує полосу пропускання досліджуємої системи. В таких випадках такий вхідний процес прийнято називати широко полосним. Особливість такого спектру полягає в тому, що в межах полоси пропускання системи він носить рівномірний характер, а тому при розгляді систем його можна розглядати як «білий шум», що суттєво спрощує розв'язання інженерних задач.

ТЕМА 9. ДОСЛІДЖЕННЯ ЙМОВІРНІСНИХ ТА СПЕКТРАЛЬНО-КОРЕЛЯЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВУЗЬКОПОЛОСНИХ ПРОЦЕСІВ

9.1. Основні теоретичні положення

Випадковий процес, енергетичний спектр якого сконцентровано у вузькій полосі частот відносно деякої частоти ω_0 , називається вузькополосним процесом. Такий процес має місце, наприклад на виході резонансного підсилювача при подачі на його вхід широкополосного випадкового процесу типу «білого шуму». Вузькополосний випадковий процес отримується і у випадку коли гармонічна несуча модулюється випадковим процесом з малим індексом модуляції. Так як спектр такого СП сконцентрований навколо частоти ω_0 його можна представити у вигляді квазігармонічного коливання:

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (9.1)$$

де $U(t)$ и $\varphi(t)$ – відповідно, огибаюча і початкова фаза, які є випадковими, функціями, які повільно змінюються порівняно з $\cos \omega_0 t$.

Зобразимо (9.1) у вигляді:

$$x(t) = U(t) \cos \varphi(t) \cos \omega_0 t - U(t) \sin \varphi(t) \sin \omega_0 t$$

або

$$x(t) = A(t) \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t,$$

де

$$A(t) = U(t) \cos \varphi(t);$$

$$B(t) = U(t) \sin \varphi(t).$$

$$U(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)};$$

$$\varphi(t) = \arctg$$

Для визначення статистичних характеристик огибаючої і фази, слід зобразити вузькополосний випадковий процес в комплексній формі:

$$\dot{x}(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + jU(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (9.2)$$

Дійсна його частина і уявна, відповідно, мають вигляд:

$$\operatorname{Re}[\dot{x}(t)] = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] = x(t) \quad (9.3)$$

$$\operatorname{Im}[\dot{x}(t)] = U(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] = \hat{x}(t) \quad (9.4)$$

і є комплексно-спряженими процесами.

Тепер з врахуванням (9.3) і (9.4) вираз (9.2) можна зобразити наступним шляхом:

$$\dot{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t).$$

Графічно комплексний випадковий процес зображується на комплексній площі вектором $U(t)$ випадкової довжини і випадковим фазовим кутом $\varphi(t)$, який обертається з частотою ω_0 проти часової стрілки. В момент часу t цей вектор створює з дійсною віссю кут $\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$.

Відмітимо, що енергетичні спектри $x(t)$ і $\hat{x}(t)$ однакові, тобто:

$$G_x(\omega) = G_{\hat{x}}(\omega). \quad (9.5)$$

Якщо енергетичні спектри однакові, то у відповідності до теореми Вінера _ Хінчіна однаковими будуть і автокореляційні функції:

$$B_x(\tau) = B_{\hat{x}}(\tau).$$

Функція взаємної кореляції при $\tau = 0$ $B_{x\hat{x}}(0) = 0$,

Тобто у співпадаючі моменти часу значення $x(t)$ та $\hat{x}(t)$ не корельовані.

В зв'язку з широким практичним використанням вузькополосних випадкових сигналів в радіотехнічних задачах виникає необхідність врахування випадкового характеру огинаючих та початкових фаз таких процесів. При цьому в якості вузькополосного процесу найчастіше розглядається нормальний випадковий процес миттєві значення якого розподілені по нормальному закону з нульовим математичним очікуванням $m_x = 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Цьому процесу відповідає комплексний випадковий процес

$$\dot{x}(t) = x(t) + j\hat{x}(t),$$

Причому комплексно спряжений процес розподілений по нормальному закону з нульовим математичним очікуванням і тою ж дисперсією, тобто $\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_x^2$

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

Так як значення $x(t)$ і $\hat{x}(t)$ не корельовані, а для нормальних випадкових процесів не корельованість означає і статистичну незалежність, то це значить, що двовимірна щільність імовірності

$$f(x, \bar{x}) = f(x)f(\bar{x}).$$

В ряді літературних джерел показано, що закон розподілу огинаючої випадкового процесу описується законом Релея, а фаза розподіляється по рівномірному закону в інтервалі від 0 до 2π .

9.2. Практична реалізація і аналіз вузькополосного процесу

Як відмічалось в попередньому розділі, для отримання вузькополосного випадкового процесу необхідно нормальний білий шум пропустити через вузькополосний фільтр. Як наслідок – на виході буде одержано з обмеженим спектром, що розміщується навколо заданої частоти.

Схема такого пристрою наведена на рис.9.1.

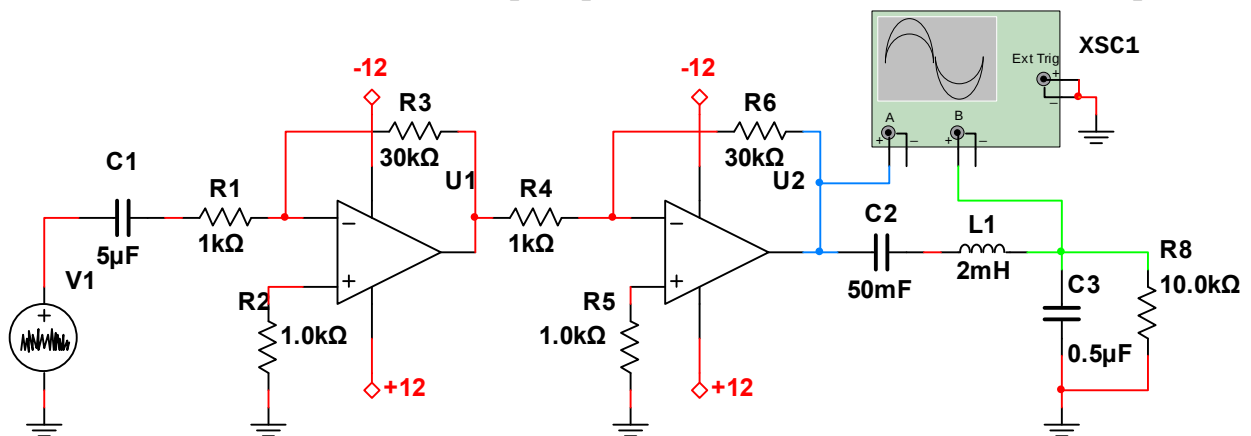


Рис. 9.1

Генератор теплового шуму V1 генерує сигнал, який за своїм спектральним складом відповідає спектру білого шуму. З сигналу відділяється постійна складова конденсатором C1. Змінний сигнал з нульовим математичним очікуванням підсилюється і подається на вхід полосового фільтра, виконаного на елементах L1, C3, навантаженого резистором R8. Осцилограма вузькополосного сигналу наведена на рис. 8.10.

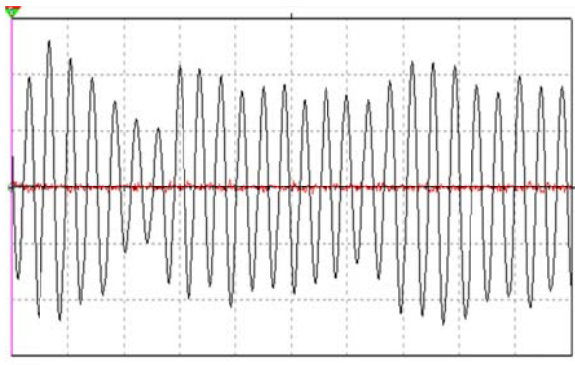


Рис. 9.2

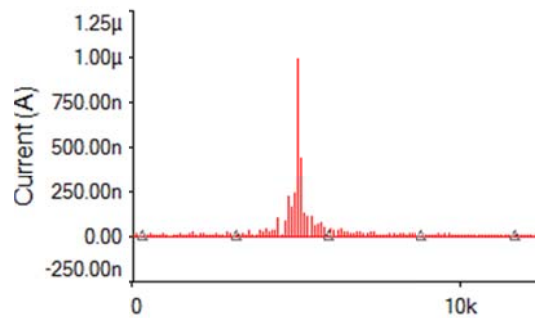


Рис. 9.3

9.3. Експериментальне дослідження вузькополосного випадкового процесу

9.3.1. Складається схема у відповідності до рис. 8.9. Параметри фільтра задаються викладачем.

9.3.2. Запускається режим моделювання і визначається інтервал моделювання на основі рекомендацій з попередніх робіт.

9.3.3. Заміряються амплітуди синусоїд процесу і складається таблиці статистичного ряду. На основі отриманих результатів будується гістограма щільності імовірності амплітуд випадкового процесу.

9.3.4. Використовуючи два курсори, заміряються періоди синусоїдальних напруг і на основі проведених замірів визначається математичне очікування періоду, його дисперсія, а також будується гістограма кутових зміщень вузькополосного випадкового процесу.

9.3.5. Знімається спектрограма випадкового процесу і на її основі визначається автокореляційна функція вузькополосного процесу.

ТЕМА 10. ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ПРОХОДЖЕННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИХ І ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ ЧЕРЕЗ НЕЛІНІЙНІ ЧОТИРЬПОЛЮСНИКИ

10.1. Основні теоретичні положення

У радіотехніці та зв'язку основними елементами, що виконують перетворення сигналів є чотирьохполіусники. До їх складу входять напівпровідникові прилади – діоди, транзистори, які, в цілому, є нелінійними елементами (*НЕ*). В залежності від режимів роботи напівпровідникових елементів, вони можуть розглядатись, як лінійними, або нелінійними. Відповідно, такими будуть і чотирьохполіусники. В задачах радіотехніки і зв'язку досить часто спеціально використовують нелінійні властивості елементів для отримання тих, чи інших властивостей чотирьохполіусника - генерація вищих гармонік, отримання постійної складової сигналу, зменшення амплітудного (динамічного) діапазону (компресія) і т.п.

При аналізі проходження сигналів через чотирьохполіусники, вважається, що *НЕ* є без інерційними, тобто, вони забезпечують миттєве в часі перетворення сигналів. Інерційні властивості, якщо вони суттєві, враховуються реактивними елементами, і розглядаються окремо. При використанні чотирьохполіусників вони розглядаються, як перетворювачі вхідної напруги у вихідну і характеризуються залежністю вихідної напруги від вхідної (характеристика «вхід – вихід»). В тих випадках, коли нелінійні властивості реалізуються на основі вольт – амперних характеристик (*ВАХ*) *НЕ*, останні також розглядаються, як чотирьохполіусники, використовуючи такий параметр, як крутизна характеристики.

Основною характеристикою *НЕ* є його *ВАХ*, тобто, залежність струму, що протікає через *НЕ*, від напруги, що прикладається до нього. *ВАХ* може розглядатись як відношення постійних складових:

$$I = f(U);$$

або миттєвих:

$$i(t) = f(u(t)).$$

Іншими характеристиками є:

–статичний опір, або опір *НЕ* в заданій робочій точці *A* для постійного струму;

$$R_A = U_A / I_A ,$$

де U_A , I_A - значення напруги і струму в точці *A* *ВАХ*;

- статична крутизна характеристики:

$$S_A = I/R_A$$

- диференційний опір для заданої робочої точки:

$$r_d = \Delta U_A / \Delta I_A$$

де ΔU_A , ΔI_A -

– диференціальна крутизна:

$$s_d = 1 / r_d$$

Статичні параметри можуть визначатись через тангенс кута нахилу прямої α , що проходить через початок координатних осей і визначену робочу точку; динамічні, аналогічно, через кут β – дотичної до ВАХ в заданій точці. Динамічні параметри використовуються в режимі незначних відхилень напруг від заданої точки.

При необхідності враховувати властивості всієї ВАХ, використовують або її аналітичний вираз, або відповідну апроксимацію – заміною виразу реальної ВАХ її спрощеною формулою.

Часто використовують степеневу апроксимацію – зображення ВАХ у вигляді ряду Тейлора в околиці робочої точки з параметрами (I_0, U_0) :

$$I = f(U) = a_0 + a_1(U - U_0) + a_2(U - U_0)^2 + \dots, \quad (9.1)$$

або кусочно – лінійну – при зображенні ВАХ відрізками прямих з різними нахилами (рис.9.3):

$$I = f(U) = \begin{cases} 0, \text{ при } U < U_n \\ S(u - U_n), \text{ при } U \geq U_n. \end{cases} \quad (9.2)$$

де U_n – напруга початку характеристики;

S – крутизна нахилу характеристики;

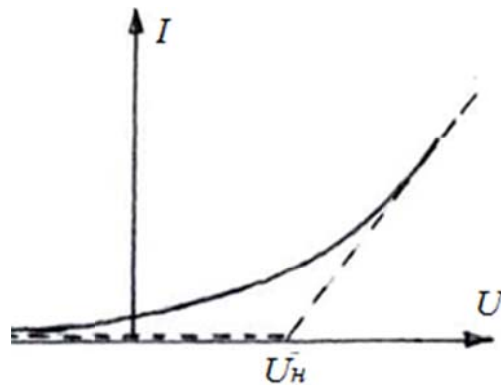
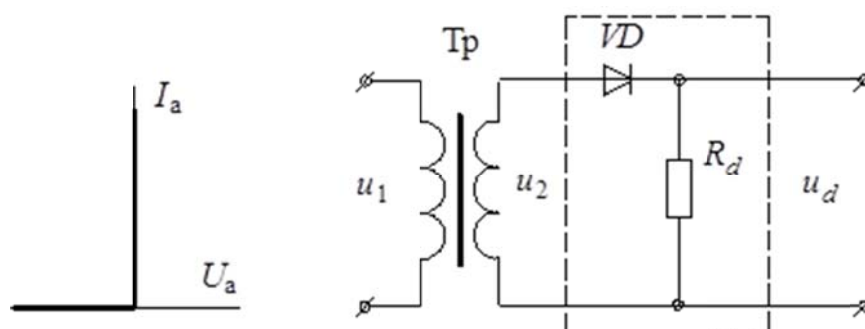


Рис. 10.1

Проходження синусоїдального сигналу через нелінійний чотирьохполіусник в будь – якому випадку приводить до його спотворення . Характер спотворення залежить від характеру нелінійності чотирьохполіусника, але завжди приводить до появи вищих гармонік.

Розглянемо, як приклад, досить розповсюджену задачу випрямлення змінної напруги малопотужним випрямлячем.

На рис. 10.3, а наведена спрощена ВАХ діода, а на рис. 10.2, б – схема його включення в чотирьохполіуснику малопотужного випрямляча, де u_2 – вхідна напруга від ідеального трансформатора, а u_d - напруга на виході чотирьохполіусника.



а).

б).

Рис. 10.2

На рис. 10.3, а наведена графічна демонстрація перетворення вхідної синусоїдальної напруги, що прикладається до чотирьохполіусника з ВАХ у вигляді ломаної лінії. (нахил лінії ВАХ у першому квадранті визначається величиною опору R_d .) у миттєві значення випрямленої напруги. На рис.10.3, б наведені миттєві значення часових діаграм випрямленої напруги. З їх вигляду витікає, що розглянуте нелінійне перетворення приводить до появи у вихідному сигналі як постійної складової, так і вищих гармонік. Величини вищих гармонік можуть бути обчислені шляхом розкладу випрямленої напруги в ряд Фурє.

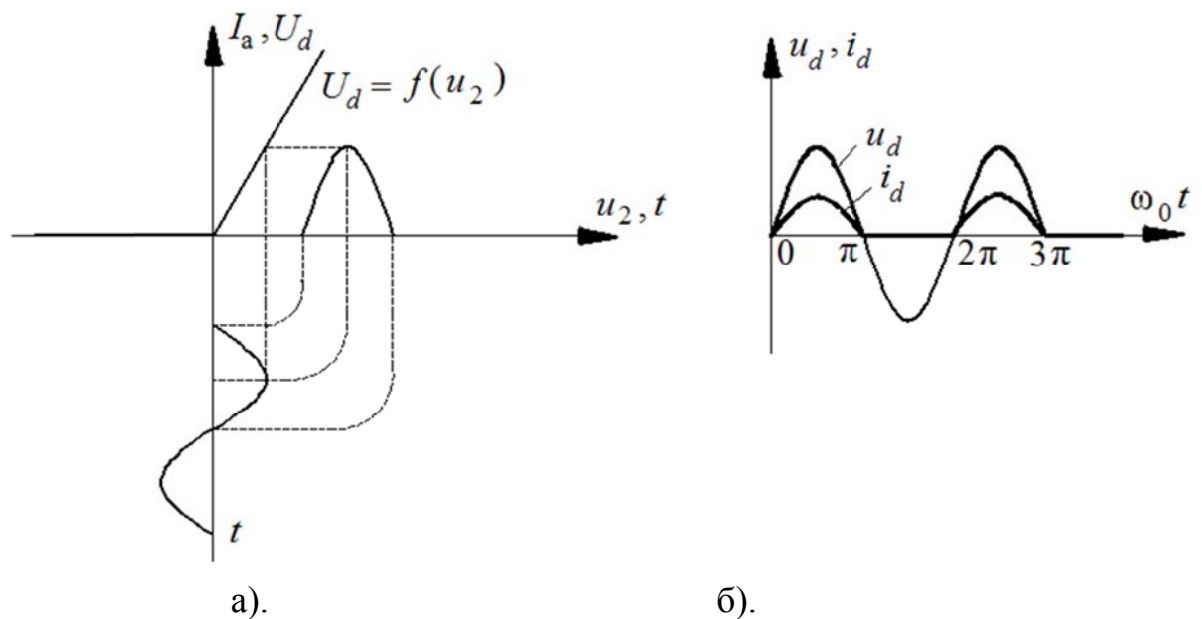


Рис. 10.3

В системах обробки сигналів існує і використовується досить велика кількість нелінійних чотирьохполосників з різними типами характеристик «вхід – вихід». Найбільш розповсюджені з них – характеристики з зоною насичення – це обмежувачі напруги з різними рівнями обмеження, а також характеристики з зоною нечутливості. Характеристики з зоною насичення є характерними для підсилювачів напруги. Зона нечутливості також характерна для двотактних підсилювачів класу В.

Нелінійні властивості чотирьохполосників досить часто використовують для отримання вищих гармонік, що реалізується у потужних підсилювачах. В них каскад підсилення потужності переводять в режим з відсічкою (режим класу С), в наслідок чого появляються треті гармоніки, які потім виділяються резонансними колами.

В тих випадках, коли не лінійність шкодить якості вихідного сигналу, її оцінюють за допомогою коефіцієнта гармонік вихідного сигналу. Дослід, який проводиться для оцінки не лінійності полягає в тому, що на вхід підсилювача подається синусоїдальний сигнал частоти 1 кГц, а вихідний сигнал оцінюють за допомогою аналізатора гармонік. Це загально прийнята методологія, але вона не завжди адекватно оцінює вплив не лінійності на вихідний сигнал чотирьохполосника. Наприклад, у звукотехніці використовують більш досконалі засоби з метою вивчення інтермодуляційних складових, а також пікових значень вихідного сигналу.

10.2. Питання та завдання до теми

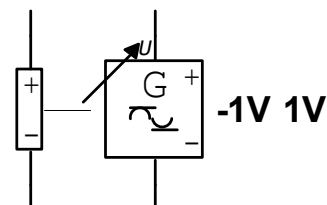
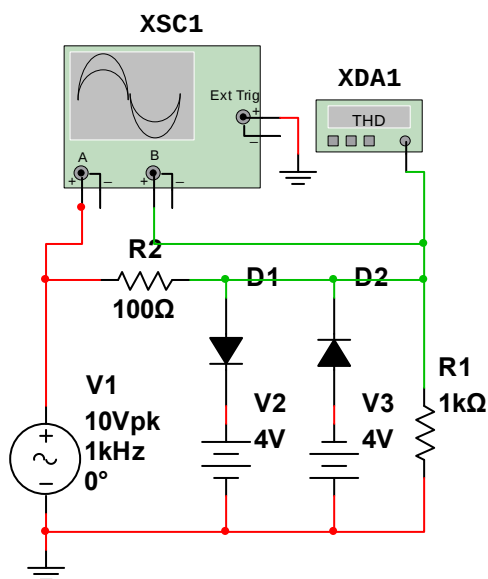
1. На рис.10.4 наведена схема обмежувача напруги. Цей пристрій широко використовується для обмеження амплітуди вхідного сигналу у тих випадках, коли інформація передається через кутові співвідношення (при кутових видах модуляції). В той же час, обмежувач може бути моделлю режиму насичення елементів підсилювачів. Скласти схему з використанням віртуальної лабораторії Мультисім. Використовуючи її можливості отримати графік характеристики «вхід – вихід». Оцінити гармонічний склад вихідної напруги при вказаних на схемі параметрах джерел. Навести осциограму вихідної напруги обмежувача і пояснити його роботу.

2. Збільшуючи напруги джерел V2, V3, оцінити характер зміни амплітуд першої та вищих гармонічних складових вихідної напруги.

3. Провести той же дослід, але оцінити зміну коефіцієнта гармонік, як відношення середньоквадратичного значення вищих гармонік до основної що заміряється приладом XDA1.

4. Навести схему використання приладу з бібліотеки Мультисім Voltage Limiter Block з бібліотеки Control Function Block і продемонструвати її функціональні можливості.

5.



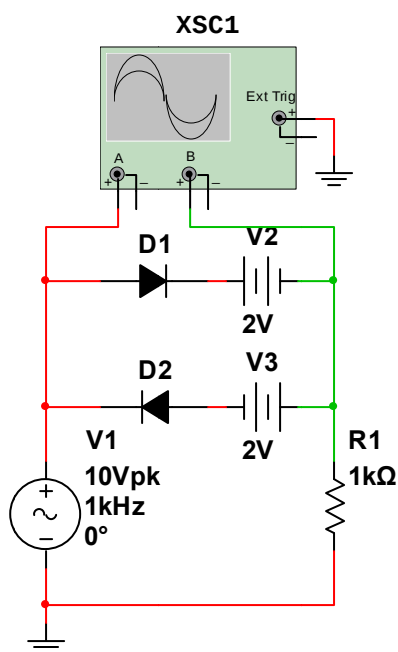
Voltage Limiter Block

б).

а)

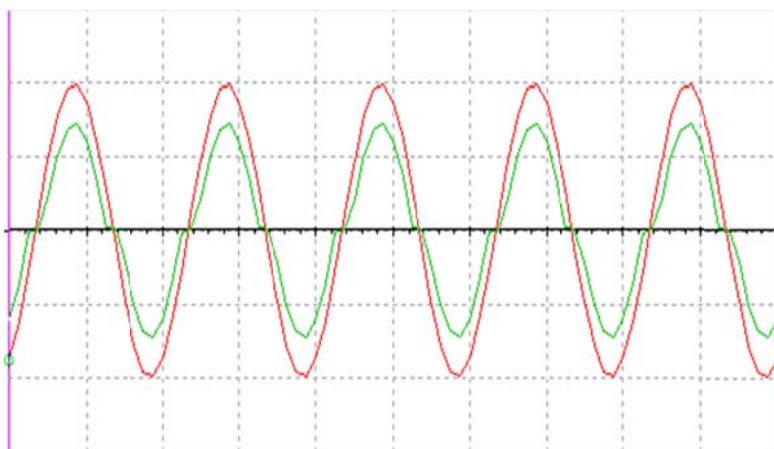
Рис. 10.4

5. Провести аналогічні попередньому досліді з використанням схеми, що наведена на рис. 10.5, а. Схема використовується для моделювання зони нечутливості підсилювачів, або окремих приладів до слабких амплітуд вхідного сигналу, В наслідок наявності зони нечутливості спотворюється



а).

інформація, яка передається фазовими кутами сигналу. На рис. 10.5,б наведено приклад осцилограм на вході і виході обмежувача.



б).

Рис. 10.5

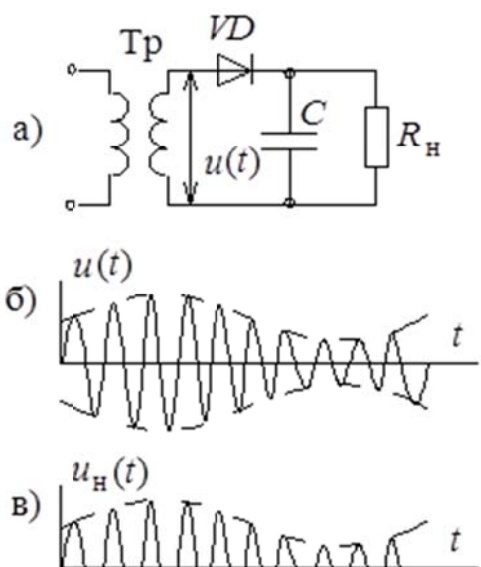


Рис. 10.6

6. На рис. 10.6 наведена схема детекторного радіоприймача, а на рис. 10.6. б, в часові діаграми, що пояснюють його роботу (без врахування впливу конденсатора C). Скласти схему приймача, використовуючи в якості вхідного джерело АМ—voltage з бібліотеки Signal Voltage Sources. Провести досліди по визначенню амплітуди модулюючого сигналу до детектування і після детектування. Пояснити принцип роботи амплітудного детектора.

ТЕМА 11. МОДУЛЬОВАНІ СИГНАЛИ

11.1. Загальна характеристика модуляції

Під терміном «модуляція» мається на увазі процес перенесення енергії низькочастотних інформаційних сигналів у радіочастотний діапазон з метою їх передачі на відстані, що характерно для зв'язку в обраному діапазоні.

Наприклад, сигнали звукового діапазону частот (від 20 Гц до 20 кГц) не можуть розповсюджуватися на великі відстані. Тому для передачі їх переносять у кілогерцовий, мегагерцовий і навіть гігагерцовий діапазони, зменшуючи при цьому потужність апаратури, що використовується для передачі. Базовий сигнал, за допомогою якого здійснюється перенесення низькочастотних інформаційних сигналів у відповідний частотний діапазон, називається *несучим сигналом* або *несучою частотою*.

Процес модуляції несучого сигналу, який може бути моногармонічним або більш складним (наприклад, імпульсним), забезпечується шляхом часової зміни одного або декількох його параметрів – наприклад: амплітуди, частоти, фази. В залежності від обраних параметрів модуляція може бути амплітудною, фазовою, частотною або комбінованою. Сигнал, у відповідності з яким забезпечується модуляція, називається *модулюючим* і може бути досить складним низькочастотним сигналом.

Спрощена класифікація видів модуляції наведена на рис. 11.1.

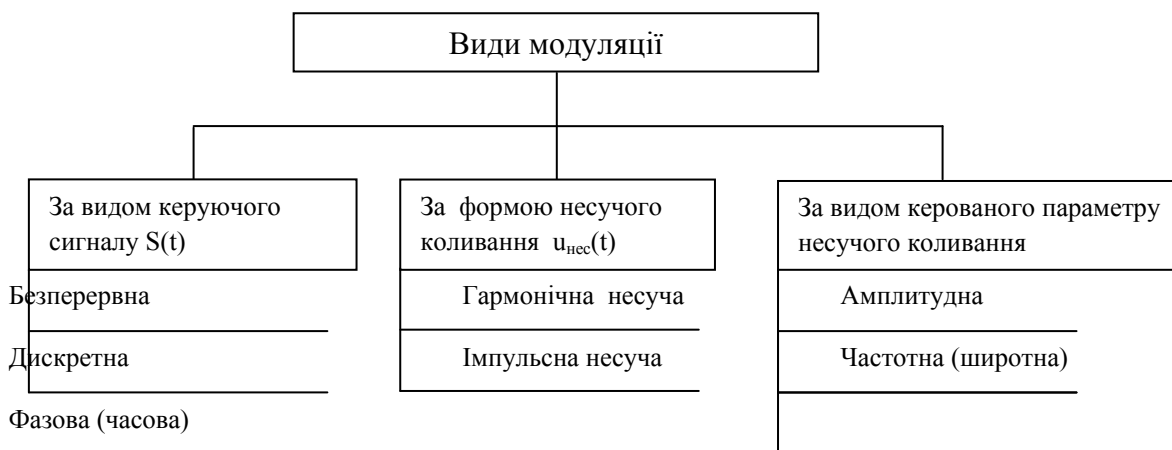
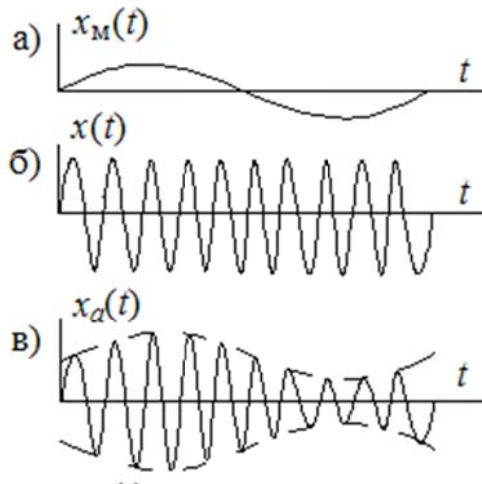


Рис. 11.1

У сучасних радіотехнічних системах в якості несучого коливання найчастіше використовується моногармонічний сигнал.

11.2. Спектри амплітудно-модульованих коливань

На рис. 11.2, а, б, в ілюструється найпростіший випадок амплітудної модуляції (АМ), коли несуча моногармонічна функція $x(t)$ з нульовою початковою фазою та частотою ω модулюється по амплітуді синусоїдальним за формою сигналом $x_M(t)$ з частотою Ω . (Вважається, що $\omega \gg \Omega$)



Промодульований сигнал, представлений на рис. 11.2, в записується у вигляді:

$$x_a(t) = X_m (1 + \mu \sin \Omega t) \sin \omega_1 t = X(t) \sin \omega t, \quad (11.1)$$

$$\text{де } \mu = \frac{X_\mu}{X_m} \text{ — глибина}$$

модуляції; X_μ — амплітуда

модуючого сигналу.

$$X(t) = X_m (1 + \mu \sin \Omega t) \text{ — огибающая}$$

Рис. 11.2

АМ сигналу.

Використовуючи відоме тригонометричне перетворення, знаходимо:

$$x_a(t) = X_m \sin \omega t + 0.5 \mu X_m \cos(\omega + \Omega)t - 0.5 \mu X_m \cos(\omega - \Omega)t \quad (11.2)$$

З формули (11.2) слід зробити наступні висновки:

- Внаслідок нелінійної операції перемноження двох сигналів появляются три сигнали. Помимо сигналу несущої частоти появляются сигнали двох бокових частот, що на частотній осі знаходяться зеркально на відстані Ω від несущої;
- потужності сигналів бокових частот визначаються индексом модуляції, але не можуть перевищувати половину потужності несущої;
- Діапазон частот, що охоплює сигнал $\Delta\omega = 2\Omega$. Звідси витікає, що у випадку, коли модулюючим буде полігармонічний сигнал, то частотний діапазон, що охоплює спектр $x_a(t)$ буде визначатись максимальною його частотою.
- Інформація, що передається сигналом $x_M(t)$ знаходиться у обох бокових частотах і,

відповідно, затрачувати енергію для передачі несучої не потрібно.

Прикладом технічної реалізації АМ сигналу з використанням інструментів віртуальної лабораторії Мультисім наведено на рис. 11.3.

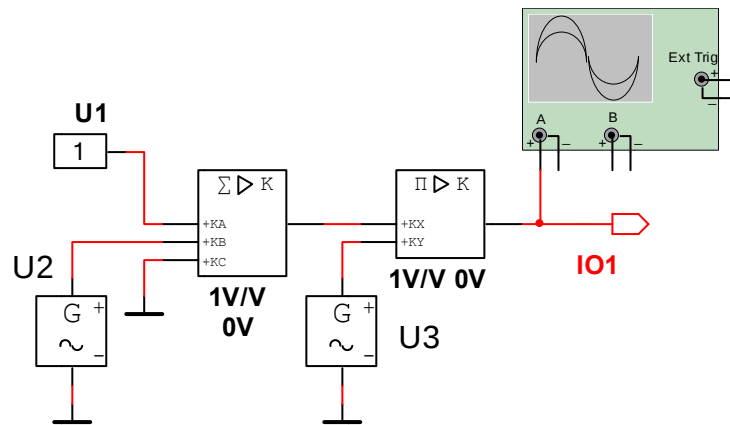


Рис. 11.3

Модулюючий сигнал генерується генератором U2 і арифметично додається до сигналу U1. Після цього він перемножується з сигналом несучої, що подається з генератора U3. Приклад АМ сигналу, що отримується на виході, наведено на рис. 11.4.

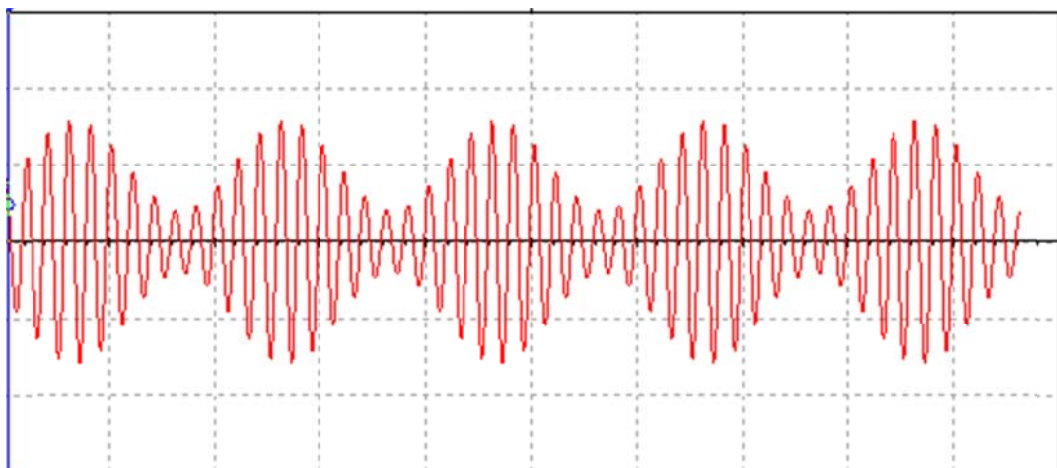


Рис. 11.4

Приклад спектрограми, отриманої шляхом моделювання, наведено на рис. 11.5.

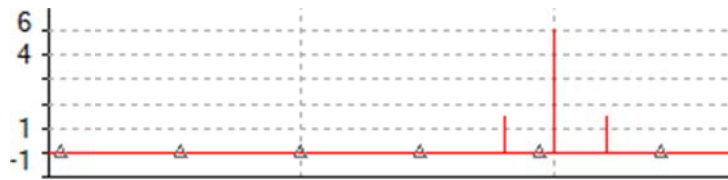


Рис. 11.5

На рисунку несуча частота має величину 1 кГц, а модулюючий сигнал – 100 Гц.

Низька енергетична ефективність АМ сигналу, обумовлена необхідністю передачі безкорисних сигналів в процесі зв'язку привела до створення балансної модуляції, при якій сигнал несучої частоти подавляється в модуляторах. Промодульований сигнал в такому випадку буде описуватись виразом:

$$x_a(t) = 0.5\mu X_m \cos(\omega + \Omega)t - 0.5\mu \cos(\omega - \Omega)t \quad (11.5)$$

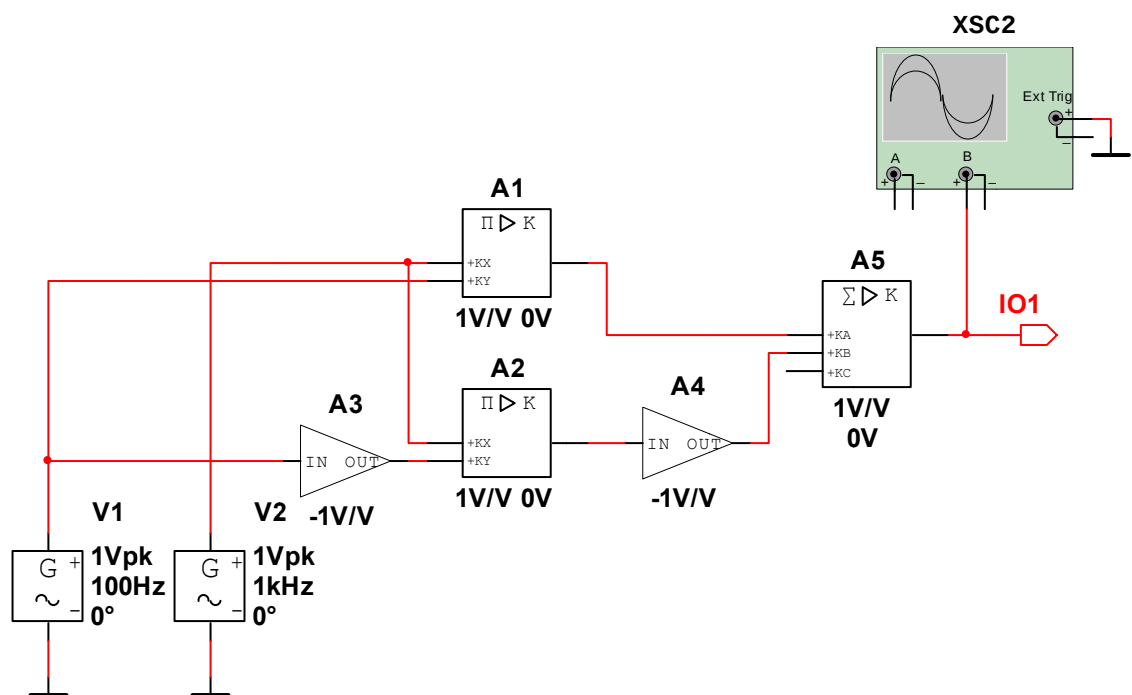


Рис. 11.6

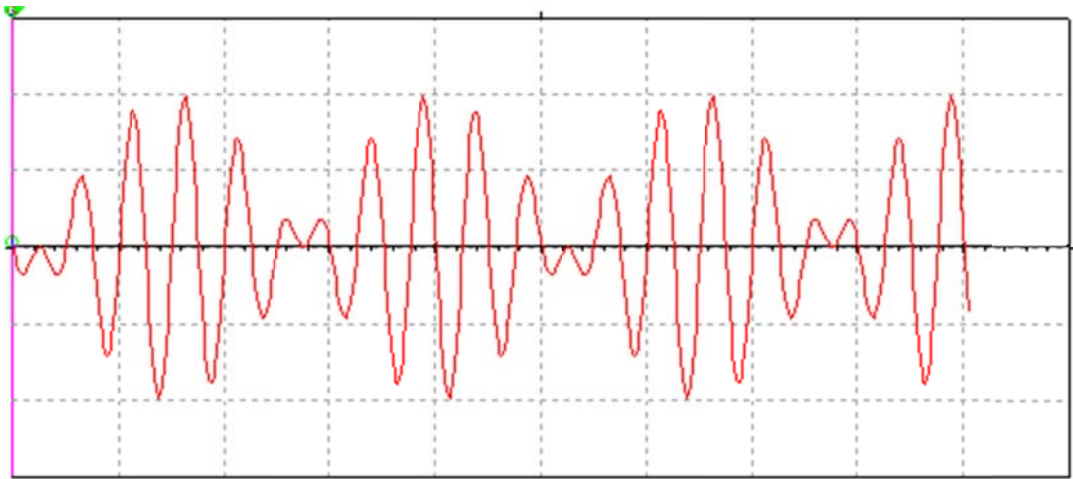


Рис. 11.7

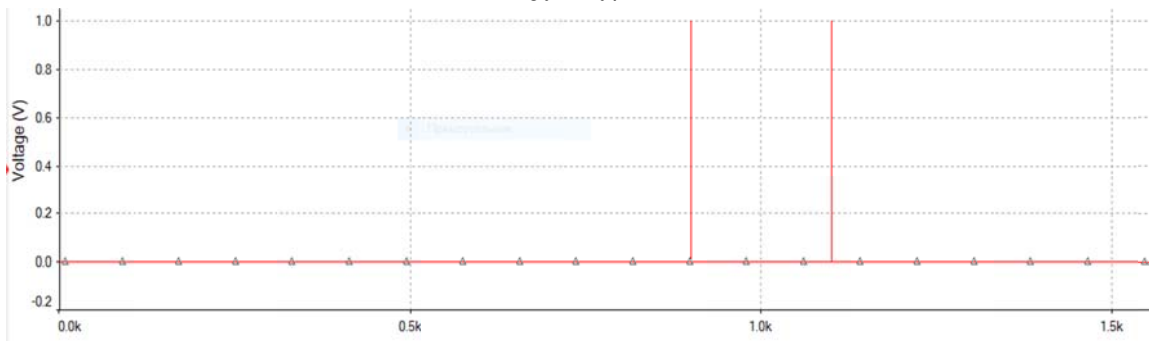


Рис. 11.8

На рис. 11.6 наведена функціональна схема балансного модулятора. Модуючий сигнал генерується джерелом V1, а несуча – джерелом V2. Перемножувачі сигналів – елементи A1 і A2. Елементи A3 і A4 – інвертори; A5 – суматор.

Особливість роботи модулятора полягає в тому, що сигнал на виході A1 буде описуватись виразом:

$$X_{A1}(t) = X_m(1 + \mu \cdot \sin \Omega t) \sin \omega t,$$

а на виході A2, відповідно:

$$X_{A2}(t) = X_m(1 - \mu \cdot \sin \Omega t) \sin \omega t.$$

Як результат, після виконання операції додавання цих сигналів отримуємо:

$$X(t) = 2\mu \cdot \sin \omega t \cdot \sin \Omega t = \mu X_m \cos(\omega + \Omega)t + \mu \cos(\omega - \Omega)t.$$

Ширина спектру промодульованого сигналу залишається не змінною, а потужність, що повинна затрачуватись на передачу суттєво зменшується.

На рис. 11.7 наведена осцилограма сигналу, отриманого на виході балансного модулятора., а на рис. 11.8 – відповідно, спектрограми сигналу на виході балансного модулятора.

У той же час, обидві бокові несуть одну і ту ж інформацію і, відповідно, необхідність в одній боковій відпадає. Тобто, напрошується висновок про необхідність подавлення одної з бокових частот. В такому випадку буде одержана лише одна бокова. Таку задачу розв'язують модулятори однополосної модуляції. Але в той же час дві бокові полоси дають можливість виділити в кінцевому сигналі несучу і з її допомогою отримати модулюючий сигнал. У випадку повного подавлення несучої і одної бокової виділення несучої проблематично і для розв'язання цієї задачі необхідно синхронізувати роботу передавача і приймача. Одним з шляхів розв'язання такої задачі – використання пілот-сигналу, в якості якого може бути не повністю подавлена несуча.

Технічна реалізація модулятора однополосної модуляції значно складніша й вимагає наявності таких широкополосних приладів, як фазоповоротні.

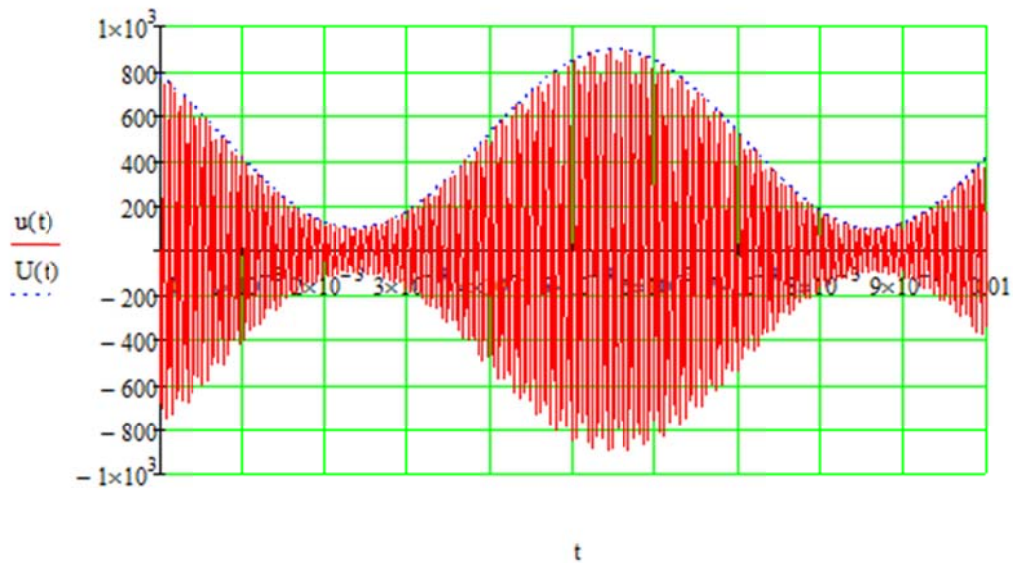
Приклад. Однотональний амплітудно-модульований сигнал $u(t)$ описується виразом:

$$u(t) = 500(1 + 0.8 \cos(10^3 t + 45^\circ)) \cos(10^5 t + 90^\circ).$$

Зобразіть цей сигнал та його огибающую $U(t)$ з використанням програми MathCAD.

$$u(t) := 500 \cdot (1 + 0.8 \cos(10^3 \cdot t + 45 \deg)) \cdot \cos(10^5 \cdot t + 90 \deg)$$

$$U(t) := 500 \cdot (1 + 0.8 \cos(10^3 \cdot t + 45 \deg))$$



Приклад. Амплітудно-модульований сигнал описується виразом:

$$u(t) = 12(1 + 0.6 \cos \Omega t + 0.2 \cos 2\Omega t) \cos \omega_0 t.$$

Знайдіть найбільше та найменше значення його згинаючої $U(t)$.

Розв'язання. Огибаюча сигналу задається виразом:

$$u(t) = 12(1 + 0.6 \cos \Omega t + 0.2 \cos 2\Omega t).$$

Вводячи безрозмірний коефіцієнт $x = \Omega t$, бачимо, що значення x , при яких огибаюча досягає екстремальних значень, мають бути коренями рівняння:

$$0.6 \sin x + 0.4 \sin 2x = 0.$$

Очевидний корінь $x = 0$ відповідає максимуму огибаючої $U_{max} = 21.6 \text{ В}$.

Інший корінь цього рівняння знайдемо, розділивши обидві частини рівняння на $\sin x \neq 0$, звідки $\cos x = -0.75$, тобто $x = 2.42$, $U_{min} = 6.9 \text{ В}$.

Перевіримо правильність отриманих результатів з використанням програми MathCAD.

$$\Omega := 20$$

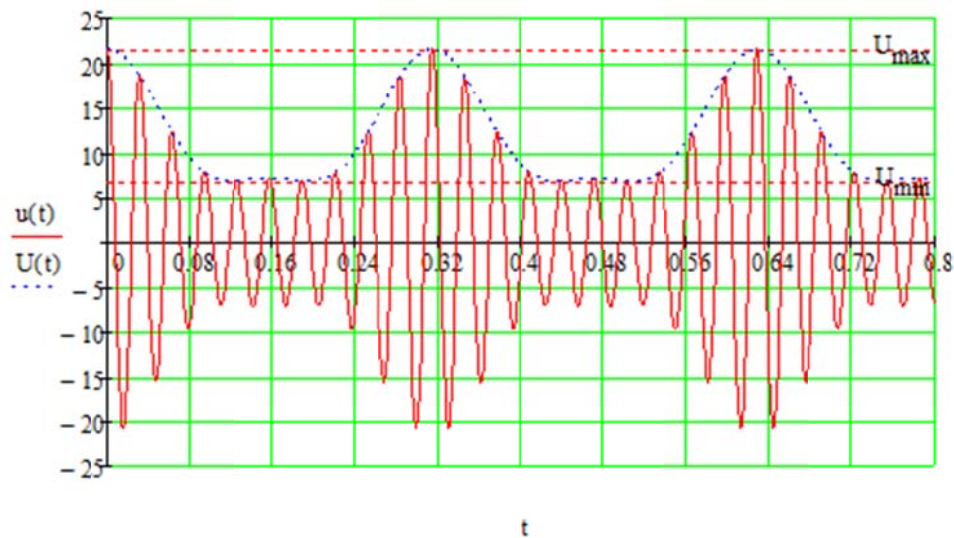
$$\omega_0 := 200$$

$$u(t) := 12 \cdot (1 + 0.6 \cos(\Omega \cdot t) + 0.2 \cos(2 \cdot \Omega \cdot t)) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$$U(t) := 12 \cdot (1 + 0.6 \cos(\Omega \cdot t) + 0.2 \cos(2 \cdot \Omega \cdot t))$$

$$U_{\max} := 21.6$$

$$U_{\min} := 6.9$$



11.3. Спектри сигналів з кутовою модуляцією

11.3.1. Загальна характеристика сигналів з кутовою модуляцією

На відміну від амплітуди, два інших параметри несучої – частота ω і фаза φ є залежними параметрами. Тому можемо записати:

$$X_{\omega}(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \cos \psi(t). \quad (11.6)$$

де $\psi(t)$ – загальна фаза несучої, що визначає поточне значення фазового кута.

Залежність частоти ω або кута φ від керуючого (модулюючого) сигналу відповідає кутовій модуляції. Тобто, термін кутова модуляція включає в себе як частотну (ЧМ), так і фазову (ФМ) модуляцію.

При частотній модуляції керуючий сигнал перетворюється у відповідні зміни частоти ω , які обмежуються нижньою ω_n і верхньою ω_v граничними частотами. Різниця між частотами $\omega_v - \omega_n = \Delta\omega$ визначає частотний діапазон зміни частоти коливань і називається девіацією частоти відносно середньої ω_0 , що має місце при відсутності модуляції.

Одним з способів забезпечення частотної модуляції являється керування резонансною частотою коливального контуру. На рис. 11.9 наведено приклад коливального контуру, в якому зміна частоти забезпечується за

допомогою варікапа. На рис.11.10 наведені залежності ємності варікапів від прикладеної зворотної напруги. Керування ємністю варікапа забезпечується зміною величини зворотної напруги. Наприклад, для варікапа BB512, що наведений в схемі, ємність змінюється від 30 пФ до 700 пФ при зміні зворотної напруги, відповідно, від 10 В до 0.4 В .

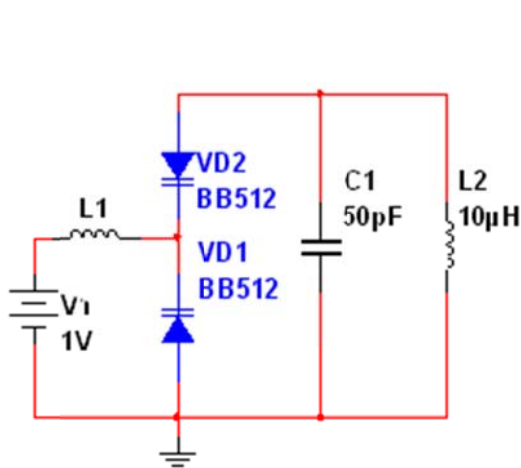


Рис.11.9

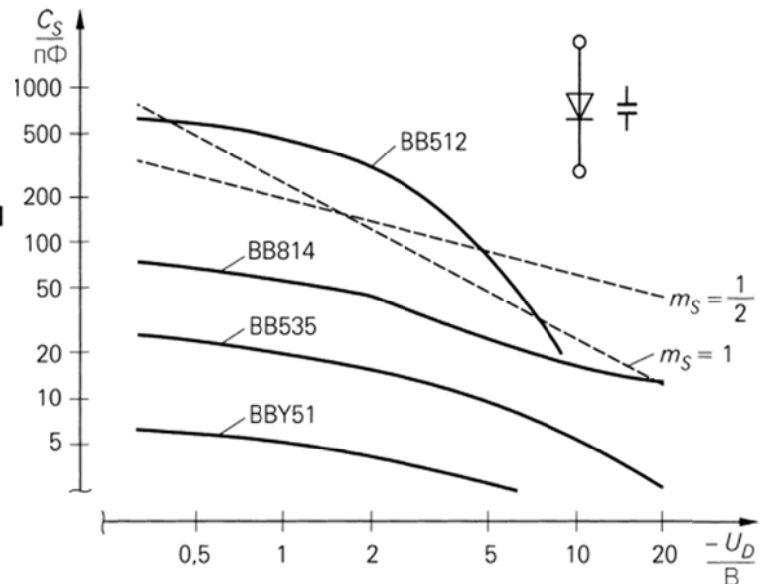


Рис.11.10.

Таким чином, при частотній модуляції буде змінюватись миттєве значення частоти несучої у відповідності до закону:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot \gamma \cdot x_m(t),$$

де γ – в загальному плані нелінійна функція, що характеризує крутизну перетворення миттєвих значень вхідного аналогового сигналу $x_m(t)$ у відповідне значення частоти $\omega(t)$.

Закон зміни повної фази визначається як інтеграл від миттєвих значень частоти, тобто:

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \omega_0 \cdot t + \Delta\omega \cdot \gamma \int_0^t x_m(t) dt + \varphi \quad (11.7)$$

і, відповідно:

$$X_\omega(t) = X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \Delta\omega \cdot \gamma \int_0^t x_m(t) dt + \varphi). \quad (11.8)$$

Порівнюючи (11.6) з (11,8) знаходимо, що складова

$\Delta\omega \cdot \gamma \int_0^t x_m(t) dt$ є складовою повної фази, що обумовлена наявністю частотної модуляції, яка змінюється по закону інтеграла від $x_m(t)$.

Аналогічно, при фазовій модуляції у відповідності до модулюючого сигналу $x_m(t)$ змінюється початкова фаза сигналу в обмеженому діапазоні кутів. Враховуючи відоме співвідношення,

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

по аналогії з попереднім, знаходимо:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\varphi \frac{dx_m(t)}{dt} = \omega_0 + \omega_\varphi(t),$$

де складова $\omega_\varphi(t)$ обумовлена наявністю фазової модуляції несучої.

Приклад практичної реалізації частотної модуляції розглянуто вище. Для отримання сигналу фазової модуляції на вході частотного модулятора встановлюється диференціююча ланка.

Існують і інші методи отримання кутової модуляції.

11.3.2. Спектри сигналів з частотною модуляцією

Розглянемо спрощений випадок однотональної частотної модуляції при

$$x_m(t) = A \cos \Omega t,$$

де – амплітуда модулюючого сигналу.

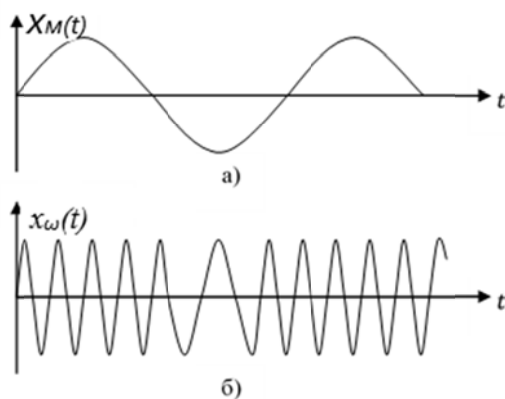
Використовуючи (11.8), і прийнявши $\gamma = 1, \varphi = 0$, отримуємо:

$$X_\omega(t) = X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \Delta\omega \cdot \int_0^t A \cos \Omega t \, dt)$$

Після інтегрування знаходимо:

$$X_\omega(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t). \quad (11.9)$$

Відношення $K_{\text{ЧМ}} = \frac{\Delta\omega_d}{\Omega} = \frac{\Delta f_d}{F}$ називається індексом частотної модуляції і визначає у скільки раз девіація несучої перевищує частоту модулюючого сигналу.



На рис. 11.11 наведені часові діаграми модулюючого сигналу (рис.11.11, а) і промодульованого по частоті (рис.11.11, б). Для більшої наглядності наведемо декілька осцилограм частотно модульованого сигналу при різних індексах модуляції, отриманих шляхом моделювання в

Мультиім . На рис.11.12,а,б наведені відповідно спектрограми вихідної напруги і часові

Рис.11.11 характеристики при індексі модуляції рівним 1. Як витікає з наведених рисунків, величина індексу модуляції досить низька, яку практично не помітно з часових діаграм. Спектрограми близькі по формі відповідним спектрограмам при АМ. При індексі модуляції рівним 5 (Рис. 11.13, а, б.) спектральний склад вихідного сигналу значно розширився і симетричним відносно несучої частоти. Відповідно, частотний діапазон, що займає модульований сигнал значно ширший.

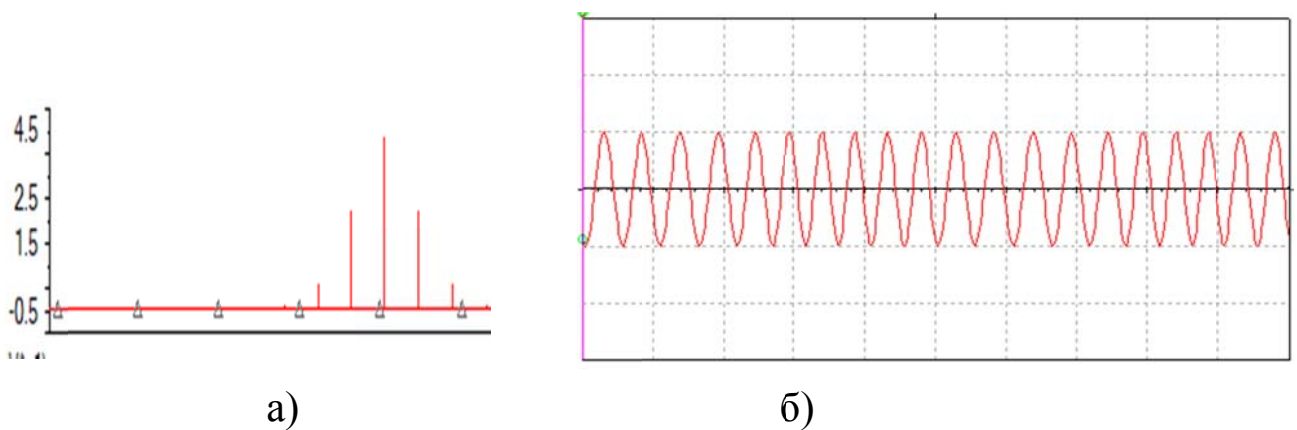


Рис. 11.12

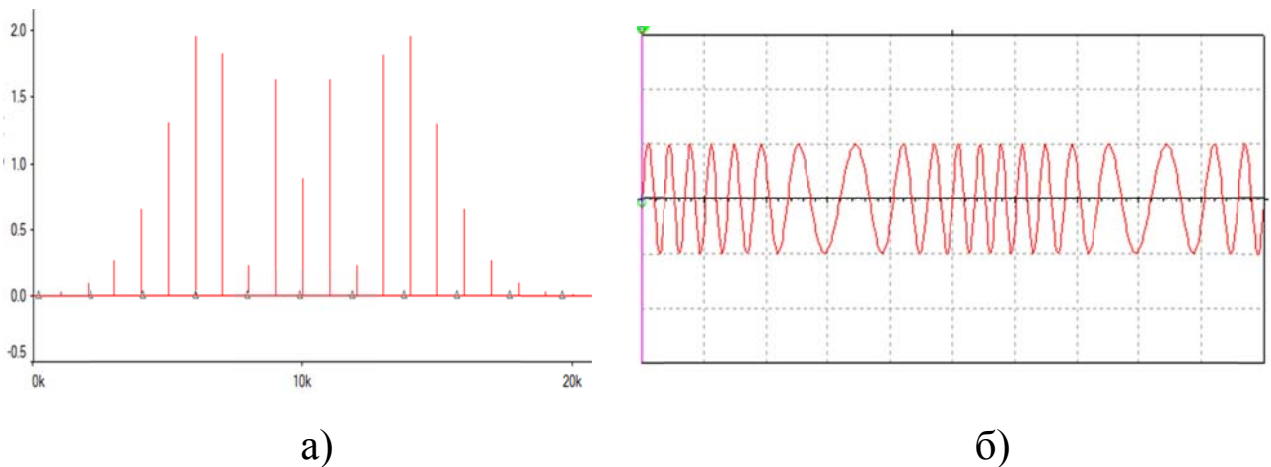


Рис. 11.13

На практиці використання частотної модуляції з індексом рівним 1 і меншим практично не використовується. Так, наприклад, в аналогових системах мобільного зв'язку, що використовувались для передачі мовних повідомлень за допомогою частотної модуляції при верхній частоті сигналу 3.4 кГц і девіації частоти 9.5 – 12 кГц індекс модуляції досягав значень 3-4.

В системах радіомовлення метрового діапазону індекс частотної модуляції рівняється 10.

Тому для розгляду спектру модульованого сигналу слід скористатись відомими формулами розкладу:

$$\cos[\alpha \cdot \sin \Omega t] = I_0(\alpha) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{2i-1}(\alpha) \cdot \cos 2i\Omega t$$

$$\sin[\alpha \cdot \sin \Omega t] = 2 \sum_{i=1}^{\infty} I_{2i-1}(\alpha) \cdot \sin(2i-1)\Omega t$$

де $I_i(\alpha)$ – функція Бесселя першого роду i -го порядку.

Використовуючи наведені формули розкладу і підставляючи їх у (11.9) отримується наступний вираз.

$$X_{\omega}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i A_i \cos(\omega_0 - i\Omega)t + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(\omega_0 + i\Omega)t, \quad (11.10)$$

де $A_i = U_m \cdot I_i(K_{\text{ЧМ}})$.

Отриманий вираз є розкладом однотонового частотно модульованого сигналу на гармонічні складові. Перша складова представляє амплітуду несучої частоти з амплітудою, що залежить від індексу модуляції. Перша сума визначає спектральні складові з частотами A_i і частотами $\omega_0 - i\Omega$, а друга сума – бокові складові з амплітудами A_i і частотами $\omega_0 + i\Omega$.

Загальний вигляд спектральної діаграми частотно модульованого сигналу наведена на рис. 11.14. Спектр є симетричним відносно частоти несучої.

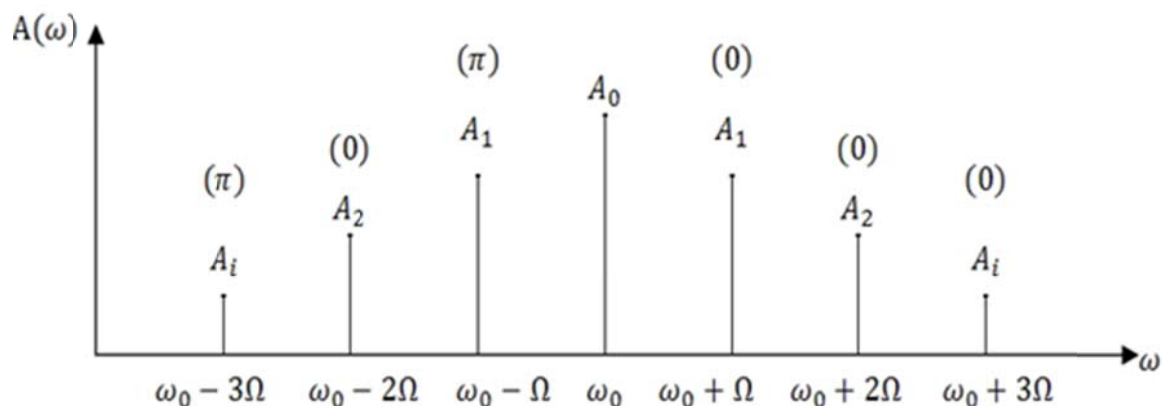


Рис. 11.14

Складові бокових частот розміщені на відстані Ω одна від другої, а їх амплітуди залежать від індексу частотної модуляції.

Як відмічалось вище, спектр сигналу теоретично є нескінченим, але модельні дослідження показують, що реально спектр є досить обмеженим. (Рис.11.15) . На рисунку наведені спектрограми для випадку, коли несуча має частоту 100 кГц, а однотональний модулюючий сигнал – 1 кГц. Для випадку а) спектрограма має індекс модуляції 10, а для випадку б) – 20.

В літературі є доказ того, що 99% енергії сигналу сконцентровано в частотних складових з номерами $i \leq K_{\text{ЧМ}} + 1$. Реально це означає, рештою частотних складових можна знехтувати. Тоді практична ширина спектру при однотональній модуляції при значеннях $K_{\text{ЧМ}} \gg 1$

$$\Delta\omega_{\text{ЧМ}} = 2K_{\text{ЧМ}} \cdot \Omega = 2\Delta\omega_{\text{д}}, \quad (11.11)$$

тобто, рівна подвійній девіації частоти, що в $K_{\text{ЧМ}}$ раз більше, ніж при амплітудній модуляції. Перевага частотно модульованих сигналів полягає в тому, що для передачі інформації використовується вся енергія сигналу. Друга перевага полягає в тому, що ЧМ сигнал легко захистити від дії атмосферних і індустриальних перешкод.

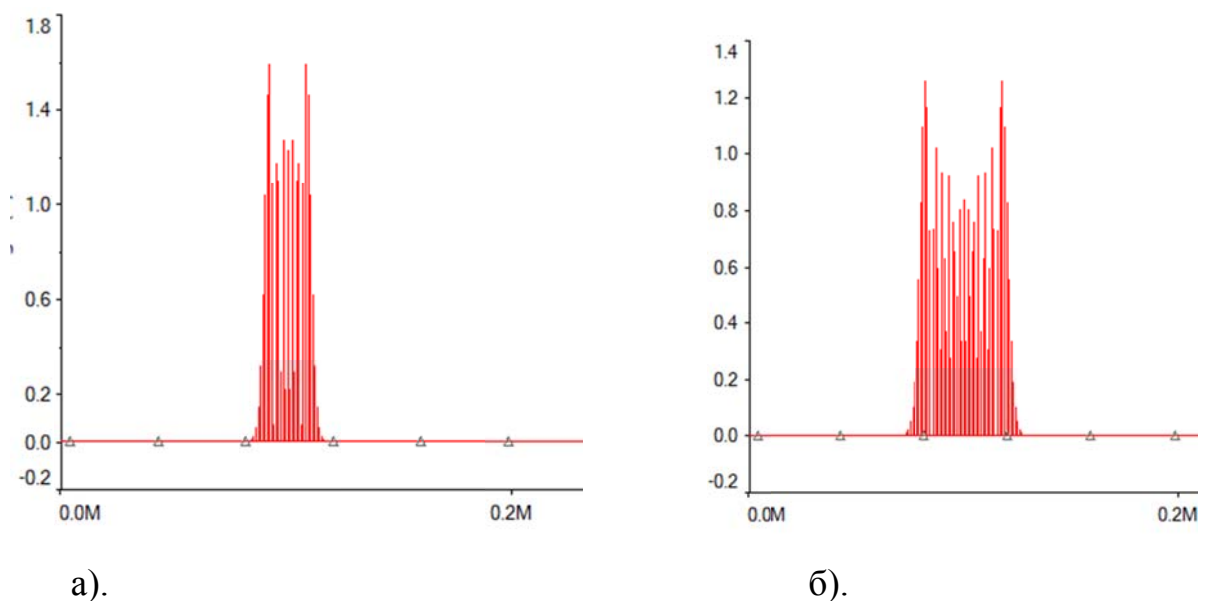


Рис.11.15.

При малих індексах модуляції $K_{\text{ЧМ}} \ll 1$ і вираз (11.9) шляхом приблизного представлення тригонометричних функцій можна привести до вигляду, аналогічного виразу для амплітудної модуляції, а спектральна діаграма буде відповідати спектральній діаграмі АМ сигналу.

11.4. Сигнали з дискретною модуляцією

Перехід систем зв'язку на цифрові технології обумовив широке використання сигналів з дискретною модуляцією, тобто, таким видом

модуляції, при якому модулюючий сигнал являє собою цифровий потік, представлений у вигляді імпульсної послідовності. Такі сигнали також впливають на амплітуду, частоту і фазу несучого сигналу.

11.4.1. Сигнали з дискретною амплітудною модуляцією

Розглянемо випадок, коли в якості модулюючого сигналу використовується періодична послідовність прямокутних імпульсів:

$$x_M(t) = X_0 \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-iT}{\tau_i}\right),$$

де

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau_i}\right) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4} \\ 0, & \text{при } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4} \end{cases}$$

Технічна реалізація дискретної амплітудної модуляції наведена на рис. 11.16.

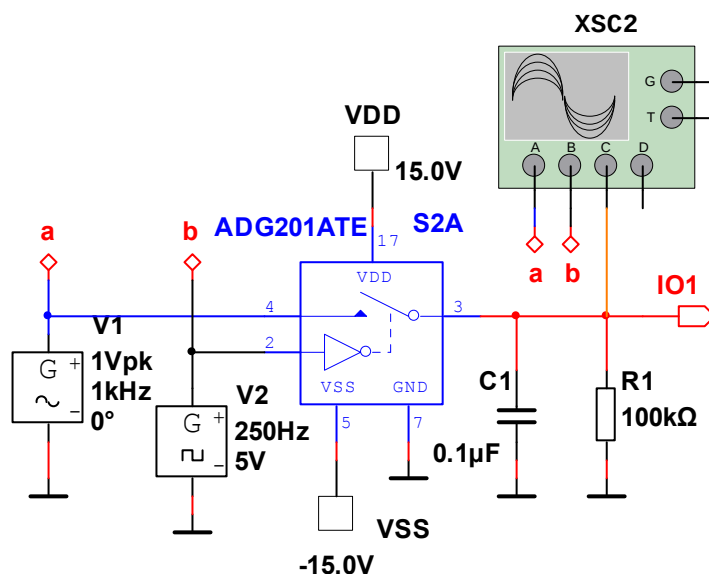


Рис. 11.16

Несуча в наведеній схемі представлена генератором синусоїдальних коливань V1 з частотою 1 кГц, а модулюючий сигнал – генератором прямокутних імпульсів V2, який керує аналоговим комутатором SA2. При синхронній роботі генераторів на виході буде отримана послідовність фрагментів синусоїдального сигналу. (Рис. 11.17). На рисунку наведені зверху в низ – несуча частота, імпульси модулюючого сигналу, промодульований сигнал. Кількість періодів несучої в промодульованому сигналі визначається кратністю частот несучої і модулюючого.

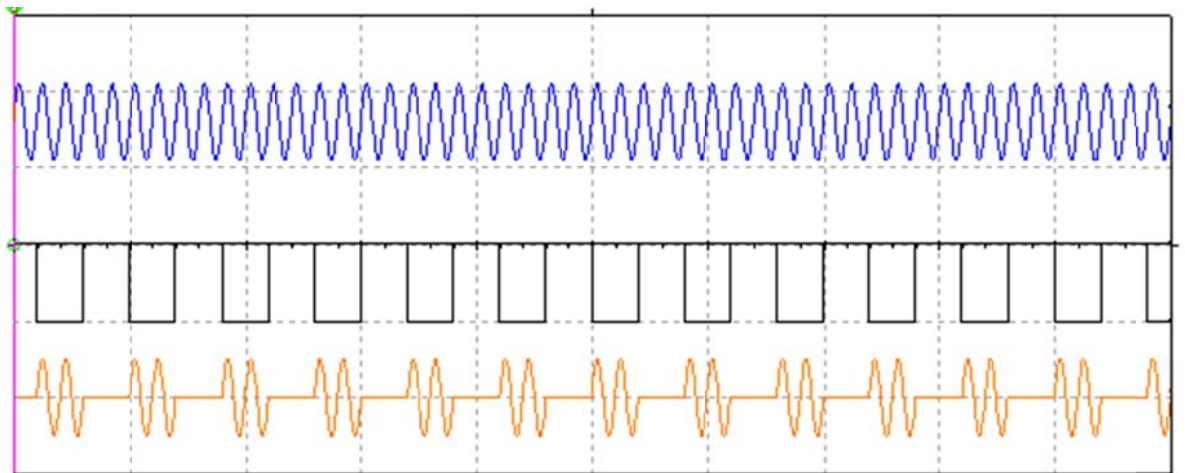


Рис.11.17.

Приймаємо амплітуду модулюючого сигналу рівною 1, а початкову фазу несучої рівною нулю. Тоді сигнал з дискретною амплітудною модуляцією $x_{AD}(t)$ можемо записати у вигляді добутку модулюючого сигналу $x_m(t)$ і несучої $x_n(t)$

$$x_{AD}(t) = x_m(t) \cdot x_n(t) = x_m(t) \cdot X_m \cdot \cos \omega_0 t. \quad (11.12)$$

де

$$x_m(t) = [0.5 + \sum_{k=1}^{\infty} \text{sinc} \frac{k\pi}{2} \cos k\Omega t] \quad (11.13)$$

Підставляючи (11.13) в (11.12) і виконуючи відповідні перетворення, знаходимо, що отриманий спектр буде мати вигляд огинаючої, подібно до спектру прямокутного імпульсу з широким рядом гармонічних складових. В ряді літературних джерел наводиться спектрограма такого ряду, вигляд якої наведено на рис.11.18. В спектрі виділяється сигнал несучої частоти, а також ряд бокових гармонік, розміщених зеркально – симетрично відносно несучої. З спектрограми можна бачити, що основна частка енергії модульованого сигналу розміщена в діапазоні $\omega_0 \pm \Omega$.

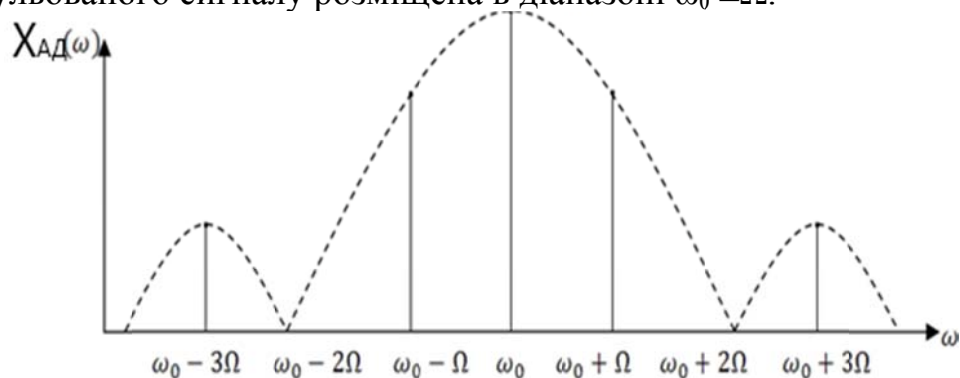


Рис.11.18

11.4.2. Сигнали з дискретною частотною модуляцією

Практична реалізація частотно модульованих коливань може забезпечуватись декількома шляхами:

- генератором з плавним (аналоговим) регулюванням частоти. Генератор має низьку стабільність частоти;
- перемиканням параметрів коливального контура, або часозадаючих ланок;
- Використанням двох стабільних генераторів з періодичним підключенням одного з них до вихідних ків в залежності від модулюючого сигналу.

На рис. 11.19, *а* наведена Мультисім – модель першого з варіантів реалізації, а на рис. 11.190, *б* – вигляд часових діаграм при однополярній частотній модуляції.

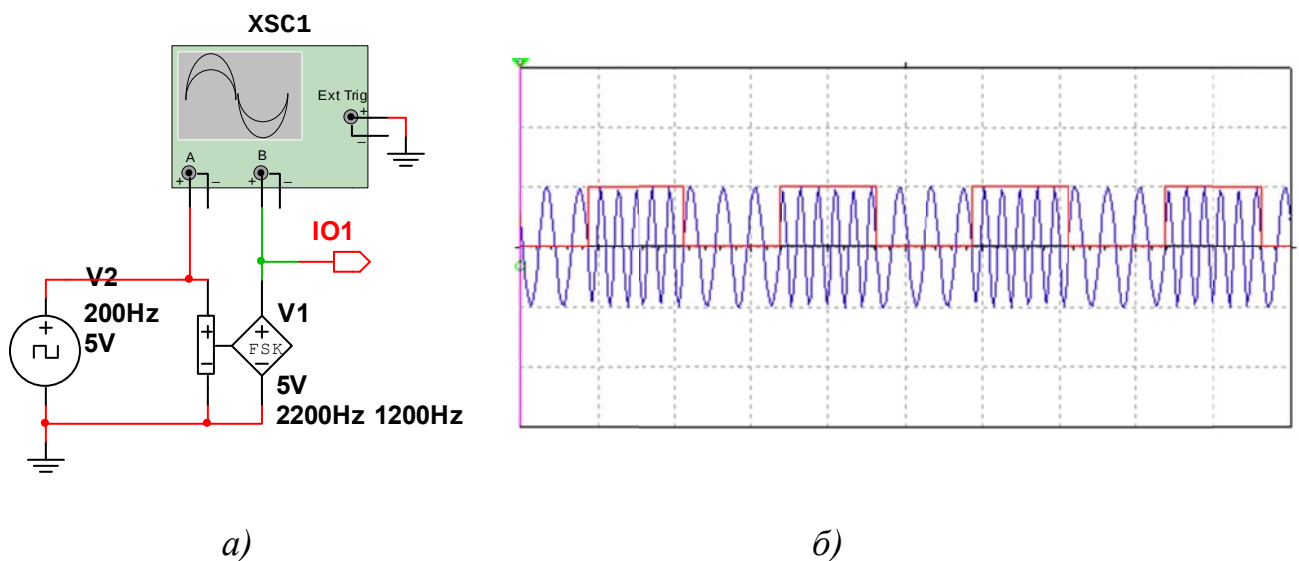


Рис. 11.19

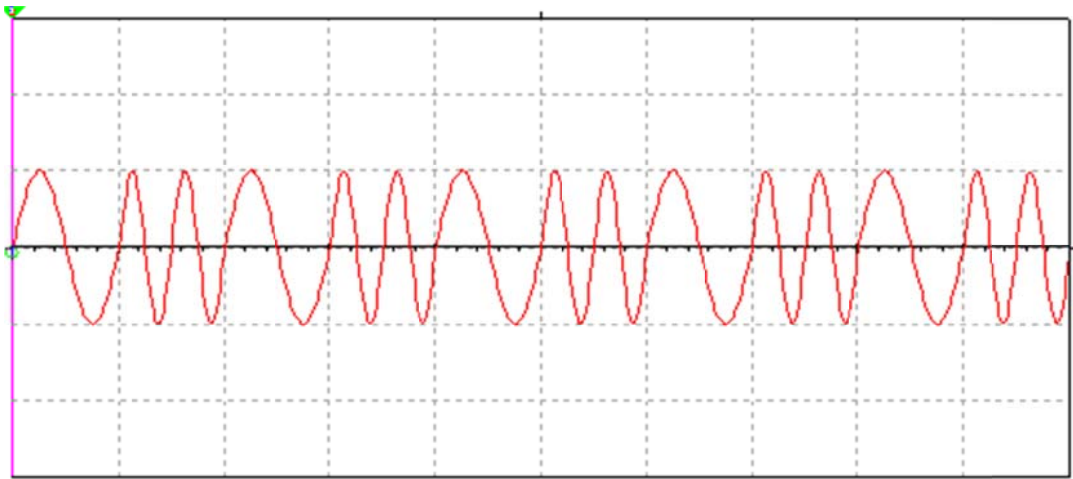


Рис. 11.20

На рис.11.20 наведені часові діаграми модуляції частотно – модульованих коливань з використанням двох генераторів.

При аналізі сигналів з дискретною кутовою модуляцією в якості модулюючого сигналу $x_m(t)$ використовують періодичну послідовність імпульсів типу «меандр», яка на кожному напівперіоді приймає значення амплітуди ± 1 .

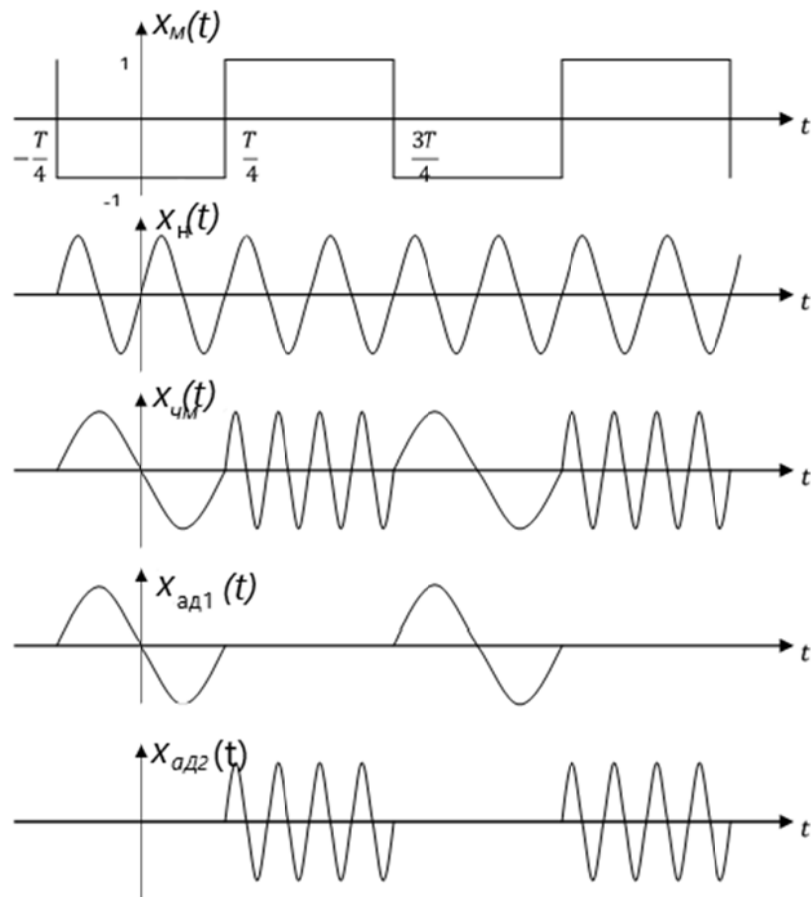


Рис.11.21.

Сигнал з дискретною частотною модуляцією, як це демонструє рис. 11.21, може розглядатись як сума двох сигналів з дискретною амплітудною модуляцією $x_{AD1}(t)$ і $x_{AD2}(t)$ частоти несущих яких відповідно, рівні:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 - \Delta\omega_d, \\ \omega_2 &= \omega_0 + \Delta\omega_d,\end{aligned}$$

а

$$\begin{aligned}x_{M1}(t) &= -1, \text{ при } \left(-\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4}\right), \\ x_{M2}(t) &= 1, \text{ при } \left(-\frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4}\right).\end{aligned}$$

Тоді сигнал з дискретною частотною модуляцією можна представити наступним виразом:

$$x_{\text{ЧД}}(t) = x_{AD1}(t) + x_{AD2}(t),$$

или с учётом (11.12)

$$x_{\text{ЧД}}(t) = x_{AD1}(t) \cdot X_M \cdot \cos \omega_1 t + x_{AD2}(t) \cdot X_M \cdot \cos \omega_2 t \quad (11.14)$$

Модуючі сигнали $x_{AD1}(t)$ і $x_{AD2}(t)$, є періодичними послідовностями прямокутних імпульсів однакової амплітуди

і тривалості, але різної полярності. Тому їх можна зобразити у вигляді:

$$x_{AD1}(t) = x_{AD}(t); \quad x_{AD2}(t) = -x_{AD}(t)$$

і вираз (11.14) буде мати вигляд:

$$x_{\text{ЧД}}(t) = x_{AD}(t) X_M \cos \omega_1 t - x_{AD}(t) X_M \cos \omega_2 t \quad (11.15)$$

де $x_{AD}(t)$ описується виразом (11.13).

Сумісне розв'язання (11.13) і (11.15) не має складнощів і приводить до появи нескінченного ряду гармонік, приблизний амплітудний спектр яких відповідає рис. 11.22.

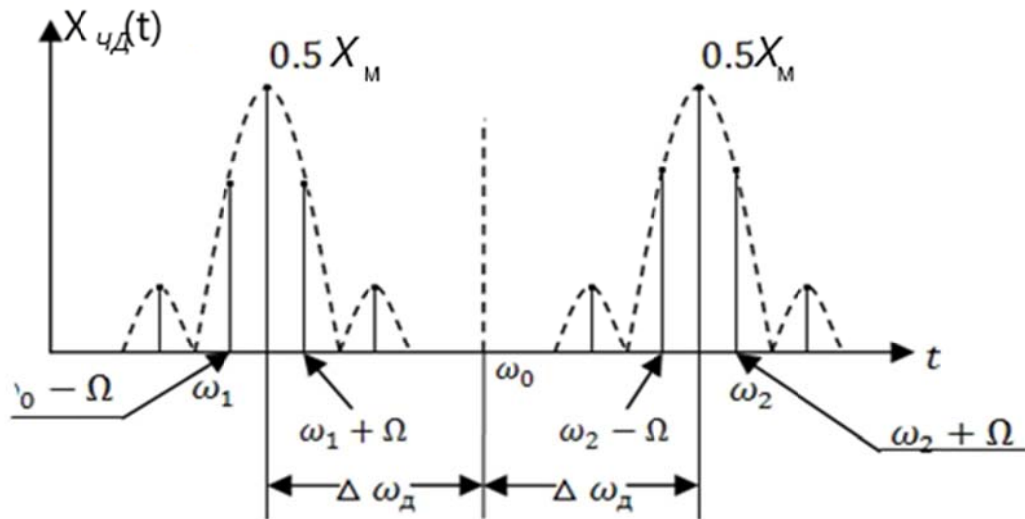


Рис. 11.22

Як і в неперервній частотній модуляції спектр сигналів з дискретною частотною модуляцією набагато ширше, ніж при амплітудній.

Враховуючи, що більша частина енергії спектру розміщена в бокових складових на частотах $\omega_1 \pm \Omega$ і $\omega_2 \pm \Omega$, то практична ширина спектру буде мати величину:

$$\Delta\omega_{\text{чТ}} = \omega_2 + \Omega - (\omega_1 - \Omega) = \omega_2 - \omega_1 + 2\Omega.$$

Незважаючи на значну ширину спектру, сигнали з дискретною частотною модуляцією мають широке використання в сучасних системах зв'язку.

11.4.3. Сигнали з дискретною фазовою модуляцією

Приклад реалізації дискретних фазомодульованих сигналів наведено на рис. 11.23. Осцилограма дискретного фазомодульованого сигналу при зміні фази сигналу на 180 град. наведена на рис. 11.24.

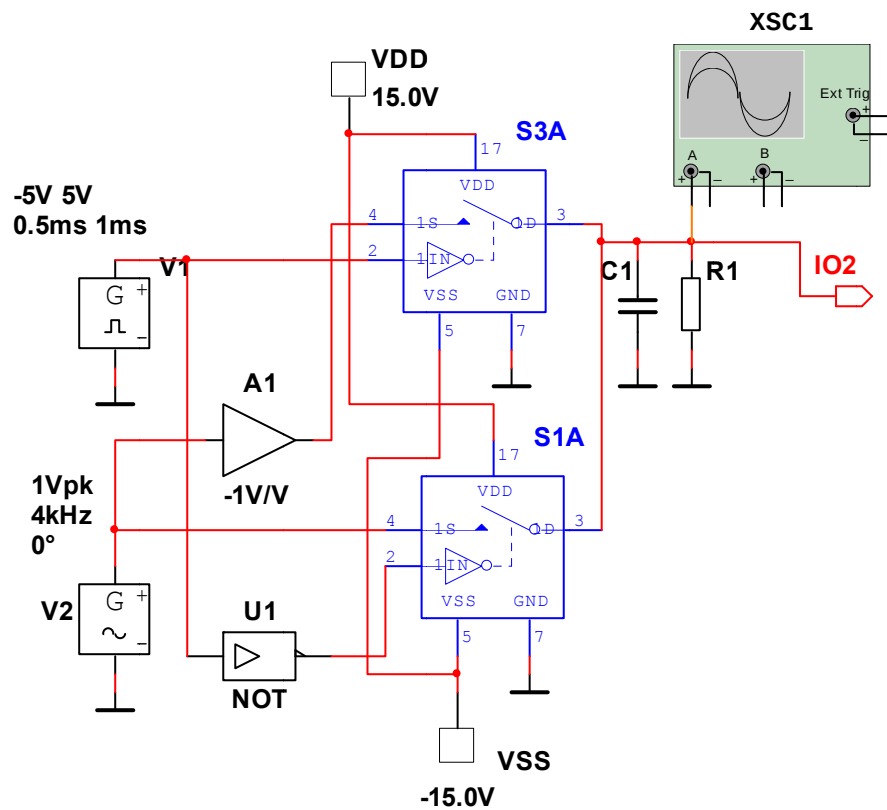


Рис. 11.23

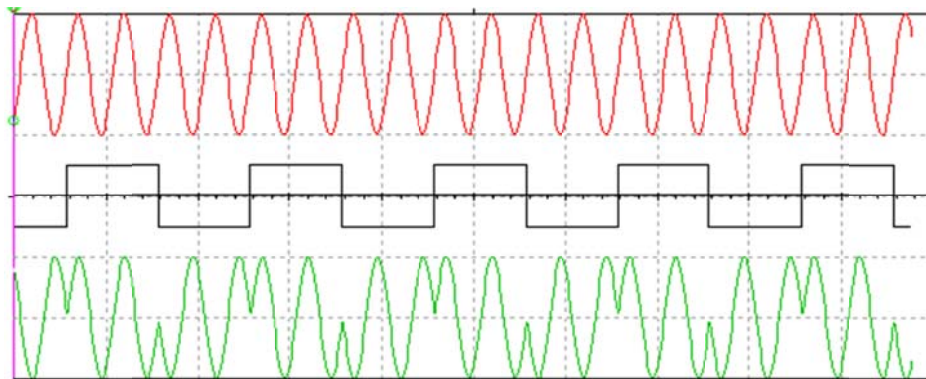


Рис. 11.24

На рис.11.24, 11.25 наведені часові діаграми модулюючого сигналу $x_{\phi d}(t)$ несучої $X_m(t)$ і сигналу , що отриманий в наслідок дискретної фазової модуляції сигналу $x_{\phi m}(t)$. Для знаходження спектру сигналу з дискретною фазовою модуляцією зобразимо фазомодульований сигнал як суму несучої і сигналу дискретної маплітудної модуляції з подвійною амплітудою і протилежною початковою фазою несучої. (Рис. 11.25, а) представим сигнал дискретной ФМ в виде суммы несущего колебания (4.54) и сигнала дискретной амплитудной модуляции с удвоенной амплитудой и противоположной начальной фазой несущего колебания. В такому випадку

$$x_{\text{Ад}}(t) = 2X_m \cdot x_{\phi m}(t) \sin(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

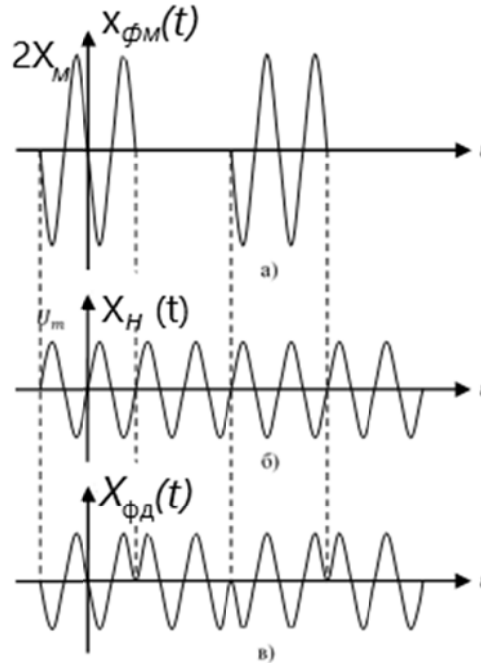


Рис. 11.25

а сигнал з дискретною фазовою модуляцією можемо записати у вигляді:

$$x_{\phi_D}(t) = X_M \sin(\omega_0 t + \varphi) + 2X_M x_m(t) \sin(\omega_0 t + \varphi + \pi).$$

Цей вираз з врахуванням раніше зроблених викладок і перетворень може бути представленим у вигляді:

$$x_{\phi_D}(t) = 0.5X_M \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{k\pi}{2} \cdot \sin[(\omega_0 - k\Omega)t + \varphi + \pi] + 0.5 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{k\pi}{2} \cdot \sin[(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi + \pi]. \quad (11.16)$$

З отриманого виразу витікає, що при дискретній фазовій модуляції у вихідному амплітудному спектрі відсутні складові несучої, а містяться лише дві бокові полоси, що розміщені зеркально відносно несучої. Якщо модулюючий сигнал представляє собою послідовність прямокутних імпульсів ширина спектру сигналу дискретної фазової модуляції буде:

$$\Delta\omega_{\phi_D} = 2\Omega.$$

При передачі цифрових сигналів вище розглядалась ситуація, при якій модулюючий сигнал приймав лише два значення. Кількість значень модулюючого сигналу в радіотехніці називається ансамблем, який позначається, як **M**. Розглянуті сигнали дискретної модуляції створюють ансамблі з **M=2**. Зрозуміло, що кількість сигналів дискретної модуляції не обмежуються вказаним значенням ансамблю. В якості модулюючих можуть бути сигнали з числом **M** пропорційним 2^n , де n – кратність модуляції. Тому сигнали розділяють по кратності модуляції – однократна, двократна і.т.п. На

практиці широко розповсюджені сигнали з двократною і трі кратною модуляцією.

11.5. Питання та завдання до теми

11.5.1. Яка мета використання модуляції високочастотних сигналів?

11.5.2. Наведіть схему для створення амплітудно-модульованих сигналів. Поясніть її роботу.

11.5.3. Наведіть формулу для математичного описання амплітудно-модульованого сигналу.

11.5.4. Що фізично означає коефіцієнт амплітудної модуляції? Як він впливає на спектрограму модульованого сигналу?

11.5.5. Наведіть загальний вигляд спектрограми амплітудно-модульованого сигналу при моногармонічній модуляції. Дайте їй пояснення.

11.5.6. У чому полягає основний недолік амплітудно модульованого сигналу?

11.5.7. Наведіть схему балансного модулятора і поясніть принцип її роботи. В чому перевага балансного модулятора.

11.5.8. Як можна створити сигнал з однополосною модуляцією?

11.5.9. В чому полягають недоліки сигналу однополосної модуляції і як вони можуть бути усунені?

11.5.10. Поясніть фізичну суть частотної модуляції. Як практично можна створити частотно модульований сигнал?

11.5.11. Наведіть приклад дискретного спектру частотно модульованого сигналу. Чим він відрізняється від спектру амплітудно модульованого сигналу.

11.5.12. Поясніть, як залежить ширина спектру частотно модульованого сигналу від індексу модуляції. В якому випадку спектри частотно модульованого сигналі і амплітудно-модульованого сигналу будуть співпадати?

11.5.13. В чому різниця між спектрами частотно- і фазо-модульованих сигналів.?

11.5.14. Поясніть різницю в спектрах дискретної амплітудної модуляції від непркривної.

11.5.15. Поясніть принцип формування сигналу з дискретною фазовою модуляцією.

11.5.16. Чому ширина спектру дискретного амплітудно- і фазо-модульованих сигналів однакові?

Навчальне видання

Рябенський Володимир Михайлович

Буряк Володимир Святославович

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ І ПРАКТИКИ
ВИКОРИСТАННЯ СИГНАЛІВ У СИСТЕМАХ ЗВ'ЯЗКУ**
Навчальний посібник

Формат 60x84/16. Ум.-друк. аркушів 7,2.

Видавець та виготівник
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

E-mail: publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.