

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**Л. Т. САПРИКІНА, О. В. МАЙБОРОДА,
Є. О. КОНДРАТЕНКО**

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні вказівки
до проведення практичних занять

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2009

УДК 517 (076)

Саприкіна Л.Т., Майборода О.В., Кондратенко Є.О. Вступ до математичного аналізу: Методичні вказівки до проведення практичних занять. – Миколаїв: НУК, 2009. – 80 с.

Кафедра вищої математики

Посібник містить методику проведення практичних занять з розділу: “Вступ до математичного аналізу”. В кожному з них наведено основні теоретичні відомості, розв’язані з поясненнями типові приклади для аудиторної та самостійної роботи студентів. Завдання подані трьома рівнями складності.

Посібник призначений для студентів денної форми навчання та буде корисний викладачам вищих навчальних закладів.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Т.А. Юрченко

*Згідно з наказом ректора НУК № 08 від 09.01.2008
методичні вказівки публікуються в авторській редакції.
Відповідальність за редагування несе автор.*

Практичне заняття № 1

Зміст: Поняття функції. Область визначення та множина значень. Основні характеристики функції. Графік функції.

I. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Величину y називають *функцією* змінної величини x , якщо кожному значенню x з деякої числової множини дійсних чисел D за певним правилом ставиться у відповідність єдине значення y .

Змінна x є *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінна y – *залежною змінною*, або *функцією*.

Функціональну залежність між x та y позначають $y = f(x)$. Під символом f розуміють ті операції, які треба виконати над аргументом x , щоб дістати відповідне значення функції y .

Замість літери f можна використовувати інші літери $\varphi, \psi, \gamma, F, \Phi$ тощо.

Означення 2. Множину D значень аргумента x , для яких значення y , обчислені за формулою $y = f(x)$, є певні дійсні числа, називають *областю визначення* (існування) цієї функції.

Частинне значення функції відповідає частинному значенню аргумента $x = x_0$ і позначається символом $y_0 = f(x_0)$.

Множину E усіх значень функції $y = f(x)$ для всіх $x \in D$ називають *множиною значень* цієї функції.

Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ називають *тотожними*, якщо вони мають однакові області визначення і однакові множини значень для всіх $x \in D$, та $\forall x \in D$ виконується рівність $f(x) = \varphi(x)$.

Графіком функції $f(x)$ називають множину точок площини $M(x; f(x))$, абсцисами яких є значення аргумента x , взяті з області визначення, а ординатами – відповідні значення функції $f(x)$.

Графік функції може складатись з однієї суцільної лінії, кількох ліній або із дискретної множини точок.

Функція $y = f(x)$ називається *парною* на симетричній відносно початку координат області, якщо $f(-x) = f(x)$; *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy , непарної – відносно початку координат.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, є *періодичною*, якщо існує таке число $T > 0$, для якого $f(x + T) = f(x)$.

Число T називається *періодом* функції. Найменше із значень T є *основним періодом* функції.

II. Завдання для аудиторної роботи

Рівень А

Задача 1. Період малих коливань T математичного маятника обчислюється за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l – довжина маятника, g – прискорення сили тяжіння. Охарактеризувати величини, що входять в цю рівність.

Розв'язання. Величини 2 і π – абсолютні сталі; g – параметр, тому що його значення стає тільки в даній точці земної поверхні; l – незалежна змінна; T – залежна змінна.

Задача 2. Для функцій $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$; $\varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$ знайти частинні значення $f(0), f(2), f(4), \varphi(0), \varphi(2), \varphi(4)$. Чи існують $f(-1), \varphi(-1)$?

Розв'язання.

$$f(0) = \frac{0-2}{0+1} = -2; \quad f(2) = \frac{2-2}{4+1} = 0; \quad f(4) = \frac{4-2}{16+1} = \frac{2}{17};$$

$$\varphi(0) = \frac{|0-2|}{0+1} = 2; \quad \varphi(2) = \frac{|2-2|}{2+1} = \frac{0}{3} = 0; \quad \varphi(4) = \frac{|4-2|}{4+1} = \frac{2}{5};$$

$$f(-1) = \frac{-1-2}{(-1)^2+1} = -\frac{3}{2} - \text{існує},$$

$\varphi(-1)$ – не існує, оскільки знаменник при $x = -1$ дорівнює нулю.

Задача 3. Функція $f(x)$ на всій числовій осі задана законом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1; \\ 2 - x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти $f(-1)$; $f(0,5)$; $f(5)$, вказати область визначення і множину значень функції та побудувати її графік.

Розв'язання. Функція задається трьома аналітичними виразами, кожний з яких існує в заданому проміжку, тому область D є інтервал $(-\infty; +\infty)$. Знаходимо частинні значення: $f(-1) = 0$ – за першим виразом, $f(0,5) = 0,5$ – за другим і $f(5) = 2 - 5 = -3$ – за третім. Множина значень функції $E : (-\infty; 1]$.

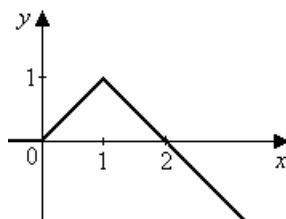


Рис.1

Графік зображено на рис.1.

Задача 4. Заданий графік функції $y = f(x)$ і значення a і b змінної x (рис.2). Побудувати $f(a)$ і $f(b)$. Який геометричний зміст має відношення $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$?

Розв'язання. Значення функції $f(a)$ і $f(b)$ – це ординати точок A і B . З'єднаємо їх хордою (рис.3).

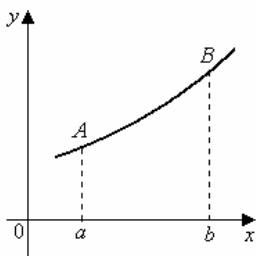


Рис.2

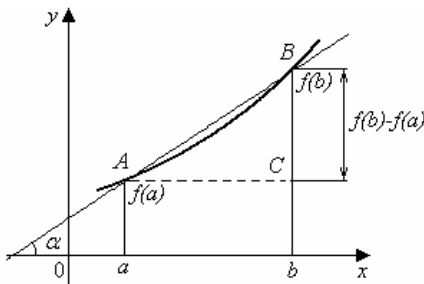


Рис.3

Різниця $f(b) - f(a)$ – приріст функції і одночасно приріст ординати хорди AB ; $(b - a)$ – приріст аргументу. З $\triangle ABC$ маємо:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ де } \alpha - \text{кут нахилу хорди } AB.$$

Таким чином, дане відношення визначає кутовий коефіцієнт хорди, що з'єднує точки A і B .

Задача 5. У $\triangle ABC$, основа якого $AC = b$ і висота $BD = h$, вписаний прямокутник $KLMN$ із висотою $MN = x$. Виразити

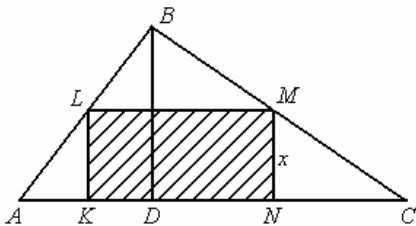


Рис.4

периметр p прямокутника та його площу S як функції від x (рис.4).

Розв'язання. Периметр $p = 2x + 2 \cdot LM$, площа $S = x \cdot LM$. Виходячи із подібності $\triangle ABC$ і $\triangle LBM$, маємо

$$\frac{LM}{b} = \frac{h - x}{h}, \text{ звідки } LM = \frac{b}{h}(h -$$

$$- x) = b - \frac{b}{h}x. \text{ Тоді } p = 2b + 2x(1 - \frac{b}{h}), S = bx(1 - \frac{x}{h}), 0 < x < h.$$

Область визначення цих функцій не співпадає з областю визначеності аналітичних виразів, для яких: $-\infty < x < +\infty$.

Задача 6. Знайти області визначення функцій:

а) $y = \sqrt[3]{2x + 3}$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 3}$; в) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$;

г) $y = \lg(5 - 2x)$; д) $y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{x + 3}$.

Розв'язання.

а) Функція $y = \sqrt{2x+3}$ визначена для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, тому що корінь непарного степеня існує на всій множині дійсних чисел.

б) Функція $y = \frac{1}{x^2-3}$ визначена там, де знаменник дробу не обертається в нуль, тобто $x^2-3 \neq 0$. Область визначення D складається з трьох інтервалів: $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

в) Даний дріб $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ існує, якщо підкореневий вираз строго

додатній, тобто $x^2-3x+2 > 0$. Нерівність виконується для значень $-\infty < x < 1$ і $2 < x < +\infty$ ($x_1 = 1$ та $x_2 = 2$ – корені тричлена). Ці два інтервали $(-\infty; 1)$, $(2; +\infty)$ і складають область визначення функції.

г) Логарифмічна функція $y = \lg(5-2x)$ існує тільки для додатніх значень аргумента, тому $5-2x > 0 \Rightarrow D: \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

д) Функція $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}$ складається із суми двох функцій: $y_1 = \sqrt{5-x}$, що існує для значень $-\infty < x \leq 5$, та $y_2 = \sqrt{x+3}$, що існує для значень $-3 \leq x < +\infty$. Спільна частина знайдених двох областей – відрізок $[-3; 5]$ і є областю визначення заданої функції.

Задача 7. Знайти нулі функції $y = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Значення аргументу, при яких $f(x) = 0$, називають нулями функції. Для даної функції нулі знайдемо з рівняння $x^3 - 3x = 0$, $x(x^2 - 3) = 0$, звідки $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$.

Задача 8. Дослідити на парність функції:

а) $y = x^3 - 2\sqrt[3]{x}$; б) $y = \frac{\sin x}{x}$; в) $y = \frac{2x+1}{x^2+1}$; г) $y = \frac{x}{x-2}$.

Розв'язання.

а) Функція $y = x^3 - 2\sqrt[3]{x}$ має область визначення $(-\infty; +\infty)$ симетричну відносно $x = 0$ і є непарною, оскільки

$$f(-x) = (-x)^3 - 2\sqrt[3]{-x} = -x^3 + 2\sqrt[3]{x} = -(x^3 - 2\sqrt[3]{x}) = -f(x).$$

б) Область визначення функції $y = \frac{\sin x}{x}$ є сукупність двох інтервалів:

$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$, тому дана функція парна.

в) Область визначення функції $y = \frac{2x+1}{x^2+1}$ є $(-\infty; +\infty)$.

$$\text{Знаходимо } f(-x) = \frac{2(-x)+1}{(-x^2)+1} = \frac{-2x+1}{x^2+1} = -\frac{2x-1}{x^2+1}.$$

Як бачимо, зміна знака у аргумента змінює абсолютну величину функції, $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Функція не є ні парною, ні непарною.

г) Область визначення функції $y = \frac{x}{x-2}$ (інтервали $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$)

не є симетричною відносно точки $x = 0$, тому функція не є ні парною, ні непарною.

Задача 9. Знайти основний період функції $y = \sin(\omega x + \varphi)$, $\omega > 0$.

Розв'язання. Якщо функція періодична, то існує таке число $T > 0$, що $y = \sin(\omega(x+T) + \varphi) = \sin(\omega x + \varphi) \Rightarrow \omega x + \omega T + \varphi = \omega x + \varphi + 2n\pi \Rightarrow T = \frac{2n\pi}{\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, основним періодом даної функції буде число $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ (при $n = 1$).

Зауваження. Число $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$ є також основним періодом функції $y = \cos(\omega x + \varphi)$, і взагалі, якщо $f(x)$ має період T , то $f(kx + b)$ матиме період T/k .

Рівень Б

Задача 1. Для функції $f(x) = \arcsin(\lg x)$ знайти частинні значення $f(0,1)$; $f(1)$; $f(10)$.

Розв'язання.

$$f(0,1) = \arccos(\lg 0,1) = \arccos(-1) = \pi;$$

$$f(1) = \arccos(\lg 1) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2};$$

$$f(10) = \arccos(\lg 10) = \arccos 1 = 0.$$

Задача 2. Задано $f(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Знайти всі корені рівняння $f(x) = |\varphi(x)|$.

Розв'язання. Маємо: $x^2 + 6 = |5x| \Rightarrow x^2 + 6 = -5x$ при $x < 0$; $x^2 + 6 = 5x$ при $x \geq 0$. Перше рівняння $x^2 + 5x + 6 = 0$ має корені $x_1 = -3$, $x_2 = -2$.

Друге рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ має корені $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Відповідь. -3 ; -2 ; 2 ; 3 .

Задача 3. Знайти область визначення функцій:

а) $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$; б) $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$.

Розв'язання.

а) Значення синуса за абсолютною величиною не перевищують 1, тому

$$\left| \frac{x-3}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

Отже, областю визначення функції $y = \arcsin \frac{x-3}{2}$ буде відрізок $[1;5]$.

б) Логарифмічна функція $\lg(1-x)$ існує, якщо $1-x > 0$, тобто при $x < 1$. Але слід мати на увазі, що $\lg(1-x)$ стоїть у знаменнику дробу, тому $\lg(1-x) \neq 0$, або $1-x \neq 1$, а $x \neq 0$. Отже, перший доданок існує в інтервалах $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. Другий доданок $\sqrt{x+2}$ існує для $x+2 \geq 0$, тобто при $x \geq -2$.

Остаточно областю визначення функції $y = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$ будуть інтервали: $[-2; 0) \cup (0; 1)$.

Задача 4. Чи є тотожними функції:

а) $f(x) = \frac{x}{x^2}$ і $\varphi(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{x^2}{x}$ і $\varphi(x) = x$? Побудувати їх графіки.

Розв'язання.

а) Функції $\frac{x}{x^2}$ і $\frac{1}{x}$ тотожні, тому що мають однакові області

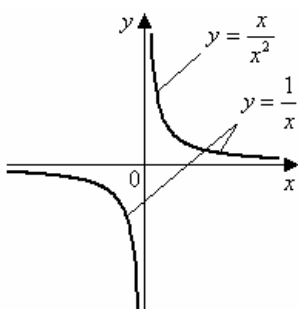


Рис. 5

визначення $D: (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ і однакові множини значень $E: (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графіками обох функцій є рівнобічна гіпербола, асимптоти якої – координатні осі, а центр – точка $O(0;0)$ (рис.5).

б) Функції $\frac{x^2}{x}$ і x не тотожні, оскільки

область визначення функції $f(x) = \frac{x^2}{x}$

($D: x \neq 0$) не співпадає з областю визначення функції $\varphi(x) = x$ ($D: (-\infty; +\infty)$). Графіком функції $\varphi(x) = x$ є бісектриса I та III координатних кутів, а графіком функції $f(x) = \frac{x^2}{x}$ є та сама бісектриса, але без точки $O(0;0)$.

Задача 5. Виразити довжину відрізка $y = MN$ і площу S фігури AMN як функції від $x = AM$ (рис.6). Побудувати графіки цих функцій.

Розв'язання.

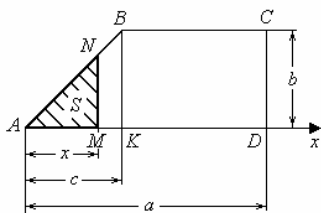


Рис.6

Із подібності: $\triangle AMN \sim \triangle AKB$ маємо

$\frac{y}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow y = \frac{b}{c}x$ для $0 \leq x \leq c$. Якщо $c \leq x \leq a$, то $y = b$. Отже,

$$y = \begin{cases} \frac{b}{c}x, & 0 \leq x \leq c; \\ b, & c \leq x \leq a. \end{cases}$$

Площу фігури AMN знаходимо за формулою $S = \frac{1}{2}x \cdot y = \frac{bx^2}{2c}$

для $0 \leq x \leq c$. Якщо $c \leq x \leq a$, то $S = S_{\Delta AKB} + S_{KBNM} = \frac{1}{2}bc + b(x-c)$,

$$S = bx - \frac{1}{2}bc \text{ для } c \leq x \leq a.$$

Таким чином,
$$S = \begin{cases} \frac{bx^2}{2c}, & 0 \leq x \leq c; \\ bx - \frac{1}{2}bc, & c \leq x \leq a. \end{cases}$$

Графіки y та S представлені на рисунках 7, 8.

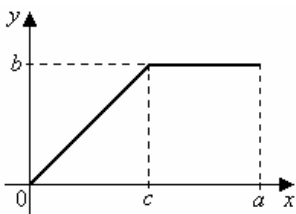


Рис. 7

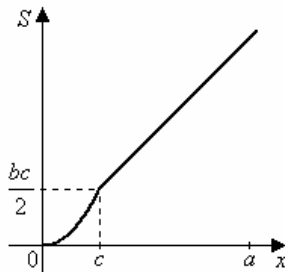


Рис. 8

Задача 6. Довести, що сума або різниця двох парних функцій є функція парна при умові, що вони розглядаються в одній симетричній області відносно $x = 0$. Навести приклади.

Розв'язання. Нехай $\varphi(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$. За умовою $f_1(-x) = f_1(x)$ і $f_2(-x) = f_2(x)$. Обчислимо $\varphi(-x) = f_1(-x) \pm f_2(-x) = f_1(x) \pm f_2(x) = \varphi(x)$, що і треба було довести.

Задача 7. Вказати основний період функції $y = \sin^2 \omega x$.

Розв'язання. $\sin^2 \omega x = \frac{1 - \cos 2\omega x}{2}$. Оскільки функція $\cos 2\omega x$

має основний період $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$ (див. задачу 9, рівень А), то і задана функція має той самий період.

Рівень В

Задача 1. Обчислити $f(x) = \frac{36}{x^2} + x^2$ в точках, де $\frac{6}{x} + x = 5$.

Розв'язання. $\left(\frac{6}{x} + x\right)^2 = 25 \Rightarrow \frac{36}{x^2} + 12 + x^2 = 25$, звідки

$$f(x) = \frac{36}{x^2} + x^2 = 13.$$

Задача 2. $f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & -1 \leq x \leq 0; \\ \arctg x, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$ Знайти $f(-1)$ $f(0)$ $f(1)$.

Розв'язання.

$$f(-1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}; \quad f(0) = \arcsin 0 = 0; \quad f(1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 3. Напруга в деякому ланцюгу спадає рівномірно за лінійним законом. На початку досліду напруга була $16B$, а через $5c$ знизилась до $10B$. Знайти напругу U як функцію часу t . Через який проміжок часу напруга знизиться до $7,6B$?

Розв'язання. Загальний вигляд залежності $U = at + b$. Для знаходження a і b складаємо систему
$$\begin{cases} U(0) = b = 16; \\ U(5) = 5a + b = 10. \end{cases} \quad \text{Звідки}$$
 $a = -1,2; \quad b = 16$.

Отже, $U = -1,2t + 16$ – шуканий закон. Якщо $U = 7,6B$, то $t = 7c$.

Задача 4. З трьох матеріальних брусків, довжини яких дорівнюють $1, 2, 1$ одиницям довжини, а маси відповідно $2, 3, 1$ одиницям маси, складено стрижень (рис.9).

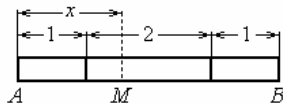


Рис. 9

Маса змінного відрізка AM довжини x є функцією від x . Для яких значень x визначена функція? Скласти її аналітичний вираз і побудувати графік.

Розв'язання. Аргумент x може приймати значення від 0 до 4 , тому область визначення шуканої функції

$D: 0 \leq x \leq 4$. Побудуємо її аналітичний вираз. Точка M може знаходитись на 1-й, 2-й і 3-й ділянках стрижня. Лінійна густина (маса однієї одиниці довжини стрижня) на кожній з його ділянок різна і дорівнює:

2 – на першій ділянці; $3/2$ – на другій; 1 – на третій.

Якщо точка M знаходиться на першій ділянці, тобто $0 \leq x \leq 1$, то маса $m(x) = 2 \cdot x$. Якщо точка M знаходиться на другій ділянці, тобто $1 < x \leq 3$, то маса $m(x) = 2 + \frac{3}{2}(x - 1)$. Якщо точка M – на третій ділянці, тобто $3 < x \leq 4$, то маса $m(x) = 5 + 1 \cdot (x - 3) = x + 2$.

$$\text{Таким чином: } m(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 3; \\ x + 2, & 3 < x \leq 4. \end{cases}$$

Графік $m(x)$ зображено на рис.10.

Задача 5. Знайти область визначення функції $y = \frac{\sin x}{\lg(x^2 - 4)}$.

Розв'язання. Функція $\sin x$ визначена на $(-\infty; +\infty)$, а $\lg(x^2 - 4)$ при умові $x^2 - 4 > 0$, тобто в $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Крім того, треба врахувати, що $\lg(x^2 - 4)$ стоїть у знаменнику і тому $\lg(x^2 - 4) \neq 0 \Rightarrow (x^2 - 4) \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{5}$. Загальна область визначення $D: (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}; -2) \cup (2; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

Задача 6. Чи є тотожними функції:
а) $y = \lg x^3$ і $y = 3 \lg x$; б) $y = \lg x^2$ і $y = 2 \lg x$?
Побудувати їх графіки.

Розв'язання.

а) Задані функції тотожні, оскільки $\lg x^3 = 3 \lg x$ і обидві мають однакові області визначення $D: x > 0$. Графіки цих функцій співпадають (рис.11).

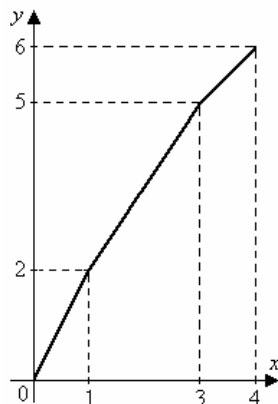


Рис.10

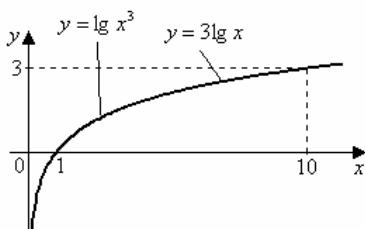


Рис.11

б) Функції не тотожні, тому що області визначення функції $y = \lg x^2$ складається з двох інтервалів $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, а для функції $y = 2 \lg x$ — з одного інтервала $(0; +\infty)$. Їх графіки зображено на рис.12.

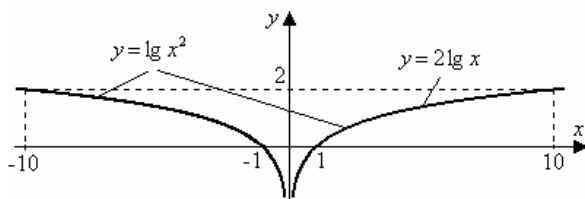


Рис.12

Задача 7. Виразити без використання знаків радикалів і модуля дану функцію та побудувати її графік $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty; +\infty)$. Скористаємось рівністю $\sqrt{x^2} = |x|$, дістаємо $f(x) = \sqrt{(x+3)^2} - \sqrt{(x-4)^2} = |x+3| - |x-4|$. З рівнянь $x+3=0$ і $x-4=0$ знаходимо $x=-3$ та $x=4$.

Розглянемо інтервали: $(-\infty; -3)$, $[-3; 4)$, $[4; +\infty)$ і запишемо відповідні вирази для функції:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3) + (x-4) = -7, & x \in (-\infty; -3); \\ (x+3) + (x-4) = 2x-1, & x \in [-3; 4); \\ (x+3) - (x-4) = 7, & x \in [4; +\infty). \end{cases}$$

Графік функції зображено на рис.13.

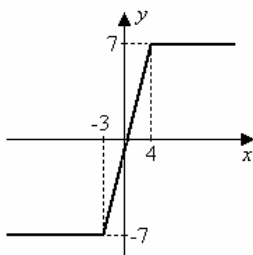


Рис.13

Задача 8. Вказати основний період функції $y = |\sin x|$.

Розв'язання. Маємо $|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} =$

$= \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$. Періодом функції $\cos 2x$ є число $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, і тому основний період функції дорівнює π .

Примітка. Наведемо декілька важливих функцій та їх графіки.

1. Функція $y = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

(читається „сiгнум ікс”) визначена на всій числовій осі і набуває значень $-1, 0, 1$. Область визначення $D: (-\infty; +\infty)$, область значень $E: \{-1; 0; 1\}$. Графік на рис.14.

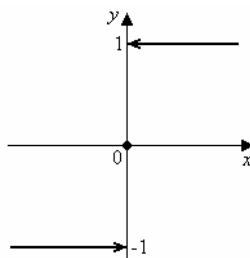


Рис.14

2. Функція $y = [x]$ (цiла частина x).

Часто цю функцію позначають $y = E(x)$ — „ант’є ікс”.

Визначається вона так: кожному дійсному числу x ставиться у відповідність найбільше ціле число, що не перевищує x . Наприклад,

$[0,5] = 0$; $[-2,3] = -3$; $[4] = 4$. При $x \in [n; n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел) графіком буде пряма $y = n$, причому лівий її

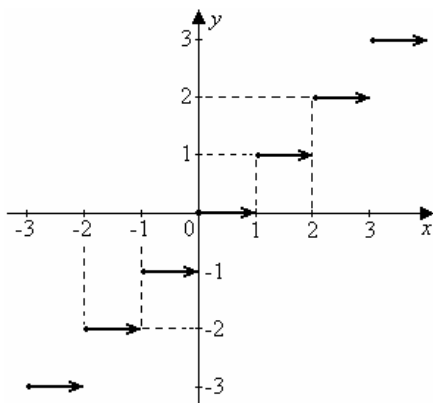


Рис.15

кінець належить графіку, а правий — ні (рис.15).

3. Функція Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне число;} \\ 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне число.} \end{cases}$

Кожному раціональному числу ставиться у відповідність число 1, а іраціональному — 0. Ця функція визначена на множині $\mathbb{R}$.

Графік зобразити неможливо, оскільки він складається з точок прямої $y = 1$, що мають абсцисами раціональні числа, і з точок прямої $y = 0$, в яких абсциси — іраціональні числа.

4. Гіперболічні функції, основні співвідношення.

Означення. Гіперболічним синусом, косинусом і тангенсом називаються функції, що задаються співвідношеннями:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(число e – ірраціональне, $e = 2,718\dots$).

Зауважимо, що $\operatorname{sh} 0 = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$; $\operatorname{sh} x$ і $\operatorname{th} x$ – непарні функції, а $\operatorname{ch} x$ – парна.

Наприклад, $\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x.$

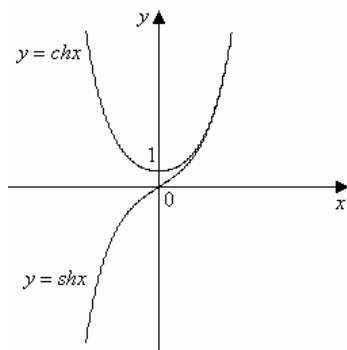


Рис.16

Графіки цих функцій одержимо з означення:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}; \\ \operatorname{ch} x &= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned} \quad (\text{рис.16}).$$

Зауваження. Графік функції

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

називають *ланцюговою*

лінією. Таку форму приймає гнучка однорідна та нерозтяжна тяжка нить (трос), кінці якої закріплені в двох точках (при $a = 1$ це буде графік $y = \operatorname{ch} x$).

Наведемо основні формули зв'язку цих функцій друг з другом:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x;$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y; \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x; \quad 1 + \operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x; \quad \operatorname{ch} 2x - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 x; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

III. Завдання для домашньої роботи.

Рівень А

Задача 1. Дано $f(x) = 3 + [x]$, де $[x]$ – функція „ант’є” (див. примітку). Знайти $f(-2,5); f(3); f(0,5)$.

Розв’язання.

$$[-2,5] = -3; \quad f(-2,5) = 3 - 3 = 0;$$

$$[3] = 3; \quad f(3) = 3 + 3 = 6;$$

$$[0,5] = 0; \quad f(0,5) = 3 + 0 = 3.$$

Задача 2. Дано $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Знайти всі корені рівняння $f(x) = f(-1)$.

Відповідь. $x_1 = -1, x_2 = 3$.

Задача 3. Знайти область визначення функцій:

$$\text{а) } y = 2^{\frac{1}{x-1}}; \quad \text{б) } y = \lg(5 - 2x) + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}.$$

Відповідь. а) $D : (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $D : (-\infty; 2) \cup (2; \frac{5}{2})$.

Задача 4. Чи є тотожними функції $f(x) = \sqrt{x^2}$ і $\varphi(x) = |x|$? Побудувати їх графіки.

Розв’язання. Области визначення обох функцій співпадають: $-\infty < x < +\infty$. Крім того, $\sqrt{x^2} = |x|$, тому ці функції тотожні (рис.17).

Задача 5. Дослідити на парність функцій:

$$\text{а) } y = xe^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{б) } y = \cos 3x + x^4; \quad \text{в) } y = \frac{x-1}{x+1}.$$

Розв’язання.

а) Область визначення функції $D : (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ симетрична відносно

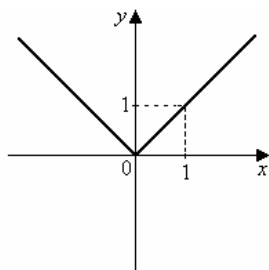


Рис.17

т. $x = 0$, $f(-x) = -xe^{\frac{1}{(-x)^2}} = -xe^{\frac{1}{x^2}} = -f(x)$, тому функція непарна;

б) Функція існує на $(-\infty; +\infty)$, $f(-x) = \cos(-3x) + (-x)^4 = \cos 3x + x^4 = f(x)$, тому функція парна;

в) У даному випадку область визначення функції $D : (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ не є симетричною відносно $x = 0$, тому вона не може бути парною або непарною.

Задача 6. В кулю радіуса R вписаний циліндр. Знайти функціональну залежність об'єму V від його висоти x . Вказати область визначення цієї функції і область визначеності відповідного аналітичного виразу (рис.18).

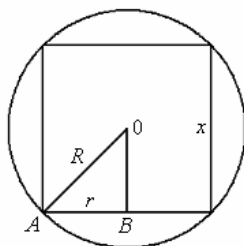


Рис.18

Відповідь. $V = \pi x \left(R^2 - \frac{x^2}{4} \right)$; область

визначення функції: $0 < x < 2R$, область визначеності виразу: $0 < x < +\infty$.

Задача 7. Довести, що функція $y = \cos^2 x$ має період $T = \pi$.

Розв'язання. За формулами зведення $\cos(x + \pi) = -\cos x$. Тоді $\cos^2(x + \pi) = \cos(x + \pi) \cdot \cos(x + \pi) = \cos^2 x$. Отже, $T = \pi$ – період даної функції.

Рівень Б

Задача 1. $f(x) = \{x\} = x - [x]$, де $\{x\}$ – дробова частина x , а $[x]$ – функція „ант’є” (див. примітку). Знайти значення $f(x)$ при $x = -2,1$; $x = 1,5$; $x = -5$.

Розв'язання.

$$f(-2,1) = -2,1 - [-2,1] = -2,1 - (-3) = 0,9;$$

$$f(1,5) = 1,5 - [1,5] = 1,5 - 1 = 0,5;$$

$$f(-5) = -5 - [-5] = -5 - (-5) = 0.$$

Задача 2. Скласти формулу переходу від шкали Цельсія (C) до шкали Фаренгейта (F), якщо відомо, що $0^{\circ}C$ відповідає $32^{\circ}F$ і $100^{\circ}C$ відповідає $212^{\circ}F$.

Розв'язання. Перехід здійснюється за лінійним законом

$$F = aC + b. \text{ Знаходимо } a \text{ і } b \text{ із системи: } \begin{cases} 32 = 0 + b; \\ 212 = 100a + b. \end{cases} \quad \text{Звідки}$$

$$a = 1,8^0; b = 32^0, \text{ отже } F = 1,8C + 32.$$

Задача 3. Знайти область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x + 7}}$.

Відповідь. $D : (-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$.

Задача 4. Чи є тотожними функції $f(x) = x - 2$ та

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} ? \text{ Побудувати їх графіки.}$$

Відповідь. Не тотожні, функції мають різні області визначення.

$D_1 : (-\infty; +\infty); D_2 : (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. Графіком функції $\varphi(x)$ є та ж сама пряма $y = x - 2$, але без точки $(-2; -4)$.

Задача 5. Дослідити на парність функції: а) $y = \frac{(1 + 3^x)^2}{3^x}$;

б) $y = \frac{2x^2}{x - 2}$.

Відповідь. а) функція парна; б) функція є ні парною, ні непарною.

Вказівка. Знайдіть області визначення функцій.

Задача 6. Продовжити функцію $y = \cos x, x \in [0; \pi]$ на відрізок $[-\pi; 0]$ парним і непарним способом. Побудувати графіки.

Розв'язання. При парному продовженні $f(-x) = f(x)$, тому $y = \cos x$ і на $[-\pi; 0]$. Отже, $y = \cos x$ на $[-\pi; \pi]$ – парна (рис.19).

При непарному продовженні $f(-x) = -f(x)$, тому

$$y = \begin{cases} -\cos x, & x \in [-\pi; 0]; \\ \cos x, & x \in [0; \pi] \end{cases} \quad (\text{рис.20}).$$

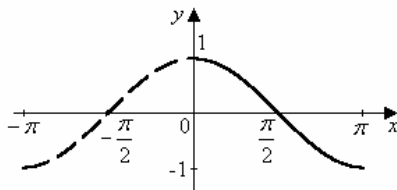


Рис.19

Задача 7. З моменту часу t_0 тіло рухається із сталим прискоренням a . Знайти залежність швидкості та пройденого шляху від часу руху.

Як пов'язані між собою шлях і швидкість в момент часу t ?

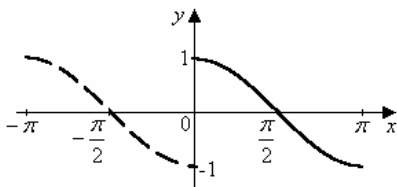


Рис.20

Відповідь. $V = a(t - t_0)$;

$$S = \frac{a(t - t_0)^2}{2}; S = \frac{V^2}{2a}.$$

Рівень В

Задача 1. Дано $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$. Знайти всі корені рівняння $f(x) = f(-2)$.

Розв'язання. $f(-2) = 10$, маємо рівняння $2x^3 - 5x^2 - 23x - 10 = 0$. З умови випливає, що одним з його коренів є число $x_1 = -2$. За теоремою Безу многочлен ділиться на різницю $x - (-2) = x + 2$ без залишку:

$$2x^3 - 5x^2 - 23x - 10 = (2x^2 - 9x - 5)(x + 2).$$

Отже, $(2x^2 - 9x - 5)(x + 2) = 0$. $2x^2 - 9x - 5 = 0$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 5$.

Відповідь. $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 5$.

Задача 2. Виразити залежність висоти H циліндра від його радіуса R , якщо відома площа S повної поверхні циліндра.

Відповідь. $H = \frac{S}{2\pi R} - R$.

Задача 3. Знайти область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$.

Розв'язання. $D: |x| - x > 0$. Якщо $x > 0$, то $|x| - x = x - x = 0$.

При $x < 0$ маємо $|x| - x = -x - x = -2x > 0$.

Відповідь. $D: (-\infty; 0)$.

Задача 4. Дослідити на парність функції: а) $y = \lg \frac{1+x}{1-x}$;

б) $y = \frac{\sin x}{x-1}$.

Розв'язання.

а) $f(-x) = \lg \frac{1-x}{1+x} = -\lg \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$. Область визначення функції $(-1;1)$ симетрична відносно точки $x = 0$, отже, дана функція непарна.

б) Функція $y = \frac{\sin x}{x-1}$ є ні парною, ні непарною, тому що область визначення $D: (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$ не симетрична відносно точки $x = 0$.

Задача 5. Функцію $f(x) = x^2$, $x \in [0;1]$ продовжити на відрізок $[-1;0]$ так, щоб на відрізку $[-1;1]$ одержана функція $f_1(x)$ була: а) парною; б) непарною. Побудувати графіки.

Розв'язання.

а) Функція буде парною на $[-1;1]$, якщо $f_1(-x) = f_1(x)$, тому на $[-1;0]$ треба покласти $f_1(x) = f(x) = x^2$ (рис.21).

б) Функція буде непарною на $[-1;1]$, якщо $f_1(-x) = -f_1(x)$, тому на $[-1;0]$ треба покласти $f_1(x) = -f(x) = -x^2$ (рис.22).

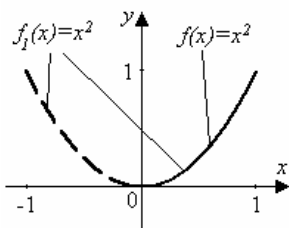


Рис.21

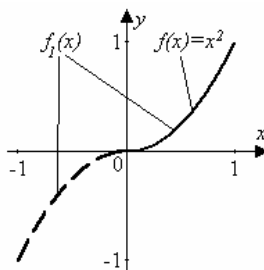


Рис.22

Задача 6. Знайти основний період функції $y = 3\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

Відповідь. 6π .

Вказівка. Скористатись тим, що основний період функції $y = \operatorname{tg} \omega x$ є число $T = \frac{\pi}{\omega}$ (довести).

Практичне заняття № 2

Зміст: неявно задані функції. Обернені, складені та параметрично задані функції.

I. Основні теоретичні відомості

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y , то говорять, що функція задана у явній формі, або є *явною*.

Під *неявним заданням* функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x; y) = 0$, не розв'язаного відносно залежної змінної.

Якщо рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як однозначну функцію від x , то y є *неявною функцією від x* . *)¹

Ці терміни характеризують не природу функції, а аналітичний спосіб її задання.

Якщо в функціональній залежності $y = f(x)$ розглядати y як незалежну змінну, тоді x буде функцією від y (заданою неявно).

Припустимо, що в даному рівнянні можна перейти до явного виразу $x = \varphi(y)$. При умові однозначності функцію $x = \varphi(y)$ називають *оберненою* по відношенню до функції $y = f(x)$.

В одній системі координат xOy графіки функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ зображуються однією лінією. При стандартних позначеннях (x – аргумент, y – функція) одержимо функцію $y = \varphi(x)$, яка також є оберненою до даної функції $y = f(x)$. Їх графіки симетричні відносно бісектриси I і III координатних кутів.

*) 1 Рівняння $F(x, y) = 0$ не завжди визначає y як функцію від x . Питання про існування неявної функції, що задана рівнянням $F(x, y) = 0$, залишимо до наступних розділів.

Нехай функція $y = f(u)$, де аргумент u , в свою чергу, є функцією від x . В результаті отримаємо функціональну залежність y від x , яку називають *складеною функцією від x* , або функцією від функції і позначають: $y = f[\varphi(x)]$.

Змінну u називають *проміжним аргументом*.

Складену функцію можна утворити за допомогою суперпозиції не тільки двох, а й більшої кількості функцій.

Задання функціональної залежності між y та x у вигляді двох функцій змінної t :
$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases}$$
 називають *параметричним заданням функції*, при цьому допоміжну змінну t називають *параметром*.

II. Завдання для аудиторної роботи

Рівень А

Задача 1. Записати в явному вигляді функцію y , що задана неявним рівнянням:

а) $2x - 3y + 1 = 0$; б) $x^2 - y^2 = 4$; в) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Вказати область її визначення.

Розв'язання.

а) Рівняння $2x - 3y + 1 = 0$ задає функцію $y = \frac{2x+1}{3}$, визначену на $(-\infty; +\infty)$.

б) Рівняння $y^2 = x^2 - 4$ задає дві функції $y = -\sqrt{x^2 - 4}$ та $y = +\sqrt{x^2 - 4}$. Ці функції являють собою дві однозначні вітки даної двозначної функції з областю визначення $|x| \geq 2$.

в) Рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не визначає жодної функції, оскільки при будь-яких значеннях x і y сума $x^2 + y^2 + 1 > 0$.

Задача 2. Знайти функцію, обернену до даної та побудувати її графік:

а) $y = 3x - 1$; б) $y = x^2$.

Розв'язання.

а) З рівняння $y = 3x - 1$ знаходимо обернену функцію $x = \frac{y+1}{3}$.

Замінімо в цій рівності x на y , а y на x , отримаємо обернену функцію у вигляді $y = \frac{x+1}{3}$.

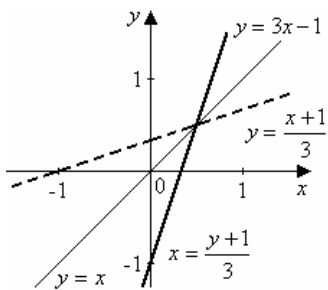


Рис.23

Графіки цих функцій зображено на рис.23.

б) З рівняння $y = x^2$ знайдемо $x = \pm\sqrt{y}$, а після перейменування змінних $y = \pm\sqrt{x}$. Отже, для даної функції існують дві однозначні обернені функції $y = -\sqrt{x}$ та $y = +\sqrt{x}$ (рис.24, 25).

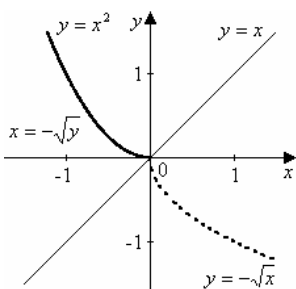


Рис.24

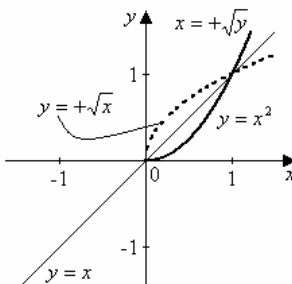


Рис. 25

Задача 3. Задану функцію записати у вигляді складових основних елементарних функцій:

а) $y = \sin(2x - 5)$; б) $y = 2^{\arccos \sqrt{x}}$; в) $y = \ln^3 \lg x/2$.

Розв'язання.

а) Функція $y = \sin(2x - 5)$ – складена тригонометрична являє собою суперпозицію функцій $y = \sin u$, $u = 2x - 5$.

б) Функція $y = 2^{\arccos \sqrt{x}}$ – складена показникова є суперпозицією функцій $y = 2^u$, $u = \arccos v$, $v = \sqrt{x}$.

в) Складену степеневу функцію $y = \ln^3 \operatorname{tg} x/2$ можна записати у вигляді суперпозиції функцій: $y = u^3$, $u = \ln v$, $v = \operatorname{tg} t$, $t = x/2$.

Задача 4. Складену функцію, що задана ланцюгом рівностей, записати у вигляді однієї рівності: а) $y = u^{10}$, $x^2 + 1$; б) $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \operatorname{ctg} x$.

Відповідь. а) $y = (x^2 + 1)^{10}$; б) $y = e^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Задача 5. Дано: $f(x) = x^3 - x$, $\varphi(x) = \sin 2x$. Знайти:

а) $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$; б) $\varphi(f(1))$.

Розв'язання.

а) $\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$; б) $f(1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \varphi(0) = \sin 0 = 0$.

Відповідь. а) $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = -\frac{3}{8}$; б) $\varphi(f(1)) = 0$.

Задача 6. Записати рівняння даної лінії в явному ($y = f(x)$) або неявному ($F(x; y) = 0$) вигляді:

а) $\begin{cases} x = \frac{t}{2}; \\ y = t^2; \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty)$; б) $\begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 5 \sin t; \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$.

Розв'язання.

а) $\begin{cases} x = \frac{t}{2}; \\ y = t^2 \end{cases}$ З першого рівняння виключаємо $t = 2x$ і підставляємо

в друге: $y = 4x^2$ – парабола.

б) $\begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 5 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x}{2}; \\ \sin t = \frac{y}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ – еліпс.

Задача 7. Чи лежить точка $(2; \sqrt{3})$ на лінії $\begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 2 \sin t \end{cases}$?

Розв'язання. Підставимо координати точки у рівняння лінії:

$$\begin{cases} 2 = 2 \cos t; \\ \sqrt{3} = 2 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = 1; \\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1 + \frac{3}{4} \neq 1.$$

Відповідь. Точка не лежить на заданій лінії.

Рівень Б

Задача 1. Записати в явному вигляді функцію y , яка задана рівнянням $y^2 \ln x - x = 0$.

Розв'язання. Рівняння $y^2 \ln x - x = 0$ неявно задає дві функції $y = -\sqrt{\frac{x}{\ln x}}$ та $y = +\sqrt{\frac{x}{\ln x}}$. Обидві функції визначені для значень:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \ln x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (1; +\infty) \text{ — область їх визначення.}$$

Задача 2. Знайти функцію, обернену до даної, та побудувати її графік: $y = \arcsin \frac{x}{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $y = \arcsin \frac{x}{3}$ відносно x :

$\frac{x}{3} = \sin y \Rightarrow x = 3 \sin y$ — обернена функція. Після перейменування змінних обернена функція запишеться так: $y = 3 \sin x$. Її область визначення $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, область значень $-3 \leq y \leq 3$. (Для прямої функції $y = \arcsin \frac{x}{3}$ область визначення $-3 \leq x \leq 3$, область значень $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$).

Графіки зображено на рис.26.

Задача 3. Складені функції записати у вигляді складових основних елементарних функцій:

а) $y = 5^{\sqrt{x^3 - 2x}}$; б) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(2x - 1)}$;

в) $y = \ln \sin \sqrt[3]{e^{1-x}}$.

Відповідь.

а) $y = 5^{\sqrt{x^3 - 2x}}$ – складена

показникова функція;

$y = 5^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = x^3 - 2x$.

б) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(2x - 1)}$ – складена степенева функція;

$y = u^{-2}$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = 2x - 1$.

в) $y = \ln \sin \sqrt[3]{e^{1-x}}$ – складена логарифмічна функція;

$y = \ln u$, $u = \sin v$, $v = \sqrt[3]{z}$, $z = e^t$, $t = 1 - x$.

Задача 4. Дано: $y = \sin x$, $v = \ln y$, $u = \sqrt{1 + v^2}$. Виразити u як функцію x .

Відповідь. $u = \sqrt{1 + \ln^2 \sin x}$.

Задача 5. $f(x) = x^3 - x$; $\varphi(x) = \sin 2x$. Знайти: а) $f(\varphi(x))$; б) $f(f(x))$.

Розв'язання.

а) $f(\varphi(x)) = f(\sin 2x) = \sin^3 2x - \sin 2x = -\sin 2x \cdot \cos^2 2x$;

б) $f(f(x)) = f(x^3 - x) = (x^3 - x)^3 - (x^3 - x) = x^9 - 3x^7 + 3x^5 - 2x^3 + x$.

Задача 6. Задані рівняння руху точки

$$\begin{cases} x = 2t - 4t^2; \\ y = t - 2t^2; \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Визначити траєкторію точки, виключивши з рівнянь параметр t .

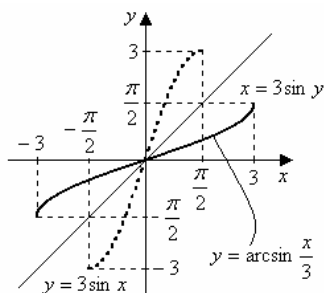


Рис.26

Розв'язання. $\begin{cases} x = 2t - 4t^2; \\ y = t - 2t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 4t^2; \\ 2y = 2t - 4t^2 \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0 - \text{пряма.}$

Задача 7. Яку лінію визначають рівняння

$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos t; \\ y = -3 + 5 \sin t; \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi] \quad ?$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos t; \\ y = -3 + 5 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x-2}{5}; \\ \sin t = \frac{y+3}{5} \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 - \text{коло}$$

з центром $C(2; -3)$, радіусом $R = 5$.

Задача 8. Скласти параметричні рівняння параболи $y^2 = 2px$, якщо параметр t є ордината y .

Розв'язання. Поточна точка $M(x; y)$ належить параболі

$$y^2 = 2px \Rightarrow t^2 = 2px \Rightarrow x = \frac{t^2}{2p} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p}; \\ y = t \end{cases} - \text{шукані параметричні}$$

рівняння даної параболи.

Рівень В

Задача 1. Записати в явному вигляді функцію y , яка задана рівнянням:

$$\text{а) } x^2 - \arccos y = \pi; \quad \text{б) } 2^{xy} = 5.$$

Знайти область її визначення.

Розв'язання.

а) Дане рівняння запишемо у вигляді $\arccos y = x^2 - \pi \Rightarrow y = \cos(x^2 - \pi)$. Область визначення: $0 \leq x^2 - \pi \leq \pi \Rightarrow \pi \leq x^2 \leq 2\pi \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{\pi} \leq |x| \leq \sqrt{2\pi}$.

б) $2^{xy} = 5 \Rightarrow xy = \log_2 5 \Rightarrow y = \frac{\log_2 5}{x}$. Область визначення:

$$x \neq 0.$$

Задача 2. Знайти функцію, обернену до даної, та побудувати її графік:

а) $y = \frac{1}{x^2}$; б) $y = \log_2 \frac{x}{2}$.

Розв'язання.

а) $y = \frac{1}{x^2} \left(\begin{matrix} x \neq 0; \\ y > 0 \end{matrix} \right) \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{y}}$. Після перейменування змінних

випишемо окремо дві обернені функції: $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ та $y = +\frac{1}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$).

Графіки зображено на рис.27.

б) $y = \log_2 \frac{x}{2} \ (x > 0) \Rightarrow x = 2 \cdot 2^y$. Після перейменування змін-

них одержимо обернену функцію у вигляді $y = 2 \cdot 2^x \ (-\infty < x < +\infty)$.

Графіки на рис.28.

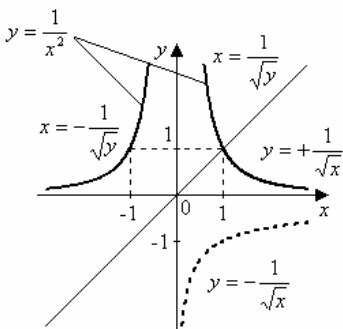


Рис.27

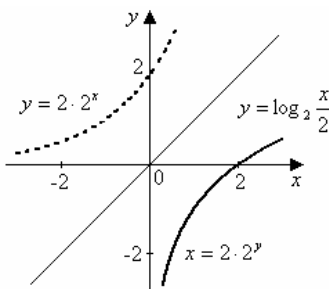


Рис. 28

Задача 3. Задану складену функцію записати у вигляді складових основних елементарних функцій:

а) $y = e^{-\cos^3 5x}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\lg^2 \lg \frac{x}{3}}}$.

Відповідь.

а) $y = e^{-\cos^3 5x}$ – складена показникова функція; $y = e^{-u}$,
 $u = v^3$, $v = \cos t$, $t = 5x$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\lg^2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}}}$ – складена степенева функція; $y = u^{-\frac{2}{3}}$,

$u = \lg v$, $v = \operatorname{tg} t$, $t = \frac{x}{3}$.

Задача 4. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$. Якою є область визначення функції $f(x^2)$?

Розв'язання. Функція $f(x^2)$ – складена; проміжний параметр $u = x^2$, де $0 \leq u \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ – область визначення функції $y = f(x^2)$.

Задача 5. Записати рівняння лінії у вигляді $F(x; y) = 0$:

$$\begin{cases} x = 10 \cos^2 t; \\ y = 5 \sin 2t; \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Розв'язання. Виключаємо параметр t :

$$\begin{cases} x = 10 \cos^2 t; \\ y = 10 \sin t \cdot \cos t \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{y}{x}.$$

З тотожності

$$1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{10}{x} \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x = 0 \text{ – це рівняння кола.}$$

За умовою $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тому дані параметричні рівняння визначають

праву половину кола $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

Задача 6. Скласти параметричні рівняння траєкторії руху тіла, кинутого під кутом α до горизонту з початковою швидкістю V_0 (рис.29).

Розв'язання. В момент часу t поточна точка M має координати $(x; y)$. За умовою задачі:

$$\begin{cases} x = V_0 t \cdot \cos \alpha; \\ y = V_0 t \cdot \sin t - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \text{ — параметричні}$$

рівняння траєкторії руху.

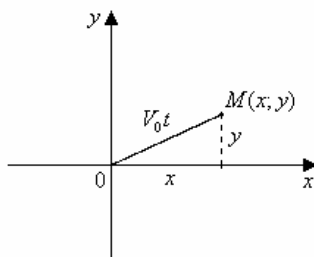


Рис.29

III. Завдання для домашньої роботи

Рівень А

Задача 1. Записати в явному вигляді функцію y , що задана рівнянням:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $3^{xy} = 4$.

Відповідь.

а) Рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ задає дві функції $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ та $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, області визначення яких $|x| \leq a$.

б) $3^{xy} = 4 \Rightarrow y = \frac{\log_3 4}{x}; D: x \neq 0$.

Задача 2. Знайти функцію, обернену до даної: а) $y = \frac{x-1}{2-3x}$;

б) $y = 3^{x-1}$.

Розв'язання.

а) $y = \frac{x-1}{2-3x} \Rightarrow (2-3x)y = x-1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{3y+1}$.

Після перейменування змінних маємо обернену функцію

$y = \frac{2x+1}{3x+1}$ з областю визначення: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

б) Рівняння $y = 3^{x-1}$ прологарифмуємо: $\log_3 y = x - 1 \Rightarrow x = 1 + \log_3 y$, а після перейменування змінних обернена функція набуде вигляду:

$$y = 1 + \log_3 x, x \in (0; +\infty).$$

Задача 3. Складену функцію подати за допомогою складових основних елементарних функцій: а) $y = \ln \cos 1/x$; б) $y = \operatorname{ctg}^2 \sqrt{x}$.

Відповідь.

а) $y = \ln \cos 1/x$ – складена логарифмічна функція; $y = \ln u$, $u = \cos v$, $v = 1/x$.

б) $y = \operatorname{ctg}^2 \sqrt{x}$ – складена степенева функція; $y = u^2$, $u = \operatorname{ctg} v$, $v = \sqrt{x}$.

Задача 4. Дано: $y = u^2$, $u = \sqrt[3]{v+1}$, $v = 2^t$. Виразити y як функцію від t .

Відповідь. $y = \sqrt[3]{(2^t + 1)^2}$.

Задача 5. Записати рівняння даної лінії у вигляді $F(x; y) = 0$:

$$\text{а) } \begin{cases} x = 2t - 1; \\ y = 2 - t; \end{cases} t \in (-\infty; +\infty); \text{ б) } \begin{cases} x = 2 \cos t + 1; \\ y = 2 \sin t - 3; \end{cases} t \in [0; \pi].$$

Відповідь.

а) $x + 2y - 3 = 0$ – пряма.

б) Верхня половина кола $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ з центром в точці $C(1; -3)$ і радіусом $R = 2$.

Задача 6. Чи належить точка $(2; \sqrt{5})$ до кола $\begin{cases} x = 3 \cos t; \\ y = 3 \sin t \end{cases}$?

Розв'язання. Підставимо координати точки у рівняння:

$$\begin{cases} 2 = 3 \cos t; \\ \sqrt{5} = 3 \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{2}{3}; \\ \sin t = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Rightarrow \sin^2 t + \cos^2 t = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1.$$

Відповідь. Задана точка належить до кола.

Рівень Б

Задача 1. Перейти до явного способу задання функції y , що задається рівнянням:

а) $10^x + 10^y = 10$; б) $\lg x + \lg(y+1) = 2$.

Знайти її область визначення.

Розв'язання.

а) $10^x + 10^y = 10 \Rightarrow 10^y = 10 - 10^x \Rightarrow y = \lg(10 - 10^x)$ при умові, що $10 - 10^x > 0 \Rightarrow 10^x < 10 \Rightarrow -\infty < x < 1$.

Відповідь.

а) $y = \lg(10 - 10^x)$; $D: -\infty < x < 1$.

б) $\lg x + \lg(y+1) = 2 \Rightarrow \lg[x \cdot (y+1)] = 2 \Rightarrow x(y+1) = 100 \Rightarrow y = \frac{100}{x} - 1$; $D: x > 0$.

Задача 2. Знайти функцію, обернену до даної: а) $y = x^3$; б) $y = 3^{x/2}$. Побудувати графіки прямої та оберненої функцій.

Розв'язання.

а) $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$. Після перейменування змінних одержимо обернену функцію $y = \sqrt[3]{x}$ ($-\infty < x < +\infty$). Графіки – на рис.30.

б) $y = 3^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \log_3 y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \log_3 y$. Після перейменування змінних одержимо обернену функцію $y = 2 \log_3 x$, область визначення $x > 0$ (рис.31).

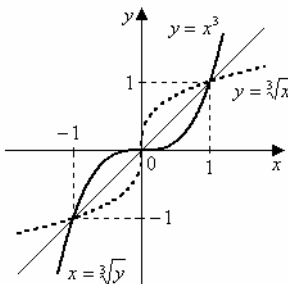


Рис. 30

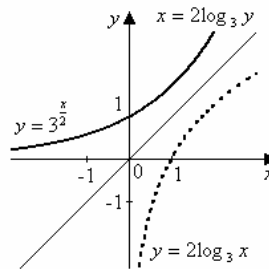


Рис. 31

Задача 3. Записати задану функцію у вигляді складових основних елементарних функцій: а) $y = \arccos^2 e^{\sqrt{x}}$; б) $y = 2^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

Відповідь.

а) $y = u^2$, $u = \arccos v$, $v = e^t$;

б) $y = 2^u$, $u = v^{-2}$, $v = \sin t$, $t = 3x$.

Задача 4. Дано: $f(x) = 2^x + 1$, $\varphi(x) = \arcsin x$. Чи існують суперпозиції:

а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(f(x))$?

Відповідь.

а) $f(\varphi(x)) = 2^{\arcsin x} + 1$ існує для $x \in [-1; +1]$.

б) $\varphi(f(x)) = \arcsin(2^x + 1)$ не існує, оскільки вираз $(2^x + 1)$ більше 1.

Задача 5. Записати рівняння лінії $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos t; \\ y = \sin t; \end{cases} t \in [0; 2\pi]$ у вигляді $F(x; y) = 0$.

Відповідь. $(x - 1)^2 + 4y^2 = 4$ — еліпс з центром в точці $C(1; 0)$.

Задача 6. Знайти значення параметра t , що відповідає координатам точки $(0; 0)$ на лінії: $\begin{cases} x = t^2 - 1; \\ y = t^3 - t^2. \end{cases}$

Розв'язання.

$$\begin{cases} 0 = t^2 - 1; \\ 0 = t^3 - t^2 \end{cases} \Rightarrow t^3 - t = t^2 - 1 \Rightarrow (t^3 + 1) - (t + 1) \cdot t = 0 \Rightarrow (t + 1)(t - 1)^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t_1 = -1; t_2 = 1.$$

Рівень В

Задача 1. Записати в явному вигляді функцію y , що задана рівнянням $x + |y| = 2y$. Знайти її область визначення.

Розв'язання.

1. Для $y < 0 \Rightarrow x - y = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{3} \ (-\infty < x < 0)$.

2. Для $y \geq 0 \Rightarrow x + y = 2y \Rightarrow y = x \ (0 \leq x \leq +\infty)$.

Відповідь. $y = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{якщо } -\infty < x < 0; \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq +\infty. \end{cases}$

Задача 2. Знайти функцію, обернену до даної:

а) $y = \cos^2 x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $y = \begin{cases} x, & x \leq 0; \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

Вказати область її визначення.

Розв'язання.

а) $y = \cos^2 x \Rightarrow y = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Rightarrow 2y = 1 + \cos 2x \Rightarrow x =$

$= \frac{1}{2} \arccos(2y - 1)$ – обернена функція. Після перейменування змінних обернена функція матиме вигляд: $y = 1/2 \arccos(2x - 1)$. Область визначення: $-1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$.

б) Відповідь. $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0; \\ +\sqrt{x}, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}$ – обернена функція, об-

ласть визначення $(-\infty; +\infty)$.

Задача 3. Дано: $f(x) = \lg x, \varphi(x) = -4 + x - x^2$. Чи існують суперпозиції:

а) $f(\varphi(x))$; б) $\varphi(f(x))$?

Відповідь.

а) $f(\varphi(x)) = \lg(-4 + x - x^2)$ – не існує, тому що вираз $(-4 + x - x^2) < 0$ при $\forall x$.

б) $\varphi(f(x)) = -4 + \lg x - \lg^2 x$ – існує при $x > 0$.

Задача 4. Задані рівняння руху точки $\begin{cases} x = 3t; \\ y = 6t - t^2; \end{cases} t \in (-\infty; +\infty)$.

Визначити траєкторію точки, виключивши з рівнянь параметр t .

Відповідь. $x^2 - 18x + 9y = 0$ – парабола.

Задача 5. Знайти значення параметра t , що відповідає заданим координатам точки $(-9;0)$ на лінії $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t); \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t); \end{cases} t \in [0; 2\pi]$.

Відповідь. $t = \pi$.

Практичне заняття № 3

Зміст: Правила граничного переходу. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Невизначеності та їх розкриття.

I. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Функція, що задана на множині натуральних чисел і приймає дійсні значення, називається *функцією цілочислового аргументу*, або *числовою послідовністю*, і позначається $x_n = f(n)$, $n \in N$.

Числову послідовність із загальним членом x_n позначають $\{x_n\}$.

Числова послідовність вважається заданою, якщо відома формула її загального члена, або декілька перших членів.

Для функцій неперервного аргументу має місце теорема.

Теорема. Якщо при деякому спрямуванні x ($x \rightarrow x_0$ або $x \rightarrow \infty$) $\exists \lim f(x) = A$ і $\exists \lim g(x) = B$, то

1) $\exists \lim (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2) $\exists \lim (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;

3) $\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

Ця теорема залишається в силі і для будь-якої скінченної множини доданків і множників, а також для функцій цілочислового аргументу.

Означення 2. Функція називається *нескінченно малою*, якщо $\lim f(x) = 0$, і *нескінченно великою*, якщо $\lim f(x) = \infty$.

Функція, обернена до нескінченно малої, є нескінченно великою, і навпаки.

Відношення двох нескінченно малих і нескінченно великих функцій, різниця двох нескінченно великих функцій представляють собою невизначеності. Умовно їх позначають: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$.

Для многочлена $P(x)$ маємо: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$.

Деякі поради до розкриття невизначеностей

Таблиця 1

№	Невизначеність	Ситуація	Порада
1	$\frac{\infty}{\infty}$	Відношення двох многочленів, $x \rightarrow \pm\infty$.	Чисельник і знаменник розділити на вищий степінь x , що стоїть в знаменнику, в результаті отримаємо : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} =$ $= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$
2	$\frac{\infty}{\infty}$	Дріб ірраціональний, $x \rightarrow \pm\infty$.	Чисельник і знаменник розділити на вищий степінь x , що стоїть в знаменнику.
3	$\frac{0}{0}$	Відношення двох многочленів, $x \rightarrow x_0$.	Многочлени розкласти на множники і скоротити на $(x - x_0)$.
4	$\frac{0}{0}$	В чисельнику або знаменнику є квадратні або кубічні ірраціональності, $x \rightarrow x_0$.	Чисельник і знаменник дробу помножити відповідно на спряжений вираз або на неповний квадрат суми або різниці.

Продовж. табл. 1

№	Невизначеність	Ситуація	Порада
5	$\infty - \infty$	Різниця квадратних $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, кубічних $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ коренів, $x \rightarrow \infty$.	Діяти аналогічно пораді № 4.
6	$\infty - \infty$	Різниця двох дробів, $x \rightarrow x_0$.	Звести дробы до спільного знаменника.
7	$\infty - \infty$	Алгебраїчними перетвореннями звести до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.	

II. Завдання для аудиторної роботи

Рівень А

Задача 1. Обчислити границі числових послідовностей:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 3}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 3n^2 - n + 4}{5n^2 - 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Розв'язання.

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 1,} \\ \text{табл. 1} \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 3n^2 - n + 4}{5n^2 - 1} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 1, табл. 1,} \\ n > m \end{array} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n - 3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}}{5 - \frac{1}{n^2}} = \infty. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = [\infty - \infty] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 5,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Відповідь. а) $\frac{2}{3}$; б) ∞ ; в) 0.

Задача 2. Обчислити границі функцій, вказавши тип невизначеності:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 - 5}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right); \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 + x - x^2}{3x^2 - 11x - 20}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) Знаходимо } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 - 5}. \text{ Маємо невизначеність } \left[\frac{\infty}{\infty} \right]. \text{ Ско-}$$

$$\text{ристаємось порадою 1, табл.1: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{3x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 - \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{б) Розглянемо } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right).$$

Границя першого доданка

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 1, табл.1,} \\ n > m \end{array} \right| = \infty.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) &= [\infty - \infty] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 6,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 1, табл.1,} \\ n < m \end{array} \right| = 0. \end{aligned}$$

$$\text{в) Дано } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}.$$

$$\begin{aligned} & \text{Границя знаменника } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3)} = \frac{9}{1} = 9. \end{aligned}$$

г) Знаходимо $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3}$. Границя знаменника $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^3) = 0$, тому теоремою про границю частки скористатись не можемо. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Скористаємось пороною 3, табл. 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = -1.$$

Для розкладу квадратного тричлена на множники скористалися формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені тричлена.

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 + x - x^2}{3x^2 - 11x - 20} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \frac{\text{порада 3,}}{\text{табл.1}} \right| = -\frac{9}{19}.$$

Відповідь. а) $\frac{1}{3}$; б) 0; в) 9; г) -1; д) $-\frac{9}{19}$.

Рівень Б

Задача 1. Обчислити границі числових послідовностей:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n \right)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 + 1} + n \right)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 1}} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1 + 2n\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^6 + 1}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{порада 2,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^6}}} = \frac{2 + 2}{1} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2+1)}{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot (n+3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)}{(n+2) \cdot (n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0. \end{aligned}$$

Вказівка: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{чисельник - сума арифме-} \\ \text{тичної прогресії} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) 4; б) 0; в) $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Обчислити границі функцій:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right). \end{aligned}$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 1,} \\ \text{табл.1, } n < m \end{array} \right| = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1;$$

Вказівка. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \cdot \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \cdot \frac{1}{x} = 0$ як добуток обмеженої функції на нескінченно малу.

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 3,} \\ \text{табл. 1} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + x - 1}{x^2(x-1) - (x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{(x-1)(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 1} = \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= [\infty - \infty] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 6,} \\ \text{табл. 1} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{1 - x^3} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + x + 1} = -1. \end{aligned}$$

Відповідь. а) 0; б) 1; в) ∞ ; г) -1.

Рівень В

Задача 1. Знайти границю числової послідовності:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right); \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}).$$

Розв'язання.

$$\text{а) При знаходженні } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) \text{ ми не}$$

можемо скористатись теоремою про границю суми, оскільки при $n \rightarrow \infty$ необмежено зростає кількість доданків у заданій сумі. Запишемо всі дробі у вигляді:

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}) = [\infty - \infty] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 5,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 2,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2. Знайти границю функції:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x); \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Розв'язання.

а) Для знаходження $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ розглянемо два випадки:

$$1 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) = [\infty - \infty] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 5,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 + 1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 2,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2};$$

$$2 \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\infty, \text{ оскільки вираз } (\sqrt{x^2 + 1} - x) \text{ при}$$

$x \rightarrow -\infty$ є нескінченно великою функцією і прямує до $+\infty$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{m-1})}{(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})} = \frac{m}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 3,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)}{(2x-1)(3x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 2x + 1}{3x - 1} = 6. \end{aligned}$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{заміна } x = t^{m \cdot n}, \\ \text{при } x \rightarrow 1, t \rightarrow 1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t^n - 1}{t^m - 1} = \frac{n}{m}.$$

Відповідь. а) $1/2$ при $x \rightarrow +\infty$; $-\infty$ при $x \rightarrow -\infty$; б) m/n ; в) б; г) n/m .

III. Завдання для домашньої роботи

Рівень А

Задача 1. Знайти границі числових послідовностей:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0,001n^4 - 100n^3 + 1}.$$

Відповідь. а) $\frac{1}{2}$; б) ∞ ; в) 0 .

Задача 2. Знайти границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 5}{5x^4 + 2x^2 - x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}.$$

Відповідь. а) 0 ; б) $-\frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{2}$.

Рівень Б

Задача 1. Знайти границі числових послідовностей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}; \text{ г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) 1 ; б) 3 ; в) 1 ; г) -1 .

Задача 2. Знайти границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^2}{1+x+3x^2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{x^2}{2x+1} \right); \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2+13x+20}{x^3+64}.$$

Відповідь. а) -1 ; б) $\frac{1}{4}$; в) $-\frac{1}{16}$.

Рівень В

Задача 1. Знайти границі числових послідовностей:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (\sqrt{9n^2+6} - 3n); \text{ б) } \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5n+1} - \sqrt[3]{2n+1}}{5n}.$$

Відповідь. а) 1 ; б) $1/5$.

Задача 2. Знайти границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x-x}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{4x^2-3} - \frac{2x^2}{4x+3} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}.$$

Відповідь. а) -1 ; б) $3/8$; в) $5/2$.

Практичне заняття № 4

Зміст: Границі ірраціональних функцій. Перша та друга важливі границі.

I. Основні теоретичні відомості

Перша важлива границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Вона розкриває невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Інші різновиди цієї границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

При обчисленні границь зручно використовувати більш загальні твердження, наприклад: якщо $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1$.

Друга важлива границя (4 форми):

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Ці дві границі розкривають невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$.

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e; 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Ці дві границі розкривають невизначеність типу $[1^\infty]$.

Мають місце і більш загальні твердження, наприклад:

$$\text{якщо } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1;$$

$$\text{якщо } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \text{ то } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e.$$

Також має місце рівність $\lim u(x)^{v(x)} = [\lim u(x)]^{\lim v(x)}$, якщо

$\exists \lim u(x)$ та $\exists \lim v(x)$ ($x \rightarrow x_0$ або $x \rightarrow \infty$).

II. Завдання для аудиторної роботи

Рівень А

Задача 1. Знайти границі ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{3x^2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{2 - \sqrt{x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

Розв'язання.

а) Дана границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2}$ представляє невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Скористаємось породою 4, табл.1 та помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{3x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{3x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 4,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1-\sqrt{x-3})(1+\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x-3})(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1-x+3)(2+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x-3})(4-x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x-3}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

в) В даній границі $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Помножимо чисельник і знаменник на неповний квадрат суми для знаменника (порада 4, табл.1):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4) = 12. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $\frac{1}{6}$; б) 2; в) 12.

Задача 2. Знайти границі, скориставшись першою або другою важливою границею:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{5x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{\sin x}}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{x}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot 2x \cdot 5x}{5x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} 2x} \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{x}{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \cdot \sin x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 4x} = -2 \cdot \frac{2}{4} = -1. \end{aligned}$$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{5x} = [1^\infty]$. Скористаємось третьою формою другої важливої границі. Для цього представимо основу степеня у вигляді $1 + \frac{1}{f(x)}$, а в показнику виділяємо множник $f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-1}{2x+3} - 1 \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{2x+3} \right)^{5x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x+3}{-4}} \right)^{\frac{2x+3}{-4}} \right]^{\frac{-4}{2x+3} \cdot 5x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-20x}{2x+3}} = e^{-10}.\end{aligned}$$

д) В даній границі $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{\sin x}}$ маємо невизначеність $[1^\infty]$

при $x \rightarrow 0$. Для розкриття невизначеності підходить четверта форма другої важливої границі.

Представимо основу степеня у вигляді $1 + f(x)$, а в показнику

виділяємо множник $\frac{1}{f(x)}$ ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + (-4x) \right)^{\frac{1}{-4x}} \right]^{\frac{-4x}{1} \cdot \frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{\sin x}} = e^{-4}.$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{4x} - 1) \cdot 4}{4 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4e^x = 4.$$

В даному випадку для розкриття невизначеності скористались першою формою другої важливої границі.

Відповідь. а) $\frac{5}{2}$; б) $\sqrt{2}$; в) -1 ; г) e^{-10} ; д) e^{-4} ; е) 4 .

Рівень Б

Задача 1. Знайти границі ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{9+2x} - 5}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 4,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{9 - 3x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}) = -16.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{9+2x} - 5} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 4,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)(\sqrt{9+2x} + 5)}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)(\sqrt{9+2x} - 5)(\sqrt{9+2x} + 5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)(\sqrt{9+2x} + 5)}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)(2x-16)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} + 5}{2 \cdot (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{5}{12}.$$

Відповідь. а) -16 ; б) $\frac{5}{12}$.

Задача 2. Знайти границі, скориставшись першою або другою важливою границею:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x-3) \cdot \sin \frac{2}{3x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)[\ln(x+3) - \ln x]; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{4} \cdot \cos x \cdot \sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x-3) \cdot \sin \frac{2}{3x} &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3) \sin \frac{2}{3x} \cdot \frac{2}{3x}}{\frac{2}{3x}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{3x}}{\frac{2}{3x}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-3)}{3x} = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{заміна } t = x - \pi, \\ x \rightarrow \pi \Rightarrow t \rightarrow 0, \\ x = t + \pi \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t + 3\pi)}{\sin(2t + 2\pi)} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 3t}{\sin 2t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 3t}{3t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\sin 2t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t}{2t} = -\frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Зауваження. В пунктах а), б), в) ми скористалися першою важливою границею $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$, якщо $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) [\ln(x+3) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) \cdot \ln \frac{x+3}{x} = [\infty \cdot 0] = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+3}{x} \right)^{2x+1} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{2x+1} \right] = \\
 &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+3}{x} - 1 \right)^{2x+1} \right] = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x+1} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{застосуємо третю форму} \\ \text{другої важливої границі} \end{array} \right| = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x} \right)^{\frac{x}{3}} \right]^{\frac{3}{x} \cdot (2x+1)} = \\
 &= \ln e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(2x+1)}{x}} = \ln e^6 = 6.
 \end{aligned}$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{3}} = [1^{\infty}].$$

Застосуємо четверту форму другої важливої границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + (-2x))^{\frac{1}{-2x}} \right]^{-2x \cdot \frac{1}{x}} = e^{-2}.$$

Відповідь. а) 1/2; б) 2/3; в) -3/2; г) 6; д) e^2 .

Рівень В

Задача 1. Знайти границі ірраціональних функцій:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x} - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x} - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \left| \begin{array}{l} \text{порада 3,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{3x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{3x})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{3x})(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-2x)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{3x})(x-1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{7+x^3} - 2) + (2 - \sqrt{3+x^2})}{x-1} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{порада 3,} \\ \text{табл.1} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{7+x^3} - 2)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2} + 2\sqrt[3]{7+x^3} + 4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2} + 2\sqrt[3]{7+x^3} + 4)} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{3+x^2})(2 + \sqrt{3+x^2})}{(x-1)(2 + \sqrt{3+x^2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(x-1)(\sqrt[3]{(7+x^3)^2} + 2\sqrt[3]{7+x^3} + 4)} + \\ &+ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{(x-1)(2 + \sqrt{3+x^2})} = \frac{3}{12} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{4}$.

Задача 2. Знайти границі, скориставшись першою або другою важливою границею:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \operatorname{arctg} 2x}{4x - \arcsin x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \operatorname{arctg} 2x}{4x - \arcsin x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{\operatorname{arctg} 2x \cdot 2}{x \cdot 2}}{4 - \frac{\arcsin x}{x}} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \left. \begin{array}{l} \text{заміна } \frac{\pi}{2} - x = t, \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 0, \\ x = \frac{\pi}{2} - t \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Зауваження. В пунктах а) і б) ми скористалися першою важливою границею.

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \left. \begin{array}{l} \text{заміна } x - e = t, \\ x \rightarrow e \Rightarrow t \rightarrow 0, \\ x = t + e \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t + e) - \ln e}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}{\frac{t}{e} \cdot e} = \frac{1}{e}.$$

В цьому прикладі ми використали другу форму другої важливої границі.

$$\begin{aligned} \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 2^x \cdot \left(1 + \frac{\frac{x+1}{2}}{x-1} - 1 \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[2^x \cdot \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} \right)^x \right] = \begin{cases} 0 & \text{при } x \rightarrow -\infty; \\ +\infty & \text{при } x \rightarrow +\infty, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{оскільки } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} \right)^x &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2(x-1)}{3}} \right)^{\frac{2(x-1)}{3}} \right]^{\frac{3 \cdot x}{2(x-1)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x}{2(x-1)}} = e^{\frac{3}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty. \end{aligned}$$

Тут ми скористались третьою формою другої важливої границі.

$$\begin{aligned} \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (-2 \sin^2 \frac{x}{2}) \right)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + (-2 \sin^2 \frac{x}{2}) \right)^{\frac{1}{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}} \right]^{\frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{4}}{x^2 \cdot x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} x \right)} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Для розкриття цієї невизначеності підходить четверта форма другої важливої границі.

Відповідь. а) $5/3$; б) $1/2$; в) $1/e$; г) 0 при $x \rightarrow -\infty$; $+\infty$ при $x \rightarrow +\infty$; д) 1 .

III. Завдання для домашньої роботи

Рівень А

Задача 1. Знайти границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+6} - 2}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}.$$

$$\text{Відповідь. а) } -\frac{1}{56}; \text{ б) } 48; \text{ в) } -\frac{1}{3}.$$

Задача 2. Знайти границі, скориставшись першою або другою важливою границею:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 2x}{x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \cdot \arcsin x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\arcsin x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+2} \right)^{2x+1}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{5x}}.$$

$$\text{Відповідь. а) } 4; \text{ б) } -8; \text{ в) } 4; \text{ г) } e^{\frac{4}{3}}; \text{ д) } e^{-\frac{2}{5}}.$$

Рівень Б

Задача 1. Знайти границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt[3]{x-6} + 2}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x+1}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$\text{Відповідь. а) } 144; \text{ б) } 0; \text{ в) } 12/5.$$

Задача 2. Знайти границі, скориставшись першою або другою важливою границею:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 3x)}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{\sin x}}.$$

$$\text{Відповідь. а) } 1/9; \text{ б) } 1; \text{ в) } e^{-5/4}; \text{ г) } e^{-4}.$$

Рівень В

Задача 1. Знайти границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x} - 3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2}.$$

Відповідь. а) $-\frac{1}{2}$; б) 4. *Вказівка:* скористатись формулою

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Задача 2. Знайти границі, скориставшись першою або другою важливою границею:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{4x+1}}{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\pi - 4x)^2}{1 - \sin 2x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{e^{x^2} - e^4};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)^{\frac{x}{x-2}}.$$

Відповідь. а) $\frac{4}{\pi}$; б) 8; в) $\frac{1}{e^4}$; г) e^4 . *Вказівка:* заміна $x - 2 = t$.

Практичне заняття № 5

Зміст: Порівняння нескінченно малих функцій. Обчислення границь за допомогою основних еквівалентностей.

I. Основні теоретичні відомості

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі функції при $x \rightarrow x_0$ і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A.$$

Якщо $A \neq 0$, то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими функціями *одного порядку*.

Якщо $A = 1$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними* при $x \rightarrow x_0$ і записують $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Якщо $A = 0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою *вищого* порядку щодо $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Якщо $A = \infty$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою *нижчого* порядку щодо $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Теорема 1. Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо одну або обидві з них замінити на еквівалентні, тобто:

якщо $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$, $x \rightarrow x_0$; $\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$, $x \rightarrow x_0$

$$\text{і } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} = A.$$

Теорема 2. Сума скінченного числа нескінченно малих функцій різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Основні еквівалентності

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, тому $\sin x \sim x$, $x \rightarrow 0$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, тому $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \rightarrow 0$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, тому $\arcsin x \sim x$, $x \rightarrow 0$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, тому $\operatorname{arctg} x \sim x$, $x \rightarrow 0$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, тому $\ln(1+x) \sim x$, $x \rightarrow 0$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, тому $e^x - 1 \sim x$, $x \rightarrow 0$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$, тому $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$, $x \rightarrow 0$

П. Завдання для аудиторної роботи

Рівень А

Задача 1. Встановити, яка із вказаних функцій більш високого порядку малості при $x \rightarrow 0$:

а) $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = \sin 5x$; б) $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 5x} = \frac{1}{5}$, то функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – нескінченно малі одного порядку малості.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x \cdot \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cos x) = 0$, отже $\alpha(x) = x^2$ є нескінченно малою вищого порядку малості, ніж $\beta(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, таким чином $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – еквівалентні, тобто $\sin x \sim \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow 0$.

Задача 2. При $x \rightarrow 1$ функції $y = \frac{1-x}{1+x}$ і $y = 1 - \sqrt{x}$ нескінченно малі. Яка з них більш високого порядку малості ?

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} = \frac{2}{2} = 1.$$

Відповідь. Функції одного порядку малості, еквівалентні.

Задача 3. Довести еквівалентність нескінченно малих функцій:

$\alpha(x) = e^{2x} - e^x$ і $\beta(x) = 2x - \sin x$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{2x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^x - 1)}{x \left(2 - \frac{\sin x}{x} \right)} = 1 \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x).$

Задача 4. Знайти границі, скориставшись еквівалентними нескінченно малими:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x}.$$

Розв'язання.

а) Оскільки $\sin 8x \sim 8x$, $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ при $x \rightarrow 0$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\operatorname{tg} 2x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{2x} = 4.$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin(x-3)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}$, тому що $\arcsin(x-3) \sim x-3$ при $x \rightarrow 3$.

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}(e^{2x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} \cdot 2x}{x} = 2$, в силу того, що $e^{2x} - 1 \sim 2x$, $x \rightarrow 0$.

Рівень Б

Задача 1. Встановити, яка із вказаних функцій при $x \rightarrow 0$ буде нескінченно малою більш високого порядку, більш низького порядку по відношенню до x :

$$\text{а) } e^x - \cos x; \text{ б) } \sqrt[3]{\sin x}.$$

Розв'язання.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} +$
 $+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 1 + 0 = 1.$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$

Відповідь. а) Функції еквівалентні; б) Функція $\sqrt[3]{\sin x}$ – нескінченно мала нижчого порядку, ніж x .

Задача 2. Довести, що функції $\sqrt{1+x} - 1$ та $\frac{x}{2}$ еквівалентні при $x \rightarrow 0$.

Задача 3. Яка із вказаних функцій буде нескінченно малою більш високого порядку?

$$\text{а) } \alpha(x) = \sin(\sqrt{1+x} - 1), \beta(x) = x^3;$$

$$\text{б) } \alpha(x) = \arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2), \beta(x) = x^2$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{1+x} - 1 \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{1+x} - 1) \sim \sqrt{1+x} - 1 \text{ і} \\ \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x, \text{ тому} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt{1+x} - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} = \infty.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt{4+x^2} - 2 \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \text{то } \arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2) \sim \\ \sqrt{4+x^2} - 2, \text{ тому} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\sqrt{4+x^2} - 2)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2} - 2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} - 1 \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{8} \cdot x^2}{x^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь.

а) $\alpha(x) = \sin(\sqrt{1+x} - 1)$ – нескінченно мала нижчого порядку, ніж $\beta(x) = x^3$;

б) функції одного порядку малості.

Задача 4. Знайти границі, скориставшись еквівалентними нескінченно малими:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{\operatorname{tg} x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}. \end{aligned}$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a+x}{a}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{x}{a})}{a \cdot \frac{x}{a}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}} = \frac{1}{a}, \text{ тому що } \ln(1 + \frac{x}{a}) \sim \frac{x}{a}, \quad x \rightarrow 0.$$

б) $\ln \cos 2x = \ln(1 + \cos 2x - 1) \sim \cos 2x - 1$ при $x \rightarrow 0$, тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^2} = -2.$$

в) Оскільки $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, то $\sqrt[n]{1+\sin x} - 1 \sim \frac{x}{n}$ (еквівалентність №7), а також враховуючи, що $\operatorname{tg} x \sim x$, $x \rightarrow 0$, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{n}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}, \text{ оскільки } e^{2x} - 1 \sim 2x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

$$\text{Відповідь. а) } \frac{1}{a}; \text{ б) } -2; \text{ в) } \frac{1}{n}; \text{ г) } \frac{2}{3}.$$

Рівень В

Задача 1. Дана функція $y = x^3$. Показати, що Δy і Δx при $\Delta x \rightarrow 0$ і при $x \neq 0$ є нескінченно малими одного порядку.

Розв'язання.

Знайдемо приріст функції $y = x^3$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 \neq 0, \text{ якщо } x \neq 0, \text{ тому } \Delta x$$

і Δy – нескінченно малі одного порядку малості.

Задача 2. Визначити порядок нескінченно малих функцій при $x \rightarrow 0$:

а) $\alpha(x) = x^3 + 1000x^2$, $\beta(x) = x$; б) $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$, $\beta(x) = x$.

Розв'язання.

а) Нехай шуканий порядок малості рівний k . Знайдемо таке k , щоб границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1000x^2}{x^k}$ мала скінченне значення, відмінне від нуля.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 1000x^2}{x^2} = 1000 \neq 0$, то $k = 2$.

б) Знаходимо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 4x^2}{x} = 0$.

Тепер знаходимо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2} = 8 \neq 0 \Rightarrow k = 2$.

Відповідь.

а) функція $\alpha(x) = x^3 + 1000x^2$ – нескінченно мала другого порядку відносно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

б) функція $\alpha(x) = 1 - \cos 4x$ – нескінченно мала другого порядку відносно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

Задача 3. Знайти границі, скориставшись еквівалентними нескінченно малими:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\ln(1 + \sin x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$

Розв'язання.

а) В даній границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{\ln(1 + \sin x)}$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Оскільки $\sin x \sim x$ і $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$, то $\ln(1 + \sin x) \sim x$, $x \rightarrow 0$.

Покажемо, що $\sqrt[3]{1+2x} - 1 \sim \frac{2}{3}x$, $x \rightarrow 0$.

$$\text{Дійсно, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\frac{2}{3}x} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x-1}{x \cdot \left(\sqrt[3]{(1+2x)^2} + \sqrt[3]{1+2x} + 1 \right)} = \\ = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1.$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\ln(1+\sin x)} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3}x}{x} = \frac{2}{3}.$$

б) В даній границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Виконавши перетворення

$$\frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} = \frac{(e^{\sin 2x} - 1) - (e^{\sin x} - 1)}{x} = \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{x}, \text{ дістанемо:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} -$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1.$$

Відповідь. а) $2/3$; б) 1 .

III. Завдання для домашньої роботи

Рівень А

Задача 1. Встановити, яка із вказаних функцій більш високого порядку малості при $x \rightarrow 0$:

а) $\alpha(x) = x^2 - 10x^3$, $\beta(x) = \sin 6x$; б) $\alpha(x) = x$, $\beta(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

Відповідь. а) $\alpha(x) = x^2 - 10x^3$; б) функції еквівалентні; в) не-порівнянні при $x \rightarrow 0$. Вказівка: доведіть, що границя їх відношення не існує.

Задача 2. Знайти границі, скориставшись еквівалентними нескінченно малими:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\operatorname{tg} 2x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - x^2 + x^3}{\operatorname{tg} x + 2 \sin^2 x + 5x^4}.$$

Відповідь. а) 5/4; б) 1/4, скористатись еквівалентністю №7;

в) 3, скористатись теоремою 2 із основних теоретичних відомостей.

Рівень Б

Задача 1. Встановити, яка із вказаних функцій при $x \rightarrow 0$ буде нескінченно малою більш високого порядку, більш низького порядку по відношенню до x :

$$\text{а) } x + \sqrt[3]{\sin x}; \text{ б) } \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}.$$

Відповідь. а) нижчого порядку; б) одного порядку.

Задача 2. Знайти границі, скориставшись еквівалентними нескінченно малими:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \operatorname{arctg}^2 x}{3x}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 4x)}{e^{\sin 5x} - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}.$$

Відповідь. а) 2/3; б) 4/5; в) 3/4.

Рівень В

Задача 1. Визначити порядок відносно x функції, нескінченно малої при $x \rightarrow 0$:

$$\text{а) } \frac{x \cdot (x+1)}{1 + \sqrt{x}}; \text{ б) } e^{x^2} - \cos x; \text{ в) } \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}.$$

Відповідь. а) 1; б) 2; в) 1/2.

Задача 2. Знайти границі, скориставшись еквівалентними нескінченно малими:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x} ; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$$

Розв'язання.

$$\text{а) } \sqrt{1+x+x^2}-1 \sim \frac{x+x^2}{2} \sim \frac{x}{2}, \sin 4x \sim 4x, \text{ тому}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{4x} = \frac{1}{8}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\cos x-1)}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x-1}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}} = -2, \text{ тому що } \sqrt[4]{1+x^2}-1 \sim \frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $1/8$; б) -2 .

Практичне заняття № 6

Зміст: Неперервність функції в точці. Точки розриву та їх класифікація.

I. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 , якщо вона існує в цій точці та її околі і $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Означення 2. Функція $f(x)$ має *в точці* x_0 *розрив*, якщо вона існує в околі точки x_0 , але:

$$1) \exists f(x_0), \text{ або}$$

$$2) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \text{ або}$$

$$3) \exists f(x_0) \text{ та } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ але } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Класифікація точок розриву.

Точки розриву діляться на три типи:

I. Усувна точка розриву.

II. Точка розриву I роду.

III. Точка розриву II роду.

I. Для *усувного розриву* в точці x_0 характерно:

$$1) \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = C;$$

$$2) \nexists f(x_0) \text{ або } \exists f(x_0), \text{ але } f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ (рис.32).}$$

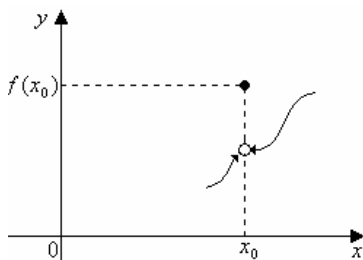


Рис. 32. Точка усувного розриву

Спосіб „усунення” розриву: до-
визначити функцію $y = f(x)$ до не-
перервної в точці x_0 , тобто покласти
 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x) = C$, і тоді нова до-

визначена функція $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ C, & x = x_0 \end{cases}$ буде неперервною в точці x_0 .

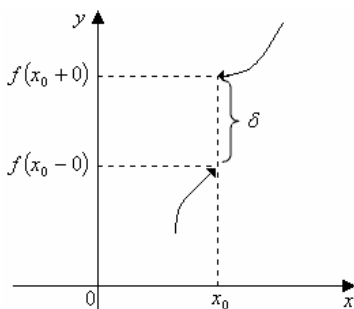


Рис. 33. Точка розриву I роду

II. Для точки *розриву I роду* характерно:

існують обидві скінченні односторонні
границі, але не рівні між собою, тобто
 $\exists \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \exists \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) =$
 $= f(x_0 + 0), \text{ але } f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$
(рис. 33).

Модуль різниці

$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| = \delta$ називається
„стрибком” функції.

III. Для точки *розриву II роду* характерно: хоча б одна з односторонніх границь в точці x_0 не існує або дорівнює нескінченності (рис.34).

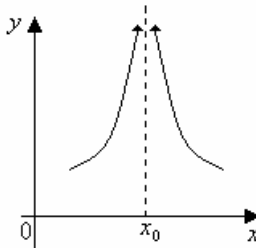


Рис. 34. Точка розриву II роду

II. Завдання для аудиторної роботи

Рівень А

Задача. Знайти точки розриву функції $y = f(x)$, встановити тип розриву, зобразити схематично поведінку функції поблизу точки розриву:

а) $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$; б) $y = \begin{cases} \sin x, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 1; \\ 2 + \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$

г) $y = \frac{2}{x - 3}$; д) $y = 3^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання.

а) Функція $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ невизначена в точці $x_0 = 4$, тобто

$\exists y(4)$. Знайдемо односторонні границі функції при $x \rightarrow 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} y = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4-0} (x+4) = 8;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} y = \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4+0} (x+4) = 8.$$

Отже, $\exists \lim_{x \rightarrow 4} y = 8$. Таким чином, $x_0 = 4$ – усувна точка розриву.

Графіком функції $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ є пряма $y = x + 4$ з виколотою точкою $(4; 8)$ (рис.35).

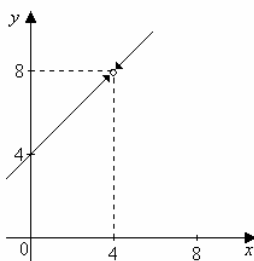


Рис. 35

Поклавши $y(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$, одержимо нову функцію $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & x \neq 4; \\ 8, & x = 4, \end{cases}$ неперервну в точці $x_0 = 4$.

б) Функція $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ пред-

ставлена двома аналітичними виразами, причому обидві функції є неперервними на заданих проміжках.

Дослідимо на неперервність задану функцію в точці $x_0 = 0$:

1) $\exists f(0) = 2$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (\sin x) = -0$; $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (\sin x) = +0 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$;

3) $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Отже, $x_0 = 0$ – усувна точка розриву (рис.36).

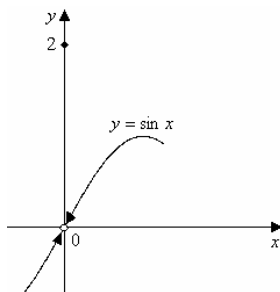


Рис. 36

Довизначимо цю функцію до неперервної в точці $x_0 = 0$: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

і одержимо нову неперервну функцію $F(x) = \begin{cases} \sin x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

в) Функція $y = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 1; \\ 2 + \sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ існує на

всій числовій осі. Дослідимо її на неперервність в точці „стику” $x_0 = 1$, знайшовши односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} (3x - 1) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} (2 + \sqrt{x}) = 3.$$

Отже, за означенням $x_0 = 1$ – точка розриву I роду.

$$\delta = |3 - 2| = 1 \text{ – „стрибок” (рис.37).}$$

г) Функція $y = \frac{2}{x-3}$ не існує в точці $x_0 = 3$. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2}{x-3} = \left[\frac{2}{3-0-3} = \frac{2}{-0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{2}{x-3} = \left[\frac{2}{3+0-3} = \frac{2}{+0} \right] = +\infty.$$

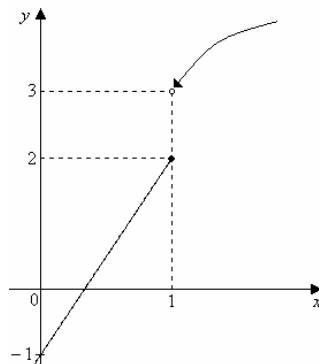


Рис. 37

За означенням $x_0 = 3$ – точка розриву II роду (рис.38).

д) Функція $y = 3^{\frac{1}{x}}$ невизначена в точці $x_0 = 0$. Встановимо тип точки розриву, обчисливши послідовно лівосторонню і правосторонню границі функції в цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 3^{\frac{1}{x}} = \left[3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} \right] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} 3^{\frac{1}{x}} = \left[3^{\frac{1}{+0}} = 3^{+\infty} \right] = +\infty.$$

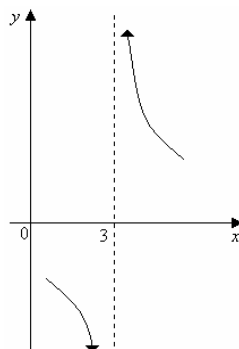


Рис. 38

Таким чином, $x_0 = 0$ – точка розриву II роду (рис.39).

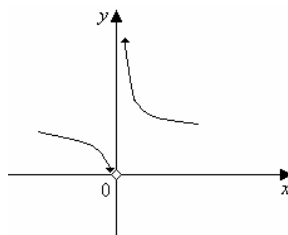


Рис. 39

Рівень Б

Задача 1. Знайти точки розриву функції $y = f(x)$, встановити тип розриву, зобразити схематично поведінку функції поблизу точки розриву:

а) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$; б) $y = \frac{3x - 5}{|3x - 5|}$; в) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}$;

г) $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1; \\ \frac{1}{x}, & -1 < x < 1; \\ 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

Розв'язання.

а) Дробово-раціональна функція $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ не існує в точці $x_0 = 2$.

Знайдемо односторонні границі функції при $x \rightarrow 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-3) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} (x-3) = -1.$$

Таким чином, $x_0 = 2$ – усувна точка розриву.

Графіком функції $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ є пряма $y = x - 3$ з виколотою точкою $(2; -1)$ (рис.40).

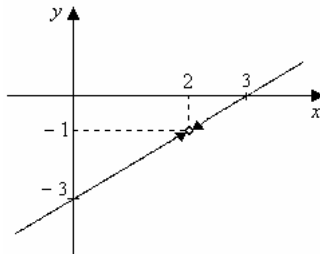


Рис. 40

б) Функція $y = \frac{3x-5}{|3x-5|}$ невизначена в точці $x_0 = \frac{5}{3}$.

$$|3x-5| = \begin{cases} -(3x-5), & x < \frac{5}{3}; \\ 3x-5, & x \geq \frac{5}{3}. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}-0} \frac{3x-5}{|3x-5|} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}-0} \frac{3x-5}{-(3x-5)} = -1; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}+0} \frac{3x-5}{|3x-5|} = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}+0} \frac{3x-5}{3x-5} = 1.$$

Оскільки $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}-0} y \neq \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}+0} y$ – скінченні, то

$x_0 = 5/3$ – точка розриву I роду (рис.41).

„Стрибок” $\delta = |1 - (-1)| = 2$.

в) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}}$ – складена показникова

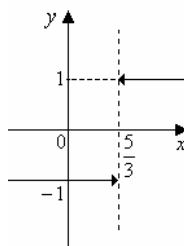


Рис. 41

функція, яка є розривною в точці $x_0 = 3$.

Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}} = \left[\left[\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{3-3+0}} \right] = \left[\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{+0}} = \left[\frac{1^{+\infty}}{4}\right] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3-x}} = \left[\left[\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{3-3-0}} \right] = \left[\frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{-0}} = \left[\frac{1}{4}\right]^{-\infty} = 4^{+\infty} = +\infty.$$

Отже, $x_0 = 3$ – точка розриву II роду (рис.42).

Зуваження. Пряма $x = 3$ є вертикальною асимптотою для графіка даної функції.

г) Функція $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1; \\ \frac{1}{x}, & -1 < x < 1; \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ задана

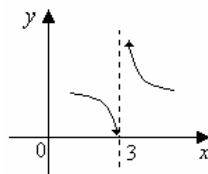


Рис. 42

трьома аналітичними виразами.

Для $x \leq 1$ функція лінійна, а отже неперервна; для $-1 < x < 1$ графіком функції є гіпербола, яка має розрив в точці $x_0 = 0$; для $x \geq 1$ функція лінійна і також неперервна. Дослідимо дану функцію на неперервність в точці розриву $x_0 = 0$ і точках „стику” $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

1) Для точки $x_1 = -1$ маємо: $\exists f(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$;

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-2x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x} = -1.$$

Таким чином, $x_1 = -1$ – точка розриву I роду, „стрибок”
 $\delta = |-1 - 2| = 3$.

2) Для точки $x = 0$ маємо: $\nexists f(0)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty.$$

Отже, $x_0 = 0$ – точка розриву II роду.

3) Для точки $x_2 = 1$ маємо: $\exists f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x - 1) = 1.$$

За означенням $x_2 = 1$ є точкою неперервності функції (рис.43).

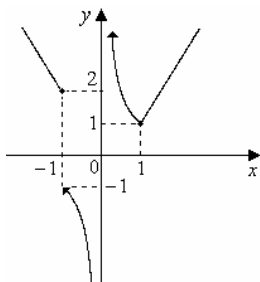


Рис. 43

Задача 2. При якому значенні числа a функція

$$y = \begin{cases} 4x + 2, & x \leq 3; \\ 2 - ax^3, & x > 3 \end{cases} \quad \text{буде неперервною?}$$

Розв'язання. Для $x \leq 3$ функція лінійна, а тому неперервна; для $x > 3$ – кубічна і також неперервна. Для того, щоб дана функція $y = f(x)$ була неперервною на всій числовій осі, достатньо, щоб вона була неперервною в точці „стику” $x_0 = 3$.

Знайдемо $f(3) = 4 \cdot 3 + 2 = 14$;

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} y = \lim_{x \rightarrow 3-0} (4x + 2) = 14; \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} y = \lim_{x \rightarrow 3+0} (2 - ax^3) = 2 - 27a.$$

Для неперервності функції односторонні границі повинні співпадати і дорівнювати значенню $f(3)$, тому $2 - 27a = 14$, звідки $a = -4/9$.

Відповідь. $a = -4/9$.

Рівень В

Задача. Знайти точки розриву функції $y = f(x)$, встановити тип розриву, зобразити схематично поведінку функції поблизу точки розриву:

$$\text{а) } y = \frac{x^3 - 8}{2 - x}; \text{ б) } y = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2}, & x \leq 2; \\ 3 - x^2, & x > 2. \end{cases}; \text{ в) } y = \frac{-4}{1 - e^{\sin x}}.$$

Розв'язання.

а) Функція $y = \frac{x^3 - 8}{2 - x}$ не існує при $x_0 = 2$. Знаходимо односторонні границі:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3 - 8}{2 - x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{2 - x} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 + 2x + 4) = -12. \end{aligned}$$

Аналогічно $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3 - 8}{2 - x} = -12.$

Звідки випливає, що $x_0 = 2$ – усувна точка розриву.

Довизначена функція $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{2 - x}, & x \neq 2; \\ -12, & x = 2 \end{cases}$ буде неперервною в точці $x_0 = 2$.

Графіком заданої функції є парабола $y = -x^2 - 2x - 4$ з виколотою точкою $(2; -12)$ (рис.44).

в) Для функції $y = \frac{-4}{1 - e^{\sin x}}$ знайдемо точки, в яких вона невизначена:

$$1 - e^{\sin x} = 0 \Rightarrow e^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

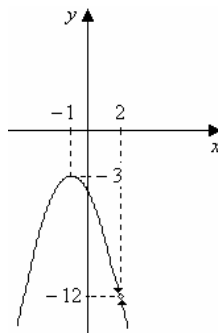


Рис. 44

Точки $x_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ є точками розриву функції. Встановимо їх тип. Виберемо одну з точок, наприклад, $x_1 = 0$ ($n = 0$) і знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-4}{1 - e^{\sin x}} = \left[\frac{-4}{1 - e^{-0}} = \frac{-4}{+0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-4}{1 - e^{\sin x}} = \left[\frac{-4}{1 - e^{+0}} = \frac{-4}{-0} \right] = +\infty.$$

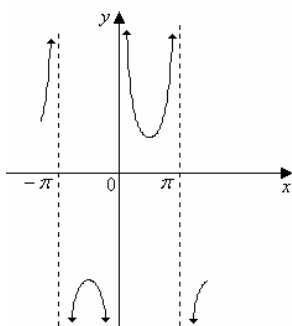


Рис. 45

Аналогічно досліджуються інші точки. Отже, вихідна функція має безліч точок розриву II роду (рис.45).

III. Завдання для домашньої роботи

Рівень А

Задача. Знайти точки розриву функцій, встановити тип розриву, зобразити схематично поведінку функції поблизу точки розриву:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}; \text{ б) } y = \begin{cases} (x+1)^2, & x < 0; \\ \frac{2}{x-1}, & x \geq 0. \end{cases}; \text{ в) } y = 2^{\frac{1}{x-4}}.$$

а) *Відповідь.* $x_0 = -3$ – точка усувного розриву; графіком є пряма $y = x - 3$ з виколотою точкою $(-3; -6)$.

$$\text{б) Розв'язання. Функція } y = \begin{cases} (x+1), & x < 0; \\ \frac{2}{x-1}, & x \geq 0. \end{cases} \text{ задана двома ана-}$$

літичними виразами.

Для $x < 0$ функція квадратична, а, отже неперервна; для $x \geq 0$ маємо гіперболу з точкою розриву $x_0 = 1$.

Дослідимо задану функцію на неперервність в точці розриву $x_0 = 1$, а також в точці „стику” $x_1 = 0$.

1) Для точки „стику” $x_1 = 0$ маємо: $\exists y(0) = \frac{2}{0-1} = -2$;

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} y = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x+1)^2 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} y = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2}{x-1} = -2.$$

Таким чином, $x_1 = 0$ – точка розриву I роду, „стрибок”
 $\delta = |1 - (-2)| = 3$.

2) Для точки розриву $x_0 = 1$ маємо: $\nexists y(1)$;

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{x-1} = \left[\frac{2}{1-0-1} = \frac{2}{-0} \right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{x-1} = \left[\frac{2}{1+0-1} = \frac{2}{+0} \right] = +\infty.$$

Отже, $x_0 = 1$ – точка розриву II роду (рис.46).

в) Розв'язання. Функція $y = 2^{\frac{1}{x-4}}$ не існує в точці $x_0 = 4$. З'ясуємо поведінку функції поблизу цієї точки:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} 2^{\frac{1}{x-4}} = \left[2^{\frac{1}{4-0-4}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} \right] = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} 2^{\frac{1}{x-4}} = \left[2^{\frac{1}{4+0-4}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} \right] = +\infty.$$

Отже, точка $x_0 = 4$ – точка розриву II роду (рис.47)

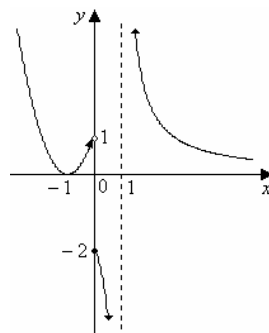


Рис. 46

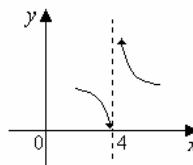


Рис. 47

Рівень Б

Задача 1. Знайти точки розриву функцій, встановити тип розриву, зобразити схематично поведінку функції поблизу точки розриву:

$$\text{а) } y = \frac{x+1}{x^2+3x+2}; \text{ б) } y = \begin{cases} x^3, & x \leq 0; \\ 1-x, & 0 < x < 2; \\ x^2-5, & x \geq 2. \end{cases}; \text{ в) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{x+1}}.$$

а) *Розв'язання.* Функція $y = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$ не існує в точках $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

1) Для точки $x = -2$ маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+1}{x^2+3x+2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+1}{(x+1)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{x+2} = \left[\frac{1}{-2-0+2} = \frac{1}{-0} \right] = -\infty; \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x+1}{x^2+3x+2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{x+2} = \left[\frac{1}{-2+0+2} = \frac{1}{+0} \right] = +\infty.$$

Отже, $x = -2$ – точка розриву II роду.

2) Для точки $x_2 = -1$ маємо:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x+1}{x^2+3x+2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+2} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x+1}{x^2+3x+2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+2} = 1.$$

Таким чином, $x_2 = -1$ – усувна точка розриву (рис.48).

Зауважимо, що графіком даної функції є гіпербола $y = \frac{1}{x+2}$ з виколотою точкою $(-1;1)$.

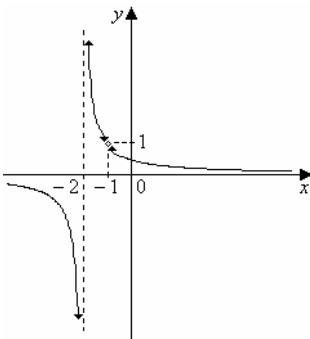


Рис. 48

б) *Відповідь.* $x_1 = 0$ – точка розриву I роду; $x_2 = 2$ – точка неперервності.

в) *Відповідь.* $x_1 = -1$ – точка розриву II роду.

Задача 2. При якому значенні числа b функція $y = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1; \\ bx^2 - 4, & x \geq 1 \end{cases}$

буде неперервною?

Відповідь. $b = 5$.

Рівень В

Задача. Знайти точки розриву функції $y = f(x)$, встановити тип розриву, зобразити схематично поведінку функції поблизу точки розриву:

$$\text{а) } y = (1+x)^{\frac{2}{3x}}; \text{ б) } y = \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & x \leq 1; \\ \log_2 x, & x > 1 \end{cases}; \text{ в) } y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}.$$

а) *Розв'язання.* Функція визначена в $(-1; +\infty)$ як степеневопоказникова $\Rightarrow 1+x > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D(y): x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. Дослідимо

поведінку функції $y = (1+x)^{\frac{2}{3x}}$ поблизу точки $x_0 = 0$, де вона не існує:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{\frac{2}{3x}} = [1^{-\infty}] = \lim_{x \rightarrow 0-0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{2}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2} \approx 1,9;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{\frac{2}{3x}} = [1^{\infty}] = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^{\frac{2}{3}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2} \approx 1,9.$$

Отже, $x_0 = 0$ – усувна точка розриву. Графік зображено на рис.49.

б) *Відповідь.* $x_1 = 0$ – точка розриву II роду; точка „стику” $x_2 = 1$ – точка розриву I роду („стрибок” $\delta = 1$).

в) *Відповідь.* $x_0 = 1$ – точка розриву I роду („стрибок” $\delta = \pi$).

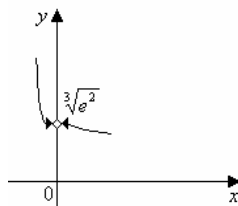


Рис. 49

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: Учебн. пособ. – М.: Гос. издательство физ.-мат. Литер., 1960. – 443 с.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав І.П.* та ін. Вища математика. Збірник задач, навч. посіб. – К.: 2001. – 480 с.
3. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посіб. – К.: Вища школа, 2001. – 648 с.
4. Математичний аналіз у задачах і прикладах / *Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль* // Навч. посіб. – К.: Вища школа, 2003. – 463 с.
5. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике: Учебн. пособ. – ХГУ, Харьков, 1970. – 575 с.
6. *Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В.* Вища математика. Практикум: Навч. посіб. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

Навчальне видання

**САПРИКІНА Людмила Тихонівна
МАЙБОРОДА Олександр Валерійович
КОНДРАТЕНКО Євген Олександрович**

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Методичні вказівки
до проведення практичних занять

(українською мовою)

Комп'ютерна верстка *Є.С. Сергєєв*
Коректор *М.О. Паненко*

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 23.02.09. Папір офсетний. Формат 60x84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 4,6. Обл.-вид. арк. 4,9.
Тираж 100 прим. Вид. № 40. Зам. № 149. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.