

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

А. М. Кузнецов

ОСНОВИ МАТЕМАТИКИ
Конспект лекцій для лінгвістів

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2004

УДК 517: 618.3

Кузнецов А.М. Основи математики: Конспект лекцій для лінгвістів. – Миколаїв: НУК, 2004. – 32 с.

Кафедра вищої математики

"Основи математики" охоплюють такі фундаментальні поняття вищої математики, як множини, відношення та функції, а також основні поняття математичної логіки. Викладання теоретичного матеріалу супроводжується прикладами розв'язання задач.

Рекомендовано для студентів-лінгвістів.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Зароський Р.І.

До основ математики віднесемо такі математичні поняття, як "множина", "функція", "відношення", "висловлення і логічні зв'язки", "тавтологія" та ін. Це основа математичної культури, яка є важливою частиною загальнолюдської культури.

Розділ 1. МНОЖИНИ

1.1. Поняття множини

Поняття множини відноситься до так званих первісних понять математики, тобто до таких, яким не можна дати строге визначення і виразити через простіші поняття.

Інтуїтивно *множину* розуміють як сукупність певних і розрізнених між собою об'єктів. Ці об'єкти називаються *елементами* множини. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їх елементи – малими. Записи $x \in X$ або $x \notin X$ відповідно означають, що елемент x належить множині X або елемент x не належить множині X .

Приклади множин: множина студентів на першому курсі університету, множина літер "щ" в "Енеїді" Котляревського, множина зірок на небі тощо.

В математиці для числових множин вводяться такі загальноприйняті позначення: N – множина натуральних чисел, Z – множина цілих чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається **скінченною**. Запис $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ означає, що скінченна множина X складається із n елементів. Прикладом скінченної множини може бути множина слів у будь-якому словнику.

Нескінченна множина містить нескінченну кількість елементів, наприклад, множина N натуральних чисел. Запис $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ означає, що множина X нескінченна.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається символом $\emptyset$. Прикладом порожньої множини A може бути "означений і неозначений артикль в українській мові" (в англійській мові це не порожня множина), тобто $A = \emptyset$.

Зауважимо, що перелік елементів множини у фігурних дужках є досить громіздким під час задання великої множини і зовсім не підходить для нескінченних множин.

Для розв'язання цього питання використовується так звана **характеристична властивість** множини. Нехай $P(x)$ – деяке речення, що залежить від x . Наприклад, " x ділиться на 3", " x зустрічається літера r ". Якщо замість x підставити будь-який конкретний предмет, то одержимо істинне або хибне твердження. Якщо, наприклад, $P(x) = "x \text{ ділиться на } 3"$, то $P(9)$ – істинне твердження, а $P(5)$ – хибне.

Таке речення і називається характеристичною властивістю множини. За його допомогою можна записати які завгодно множини.

Запис $A = \{x \mid P(x)\}$ означає, що $a \in A$, тоді і тільки тоді, коли $P(a)$ – істинне твердження. Наприклад, запис

$$A = \{x \mid x \geq 0\}$$

читається так: "Множину A утворюють числа x не менші за нуль".

Іноді вказують клас, до якого належать елементи множини. Наприклад, $A = \{x \in R \mid 0 \leq x \leq 1\}$ є нескінченна множина дійсних чисел, що лежать між нулем і одиницею (включно). Слід пам'ятати, що скінченні множини можуть задаватися як переліком, так і описом. Нескінченні множини задаються тільки описом.

1.2. Рівність множин. Підмножини

Дві множини **рівні** тоді і тільки тоді, коли вони складаються із одних і тих самих елементів.

Рівність двох множин A і B на письмі записується: $A = B$, у протилежному випадку (коли в одній із множин знайдеться елемент, що не належить іншій) пишуть $A \neq B$.

Доведення рівності двох множин A і B складається із двох частин:

1. Якщо $x \in A$, то $x \in B$;
2. Якщо $x \in B$, то $x \in A$.

Приклади

1. Множини $\{3, 4, 7\} = \{4, 3, 7\} = \{3, 4, 4, 7\}$, так як ці множини складаються із одних і тих же елементів.

2. Множини $\{\{4, 5\}\}$ і $\{4, 5\}$ не рівні: перша множина одноелементна, і її елементом є множина, а друга множина – двоелементна, складається із двох чисел. Таким чином, дані множини складаються із елементів різної природи і не можуть бути рівними.

Множина A називається **підмножиною** B , якщо кожний елемент A є елементом B . При цьому говорять, що B містить або покриває A . На письмі записують: $A \subseteq B$ ($\subseteq$ – знак включення). Для доведення включення вимагається перевірити твердження: якщо $x \in A$, то $x \in B$.

Приклади

1. Множина студентів-лінгвістів 1-го курсу є підмножиною множини всіх студентів-лінгвістів, які, в свою чергу, включаються у множину всіх студентів університету.

2. Множина $\{7, 9\}$ є підмножиною множини $\{2, 7, 9\}$.

3. Множина $\{2, 3\}$ не є підмножиною $\{\{2\}, 3, 4\}$, оскільки число 2 не належить останній множині.

Якщо $A \subseteq B$ і $A \neq B$, то A називають **власною, строгою** або **істинною** підмножиною B . Позначають $A \subset B$, а знак $\subset$ називається знаком строгого включення.

Множина всіх підмножин множини A називається **множиною-ступінню** множини A і позначається через $P(A)$:

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Наприклад, $A = \{1, 2, 3\}$, тоді

$$P(A) = \{A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \emptyset\}.$$

Всього їх 8.

Можна впевнитися, що множина-ступінь n -елементної множини складається із 2^n елементів.

Зауважимо, що кожна множина A є і підмножиною самої себе; порожня множина $\emptyset$ є підмножиною будь-якої множини.

1.3. Операції над множинами та їх властивості

Існують декілька основних операцій над множинами, за допомогою яких можна будувати нові множини.

Об'єднання (сума) множин A і B є множиною всіх елементів, що належать A або B .

Об'єднання множин позначається $A \cup B$. Іншими словами,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Сполучник "або" тут означає: елемент x належить або тільки множині A , або тільки множині B , а може належати A і B одночасно. Отже, $x \in A \cup B$ тоді і тільки тоді, коли x є елементом хоча б однієї із цих множин.

Наприклад, $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$\{\text{іменник, прикметник, числівник}\} \cup \{\text{іменник, частка}\} = \{\text{іменник, прикметник, числівник, частка}\}.$

Перетин (добуток) множин A і B є множина всіх елементів, що належать одночасно як A , так і B .

Перетин множин позначається $A \cap B$. Іншими словами,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Наприклад, $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 3\}$;

$\{\text{іменник, прикметник, числівник}\} \cap \{\text{іменник, частка}\} = \{\text{іменник}\}.$

Якщо в результаті перетину множин утворюється порожня множина $A \cap B = \emptyset$, то говорять, що множини A і B не перетинаються.

Операції перетину множин можуть бути підлеглі декілька множин, тобто $A \cap (B \cap C)$ і т. п.

Операція перетину множин застосовується в лексикографічній практиці, зокрема при складанні дво- і багатомовних словників.

Розглянемо, наприклад, три множини синонімічних термінів, що означають поняття "Наука про мову", для російської, італійської та чеської мов:

$I_p = \{\text{глоттологія, языковедение, языкознание, лингвистика}\};$
 $I_i = \{\text{glottologia, linguistica}\};$
 $I_r = \{\text{jazykoueda, jazykopopyt, linguistika}\}.$

Не враховуючи морфологічно-орфографічні розбіжності, вважаємо однаковими ті слова, що цілком виходять із одного і того ж кореня. Тоді

$$I = I_p \cap I_i \cap I_r = \{\text{linguistika}\}.$$

Різницею множин A і B називається множина всіх елементів A , які не входять до B .

Різниця множин позначається $A \setminus B$ або $A - B$:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Наприклад, $\{1, 2, 5\} \setminus \{2, 5, 7\} = \{1\}$.

Якщо для будь-якої сукупності множин можна вказати таку множину U , для якої усі дані множини є підмножинами, то U називається *універсальною* множиною (*універсумом*). **Універсум** – поняття відносне і визначається контекстом задачі, яка розв'язується. Так в арифметиці універсум – це множина всіх раціональних чисел Q , в ботаніці – вся флора тощо.

Доповненням множини A називається множина $\overline{A}$, яка складається із елементів універсуму U , що не входять до A :

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} \quad \text{інакше:} \quad \overline{A} = U \setminus A.$$

Нехай, наприклад, U – множина всіх студентів університету, A – множина студентів гуманітарного факультету. Тоді $\overline{A}$ є множиною студентів всіх факультетів, крім гуманітарного. Для ілюстрації операцій над множинами використовуються так звані діаграми Ейлера–Венна. Множина зображується сукупністю точок на площині. Універсум будемо представляти прямокутником (див. рисунок).

Користуючись визначеннями об'єднання та перетину, можна довести, що ці операції володіють властивостями:

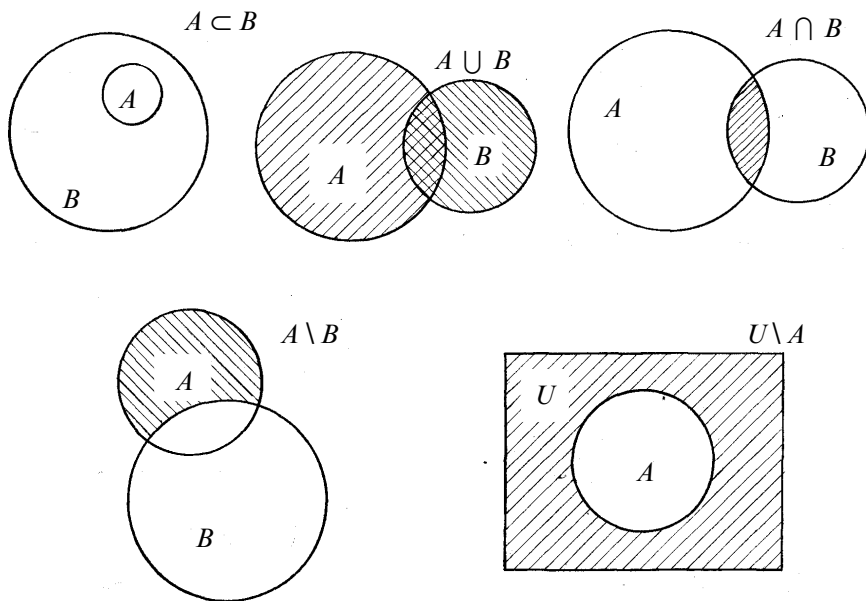
комутативності: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$

асоціативності: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

дистрибутивності: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$



Перераховані властивості аналогічні відомим зі школи властивостям операцій додавання та множення.

Якщо операції $\cup$ об'єднання множин поставити у відповідність операцію додавання чисел (+), операції $\cap$ – операцію множення чисел ($\cdot$), універсалу U – одиницю (1), порожній множині $\emptyset$ – нуль (0), то побачимо цю аналогію.

Разом з тим мають місце і глибокі відмінності.

Наприклад, для множин справедливі рівності

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A;$$

$$A \cup B = A; \quad A \cap B = B, \text{ якщо } B \subset A,$$

які не мають місця для чисел, за винятком випадку, коли одне з чисел дорівнює нулю або одиниці.

Наприклад, $A = \{\text{множина всіх іменників}\};$

$B = \{\text{множина всіх іменників чоловічого роду}\},$
тоді, враховуючи, що $B \subset A$, маємо $A \cap B = B$.

Взагалі доведення кожного із наведених тотожностей можна здійснити, показавши, що множина, яка стоїть по одну сторону тотожності, включена у множину, яка стоїть по іншу сторону.

Доведемо, наприклад, тотожність

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Нехай $x \in A \cup (B \cap C)$. Тоді, за означенням об'єднання, $x \in A$ або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A$, то x належить об'єднанню A з довільною множиною, зокрема $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, значить, належить перетину цих множин, тобто $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Якщо $x \in B \cap C$, то, за означенням перетину, $x \in B$ і $x \in C$, а значить, $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, тобто знову $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Для даного закону аналогія з алгебри порушується:

$$a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot (a + c).$$

Крім вище вказаних шести властивостей перелічимо ще чотири:

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap U = A;$$

$$A \cup \bar{A} = U; \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Вказані десять властивостей фігурують попарно таким чином, що кожна з них одержується із сусідньої заміною $\cup$ на $\cap$, U на $\emptyset$ і навпаки. Такий взаємозв'язок властивостей називається двоїстістю. Сформулюємо наступне твердження.

Принцип двоїстості. Для будь-якої тотожності множин двоїстий йому вираз теж є тотожністю.

Наприклад, неважко довести тотожності

$$A \cap (A \cup B) = A \text{ (закон поглинання) і}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ (закон де Моргана).}$$

Тоді за принципом двоїстості $A \cup (A \cap B) = A$ і $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ є теж справедливими тотожностями.

Розділ 2. ВІДНОШЕННЯ ТА ФУНКЦІЇ

2.1. Поняття відношень та їх основні властивості

Термін "відношення" означає який-небудь зв'язок між предметами або поняттями.

Відношення між парами об'єктів називаються бінарними.

Приклади відношень:

x менше, ніж y ;

x ділиться на y ;

Іван – брат Ольги;

Сидоренко – староста групи лінгвістів;

зошит – іменник.

Як бачимо, об'єкти у відношенні розглядаються у певному порядку. Нехай, наприклад, $x = 3$, $y = 4$. Тоді пара (x, y) знаходиться у відношенні "менше, ніж", а пара (y, x) – не знаходиться у цьому відношенні.

Взагалі впорядкованою парою (x, y) назвемо двоелементну множину $\{x, y\}$, в якій елемент x знаходиться на першому місці, а елемент y – на другому. При цьому x називається першою координатою впорядкованої пари, а y – другою координатою. Дві впорядковані пари рівні, коли співпадають їх координати:

$(x, y) = (u, v)$ тоді і тільки тоді, коли $x = u$, $y = v$.

У цьому головна відміна впорядкованої пари від довільної двоелементної множини. Дійсно, множини $\{2, 3\}$ і $\{3, 2\}$ – рівні, оскільки складаються із одних і тих самих елементів, а впорядковані пари $(2, 3)$ і $(3, 2)$ – не рівні, оскільки їх координати не співпадають.

Нехай задані дві множини X і Y .

Бінарним відношенням ρ із множини X у множину Y називається деяка множина впорядкованих пар (x, y) , де $x \in X$, $y \in Y$.

Якщо $(x, y) \in \rho$, де ρ – деяка множина впорядкованих пар, то елемент x знаходиться у відношенні ρ з елементом y . Це позначається так: $x \rho y$.

Декартовим добутком двох множин X і Y називається множина усіх впорядкованих пар (x, y) , таких, що $x \in X$, $y \in Y$.

Позначається $X \times Y$.

Таким чином, відношення є підмножиною декартового добутку:

$\rho \subseteq X \times Y$, якщо $X = Y$, то $\rho \subseteq X \times X$, тоді говорять, що відношення ρ є відношенням на множині X .

Декартовий добуток зручно представляти у вигляді таблиць. Нехай, наприклад, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{b, e\}$, тоді добуток $X \times Y$ можна записати у вигляді наступної таблиці.

Розглянемо, наприклад, дві множини:

$A = \{\text{родовий, кількісний}\},$

$B = \{\text{відмінок, генетив, партитив}\}$ (генетив – родовий відмінок; партитив – родовий кількісний відмінок).

	d	e
a	(a, d)	(a, e)
b	(b, d)	(b, e)
c	(c, d)	(c, e)

Складемо декартовий добуток за поданою нижче таблицею.

	Відмінок	Генетив	Партитив
Родовий	родовий відмінок	родовий генетив	родовий партитив
Кількісний	кількісний відмінок	кількісний генетив	кількісний партитив

Очевидно, що поряд із змістовними сполученнями типу родовий відмінок, кількісний генетив декартовий добуток включає і такі беззмістовні пари, як родовий генетив, родовий партитив. Звідси постає, що одними формальними засобами не можна відділити змістовні та граматичні сполучення від беззмістовних і граматично неправильно побудованих пар. Тут треба залучати ще деякі лінгвістичні критерії.

Розглянемо чотири основні властивості відношень.

Відношення називається **рефлексивним**, якщо для кожного елемента $x \in X$ в ρ є пара (x, x) .

Приклади

1. Відношення $\leq$ рефлексивне, оскільки $x \leq x$ для будь-якого числа x .

2. Відношення $<$ не є рефлексивним.

3. Відношення $\rho \subseteq A \times A$ для попереднього прикладу є рефлексивним, оскільки можна скласти дві пари (родовий, родовий), (кількісний, кількісний).

Відношення ρ називається **симетричним**, якщо існування пари $(x_i, x_j) \in \rho$ передбачає існування пари $(x_j, x_i) \in \rho$.

Приклади

1. Відношення подібності трикутників симетричне: якщо трикутник x подібний до трикутника y , то трикутник y подібний до трикутника x , тобто парі $(x, y) \in \rho$ відповідає пара $(y, x) \in \rho$.

2. Відношення подільності не є симетричним: якщо x ділиться на y , то це не значить, що y ділиться на x .

3. У лінгвістиці: симетричність властива синонімам, наприклад, парі (процент, відсоток) відповідає пара (відсоток, процент).

Бінарне відношення називається **транзитивним**, якщо із того, що $(x_i, x_j) \in \rho$ і $(x_j, x_k) \in \rho$, випливає, що $(x_i, x_k) \in \rho$.

Приклади

1. Відношення $\leq$ транзитивне, якщо $x \leq y$ і $y \leq z$, то $x \leq z$.

2. Відношення $<$ теж транзитивне.

3. Відношення "бути батьком" не є транзитивним: якщо x – батько y , y – батько z , то x – не батько z , а дідусь.

Бінарне відношення називається **антисиметричним**, якщо із того, що $(x, y) \in \rho$ і $(y, x) \in \rho$, випливає, що $x = y$.

Приклади

1. Відношення подільності антисиметричне на множині натуральних чисел: якщо x ділиться на y і y ділиться на x , то $x = y$.

2. Відношення $\leq$ антисиметричне: якщо $x \leq y$ і $y \leq x$, то $x = y$.

3. Відношення перпендикулярності прямих не антисиметричне: якщо пряма x перпендикулярна прямій y і навпаки, то це не значить, що прямі співпадають.

2.2. Відношення еквівалентності

Відношенням еквівалентності на деякій множині X називається таке відношення, яке водночас є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Приклади відношень еквівалентності:

1. Подібність на множині всіх трикутників площини, рівність фігур, рівність векторів, логічне твердження типу "бути таким же".

2. "Навчання в групі лінгвістів" серед усіх студентів університету.

Другий приклад ілюструє основну властивість будь-якого відношення еквівалентності: за допомогою цього відношення можна розбити відповідну множину на такі підмножини, що не перети-

наються. При цьому всі елементи кожної підмножини заходяться у цьому співвідношенні (тобто еквівалентні один одному) і не знаходяться у цьому співвідношенні з жодним елементом іншої підмножини. У нашому випадку всі студенти університету розбиваються на множину осіб, що вчаться в одній групі.

Нехай ρ – відношення еквівалентності в X .

Класом еквівалентності, що породжується елементом $x \in X$, називається множина всіх елементів y , для яких $x \rho y$.

Ця множина позначається $[x]$.

Приклад

Нехай $X = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$, $x \rho y$ тоді і тільки тоді, коли $x - y$ ділиться на 3 (таке відношення у математиці називається відношенням порівняння за модулем 3).

Можна перевірити, що ρ – відношення еквівалентності. Наприклад, клас еквівалентності, що породжується 1, складається з чисел 1, 4, 7, бо різниці $1 - 1 = 0$; $1 - 4 = -3$; $1 - 7 = -6$ діляться на 3.

Крім того, класи еквівалентності породжуються 2 ($\{2, 5\}$) і 3 ($\{3, 6\}$).

Числа із кожного класу еквівалентності при діленні дають однакову остачу. Говорять, що вони порівняні по модулю 3 (пишуть, наприклад, $6 \equiv 3 \pmod{3}$ або $1 \equiv 7 \pmod{3}$). Числа із різних класів не порівняні між собою.

У розглянутому прикладі з відношенням рівності за модулем 3 видно, що класи еквівалентності утворюють розбиття множини X .

2.3. Відношення часткового (нестрогого) порядку

Відношенням часткового (нестрогого) порядку на деякій множині X називається таке відношення, яке водночас є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним.

Приклади відношень часткового порядку.

1. Відношення подільності " x ділиться на y " на множині натуральних чисел.

2. Відношення на числових множинах.

Відношення часткового порядку впорядковує елементи множини X , дозволяє їх розташувати "по зростанню". Тому довільне відношення часткового порядку також прийнято позначати $\leq$.

Відношення $\leq$ породжує відношення $<$:

$$x < y, \text{ якщо } x \leq y, x \neq y.$$

У цьому разі говорять, що елемент x *передую* елементу y (x менше y , y більше x). Елемент y покриває x , якщо $x < y$, і не існує такого елемента u , що $x < u < y$.

Наприклад, для множини $\{2, 3, 4\}$ задано відношення $\leq$. Тоді 3 покриває 2, а 4 – ні, оскільки $2 < 3 < 4$.

2.4. Функції

Між елементами різних множин можна встановити відповідність.

Нехай, наприклад, X – множина студентів певної групи лінгвістів, Y – множина оцінок з математики на екзамені, тобто $Y = \{2, 3, 4, 5\}$. Кожний студент має тільки одну оцінку. Іншими словами, кожному елементу x множини X відповідає єдиний елемент y множини Y .

Наведений приклад дозволяє ввести математичне поняття функції, яке використовується для опису таких відповідностей.

Нехай дані множини X і Y .

Функцією f із X в Y називається правило, за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність **єдиний** елемент $y \in Y$.

Функцію називають також *відображенням*.

Функціональна залежність між множинами позначається так:

$$f: X \rightarrow Y \text{ або } Y = f(X).$$

Елемент x називають аргументом, а y – значенням функції. Інакше: y – **образ** елемента x , x – **прообраз** елемента y .

Схематично це показується наступним чином.

Множина X називається **областю визначення** функції f , а множина Y – **областю значень**. Їх відповідно позначають D_f і E_f .



У наведеному прикладі, коли кожному студенту з X ставилася у відповідність одна оцінка з Y , ми мали функцію f із X в Y .

Якщо ж, наприклад, X – множина столів в аудиторії, а Y – множина студентів, то це не буде функцією f із X в Y , бо за одним столом може сидіти більше одного студента, тобто порушується правило: єдиність образу для кожного прообразу.

Графіком функції f називається множина впорядкованих пар

$$\Gamma = \{(x, y) | x \in X, y = f(x)\}.$$

У подальшому ми будемо користуватися такими двома знаками (кванторами): знаком "існування" $\exists$ (перевернута буква від

англійського слова Exit) і знаком "загальності" ("для будь-якого") $\forall$ (перевернута буква A від англійського слова All).

2.5. Числові функції

Якщо область визначення і область значень функції є підмножиною множини дійсних чисел, тобто $X, Y \subset R$, то функцію називають числовою.

Ще зі школи відомі наступні способи задання числової функції.

Аналітичний. У цьому разі числову функцію задають у вигляді однієї чи декількох формул.

Наприклад, $y = x^3$, $y = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{для } 0 \leq x \leq 4; \\ \ln x & \text{для } x > 4. \end{cases}$

Табличний. Цей спосіб зручний тоді, коли область визначення функції складається зі скінченної кількості точок.

Найчастіше за допомогою таблиці задаються функції, які являють собою результати експерименту, для яких не існує аналітичного (формульного) представлення.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Графічний. Функція повністю задається своїм графіком. Часто такі графіки кресляться самописцями при неперервній зміні якої-небудь величини. Наприклад, коли знімається кардіограма, то аргумент – час, значення функції – напруга на відповідній ділянці серця.

Ознайомимося коротко з основними властивостями функцій, відомими зі шкільного курсу.

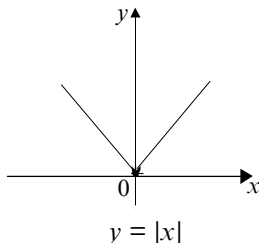
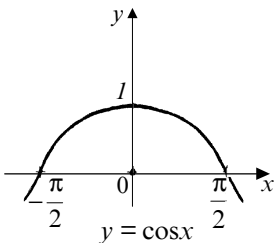
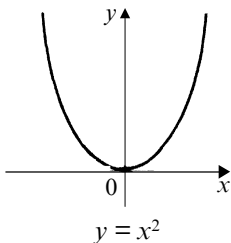
Парність і непарність

Функція називається *парною*, якщо

а) її область визначення D_f симетрична відносно нуля;

б) $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$.

Приклади: $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$ – парні функції на всій числовій осі R . Графіки парних функцій, симетричних відносно осі Oy , наведено нижче.



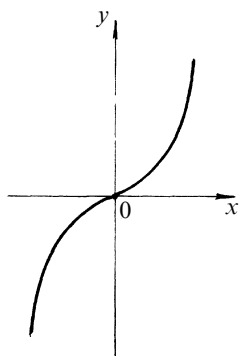
Функція f називається *непарною*, якщо

а) її область визначення D_f симетрична відносно нуля;

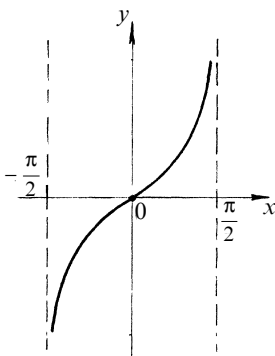
б) $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$.

Приклади: $y = x^3$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \sin x$ – непарні функції на всій числовій осі R .

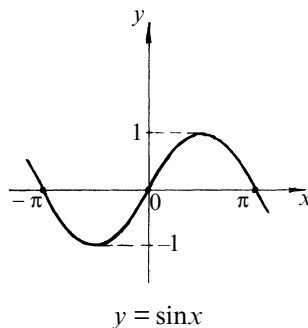
Графіки непарних функцій, симетричних відносно початку координат, наведено нижче.



$$y = x^3$$

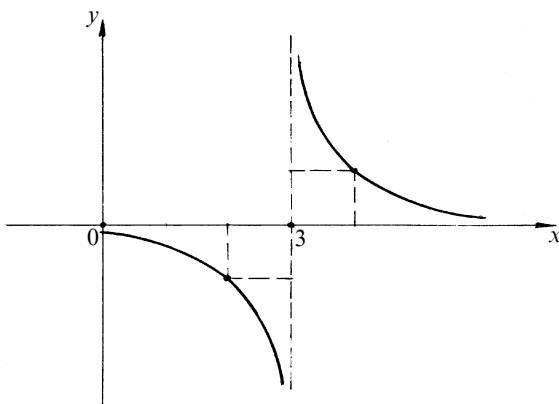


$$y = \operatorname{tg} x$$



$$y = \sin x$$

Приклад функції, яка не є парною і непарною, подано на рисунку.



$$y = \frac{1}{x-3}$$

Монотонність

Функція називається:

а) зростаючою, якщо $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

б) неспадною, якщо $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

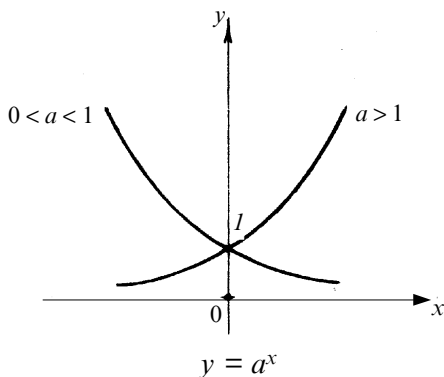
в) спадною, якщо $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

г) незростаючою, якщо $\forall x_1, x_2 \in D_f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

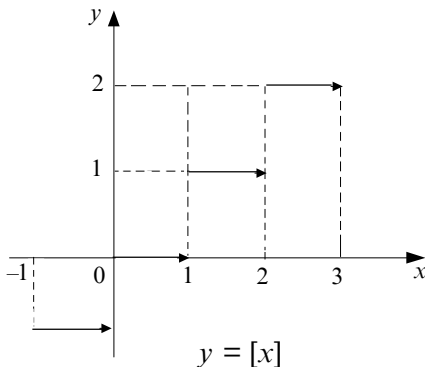
Зростаючі, незростаючі, спадні та неспадні функції на множині X називаються монотонними.

Приклади

Функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ і спадною при $0 < a < 1$ на інтервалі $(-\infty, +\infty)$.



Функція $y = [x]$ – ціла частина x . Ця функція кожному дійсному числу x ставить у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує x . Наприклад, $[0, 3] = 0$, $[-3, 7] = -4$, $[5, 6] = 5$. Ця функція – неспадна.



Обмеженість

Функція називається обмеженою, якщо $\exists M > 0 \quad |f(x)| \leq M$
 $\forall x \in D_f$.

Нерівність з модулем означає, що $-M \leq f(x) \leq M$.

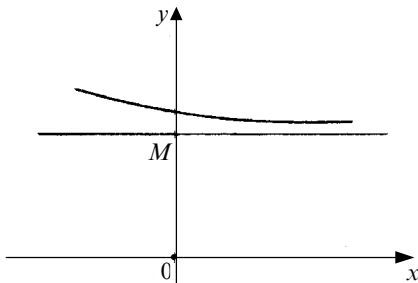
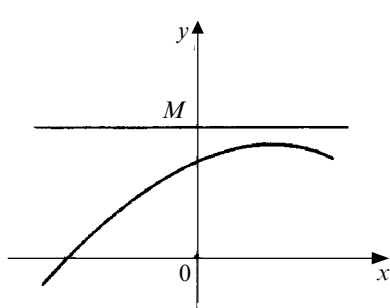
Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ обмежені на всій числовій осі, бо $|\sin x| \leq 1$ і $|\cos x| \leq 1$.

Функція $y = x^2$ не є обмеженою на всій числовій осі, але вона обмежена на будь-якому сегменті $[a, b]$.

Взагалі говорять, що функція обмежена на множині $X \subseteq D_f$, якщо $\exists M > 0 \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$.

Функція називається обмеженою зверху на множині $X \subseteq D_f$, якщо $\exists M > 0 \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$, і обмеженою знизу, якщо $\exists m > 0 \quad |f(x)| \geq m \quad \forall x \in X$.

Графік функції, обмеженої зверху, лежить нижче деякої прямої $y = M$, а графік функції, обмеженої знизу, – вище деякої прямої $y = m$.



Періодичність

Функція f називається періодичною, якщо існує число $T > 0$, таке, що

- 1) $\forall x \in D_f \quad (x \pm T) \in D_f$;
- 2) $f(x \pm T) = f(x) \quad \forall x \in D_f$.

У цьому разі число T називається періодом функції f .

У подальшому під періодом T функції будемо розуміти найменший з додатних періодів функції. Якщо T саме такий період, то kT ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) – також періоди функції.

Так у функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ $T = 2\pi$, у $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ $T = \pi$.

Зауважимо, що багато явищ у природі й техніці носять пері-

одичний характер (змінюються пори року, фази місяця, явища приливів і відливів тощо).

2.6. Композиція функцій

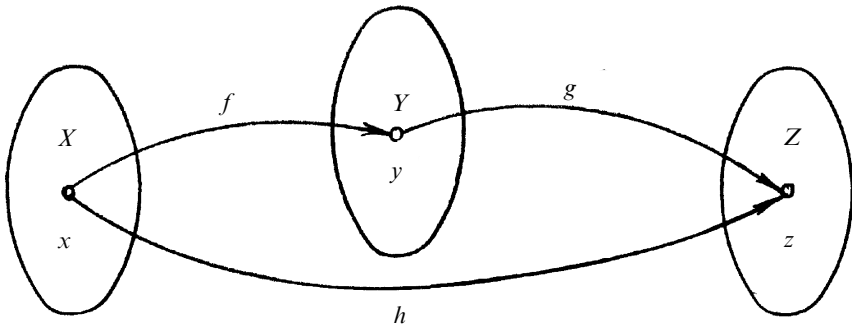
Нехай задані дві функції:

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y; \\ g: Y &\rightarrow Z. \end{aligned}$$

Звертаємо увагу на те, що область визначення функції g співпадає з областю значень функції f .

Композицією функцій f і g називається функція $h: X \rightarrow Z$, яка кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність елемент $z = g(f(x)) \in Z$.

Схематично це можна показати наступним чином.



Композицію позначають $f \circ g$ і по-іншому ще називають *суперпозицією* або *складеною* функцією.

Щоб побудувати композицію функцій, за аргумент функції беруть значення функції f : $h(x) = g(f(x))$. Змінну $u = f(x)$ функції $y = f(u)$ називають проміжним аргументом, а змінну $y = f(u)$ – зовнішньою функцією.

Наприклад, функція $y = \sqrt[5]{\cos x}$ є композицією двох функцій: степеневі $y = \sqrt[5]{u}$, $u \in [-1, 1]$, та тригонометричної $u = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Можна скласти композицію і більш як двох функцій. Дійсно, нехай задані функції

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y; \\ g: Y &\rightarrow Z; \\ h: Z &\rightarrow W. \end{aligned}$$

Остаточно одержуємо

$$W = h(Z) = h(g(y) = h(g(f(x))) \in W.$$

Відзначимо, що композиція функцій некомутативна:

$$f \circ g \neq g \circ f, \text{ але асоціативна: } h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

2.7. Обернена функція

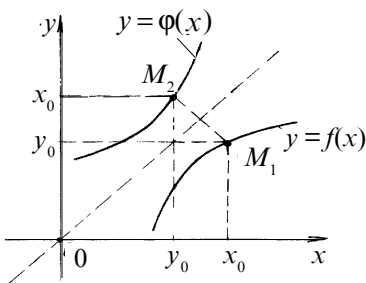
Нехай задана функція $y = f(x)$, для якої X – область визначення, Y – область значень функції. Причому кожному $x \in X$ ставиться у відповідність одне значення $y \in Y$. Вимагаємо, щоб навпаки кожному значенню $y \in Y$ ставилося у відповідність єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ з області визначення Y і областю значень X . Ця функція називається *оберненою функцією* до даної. Її іноді позначають і через f^{-1} .

Отже, функція $x = \varphi(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, якщо

- 1) областю визначення функції є область значень функції f ;
- 2) областю значень функції є область визначення функції f ;
- 3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення $x \in X$.

З цього випливає, що кожна з двох функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ може бути названа прямою і оберненою, тобто ці функції взаємно обернені. Оскільки кожна точка (x, y) кривої $y = f(x)$ є одночасно точкою кривої $x = \varphi(y)$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ збігаються.

Якщо ж, як це прийнято, аргумент позначати через x , а функцію через y , то замість $x = \varphi(y)$ одержимо $y = \varphi(x)$. Це означає, що кожній точці $M_1(x_0, y_0)$ кривої $y = f(x)$ відповідає точка $M_2(y_0, x_0)$ кривої $x = \varphi(y)$.



Так як у системи координат Oxy точки M_1 і M_2 симетричні відносно прямої $y = x$, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Приклади

1. Для функції $y = 3x + 1$ побудувати обернену.

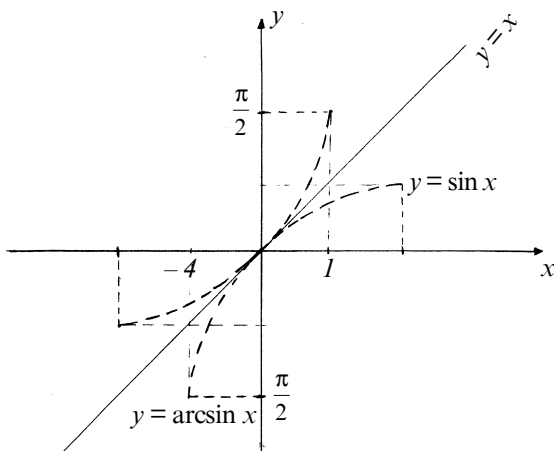
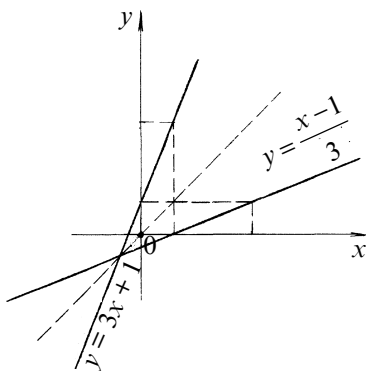
Тоді $x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow y = \frac{x-1}{3}$ –

функція, обернена до даної.

2. Функція $y = \sin x$ $x \in \mathbb{R}$ не має оберненої, оскільки кожному y відповідає нескінченна множина значень

x , але функція $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

має обернену $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.



Розділ 3. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Логіка як мистецтво міркувань зародилася у глибокій давнині. Але тільки наприкінці XVII ст. Лейбніц запропонував ввести у логіку математичну символіку та використовувати її для загальних логічних побудов. Цю ідею послідовно реалізував уже в XIX ст. англійський математик Джордж Буль і тим самим заклав основи математичної (символічної, формальної) логіки.

Далі наводяться деякі основні факти математичної логіки.

3.1. Висловлення та логічні зв'язки

Висловлення – це розповідне речення, яке може бути або істинним, або хибним, залежно від додаткових відомостей.

Приклади

Миколаїв – місто корабелів. Аркас написав оперу "Катерина". 30 ділиться на 17. Сьогодні випаде сніг.

Висловлення не може бути істинним і хибним одночасно. Будь-якому висловленню ставимо у відповідність 1 (або t від англійського *true*, або "і" – від українського істина), якщо воно істинне; 0 (або f від англійського *false*, або х – від українського хибність).

Висловлення в математичній логіці позначаються прописними латинськими буквами: A , B , C і т. п. Для того щоб із висловлень одержати нові висловлення, застосовуються спеціальні операції – **логічні зв'язки**.

Розглянемо п'ять основних логічних операцій: заперечення, диз'юнкція, кон'юнкція, імплікація, еквівалентність.

Заперечення (інверсія) – це висловлення, яке одержується із даного висловлення A за допомогою слова "не" (в програмуванні *NOT*). Цю операцію будемо позначати $\bar{A}$ (або $\neg A$). У природній мові це слово зазвичай або пропонують до дієслова, або замінюють на вираз "невірно, що", коли хочуть мати заперечення на початку речення. Наприклад, "Невірно, що Паніковський – син лейтенанта Шмідта".

Запереченням $\bar{A}$ висловлення A називається таке висловлення, яке приймає значення 0 (хибно), якщо висловлення A істинне, і значення 1 (істинно), якщо висловлення A хибне.

Просте додавання слова "не" до висловлення може протирічити мовним нормам. Тому у конкретних випадках вимагається "переклад" одержаного висловлення на українську мову. Нехай, наприклад, A = "Сьогодні випаде сніг". Можливі варіанти: "Не (сьогодні випаде сніг)", "Сьогодні не випаде сніг", "Сьогодні випаде не сніг", "Сніг випаде не сьогодні". Здоровий глузд підказує, що запереченням висловлення A є третє речення.

Диз'юнкція (логічне додавання) – це висловлення, яке одержується із двох даних висловлень A і B за допомогою сполучника "чи" ("або"). Диз'юнкція походить від латинського *disjunctio* – роз'єднання, розділення. Ця зв'язка застосовується також при перекладі на

мову логіки тверджень типу " A або B , або обидва разом" і т. п. Позначається на письмі $A \vee B$. В мові програмування позначається *OR*.

Кон'юнкція (логічне множення) походить від латинського *conjunctio* – з'єднання. Ця зв'язка застосовується також при перекладі на мову логіки тверджень типу " A але і B також", " A разом з B ", "не тільки A , але і B ", "як A , так і B ", " A , хоча і B " і т. п.

Кон'юнкція $A \wedge B$ висловлень A і B істинна тоді і тільки тоді, коли обидва із висловлень мають значення "істина".

Раніше ми користувалися цим сполучником при визначенні перетину множин. В мові програмування операція кон'юнкції позначається *AND*.

Імплікація (умовне висловлення) – це висловлення виду "якщо A , то B ". Зауважимо, що імплікація походить від латинського *implicatio* – сплетення, переплетення. Граматичний зворот "Якщо ... то" найчастіше вживається у мові науки, особливо в математиці.

Імплікації у природній мові відповідає складнопідрядне умовне речення. Нагадаємо, що складнопідрядним умовним реченням називається складне речення, складові частини якого з'єднані зворотом "Якщо ... то". При цьому частина висловлення, яка пов'язана зі словом "якщо", у логіці називається *антецедентом* (попередній), друга частина, що пов'язана зі словом "то", – *консеквентом* (наступний).

Результат операції імплікації істинний в усіх випадках, крім випадку, коли з істини випливає хибність.

В логіці імплікація поєднує *будь-які* два висловлення. Позначається $A \Rightarrow B$. Читається: "із A слідує B ". Аналоги: " A достатня умова для B ", " B необхідна умова для A ", " B , тільки якщо A ".

Приклади

Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого, то такі трикутники подібні.

Якщо $3 + 3 = 7$, то $8 - 1 = 6$ (хоча з буденного мислення таке твердження безглузде).

Якщо Петро завтра здасть екзамен, то річка вийде з берегів.

Імплікація у першому та другому прикладах істинна, а в третьому – хибна.

Операції заперечення, кон'юнкції та діз'юнкції називаються *булевими операціями*. Їх застосовують в електроніці, автоматичі, теорії обчислювальних пристроїв, прикладній лінгвістиці тощо.

Еквівалентність (еквіваленція) – це висловлення, що утворюється із двох висловлень і за допомогою слів "тоді і тільки тоді". Еквівалентність позначається $A \Leftrightarrow B$.

Синоніми для еквівалентності: "якщо A , то B , і якщо B , то A ", " A у тому, і тільки у тому випадку, коли B ", " A є необхідна і достатня умова для B ", " B є необхідна і достатня умова для A ".

Еквівалентність істинна тоді і тільки тоді, коли A і B мають однакові значення істинності (або обидва істинні, або обидва хибні).

Наприклад, "для того, щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі ділили одна одну навпіл".

Тоді, якщо A = "чотирикутник – паралелограм", B = "діагоналі чотирикутника ділять одна одну навпіл", то $A \Leftrightarrow B$.

Тут обидва висловлення A і B істинні.

Розглянемо інший приклад.

"Місяць – жива істота тоді і тільки тоді, коли кіт співає романс". Тут і A = "Місяць – жива істота", і " B – "кіт співає романс" – хибні, але $A \Leftrightarrow B$.

Логічні зв'язки зручно подавати у вигляді таблиць істинності, в яких "1" означає істину, а "0" – хибність.

Заперечення

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Імплікація

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Еквівалентність

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Кон'юнкція

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Диз'юнкція

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Логічні зв'язки дозволяють із простих висловлень одержати нові, більш складні.

Розглянемо приклад:

"Якщо завтра складу іспит на "добре" або "відмінно", то куплю торт і піду у кіно або театр".

Введемо позначення:

A = "Завтра складу іспит на "добре".

B = "Завтра складу іспит на "відмінно".

C = "Куплю торт".

D = "Піду у кіно".

E = "Піду у театр".

Тоді наше речення запишеться

$$(A \vee B) \Rightarrow (C \wedge (D \vee E)).$$

В логіці, як і в арифметиці, операції поділяються по старшинству.

Порядок виконання операцій такий: пріоритет має заперечення, далі на одному рівні – диз'юнкція і кон'юнкція, наступна зв'язка – імплікація і, нарешті, остання – еквівалентність. Це дозволяє при запису складних висловлень запобігти зайвій кількості дужок. Тому складене вище висловлення можна записати так: $A \vee B \Rightarrow C \wedge (D \vee E)$.

Покажемо, наприклад, для висловлення $A \vee B \wedge (B \Leftrightarrow \bar{C})$, як складається таблиця істинності.

A	B	C	$A \vee B$	$\bar{C}$	$B \Rightarrow \bar{C}$	$(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \bar{C})$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0

Така таблиця завжди має 2^n рядків, де n – кількість простих компонент. У нас три прості компоненти A , B , C , тому у таблиці $2^3 = 8$ рядків.

3.2. Логічна еквівалентність. Властивості логічних операцій

Введемо на множині всіх висловлень відношення логічної еквівалентності.

Формула A логічно еквівалентна формулі B , якщо їх таблиці істинності співпадають. Це записується як $A \equiv B$, або A eg B .

Перевіримо, наприклад, що $A \vee B \equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$. Для цього складемо таблицю істинності:

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

Бачимо, що побудована таблиця співпадає з таблицею диз'юнкції.

Логічно еквівалентні висловлення нерозрізненні з точки зору формальної логіки, оскільки вони при кожному наборі значень компонент приймають однакові значення істинності. У будь-якому міркуванні висловлення можна замінити на логічно еквівалентне.

Наступна теорема відображає алгебраїчні властивості диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення. Це властивості аналогічні відповідним властивостям об'єднання, перетину та доповнення множин.

Теорема. Наступні пари формул еквівалентні:

1. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$; 1.' $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.
2. $A \vee B \equiv B \vee A$; 2.' $A \wedge B \equiv B \wedge A$.
3. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$; 3.' $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
4. $\overline{\overline{A}} = A$; 4.' $\overline{\overline{A}} = A$.
5. $A \vee A \equiv A$; 5.' $A \wedge A \equiv A$.
6. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$; 6.' $A \wedge (A \vee B) \equiv A$.
7. $\overline{(A \vee B)} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$; 7.' $\overline{(A \wedge B)} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

Як бачимо, для логічних операцій справедливі асоціативні закони 1 і 1', комутативні закони 2 і 2', дистрибутивні закони 3 і 3'.

Алгебраїчні властивості логічних операцій вперше дослідив англійський математик Джордж Буль. Закони 6 і 6', як і для множин, називаються законами поглинання, а закони 7 і 7' – законами де Моргана.

Доведемо, наприклад, закон де Моргана 7 (заперечення диз'юнкції еквівалентно кон'юнкції заперечень) за допомогою таблиці істинності.

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A \wedge B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Як і для множин, для логічних операцій справедливий *принцип двоїстості*: якщо два висловлення логічно еквівалентні й у них замінити диз'юнкцію на кон'юнкцію і навпаки, то одержані висловлення є теж логічно еквівалентними.

Еквівалентності у даній теоремі розташовані двоїстими парами. Закон 4 і 4' є самодвоїстим.

Помітимо, що логічні еквівалентності теореми не залежать від змісту висловлень.

Наприклад, A = "Завтра буде холодна погода", B = "Завтра випаде сніг", C = "Температура впаде до 0 °С". Читачам дається можливість самостійно перевірити положення наведеної теореми.

Зауважимо, що для логіки висловлень процедурою вирішення є не лише побудова таблиць істинності, а й перетворення досліджуваного виразу в так звану нормальну форму, за допомогою якої можна встановити, чи є цей вираз загальнозначущим, чи ні; чи виконуваний він, чи ні.

Нормальна форма виразу, що досліджується, має задовольняти такі умови: 1) бути рівносильною вихідному виразу; 2) зі зв'язків логіки висловлень містити тільки символи заперечення, кон'юнкції та диз'юнкції; 3) символи заперечення мають стосуватися тільки пропозиційних змінних, а не складних виразів. Наприклад, розглянемо перетворення імплікації у диз'юнкцію. Як це робиться, видно із наступної таблиці.

A	B	$\overline{A}$	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Формула $A \Rightarrow B$ є рівносильною (логічно еквівалентною) формулі $\overline{A} \vee B$ і записується так:

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B.$$

3.3. Тавтології, або закони логіки

Висловлення, істинне при будь-яких значеннях його компонентів, називається *тотожно істинним* або *тавтологією*. Той факт, що A – тавтологія, позначається як $\models A$.

Заперечення тавтології, тобто тотожно хибне висловлення, називається *протиріччям*.

В літературі та розмовній мові під тавтологією розуміють повторення одних і тих самих або близьких за змістом слів. Наприклад, "Вот на берег вышли гости, Царь Салтан зовет их в гости" (О.С. Пушкіна); "Цілком і повністю", "день деньський".

Тавтології грають велику роль у формальній логіці, тому їх називають ще *законами логіки*.

Наведемо основні закони логіки, переконатися у справедливості яких можна через складання таблиць істинності.

- 1) $A \vee \bar{A}$ (закон виключення третього);
- 2) $(A \wedge \bar{A})$ (закон протиріччя);
- 3) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (закон силогізму);
- 4) $A \Leftrightarrow (\bar{A})$ (закон подвійного заперечення);
- 5) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$ (закон контрапозиції).

Надамо цим законам розумні словесні формулювання.

1. Закон виключення третього: "або A істинно, або A хибно" (третього не дано!).

2. Закон протиріччя: логічний закон, згідно з яким висловлення і його заперечення не можуть бути водночас істинними.

3. Силогізмом називається логічний умовивід, який складається із двох посилок і висновку. Наприклад: всі чотирикутники мають чотири сторони, паралелограм – чотирикутник, отже, паралелограм має чотири сторони.

4. Закон подвійного заперечення: A можна замінити на $\bar{\bar{A}}$.

5. Два висловлення "якщо A , то B " і "якщо не B , то не A " еквівалентні між собою. Наприклад: "якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого (A), то такі трикутники подібні (B)"; "якщо трикутники не подібні ($\bar{B}$), то не знайдуться два кути одного трикутника, щоб вони дорівнювали двом кутам другого ($\bar{A}$)".

Принцип двоїстості в законах логіки формулюється так: якщо два висловлення логічно еквівалентні і в них замінити диз'юнкцію на кон'юнкцію, тавтологію на протиріччя і навпаки, то висловлення будуть також логічно еквівалентними.

Наприклад, $\overline{A \wedge B}$ можна замінити $\overline{A} \vee \overline{B}$, а $\overline{A \vee B}$ на $\overline{A} \wedge \overline{B}$; $A \Rightarrow B$ заміняється на $\overline{A} \vee B$.

Зауважимо, що тавтологія відповідає універсальній множині U , а протиріччя – пустій множині $\emptyset$.

На закінчення складемо таблицю відповідності між поняттями теорії множин і математичної логіки.

Теорія множин	Математична логіка
Множина	Висловлення
Об'єднання	Диз'юнкція
Перетин	Кон'юнкція
Доповнення	Заперечення
Універсальна множина	Тавтологія
Пуста множина	Протиріччя

3.4. Правила логічного умовиводу

Завдання математичної логіки – дати теоретичну основу логічного умовиводу, критерії для розв'язання механічним шляхом питання про те, чи можна деякий ланцюжок міркувань вважати правильним. При цьому важлива тільки форма висловлень, що складає ланцюг, а не їх зміст. Основний інструмент побудови правильного доведення – тавтологічні імплікації.

Висловлення B називається *логічним висновком* висловлень $A_1, A_2, \dots, A_m$, якщо B істинне кілька разів, коли кожне $A_i (i = 1, 2, \dots, m)$ – істинне. Це записується так: $A_1, A_2, \dots, A_m \models B$.

Висловлення $A_1, A_2, \dots, A_m$ називаються *посилками* логічного умовиводу, а висловлення B – *висновком*.

Українською мовою це звучить так: "Нехай (якщо) $A_1, A_2, \dots, A_m$, тоді (то) B ". Більшість теорем в математиці має саме таку структуру. Наприклад: "Якщо дві протилежні сторони чотирикутника рівні та паралельні, то такий чотирикутник є паралелограм".

Посилки: A_1 – дві протилежні сторони чотирикутника рівні;
 A_2 – ці ж дві протилежні сторони паралельні.

Висновок: B – даний чотирикутник є паралелограмом.

Якщо мова йде про правила дедуктивного умовиводу, то слід додержуватися правила: якщо істинні посилки, то й висновок істинний. Наприклад:

Посилка A_1 : Усі люди смертні.

Посилка A_2 : Платон – людина.

Висновок B : Платон смертний.

Використовуючи цей силогізм (умовивід, що складається з двох посилок і висновку), можна вивести ще один силогізм, який є своєрідною лінгвістичною пасткою:

Посилка A_1 : Людей багато.

Посилка A_2 : Платон – людина.

Висновок B : Платонів багато.

Ми розглядаємо формальний інструмент правильного доведення теорем і виявлення логічних помилок у доведенні. Найпростіший спосіб – скласти сумісну таблицю істинності посилок і висновку, знайти в ній рядки, в яких посилки істинні, і переконатися, що висновок у цих рядках також має значення істини.

Розглянемо приклад. Побудуємо таблицю істинності для формули $(A \Rightarrow B \vee C) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

A	B	C	$B \vee C$	$A \Rightarrow B \vee C$	$A \Rightarrow B$	Формула
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Як бачимо, перебравши вісім можливих варіантів, ми відшукали єдиний, при якому формула хибна. Якщо б такого не було, то формула вважалася б логічно істинною і могла б застосовуватися за будь-якої інтерпретації A , B і C .

Але на практиці рідко будують такі таблиці. Як правило, доведення теореми $A_1, A_2, \dots, A_m \models B$ являє собою ланцюжок висловлень $E_1, E_2, \dots, E_n$, останнє з яких співпадає із висновком: $E_n = B$. Який із ланцюгів вважати правильним?

Вважаємо розумним наступне правило.

Будь-яка формула в ланцюзі доведення $E_1, E_2, \dots, E_n$ теореми $A_1, A_2, \dots, A_m \models B$ є:

або посилка (одне з висловлень $A_1, A_2, \dots, A_m$);

або логічний висновок із деяких попередніх висловлень.

Неважко впевнитись, що у ланцюжок доведень можна ввести будь-яку тавтологію, а також будь-яке висловлення, логічно еквівалентне якому-небудь висловленню ланцюжка.

Логічний висновок можна побудувати за допомогою набору правил умовиводу. Математично ці правила ґрунтовані на застосуванні тотожно істинних імплікацій.

Насправді, якщо висловлення вигляду "якщо A , то B " є тавтологією, ясно, що висловлення B логічно випливає із висловлення A .

Наведемо приклади таких імплікацій (з деякими з них ми вже знайомилися), які породжують правила умовиводу:

1. $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$: із $A \Rightarrow B$ і A виводиться B . Це правило має спеціальну назву – правило *modus ponens* (стверджуючий модус).

Розглянемо приклад щодо цього правила: "Якщо x ділиться на 4, то воно ділиться і на 2. Число x ділиться на 4. Значить, воно ділиться на 2".

2. Будемо тепер міркувати так: "Якщо число ділиться на 4, то воно ділиться і на 2. Число на 2 не ділиться. Значить, воно не ділиться і на 4". Формалізований вигляд цього умовиводу: $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Висновок правильний. В традиційній логіці він називається *modus tollens* (заперечуючий модус).

3. $\overline{A} \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$: із "не A " і " A або B " випливає B .

4. $(A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ – принцип приведення до абсурду: якщо із A випливає "не A ", то із цього випливає "не A ".

Суть цього така: щоб спростити A , треба його просто проігнорувати або заявити, що цього не може бути, тому що цього не може бути ніколи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бордачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.С.* Дискретна математика. – К.: Вища шк., 2002. – 288 с.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К.: Вища шк., 1993. – 642 с.
3. *Жоль К.К.* Вступ до сучасної логіки. – К.: Либідь, 2002. – 152 с.
4. *Лапа В.Г.* Математические основы кибернетики. – К.: Вища шк., 1974. – 450 с.
5. *Лесохин М.М., Лукьяненко К.Ф., Пиотровский Р.Г.* Введение в математическую статистику. Лингвистическое приложение основ математики. – Минск: Наука и техника, 1982. – 288 с.
6. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 450 с.
7. *Сикорский В.П.* Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1975. – 766 с.
8. *Турецкий В.Я.* Математика и информатика. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 558 с.
9. *Устенко С.А.* Основы дискретной математики. – Миколаїв: УДМТУ, 1998. – 58 с.
10. *Устенко С.А.* Методичні вказівки до виконання практичних робіт з курсу "Основы дискретной математики". – Миколаїв: УДМТУ, 1998. – 34 с.
11. *Фор Р., Кофман А., Дени-Пален М.* Современная математика. – М.: Мир, 1966. – 270 с.