



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КОРАБЛЕДУВАННЯ
імені адмірала Макарова

Кафедра теоретичної
електротехніки та
електронних систем

ІНДИВІДУАЛЬНИЙ КОМПЛЕКТ

навчально-методичних матеріалів

з дисципліни: *Теоретичні основи електротехніки (частина I)*

Студента групи _____
Спеціальність _____

Викладач: *доц. Жук О.К.*

Рекомендовано методичною радою ІЗДО
як методичні вказівки

Миколаїв 2004

Жук О.К. Індивідуальний комплект навчально-методичних матеріалів з дисципліни “Теоретичні основи електротехніки”: Методичні вказівки. – Миколаїв; ІЗДО НУК. 2004: – 132 с.

Кафедра теоретичної електротехніки та електронних систем

Наведені скорочена програма курсу і конспективний виклад теорії установлених режимів електричних кіл постійного та однофазного синусоїдального струму, магнітних кіл з постійними магніторушійними струмами. Методичні вказівки містять також вихідні дані для виконання контрольних робіт та зразки їх виконання, перелік контрольних питань, що виносяться на екзамен, перелік основної та додаткової літератури.

© Жук О.К.
© ТОВ “УНІВЕРСИТЕТ – НКИ”

ПРОГРАМА КУРСУ “ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ” (ЧАСТИНА І)

1. Електричні кола постійного струму.
 - 1.1. Елементарні електричні заряди і електромагнітне поле як особливий вид матерії.
 - 1.2. Електростатичне поле. Напруженість поля.
 - 1.3. Зв'язок зарядів тіл з їх електричним полем. Теорема Гаусса. Постулат Максвелла.
 - 1.4. Електрична напруга. Потенціал, різниця потенціалів. Електрорушійна сила.
 - 1.5. Електричний струм і принцип його неперервності.
 - 1.6. Опір провідника. Питомий опір. Провідність. Питома провідність.
 - 1.7. Енергія та потужність в електричному колі.
 - 1.8. Провідники, напівпровідники та діелектрики.
 - 1.9. Елементи електричних кіл.
 - 1.10. Основні закони електричних кіл.
 - 1.11. Еквівалентне перетворення опорів. Послідовне, паралельне та змішане сполучення резисторів. Взаємне еквівалентне перетворення резистивних ділянок, сполучених трикутником та зіркою.
 - 1.12. Методи розрахунку кіл постійного струму. Методи рівнянь Кірхгофа, контурних струмів, вузлових напруг, накладення, еквівалентного генератора. Еквівалентні перетворення активних ділянок кіл.
 - 1.13. Пересилання електроенергії постійного струму по двопровідній лінії.
 - 1.14. Нелінійні кола постійного струму. Загальні визначення. Статичний та динамічний опори нелінійних елементів. Графоаналітичний метод розрахунку нелінійних кіл. Аналітичний метод розрахунку нелінійних кіл.
2. Електрична ємність.
 - 2.1. Електрична ємність тіл.
 - 2.2. Конденсатори. Струм конденсатора. Енергія електричного поля.
 - 2.3. Послідовне і паралельне з'єднання конденсаторів.
3. Магнітні кола. Індуктивність. Взаємна індуктивність.
 - 3.1. Основні фізичні величини магнітного поля. Магнітна індукція (B). Магнітний потік (Φ). Намагніченість речовини (J). Напруженість магнітного поля (H). Магнітна проникність (μ).
 - 3.2. Закон повного струму.
 - 3.3. Феромагнітні матеріали. Деякі властивості феромагнітних матеріалів. Класифікація феромагнітних матеріалів.
 - 3.4. Основні закони магнітних кіл. Розрахунок магнітного кола.
 - 3.5. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца.
 - 3.6. Котушка індуктивності. Потокозчеплення. ЕРС самоіндукції.
 - 3.7. Індуктивно зв'язані котушки.
4. Електричні кола змінного синусоїдального струму.
 - 4.1. Генерування синусоїдальної ЕРС. Миттєві, амплітудні, діючі та середні значення ЕРС, напруг та струмів.
 - 4.2. Векторне зображення синусоїдальних величин. Векторні діаграми.
 - 4.3. Резистивний, індуктивний та ємнісний опори в колі синусоїдального струму.

- 4.4. Послідовне з'єднання резистивного, індуктивного та ємнісного опорів в колі синусоїдального струму. Закон Ома в класичній формі. Трикутник опорів. Коефіцієнт потужності φ .
- 4.5. Потужність в колі послідовного з'єднання резистивного і реактивного опорів.
- 4.6. Паралельне з'єднання приймачів у колі змінного струму.
- 4.7. Мішане сполучення приймачів.
- 4.8. Резонанс в електричних колах. Резонанс напруг. Резонанс струмів.
- 4.9. Символічний метод розрахунку синусоїдального струму. Деякі положення комплексного обчислення. Символічне (комплексне) відображення синусоїдних величин. Закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі. Комплексні опори та провідності. Методи розрахунку електричних кіл змінного струму. Кола з взаємоіндуктивно зв'язаними котушками.

1. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1. Елементарні електричні заряди й електромагнітне поле як особливий вид матерії

Елементарні частинки матерії, які мають *електричні заряди* (наприклад, електрон – від'ємний заряд, протон – додатний), є важливими структурними елементами атомів речовини й тому, природно, що з електромагнітними явищами пов'язані найрізноманітніші явища природи. Ці елементарні частинки надалі будемо коротко називати *елементарними електричними зарядами*.

Елементарні заряджені частинки входять до складу атомів і молекул речовини, але можуть бути теж у вільному стані. Вони знаходяться у безперервному русі й оточені *електромагнітним полем*.

Електричний заряд елементарних частинок є важливою фізичною властивістю, яка характеризує їх взаємозв'язок з власним електромагнітним полем і взаємодію із зовнішнім електромагнітним полем.

Електромагнітне поле є особливим видом матерії, воно є носієм енергії й має характерні для нього електричні й магнітні властивості.

Необхідно відзначити, що елементарну частинку речовини, яка володіє зарядом, не можна уявити без електромагнітного поля, але електромагнітне поле може існувати у вільному стані, відокремлене від зарядженої частинки, (наприклад фотон, а також електромагнітне поле, випромінюване антеною). Електромагнітне поле у вільному стані, не зв'язане з частинками речовини, поширюється в пустоті, за відсутності сильних гравітаційних полів, з природною для нього швидкістю $C = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cong 300\,000 \text{ км/с}$. У речовині, а також за наявності сильних гравітаційних полів, тобто поблизу дуже великих мас речовини, швидкість поширення електромагнітного поля дещо менша від C .

Будь-яке електромагнітне явище має дві характеристики – електричну й магнітну, між якими існує тісний взаємозв'язок. Отже, електромагнітне поле представляє собою два взаємозв'язані поля – *електричне поле* й *магнітне поле*.

Разом з тим, можна створити умови, коли в деякій області простору будуть спостерігатися тільки електричні або тільки магнітні поля. Наприклад, у заряджених нерухомих провідних тіл ззовні спостерігається тільки електричне поле.

У нерухомих постійних магнітів, навпаки, в просторі, що їх оточує, проявляється тільки магнітне поле.

Електричне поле створюється електричними зарядами, а також змінним магнітним полем. Магнітне поле створюється рухомими електричними зарядами, а також змінним електричним полем.

1.2. Електростатичне поле. Напруженість поля

Електростатичне поле – це окремий вид електромагнітного поля. Воно створюється сукупністю незмінних у часі нерухомих електричних зарядів.

Нехай маємо два нерухомі й заряджені незмінними зарядами тіла $(+q)$ і $(-q)$ (рис. 1.1), що розташовані в ідеально ізоляційному середовищі, електрична провідність якого дорівнює нулеві. В області цих тіл встановлюється електростатичне поле. Користуючись пробним зарядом q_0 , визначимо *основну фізичну величину*, яка характеризує електричне поле в кожній його точці й називається *напруженістю електричного поля* ($\vec{E}$).

Напруженість електричного поля дорівнює відношенню механічної сили $\vec{F}$, що діє на нерухомий додатний пробний заряд q_0 , розташований у даній точці поля, до величини цього заряду. Напруженість електричного поля як вектор $\vec{E}$ збігається за напрямом з

вектором механічної сили $\vec{F}$, яка діє на заряд q_0 , тобто:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.1)$$

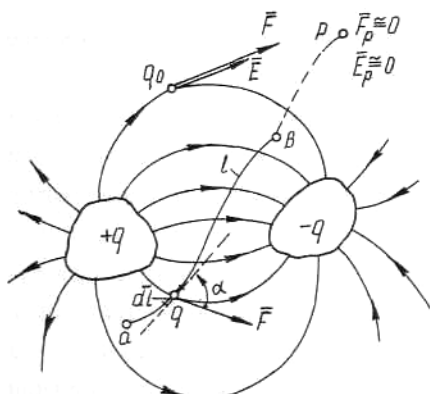


Рис.1.1. Електростатичне поле, створене нерухомими зарядами

Тут і надалі будемо користуватися **міжнародною системою одиниць** (СІ). В цій системі одиницею вимірювання заряду є кулон, одиницею сили є ньютон і одиницею напруженості електричного поля є вольт на метр:

$$[q] = 1 \text{ К} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}; [F] = 1 \text{ Н} = 1 \text{ Дж/м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2; [E] = 1 \text{ В/м}.$$

Обстежуючи все електричне поле, можна визначити напруженість поля у всіх його точках і потім провести ряд ліній так, щоб у кожній точці цих ліній дотичні до них збігалися за напрямом вектора напруженості поля. Ці лінії називають **лініями вектора напруженості електричного поля**, чи просто **силовими лініями** електричного поля. Сукупність силових ліній створює

картину електричного поля (рис. 1.1).

1.3. Зв'язок зарядів тіл з їх електричним полем. Теорема Гаусса.

Постулат Максвелла

Досліджуючи електричне поле в речовині, необхідно враховувати її електричні властивості. Речовини за своїми електричними властивостями поділяють на три основні групи – провідні речовини, діелектрики (ізоляційні речовини) й напівпровідникові речовини (напівпровідники).

Провідні речовини – це такі, які володіють значною кількістю вільних заряджених елементарних частинок (електронів або додатних чи від'ємних іонів), які починають упорядковано рухатись під дією електричного поля, створюючи тим самим в речовині впорядкований електричний струм. Основною властивістю провідних речовин є електропровідність – це властивість проводити електричний струм під дією постійного чи змінного електричного поля.

Діелектриками називають речовини, в яких вільних заряджених частинок є, практично, дуже мало й на перший план під дією електричного поля виступає явище поляризації, а струмом вільних заряджених частинок можна знехтувати.

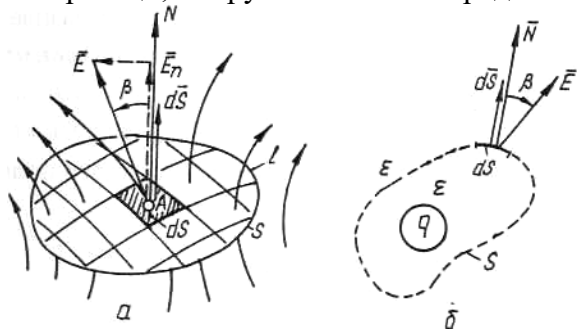


Рис 1.2. Обчислення потоку вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ крізь поверхню S, обмежену контуром l (а) та крізь замкнену поверхню S (б).

Напівпровідникові речовини

знаходяться за значенням електропровідності між провідниками й діелектриками. Вони широко застосовуються в електронній техніці.

Однорідним називають середовище, яке у всіх елементах об'єму має однакові фізичні властивості. **Ізотропним** називають середовище, яке в кожному елементі об'єму має однакові властивості у всіх напрямках.

Теорема Гаусса. Допустимо, що нерухоме заряджене тіло із зарядом q розташоване в однорідному ізотропному діелектрику. Діелектрик будемо вважати ідеальним, тобто таким, що не володіє

електропровідністю.

Уявимо в електричному полі поверхню S, обмежену контуром l, яка пронизується

силовими лініями електричного поля (рис. 1.2,а).

Розглянемо замкнену поверхню, яка обмежує частину простору, в якому знаходиться тіло з зарядом q . Замкнена крива подана на рис. 1.2,б (пунктирна лінія) – це слід цієї поверхні в площині рисунка.

Теорема Гаусса і встановлює зв'язок між потоком вектора $\vec{E}$ крізь цю замкнену поверхню із зарядом q таким співвідношенням:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum q}{\varepsilon} \quad (1.2)$$

Отже, теорема Гаусса формулюється так: потік вектора напруженості електричного

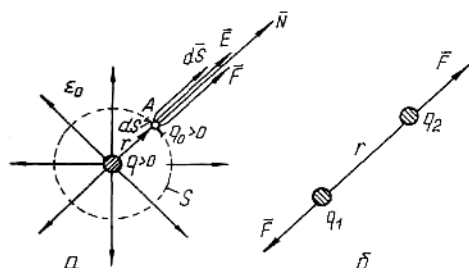


Рис. 1.3. Лінії напруженості електричного поля точкового заряду (а), взаємодія двох точкових зарядів (б)

поля крізь замкнену поверхню в однорідному ізотропному діелектрику дорівнює відношенню електричного заряду, який знаходиться всередині цієї поверхні, до абсолютної діелектричної проникності діелектрика.

Діелектричну проникність ε будь-якої речовини прийнято порівнювати з діелектричною проникністю пустоти (електричною сталою ε_0). Відношення ε до ε_0 позначають ε_r і називають відносною діелектричною проникністю речовини, яка показує в скільки разів у цьому середовищі сила взаємодії між зарядами менша, ніж у вакуумі.

Це величина безрозмірна [-].

Отже,

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \text{ чи } \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0.$$

Значення відносної діелектричної проникності для деяких діелектриків наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Значення ε для деяких діелектриків

Діелектрики	ε_r	Діелектрики	ε_r
Пустота	1	Скло	5-10
Повітря	1,0006	Слюда	6-8
Мармур	8,3	Папір кабельний	2,3-3,5
Фарфор	6,0-7,5	Олія трансформаторна	2,2-2,5
Гума	3,5		

Використовуючи теорему Гаусса (1.2), визначимо напруженість електричного поля нерухомого точкового заряду q (рис. 1.3,а), розташованого в пустоті (чи в ідеальному діелектрику з проникністю ε_0). Остаточно напруженість відокремленого точкового заряду q на відстані r визначиться так:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (1.3)$$

Закон Кулона. Якщо помістити в точку A поля заряду q_1 (рис. 1.3,б) другий точковий заряд q_2 , то на нього буде діяти механічна сила $\vec{F} = \vec{E} \cdot q_2$, і враховуючи (1.3), отримаємо:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (1.4)$$

Одержану залежність називають законом Кулона. Згідно з цим законом два точкові заряди q_1 і q_2 в пустоті взаємодіють з силою $\vec{F}$, пропорційною добуткові зарядів q_1 та q_2 і

зворотно пропорційною квадрату відстані між ними (r^2). Ця сила напрямлена по лінії, яка з'єднує ці точкові заряди. Якщо заряди мають однакові знаки, то вони відштовхуються, а якщо різні знаки – то вони притягуються.

Постулат Максвелла. Теорема Гаусса встановлює зв'язок між зарядом q тіла й електричним полем, що його оточує, тільки для однорідного й ізотропного діелектрика й для електростатичного поля.

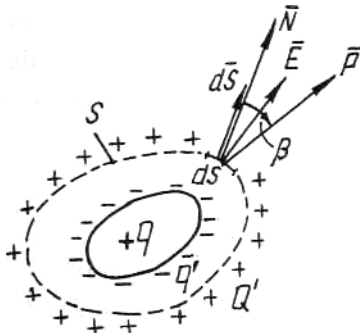


Рис. 1.4. Зміщення елементарних заряджених частинок Q' діелектрика через поверхню S внаслідок поляризації

Дуже важливим є узагальнення цього зв'язку для будь-якого діелектрика, в загальному неоднорідного й неізотропного, що можливо при введенні нової фізичної величини-вектора електричного зміщення ($\bar{D}$) в діелектрику. Цей зв'язок може бути застосований також для полів, змінних в часі.

Розглянемо процеси в діелектрику при внесенні його в зовнішнє електричне поле. В цьому випадку на заряджені частинки, які входять до складу молекул речовини, з боку поля будуть діяти механічні сили. Відбувається поляризація діелектрика, ступінь якої в даній точці характеризується векторною величиною, що називається поляризованістю або інтенсивністю поляризації, і позначається літерою P .

Позначимо через $\bar{D}$ вектор, що дорівнює сумі векторів

$$\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} :$$

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \quad (1.5)$$

і назовемо його вектором електричного зміщення. Згідно з постулатом Максвелла:

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = q \quad (1.6)$$

Отже, потік вектора електричного зміщення крізь замкнену поверхню в напрямі зовнішньої нормалі дорівнює вільному електричному заряду q , який знаходиться всередині цієї замкненої поверхні.

Співвідношення (1.6) називають узагальненою теоремою Гаусса або постулатом Максвелла, який одержав це співвідношення. Воно справедливе для всіх без винятку середовищ, а також для як завгодно змінних електричних полів, що враховується вектором $\bar{P}$.

Тоді співвідношення між $\bar{D}$ і $\bar{E}$ набуває вигляду:

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} \quad (1.7)$$

де ϵ – абсолютна діелектрична проникність середовища в точці, де розглядаються величини $\bar{D}$ та $\bar{E}$.

1.4. Електрична напруга. Потенціал, різниця потенціалів. Електрорушійна сила

Напруга (u, U). Нехай з точки a в точку b по шляху l в електричному полі (рис. 1.1) переміщується частинка, що має заряд q . При цьому виконується робота $A = \int_{l_{ab}} \bar{F} d\bar{l}$ і, враховуючи (1.1), одержимо:

$$A = q \int_{l_{ab}} \bar{E} d\bar{l} \quad (1.8)$$

Ця робота може бути виконана силами поля – коли додатний заряд переміщується за напрямом силових ліній (з точки a в точку b), або зовнішніми силами – коли додатний

заряд рухається проти напрямку силових ліній (з точки b в точку a). Робота A пропорційна лінійному інтегралу $\int_{l_{ab}} \bar{E} d\bar{l}$ напруженості електричного поля вздовж заданого шляху l_{ab} .

Цей інтеграл за визначенням дорівнює електричній напрузі U_{ab} вздовж заданого шляху від точки a до точки b :

$$U_{ab} = \int_{l_{ab}} \bar{E} d\bar{l} \quad (1.9)$$

Отже, вираз роботи сил електричного поля (1.8) можна записати ще так:

$$A_{l_{ab}} = qU_{l_{ab}} \quad (1.10)$$

Якщо $q = 1$, тоді $U_{l_{ab}} = A_{l_{ab}}$, а це означає, що **напруга – це робота, виконана силами поля при переміщенні одиничного додатного заряду з точки a в точку b по шляху l .**

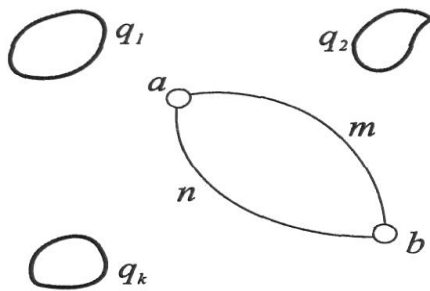


Рис. 1.5. В електростатичному полі робота переміщення заряду не залежить від шляху n чи m

Отже, **електрична напруга** є фізичною величиною, що характеризує електричне поле вздовж заданого шляху й дорівнює лінійному інтегралові напруженості електричного поля вздовж цього шляху.

Припустимо, що в електричному полі статичних зарядів (електростатичне поле) точкове тіло, яке має заряд q , переміщається по замкненому шляху **ambna** (рис. 1.5). На одних ділянках шляху переміщення тіла відбувається в напрямі сил поля (робота додатна), на інших – проти сил поля (робота від'ємна). Оскільки після обходу по замкненому контуру система повертається в початкове положення, то виконана полем робота

$$q \oint \bar{E} d\bar{l} = 0,$$

тобто

$$\oint \bar{E} d\bar{l} = 0 \quad (1.11)$$

Звідси випливає незалежність лінійного інтеграла напруженості електростатичного поля від вибору шляху інтегрування, якщо задані початкова і кінцева точка a та b шляху переміщення тіла. Справді, $\oint \bar{E} d\bar{l} = \int_{amb} \bar{E} d\bar{l} + \int_{bna} \bar{E} d\bar{l} = 0$.

Звідси

$$\int_{amb} \bar{E} d\bar{l} = - \int_{bna} \bar{E} d\bar{l} = \int_{anb} \bar{E} d\bar{l} = \int_a^b \bar{E} d\bar{l}.$$

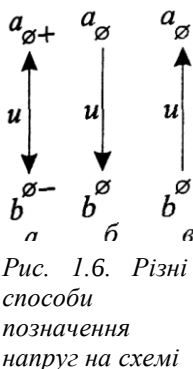


Рис. 1.6. Різні способи позначення напруг на схемі

Для однозначності необхідно певним способом зазначити напрям шляху визначення електричної напруги. В американській електротехнічній літературі найчастіше початкова точка a позначається знаком "+", кінцева b – знаком "-" з двобічно спрямованою стрілкою (рис. 1.6,а). У вітчизняній літературі напрям визначення напруги вказується однобічно спрямованою стрілкою. Одні приймають, що стрілка вказує на кінцеву точку й спрямована до точки з нижчим потенціалом (рис. 1.6,б), інші приймають, що стрілка вказує на початкову точку й спрямована до точки з вищим потенціалом (рис. 1.6,в). Оскільки напруга є скалярною величиною, обидва способи прийнятні.

Ми позначатимемо напругу стрілкою, яка показує початковий шлях її визначення (рис.1.6,в). Такий спосіб позначення впроваджений в ужиток фундатором електротехнічної школи проф. С. Фризе в 1923 р.

У загальному випадку умовно-додатний напрям напруги вибирається довільно, але в окремих випадках, зокрема при позначенні напруги на опорі, він встановлюється так:

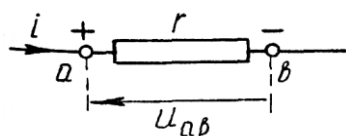


Рис. 1.7. Позитивні скерування струму й напруги на опорі r

якщо додатний напрям струму в опорі r буде скерований від точки a до точки b , то відповідно до цього додатний напрям напруги треба вибирати від точки b до точки a . Стрілка позначеної напруги завжди буде вказувати точку вищого потенціалу. Тоді згідно із законом Ома $U_{ab} = +rl$ (рис. 1.7).

Часто замість терміна "напруга вздовж деякої ділянки шляху" вживають термін "спад напруги вздовж цієї ділянки".

Можна сказати, що значення напруженості електричного поля дорівнює спадові напруги, віднесеному до одиниці довжини лінії напруженості електричного поля. Справді, на шляху dl , якщо вектор $\vec{E}$ збігається з напрямом $d\vec{l}$, то згідно з (1.9) $dU = E dl$, а значить, $E = dU / dl$. Для однорідного провідника з незмінним поперечним перерізом по всій довжині l маємо:

$$E = U / l \text{ чи } U = El. \quad (1.12)$$

Потенціал (ϕ). Розглянемо на рис. 1.1 точку p , значно віддалену від заряджених тіл, тоді величини $\vec{F}_p$ і $\vec{E}_p$ в точці p будуть достатньо малими й ними можна знехтувати.

Внаслідок цього в потенціальному полі лінійний інтеграл $\int_a^p \vec{E} d\vec{l}$ буде функцією тільки координат точки a : x_a, y_a, z_a . Цей інтеграл називають потенціалом точки a :

$$\phi_a = \int_a^p \vec{E} \cdot d\vec{l} = f(x_a, y_a, z_a) \quad (1.13)$$

Отже, електричний потенціал точки a поля дорівнює роботі сил електричного поля при перенесенні одиничного додатного заряду з цієї точки до деякої вибраної точки p . Електричний потенціал визначається з точністю до деякої сталої, яка залежить від вибору точки p , в якій потенціал прийнято нульовим. Найчастіше за нульовий потенціал приймають потенціал на поверхні землі або теоретично в нескінченності. Тоді потенціал точки a запишеться так:

$$\phi_a = \int_a^{\infty} \vec{E} d\vec{l} \quad (1.14)$$

Для потенціальних електричних полів різниця потенціалів між двома точками дорівнює напрузі між цими точками

$$\phi_a - \phi_b = U_{ab} \quad (1.15)$$

В електричній схемі будь-яку, але тільки одну точку можна з'єднати із землею, тобто прирівняти потенціал цієї точки до нуля, і розподіл струмів у її вітках від цього не зміниться.

Електричне поле, яке може бути охарактеризоване електричним потенціалом, називається **потенціальним**. Таким є, як це показано, електростатичне поле. Сюди належить також електричне поле постійних струмів, які протікають у провідниках, але за умови, що поле розглядається поза простором дії джерел електрорушійних сил (ЕРС). Розподіл зарядів на провідниках є незмінним в часі, як в електростатичному полі. На відміну від потенціального **поле постійних струмів називають стаціонарним**.

Електрорушійна сила (e, E). Наявність електрорушійної сили (ЕРС) пов'язана з наявністю непотенціальних електричних полів. Завжди, коли лінійний інтеграл напруженості електричного поля вздовж замкненого контуру не дорівнює нулеві, в контурі діє (діють) ЕРС. Отже, умовою наявності ЕРС у контурі є $\oint \vec{E} d\vec{l} \neq 0$, а сам інтеграл $\oint \vec{E} d\vec{l}$ завжди дорівнює сумарній ЕРС у замкненому контурі l :

$$e = \oint_l \vec{E} d\vec{l} \quad (1.16)$$

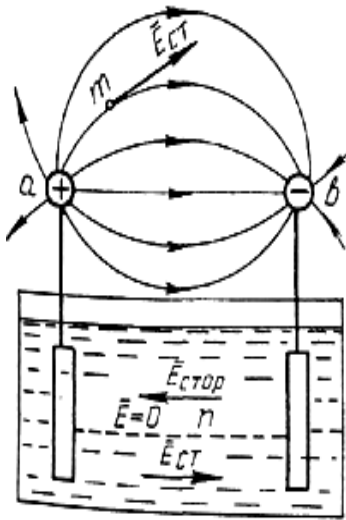


Рис. 1.8. Напруженості електричного поля в гальванічному елементі.

Джерелами ЕРС є електричні генератори, гальванічні елементи, акумулятори, термоелементи, магнетогідродинамічні генератори (МГД-генератори) та інші.

Для прикладу розглянемо гальванічний елемент (рис. 1.8), в якому інтеграл вектора $\vec{E}$ по довільному шляху **amb** в діелектрику між електродами дорівнює різниці потенціалів електродів:

$$\int_{amb} \vec{E} d\vec{l} = \int_{amb} \vec{E}_{cm} d\vec{l} = \varphi_a - \varphi_b = u_{ab},$$

де $\vec{E}_{cm}$ – вектор напруженості **електростатичного** поля.

Інтеграл вектора напруженості електростатичного поля вздовж шляху **amb** – по електроліту $\int_{amb} \vec{E} d\vec{l} = 0$ (коло незамкнене, струм відсутній), звідси випливає, що $E = 0$.

Відсутність у тонких шарах поверхонь електродів електричного поля є наслідком накладання усередині цих шарів на електричне поле з вектором напруженості $\vec{E}_{cm}$, утвореного зарядами електродів і електроліту, однакового протилежного вектора напруженості **стороннього** електричного поля $\vec{E}_{стор}$, що має неелектростатичне, а електрохімічне походження.

Отже, $\vec{E} = \vec{E}_{cm} + \vec{E}_{стор} = 0$ чи $\vec{E}_{cm} = -\vec{E}_{стор}$.

$$\text{Тоді } \int_{amb} \vec{E}_{cm} d\vec{l} = - \int_{amb} \vec{E}_{стор} d\vec{l} = \int_{bna} \vec{E}_{cm} d\vec{l}.$$

Внаслідок чого,

$$\int_{bna} \vec{E}_{cm} d\vec{l} = e \quad (1.17)$$

і є ЕРС гальванічного елемента, яка намагається привести в рух усередині елемента заряджені частинки проти сил електростатичного поля $\vec{E}_{cm}$.

У загальному випадку в замкнутому контурі, крім гальванічних елементів з $\vec{E}_{стор}$ можуть бути увімкнені генератори електричної енергії з індукованою напруженістю електричного поля $\vec{E}_{ind}$, та заряджені конденсатори з напруженістю електричного поля зміщення $\vec{E}_D$. В цьому випадку ЕРС в замкнутому контурі буде:

$$e = \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint \vec{E}_{ind} d\vec{l} + \oint \vec{E}_{стор} d\vec{l} + \oint \vec{E}_D d\vec{l} \quad (1.18)$$

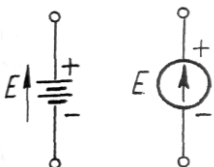


Рис. 1.9. Позначення ЕРС на схемах

Згідно з викладеним **електрорушійною силою називають фізичну величину, яка викликає електричний струм у провідному контурі та дорівнює лінійному інтегралу вектора напруженості електричного поля вздовж цього контуру.**

На електричних схемах ЕРС позначають, як показано на рис. 1.9. Звернемо увагу на те, що ЕРС напрямлена всередині джерела енергії від від'ємної клеми до додатної (згідно з напрямом $\vec{E}_{стор}$).

Основною одиницею вимірювання ЕРС, напруги й потенціалу в системі СІ є 1 вольт (1 В):

$$[U] = \frac{[A]}{[q]} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ К}} = 1 \text{ В}.$$

Крім одиниці 1 В, використовують і похідні одиниці: 1 кіловольт (1 кВ = 10³В) та 1 мілівольт (1 мВ = 10⁻³В).

1.5. Електричний струм і принцип його неперервності

Під електричним струмом розуміємо явище спрямованого руху носіїв електричних зарядів (струм вільних зарядів) та зміну електричного поля в часі (струм зміщення). Обидва ці явища супроводжуються появою магнітного поля. Додатним напрямом електричного струму прийнято вважати напрям руху носіїв позитивних зарядів.

Основними видами електричного струму є: струм провідності, струм переносу (конвекції) та струм зміщення. Розглянемо їх окремо.

Струмом провідності i_γ називають упорядкований рух заряджених частинок всередині провідника під дією електричного поля. Струм провідності зумовлений наявністю вільних електронів (у металах), іонів (в електролітах). Речовини з такою провідністю називаються провідниками. Це, як правило, метали і електроліти, які мають електронну та іонну провідність.

Сила електричного струму (чи просто електричний струм) визначається кількістю заряду, що проходить крізь поверхню за одиницю часу, тобто

$$i = dq / dt \quad (1.19)$$

Якщо за однакові проміжки часу через поперечний переріз провідника проходить різна кількість заряду, струм вважається змінним і миттєве значення його визначається за (1.19); якщо за однакові проміжки часу через поперечний переріз провідника проходять однакові кількості заряду, струм називається постійним і визначається як

$$I = q / t \quad (1.20)$$

Диференційною мірою електричного струму є густина електричного струму (δ), значення якої знаходять із співвідношення

$$\delta = \frac{di}{dS} \quad (1.21)$$

при перпендикулярному розташуванні струму di до площинки dS ; δ є векторною величиною. Густина струму провідності дорівнює

$$\bar{\delta} = \gamma \bar{E}, \quad (1.22)$$

де γ – питома електрична провідність провідника; $\bar{E}$ – вектор напруженості електричного поля. Користуються також питомим електричним опором $\rho = 1 / \gamma$, розмірність якого є Ом · мм / м, чи Ом·м.

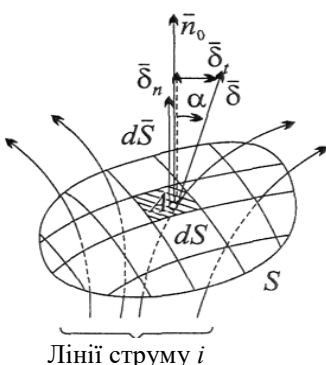
Встановимо зв'язок у загальному випадку між силою електричного струму i та його густиною $\bar{\delta}$. Нехай через площу S (рис. 1.10) проходить струм, який зображений лініями струму i .

Струм через елемент поверхні dS дорівнює

$$di = \delta_n dS = \delta \cos \alpha \cdot dS = \bar{\delta} d\bar{S},$$

а через всю поверхню S :

$$i = \int_S \bar{\delta} d\bar{S} \quad (1.23)$$



Лінії струму i

Рис. 1.10. До встановлення співвідношення між струмом i та його густиною δ

Вектор $d\vec{S}$ чисельно дорівнює площі dS і напрямлений по нормалі $\vec{n}_0$ перпендикулярно до dS .

Струм переносу (конвекції) i_v – це явище перенесення зарядів зарядженими частинками чи тілами, що рухаються у вільному просторі (рух заряджених елементарних частинок в пустоті, струм в електронних лампах, електричний струм у газах тощо).

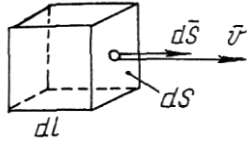


Рис. 1.11. До визначення струму переносу.

Виділимо в просторі, в якому рухаються зі швидкістю $\vec{v}$ заряджені частинки з об'ємною густиною ρ , прямокутний паралелепіпед з елементарним об'ємом $dV = dl \cdot dS$ і з ребром dl , паралельним вектору $\vec{v}$ (рис. 1.11). Заряд паралелепіпеда $dq = \rho dV = \rho dl \cdot dS$. Цей

заряд за час dt проходить відстань dl . Отже:

$$di_v = dq / dt = \rho dl \cdot dS / dt = \rho dS \cdot dl / dt = \rho \cdot dS \cdot v$$

Оскільки вектори $d\vec{S}$ і $\vec{v}$ збігаються, то вектор густини струму переносу визначить: $\vec{\delta}_v = \frac{di_v}{dS} = \rho \cdot \vec{v}$, отже, остаточно маємо:

$$\vec{\delta}_v = \rho \cdot \vec{v} \quad (1.24)$$

В (1.24) $[\rho] = 1 \text{ Кл} \cdot \text{м}^{-3}$ – об'ємна густина заряджених частинок, $[v] = 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ – швидкість руху заряджених частинок.

Відзначимо, що для металевих і електролітичних провідників $\vec{\delta}_v \ll \vec{\delta}_D$, і тому струмом переносу в цих провідниках нехтують.

Струм зміщення i_D існує за наявності змінного електричного поля в діелектрику чи в пустоті. Згідно з постулатом Максвелла під час внесення деякого заряду q у замкнену поверхню (рис. 1.4) крізь цю поверхню в напрямі зовнішньої нормалі в діелектрику й пустоті проходить (зміщується) такий самий за знаком і значенням заряд, причому зміна його пов'язана з вектором зміщення співвідношенням (1.6) $dq = \vec{D} d\vec{S}$. Отже $di_D = dq / dt = d\vec{D} / dt \cdot d\vec{S}$ і його густина:

$$\vec{\delta}_D = \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (1.25)$$

Враховуючи (1.5), густину струму зміщення (1.25) запишемо у вигляді:

$$\vec{\delta}_D = \frac{d}{dt} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \frac{d}{dt} \cdot (\vec{D}_0 + \vec{P}) = \frac{d\vec{D}_0}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{\delta}D_0 + \vec{\delta}P \quad (1.26)$$

Компонента $\vec{\delta}P$ – відповідає тут зміщенню заряду, зв'язаного з частинками діелектрика (за рахунок поляризації діелектрика) крізь одиницю поверхні, перпендикулярної до напрямку цього зміщення, під час зміни електричного поля (вектора напруженості E) в діелектрику. Отже, він має наочне фізичне пояснення.

Компонента $\vec{\delta}D_0$ характеризує процес, що відбувається під час зміни електричного поля в пустоті (тобто в просторі, де відсутні відомі нам частинки матерії), і його називають вектором густини струму зміщення в пустоті. Наочної інтерпретації цього струму при сучасному стані науки дати не можна, оскільки ми ще не знаємо внутрішньої структури електромагнітного поля та внутрішніх процесів, що в ньому відбуваються.

У загальному випадку, остаточно, вектор густини струму визначається сумою всіх компонентів:

$$\vec{\delta} = v\vec{E} + \rho\vec{V} + \frac{d\vec{D}}{dt} \quad (1.27)$$

У колах постійного струму $D(T) = \text{const}$, отже, $\vec{\delta}D = 0$, і, ураховуючи ще, що $\vec{\delta}v \cong 0$, остаточно для кіл постійного струму маємо:

$$\boxed{\bar{\delta} = \gamma \bar{E}} \quad (1.28)$$

Якщо позначити повний електричний струм

$$\bar{i} = \bar{i}_\gamma + \bar{i}_v + \bar{i}_D \quad (1.29)$$

і враховувати (1.27), то для будь-якої замкненої поверхні можемо записати:

$$i = \oint_S \bar{\delta} d\bar{S} = 0 \quad (1.30)$$

що є загальним виразом принципу неперервності електричного струму, згідно з яким **повний електричний струм крізь замкнену поверхню в будь-якому середовищі дорівнює нулеві**. Його ще називають **принципом замкненості електричного струму**.



Рис. 1.12. Скерування густини струму, напруженості електричного поля в провіднику рівного поперечного перерізу.

Лінії електричного струму неперервні, не мають ні початку, ні кінця – утворюють замкнуті контури. Це впливає з принципу неперервності електричного струму.

Якщо розглянути провідник однакового поперечного перерізу по всій довжині й в якому струм розподіляється рівномірно по всій його площі поперечного перерізу S (рис. 1.12), то вектори, $\bar{\delta}$, $d\bar{S}$, $\bar{E}$, $\bar{n}_0$ збігаються. Враховуючи з (1.21), будемо мати, що:

$$\boxed{I = \delta S} \text{ чи } \boxed{\delta = \frac{1}{S}} \quad (1.31)$$

У загальному випадку струм у часі може змінюватися довільно, як зображено на рис. 1.13, що спостерігається, наприклад, під час перехідних процесів, які виникають в електричних колах при переході від одного до іншого їх стану.

Якщо зміна електричного струму в часі повторюється з деяким періодом T (рис. 1.14), то такий струм називають **змінним періодичним**, або просто **періодичним**.

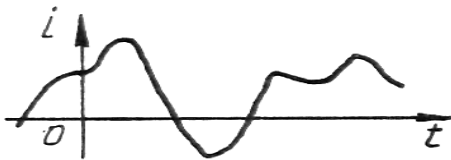


Рис. 1.13. Струм змінюється довільно

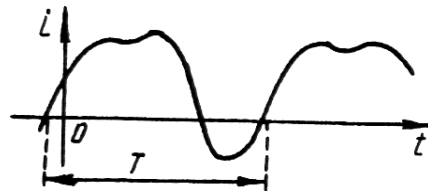


Рис. 1.14. Періодично змінний струм

Якщо струм в часі змінюється гармонійно – за синусоїдним законом (рис. 1.15), його називають **синусоїдним струмом**. В зв'язку з цим часто періодичний несинусоїдний за формою струм називають **несинусоїдним**. Незмінний в часі електричний струм (рис. 1.16) називають **постійним** і позначають великою літерою I .

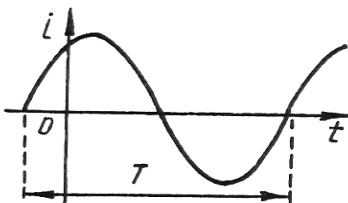


Рис. 1.15. Синусоїдний струм

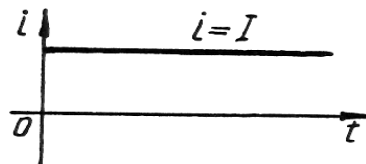


Рис. 1.16. Постійний струм

Додатним напрямом струму прийнято вважати напрям руху носіїв позитивних зарядів. У вітках схем електричних кіл умовно-додатний напрям струму позначають стрілками. Якщо в колі є тільки одне джерело постійної ЕРС, то додатні заряди будуть рухатися через вітку з ЕРС в напрямі стрілки ЕРС. Тому для того, щоб одержувати при

розрахунках додатні значення струму через джерело, якщо в схемі діє тільки одна ЕРС, треба вибирати умовно-додатний напрям струму, який збігається з напрямом дії ЕРС.

Одиниця сили струму є **ампер** і є однією з основних одиниць системи СІ:

$$i = \frac{[q]}{[t]} = \frac{1\text{К}}{1\text{с}} = 1\text{А}$$

Похідні одиниці це 1 міліампер (1 мА = 10^{-3}А); 1 мікроампер (1 мкА = 10^{-6}А); 1 кілоампер (1кА = 10^3А).

1.6. Опір провідника. Питомий опір. Провідність. Питома провідність

Під час впорядкованого руху носії зарядів багаторазово стикаються з іншими частинками речовини, які є в тепловому русі. Ці зіткнення частково затримують впорядкований рух носіїв зарядів і є причиною опору провідного середовища проходженню струму.

Властивість середовища, що характеризує його здатність проводити електричний струм, називають **питомою провідністю** γ . Питома провідність γ залежить від фізичних властивостей провідного матеріалу й від температури. У системі СІ $[\gamma] = 1\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1} = 1\text{См/м}$.

В класичній електронній теорії величина γ визначається такою формулою:

$$\gamma = \frac{n_0^2 \bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \quad (1.32)$$

де n_0 – кількість електронів в 1 см³ об'єму металу ($n_0 \cong 10^{22} \div 10^{23}\text{см}^{-3}$); $e = -1,602 \cdot 10^{-19}\text{Кл}$ – абсолютне значення заряду електрона; $\bar{\lambda}$ – середня довжина вільного пробігу ($\lambda \approx 10^{-8}\text{см}$); $\bar{v}$ – середня (арифметична) швидкість теплового руху електронів при певній температурі (при $t = +20^\circ\text{C}$, $v_{\text{ср}} \cong 10^5\text{см/с}$); m – маса молекули.

Із (1.32) наочно видно, якими величинами визначається електропровідність речовини.

Величина

$$\frac{1}{\gamma} = \rho \quad (1.33)$$

називається **питомим опором** провідника. Розмірність питомого опору $[\rho] = 1\text{Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$ чи $1\text{Ом} \cdot \text{м}$, похідна одиниця $1\text{Ом} \cdot \text{см}$.

Зі зміною температури провідника γ , як і ρ , змінюються. Залежність питомого опору провідника від температури виражається залежністю:

$$\rho = \rho_0 + (1 + \alpha t) \quad (1.34)$$

де ρ_0 – питомий опір провідника при 0°C ; t – температура в градусах Цельсія; α – температурний коефіцієнт опору.

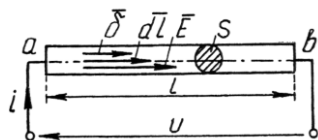


Рис. 1.17. До визначення опору провідника

Розглянемо однорідний провідник, довжина якого l , з незмінним поперечним перерізом S , до кінців якого прикладена напруга u (рис. 1.17). В провіднику протікає струм i . Вектори $\vec{\delta}$, $\vec{E}$ будуть збігатися з довжиною провідника $d\vec{l}$.

Залежність між густиною струму в даній точці провідного середовища й напруженістю поля виражається залежністю (1.28)

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E} \text{ яку ще називають законом Ома в диференціальній}$$

формі. Ця залежність справедлива для областей поза джерелами ЕРС.

Згідно з (1.9) $U_{ab} = E \int_a^b dl = El$ і ураховуючи, що $E = \delta / \gamma$ та $\delta = i / S$, одержимо:

$$u = \frac{\delta}{\gamma} l = \frac{l}{\lambda S} i \quad (1.35)$$

В (1.35), величина $l/(\gamma S)$ – це опір провідника завдовжки l , площею перерізу S , виготовленого з матеріалу питомою провідністю γ . Отже, маємо:

$$r = \frac{l}{\gamma S} = \rho \frac{l}{S} \quad (1.36)$$

Рівність (1.35) тепер запишеться так:

$$u = ri, \quad (1.37)$$

що є законом Ома для ділянки кола, з опором r . Розмірність r : $[r] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{1B}{1A} = 1\text{Ом}$; похідні

одиниці: кілоом – (1 кОм = 10^3 Ом) і мегаОм (1 МОм = 10^6 Ом).

Розмірності величин, які входять у формулу (1.36), такі:

$$[r]=1\text{Ом}, [l]=1\text{м}, [S]=1\text{мм}^2, [\rho] = \frac{1\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}, [\gamma] = \frac{1\text{м}}{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}$$

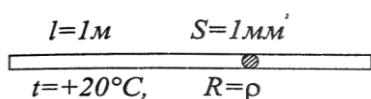


Рис. 1.18. До визначення питомого опору провідника

Якщо взяти провідник певного матеріалу завдовжки $l = 1$ м, перерізом $S = 1 \text{ мм}^2$, то опір такого провідника, згідно з (1.36), буде дорівнювати питомому опорів ρ (рис. 1.19). У довідковій літературі наводяться дані опорів металевих провідників для $l=1\text{м}$, $S=1\text{мм}^2$, $t = +20^\circ\text{C}$. Ці опори дорівнюють їхнім ρ в розмірності $1\text{Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м}$ і температурі

$+20^\circ\text{C}$.

Опір металевих провідників із підвищенням температури зростає. Ця зміна визначається таким співвідношенням:

$$r_2 = r_1 [1 + \alpha(t_2 - t_1)] \quad (1.38)$$

де t_1, t_2 – початкова та кінцева температури, $^\circ\text{C}$; r_1, r_2 – опори при температурах t_1, t_2 , Ом; α – температурний коефіцієнт опору, $1/^\circ\text{C}$.

Для чистих металів $\alpha \cong 0,004^\circ\text{C}^{-1}$, що означає збільшення їх опору на 4 % при підвищенні температури на 10°C . Ряд сплавів, таких, як манганін, константан, мають великий питомий опір і дуже малий температурний коефіцієнт опору. Ці сплави застосовують для виготовлення резисторів зі сталим (майже не залежним від температури) значенням опору. Від'ємний температурний коефіцієнт опору мають вугілля та електроліти, для котрих $\alpha \cong -0,02$ на 1°C .

Величину, обернену до опору, називають **провідністю**:

$$g = \frac{1}{r} \quad (1.39)$$

Одиниця вимірювання провідності, обернена до одиниці опору, називається **сіменс** (См): $[g] = 1 / \text{Ом} = \text{См}$.

В табл. 1.2 наведені значення ρ , γ і α деяких провідникових матеріалів.

Таблиця 1.2

Значення ρ , γ і α деяких провідникових матеріалів

№ п/п	Матеріал	Питомий опір ρ при 20°C , $\text{Ом} \cdot \text{мм}^2 / \text{м}$	Питома провідність γ , $\text{м} / (\text{Ом} \cdot \text{мм}^2)$	Середній температурний коефіцієнт α , $^\circ\text{C}^{-1}$ (від 0 до 100°C)
1	Срібло	0,016	62,0	
2	Мідь	0,0175	57,0	0,00393
3	Золото	0,022	45,4	
4	Алюміній	0,0285	35,0	0,004

5	Вольфрам	0,053	19,0	0,005
6	Олово	0,12	8,3	
7	Сталь	0,13	7,7	0,00625
8	Свинець	0,217	4,6	
9	Ніхром	0,910	1,1	0,0001
10	Манганін	2,5-2,08	0,4-0,48	0,000006

Приймач вмикаємо в коло постійної напруги, заміряємо значення цієї напруги U_{np} та струм I_{np} , який споживає приймач. Відношення $U_{np} / I_{np} = R_{np}$ – це значення опору приймача за даних значень U_{np} та I_{np} . За інших величин U_{np} та I_{np} опір R_{np} може бути іншим, якщо приймач є нелінійним елементом.

Електричні опори чи взагалі елементи електричних кіл (резистори, індуктивності, ємності) поділяються на дві групи: лінійні та нелінійні. Опори, вольт-амперні характеристики яких є прямими лініями (рис. 1.19,а), називаються **лінійними опорами**, а електричні кола з лінійними опорами називаються **лінійними електричними колами**.

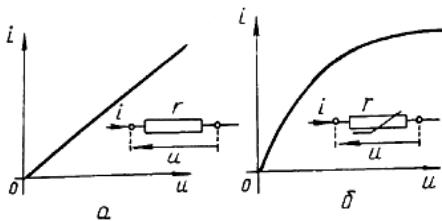


Рис. 1.19. Вольт-амперна характеристика лінійного (а) та нелінійного (б) опорів

Опори, вольт-амперні характеристики яких не є прямими лініями (рис. 1.19,б), називаються **нелінійними опорами**, а електричні кола з нелінійними опорами, називаються **нелінійними електричними колами**.

На рис. 1.19 теж показані умовні позначення лінійних та нелінійних опорів на електричних схемах.

1.7. Енергія та потужність в електричному колі.

Система заряджених тіл є носієм визначеного запасу енергії. Ця енергія надається системі зовнішніми джерелами енергії в процесі утворення зарядів і може бути знову повернена джерелам або перетворена в інші види енергії при зменшенні зарядів. Робота, яка виконується силами електричного поля при перенесенні заряду q на шляху dl провідника, (рис 1.17) дорівнює

$$dA = \overline{F} d\overline{l} = q \overline{E} d\overline{l} = q du \quad (1.40)$$

Рівність (1.40) можна представити ще так: $dA = u dq$. Враховуючи, що $dq = idt$, одержимо:

$$dA = u idt \quad (1.41)$$

тут u , i – можуть виступати як постійні і змінні величини.

Повну роботу на шляху a - b провідника одержимо після інтегрування рівності (1.40) в межах від a до b :

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \int_a^b q du = q \int_a^b du = qu_{ab}.$$

Ураховуючи, що для кіл постійного $q = It$, і пропускаючи індекси, отримаємо:

$$A = UIt \quad (1.42)$$

На основі закону зберігання енергії можна стверджувати, що вся електромагнітна енергія джерела йде на теплову енергію в провіднику. Позначивши електромагнітну енергію в провіднику (опорі) літерою W можемо записати, що $W = A$. Остаточно для кіл постійного струму значення енергії за час і знаходять за рівністю:

$$\boxed{W = UIt} \quad (1.43)$$

Швидкість зміни електромагнітної енергії в часі (швидкість її генерування в генераторах, запасання в нагромаджувачах енергії, конденсаторах, індуктивних котушках,

швидкість перетворення її в механічну роботу в електродвигунах тощо) є її потужністю. Отже,

$$p = \frac{dW}{dt} \quad (1.44)$$

ураховуючи (1.41), одержимо:

$$p = ui. \quad (1.45)$$

Для кіл постійного струму потужність можна отримати ще так:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{UIt}{t} = UI.$$

Ураховуючи співвідношення між U та I в резистивному опорі r (рис.1.7) $U = rI$ можемо записати формули потужності постійного електричного струму:

$$P = UI; \quad P = rI^2; \quad P = \frac{U^2}{r}. \quad (1.46)$$

Одиницею вимірювання потужності є **ват** (Вт):

$$[P] = [U] \cdot [I] = 1B \cdot 1A = 1Bm.$$

Кратними одиницями є кіловат (1кВт=10³Вт) і мегават (1МВт=10⁶Вт=10³кВт).

Одиницею вимірювання електричної енергії є **ват-секунда**, або **кіловат-година**:

$$[W] = [p] \cdot [t] = 1Bm \cdot 1c = 1Bm \cdot c = 1Дж$$

Кратними одиницями є **ват-година** (1 Вт·г = 3600 Вт·с); кіловат-година (1 кВт·г = 3,6·10⁶ Вт·с). Одна **кіловат-година** – це робота, яка виконується протягом 1 години, якщо потужність генератора чи приймача становить 1 кВт.

1.8. Провідники, напівпровідники та діелектрики.

Розподіл металевих і неметалевих твердих тіл на провідники, напівпровідники й діелектрики за однією з ознак проводиться на підставі значень їх питомого опору ρ при температурі +20 °С, причому як умовні границі розподілу приймаються: провідники 10⁻⁸ – 10⁻⁵ Ом·см; напівпровідники 10⁻⁵ – 10⁺¹⁰ Ом·см; діелектрики 10⁺¹⁰ – 10⁺¹⁷ Ом·см (рис. 1.20).

Провідникові матеріали. Електротехнічні провідникові матеріали поділяються на дві групи.

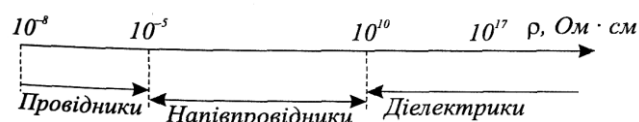


Рис. 1.20 Наближені діапазони питомих опорів провідників, напівпровідників та діелектриків.

До першої групи належать матеріали з малим питомим опором, 10⁻⁸ – 10⁻⁵ Ом·см. Вони повинні мати малий температурний коефіцієнт опору, достатню механічну міцність і стійкість щодо корозії. До цієї групи належать мідь та алюміній.

Мідь внаслідок малого питомого опору, достатньої механічної міцності, стійкості до корозії та доброї оброблюваності широко застосовується у вигляді дроту, провідників різного призначення, шин тощо.

Алюміній, незважаючи на гірші електричні та хімічні властивості, широко застосовується в електротехнічній промисловості. Якщо замінимо мідні проводи алюмінієвими цієї ж довжини з однаковими опорами, переріз останніх на 60 % більший, а вага на 52 % менша, ніж у мідних. Для ліній електропередавання широко застосовують алюмінієві проводи з внутрішніми сталевими дротами (линвами) – сталюалюмінієві. Сталеві линви призначені для посилення механічної міцності.

Сталеві проводи, внаслідок великого питомого опору, застосовують тільки для ліній невеликої довжини й потужності та деяких ліній зв'язку.

До другої групи провідникових матеріалів належать матеріали з високим питомим опором; сплави, наприклад, **ніхром** (нікель-хром-залізо), **фехраль** (залізо-хром-алюміній)

тощо. Внаслідок стійкості до високих температур вони застосовуються для виготовлення нагрівальних елементів, реостатів тощо. Манганін (86 % міді, 12 % марганцю, 2 % нікелю) має дуже малий температурний коефіцієнт опору й великий питомий опір, – і широко застосовується у вимірювальній техніці для виготовлення еталонних котушок опору тощо.

Напівпровідникові матеріали. Ці матеріали займають проміжне місце між провідниковими матеріалами та діелектриками (ізоляторами). Їх питомий електричний опір лежить у межах $10^{-5} - 10^{+10}$ Ом·см. В електротехніці найбільше застосовують такі напівпровідникові матеріали, як германій, кремній, селен та інші.

Діелектрики (ізолятори) – це матеріали, які практично не мають (за нормальних умов) позитивних чи негативних вільних носіїв електрики (електричного струму). Питомий опір таких матеріалів становить 10^{+10} і більше Ом·см. До цієї групи матеріалів належать пластмаси і гуми, лаки та емалі, слюда та матеріали на основі слюди, азбест та матеріали на його основі, керамічні матеріали, порцеляна, скло, електроізоляційні олії, смоли, бітуми, асфальти, лакотканини та інші матеріали.

Напруженість поля, за якої відбувається пробій діелектрика, називається **електричною міцністю діелектрика** E_{np} , а напруга – **пробивною напругою** U_{np} . Відношення пробивної напруги до товщини h діелектрика в місці пробію дорівнює напруженості поля під час пробію, тобто електричній міцності:

$$E_{np} = U_{np} / h \quad (1.47)$$

Електрична міцність вимірюється в кВ/см або кВ/мм. В табл. 1.3 наведені значення електричної міцності деяких твердих і рідких діелектриків під час тривалої дії змінного електричного поля частотою $f = 50$ Гц.

Напруженість електричного поля, яка допускається в діелектрику (ізоляторі) при його застосуванні в електротехнічних установках, називається **допустимою напруженістю**. Для надійної роботи електроустановок потрібно, щоб допустима напруженість була в декілька разів менша від електричної міцності.

Таблиця 1.3

Електрична міцність деяких ізоляційних матеріалів

Матеріал	E_{np} , кВ/см	Матеріал	E_{np} , кВ/см
Слюда	800-14500	Дерево	25-50
Гума м'яка	150-250	Олія	160-200
Картон	190-260	трансформаторна	
Порцеляна	150-200	Повітря	20-30

1.9. Елементи електричних кіл

Сукупність пристроїв, що утворюють шляхи для електричного струму, електромагнітні процеси в яких можна описати за допомогою понять ЕРС, струму, напруги та параметрів окремих ділянок (опорів), називають **електричним колом**. Схема електричного кола показана на рис. 1.21.



Рис. 1.21. Схема простого електричного кола

Джерелами електричної енергії є пристрої, в яких механічна, теплова, хімічна, ядерна та інші види енергії перетворюються на електричну. Такими є електричні генератори, гальванічні елементи, акумулятори, термоелементи тощо.

Приймачами електроенергії є пристрої, в яких електрична енергія перетворюється на інші види енергії: механічну (в електродвигунах), теплову (в електричних печах і нагрівальних пристроях), хімічну (у пристроях

хімічної технології), акустичну (в радіоприймачах), світлову (в електричних лампах) тощо.

Найпростіші електричні явища відбуваються в колах постійного струму, в яких у загальному випадку проходять електричні струми провідності (в металах та електролітах) та переносу (наприклад, в електронних лампах). ЕРС, напруги та струми в колах постійного струму будемо позначати великими літерами E, U, I .

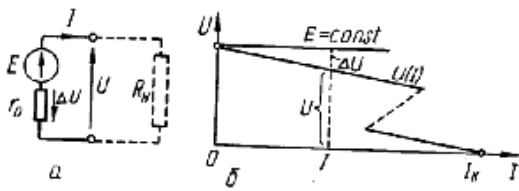


Рис. 1.22. Реальне джерело ЕРС (а) та його зовнішня характеристика (б)

Джерело ЕРС. На рис. 1.22,а позначене джерело ЕРС E з внутрішнім опором r_0 . Таке джерело називають **реальним**. Залежність напруги на його клеммах від струму навантаження називається **зовнішньою характеристикою джерела** (рис. 1.22,б):

$$U = E - r_0 I. \quad (1.48)$$

При незмінній E від струму напруга U на клеммах джерела буде менша від E на значення спаду напруги ($\Delta U = r_0 I$) на внутрішньому опорі. У неробочому режимі, коли опір навантаження вимкнений ($R_H \rightarrow \infty$), $I = 0$, а $U = E$; в режимі короткого замикання, коли опір навантаження дорівнює нулеві ($R_H = 0$), напруга $U = 0$, і струм значно зростає й буде дорівнювати струму короткого замикання: $I = I_k = E/r_0$.

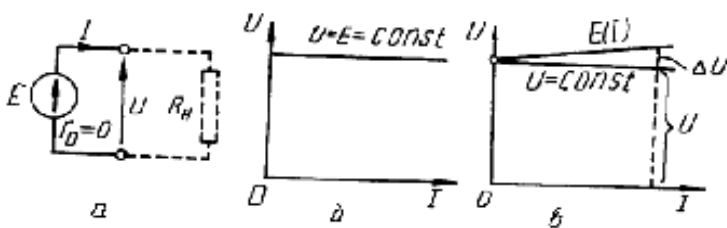


Рис. 1.23. Ідеальне джерело ЕРС (а) та його зовнішня характеристика (б, в)

Якщо внутрішній опір джерела дуже малий і ним можна нехтувати ($r_0 \approx 0$), то таке джерело називається **ідеальним** джерелом електроенергії. Напруга на його клеммах не залежить від струму навантаження і завжди дорівнює E . Зовнішня характеристика такого джерела показана на рис. 1.23,б.

Ця характеристика відповідає джерелам електроенергії дуже великої потужності (теоретично нескінченно великої). Цей режим відзначається також і у реальних джерелах електроенергії (скінченної потужності) за наявності в них **автоматичних регуляторів напруги**, які підтримують напругу на клеммах генератора (чи на клеммах споживача)

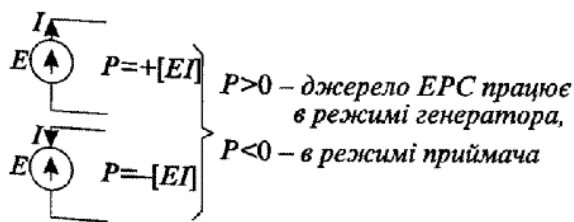


Рис. 1.24. Визначення режиму роботи джерела електричної енергії залежно від спрямування U та I .

незмінною під час зміни навантаження у широких межах. Зовнішня характеристика таких генераторів приблизно виглядає так, як показано на рис. 1.23,в. Тут E , за рахунок автоматичного регулювання, зростає на величину ΔU при збільшенні I , і величина U практично залишається постійною.

Помножимо ліву і праву сторони рівняння (1.48) на значення струму I , одержимо:

$$EI = r_0 I^2 + UI \quad (1.49)$$

в (1.49) компонента $\Delta P_0 = r_0 I^2$ – це потужність, яка витрачається на внутрішньому опорі джерела електроенергії; компонента $P = UI$ – та частина потужності, яка передається зовнішньому споживачу R_H . Отже, значення EI із закону збереження балансу потужностей є потужністю джерела електроенергії – потужністю генератора:

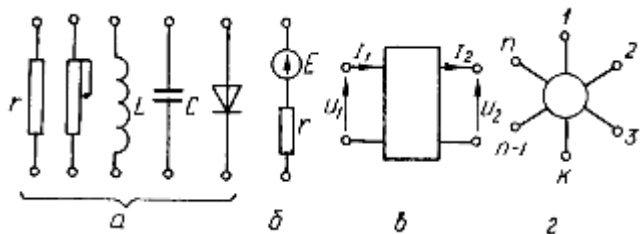
$$P_{\Gamma} = EI \quad (1.50)$$

У формулі (1.50) E та I на схемі мають однакове спрямування. Якщо спрямування E та I різні, то потужність джерела буде $P_{\Gamma} = -EI$.

Отже, під час визначення P потужності в джерелах електричної енергії необхідно враховувати умовно-додатні напрями струмів (рис. 1.24). Якщо спрямування ЕРС і струму збіжні, то умовно вважають, що джерело ЕРС працює в режимі генератора, в протилежному випадку – в режимі споживача. Дійсний режим роботи k -го джерела ЕРС може бути визначений після підставлення числових значень струмів I_k та ЕРС E_k з врахуванням їх знаків.

В результаті числового розрахунку, якщо $P_{\Gamma} > 0$ – то джерело електроенергії працює в режимі генератора – віддає електричну енергію в зовнішнє коло і, якщо $P_{\Gamma} < 0$ – джерело працює в режимі приймача – споживає електричну енергію.

Двополюсник. Частина електричного кола з двома зовнішніми затискачами (полюсами), якими вона від'єднується до



1.25. Двополюсники, чотириполюсники та багатополіусники електричних кіл

електричної схеми, називається двополюсником. Двополюсники, які не мають джерел електричної енергії, називають **пасивними** (рис. 1.25,а), а двополюсники, які мають джерела енергії, – **активними** (рис. 1.25,б).

Крім двополюсників, у електричних схемах зустрічаються чотириполюсники та багатополіусники.

Чотириполюсник – це елемент електричного кола (чи схема), яка має чотири затискачі (полюси), якими вмикається до електричного кола (наприклад, однофазний трансформатор, двопровідна лінія пересилання електричної енергії тощо (рис. 1.25,е)).

Багатополіусник – це елемент чи, в загальному випадку, частина схеми (підсхема), яка має n полюсів, якими вмикається до електричної схеми (наприклад, багатообвитковий трансформатор, багатополіусні електричні схеми тощо) (рис. 1.25,з).

Вузол – це точка в електричному колі, в якій сходяться три або більше вітки. Кількість вузлів у електричному колі позначають літерою q .

Вітка в електричному колі – це послідовне сполучення елементів (ЕРС, резисторів чи інших споживачів) між двома вузлами. У вітці завжди протікає тільки **один струм**. Важливо знати, скільки є віток в електричній схемі, отже, і скільки в схемі є струмів. Кількість віток у схемі (електричному колі) позначають літерою p .

Замкнений контур в електричному колі – це замкнений шлях, який проходить по декількох вітках (двох або більше). Кількість замкнених контурів в електричних колах (схемах) позначають літерою n . Новий контур враховується, якщо у нього входить хоча б одна вітка, яка не увійшла в інші контури.

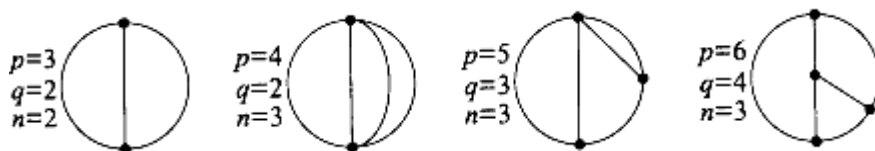


Рис. 1.26. Збільшення віток p схеми приводить до збільшення контурів n

Між цими трьома величинами (вузол, вітка, замкнений контур) для будь-якого електричного кола існує співвідношення:

$$n = p - (q - 1) \quad (1.51)$$

Справедливість рівності (1.51) очевидна для кола, яке складається з трьох віток і має два вузли (рис. 1.26).

Приєднуючи до цього кола нову вітку між двома вузлами або між вузлом і довільною точкою кола, чи, нарешті, між довільними точками кола, ми збільшуємо кількість незалежних контурів (n) на одиницю. Значення $p - (q - 1)$ теж збільшується на одиницю. Отже, для всіх схем (рис. 1.26) рівність (1.51) є справедлива, звідси випливає її справедливість для будь-якого складного кола.

1.10. Основні закони електричних кіл

Під основними законами електричних кіл розуміють закон Ома та закони Кірхгофа. Іноді до них зараховують і закон Джоуля-Ленца.

Закон Ома. У загальному випадку цей закон встановлює зв'язок між ЕРС, електричним струмом і напругою на ділянці кола. Відповідно до (1.37) ми одержали закон Ома для ділянок кола:

$$I = \frac{U}{r} \quad (1.52)$$

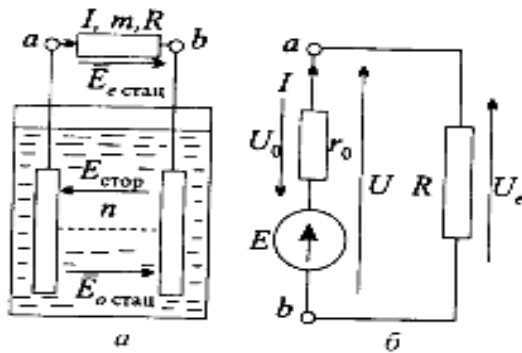


Рис. 1.27. Спрямування векторів $\vec{E}$ в акумуляторній батареї (а) та струму й напруг в її електричній схемі (б)

З метою одержання закону Ома для повного електричного кола розглянемо джерело електричної енергії (в нашому прикладі акумуляторну батарею), увімкнену на опір навантаження R (рис. 1.27,а). Його заступна електрична схема подана на рис. 1.27,б. Під дією незмінної ЕРС E в електричному колі протікає постійний струм I , значення якого визначається за рівністю (1.58). Вектор напруженості електричного поля всередині джерела електроенергії $\vec{E}_{0\text{стат.}} = \rho_0 \vec{\delta}_0$, де ρ_0 – питомий опір середовища джерела (в нашому прикладі електроліту).

Згідно з (1.18), якщо $\vec{E}_{\text{ind}} = 0$ та $\vec{E}_D = 0$, то

$$\oint \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} - \oint \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (1.53)$$

Оскільки $\vec{E}_{\text{стор}}$ існує лише в межах джерела електроенергії, а $\vec{E}_{\text{стат.}}$ – як у джерелі, так і в зовнішньому резисторі R , то рівність (1.53) можна записати ще так:

$$\int_{bna} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} - \int_{bna} \vec{E}_{0\text{стат.}} d\vec{l} - \int_{bma} \vec{E}_{\text{стат.}} d\vec{l} = 0 \quad (1.54)$$

чи

$$E - U_0 - U_e = 0 \quad (1.55)$$

де $E = \int_{bna} \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l}$ – ЕРС джерела;

$$U_0 = \int_{bna} \vec{E}_{0\text{стат.}} d\vec{l} = \int_{bna} \rho_0 I / S_0 dl = \rho_0 l_0 / S_0 I = r_0 I \quad (1.56)$$

тут ρ_0, l_0, S_0, r_0 – питомий опір, усереднена довжина шляху проходження струму в джерелі електроенергії, усереднений поперечний переріз, по якому проходить струм у джерелі, внутрішній опір цього джерела;

$$U_0 = U_e = \int_{bma} \vec{E}_{\text{стат.}} d\vec{l} = \int_{bma} \rho I / S dl = \rho l / SI = RI \quad (1.57)$$

У (1.57) ρ, l, S, R – відповідно ті самі величини, що й у (1.56), тільки для приймача електроенергії (вважаємо, що ним є електричний опір – резистор у вигляді реостата).

З урахуванням (1.56) і (1.57) рівняння (1.55) набирає вигляду: $E - r_0 I - RI = 0$, звідкіля струм в колі рис. 1.27,б визначиться рівністю:

$$I = \frac{E}{r_0 + R} \quad (1.58)$$

Рівняння (1.58) відоме під назвою **закону Ома для повного електричного кола**.

Перший закон Кірхгофа. Цей закон випливає з принципу неперервності електричного струму – виразу (1.30) і є його наслідком для замкненої поверхні S , що

охоплює деякий простір – вузол електричного кола, в якому збігаються струми провідності віток $i_1, i_2, \dots, i_p$ (рис. 1.28). Припускають, що електромагнітні процеси відбуваються при незначних швидкостях, за яких струмами зміщення у замкненій поверхні S можна нехтувати.

Відповідно до принципу неперервності електричного струму $\oint_S \vec{\delta} d\vec{S} = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_k + \dots + i_p = 0$ чи, узагальнюючи,

$$\sum_{K=1}^P i_K = 0 \quad (1.59)$$

Відповідно до цього закону алгебрична сума миттєвих значень струмів віток, які підходять до вузла електричного кола, дорівнює нулеві.

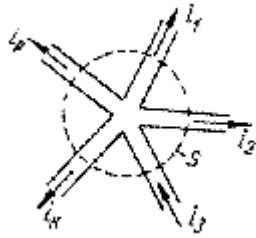


Рис. 1.28. В замкненій поверхні S збігаються струми провідності віток

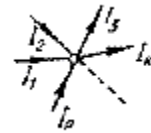


Рис. 1.29. Спрямування струмів у вузлі схеми

Для запису рівняння за першим законом Кірхгофа необхідно спочатку позначити стрілками умовно-додатні напрями струмів у вітках схеми, прийняти додатний напрям струму відносно вузла ($I > 0$ – якщо додатний напрям струму напрямлений до вузла та, $I < 0$ – якщо від вузла, чи навпаки).

Для будь-якого електричного кола за першим законом Кірхгофа можна скласти $(q - 1)$ лінійно незалежних рівнянь (на одиницю менше ніж вузлів).

Другий закон Кірхгофа. Розглянемо замкнутий контур (рис. 1.30) деякого електричного кола. В загальному випадку в контурі діє декілька джерел електроенергії $e_1, e_2, e_3, \dots$ У вітках контуру маємо струми $i_1, i_2, i_3, \dots$ У вузлах $a, b, c, \dots$ відгалужуються струми $i_a, i_b, i_c, \dots$ Позначимо через $r_1, r_2, r_3, \dots$ – опори віток, причому у ці опори входять й опори

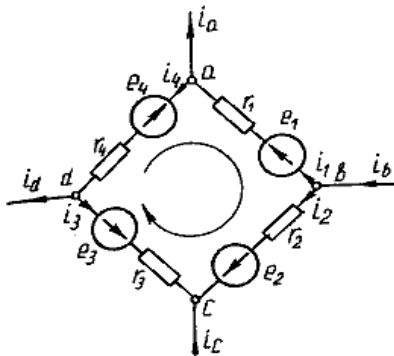


Рис. 1.30. Замкнутий контур деякого електричного кола

джерел енергії $e_1, e_2, e_3, \dots$

На основі (1.18) можемо записати (конденсатори в контурі відсутні):

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \oint \vec{E}_{ind} d\vec{l} + \oint \vec{E}_{emf} d\vec{l} + \oint \vec{E}_D d\vec{l} \quad (1.60)$$

Ліва частина рівності (1.60) – це сума спадів напруг на всіх ділянках замкнутого контуру. Її можна записати так:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \sum_{K=1}^n r_K i_K,$$

де n – кількість віток, які увійшли в контур.

Права частина рівності (1.60) – це сума ЕРС всіх джерел, які діють в контурі:

$\oint \vec{E}_{ind} d\vec{l} = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4$ – ЕРС окремих ділянок кола, викликані джерелами-генераторами електроенергії;

Отже, маємо:

$$\sum_{K=1}^n r_K i_K = \sum_{K=1}^n e_K \quad (1.61)$$

Ця рівність виражає собою другий закон Кірхгофа, який формулюється так: **алгебрична сума спадів напруг на всіх елементах замкнутого контуру дорівнює алгебричній сумі електрорушійних сил цього самого контуру.**

Другий закон Кірхгофа можна сформулювати ще так: **алгебрична сума напруг і електрорушійних сил у замкнутому контурі дорівнює нулеві:**

$$\sum_{k=1}^n u_k, e_k = 0. \quad (1.62)$$



Рис. 1.31. Замкнутий контур деякої електричної схеми зі скеруванням E, I, U

Кількість лінійно незалежних рівнянь, які можна скласти для електричної схеми згідно з (1.61) чи (1.62), дорівнює кількості лінійно незалежних контурів n . Пригадаємо, що у новий контур єдиної схеми повинна входити хоча б одна нова вітка, яка ще не увійшла до складу попередніх контурів. Але критерієм визначення n є формула (1.51).

Для запису другого закону Кірхгофа за (1.61) необхідно позначити умовно-додатні напрями струмів у вітках, а за (1.62) – умовно-додатні напрями спадів напруг на всіх елементах замкнутого контуру. Крім того, треба вибрати додатний напрям обходу контуру, і якщо напрями I, U, E збігаються з напрямом обходу контуру, їх беремо із знаком плюс "+", а якщо їх напрями не збігаються – є протилежними – зі знаком мінус "-".

Проілюструємо це на прикладі. На рис. 1.31 зображено замкнений контур деякої схеми. Запишемо для цього контуру другий закон Кірхгофа за (1.61) та (1.62). Напрямок обходу контуру приймемо за годинникову стрілку.

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + r_{01} I_1 + (r_{02} + R_2) I_2 - (r_{03} + R_3) I_3 + R_4 I_4 &= E_1 - E_2 - E_3; \\ -U_1 - \Delta U_1 + E_1 - E_2 - \Delta U_2 - U_2 - E_3 + \Delta U_3 + U_3 - U_4 &= 0. \end{aligned}$$

1.11. Еквівалентне перетворення опорів

1.11.1. Послідовне сполучення резисторів

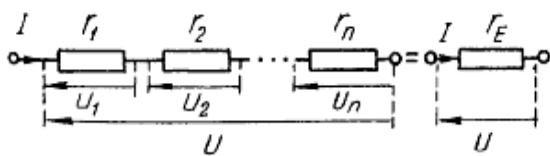


Рис. 1.32. Послідовне сполучення резисторів

Якщо декілька резисторів (або приймачів електроенергії) сполучені один за одним без розгалужень (рис. 1.32) і через них протікає один і той самий струм, то вони утворюють одну вітку і таке сполучення називається послідовним.

Згідно із законом Ома напруги на резисторах визначаються виразами:

$$U_1 = r_1 I; \quad U_2 = r_2 I; \quad \dots; \quad U_n = r_n I. \quad (1.63)$$

Ряд послідовно сполучених опорів можна замінити еквівалентним (загальним) опором R_E . За другим законом Кірхгофа маємо:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n = (I r_1 + I r_2 + \dots + I r_n) = I(r_1 + r_2 + \dots + r_n) = \\ &= I(\sum r) = I R_E. \end{aligned}$$

Еквівалентний опір декількох послідовно сполучених резисторів дорівнює сумі їх опорів, тобто:

$$R_E = r_1 + r_2 + \dots + r_n = \sum_{k=1}^n r_k. \quad (1.64)$$

1.11.2. Паралельне сполучення резисторів

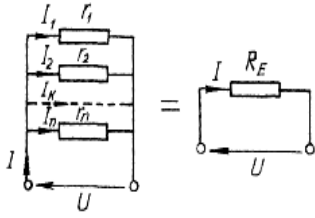


Рис. 1.33. Паралельне сполучення резисторів

Паралельним сполученням резисторів (або приймачів електроенергії, віток) називається таке сполучення, за якого до одних і тих самих двох вузлів електричного кола приєднані декілька резисторів (віток) (рис. 1.33). Всі резистори при такому сполученні знаходяться під однаковою напругою. Згідно із законом Ома струми у вітках визначаються:

$$I_1 = U / r_1, \quad I_2 = U / r_2, \dots, \quad I_n = U / r_n \quad (1.65)$$

Замінімо паралельне сполучення резисторів одним еквівалентним R_E резистором. За першим законом Кірхгофа маємо:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n.$$

Ураховуючи (1.65) і те, що $I = U / R_E$, одержимо:

$$\frac{U}{R_E} = \frac{U}{r_1} + \frac{U}{r_2} + \dots + \frac{U}{r_n}.$$

Скоротивши останню рівність на U , остаточно отримаємо:

$$R_E = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k}} \quad (1.66)$$

або через провідності:

$$g_E = g_1 + g_2 + \dots + g_n = \sum_{k=1}^n g_k. \quad (1.67)$$

Якщо маємо n паралельно сполучених однакових резисторів r , то еквівалентний опір визначається як:

$$R_E = \frac{r}{n}. \quad (1.68)$$

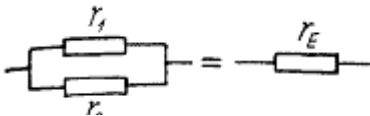


Рис. 1.34. Два паралельно сполучені резистори

Часто на практиці трапляються два паралельно сполучені опори r_1 і r_2 (рис. 1.34). Еквівалентний їм опір, що одержується з (1.66), дорівнює:

$$R_E = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (1.69)$$

1.11.3. Змішане сполучення резисторів

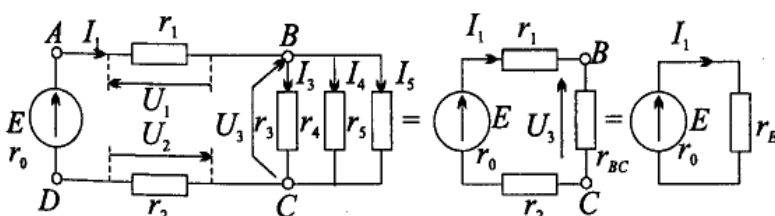


Рис. 1.35. Змішане сполучення резисторів

Змішаним сполученням називають послідовно-паралельне сполучення резисторів або ділянок кола, кожна з яких, своєю чергою, може бути послідовним чи паралельним сполученням резисторів.

Найтипніше змішане сполучення застосовується для живлення групи споживачів (рис. 1.35) r_3, r_4, r_5 з врахування опорів проводів r_1, r_2 і внутрішнього опору джерела електроенергії r_0 . Розраховуючи електричне коло із змішаним сполученням резисторів, користуються методом послідовного спрощення (згортанням) схеми, як показано на рис 1.35.

Опір паралельного сполучення:

$$r_{BC} = 1/(1/r_3 + 1/r_4 + 1/r_5).$$

Повний опір схеми:

$$r_E = r_1 + r_{BC} + r_2.$$

Струм у нерозгалуженій частині кола згідно (1.58):

$$I_1 = E/(r_0 + r_E).$$

Напруги на ділянках кола:

$$U_1 = r_1 I_1; \quad U_2 = r_2 I_1; \quad U_3 = r_{BC} I_1.$$

Струми в паралельних вітках:

$$I_3 = U_3 / r_3; \quad I_4 = U_3 / r_4; \quad I_5 = U_3 / r_5.$$

1.11.4. Взаємне еквівалентне перетворення резисторів, сполучених трикутником та зіркою

На рис. 1.36,а зображено схему трьох резисторів r_1, r_2, r_3 , сполучених зіркою, а на рис. 1.36,б – трьох резисторів r_{12}, r_{23}, r_{31} , сполучених трикутником. Встановимо умови їх еквівалентності. Очевидно, що ці схеми будуть еквівалентними тоді, коли за відповідно однакових напруг U_{12}, U_{23}, U_{31} вхідні струми I_1, I_2, I_3 в обох схемах теж будуть однаковими. Ця умова рівнозначна умові рівності вхідних опорів між будь-якими парами вузлів 1-2, 2-3, 3-1 схем за будь-яких змін і перемикачів в останній частині кола і, зокрема, при обривах деяких її віток.

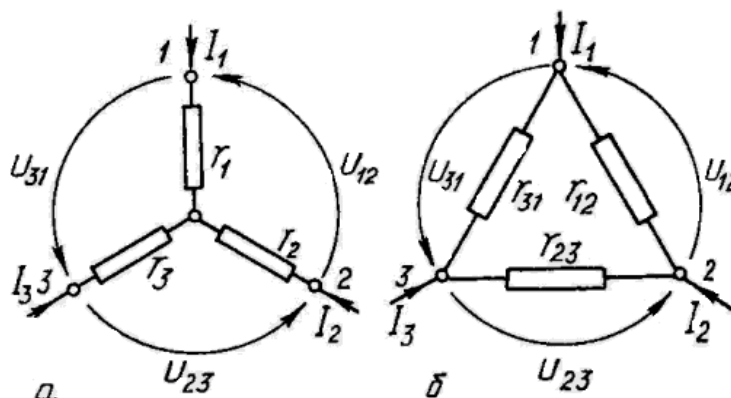


Рис. 1.36. Три резистори, сполучені зіркою (а) та трикутником (б)

Для обриву проводу у вершині 1, а потім у вершинах 2 і 3, можемо записати такі рівності:

$$r_1 + r_2 = \frac{r_{12}(r_{23} + r_{31})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_2 + r_3 = \frac{r_{23}(r_{31} + r_{12})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \quad r_3 + r_1 = \frac{r_{31}(r_{12} + r_{23})}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}. \quad (1.70)$$

Із (1.70) визначимо опори резисторів, сполучених зіркою, якщо відомі опори трикутника (1.71) та опори трикутника, виражені через опори зірки (1.72):

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{r_{31} \cdot r_{12}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_2 &= \frac{r_{12} \cdot r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}; \\ r_3 &= \frac{r_{23} \cdot r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_1 + r_2 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}; \\ r_{23} &= r_2 + r_3 + \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}; \\ r_{31} &= r_3 + r_1 + \frac{r_3 \cdot r_1}{r_2}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

1.12. Методи розрахунку електричних кіл постійного струму

Характеристики елементів прийнято називати **параметрами** кола. В колах постійного струму параметрами елементів є їх опори або провідності. Розглядаючи кола постійного струму, будемо припускати, що параметри всіх елементів кола є величинами сталими, не залежними ні від сили струму в цих елементах, ні від напруг на їх затискачах.

Такого роду кола називають **лінійними колами**, оскільки, застосовуючи до них закони Ома і Кірхгофа, ми одержимо лінійні алгебричні зв'язки між ЕРС, напругами й струмами.

Надалі будемо розглядати електричні кола (їх схеми), які складаються з двополюсних елементів. Пригадаємо, що **двополюсник** – це в загальному випадку послідовне сполучення ЕРС і опору (резистора індуктивності чи ємності), по яких проходить один і той самий електричний струм. Двополюсник теж називають віткою електричного кола. З'єднавши двополюсники у замкнуту систему, утворюємо електричне коло.

Простими називають електричні кола, в яких двополюсники (приймачі-опори) сполучені тільки послідовно або тільки паралельно. В іншому випадку кола називають **складними** чи **розгалуженими**.

Сьогодні існує понад десяток різних методів розрахунку електричних кіл, наприклад, такі, як метод перетворення, метод рівнянь Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових напруг, метод накладання, метод еквівалентного генератора тощо. Розглянемо їх окремо для кіл постійного струму.

1.12.1. Метод перетворення

Метод перетворення застосовується для розрахунку електричних кіл з одним джерелом електричної енергії.

Розраховують струми у вітках такої схеми поступовим згортанням схеми, аж поки не одержують найпростішу схему послідовного сполучення ЕРС E з внутрішнім опором r_0 і еквівалентним опором всієї схеми r_E (рис. 1.37).

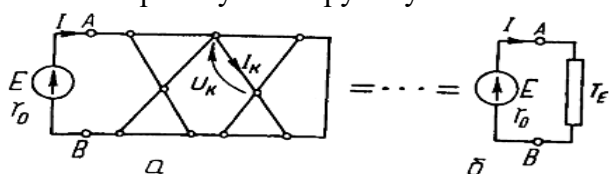


Рис. 1.37. До розрахунку електричного кола методом перетворення

Струм джерела енергії визначається

за законом Ома згідно з (1.58): $I = \frac{E}{r_0 + r_E}$, а

струм k -ї вітки (k -го приймача електроенергії) буде дорівнювати: $I_k = \frac{U_k}{r_k}$, де U_k – напруга

між вузлами, до яких присьднана k -та вітка; r_k – опір k -ї вітки.

Проілюструємо цей метод на прикладі складної електричної схеми з одним джерелом електричної енергії.

Приклад 1.1. Визначити струм у всіх вітках мостової схеми (рис. 1.38).

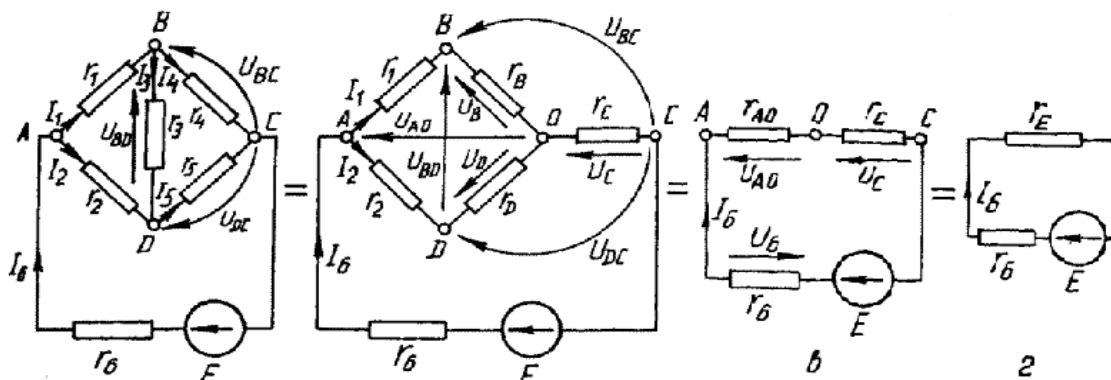


Рис. 1.38. Розрахунок мостової схеми методом перетворення

$r_1 = 8 \text{ Ом}$; $r_2 = 44 \text{ Ом}$; $r_3 = 120 \text{ Ом}$; $r_4 = 20 \text{ Ом}$; $r_5 = 60 \text{ Ом}$; $r_6 = 8 \text{ Ом}$; $E = 120 \text{ В}$.

Задачу розв'яжемо методом перетворення.

Замінімо один із трикутників схеми, наприклад BCD, еквівалентною зіркою опорам r_B , r_C , r_D (рис. 1.38,б). Для цього використаємо формули (1.71).

$$r_B = \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{120 \cdot 20}{120 + 20 + 60} = 12 \text{ Ом};$$

$$r_C = \frac{r_4 \cdot r_5}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{20 \cdot 60}{120 + 20 + 60} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_D = \frac{r_3 \cdot r_5}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{120 \cdot 60}{120 + 20 + 60} = 36 \text{ Ом};$$

Еквівалентний опір ділянки кола АО (рис. 1.38,в) згідно з (1.69) визначається як:

$$r_{AO} = \frac{(r_1 + r_B) \cdot (r_2 + r_D)}{r_1 + r_B + r_2 + r_D} = \frac{(8 + 12) \cdot (4 + 36)}{8 + 12 + 4 + 36} = 16 \text{ Ом}.$$

Загальний опір схеми r_E (рис. 1.38,г) дорівнює:

$$r_E = r_{AO} + r_C = 16 + 6 = 22 \text{ Ом}.$$

Згідно із законом Ома для повного електричного кола (1.58) струм у вітці джерела ЕРС буде:

$$I_6 = \frac{E}{r_6 + r_E} = \frac{120}{8 + 22} = 4 \text{ А}.$$

За схемою (рис. 1.38,в) визначимо спади напруг на опорах:

$$U_6 = r_6 \cdot I_6 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ В};$$

$$U_C = r_C \cdot I_6 = 6 \cdot 4 = 24 \text{ В};$$

$$U_{AO} = r_{AO} \cdot I_6 = 16 \cdot 4 = 64 \text{ В}.$$

Струми в опорах r_1 і r_2 визначаються як:

$$I_1 = \frac{U_{AO}}{r_1 + r_B} = \frac{64}{8 + 12} = 3.2 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{AO}}{r_2 + r_D} = \frac{64}{4 + 36} = 0.8 \text{ А}$$

Визначимо напругу на опорах r_3 , r_4 , r_5 . Із схеми (рис. 1.38,б) за другим законом Кірхгофа (вигляду $\Sigma u, e=0$) маємо:

$$U_{BC} - U_B - U_C = 0; U_{DC} - U_D - U_C = 0; U_{BD} - U_B - U_D = 0;$$

звідси

$$U_{BC} = U_B + U_C = 38,4 + 24 = 62,4 \text{ В};$$

$$U_{DC} = U_D + U_C = 28,4 + 24 = 52,8 \text{ В};$$

$$U_{BD} = U_B + U_D = 38,4 - 28,8 = 9,6 \text{ В};$$

де

$$U_B = r_B \cdot I_1 = 12 \cdot 3,2 = 38,4 \text{ В};$$

$$U_D = r_D \cdot I_2 = 36 \cdot 0,8 = 28,8 \text{ В};$$

Струми в опорах r_3 , r_4 , r_5 будуть дорівнювати:

$$I_3 = \frac{U_{BD}}{r_3} = \frac{9.6}{120} = 0.08 \text{ А}; I_4 = \frac{U_{BC}}{r_4} = \frac{62.4}{20} = 3.12 \text{ А}; I_5 = \frac{U_{DC}}{r_5} = \frac{52.8}{60} = 0.88 \text{ А}$$

Перевірка. За першим законом Кірхгофа для вузла С і В маємо:

$$I_4 + I_5 = I_6 \Rightarrow 3,12 + 0,88 = 4 \text{ А}; \quad I_4 + I_3 = I_1 \Rightarrow 3,12 + 0,8 = 3,2 \text{ А};$$

За другим законом Кірхгофа для замкненого контуру (рис. 1.38,в):

$$U_C + U_{AD} + U_6 = E \Rightarrow 24 + 64 + 32 = 120 \text{ В}.$$

1.12.2. Метод рівнянь Кірхгофа

В цьому методі розглядаються складні електричні кола, особливо такі, в яких діють дві або більше ЕРС, увімкнені у різні вітки схеми. Розв'язання таких задач методом перетворення достатньо складне, а в деяких випадках, й неможливе. Пропонований нижче метод рівнянь Кірхгофа дає змогу розв'язувати як завгодно складні електричні схеми без їх трансфігурацій.

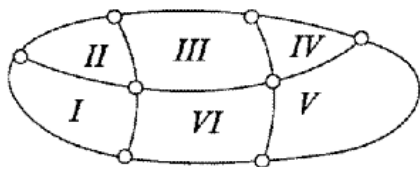


Рис. 1.39. Визначення q , p , n електричного кола

Нехай складне коло складається з p віток, має q вузлів (рис. 1.39) і кількість контурів $n = p - (q - 1)$. Як правило, для електричних схем відомі параметри віток – їх опори, та значення і напрямки діючих в схемі ЕРС. Розрахунок буде зводитися до розрахунку значень струмів у вітках схеми, хоча завдання може ставитися й по-іншому.

Оскільки схема має p віток, то невідомих струмів у схемі буде теж p і для їх розрахунку треба скласти p рівнянь.

За першим законом Кірхгофа ($\sum I = 0$) можемо скласти $q-1$ лінійно незалежних рівнянь (на одиницю менше ніж вузлів). Застосовуючи другий закон Кірхгофа

$\left(\sum_{k=1}^p r_k I_k = \sum_{k=1}^p E_k \right)$, можна скласти стільки рівнянь, скільки лінійно незалежних замкнутих контурів (n) має схема. Для незалежності рівнянь або, як кажуть, для незалежності контурів, ці контури необхідно вибирати так, щоб кожен наступний контур відрізнявся від попередніх, принаймні однією новою віткою. Ця умова є достатньою, але не завжди необхідною. Наприклад, якщо розглянути схеми (рис. 1.40) і вибирати контури в такій послідовності, як показано на схемах, то всі вітки для контурів: 3-у схемі (а), 4-у схемі (б) та 5 – у схемі (в) вже увійшли в рівняння попередніх контурів, але кількість рівнянь для контурів цих схем ще буде недостатньою. В таких випадках недостатню кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа складають для контурів, всі вітки яких уже увійшли в попередні контури. Отже, критерієм визначення кількості лінійно незалежних контурів є співвідношення $n = p - (q - 1)$.

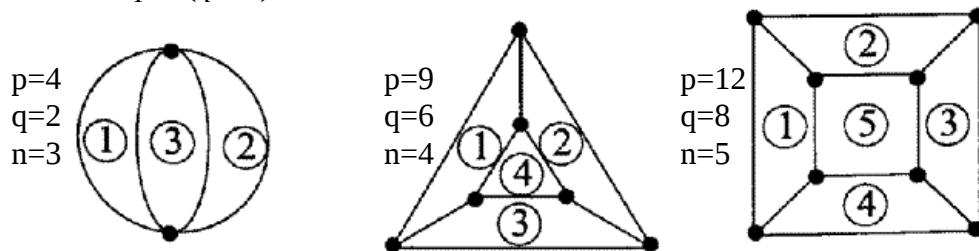


Рис. 1.40. До визначення кількості незалежних контурів схеми n

Отже, за законами Кірхгофа можна скласти $(q - 1) + (q - 1) + p - (q - 1) = p$ рівнянь. А це означає, що кількість рівнянь буде дорівнювати кількості невідомих струмів (p) у вітках схеми. Розв'язавши сумісно ці рівняння, одержимо числові значення струмів віток схеми.

Послідовність проведення розрахунку така: 1) для заданої електричної схеми визначаємо кількість вузлів (q), віток (p) і контурів (n); 2) вибираємо умовно-додатні напрямки струмів у вітках схеми (довільно); 3) за першим законом Кірхгофа складаємо $(q - 1)$ рівнянь, а за другим законом n рівнянь; рекомендується для всіх контурів вибирати однакові додатні напрямки їх обходу, наприклад, всі за годинниковою стрілкою (чи проти); 4) сумісно розв'язуємо складену систему рівнянь і одержуємо числові значення струмів віток.

Якщо в результаті розрахунку кола які-небудь струми будуть виражені від'ємними числами, то це означає, що напрям руху додатних зарядів спрямовані протилежно вибраним умовно-додатним напрямкам струмів цих віток. Напрявленість стрілок струмів цих віток змінювати не треба.

Розрахунок електричних кіл методом рівнянь Кірхгофа є основним. За допомогою цього методу можна розрахувати будь-яке електричне коло. Однак цей метод громіздкий, тому що вимагає розв'язування системи з кількістю рівнянь, що дорівнює кількості віток

кола. Всі інші методи, які застосовуються для розрахунку електричних кіл, базуються на законі Ома і законах Кірхгофа.

Баланс потужності в електричному колі. В § 1.9 формулою (1.49) був виражений баланс потужності в електричній схемі, яка складалась з послідовного сполучення E , r_0 та R_{11} . Якщо електричне схема має p віток, в кожній вітці є резистивний опір r , джерело ЕРС E з внутрішнім опором r_0 , то баланс потужності в такій схемі визначається виразом:

$$\sum_{k=1}^p E_k I_k - \sum_{k=1}^p r_{0k} I_k^2 = \sum_{k=1}^p r_k I_k^2 \quad (1.73)$$

де $E_k I_k$ – потужність генератора (джерела електроенергії) k -ї вітки; $r_{0k} I_k^2$ – потужність, яка витрачається на внутрішньому опорі самого генератора; $r_k I_k^2$ – потужність, яка виділяється в опорі r_k k -ї вітки.

Компоненти $E_k I_k$ можуть бути як додатними, так і від'ємними. Якщо $E_k I_k > 0$ то відповідні джерела ЕРС працюють у режимі генераторів, а якщо $E_k I_k < 0$ – то в режимі приймачів електричної енергії.

Розрахунок складного електричного кола за методом рівнянь Кірхгофа проілюструємо на прикладі.

Приклад 1.2. Розрахувати струми у всіх вітках електричного кола, схема якого наведена на рис. 1.42. Параметри елементів електричного кола мають такі значення:

$$\begin{aligned} E &= 50 \text{ В}, r_{01} = 2 \text{ Ом}, \\ r_1 &= 18 \text{ Ом}, E_2 = 20 \text{ В}, r_{02} = 1 \text{ Ом}, \\ r_2 &= 9 \text{ Ом}, r_3 = 30 \text{ Ом}, r_4 = 40 \text{ Ом}, \\ E_5 &= 100 \text{ В}; r_{05} = 2 \text{ Ом}, r_5 = 48 \text{ Ом}, \\ r_6 &= 30 \text{ Ом}, E_7 = 50 \text{ В}, r_{07} = 0, r_7 = 10 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

1. Визначимо кількість вузлів, віток і контурів: $q = 4$, $p = 1$, $n = 4$.
2. Довільно вибираємо і позначаємо на схемі умовно-додатні напрями струмів у вітках.

3. Складаємо $q-1 = 4-1 = 3$ рівняння за першим законом Кірхгофа (для вузлів 1, 2, 3), та $n=4$ рівняння за другим законом Кірхгофа для контурів I-IV, прийнявши додатні напрямки обходу контурів за годинниковою стрілкою:

1. $-I_1 - I_2 + I_5 = 0$
2. $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$
3. $I_3 + I_6 + I_7 = 0$
4. $(r_1 + r_{01})I_1 - (r_2 + r_{02})I_2 = E_1 - E_2$
5. $(r_2 + r_{02})I_2 + r_4 I_4 + (r_{05} + r_5)I_5 = E_2 - E_5$
6. $r_3 I_3 - r_4 I_4 - r_6 I_6 = 0$
7. $r_6 I_6 - (r_7 + r_{07})I_7 = -E_7$

В систему рівнянь (1 ... 7) підставимо числові значення величин E , r_0 та r .

1. $-I_1 - I_2 + I_5 = 0$
2. $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$
3. $I_3 + I_6 + I_7 = 0$
4. $(18+2)I_1 - (9+1)I_2 = 50-20$
5. $(9+1)I_2 + 40I_4 + (48+2)I_5 = 20-100$
6. $30I_3 - 40I_4 - 30I_6 = 0$
7. $30I_6 - (0+10)I_7 = -50$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо числові значення струмів віток схеми: $I_1 = 0,608 \text{ А}$; $I_2 = -1,783 \text{ А}$; $I_3 = -1,090 \text{ А}$; $I_4 = -0,084 \text{ А}$; $I_5 = -1,175 \text{ А}$; $I_6 = -0,977 \text{ А}$; $I_7 = 2,067 \text{ А}$.

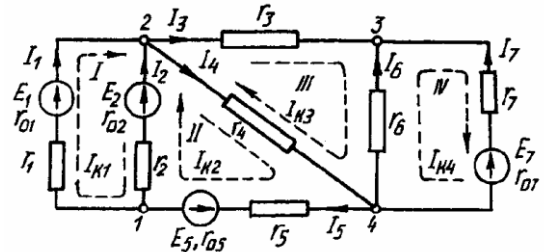


Рис 1.41. До розрахунку електричного кола за методами рівнянь Кірхгофа та контурними струмами.

Струми I_1 та I_7 (зі знаком "плюс") в електричному колі мають таке спрямування, яке позначено на схемі, а решта струмів (зі знаком "мінус") мають в електричній схемі протилежне спрямування (напрями стрілок змінювати не треба).

За формулою (1.73) складемо баланс потужностей. Потужність джерел електричної енергії:

$$\sum_{k=1}^{p=7} E_k I_k = E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_5 I_5 + E_7 I_7 = 50 \cdot 0,608 + 20 \cdot (-1,783) - 100 \cdot (-1,175) + 50 \cdot 2,067 = 215,67 \text{ Вт}$$

Втрати потужності в самих джерелах електроенергії:

$$\sum_{k=1}^{k=7} r_{0k} I_k^2 = r_{01} I_1^2 + r_{02} I_2^2 + r_{05} I_5^2 + r_{07} I_7^2 = 2 \cdot (0,608)^2 + 1 \cdot (-1,789)^2 + 0 \cdot (2,067)^2 = 6,684 \text{ Вт}$$

Потужність, яка витрачається в опорах віток схеми:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=7} r_k I_k^2 &= r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2 + r_4 I_4^2 + r_5 I_5^2 + r_6 I_6^2 + r_7 I_7^2 = 18 \cdot (0,608)^2 + 9 \cdot (-1,783)^2 + \\ &+ 30 \cdot (-1,090)^2 + 40 \cdot (-0,084)^2 + 48 \cdot (-1,175)^2 + 30 \cdot (-0,977)^2 + 10 \cdot (-2,067)^2 = 208,987 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Отже, $215,671 - 6,684 = 208,987$ Вт, що дорівнює потужності, яку генератори ЕРС виділяють в опорах схеми. Збігання числових даних підтверджує правильність розв'язання задачі.

1.12.3. Метод контурних струмів

Метод рівнянь Кірхгофа, хоча й простий за складанням самої системи рівнянь, але громіздкий за обчислювальною роботою – вимагає розв'язання системи із великої кількості (p) рівнянь. Запропонований Дж. К. Максвеллом **метод контурних струмів** для розрахунку електричних кіл з постійними параметрами зводиться до розв'язання системи тільки з " n " рівнянь. В цьому методі вводяться нові невідомі, контурні струми. Кількість їх дорівнює кількості лінійно незалежних контурів схеми (n). Метод контурних струмів більш економічний за обчислювальною роботою (має меншу кількість рівнянь), ніж метод рівнянь Кірхгофа.

Виведення основних розрахункових рівнянь наведемо на основі скелетної схеми, зображеної на рис. 1.42.

Контурні струми за значенням вибираємо такими, щоби струм в будь-якій вітці схеми визначався алгебричною сумою контурних струмів, які протікають через цю вітку. Для схеми рис. 1.42. струми віток будуть такими:

$$I_1 = I_{k1}, I_2 = I_{k2}, I_3 = I_{k3}, \dots, I_7 = I_{k6} - I_{k1}, I_{10} = I_{k1} - I_{k2}, \dots \quad (1.74)$$

де $I_{k1}, I_{k2}, \dots, I_{k6}$ – контурні струми.

Розпочинаючи складання рівнянь для кола з n лінійно незалежними контурами, задаємося довільно додатними напрямками контурних струмів у всіх контурах, і домовимось за додатний напрям обходу контуру вибирати напрям, який збігається з його контурним струмом.

Для першого контуру запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа ($\sum rI = \sum E$):

$$r_1 I_1 + r_{10} I_{10} - r_7 I_7 = E_{11}, \quad (1.75)$$

де E_{11} – сума всіх ЕРС, які входять в перший контур. Визначаючи цю суму, ЕРС, напрям яких збігається з напрямом обходу контуру, треба брати зі знаком "плюс", а ті, що не збігається – зі знаком "мінус".

Підставивши (1.74) в (1.75) і звівши подібні члени, одержимо рівняння для першого контуру, виражене через контурні струми:

$$1) (r_1 + r_{10} + r_7) I_{k1} - r_{10} I_{k2} - r_7 I_{k6} = E_{11} \quad (1.76)$$

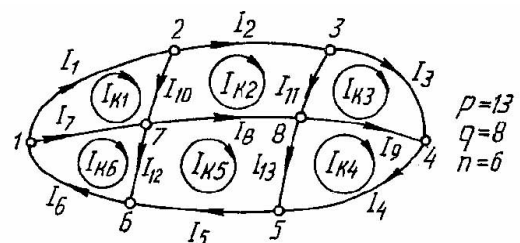


Рис. 1.42. До методу контурних струмів

Простежимо послідовність складання рівняння (1.76) безпосередньо за схемою: перший доданок $(r_1+r_{10}+r_7)I_{k1}$ є сумою спадів напруг на власних опорах першого контуру, які виникають під дією першого контурного струму I_{k1} ; другий доданок $(-r_{10}I_{k2})$ урахує спад напруг на спільному опорі першого та другого контурів, і викликаного струмом другого контуру, а знак «мінус» урахує, що струми I_{k2} та I_{k1} в опорі r_{10} спрямовані зустрічне; третій доданок урахує спад напруг на опорі r_7 , викликаний струмом $I_{k6}(-r_7I_{k6})$ а знак «мінус» урахує, що струми I_{k6} та I_{k1} в опорі r_7 теж напрямлені зустрічне.

$$\begin{aligned} 2) (r_2+r_{11}+r_8+r_{10})I_{K2}-r_{10}I_{K1}-r_{11}I_{K3}-r_8I_{K5}&=E_{22} \\ 3) (r_6+r_7+r_{12})I_{K6}-r_7I_{K1}-r_{12}I_{K5}&=E_{55} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Систему рівнянь (1.76-1.77) можна записати в загальному вигляді для будь-якої схеми, яка має n контурів:

[illegible]

Послідовність проведення розрахунку така: 1) для заданої електричної схеми визначаємо q, p, n ; 2) вибираємо додатні напрями контурних струмів і записуємо для них систему з n рівнянь (1.78); 3) розв'язуємо цю систему рівнянь і знаходимо числові значення контурних струмів: $I_{k1}, I_{k2}, \dots, I_{kn}$; 4) позначаємо умовно додатні напрямки струмів у вітках схеми та знаходимо їх як алгебричну суму контурних струмів, що протікають через цю вітку; 5) перевіряємо правильність розв'язання задачі за другим законом Кірхгофа ($\sum rI = \sum E$) для контурів схеми.

1. $(r_1+r_{01}+r_2+r_{02})I_{k1}-(r_2+r_{02})I_{k2}=E_1-E_2$
2. $(r_2+r_{02}+r_4+r_5+r_{05})I_{k2}-(r_2+r_{02})I_{k1}-r_4I_{k3}=E_2-E_5$
3. $(r_3+r_6+r_4)I_{k3}-r_4I_{k2}-r_6I_{k4}=0$
4. $(r_6+r_7+r_{07})I_{k4}-r_6I_{k3}=-E_7$

$$1. (18 + 2 + 9 + 1)I_{k1} - (9 + 1)I_{k2} = 50 - 20;$$

$$2. (9 + 1 + 40 + 48 + 2)I_{k2} - (9 + 1)I_{k1} - 40I_{k3} = 20 - 100;$$

$$3. (39 + 30 + 40)I_{k3} - 40I_{k2} - 30I_{k4} = 0;$$

$$4. (30 + 50 + 0)I_{k4} - 30I_{k3} = -50.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно значень контурних струмів $I_{k1} \dots I_{k4}$, отримаємо:

$$I_{k1}=0,608 \text{ A}; I_{k2}=-1,176 \text{ A}; I_{k3}=-1,091 \text{ A}; I_{k4}=-2,068 \text{ A};$$

Позначимо додатні напрямки струмів у вітках схеми й визначимо їх значення через контурні струми:

$$I_1 = I_{k1} = 0,608 \text{ A}; I_2 = I_{k2} - I_{k1} = -1,176 - 0,608 = -1,784;$$

$$I_3 = I_{k3} = -1,091 \text{ A}; I_4 = I_{k2} - I_{k3} = -1,176 - (-1,091) = -0,085 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{k2} = -1,176 \text{ A}; I_6 = I_{k4} - I_{k3} = -2,068 - (-1,091) = -0,977 \text{ A};$$

$$I_7 = -I_{k1} = -(0,608) = -0,608 \text{ A}.$$

Перевірка. За другим законом Кірхгофа ($\sum rI = \sum E$) проведемо перевірку для будь-яких контурів, наприклад, для першого та четвертого.

$$(r_1 + r_{01})I_1 - (r_2 + r_{02})I_2 = E_1 - E_2 \text{ і в цифрах:}$$

$$(18+2) \cdot 0,608 - (9+1) \cdot (-1,784) = 50 - 20, \text{ чи } 12,16 + 17,84 = 30.$$

$$R_6 I_6 - (r_7 + r_{07})I_7 = -E_7 \text{ і в цифрах:}$$

$$-0,977 \cdot 30 - 2,068 \cdot (10+0) = -50 \text{ чи } -50,11 = -50$$

1.12.4. Метод вузлових напруг

За методом вузлових напруг кількість рівнянь можна скоротити до $(q - 1)$. Отже, метод вузлових напруг (його ще називають метод **вузлових потенціалів**) найраціональніше використовувати для електричних схем з малою кількістю вузлів, а метод контурних струмів – з **малою кількістю контурів** (чи віток).

Покажемо суть цього методу (рис. 1.43,а). Уявно один вузол схеми завжди можна заземлити, від цього розподіл струмів у вітках не зміниться. Потенціал заземленого вузла стане дорівнювати нулеві. Заземливши четвертий вузол, отримаємо: $\varphi_4 = \varphi_0 = 0$. Тоді напруги між вузлами будуть дорівнювати:

$$1-4: U_{B1} = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1 - 0 = \varphi_1$$

$$2-4: U_{B2} = \varphi_2 - \varphi_0 = \varphi_2 - 0 = \varphi_2$$

$$3-4: U_{B3} = \varphi_3 - \varphi_0 = \varphi_3 - 0 = \varphi_3$$

Як видно з останніх виразів, **вузлові напруги** (U_{B1}, U_{B2}, U_{B3}) дорівнюють відповідним потенціалам вузлів ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$), тому пропонований спосіб розрахунку ще називають **методом вузлових потенціалів**.

Виразимо струми віток схеми через вузлові напруги. Для цього виділимо одну вітку схеми, наприклад третю (рис. 1.43,б), і виразимо її струм I_3 через відповідні напруги. За другим законом Кірхгофа ($\sum u, e = 0$) для замкненого контуру маємо:

$$U_{B1} - \Delta U_3 + E_3 - U_3 - U_{B2} = 0, \text{ чи}$$

$$U_{B1} - r_{03}I_3 + E_3 - r_3I_3 - U_{B2} = 0,$$

звідкіля

$$I_3 = \frac{U_{B1} + E_3 - U_{B2}}{r_3 + r_{03}}$$

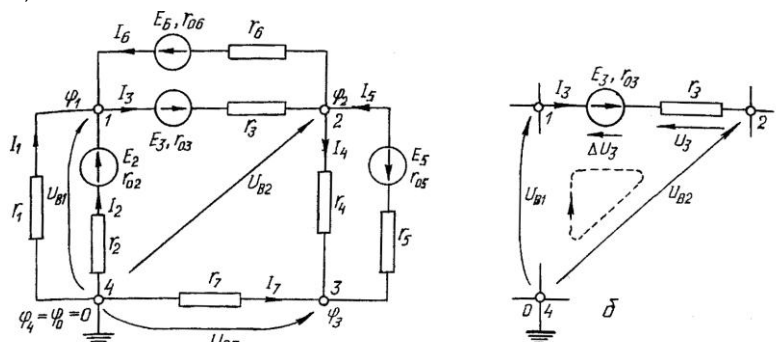


Рис. 1.43. До методу вузлових напруг

Аналогічно, обходячи контури за напрямом струмів віток і по вузлових напругах, одержимо значення інших струмів:

$$I_1 = \frac{-U_{B1}}{r_1} \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{B1}}{r_2 + r_{02}} \quad I_4 = \frac{U_{B2} - U_{B3}}{r_4} \dots \dots \dots (1.79)$$

За першим законом Кірхгофа запишемо рівняння струмів для вузла №1:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_6 = 0$$

В останнє рівняння підставимо значення струмів (1.79), виражених через вузлові напруги:

$$\frac{-U_{B1}}{r_1} + \frac{E_2 - U_{B1}}{r_2 + r_{02}} - \frac{U_{B1} + E_3 - U_{B2}}{r_3 + r_{03}} + \frac{U_{B2} + E_6 - U_{B1}}{r_6 + r_{06}} = 0$$

Після згрупування подібних членів останнє рівняння запишеться так:

$$U_{B1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2 + r_{02}} + \frac{1}{r_3 + r_{03}} + \frac{1}{r_6 + r_{06}} \right] - U_{B2} \left[\frac{1}{r_3 + r_{03}} + \frac{1}{r_6 + r_{06}} \right] = E_2 \frac{1}{r_2 + r_{02}} - E_3 \frac{1}{r_3 + r_{03}} + E_6 \frac{1}{r_6 + r_{06}} \quad (1.80a)$$

$$U_{B2} \left[\frac{1}{r_3 + r_{03}} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_{05}} + \frac{1}{r_6 + r_{06}} \right] - U_{B1} \left[\frac{1}{r_3 + r_{03}} + \frac{1}{r_6 + r_{06}} \right] - U_{B3} \left[\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_{05}} \right] = E_3 \frac{1}{r_3 + r_{03}} - E_5 \frac{1}{r_5 + r_{05}} - E_6 \frac{1}{r_6 + r_{06}} \quad (1.80б)$$

$$U_{B3} \left[\frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_5 + r_{05}} \right] - U_{B2} \left[\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_{05}} \right] = E_5 \frac{1}{r_5 + r_{05}} \quad (1.80в)$$

Отже, ліва частина рівнянь (1.80) записується так: вузлова напруга вузла U_{Bm} множиться на суму провідностей віток, які приєднані до m -го вузла, мінус вузлова напруга сусіднього вузла (U_{Bk}) помноженої на суму провідностей віток, що безпосередньо з'єднують m -й та k -й вузли, мінус $U_{B(k+1)}$ і т.д.

Права частина кожного із рівнянь (1.80) дорівнює алгебричній сумі добутків ЕРС кожної вітки, приєднаної до розглянутого вузла, на її провідність. Добуток Eg записується з додатним знаком, якщо ЕРС напрямлена до вузла, для якого записується рівняння, та з від'ємним – якщо ЕРС напрямлена від вузла.

Введемо такі позначення:

$$G_{11} = g_1 + g_2 + g_3 + g_6 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2 + r_{02}} + \frac{1}{r_3 + r_{03}} + \frac{1}{r_6 + r_{06}};$$

$$G_{22} = g_3 + g_4 + g_5 + g_6 = \frac{1}{r_3 + r_{03}} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_{05}} + \frac{1}{r_6 + r_{06}};$$

$$G_{33} = g_4 + g_5 + g_7 = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_{05}} + \frac{1}{r_7} \quad \text{— це сума провідностей віток, приєднаних}$$

відповідно до 1-го, 2-го та 3-го вузлів.

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{r_3 + r_{03}} + \frac{1}{r_6 + r_{06}}, \quad G_{23} = G_{32} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5 + r_{05}} \quad \text{— це сума провідностей віток, які}$$

з'єднують 1 і 2 та 2 і 3 вузли. Тоді рівняння (1.80) з врахуванням наведених позначень запишуться так:

$$U_{B1} G_{11} - U_{B2} G_{22} = E_2 g_2 - E_3 g_3 + E_7 g_7 = \sum_1 EG \quad (1.80)$$

$$U_{B2} G_{22} - U_{B1} G_{21} - U_{B3} G_{23} = E_3 G_3 - E_5 G_5 - E_6 G_6 = \sum_2 EG$$

$$U_{B3}G_{33} - U_{B2}G_{32} = E_5G_5 = \sum_3 EG$$

Або в загальному вигляді для схеми, яка має g вузлів, рівнянь буде $(q-1)$:

$$\begin{aligned} 1) U_{B1}G_{11} - U_{B2}G_{12} - \dots - U_{B(q-1)}G_{1(q-1)} &= \sum_1 EG \\ 2) U_{B1}G_{21} - U_{B2}G_{22} - \dots - U_{B(q-1)}G_{2(q-1)} &= \sum_2 EG \\ \dots & \\ m) U_{B1}G_{m1} - U_{B2}G_{m2} - \dots - U_{B(q-1)}G_{m(q-1)} &= \sum_m EG \\ \dots & \\ (q-1) U_{B1}G_{(q-1)1} - U_{B2}G_{(q-1)2} - \dots - U_{B(q-1)}G_{(q-1)(q-1)} &= \sum_{q-1} EG \end{aligned} \quad (1.81)$$

Кількість невідомих у методі вузлових напруг дорівнює кількості рівнянь, які треба скласти для схеми за першим законом Кірхгофа $(q-1)$. Метод вузлових напруг, як і метод контурних струмів, є одним із основних розрахункових прийомів. В тому випадку, коли $(q-1) < n$, цей метод є більш економічний, ніж метод контурних струмів, n – кількість незалежних контурів схеми.

Послідовність проведення розрахунку. Для схеми визначаємо q, p, n . Один із вузлів схеми подумки заземлюємо (нехай його потенціал дорівнює нулеві). Позначимо вузлові напруги на схемі, їх будемо мати $(q-1)$. Згідно з (1.81) складемо систему $(q-1)$ рівнянь, відносно вузлових напруг $U_{B1}, U_{B2}, \dots, U_{B(q-1)}$. Розв'язавши цю систему рівнянь, одержуємо числові значення вузлових напруг $U_{B1}, U_{B2}, U_{B(q-1)}$. Позначаємо струми у вітках і за законом Ома аналогічно (1.79), обходимо контури за напрямом струму вітки й за вузловими напругами – визначаємо струми віток схеми.

Застереження. Коли у вітці схеми увімкнене ідеальне джерело ЕРС (без внутрішнього опору) і сама вітка теж немає опору, то тоді за базисний вузол ($\varphi = 0$)

бажано вибирати один із вузлів, до якого приєднана ця вітка. У протилежному разі одне із рівнянь (1.81) перетворюється у невизначеність й потрібно буде її знаходити, що наочно буде видно із наведеного нижче прикладу.

Приклад 1.4. За методом вузлових напруг визначити струми в схемі, зображеній на рис. 1.44. Параметри схеми такі:

$E_1 = 100 \text{ В}; E_2 = 50 \text{ В}; E_3 = 50 \text{ В}; r_2 = 10 \text{ Ом}; r_3 = 5 \text{ Ом}; r_4 = r_5 = 20 \text{ Ом}$

Розв'язання. Для схеми маємо $p = 5, q = 3, n = 3$, отже $q-1 < n$, що доцільно задачу розв'язувати за методом вузлових напруг. Опір першої вітки дорівнює нулеві, тому за базисний

вузол (потенціал якого буде дорівнювати нулеві) бажано взяти вузол "1" або "3". Приймаємо $\varphi_3 = 0$. Позначимо вузлові напруги U_{B1} та U_{B2} і складемо систему двох рівнянь $[(q-1) = 3 - 1 = 2]$:

$$1. U_{B1} - E_1 = 0$$

$$2. U_{B2} \left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} \right) - U_{B1} \frac{1}{r_5} = E_3 \frac{1}{r_3}$$

Підставимо числові значення

$$1. U_{B1} - 100 = 0$$

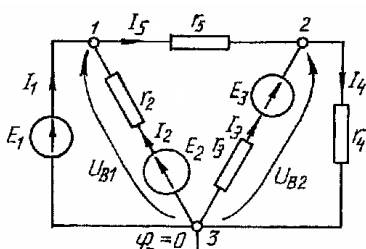


Рис. 1.44. Розрахунок електричного кола методом вузлових напруг

$$2. \quad U_{B2} \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} \right) - U_{B1} \frac{1}{20} = 50 \frac{1}{5}$$

Розв'язавши ці рівняння, одержимо $U_{B1} = 100$ В, $U_{B2} = 33,33$ В. Тоді струми віток:

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{B1}}{r_2} = \frac{50 - 100}{10} = -5 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{E_3 - U_{B2}}{r_3} = \frac{50 - 33,33}{5} = 3,35 \text{ А}$$

$$I_4 = \frac{U_{B2}}{r_4} = \frac{33,33}{20} = 1,67 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{U_{B1} - U_{B2}}{r_5} = \frac{100 - 33,33}{20} = 3,33 \text{ А}$$

Струм I_1 знаходимо за першим законом Кірхгофа для вузла "1":

$$I_1 + I_2 - I_5 = 0, \text{ звідки, } I_1 = I_5 - I_2 = 3,33 - (-5) = 8,33 \text{ А}$$

Перевіримо за другим законом Кірхгофа для другої вітки:

$U_{B1} + U_2 - E_2 = 0 \Rightarrow 100 + (-5)10 - 50 = 0$. Тотожність зберігається, що підтверджує правильність розв'язування задачі.

1.12.4.1. Заміна декількох паралельних віток з джерелами ЕРС, одною еквівалентною віткою

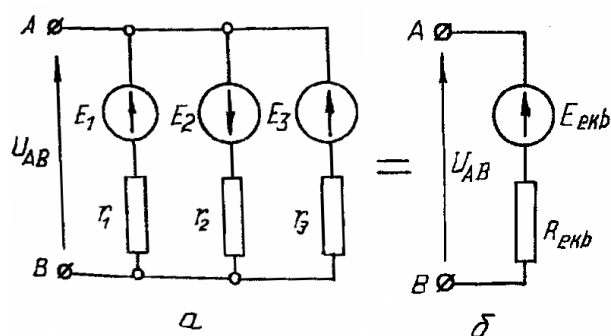


Рис. 1.45. Заміна паралельних віток з ЕРС однією еквівалентною схемою

На рис. 1.45,а задані три паралельні вітки з джерелами ЕРС E_1, E_2, E_3 . Замінімо їх однією еквівалентною віткою з E_{EKB} та R_{EKB} (рис. 1.45,б).

За методом вузлових напруг можемо записати:

$$U_{AB} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right] = E_1 \frac{1}{r_1} - E_2 \frac{1}{r_2} + E_3 \frac{1}{r_3}, \text{ звідси}$$

$$U_{AB} = E_{EKB} = \frac{E_1 \frac{1}{r_1} - E_2 \frac{1}{r_2} + E_3 \frac{1}{r_3}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}$$

Отже, ЕРС еквівалентного генератора дорівнює напрузі U_{AB} в режимі неробочого ходу, коли клемі А і В розімкнені. У загальному вигляді можна записати так:

$$E_{EKB} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k}{\sum_{k=1}^n g_k}; \quad R_{EKB} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n g_k} \quad (1.82)$$

1.12.5. Метод накладання

Цей метод можна застосовувати для лінійних електричних кіл, які мають два або більше джерел електричної енергії. Метод оснований на т.з. принципі накладання, суть якого така: струм в k -й вітці електричної схеми дорівнює алгебричній сумі струмів у цій вітці від кожної із ЕРС схеми зокрема. Цей принцип справедливий тільки для лінійних електричних кіл. На цьому принципові й оснований метод накладання.

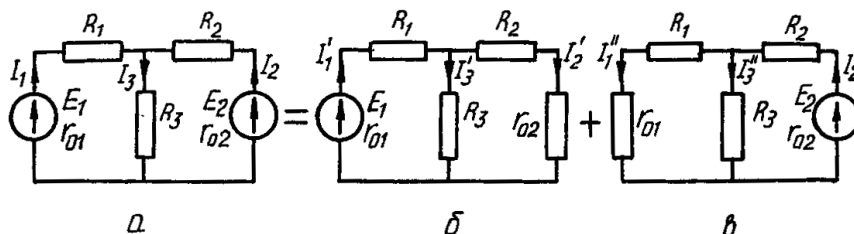


Рис. 1.46. До методу накладання

Метод накладання проілюстровано на схемах, зображених на рис. 1.46. На (рис. 1.46,а) наведена схема, для якої задані величини: $E_1, r_{10}, E_2, r_{20}, R_1, R_2, R_3$.

Треба визначити струми віток схеми. Для цього:

1. Визначаємо p, q, n . Вибираємо додатні напрямки струмів віток схеми: I_1, I_2, I_3
 2. Вилучаємо із схеми ЕРС E_2 , залишивши її внутрішній опір r_{20} (рис. 1.46,б), і для одержаної схеми відомими вже методами знаходимо струми I'_1, I'_2, I'_3 , викликані ЕРС E_1 . Напрями струмів у цій схемі вибираємо згідно з напрямом ЕРС $-E_1$.

3. Вилучаємо із схеми ЕРС E_1 залишивши її внутрішній опір r_{10} (рис. 1.46,в), і для одержаної схеми теж відомими методами знаходимо струми I''_1, I''_2, I''_3 , викликані ЕРС E_2 . Напрями струмів I''_1, I''_2, I''_3 тут вибираємо відповідно до напрямку ЕРС $-E_2$.

4. Знаходимо струми віток вихідної схеми (рис. 1.46,а) як алгебричну суму відповідних струмів схем (рис. 1.46,б) та (рис. 1.46,в):

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = I'_2 - I''_2; \quad I_3 = I'_3 + I''_3.$$

5. За значеннями струмів I_1, I_2, I_3 , розраховуємо потужності джерел електроенергії та потужності в приймачах (опорах).

Метод накладання дуже вигідний для аналізу явищ, які відбуваються в електричному колі при зміні його параметрів.

Приклад 1.4. Задане електричне коло (рис. 1.47,а). Проаналізувати, як будуть змінюватися в схемі струми при збільшенні ЕРС E . Параметри схеми R_1, R_2, R_3, r_0 та прикладена напруга U залишаються незмінними.

Згідно з методом накладання струми I_1, I_2, I_3 можуть бути виражені так:

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = I'_2 - I''_2; \quad I_3 = I'_3 - I''_3;$$

Де $I'_1 > 0; I'_2 > 0; I'_3 > 0$ – струми, викликані джерелом з напругою U , якщо $E=0$. За значенням вони не змінюються, оскільки $U = \text{const}$ (рис. 1.47,б)

$I''_1 > 0; I''_2 > 0; I''_3 > 0$ – струми, викликані ЕРС E при $U=0$ (рис. 1.47,в). Із збільшенням E ці струми теж будуть зростати.

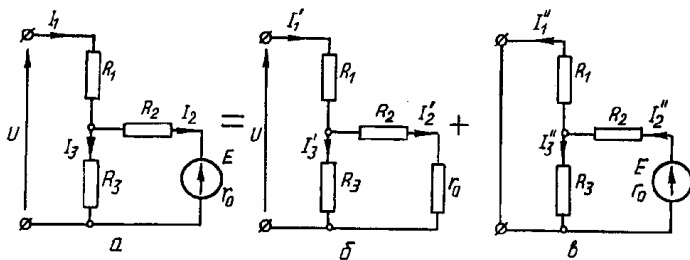


Рис. 1.47. До аналізу зміни струмів схеми при зміні E

Отже, при збільшенні E будемо мати:

Струм I_1 – спочатку буде зменшуватися і при деякому значенні ЕРС E дорівнювати нулеві, а при подальшому збільшенні E змінить свій напрям і буде збільшуватися.

Струм I_2 – з якісного боку буде вести себе аналогічно струму I_1 .

Струм I_3 – із збільшенням E постійно буде зростати.

1.12.6. Метод еквівалентного генератора

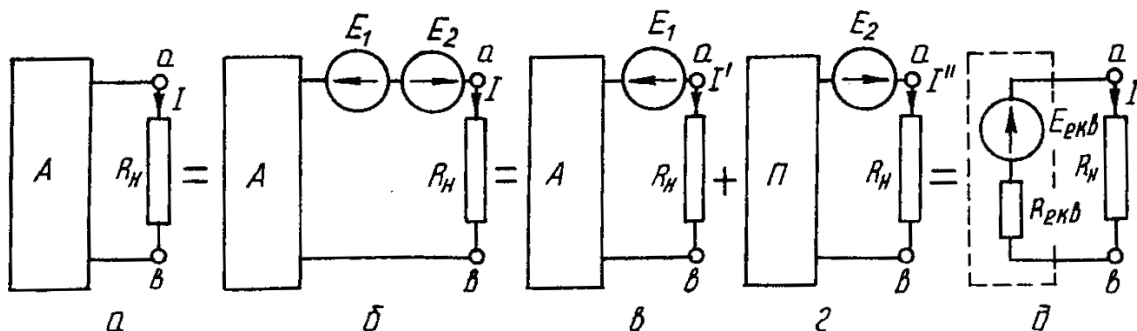


Рис. 1.48. До розрахунку струму вітки методом еквівалентного генератора

Активний і пасивний двополісники. У будь-якій електричній схемі завжди можна виділяти яку-небудь одну вітку, а іншу частину схеми незалежно від її структури й

складності умовно зобразити прямокутником (рис. 1.48,а). Щодо виділеної вітки вся схема, позначена прямокутником, є **двополюсником**.

Якщо двополюсник має джерела електроенергії, то його називають **активним**, в прямокутнику його позначають літерою «А». Якщо у двополюснику немає джерел електричної енергії, то його називають **пасивним** двополюсником і в прямокутнику не пишуть ніякої літери або літеру «П» (рис. 1.48,з).

Метод еквівалентного генератора застосовують тоді, коли треба визначити струм тільки в одній вітці складної схеми чи проаналізувати значення (u чи i) при зміні параметра цієї вітки. Метод оснований на принципі накладання, тому його можна застосовувати тільки для лінійних електричних кіл.

Нехай задана деяка схема й потрібно знайти струм тільки в одній її вітці. Метод оснований на принципі накладання, тому його можна застосовувати тільки для лінійних електричних кіл.

Нехай задана деяка схема й потрібно знайти струм тільки в одній її вітці. Уявно помістимо решту схеми, яка має ЕРС і опори, в прямокутник (активний двополюсник "А"), виділивши із неї одну вітку ab , в якій необхідно знайти струм I (рис. 1.48,а).

Струм I вітки ab не зміниться, якщо в цю вітку увімкнути дві однакові й протилежно спрямовані ЕРС E_1 і E_2 (рис. 1.48,б). Значення ЕРС E_1 та E_2 виберемо такими, що дорівнюють напрузі на затискачах ab при неробочому ході (н.х.) вітки (тобто при вимкненні вітки ab):

$$E_1 = E_2 = U_{abнх}.$$

На основі принципу накладання струм I можна зобразити як суму двох струмів I та I' (рис. 1.48,в,г):

$$I = I' + I''.$$

Струм I' викликаний ЕРС E_1 і всіма джерелами ЕРС активного двополюсника, поміщеними у прямокутник (рис. 1.48,в), а струм I'' викликається тільки ЕРС E_2 (рис. 1.48,г). У прямокутнику "П" схеми (рис. 1.48,г) відсутні всі ЕРС, але залишені їх внутрішні опори та опори віток схеми.

Оскільки $E_1 = U_{abнх}$ і напрямлена зустрічно цій напрузі, то струм I' дорівнює нулеві:

$$I' = (U_{abнх} - E_1) / R_H = 0 / R_H = 0$$

Струм I'' із схеми (рис. 1.46,г) визначиться так:

$$I'' = \frac{E_2}{R_{ax} + R_H} = \frac{U_{abнх}}{R_{ax} + R_H}$$

де $R_{вх}$ – вхідний опір двополюсника щодо клем ab , його ще називають еквівалентним опором двополюсника $R_{екв}$; R_H – опір вітки ab – опір навантаження.

Ураховуючи, що $I = I' + I'' = 0 + I'' = I''$, можемо остаточно записати, що струм I виділеної окремої вітки ab визначиться так:

$$I = \frac{U_{abнх}}{R_{вх} + R_H} = \frac{E_{екв}}{R_{вх} + R_H} \quad (1.83)$$

Формула (1.83) відповідає схемі, зображеній на (рис. 1.48,д), в якій $E_{екв} = U_{abнх}$, а $R_{екв} = R_{абнх}$

Якщо прийняти, що $R_H = 0$ (закорочені затискачі ab), то одержимо струм короткого замикання (к.з.) $I_K = E_{екв} / R_{екв}$, звідки $R_{екв} = E_{екв} / I_K$. Отже, внутрішній опір складної схеми може бути визначений експериментально з режиму к.з. Якщо струм к.з. надмірно великий, то режим можна здійснити, увімкнувши до клем ab відомий опір R_0 тоді $I_K = E_{екв} / (R_{екв} + R_0)$, звідки

$$R = \frac{E_{екв}}{I'_K} - R_0$$

Оскільки розглянутий метод оснований на заміні активного двополюсника еквівалентним генератором (рис. 1.48,δ), то його прийнято називати методом еквівалентного генератора, або методом активного двополюсника.

Послідовність розрахунку цим методом така:

а) розмикаємо вітку ab (вимикаємо опір R_H) і знаходимо напругу між точками ab : $U_{abнх}$, це й буде ЕРС еквівалентного генератора: $E_{ЕКВ} = U_{abнх}$,

б) визначаємо входний опір $R_{ВХ}$ всієї схеми щодо затискачів ab при недіючих джерелах ЕРС (їх $E = 0$) й вимкненому R_H . Внутрішні опори джерел ЕРС залишаються;

в) за формулою (1.83) знаходимо струм у вітці ab схеми.

Приклад 1.5. Визначити струм в діагоналі ab мостової схеми (рис. 1.49,δ). для якої $R_1 = R_4 = 1$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_5 = 2$ Ом, $E_1 = 10$ В.

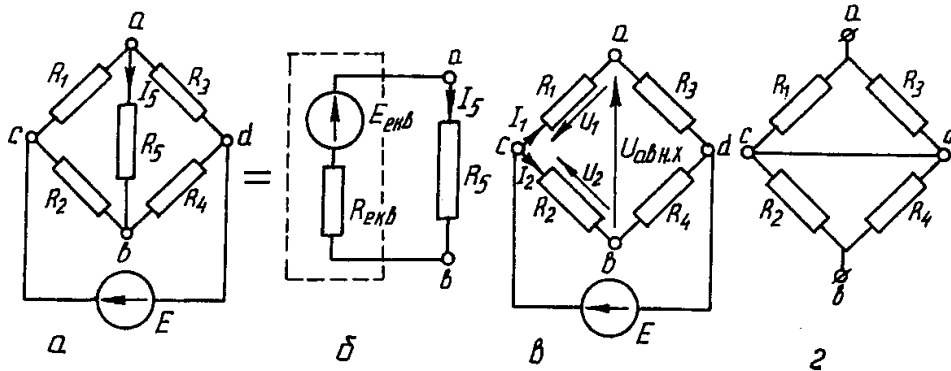


Рис. 1.49. Розрахунок струму методом еквівалентного генератора

1. Розмикаємо вітку ab (рис. 1.49,б) і знаходимо напругу неробочого ходу $U_{abнх}$.

$$U_{abнх} = U_2 - U_1 = R_2 I_2 - R_1 I_1 = R_2 \frac{E}{R_2 + R_4} - R_1 \frac{E}{R_1 + R_3} = 4 \frac{10}{4+1} - 1 \frac{10}{1+2} = 4.67 \text{ В} = E_{ЕКВ}$$

2. Підрахуємо входний опір всієї схеми щодо затискачів ab , якщо джерело ЕРС закорочено (рис. 1.49,в). Оскільки внутрішній опір джерела ЕРС дорівнює нулеві, то точки c і d схеми виявилися з'єднаними накоротко. Тоді

$$R_{ВХ} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} + \frac{4 \cdot 1}{4+1} = 1.47 \text{ Ом} = R_{ЕКВ};$$

Струм в діагоналі мостової схеми згідно з (1.83) та (рис. 1.49,б) дорівнює:

$$I_5 = I_H = \frac{E_{ЕКВ}}{R_{ЕКВ} + R_H} = \frac{4.67}{1.47 + 2} = 1.342 \text{ А}$$

1.13. Пересилання електроенергії постійного струму по

двопровідній лінії

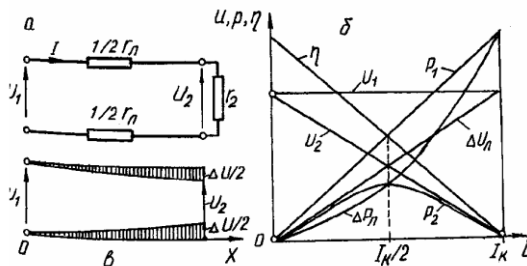


Рис. 1.50. Передача електричної енергії постійного струму по двопровідній лінії.

Схема, зображена на рис. 1.50, відповідає спрощеному розрахунковому варіантові лінії електропересилання (ЛЕП) постійного струму. Тут нехтуємо струмами витоку в ізоляції, урахуємо тільки резистивний опір проводів лінії (прямого і зворотного проводу) $r_{л}$. Нехай напруга на початку лінії електропересилання U_1 підтримується незмінною в усіх режимах роботи лінії, навантаження якої здійснюється еквівалентним резистором r_2 , що змінюється від $r_2 = \infty$ (неробочий режим лінії) до $r_2 = 0$ (коротке замикання лінії).

Струм у досліджуваній схемі: $I = U_1 / (r_{\text{л}} + r_2)$. Напруга приймача електроенергії:

$$U_2 = U_1 - r_{\text{л}} I. \quad (1.84)$$

Спад напруги в проводах лінії

$$\Delta U_{\text{л}} = r_{\text{л}} I. \quad (1.85)$$

На рис. 1.50,в показана залежність напруги U_2 та спаду напруги в прямому і зворотному проводі лінії від відстані (x), якщо задане навантаження. Потужність джерела енергії:

$$P_1 = U_1 I = U_{12} / (r_{\text{л}} + r_2). \quad (1.86)$$

Втрати потужності в лінії

$$\Delta P_{\text{л}} = R_{\text{л}} I^2$$

Потужність приймача електроенергії:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 - \Delta P = U_1 I - r_{\text{л}} I^2 = U_1^2 / (r_{\text{л}} + r_2) - r_{\text{л}} U_1^2 / (r_{\text{л}} + r_2)^2 = \\ &= \frac{U_{\text{л}}^2}{r_{\text{л}} + r_2} \cdot \left(1 - \frac{r_{\text{л}}}{(r_{\text{л}} + r_2)}\right) \end{aligned} \quad (1.87)$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) лінії електропередавання:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 I - r_{\text{л}} I^2}{U_1 I} = 1 - \frac{r_{\text{л}} I}{U_1} = \frac{r_2}{(r_{\text{л}} + r_2)} \quad (1.88)$$

На рис. 1.50,б подано характеристики лінії електропередавання залежно від струму I , побудовані на підставі співвідношень (1.84) – $U_2 I$, (1.85) – $\Delta U(I)$, (1.86) – $P_1(I)$, (1.87) – $P_2(I)$ та (1.88) – $\eta(I)$.

Характеристика $U_2(I)$ є рівнянням прямої лінії, що проходить через точки з координатами $U_2 = U_1$, якщо $I = 0$ (неробочий режим лінії $r_2 = \infty$) та $U_2 = 0$, якщо $I = I_{\text{к}} = U_1 / r_{\text{л}}$ (коротке замикання лінії $r_2 = 0$). Характеристика $P_1(I)$ також є рівнянням прямої лінії, що проходить через точки з координатами $P_1 = 0$, для $I = 0$ та $P_1 = U_{12} / r_{\text{л}}$, для $I = I_{\text{к}}$. Характеристика $P_2(I)$ – рівняння параболи, що перетинає вісь абсцис у точках $I = 0$ та $I = I_{\text{к}}$. Максимальне значення потужності P_2 знайдемо з умови екстремуму її виразу (1.87), а саме:

$$dP_2 / dI = U_1 - 2r_{\text{л}} I = 0$$

звідки

$$I_{P_2 \text{ MAX}} = \frac{U_1}{2r_{\text{л}}} = \frac{I_{\text{к}}}{2} \quad (1.89)$$

що має місце при $r_2 = r_{\text{л}}$, тобто

$$P_{2 \text{ max}} = \frac{U_1^2}{4r_{\text{л}}} \quad (1.90)$$

Під час передавання максимальної потужності по лінії її ККД

$$\eta_{P_2 \text{ MAX}} = P_{2 \text{ max}} / P_{1P_2 \text{ MAX}} = (U_1^2) / (4r_{\text{л}}) / (U_1^2) / (r_{\text{л}}) = 0,5.$$

Отже, на підставі спрощення математичної моделі ЛЕП постійного струму доходимо до висновку про економічну недоцільність транспортування по такій лінії максимальної потужності. У реальних силових ЛЕП оптимальним є передавання потужності, якому відповідають значення ККД лінії $\eta = 0,94 \dots 0,96$, тобто вона значно менша від максимальної, визначеної за формулою (1.90). В режимі, близькому до передачі максимальної потужності, працюють лінії зв'язку. В цих лініях передаються малі потужності і ККД відіграє не таку важливу роль. Важливо, щоб до абонента дійшла максимальна потужність.

Втрата потужності в лінії електропередавання:

$$\Delta P_{\text{л}} = r_{\text{л}} I^2 = \frac{2l\rho}{S} \left(\frac{P_2}{U_2} \right)^2 \quad (1.91)$$

де ρ – питомий опір проводів лінії; l – її довжина; S – поперечний переріз проводів.

З (1.91) випливає, що втрата потужності в лінії електропередавання прямо пропорційна питомому опорі її проводів, довжині лінії, передаваній потужності й обернено пропорційна поперечному перерізові проводів і що найістотніше – квадратів напруги ліній. Цим і пояснюється загальна тенденція дедалі більшого підвищення напруг ліній електропередавання.

1.14. Нелінійні кола постійного струму

1.14.1. Загальні визначення. Статичний та динамічний опори нелінійних елементів

Електричне коло є лінійним, якщо воно складається тільки з лінійних елементів. Під **лінійними елементами** будемо розуміти такі елементи (резистивні опори r , котушки індуктивності L , ємності C), параметри яких не змінюються при зміні в них струму чи напруги на їх затискачах. Вольт-амперні для резисторів, вебер-амперні для котушок та кулон-вольтні для конденсаторів характеристики лінійних елементів зображаються прямими лініями, як показано на рис. 1.51.

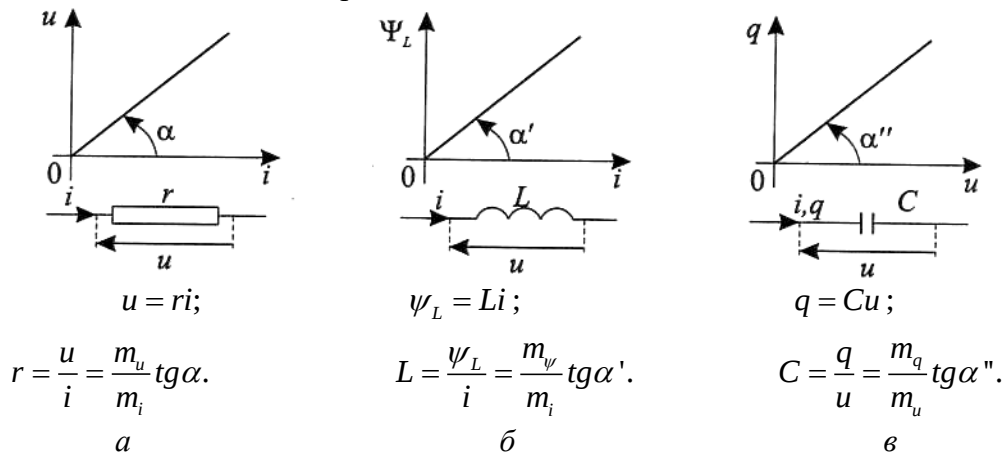


Рис. 1.51. Характеристики лінійних елементів

Тангенс кута нахилу цих характеристик до осі абсцис пропорційний до, відповідно, опору резистора r , індуктивності L та ємності конденсатора C . Літерою m позначені масштаби відповідних величин. Кола, складені з лінійних елементів, називаються **лінійними колами**.

Елементи, опір r (чи L або C) яких значною мірою залежить від струму або напруги на їх затискачах, називають **нелінійними елементами (НЕ)**, а електричне коло, яке має хоча б один нелінійний елемент, є **нелінійним колом**.

Вольт-амперна характеристика нелінійного резистивного опору, вебер-амперна – нелінійної індуктивності та кулон-вольтна – нелінійної ємності відображаються кривими лініями (рис. 1.52), які одержуються дослідно.

Маючи вольт-амперну характеристику нелінійного резистивного опору (рис. 1.52,а), можна визначити його опір при різних струмах (чи напругах). Розрізняють два види опорів нелінійних резистивних елементів: статичний та диференціальний (динамічний).

Статичний резистивний опір – це відношення кінцевих значень напруги й струму нелінійного елемента і визначається з вольт-амперної характеристики за законом Ома, наприклад, для точки A статичний опір $r_{cmA} = U_A / I_A$. Значення статичного опору залежить від струму, оскільки він має різне значення при різних значеннях струму. Статичний опір

$r_{ст}$ пропорційний тангенсові кута α нахилу прямої, проведеної через точки характеристики $u(i)$, що відповідає заданому струмові, й початок координат (точку 0).

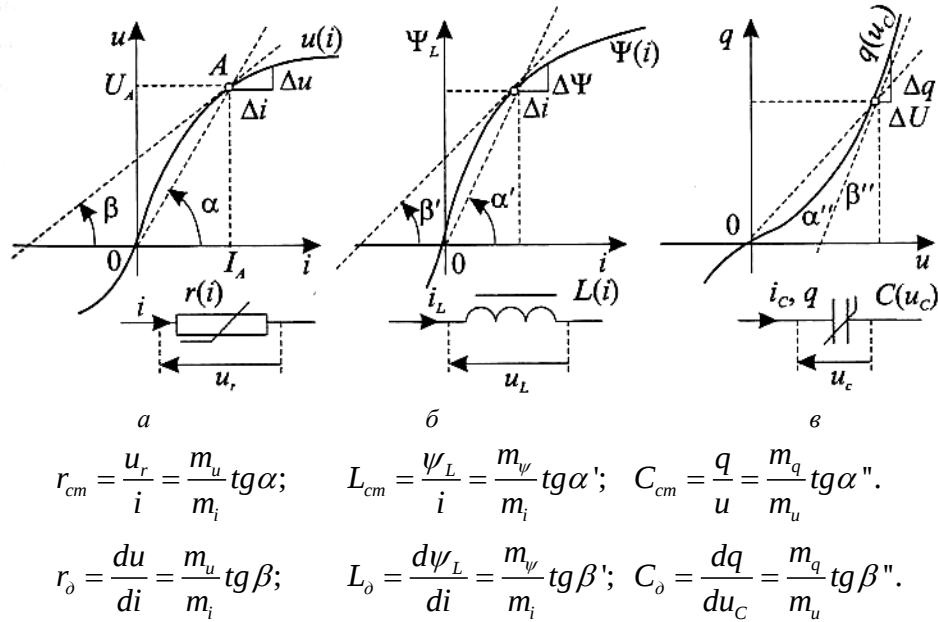


Рис. 1.52. Характеристики нелінійних елементів

Диференціальний (динамічний) опір r_d дає змогу судити про відношення приросту напруги й струму в даній точці характеристики: $r_d = \Delta u / \Delta i = du/di$. Цей опір пропорційний тангенсові кута β нахилу дотичної до характеристики $u(i)$ в точці, яка відповідає заданому струмові.

Аналогічні судження стосуються нелінійних індуктивностей та ємностей і визначення їх статичних та динамічних параметрів: L , L_d , C , C_d , – встановлюються згідно з рис. 1.52, б, в.

До нелінійних елементів електричних кіл належать різноманітні електронні напівпровідникові прилади, пристрої, які мають котушки зі сталевим осердям, лампи розжарювання, електричні дуги тощо. Сьогодні нелінійні елементи широко застосовуються. Так, за допомогою нелінійних елементів можна здійснювати перетворення змінного струму в постійний, підсилення електричних сигналів, генерування електричних сигналів різної форми, проводити стабілізацію напруги чи струму.

Нелінійні елементи широко використовують в радіотехніці та обчислювальній техніці. Нелінійні елементи бувають керованими та некерованими. Некеровані працюють без впливу керуючого фактора (наприклад, напівпровідникові діоди, термістери та інші). Керовані елементи працюють під впливом керуючих факторів (транзистори, тиристори, електронні лампи тощо).

Некеровані лінійні елементи мають одну вольт-амперну характеристику; керовані – сім'ю характеристик. Параметром цих характеристик є керуючий фактор.

Для нелінійних електричних кіл теж справедливі основні закони електричних кіл, такі, як закон Ома та закони Кірхгофа. Однак розрахунок нелінійних електричних кіл проводити значно важче ніж лінійних кіл. Пояснюється це тим, що, крім струмів і напруг, які треба, як правило, визначити, невідомими є також опори нелінійних елементів, які, своєю чергою, залежать від цих самих струмів та напруг. Сьогодні існує понад десяток різних графоаналітичних та аналітичних методів розрахунку електричних кіл з нелінійними елементами.

Нижче наведемо графоаналітичний метод розрахунку нелінійних кіл, які можуть мати яку завгодно кількість нелінійних та лінійних елементів, які піддаються послідовній трансфігурації схеми й приведенню її до еквівалентного нелінійного опору.

1.14.2. Графоаналітичний метод розрахунку нелінійних кіл

В цьому методі струми та напруги в нелінійному колі визначаються за вольт-амперними характеристиками елементів, що входять в це коло. Ці характеристики одержують експериментально або із довідника для стандартних нелінійних елементів:

а) При послідовному сполученні нелінійних елементів загальну вольт-амперну характеристику нелінійного кола визначають складанням напруг окремих вольт-амперних характеристик елементів при заданому струмі (рис. 1.53): $U = U_1 + U_2$, де U_1 – напруга на елементі HE1; U_2 – напруга на елементі HE2; U – напруга, прикладена до еквівалентного HE.

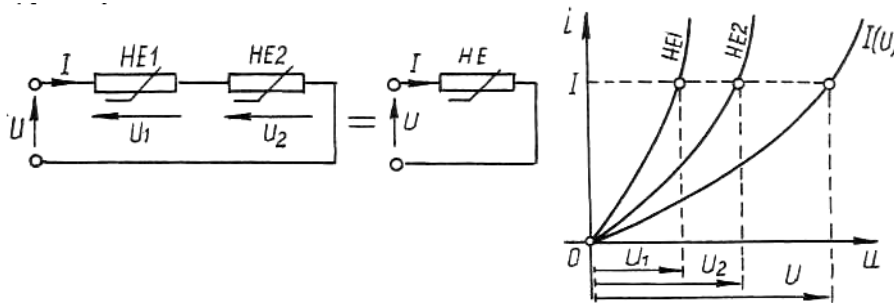


Рис. 1.53. До розрахунку HE, увімкнених послідовно

б) При паралельному сполученні нелінійних елементів загальну вольт-амперну характеристику нелінійного кола одержують складанням струмів окремих вольт-амперних характеристик елементів при заданій напрузі (рис. 1.54): $I = I_1 + I_2$, де I_1 – струм в елементі HE1; I_2 – в елементі HE2; I – струм в нерозгалуженому колі.

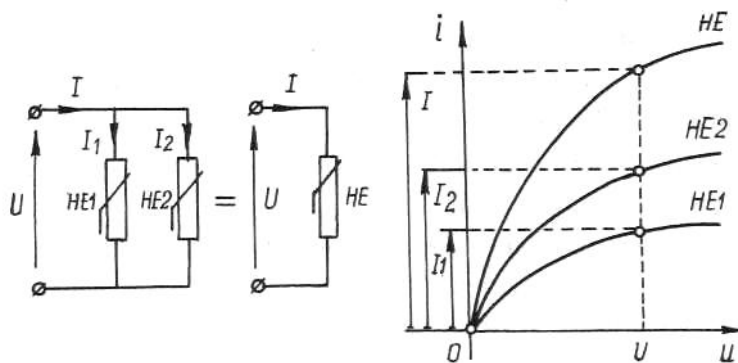


Рис. 1.54. До розрахунку кола з HE, увімкнених паралельно

в) При змішаному сполученні нелінійних елементів спочатку складають вольт-амперні характеристики паралельно увімкнених елементів (як у п.б), а потім послідовно увімкнених (як у п.а):

г) Якщо лінійний елемент r_1 сполучений послідовно з нелінійним HE (рис. 1.55), то робочу точку C визначають за другим законом Кірхгофа: $E = U_2 + r_1 I$, або $U_2 = E - r_1 I$, де U_2 – напруга на нелінійному елементі HE.

Це рівняння в координатах u і i представляє і пряму AB : якщо $I = 0$, то $U_2 = E$ – точка A , і якщо $U_2 = 0$, то $I = E / r_1$ – точка B . Робоча точка C знаходиться на перетині вольт-амперної характеристики нелінійного елемента та прямої AB , що визначає рівняння кола.

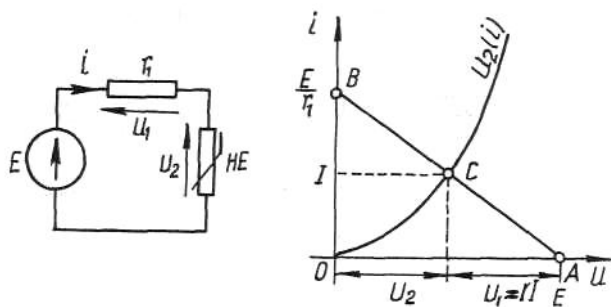


Рис. 1.55. До розрахунку HE, увімкнених послідовно з лінійним резистором

Цю задачу можна розв'язати ще так. Побудувати ВАХ лінійного елемента r ($u = ri$ – пряму лінію, яка проходить через початок координат), а потім задачу розв'язати як в п.а – при послідовному, або як в п.б – при паралельному сполученні.

1.14.3. Аналітичний метод розрахунку нелінійних кіл

Вольт-амперні характеристики нелінійних елементів іноді вдається апроксимувати аналітичними виразами. Це дає змогу електричний стан нелінійного кола описати математичними рівняннями, розв'язання яких дає числові значення струмів та напруг в нелінійному колі.

Один із графоаналітичних методів розрахунку нелінійних кіл полягає в тому, що вольт-амперну характеристику НЕ розділяють на декілька ділянок, і кожна таку ділянку представляють вже прямою лінією. Для кожної із цих ділянок коло розраховують вже як лінійне, що має опір нелінійного елемента $r = r_{\partial} = du / di$ – на цій ділянці. Потім розрахунки окремих ділянок аналітично стикують, цей метод інколи називають кусково-лінійною апроксимацією вольт-амперної характеристики НЕ.

Обидва методи вимагають громіздкого числового розрахунку.

Глибше вивчити питання розрахунку нелінійних кіл можна в курсі теоретичної електротехніки або за спеціальною літературою.

2. ЕЛЕКТРИЧНА ЄМНІСТЬ

2.1. Електрична ємність тіл

Нехай маємо відокремлене нерухоме провідне тіло, заряджене до потенціалу φ , яке оточує діелектрик проникністю ϵ , що не залежить від напруженості поля, тобто в кожній точці середовища ϵ сталою величиною. Тоді заряд такого тіла пропорційний його потенціалу:

$$q = C\varphi \text{ чи } C = \frac{q}{\varphi} \quad (2.1)$$

Величина C називається електричною ємністю тіла.

Отже, електрична ємність відокремленого тіла дорівнює відношенню заряду тіла до його потенціалу.

Оскільки значення потенціалу прийнято нульовим на поверхні землі, то φ у (2.1) дорівнює напрузі між землею і заданим відокремленим тілом (рис. 2.1): $U = \varphi - \varphi_3 = \varphi - 0 = \varphi$. Отже, співвідношення (2.1) можна записати ще так:

$$C = q/U \quad (2.2)$$

Розподіл заряду на поверхні відокремленого тіла й картина електричного поля навколо нього залежать від форми тіла. Отже, і потенціал U , і ємність C залежать теж від форми тіла, якщо задана величина заряду q . Якщо тіло оточене однорідним діелектриком електричною проникністю ϵ , то напруженість електричного поля E і, відповідно, потенціал U , при заданому заряді зворотно пропорційні ϵ діелектрика, що впливає із теореми Гаусса (1.2). На основі цього маємо:

$$C = \epsilon f(g_1, g_2, \dots), \quad (2.3)$$

де $g_1, g_2, \dots$ – геометричні величини, які характеризують форму й розміри тіла.

Для прикладу визначимо ємність відокремленої кулі радіуса R . Згідно з теоремою Гаусса напруженість електричного поля відокремленого точкового заряду (1.3) $E = q/(4\pi\epsilon r^2)$. Використаємо цю рівність для одержання потенціалу відокремленого тіла, зарядженого зарядом "+q" (рис. 2.2). Будемо вважати, що $r \gg R$, тоді заряд "+q" можемо вважати точковим. Тут R – радіус кулі, в центрі якої, вважаємо, знаходиться точковий заряд "+q".

Із визначення (1.14) потенціал на поверхні зарядженої кулі радіуса R дорівнює:

$$\varphi_R = \int_R^\infty \vec{E} d\vec{r} = \int_R^\infty E dr \cos(\vec{E} \wedge d\vec{r}) = \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} dr =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_R^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon R}, \text{ тут кут } (\vec{E} \wedge d\vec{r}) = 0^\circ.$$

Тоді ємність відокремленої кулі радіуса R визначиться як:

$$C = q/U = q/\varphi_R = q / \left(\frac{q}{4\pi\epsilon R} \right)$$

і остаточно $C = 4\pi\epsilon R$, що підтверджує співвідношення (2.3).

За наведеною формулою можна обчислити ємність земної кулі. Середній радіус Землі $R = 6380$ км, тоді $C = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6380 \cdot 10^3 \cong 0,7110 \cdot 10^{-3}$ Ф.

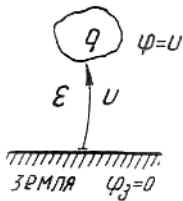


Рис. 2.1. Відокремлене провідне тіло зарядом q , оточене діелектриком проникністю ϵ

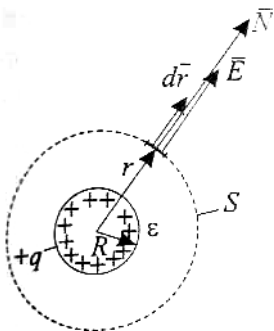


Рис. 2.2. Відокремлена провідна куля радіуса R в діелектрику проникністю ϵ

2.2. Конденсатори. Струм конденсатора. Енергія електричного поля

Пристрій із двох провідних тіл (пластин) будь-якої форми, розділених електриком, називають конденсатором (рис. 2.3). Пластины конденсатора часто називають обкладками. Прикладом природних конденсаторів можуть бути провідники електричної мережі, провідник електричної мережі та земля, дві жили кабелю, жила кабелю і панцер, прохідний ізолятор (який ізолює провід від стіни або металевого корпусу) тощо. Конденсатор під дією прикладної напруги має властивість швидко нагромаджувати та утримувати на своїх обкладках однакові за величиною, але протилежні за знаками електричні заряди $+q$ і $-q$. **Ємністю** конденсатора називають коефіцієнт пропорційності між зарядом q та напругою U між обкладками конденсатора:

$$q = CU, \text{ або } C = q/U. \quad (2.4)$$

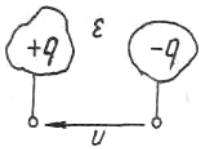


Рис. 2.3. Конденсатор

В системі СІ одиницею вимірювання ємності є **фарада** (Ф). Одна фарада – це ємність такого конденсатора, який заряджається зарядом в 1 Кл при напрузі 1 В, тобто $1\text{ Ф} = 1\text{ Кл}/1\text{ В}$. Фарада – це дуже велика одиниця, тому на практиці часто вживають похідні одиниці, такі, як **мікрофарада** ($1\text{ мкФ} = 10^{-6}\text{ Ф}$), **нанофарада** ($1\text{ нФ} = 10^{-9}\text{ Ф}$) та **пікофарада** ($1\text{ пФ} = 10^{-12}\text{ Ф}$), чи $1\text{ Ф} = 10^6\text{ мкФ} = 10^9\text{ нФ} = 10^{12}\text{ пФ}$.

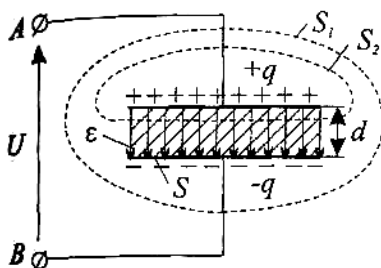


Рис. 2.4. До визначення ємності плоского конденсатора

Наведемо вирази ємностей конденсаторів деяких конструкцій.

Розглянемо плоский конденсатор (рис. 2.4). Площа обкладок – S , відстань між обкладками – d , діелектрична проникність діелектрика між пластинками – ϵ . Відстань d будемо вважати набагато меншою від лінійних розмірів обкладок конденсатора. У цьому випадку можемо нехтувати крайовим ефектом електричного поля конденсатора – випинанням силових ліній на краях конденсатора.

Розглянемо замкнену поверхню S_1 , всередині якої є конденсатор із зарядженими пластинками $+q$ та $-q$. Із постулату Максвелла (1.6) стосовно цієї поверхні одержимо:

$$\oint_{S_1} \vec{D} d\vec{s} = q = (+q) + (-q) = 0,$$

оскільки $d\vec{s} \neq 0$, то у всіх точках цієї поверхні вектор електричного зміщення $D = 0$, а отже, і значення напруженості електричного поля ($E = D / \epsilon$) теж дорівнює нулеві. Отже, електричне поле поза конденсатором відсутнє. Далі розглянемо замкнену поверхню S_2 , яка охоплює тільки одну пластинку конденсатора із зарядом $+q$. Площу S_2 можна подати так: $S_2 = S + S_6$, де S – площа конденсатора; S_6 – бокова поверхня – поза конденсатором, для якої $\vec{D} = 0$. Запишемо для поверхні S_2 постулат Максвелла: $\oint_{S_2} \vec{D} d\vec{s} = +q$, і розділимо

на два інтеграли:

$$\int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_{S_6} \vec{D} d\vec{s} = +q, \quad (2.5)$$

де $\int_{S_6} \vec{D} d\vec{s} = 0$, як вже було показано вище для площини S_1 .

Ураховуючи, що між пластинами конденсатора вектор $\vec{D}$ перпендикулярний до S , а отже, збігається з $d\vec{s}$, то кут $(\vec{D} \wedge d\vec{s}) = 0$ і рівність (2.5) набере вигляд:

$$\int_S D ds = q \text{ чи } D \int_S ds = q, \text{ або } Ds = q, \text{ звідки}$$

$$\boxed{D = q / S} \quad (2.6)$$

Як видно з (2.6), вектор електричного зміщення чисельно дорівнює густині заряду на поверхні пластини.

Ураховуючи, що $D = \varepsilon E$, одержимо напруженість електричного поля між зарядженими пластинами плоского конденсатора $E = D/\varepsilon = q/(\varepsilon S)$. Напруга між пластинами конденсатора за визначенням (1.9) є:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}. \text{ Тут кут між } (\vec{E} \wedge d\vec{s}) = 0, \text{ тому}$$

$$U_{AB} = \int_A^B E dl = E \int_A^B dl = Ed = qd/(\varepsilon S), \text{ і ємність такого конденсатора:}$$

$$C = q/U = q/\left(\frac{qd}{\varepsilon S}\right) = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Отже, ємність плоского конденсатора дорівнює:

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}. \quad (2.7)$$

Аналогічно можна одержати ємність циліндричного конденсатора завдовжки l та радіусами r_1 і r_2 , $r_2 > r_1$.

$$C = 2\pi\varepsilon l / \ln(r_2 / r_1); \quad (2.8)$$

Ємність сферичного конденсатора радіусами r_1 та r_2 :

$$C = 2\pi\varepsilon r_1 r_2 / (r_1 - r_2). \quad (2.9)$$

Струм конденсатора. Якщо увімкнути незаряджений конденсатор до мережі постійної напруги, то він буде заряджатися: з мережі заряди проходять по провідниках на обкладки конденсатора. А рух зарядів по провідниках – це є електричний струм у колі з конденсатором: $i = dq / dt$. Виразивши із (2.4) заряд через ємність і напругу на конденсаторі, одержимо:

$$\boxed{i_c = C \frac{du_c}{dt}}. \quad (2.10)$$

Отже, струм у колі з конденсатором пропорційний його ємності й швидкості зміни напруги на його пластинах.

Енергія електричного поля конденсатора. Схему (рис. 2.5) з незарядженим конденсатором ($f_c(0) = 0$) увімкнено в мережу напругою U . Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$ri + u_c = U. \quad (2.11)$$

Помножимо ліву й праву сторони рівності (2.11) на idt , одержимо рівняння енергетичного балансу кола з конденсатором:

$$ri^2 dt + u_c idt = U idt. \quad (2.12)$$

Права частина ($U idt$) рівняння (2.12) – це енергія, яку електричне коло забирає від мережі; перший член в лівій частині $ri^2 dt$ – енергія, яка виділяється у вигляді тепла в опорі r . Оскільки енергія в конденсаторі не виділяється¹, то член $u_c idt$ є електричною енергією, яка накопичується у вигляді енергії електричного поля в конденсаторі. При заряджанні конденсатора протягом часу t до напруги U_c енергія електричного поля в кінці зарядження буде:

¹ Тут нехтуємо струмом провідності в діелектрику конденсатора.

$$W_E = \int_0^t u_C i dt = \int_0^t u_C C \frac{du_C}{dt} dt = \int_0^{u_C} C u_C du_C, \text{ звідки}$$

$$\boxed{W_E = \frac{C u_C^2}{2}}. \quad (2.13)$$

2.3. Послідовне і паралельне з'єднання конденсаторів

Конденсатори, які випускає промисловість, мають визначені стандартні ємності й розраховані для роботи з визначеною номінальною напругою. За значенням номінальної напруги розрізняють конденсатори високої та низької напруги. Конденсатори з діючим значенням номінальної напруги $U_{\text{ном}} \leq 1000 \text{ В}$, а також конденсатори з номінальною постійною напругою $U_{\text{ном}} \leq 1600 \text{ В}$ належать до конденсаторів низької напруги. Конденсатори з вищою напругою це конденсатори високої напруги.

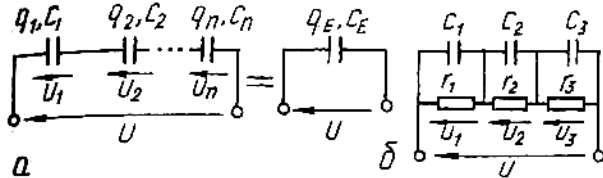


Рис. 2.6. Послідовне з'єднання конденсаторів

Якщо необхідно використати конденсатори з меншою номінальною напругою, ніж робоча напруга електротехнічної установки, їх з'єднують послідовно (рис. 2.6). Кількість та ємність конденсаторів підбирають так, щоб напруга на кожному із них не перевищувала

номінальне значення.

При послідовному з'єднанні заряди на обкладках всіх конденсаторів однакові. $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = q$, а загальна напруга дорівнює сумі напруг на окремих конденсаторах:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n.$$

Поділимо останню рівність на q :

$$\frac{U}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} + \frac{U_3}{q} + \dots + \frac{U_n}{q}$$

і ураховуючи, що $C = q / U$, одержимо:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.14)$$

тобто величина, зворотна до еквівалентної ємності групи послідовно з'єднаних конденсаторів, дорівнює сумі величин, зворотних ємностям окремих конденсаторів. З (2.14) еквівалентна ємність послідовно увімкнених конденсаторів визначиться так:

$$\boxed{C_E = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}} \quad (2.15)$$

При такому сполученні C_E завжди буде меншою від найменшої ємності конденсатора, що увійшов у це послідовне з'єднання.

Ураховуючи, що $q_1 = q_2 = \dots = q_n$, можемо записати $C_1 U_1 = C_2 U_2 = \dots = C_n U_n$. Із останньої рівності випливає, що напруги на послідовно з'єднаних конденсаторах розподіляються обернено пропорційно їх ємностям:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} \quad (2.16)$$

Інколи зустрічаються кола, які мають одночасно конденсатори й опори (рис. 2.6, б). Після увімкнення такого кола до джерела постійної напруги проходить зарядка конденсаторів. Після закінчення зарядження напруги на кожному конденсаторі будуть визначатись не значенням їх ємностей, як це було згідно з (2.16), а значеннями послідовно

увімкнених опорів. Дійсно, $U = U_1 + U_2 + U_3$. Струм в послідовно сполучених опорах дорівнює: $I = U / (r_1 + r_2 + r_3)$. Тоді $U_1 = r_1 I = r_1 U / (r_1 + r_2 + r_3)$, $U_2 = r_2 I = r_2 U / (r_1 + r_2 + r_3)$, $U_3 = r_3 I = r_3 U / (r_1 + r_2 + r_3)$.

З останніх виразів випливає, що

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2.17)$$

Отже, напруги на окремих ділянках схеми (рис. 2.6,б), після зарядки конденсаторів пропорційні опорам, які шунтують конденсатори.

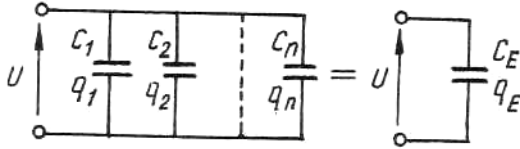


Рис. 2.7. Паралельне з'єднання конденсаторів

Коли ємність одного стандартного конденсатора недостатня для роботи електротехнічного пристрою, тоді конденсатори з'єднують паралельно (рис. 2.7). При такому з'єднанні напруга U однакова для всіх конденсаторів. Заряд q_E всієї групи

конденсаторів дорівнює сумі зарядів окремих конденсаторів:

$$q_E = q_1 + q_2 + \dots + q_n \quad (2.18)$$

Поділимо (2.18) на U , одержимо:

$$\frac{q_E}{U} = \frac{q_1}{U} + \frac{q_2}{U} + \dots + \frac{q_n}{U},$$

або

$$C_E = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{K=1}^n C_K \quad (2.19)$$

Отже, ємність групи паралельно з'єднаних конденсаторів дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів.

Змішане з'єднання конденсаторів застосовують, коли ні номінальна напруга, ні ємність стандартних конденсаторів не відповідають необхідним значенням для електротехнічного устаткування.

3. МАГНІТНІ КОЛА

Магнітне поле завжди зв'язане з електричним струмом. Магнітне поле постійних магнітів зв'язане із внутрішньоатомними – внутрішньомолекулярними струмами. У всіх без винятку випадках магнітні лінії неперервні, створюють замкнені контури.

3.1. Основні фізичні величини магнітного поля

3.1.1. Магнітна індукція (B)

Магнітні поля, подібно до електричних, є засобом описання взаємодії заряджених частин. Електричне поле визначається силовою дією на нерухомі заряди. Магнітне поле визначається силою, що діє на рухомі заряди, ця сила пропорційна швидкості руху заряду і залежить від його напрямку. Експериментально встановлена формула визначення цієї сили магнітного поля:

$$\vec{F} = q[\vec{V} \cdot \vec{B}] \quad (3.1)$$

або в скалярних величинах

$$F = BqV \cos \alpha,$$

де $\vec{V}$ – вектор швидкості рухомого заряду; $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції; α – кут між вектором $\vec{V}$ і площиною, перпендикулярною до силових магнітних ліній.

Пояснимо сказане. Нехай додатний заряд $(+q)$

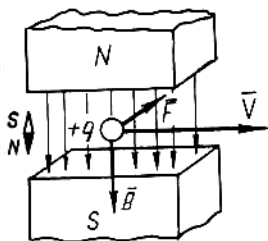


Рис. 3.1. Дія магнітного поля на електричний заряд, що рухається перпендикулярно до силових магнітних ліній

рухається в магнітному полі із швидкістю ($\vec{V}$) перпендикулярно до силових ліній (рис. 3.1). Тоді на заряд буде діяти сила ($\vec{F}$), напрям якої можна визначити за правилом лівої руки, а значення із (3.1).

Величина B із (3.1) визначається як

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{q\vec{V}}, \text{ або } B = \frac{F}{qV \cos \alpha} \quad (3.2)$$

Якщо $\alpha = 0$; $q = +1$; $V = 1$, тоді $\vec{B} = \vec{F}$, тобто магнітна індукція визначається силою, з якою магнітне поле діє на одиничний Додатний електричний заряд, що рухається в полі перпендикулярно до силових ліній з одиничною швидкістю. Магнітна індукція – це векторна величина, спрямована за напрямом магнітних ліній (від N до S) і є дотичною до силових ліній в кожній її точці.

Одиницею вимірювання магнітної індукції в системі СІ є **тесла**:

$$[B] = 1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб} / \text{м}^2 = 1 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{м}^2.$$

$$\begin{aligned} [B] &= [F / (qV)] = 1 \text{ Н} / (1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ м} / \text{с}) = (1 \text{ Дж} / \text{м}) / (1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot 1 \text{ м} / \text{с}) = \\ &= (1 \text{ А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} / \text{м}) / (1 \text{ А} \cdot \text{с} \cdot 1 \text{ м} / \text{с}) = 1 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{м}^2 = 1 \text{ Вб} / \text{м}^2 = 1 \text{ Тл} \end{aligned}$$

3.1.2. Магнітний потік (Φ)

Величиною, яка служить для інтегральної оцінки магнітного поля, є магнітний потік (Φ) – **потік вектора магнітної індукції крізь деяку поверхню**.

Визначимо магнітний потік крізь поверхню S , обнесену контуром l (рис. 3.2). Наочно магнітний потік зображають як сукупність магнітних ліній крізь поверхню S . Звичайно під час обчислення магнітного потоку крізь довільну поверхню в неоднорідному магнітному полі поверхню поділяють на нескінченно малі поверхні dS . В межах кожної з

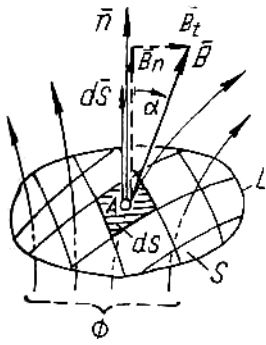


Рис. 3.2. До визначення магнітного потоку крізь поверхню S

елементарних площинки dS магнітну індукцію вже можна вважати однакою. Тоді елементарний потік $d\Phi$ крізь поверхню dS дорівнює:

$$d\Phi = B_n dS = B \cos \alpha \cdot dS = \bar{B}_t \bar{dS},$$

а крізь всю поверхню S :

$$\Phi = \int_S \bar{B}_t \bar{dS}. \quad (3.3)$$

Якщо вектор магнітної індукції перпендикулярний до площини S і в усіх її точках і має однакове значення, співвідношення (3.3) набере такого вигляду:

$$\Phi = BS, \text{ або } B = \frac{\Phi}{S}. \quad (3.4)$$

Одиницею вимірювання магнітного потоку є 1 **вебер** ($1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$):

$$[\Phi] = [BS] = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ В} \cdot \text{с} = 1 \text{ Вб}.$$

Принцип неперервності магнітного потоку (магнітних ліній) математично формулюється так:

$$\oint_S \bar{B}_t \bar{dS} = 0 \quad (3.5)$$

тобто *магнітний потік крізь будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю*,

3.1.3. Намагніченість речовин (J). Напруженість магнітного поля (H).

Магнітна проникність (μ)

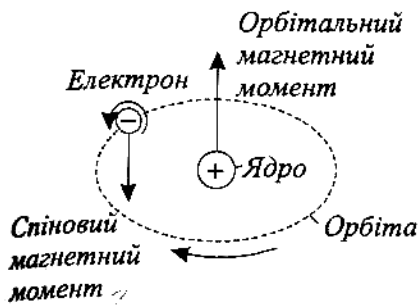


Рис. 3.3. Орбітальний і спіновий магнітні моменти атома

Всередині будь-якої речовини існують елементарні струми й при відсутності зовнішніх електромагнітних полів. Ми уявляємо собі ці струми як рух електронів по орбітах всередині атомів речовини й як обертання електронів навколо своїх осей.

Магнітне поле колового струму характеризується магнітним моментом, напрям якого визначається за правилом правого гвинта.

Електрони володіють *орбітальним* і *спіновим* магнітними моментами, які можуть бути спрямовані або в один, або в різні боки (рис. 3.3).

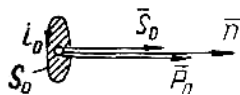


Рис. 3.4. Магнітний момент p_0 елементарного струму i_0

Сумарний магнітний момент одиниці об'єму речовини (з врахуванням власних і наведених моментів) називають **намагніченістю** J . Поняття намагніченості не має змісту для окремого атома, а стосується лише групи атомів і характеризує стан речовини, який вона набуває в результаті намагнічування. В міжнародній системі одиниць (СІ)

намагніченість – це внутрішнє магнітне поле речовини, зумовлене магнітними моментами його атомів.

Намагніченість речовини можна пояснити, враховуючи поняття магнітного моменту $\bar{p}_0$ елементарного струму i_0 (рис. 3.4). Магнітним моментом елементарного струму називають добуток величини i_0 на площину S_0 , що охоплюється цим струмом. Магнітний момент – векторна величина, напрям його приймають вздовж перпендикуляра $\bar{n}$ до площини S_0 і зорієнтованого зі струмом за правилом правого гвинта. Отже,

$$\bar{p}_0 = i_0 \cdot \bar{S}_0 \quad (3.6)$$

де $\bar{S}_0$ – вектор, що кількісно дорівнює S_0 і скерований по $\bar{n}$; $\bar{n}$ – нормаль до площини S_0 .

Виділимо всередині намагніченої речовини елементарний об'єм ΔV і для цього об'єму геометрично складемо всі $\bar{p}_0$, одержимо вектор $\bar{P}$ – сумарний магнітний момент об'єму ΔV : $\bar{P} = \sum_{\Delta V} \bar{p}_0$. Поділивши величину $\bar{P}$ на ΔV , отримаємо величину, яку називають

середньою намагніченістю тіла об'ємом ΔV , а щоби знайти намагніченість $\bar{J}$ в даній точці поля, треба взяти границю відношення $\bar{P}/\Delta V$ при $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\bar{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\bar{P}}{\Delta V} \quad (3.7)$$

Отже, *намагніченість речовини дорівнює геометричній сумі магнітних моментів елементарних струмів, віднесеної до одиниці об'єму речовини*. Намагніченість вимірюється: $[J] = 1 \text{ А/м}$.

Розглянуті вище величини магнітного поля – магнітна індукція, магнітний потік і намагніченість речовини ($\bar{B}, \Phi, \bar{J}$) залежать від величини струму, який викликав це магнітне поле, а також від середовища, в якому розглядається це поле. Для зручності розрахунку магнітних полів вводиться ще одна величина, яку називають напруженістю магнітного поля ($\bar{H}$). Ця величина не залежить від середовища, в якому розглядається магнітне поле, а залежить тільки від величини струму, що створив це поле, та координат точки, в якій визначається $\bar{H}$.

За відсутності намагніченості середовища ($J = 0$ – для вакууму) співвідношення між B та H встановлюється залежністю:

$$\boxed{\bar{B}_0 = \mu_0 \bar{H}}, \quad (3.8)$$

де μ_0 – магнітна стала або магнітна проникність вакууму ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} = 125 \cdot 10^{-8} \text{ Гн/м}$), теж характеризує магнітні властивості повітря, оскільки для повітря $\mu_{\text{пов}} = 4,000012 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \cong \mu_0$.

Для будь-якої речовини, внесеної у зовнішнє магнітне поле напруженістю ($\bar{H}$), з урахуванням намагніченості $\bar{J}$ співвідношення (3.8) набере вигляд:

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{J}) = \mu_0 \bar{H} (1 + \bar{J}/\bar{H}) = \mu_0 \bar{H} (1 + k) \quad (3.9)$$

де $k = \bar{J}/\bar{H}$ – магнітна сприйнятність речовини. Звідси залежність між $\bar{J}$ і $\bar{H}$ – така:

$$\boxed{\bar{J} = k \bar{H}} \quad (3.10)$$

Величина $(1 + k)$ у виразі (3.9) є відносною магнітною проникністю:

$$\mu_r = 1 + k \quad (3.11)$$

Тоді

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu_a \bar{H}, \quad (3.12)$$

де $\mu_a = \mu_0 \mu_r$ – абсолютна магнітна проникність даного середовища. Для вакууму (теж для повітря) $\mu_a = \mu_0$, а значить, $k = 0$.

Якщо власні магнітні моменти атомів деяких речовин дорівнюють нулеві, то при внесенні такої речовини в зовнішнє магнітне поле, утворене, наприклад, в повітряному середовищі, наведені індуковані моменти, направлені проти поля (тобто $\bar{J}$ і $\bar{H}$ антипаралельні) й будуть послаблювати його. Це сприймається як зменшення проникності середовища в тому місці, де знаходиться ця речовина, тобто $\mu_a < \mu_0$ або $k < 0$. Такі речовини називають **діамагнетиками** (антимагнітними), вони мають μ_r дещо менше за 1, наприклад, для міді $\mu_r = 0,999995$. До них належать мідь, срібло, золото, свинець, вуглець, вісмут, інертні гази тощо. В практичних розрахунках для них приймають $\mu_r = 1$. У речовинах, атоми яких мають власні магнітні моменти, але за відсутності зовнішнього

магнітного поля через тепловий рух ці моменти розташовані безладно (рівномірно по всіх напрямках), намагніченість цих речовин $\bar{J} = 0$. Під дією зовнішнього магнітного поля напруженістю $\bar{H}$ власні магнітні моменти атомів намагаються повернутися за напрямом цього поля. Виникає орієнтація власних магнітних моментів, тим більша, чим більша $\bar{H}$. Намагніченість $\bar{J}$ стає більшою від нуля і зростає зі збільшенням $\bar{H}$ – речовина, яка намагнічується за напрямом зовнішнього поля (вектори $\bar{J}$ і $\bar{H}$ паралельні). При цьому діамagnetний ефект (виникнення наведених моментів) виявляється значно слабшим, ніж збільшення $\bar{J}$ за рахунок переважної орієнтації власних моментів, внаслідок чого підсилюється зовнішнє поле. Це сприймається як збільшення проникності в місці, де знаходиться речовина, тобто $\mu_a > \mu_0$ і $k > 0$. Речовини, відносна магнітна проникність яких дещо більша від одиниці ($\mu_r > 1$), називають **парамагнетиками**. До них належать марганець, хром, алюміній, платина, метан, кисень, повітря та інші (для повітря $\mu = 1,000003$).

Залежність $J = f(H)$ для діамagnetиків і парамагнетиків лінійна (прямі лінії 1 і 2 на рис. 3.5) і досить незначна, тому що коефіцієнт магнітної сприйнятності достатньо малий ($k = 10^{-4} - 10^{-6}$).

Крім цього, характерною особливістю цих речовин є зменшення або постійність k і μ при зростанні температури й відсутність, як правило, магнітного гістерезису.

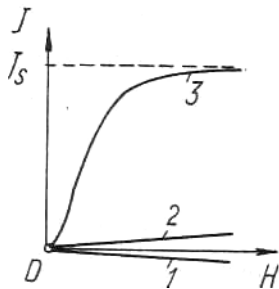


Рис. 3.5. Залежності намагнічуваності речовини від напруженості магнітного поля для: 1 – діамagnetиків; 2 – парамагнетиків; 3 – феромагнетиків

Другу групу речовин, для яких відносна магнітна проникність набагато більша від одиниці ($\mu \gg 1$, $\mu_a \gg \mu_0$), називають **феромагнетиками** (сильно магнітними). До них належать: **залізо, нікель, кобальт, гадоліній, диспрозій та сплави цих елементів**. Вони мають подібні магнітні властивості. Відносна магнітна проникність може досягати десятків і сотень тисяч одиниць та значною мірою залежить від напруженості поля і температури. Намагніченість J навіть при дуже малих магнітних полях буває набагато більшою від напруженості H і швидко досягає насичення J_s , а залежність $J = f(H)$ перестає бути лінійною (крива 3 на рис. 3.5). Зі збільшенням температури намагнічуючого взірця значення J_s зменшується, тому що збільшується тепловий рух і послаблює орієнтацію власних магнітних моментів. При нагріванні вище від деякої критичної для певної речовини температури (її називають **точкою Кюрі**) речовина втрачає феромагнітні властивості (перетворюється в парамагнетик). Одночасно змінюються її фізичні характеристики: теплоємність, j електропровідність тощо.

У квантовій механіці доведено, що природа феромагнетизму визначається в основному спіновими магнітними моментами електронів, тому що орбітальні магнітні моменти електронів є послабленими за рахунок поля сусідніх атомів. Спінкові моменти додаються один з одним, викликають **самовільну (спонтанну) намагніченість** речовини навіть за відсутності зовнішнього поля. Ця намагніченість є найхарактернішою ознакою феромагнетизму.

У електротехнічних розрахунках електричних машин, трансформаторів, апаратів, приладів тощо відносна магнітна проникність діамagnetних та парамагнітних матеріалів приймається такою, що дорівнює одиниці ($\mu = 1$). Для феромагнітних матеріалів відносна магнітна проникність може досягти тисяч і десятків тисяч одиниць ($10^3 \dots 10^4$) і залежить від величини магнітної індукції.

3.2. Закон повного струму

Цей закон дає змогу за даними значеннями струмів, що створюють магнітне поле, й координат точки визначити напруженість магнітного поля в цій точці, незалежно від середовища, в якому проходять струми чи розташована ця точка. Формулюється він так: **лінійний інтеграл вектора напруженості магнітного поля вздовж замкненого контуру дорівнює електричному струмові, що охоплюється цим контуром**, тобто струмові, який проходить крізь поверхню, що обмежується цим контуром:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum i \quad (3.13)$$

Додатний напрям контуру пов'язаний з напрямом електричного струму правилом правого гвинта. В правій частині (3.13) під величиною i слід розуміти струм провідності, струм перенесення, а також струми зміщення, які проходять крізь поверхню, обмежену контуром інтегрування (l). Сума цих струмів (провідності, переносу й зміщення) може бути названа **повним струмом**, тому рівність (3.13) називають **законом повного струму**.

Для ілюстрації запишемо закон повного струму для контуру, що охоплює площину S (рис. 3.6): $\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \oint_l H dl \cos \alpha = i_1 - i_2 + i_3$.

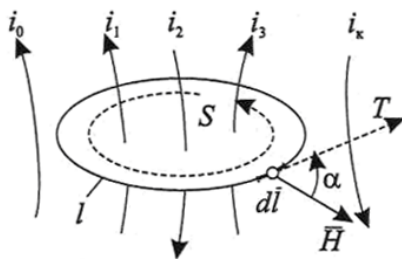


Рис. 3.6. До пояснення закону повного струму

Напрямок обходу контуру показаний пунктирною лінією. Струми i_0 та i_k в праву частину наведеної рівності не увійшли тому, що вони не охоплюються контуром l .

Запишемо закон повного струму ще для контуру l (рис. 3.6):

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = w_1 i_1 - w_2 i_2.$$

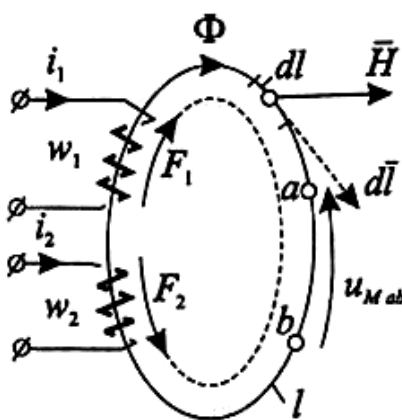


Рис. 3.7. Скерування магніторушійної сили та магнітної напруги

Тут струм i_1 охоплює контур l w_1 разів, а струм i_2 – w_2 разів. При обході контуру за годинниковою стрілкою струм i_1 та напрям обходу скеровані за правилом правого гвинта, а струм i_2 – за лівим гвинтом.

Магніторушійна сила та магнітна напруга. Під магніторушійною силою (МРС), або намагнічувальною силою розуміють праву частину рівності (3.13) – величину $\sum i$ і позначають її літерою F . Магніторушійна сила котушки з кількістю витків w , по якій протікає струм i , дорівнює $F = wi$ та скерована відносно струму за правилом правого гвинта.

Під магнітною напругою ділянки контуру l (U_{Mab}) будемо розуміти величину:

$$U_{Mab} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}.$$

Якщо поле рівномірне й вектори $\vec{H}$ і $\vec{l}$ збігаються, тоді $U_m = Hl$. Як і в електричних колах, напрям магнітної напруги будемо позначати однією стрілкою, скерованою до точки (a) вищого магнітного потенціалу, ураховуючи, що у контурі l магнітний потік скерований від точки a до b .

Одиниці вимірювання магніторушійної сили й магнітної напруги однакові й тотожні з одиницею вимірювання сили струму, тобто $[U_m] = [F] = 1 \text{ А}$.

Іноколи одиницю вимірювання МРС називають ампервитком і позначають її символом Ав.

3.3. Феромагнітні матеріали

3.3.1. Деякі властивості феромагнітних матеріалів

До феромагнітних матеріалів належать залізо, нікель, кобальт, гадоліній, диспрозій та їх сплави. Ці елементи мають магнітну проникність, значно більшу за μ_0 що зумовлює виняткове значення їх як магнітних матеріалів. Всередині феромагнетика існують магнітні взаємодії між атомами (взаємодія орбітальних і спінових магнетичних моментів), які насамперед визначають процеси намагнічування й перемагнічування феромагнетика. Зокрема спін-спінові магнітні взаємодії приводять до того, що весь об'єм феромагнітного тіла ділиться на велику кількість областей із спонтанною намагніченістю, які називають

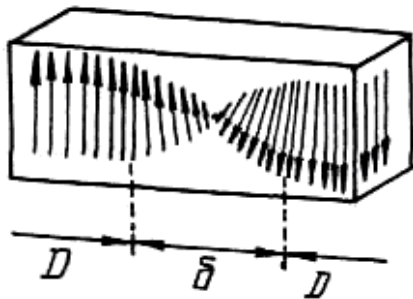


Рис. 3.8. На межі розподілу двох доменів спостерігається поступове поворотання вектора намагніченості

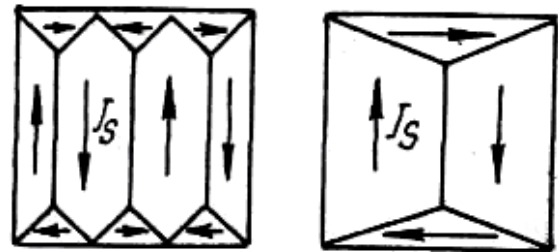


Рис.3.9. Розташування доменів у феромагнетик

доменами. Всередині домена мільярди атомів орієнтовані своїми магнітними моментами паралельно один одному. Кожен домен намагнічений до насичення в даному напрямку, відмінному від напрямку намагніченості сусідніх доменів. Між сусідніми доменами з різним напрямом намагніченості є перехідні шари, всередині яких вектор намагніченості поступово повертається від одного напрямку до іншого (рис. 3.8). Цей перехідний шар називають стінкою або границею доменів. Коли магнітні моменти окремих доменів компенсують один одного, то сумарна намагніченість феромагнітного тіла дорівнює нулеві.

Енергетично найвигоднішим є таке розташування окремих доменів, при якому вони створюють замкнене магнітне коло (рис. 3.9). Розміри доменів достатньо малі, однак при відповідній підготовці феромагнетика їх можна побачити під мікроскопом. Ширина домена, наприклад, для заліза $D \cong 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Межа між сусідніми доменами близько $\delta \cong 10^{-5} \text{ см}$. Детальний аналіз створення доменів, їх взаємне розташування пояснюється в квантовій механіці.

Якщо розмагнічене феромагнітне тіло з безладним розташуванням доменів помістити в магнітне поле, то магнітні моменти доменів перерозподіляються і з'явиться складова намагніченості всього тіла в напрямі зовнішнього поля.

На рис. 3.10 показана крива намагнічування феромагнетика й зміна доменної структури та напрям спонтанної намагніченості у визначених точках цієї кривої для одного із кристалів. Припускається, що в площині рисунка є дві взаємно перпендикулярні

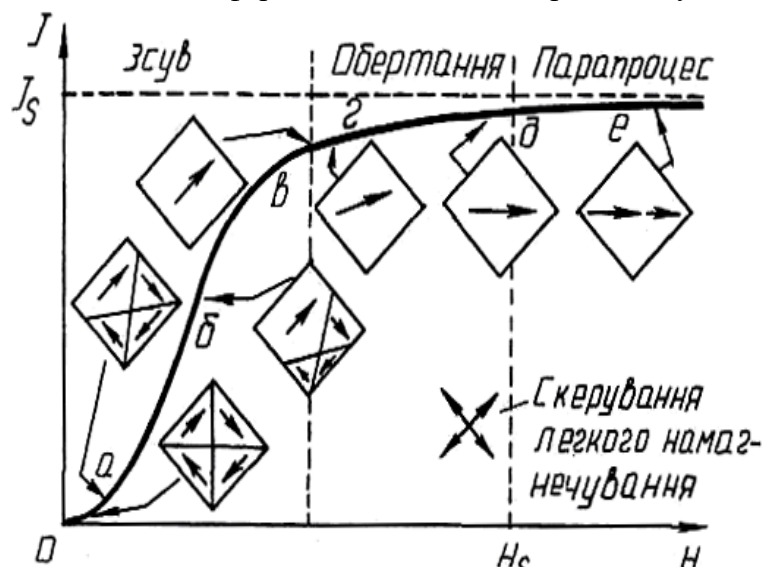


Рис. 3.10. Крива намагнічування і зміна доменної структури для одного із кристалів феромагнетика

осі легкого намагнічування, а зовнішнє поле $\vec{H}$ спрямоване вздовж осі абсцис, утворює деякий кут з цими осями. При намагнічуванні феромагнетика відбуваються три різні за характером процеси: **зміщення границь доменів (зсув)**, **обертання вектора спонтанної намагніченості** й звичайний **лінійний парамагнітний ефект** збільшення намагніченості, який називають парапроцесом. Розподіл цих процесів по зонах кривої $J=f(h)$ показано на рис. 3.10. На початковій стадії (ділянка 0-а) проходить пружне (оборотне) зміщення границь доменів, а потім (ділянка а-б) непружне (необоротне) зміщення. Ці процеси зумовлені збільшенням об'єму доменів, магнітний момент яких утворює невеликий кут з напрямом зовнішнього магнітного поля $\vec{H}$, за рахунок зменшення об'єму інших, момент яких направлений під великим кутом до $\vec{H}$, закінчуються вони тоді, коли кожен кристаліт стає доменом. Вектор намагніченості такого домена спрямований вздовж цієї осі легкого намагнічування, яка складає найменший кут із зовнішнім полем. Подальше підвищення напруженості поля (ділянка в-д) викликає обертання магнітних моментів всіх доменів (кристалів) за напрямом поля. Поле, при якому скерування векторів спонтанної намагніченості всіх кристалів збігається з напрямом зовнішнього поля, **називають полем технічного насичення H_s** . Якщо продовжувати збільшувати зовнішнє поле, то намагніченість тіла буде зростати внаслідок збільшення намагніченості самих спонтанних ділянок. Останнє зумовлене орієнтувальною дією сильного магнітного поля на ті спіни, які були дезорієнтовані в антипаралельному напрямі тепловим рухом. В кінці парапроцесу всі антипаралельні спіни будуть переорієнтовані і феромагнітне тіло досягає стану **абсолютного насичення**.

Намагніченість J_s областей залежить від температури. При температурі абсолютного нуля J_s дорівнює намагніченості повного насичення J_∞ . Тепловий рух зменшує значення J_s , і при деякій температурі θ , характерній для цієї речовини, упорядковане розташування елементарних струмів в області повністю руйнується. Ця температура називається **точкою Кюрі**. Точка Кюрі для різних матеріалів різна: для заліза (Fe) +770 °C, для нікелю (Ni) +365 °C, для кобальту (Co) +1130 °C. Вище від точки Кюрі речовина набуває властивостей звичайних парамагнітних речовин, його відносна магнітна проникність дещо більша від одиниці. Із зниженням температури магнітні властивості феромагнітиків відновлюються.

При намагнічуванні феромагнітиків проходить невелика зміна їх лінійних розмірів, тобто збільшення або зменшення довжини з одночасним зменшенням або збільшенням поперечного перерізу. Це явище називається **магнітострикцією**. Найяскравіше це виражено в нікелі. Ця зміна незначна близько 10^{-6} попередніх розмірів.

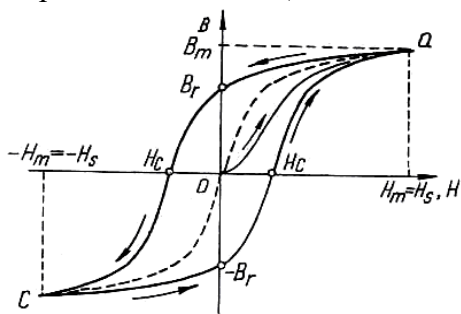


Рис. 3.11. Гранична петля гістерезису феромагнітного матеріалу

Розглянемо перемагнічування феромагнітного матеріалу. Допустимо, що кільцевий магнітопровід із феромагнітного матеріалу не намагнічений і струму у витках котушки немає, тобто $B = 0$ і $H = 0$ (початок координат, рис. 3.11). При поступовому збільшенні намагнічувального струму, а отже, напруженості поля від нуля до деякого найбільшого значення $H_m = wI_m / l_{cp}$ магнітна індукція збільшується **по кривій початкового намагнічування** (0-а) і досягає відповідного максимального значення (B_m). Ця крива відповідає кривій, зображеній на рис. 3.10.

Після насичення магнітика ($H > H_s = H_m$) зі зменшенням поля H намагнічуваність буде зменшуватись внаслідок зворотного процесу обертання магнітного моменту кожного домена в напрямі найближчої осі легкого намагнічування. При $H = 0$ в магнітику збережеться залишкова намагніченість J_r , якій відповідає залишкова магнітна індукція $B_r = \mu_0 J_r$. При цьому магнітні моменти доменів скеровані по осях легкого намагнічування.

При подальшому зменшенні напруженості поля H до від'ємних значень внаслідок необоротного процесу зміщення границь почнеться після деякого поля, названого полем зрушення H_3 . Це поле відповідає зміні індукції від B_r до $0,9 B_r$. При величині $H = H_C$, що називається коерцитивною силою, середнє значення магнітної індукції B дорівнює нулеві. Під час подальшого зменшення струму й напруженості поля продовжується необоротне зміщення границь доменів доти, доки $B \cong -B_r$; і далі при зменшенні H до $-H_m$, магнітна індукція досягає $B = -B_m$ (тут відбувається обертання доменів). Якщо після досягнення значення $H = -H_m$ знову H збільшувати до $+H_m$, отримаємо симетричний цикл – **петлю гістерезису**. Тільки після достатньої кількості (близько десяти) повних перемагнічувань ми одержуємо однозначну **симетричну гістерезисну петлю (са)**. Після деякого, достатньо великого значення $H = H_{cp}$, при якому речовина близька до стану насичення, подальше зростання H_m , не викликає збільшення площі, яка охоплюється петлею гістерезису. Петлю гістерезису, яка відповідає значенню H_{cp} , називають **граничною петлею гістерезису**. Всі інші можливі цикли гістерезису (крім граничного) називають **частинними циклами** і вони розташовані всередині граничної петлі гістерезису.

Як видно із рис. 3.11, при заданому значенні напруженості поля значення магнітної індукції може бути різним, залежно від того процесу, який був раніше. Це явище називають **явищем гістерезису**.

На рис. 3.12 показана сім'я симетричних петель гістерезису, одержаних при різних значеннях максимальної напруженості поля H_m . При зміні H_m відповідні точки B_m будуть пересуватися по кривій, яку називають **основною кривою намагнічування**. Ця крива проходить через вершини симетричних гістерезисних петель. Крива однозначна для заданого феромагнітного матеріалу, її наводять у довідковій літературі та використовують для розрахунку електромагнітних пристроїв. Крива симетрична відносно початку координат, тому її зображають тільки у першому квадранті. Основна крива намагнічування незначно відрізняється від початкової кривої намагнічування.

Магнітний стан речовини в постійних полях завжди характеризується точкою (B, H) , яка лежить всередині граничної петлі гістерезису. При розрахунках електромагнітних кіл деколи вигідно користуватися замість граничної петлі середньою лінією між верхньою і нижньою вітками петлі гістерезису – **середньою кривою намагнічування** (пунктирна крива на рис. 3.11).

Крім симетричних петель, коли $|+H_m| = |-H_m|$, можуть бути і несиметричні петлі, коли, $|+H_m| \neq |-H_m|$ які ще називають частковими циклами, наприклад, при одночасному намагнічуванні феромагнітика постійним і змінним полями. Вивчають такі процеси у спецкурсах.

На рис. 3.13. Зображена основна крива намагнічування $B(H)$ феромагнітного матеріалу. На основі цієї кривої побудована залежність магнітної проникності від напруженості магнітного поля $\mu(H)$. Для будь-якої точки кривої намагнічування, наприклад, для точки A , **абсолютна** (μ_a) і **відносна** (μ) **магнітна проникність** визначаються:

$$\mu_{aA} = \frac{B_A}{H_A} = \frac{m_B \cdot \bar{AK}}{m_H \cdot \bar{OK}} = \frac{m_B}{m_H} \cdot \operatorname{tg} \alpha_A, \quad \mu_A = \frac{\mu_{aA}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m_B}{m_H} \cdot \operatorname{tg} \alpha_A. \quad (3.14)$$

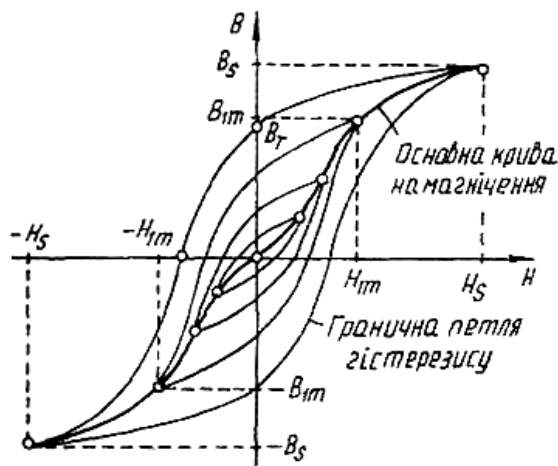


Рис. 3.12. Сім'я симетричних петель гістерезису та основна крива намагнічування феромагнітного матеріалу

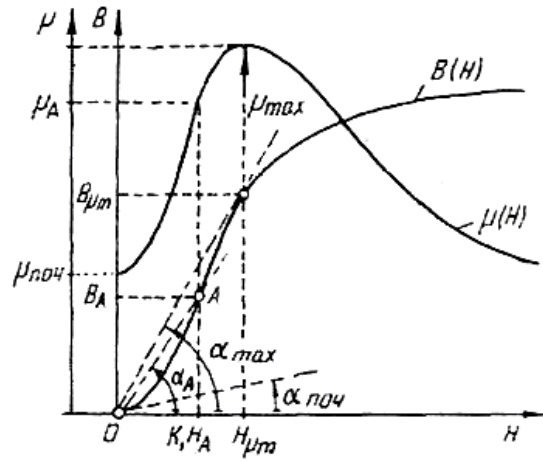


Рис. 3.13. Основна крива намагнічування феромагнітного матеріалу та залежність магнітної проникності від напруженості магнітного поля

Початкова проникність ($\mu_{оч}$):

$$\mu_{оч} = \frac{m_B}{m_H} \cdot \tan \alpha_{оч}, \quad \mu_{оч} = \frac{\mu_{оч}}{\mu_0} \quad (3.15)$$

Максимальна проникність (μ_{max}) відповідає коліну кривої намагнічування і визначається як тангенс кута нахилу до осі абсцис дотичної, проведеної із початку координат до основної кривої намагнічування:

$$\mu_{\alpha max} = \frac{m_B}{m_H} \cdot \tan \alpha_{max}, \quad \mu_{max} = \frac{\mu_{\alpha max}}{\mu_0}. \quad (3.16)$$

Зі збільшенням напруженості поля (вище за $H_{\mu max}$) кут α зменшується і, відповідно, магнітна проникність теж зменшується. При сильному насиченні феромагнітного матеріалу $H \rightarrow \infty$ магнітна проникність його наближається до μ_0 : $\mu_{\alpha} \rightarrow \mu_0$, або $\mu \rightarrow 1$.

Початкова магнітна проникність характеризує можливість використання феромагнетика в слабких магнітних полях. Максимальна проникність визначає верхню границю намагніченості та використання матеріалу в сильних магнітних полях. Так, наприклад, для листової електротехнічної сталі $\mu_{i \div} = 250 - 1000$, а $\mu_{max} = 5000 \div 30000$.

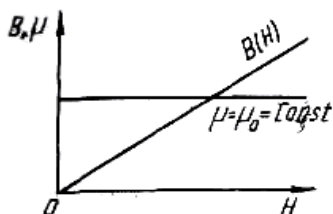


Рис. 3.14. Залежності магнітної індукції і магнітної проникності від напруженості магнітного поля для всіх неферомагнітних матеріалів

Отже, залежність магнітної індукції, а також магнітної проникності від напруженості магнітного поля для феромагнітного матеріалу достатньо складна і не може бути виражена простою розрахунковою формулою. Тому при розрахунках магнітних кіл використовують залежності $B(H)$ магнітних матеріалів, знятих експериментально.

Для порівняння на рис. 3.14 наведені залежності B і μ від H для всіх неферомагнітних матеріалів, для яких прийнято: $\mu_{\alpha} \equiv \mu_0$, $\mu = 1$. Це лінійні характеристики.

3.3.2. Класифікація феромагнітних матеріалів.

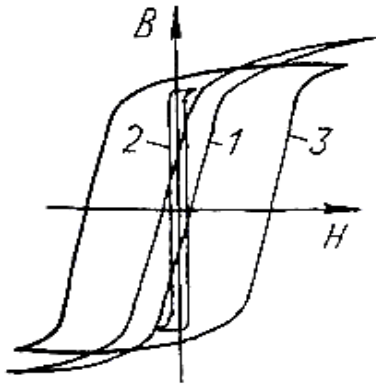


Рис. 3.15 Граничні петлі гістерезису для: 1- магнітомяких; 2- з прямокутною петлею; 3- з широкою петлею.

Феромагнітні матеріали діляться на три основні групи: магнітом'які й магнітотверді, до третьої групи належать матеріали спеціального призначення, які мають порівняно невелику область застосування.

Характерною властивістю магнітом'яких матеріалів є їх здатність намагнічуватися до насичення уже в слабких полях (B_s досягає 2,2 Тл). Вони мають високу магнітну проникність і малі втрати на перемагнічування (вузька петля гістерезису), малу коерцитивну силу $H_c \leq 400 \text{ А/м}$.

Магнітом'які матеріали застосовуються для виготовлення магнітопроводів електричних машин, трансформаторів, електричних апаратів тощо. Магнітом'які матеріали з малим значенням B_r і H_c (Рис. 3.15-1) дають змогу в широких межах змінювати магнітний потік.

Деякі магнітом'які матеріали при відповідній технології обробки дають змогу одержати "прямокутну" петлю гістерезису (рис. 3.15-2) – це магнітні матеріали спеціального призначення. Ці матеріали характеризуються дуже малими значеннями H_c , великою B_r , близькою до B_s . Матеріали з прямокутною петлею гістерезису застосовуються в пристроях автоматики й обчислювальної техніки.

Магнітотверді матеріали (матеріали для постійних магнітів) повинні мати велику залишкову магнітну індукцію B_r й велику коерцитивну силу H_c (рис. 3.15-3) – тобто вони мають широкую петлю гістерезису. Втрати на гістерезис (втрати на повертання доменів) для магнітотвердих матеріалів не мають значення, тому що вони намагнечуються тільки один раз.

3.4. Основні закони магнітних кіл. Розрахунок магнітного кола

Магнітні кола електротехнічних пристроїв (електричних машин, трансформаторів,

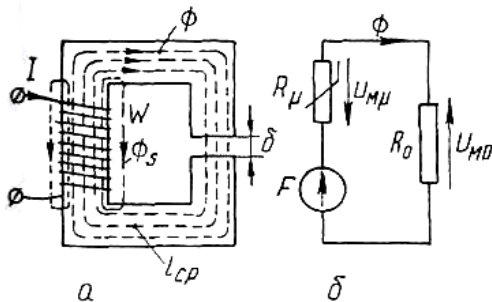


Рис. 3.16. Магнітне коло з повітряним проміжком (а) та його заступна схема (б)

електромагнітних апаратів і релейного захисту, вимірювальних систем тощо), як правило, складені в основному з феромагнітних ділянок, якими замикається магнітний потік. Оскільки магнітна проникність феромагнетиків – величина непостійна (залежить від магнітної індукції), то такі кола в загальному випадку нелінійні. Приклад найпростішого магнітного кола – це коло замкненого магнітного кільця – тороїда. На рис. 3.16,а показане магнітне коло з повітряним проміжком δ . Магнітний потік в контурі

викликається намагнічувальною силою $F = wi$. На своєму шляху магнітний потік

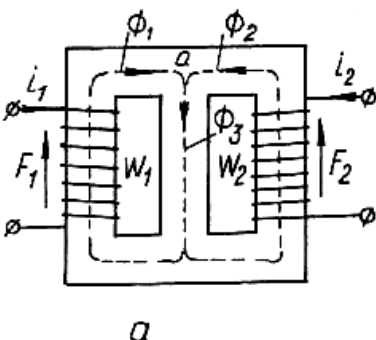


Рис. 3.17. Розгалужене магнітне коло (а) і його заступна схема (б)

зустрічається з двома магнітними опорами: $R_{M\mu} = l_{cp} / (\mu_a S)$ – магнітного опору магнітопроводу, та $R_{M0} = \delta / (\mu_0 S)$ – магнітного опору повітряного проміжку. На рис. 3,16,б показана заступна схема магнітного кола, аналогічна схемі електричного кола. Тут F відповідає ЕРС; Φ

відповідає струму I ; $U_{M\mu} = R_{M\mu} \Phi$, $U_{M0} = R_{M0} \Phi$ – падіння магнітних напруг. На рис. 3.17,а показане розгалужене магнітне коло, а на рис. 3.17,б – його заступна схема, аналогічна електричній.

Перший заков Кірхгофа для магнітного кола. Він випливає з принципу неперервності магнітних силових ліній (магнітного потоку). Для замкненої поверхні S , що охоплює деякий простір магнітного кола, в якому збігаються магнітні потоки $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ (рис. 3.18) при нехтуванні магнітними потоками розсіяння Φ_s , (потоками, які замикаються через повітря), згідно з (3.5) можемо записати

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 - \Phi_k + \Phi_p = 0, \quad (3.17)$$

або в загальному вигляді:

$$\sum_{k=1}^p \Phi_k = 0. \quad (3.18)$$

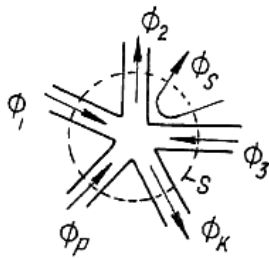


Рис. 3.18. Замкнута поверхня S охоплює магнітний вузол

Згідно з (3.18) **алгебрична сума магнітних потоків, які підходять до вузла магнітного кола, дорівнює нулеві**. Наприклад, для вузла a (рис. 3.18) рівність (3.18) запишеться так: $\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0$.

Другий закон Кірхгофа для магнітного кола випливає із закону повного струму (рівняння 3.13) і застосовується для замкненого контуру, формулюється так: **алгебрична сума магнітних напруг ($R_{mk} \Phi_k$) на окремих ділянках замкненого контуру дорівнює алгебричній сумі магніторушійних сил ($w_k i_k$) цього самого контуру**. Або так: алгебрична сума магнітних напруг (U_m) і магніторушійних сил (F) в замкненому контурі дорівнює нулеві:

$$\sum_{k=1}^p R_{mk} \Phi_k = \sum w_k i_k. \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^p U_{mk}, F_k = 0. \quad (3.20)$$

Наприклад, для лівого контуру (рис. 3.17) (3.19) та рівність (3.20) запишеться так:

$$R_{m1} \Phi_1 + R_{m3} \Phi_3 = w_1 i_1, \text{ або } F_1 - U_{m1} - U_{m3} = 0, \text{ чи } w_1 i_1 - H_1 l_1 - H_3 l_3 = 0.$$

Падіння магнітної напруги на ділянці магнітного кола довжиною l при його напруженості H може бути визначене так:

$$U_m = R_m \Phi = \frac{l}{\mu_a S} \cdot SB = \frac{l}{\mu_a S} S \mu_a H,$$

отже

$$U_m = Hl \quad (3.21)$$

Закон Ома для магнітного кола. Із (3.19) можемо записати, що

$$\Phi_k = \frac{w_k i_k}{R_{mk}} = \frac{F}{R_{mk}}. \quad (3.22)$$

Магнітний опір R_m визначається згідно з виразом $R_H = \frac{F}{\Phi} = \frac{l_{cp}}{\mu_a S}$, Співвідношення (3.22) за аналогією з електричним колом називають законом Ома для магнітного кола. Однак внаслідок нелінійності магнітного кола, зумовленої непостійністю магнітної проникності феромагнетиків, вираз (3.22), як вже відзначалось, практично не застосовується для розрахунку магнітних кіл.

Як випливає із закону Ома магнітного кола (3.22), для одержання найбільшого магнітного потоку при найменшій МРС магнітне коло повинно мати малий магнітний опір. Велика магнітна проникність феромагнітних матеріалів забезпечує одержання малих магнітних опорів магнітопроводів, виготовлених із цих матеріалів. Тому магнітні кола електричних машин виконують із феромагнетиків, а ділянки кіл із неферомагнітних матеріалів, необхідні повітряні проміжки (для яких магнітний опір дуже великий), як правило, виконують якнайменшими.

Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола. Задачі розрахунку нерозгалужених магнітних кіл поділяють на дві групи: а) так звані прямі задачі, і б) так звані зворотні задачі.

У **прямій задачі** задаються: 1) розміри магнітопроводу; 2) основна крива намагнечування $B(H)$ матеріалу магнітопроводу; 3) величина магнітного потоку (чи магнітної індукції) в осерді магнітопроводу. Необхідно знайти значення магніторушійної сили (чи струму) $F = wi$.

Для **зворотної задачі** задаються: 1) розміри магнітопроводу; 2) матеріал магнітопроводу $B(H)$; 3) значення магніторушійної сили $F = wi$. Необхідно визначити величину магнітного потоку в осерді магнітопроводу.

Розв'язують пряму задачу в нерозгалуженому магнітному колі у такій послідовності: 1) проводимо середню магнітну лінію (рис. 3.20); 2) ділять магнітне коло на окремі ділянки з незмінними перерізами і визначають перерізи ділянок S_k і відповідні їм довжини l_k по середній магнітній лінії; 3) за необхідним значенням магнітного потоку Φ та відомими перерізами S_k окремих ділянок знаходять магнітну індукцію B_k кожної ділянки $B_k = \Phi/S_k$; 4) із основної кривої намагнечування $B(H)$ для кожної феромагнітної ділянки за значенням B_k визначають напруженість магнітного поля H_k . Напруженість поля в повітряному проміжку або в неферомагнітній ділянці дорівнює

$$H_0 = B_0 / \mu_0 = B_0 / (125 \cdot 10^{-8}) = 0,8 \cdot 10^6 B_0,$$

тут H_0 вимірюється в А/м, B -в Тл; 5) за другим законом Кірхгофа сума магнітних напруг на окремих ділянках дорівнює невідомій МРС, тобто: $H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0 + \dots + H_k l_k + \dots = Iw$. Визначивши $F = Iw$ і задавшись кількістю витків котушки, визначають в ній струм $I = F/w = (Iw)/w$.

Наведена послідовність розрахунку допускає, що магнітний потік на всіх ділянках магнітного кола однаковий. Насправді незначна частина магнітного потоку, який називають **потоком розсіювання**, замикається довкола котушки зі струмом, частково проходить через повітря і частково по тій частині магнітопроводу, яка безпосередньо прилягає до витків котушки.

Приклад 3.1. Розглянемо на прикладі розв'язання прямої задачі нерозгаданого магнітного кола (рис. 3.20). Розміри наведені на рисунку. Матеріал – сталь Е-330, шихтування листів магнітопроводу за напрямом прокатки ($\varphi = 0$). Визначити значення магніторушійної сили ($F = Iw$) для одержання в повітряному проміжку магнітної індукції $B = 0,5$ Тл.

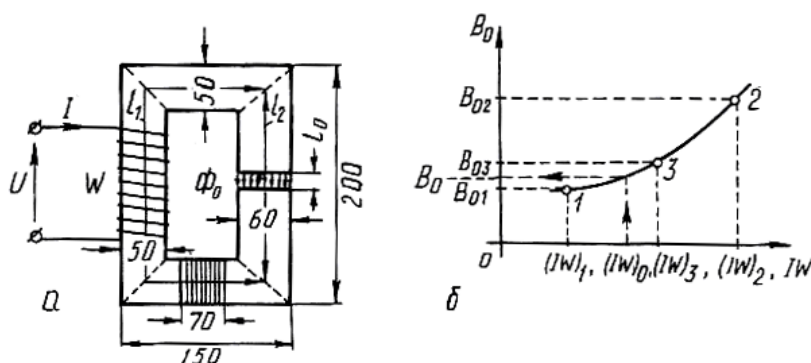


Рис. 3.20. До прикладу розрахунку прямої і зворотної задачі магнітного кола

1. Середні довжини окремих ділянок магнітопроводу з рівними перерізами визначаємо із рисунка: $l_1 = 190 \text{ мм}$, $l_2 = 145 \text{ мм}$, $l_0 = 5 \text{ мм}$.
2. Площі перерізу окремих ділянок: $S_1 = 3500 \text{ мм}^2 = 0,35 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$,
 $S_2 = S_0 = 4200 \text{ мм}^2 = 0,42 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$.
3. Значення магнітного потоку на всіх ділянках кола:
 $\Phi = B_0 S_0 = 0,5 \cdot 0,42 \cdot 10^{-2} = 0,21 \cdot 10^{-2} \text{ Вб}$.
4. Значення магнітної індукції на окремих ділянках:
 $B_1 = \Phi / S_1 = 0,21 \cdot 10^{-2} / (0,35 \cdot 10^{-2}) = 0,6 \text{ Тл}$
5. Знаходимо значення напруженостей магнітного поля, використовуючи залежність $B(H)$ для сталі Е-330 при $\varphi = 0^\circ$; $H_1 = 25 \text{ А/м}$; $H_2 = 20 \text{ А/м}$,
 $H_0 = B_0 / \mu_0 = 0,8 \cdot 10^6 \cdot 0,5 = 0,4 \cdot 10^6 \text{ А/м}$.
6. Значення магніторушійної сили:
 $F = Iw = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 25 \cdot 0,19 + 20 \cdot 0,145 + 0,4 \cdot 10^6 \cdot 0,005 = 4,8 + 2,9 + 800 = 807,7 \text{ А}$.
Якщо кількість витків, наприклад $w = 100$, то значення струму котушки буде
 $I = F / w = 807,7 / 100 \cong 8,08 \text{ А}$.

Розрахунок зворотної задачі. Розглянемо на прикладі нерозгалуженого магнітного кола, наприклад, для кола рис. 3.20,а. За заданою магніторушійною силою $F = (Iw)_0$ необхідно визначити магнітний потік (чи індукцію B_0 магнітопроводі (чи повітряному проміжку).

Для цього декілька разів (3-4 рази) розв'язують пряму задачу і будують залежність $\Phi_0 = f(Iw)$ чи $B_0 = f(Iw)$ (рис. 3.20,б), із якої знаходять шукану величину Φ_0 чи B_0 при відомих $(Iw)_0$

1. Задаються $B_0 = B_{01}$ розв'язуючи пряму задачу, знаходять $(Iw)_1$, що відповідає точці 1 на графіку.
2. Задаються $B_0 = B_{02}$ розв'язуючи пряму задачу, знаходять $(Iw)_2$, що відповідає точці 2 на графіку.
3. Задаються $B_0 = B_{03}$ розв'язуючи пряму задачу, знаходять $(Iw)_3$, що відповідає точці 3 на графіку.
4. Через точки 1-2-3 проводять криву залежності $\Phi(Iw)$ і за заданими $(Iw)_0$, знаходять величину B_0 чи Φ_0 .

3.5. Закон електромагнітної індукції. Правило Ленца

Явище електромагнітної індукції відкрите англійським фізиком М. Фарадеєм у

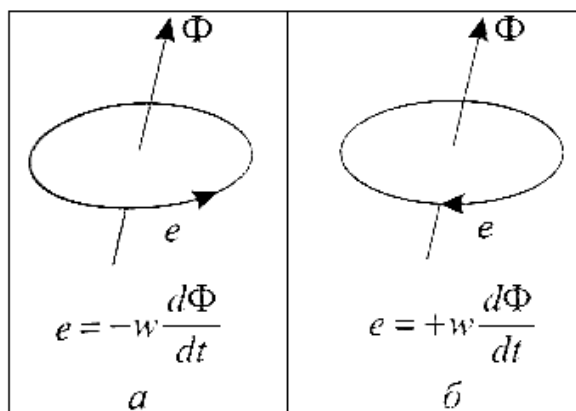


Рис. 3.21. Наведені в контурі ЕРС є змінним магнітним потоком Φ :
а — правогвинтове, б — лівогвинтове скерування Φ і ϵ

1831 р., який, виконавши багато дослідів (протягом 10 років), відкрив один з основних законів електротехніки, що сьогодні називають **законом електромагнітної індукції**. Математичне формулювання цього закону, утому вигляді, що сьогодні застосовується, подане Дж. Максвеллом. Суть його така: **якщо замкнутий контур пронизується змінним магнітним потоком, то в цьому контурі виникає (індукується) ЕРС, миттєве значення якої дорівнює кількості витків (w) контуру (котушки), помноженій на швидкість зміни потоку в часі $d\Phi/dt$** . Якщо напрям ЕРС і магнітного потоку скерувати за правилом правого гвинта

(рис. 3.21,а), то у формулі будемо мати знак "мінус", а при лівогвинтовому скеруванні (рис. 3.21,б) – знак "плюс". В електротехніці, як правило, застосовують правогвинтове скерування, тоді

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.23)$$

При лівогвинтовому скеруванні роблять застереження. Закон електромагнітної індукції, як буде видно при подальшому вивченні електротехніки, широко застосовується у всіх електричних машинах, трансформаторах, електричних апаратах, радіотехніці, телевізійній техніці тощо.

Розглянемо провідний контур (рис. 3.22), який пронизується стороннім змінним магнітним потоком $\Phi(t)$.

Тоді в контурі виникає ЕРС e , яка викличе струм i . Напрямок струму буде збігатися з напрямком ЕРС. Струм контуру буде створювати своє магнітне поле Φ_i . Це магнітне поле буде напрямлене завжди так, що буде діяти проти причини, що його викликала, тобто проти зміни стороннього магнітного поля $\Phi(t)$.

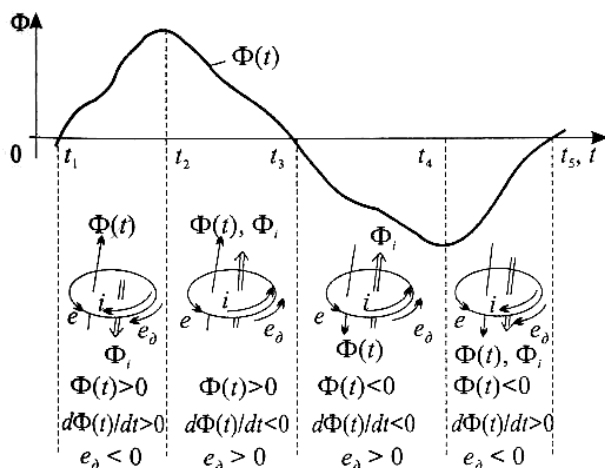


Рис. 3.22. До пояснення правила Ленца

Розглянемо це явище у проміжку часу t_1-t_2 . Сторонній магнітний потік додатний і збільшується: $\Phi(t) > 0$, $d\Phi/dt > 0$. Дійсний напрям ЕРС e_d і струму контуру i мають протилежний напрям до умовно-додатного напрямку e . Магнітний потік Φ_i напрямлений проти зростання стороннього потоку $\Phi(t)$, тобто буде його послаблювати.

У проміжку часу t_2-t_1 сторонній магнітний потік додатний, але зменшується: $\Phi(t) > 0$, $d\Phi/dt < 0$. Дійсний напрям ЕРС e_d й струму контуру i збігаються з умовно-додатним напрямком e , а потік Φ_i буде напрямлений у той самий бік, що і потік $\Phi(t)$, отже, буде його підсилювати, тобто діє проти зміни потоку $\Phi(t)$. Аналогічно можна простежити процеси в інші моменти часу.

Отже, ЕРС, яка виникає в замкненому контурі за рахунок зміни стороннього магнітного потоку $\Phi(t)$ викликає струм i , магнітний потік якого Φ_i спрямований так, що протидіє зміні потоку $\Phi(t)$. Це положення називають правилом Ленца. Або, іншими словами: **під час будь-якої спроби змінити магнітні потоки, які зчеплюються з провідними контурами, в контурах виникають струми, які намагаються перешкодити цій зміні.**

На основі закону електромагнітної індукції розглянемо приклади наведення в контурі (катушці) ЕРС.

На рис. 3.23 показаний контур, утворений провідником завдовжки l та двома провідниками, до яких приєднаний вольтметр. Цей контур рухається з швидкістю V перпендикулярно до магнітних силових ліній постійного магнітного поля індукцією B . Оскільки контур виходить з магнітного поля, то потік, який пронизує контур, зменшується, тобто є змінним, а отже, в контурі буде наводитись ЕРС. Знайдемо її значення й напрям.

За час Δt контур переміщується на відстань $a = V\Delta t$, перетинаючи площину провідником l : $\Delta S = al = lV\Delta t$. Потік контуру зменшиться на величину $\Delta\Phi = B \cdot \Delta S = BlV\Delta t$, а величина $\Delta\Phi/\Delta t$ чи $d\Phi/dt$ буде від'ємною. Кількість витків контуру $w=1$. Значення ЕРС, наведеної в контурі, є таким $e = -w d\Phi/dt = -w(-\Delta\Phi/\Delta t) = 1 \cdot BlV \cdot \Delta t / \Delta t = BlV$.

Або, в загальному випадку, коли провідник I (контур) рухається неперпендикулярно до силових ліній, ЕРС буде:

$$e = BlV \cdot \sin(\vec{B} \wedge \vec{V}) \quad (3.24)$$

На рис. 3.23 напрям ЕРС і магнітного потоку контуру скеровані за правилом правого гвинта. Звідси випливає, що напрям ЕРС, наведеної в провіднику l , визначається за **правилом правої руки**: праву руку помістимо в магнітне поле так, щоб силові лінії падали в долоню, великий палець за напрямом руху провідника, тоді випрямлені пальці покажуть напрям наведеної ЕРС. ЕРС в контурі буде теж наводитися при введенні контуру в магнітне поле. При цьому магнітний потік контуру буде зростати, а отже, $\Delta\Phi/dt > 0$. При русі контуру повністю в магнітному полі під постійним кутом до силових ліній магнітний потік контуру змінюватися не буде $\Delta\Phi = 0$ і ЕРС в контурі наводитись теж не буде (значення $\Delta\Phi/\Delta t \rightarrow d\Phi/dt = 0$).

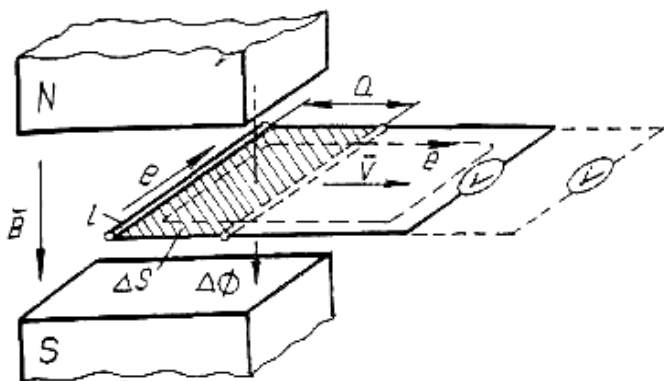


Рис. 3.23. Контур, утворений провідником l і вольтметром, рухається в постійному магнітному полі

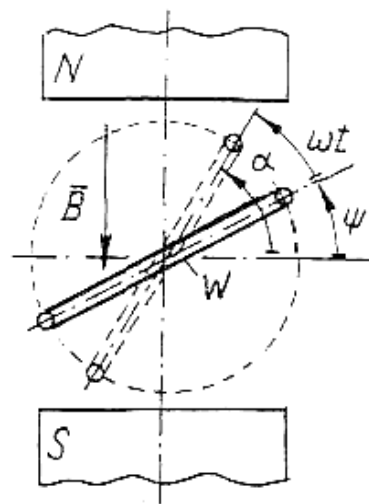


Рис. 3.24. Прямокутна рамка кількістю витків w обертається в постійному магнітному полі

Розглянемо другий приклад. Прямокутна рамка з кількістю витків w обертається з постійною кутовою швидкістю ω в постійному магнітному полі індукцією $\vec{B}$ (рис. 3.24). В початковий момент рамка була розташована під кутом ψ до осі абсцис. За час t рамка повернеться на кут ωt , а до осі абсцис на кут $\alpha = \omega t + \psi$. Отже, рамку буде пронизувати змінний магнітний потік, тому в рамці буде індукуватися ЕРС. Визначимо її величину.

Потік, який пронизує рамку:

$$\Phi = BS \cos \alpha = \Phi_m \cos \alpha = \Phi_m \cos(\omega t + \psi),$$

Де S – площа рамки, Φ_m – найбільше (амплітудне) значення магнітного потоку, що пронизує рамку.

ЕРС, наведена в рамці:

$$e = -w \frac{d}{dt} [\Phi_m \cos(\omega t + \psi)] = w\omega\Phi_m \sin(\omega t + \psi).$$

Величина $w\omega\Phi_m$ – це найбільше значення ЕРС:

$$E_m = w\omega\Phi_m. \quad (3.25)$$

Остаточно ЕРС, наведена в рамці, дорівнює:

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \quad (3.26)$$

Отже, ми одержали генератор синусоїдної ЕРС. Поділимо ліву і праву частини рівності (3.25) на $\sqrt{2}$:

$$E_m / \sqrt{2} = 2\pi f w \Phi_m / \sqrt{2}$$

одержимо:

$$E = 4,44 f w \Phi_m \quad (3.27)$$

тут $E = E_m \sqrt{2}$ – діюче значення ЕРС: $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ – кутова частота; T – період – час повного обертання рамки, $f = 1/T$ – частота – кількість періодів за 1с. Вираз (3.27) визначає діюче значення ЕРС, яка наводиться в котушці кількістю витків w , що пронизується синусоїдним магнітним потоком амплітудою Φ_m та змінюється з частотою f .

3.6. Котушка індуктивності. Потокозчеплення. ЕРС самоіндукції.

Енергія магнітного поля.

Замкнений контур (котушка) із струмом завжди створює магнітне поле. При постійній магнітній проникності середовища величина магнітного потоку поля пропорційна струму. Котушка описується параметром, який називається індуктивністю й позначається літерою L . Визначаючи індуктивність котушки, користуються поняттям потокозчеплення ψ . Під цим поняттям розуміють суму добутків магнітних потоків на витки, з якими вони зчеплюються:

$$\psi = \sum_{k=1}^n w_k \Phi_k \quad (3.28)$$

Так, для котушки, зображеної на рис. 3.25, потокозчеплення є:

$$\psi = w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2$$

Значення потокозчеплення пропорційне струму, що створює це магнітне поле. Коефіцієнт пропорційності – це індуктивність котушки:

$$\psi = Li \quad \text{чи} \quad L = \frac{\psi}{i} \quad (3.29)$$

Одиниця вимірювання індуктивності є 1 *генрі* – 1 Гн:

$$[L] = [\Phi / i] = 1 \text{В} \cdot \text{с} / (1\text{А}) = 1 \text{Ом} \cdot \text{с} = 1 \text{Гн}.$$

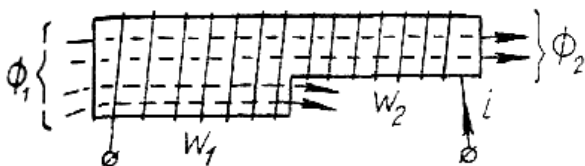


Рис. 3.25. До визначення потокозчеплення котушки

Оскільки 1 Гн – одиниця дуже велика, то часто застосовують часткові одиниці: *мілігенрі* ($1 \text{мГн} = 10^{-3} \text{Гн}$), *мікрогенрі* ($1 \text{мкГн} = 10^{-6} \text{Гн}$). Умовне позначення ідеальної індуктивності (без резистивного опору) показано на схемі рис. 3.26,б.

Визначимо індуктивність тороїдальної котушки, Магнітний потік в магнітопроводі тороїда за законом Ома для магнітного кола визначається

$$\Phi = F / R_M = wi / (l_{\text{сер}} / \mu S) = \mu S wi / l_{\text{сер}}$$

Тоді

$$L = \psi / i = w \Phi / i = \frac{\mu w^2 S}{l_{\text{сер}}} \quad (3.30)$$

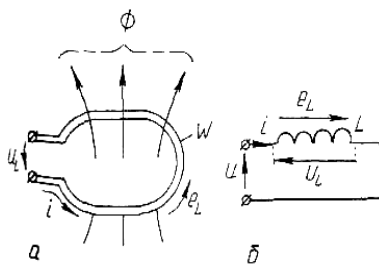


Рис. 3.26. До визначення ЕРС самоіндукції котушки (а) та її скерування на схемі (б)

де $l_{\text{сер}}$, S – середня довжина й площа поперечного перерізу тороїда.

Як видно, індуктивність котушки залежить від її геометричних даних, а також від магнітної проникності її магнітопроводу. Для повітряних котушок (без сталевго осердя) індуктивність котушки стала – не залежить від значення струму чи магнітного потоку (оскільки $\mu = \mu_0 = \text{const}$). Для котушок із сталевим осердям індуктивність котушки змінюється разом зі зміною μ осердя, μ сталевго осердя, як

було відзначено вище, змінюється при зміні значення. магнітної індукції осердя (чи значення прикладеної до котушки напруги).

При протіканні змінного струму в котушці (рис. 3.23,а) в ній виникає змінне магнітне поле. Це магнітне поле пронизує цю саму котушку й наводить в ній ЕРС, яку називають ЕРС **самоіндукції** – e_L . При правогвинтовому скеруванні струму й магнітного потоку, а також магнітного потоку й ЕРС, додатний напрям ЕРС самоіндукції буде такий самий, як струму в котушці. Значені ЕРС самоіндукції визначається як:

$$e_L = -\frac{d\psi_L}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L\frac{di}{dt}, \quad (3.31)$$

де допускається, що індуктивність L , не залежить від струму i , наприклад, для котушки без феромагнітного осердя або для котушки з магнітопроводом, магнітна проникність якого не залежить від струму.

Дійсний напрям ЕРС самоіндукції e_L згідно з (3.31) визначиться за правилом Ленца. При зростанні струму, тобто коли $di / dt > 0$, ЕРС самоіндукції e_L від'ємна й спрямована зустрічно відносно струму, і навпаки, при зменшенні струму, тобто коли, $di / dt < 0$, ЕРС самоіндукції додатна і напрямлена за напрямом струму. Отже, ЕРС самоіндукції намагається протидіяти зміні струму в колі (протидіє зміні режиму кола). Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру (рис. 3.26,а):

$$u_L + e_L = 0.$$

звідси напруга на котушці

$$u_L = -e_L, \text{ чи } \boxed{u_L = L\frac{di}{dt}}. \quad (3.32)$$

На рис. 3.26,б наведено позначення додатних напрямків струму, напруги u_L та ЕРС самоіндукції e_L котушки.

Енергія магнітного поля. Контур (або котушка) при увімкненні його до джерела постійного струму забирає в нього енергію, частина якої перетворюється в енергію магнітного поля. Якщо потім вимкнути контур (або котушку) від джерела або зменшити струм, то енергія магнітного поля повністю або частково перетвориться в електричну енергію. При змінному струмі відбувається неперервний процес перетворення електричної енергії, в енергію магнітного поля та зворотний процес – перетворення енергії магнітного поля в електричну. На використанні енергії магнітного поля оснований принцип роботи багатьох електротехнічних апаратів і устаткувань (електричних машин, трансформаторів тощо).

Розрахуємо енергію магнітного поля котушки. До електричного кола (рис. 3.27) прикладена напруга u . Запишемо другий закон Кірхгофа для контуру:

$$u_r + u_L = u. \quad (3.33)$$

Помножимо ліву і праву сторони рівності (3.33) на idt :

$$u_r idt + u_L idt = uidt. \quad (3.34)$$

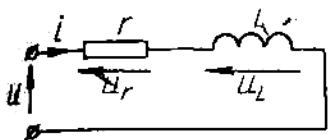


Рис. 3.27. До визначення енергії магнітного поля

Розглянемо окремо складові рівності (3.34). Величина $u_r idt = dW_r$ – енергія, яка виділяється в опорі r ; $uidt$ – енергія, яка підводиться до електричного кола з мережі; а отже, величина $u_L idt = dW_M$ – це енергія, запасена в магнітному полі котушки. При зміні струму в котушці від нуля до i_L величина записаної енергії магнітного поля котушки буде дорівнювати:

$$W_M = \int_0^{i_L} dW_L = \int_0^{i_L} u_L idt = \int_0^{i_L} L \frac{di_L}{dt} idt = \frac{Li_L^2}{2},$$

отже

$$\boxed{W_M = \frac{Li_L^2}{2} = \frac{\psi_L i_L}{2}}. \quad (3.35)$$

3.7. Індуктивно зв'язані котушки

Два контури або котушки є *індуктивно* або *магнітно зв'язаними*, якщо частина магнітного потоку, створеного струмом першого контуру, пронизує другий контур, а частина магнітного потоку, викликаного струмом другого контуру, пронизує перший контур.

При проходженні струму i_1 по першій котушці w_1 (рис. 3.28,а) виникає магнітний потік Φ_{11} який викликає ЕРС самоіндукції e_{11} в першій котушці. Частина цього потоку Φ_{12} пронизує другу котушку й наводить в ній ЕРС взаємоіндукції e_{21} , величина якої пропорційна до коефіцієнта взаємоіндукції M_{12} і швидкості зміни струму i_1 в часі. Коефіцієнт взаємної індукції M вимірюється в *генрі*.

При проходженні струму i_2 по другій котушці w_2 (рис. 3.28,б) процес і співвідношення величин будуть аналогічними. Отже:

$$\begin{aligned} e_{11} &= -w_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}; & e_{22} &= -w_2 \frac{d\Phi_{22}}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt}; \\ e_{12} &= -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}; & e_{21} &= -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}; \\ \psi_{21} &= M_{21} i_2; & \psi_{12} &= M_{12} i_1; \end{aligned} \quad (3.36)$$

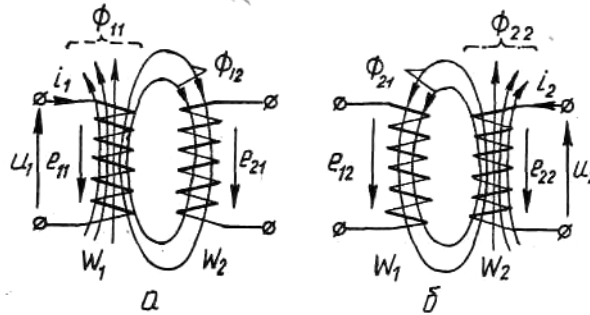


Рис. 3.28. Індуктивно зв'язані котушки: при проходженні струму i_1 по першій котушці в другій котушці наводиться ЕРС взаємоіндукції e_{21} (а) і навпаки, при струмі другої котушки i_2 в першій котушці виникає e_{12} (б)

При пропусканні струмів i_1 та i_2 по обох котушках (рис. 3.29,а) магнітні потоки й ЕРС самоіндукції та взаємоіндукції в котушках будуть алгебрично додаватись:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{21}; \\ \Phi_2 &= \Phi_{22} + \Phi_{12}; \\ e_1 &= e_{11} + e_{12} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt}; \\ e_2 &= e_{22} + e_{21} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

де Φ_1 , Φ_2 – сумарний магнітний потік, який зчіплюється відповідно з витками першої та другої котушки; e_1 , e_2 – сумарна ЕРС, наведена відповідно в першій і другій котушці.

Для двох нерухомих катушок в *лінійному* колі завжди справедлива рівність:

$$M_{12} = M_{21} = M, \quad (3.38)$$

тому необхідності в індексах немає.

Запишемо рівності для контурів за другим законом Кірхгофа (рис. 3.28,а);

$$u_1 = e_{11} + e_{12} = 0; \text{ звідси } u_1 = -e_{11} - e_{12};$$

$$u_2 = e_{22} + e_{21} = 0; \text{ звідси } u_2 = -e_{22} - e_{21};$$

і враховуючи (3.42), а також резистивні опори катушок r_1 і r_2 , одержимо значення напруг на катушках:

$$\begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \\ u_2 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

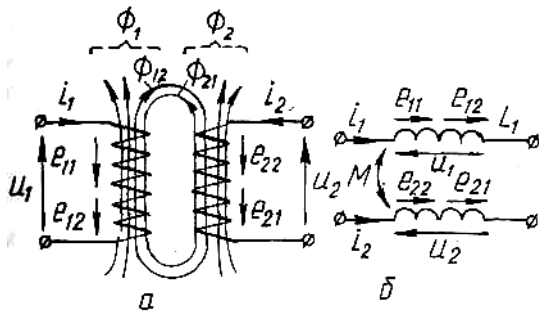


Рис. 3.29. Індуктивно зв'язані дві котушки (а) та їх позначення на схемі (б)

боки і віднімаються.

Для однозначності запису рівнянь (3.39) застосовують маркування однойменних клем котушок: позначення на схемах початків або кінців: зірочками, точками, трикутниками тощо. Якщо струми в котушках щодо своїх однойменних клем напрямлені в один бік, тоді їхні потоки додаються і котушки увімкнені узгоджено, якщо струми котушок напрямлені в різні боки – то їхні потоки віднімаються, а отже, котушки увімкнені зустрічно.

Для оцінки магнітного зв'язку між контурами (чи котушками) вживають коефіцієнт зв'язку k , який завжди менший від одиниці:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (3.40)$$

Тільки в ідеальному випадку, коли $\Phi_{12} = \Phi_{11}$ і $\Phi_{21} = \Phi_{22}$ (тоді можна було б нехтувати потоками розсіювання), $k = 1$.

Записуючи рівняння (3.39), треба врахувати те, що котушки можуть бути увімкнені узгоджено – тоді " M " необхідно брати зі знаком "плюс", а коли котушки будуть увімкнені зустрічно – тоді " M " треба брати зі знаком "мінус". При узгодженому увімкненні двох котушок (рис. 3.30,а) їхні магнітні потоки, спрямовані в один бік, – додаються, а при зустрічному увімкненні (рис. 3.30,б) потоки напрямлені в протилежні

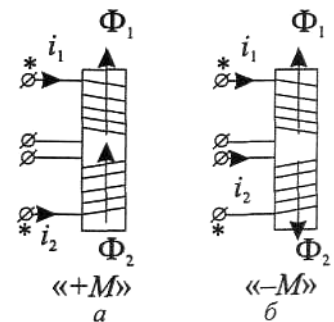


Рис. 3.30. Узгоджене (а) і зустрічне (б) увімкнення двох котушок

4. ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ЗМІННОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ

4.1. Генерування синусоїдної ЕРС. Миттєві, амплітудні, діючі та середні значення ЕРС, напруг та струмів

Електричні кола, в яких значення та спрямування ЕРС, напруг і струмів періодично змінюються в часі за синусоїдним законом, називають *колами синусоїдного струму, чи просто колами змінного струму*.

Електричні кола, в яких значення та спрямування ЕРС, напруг і струмів періодично змінюються в часі за законами, відмінними від синусоїд, називають *колами несинусоїдного струму*.

Генератори на електростанціях змінного струму побудовані так, що ЕРС, яка виникає в їх обвитках, змінюється за синусоїдним законом. Синусоїдна ЕРС в лінійних електричних колах, які мають резистивні опори, індуктивності та ємності, викликає струм, який теж змінюється за синусоїдним законом. ЕРС самоіндукції, які при цьому виникають, напруги на конденсаторах і резистивних опорах, як це видно із відповідних співвідношень: $e_L = -L di/dt$, $i_C = C du_C/dt$, $u_R = ri$, теж змінюються за законом синуса, оскільки похідна синусоїдної функції – теж синусоїдна функція. Будь-яка інша періодична функція має похідну, відмінну від вхідної.

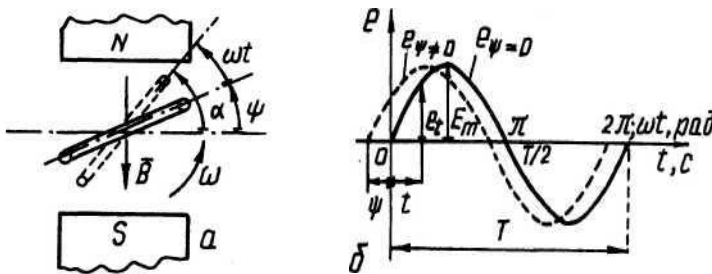


Рис. 4.1. Генерування синусоїдної ЕРС

повернеться на кут ωt , а до осі абсцис на кут $\alpha = \omega t + \psi$. Рамка пронизується змінним (синусоїдним) магнітним потоком:

$$\Phi = BS \cos \alpha = \Phi_m \cos(\omega t + \psi), \quad \Phi_m = BS,$$

тому в рамці індукується ЕРС (рис. 4.1,б):

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = -w \frac{d}{dt} [\Phi_m \cos(\omega t + \psi)] = \omega w \Phi_m \sin(\omega t + \psi).$$

Вираз перед синусом – це найбільше значення ЕРС, якщо $\alpha = 90^\circ$:

$$E_m = \omega w \Phi_m \quad (4.1)$$

Остаточно одержимо:

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi) \quad (4.2)$$

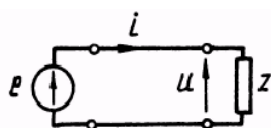


Рис. 4.2 Електричне коло з синусоїдною ЕРС

При увімкненні ЕРС (4.2) в електричне коло з лінійним опором Z (рис. 4.2) в колі буде протікати синусоїдний струм i напруга на опорі теж буде синусоїдною. Обидві величини i та u змінюватимуться з частотою зміни ЕРС. **Миттєві значення** їх, тобто їх значення в будь-який момент часу виражаються функціями:

$$\begin{aligned} e &= E_m \sin(\omega t + \psi_e) \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \end{aligned} \quad (4.3)$$

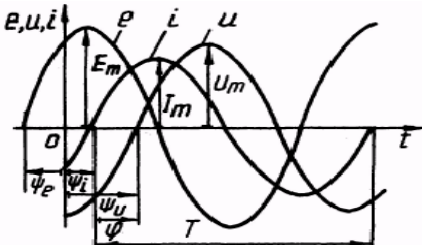


Рис. 4.2 Зміна e , u і i за синусоїдним законом в електричному колі (рис. 4.2)

Нарисуємо залежності цих величин від часу t (рис. 4.3). Такі криві називають **хвильовими** чи **часовими діаграмами** (залежностями).

Час, протягом якого відбувається один повний цикл періодичного процесу, називається **періодом** T , вимірюється в секундах (с), а кількість періодів за одну секунду називають **частотою** f :

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.4)$$

Одиниця вимірювання частоти – **герц**: $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1} = 1/\text{с}$. Величину

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (4.5)$$

називають **кутовою частотою**, яка вимірюється в рад/с або $1/\text{с} = \text{с}^{-1}$.

Величина $(\omega t + \psi)$ – це аргумент синуса або фаза синусоїдної величини, що визначає значення синусоїдної величини в даний момент часу t ; ψ – початкова фаза, визначає значення синусоїдної величини, якщо $t = 0$.

В електричних колах синусоїдного струму часто користуються поняттям кута зсуву фаз φ . Так, кут зсуву фаз між синусоїдами струму та напруги має напрям від струму до напруги і визначається як:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i \quad (4.6)$$

Найбільші значення синусоїдних величин (E_m, U_m, I_m) називають максимальними або амплітудними значеннями, відповідно.

Електрична енергія синусоїдного струму виробляється на електричних станціях синхронними генераторами частотою 50 Гц ($T = 0,02 \text{ с}$) в країнах Європи і 60 Гц – в США і Японії. Вибір частоти 50 Гц і 60 Гц зумовлений техніко-економічними причинами, наприклад, при менших частотах габарити електричних машин і трансформаторів зростають, помітне мигання освітлювальних приладів тощо. При більших частотах в електричних машинах і трансформаторах зростають втрати енергії, збільшується спад напруги в проводах ліній електропередачі внаслідок збільшення їхнього індуктивного опору тощо.

Доцільність застосування електричної енергії змінного струму замість постійного струму зумовлена багатьма техніко-економічними показниками. Наприклад, генератори електричної енергії змінного струму дешевші, їх можна виготовити на вищі напруги і потужності, ніж генератори постійного струму. Енергію змінного струму можна перетворювати за допомогою трансформаторів у енергію інших величин струму і напруги, що дуже важливо при пересиланні енергії на великі відстані.

Розрахунок електричних кіл змінного струму з використанням миттєвих значень ЕРС струму і напруги вимагає громіздкої обчислювальної роботи та великої витрати часу. Тому змінні величини (e, u, i) при розрахунках заміняють еквівалентними незмінними в часі величинами. Така заміна набагато спрощує розрахунок.

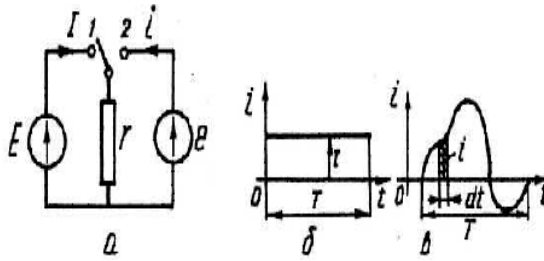


Рис. 4.4 До визначення діючого значення змінного струму

Еквівалентним або **діючим** (чи **ефективним**) значенням періодичного змінного струму називають такий незмінний в часі струм, який виділяє в опорі r за період T ту саму кількість енергії, що й змінний струм.

Визначимо в опорі r (рис. 4.4,а) енергію, виділену за період T струмом, незмінним в часі (I) при ввімкненні вимикача в положення 1, відтак змінним струмом (i) – при ввімкненні вимикача в положення 2:

$$W_{\sim} = rI^2T \quad W_{\sim} = \int_0^T dW = \int_0^T ri^2 dt.$$

Прирівнюючи праві частини обидвох виразів, одержимо діюче значення періодично змінного струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (4.6)$$

Діюче значення синусоїдного струму визначиться так:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\psi_i)] / 2 dt} = I_m / \sqrt{2} = 0.707 I_m.$$

Отже, діючі значення синусоїдних величин струму, напруги й ЕРС дорівнюють:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0.707 E_m. \quad (4.7)$$

Діючому значенню струму пропорційний момент електричних двигунів змінного струму. Коли говорять про напругу чи струм в колах змінного струму, то мають на увазі їх діючі значення. Шкали вимірювальних приладів змінного струму, як правило, проградуєвані в діючих значеннях струму й напруги. Наприклад, якщо амперметр в колі синусоїдного струму показує 10 А, то це означає, що амплітуда струму $I_m = \sqrt{2} \cdot 10 = 14.1$ А, а його миттєве значення $i = 14.1 \sin(\omega t + \psi_i)$ А. Аналогічно, якщо напруга в

мережі 220 В, то це означає, що її амплітуда $U_m = \sqrt{2} \cdot 220 = 312$ В, а миттєве значення $u = 312 \sin(\omega t + \psi_u)$ В.

Середні значення синусоїдних величин за період дорівнюють нулеві:

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = 0.$$

Тому користуються їх середніми значеннями за півперіоду (рис. 4.5):

$$I_{\text{сеп}} = \frac{1}{2T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m \cong 0.637 I_m,$$

аналогічно

$$E_{\text{сеп}} = \frac{2}{\pi} E_m; U_{\text{сеп}} = \frac{2}{\pi} U_m; I_{\text{сеп}} = \frac{2}{\pi} I_m = 0.637 I_m \quad (4.8)$$

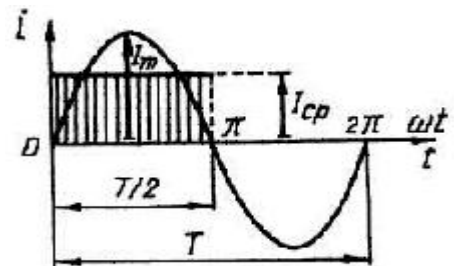


Рис. 4.5 До визначення середнього значення синусоїдної величини

4.2. Векторне відображення синусоїдних величин. Векторні

діаграми

Розраховуючи електричні кола змінного струму, доводиться додавати синусоїдні величини ЕРС або струмів чи напруг однакової частоти, різних амплітуд і початкових фаз. Розв'язування цієї задачі спрощується, якщо синусоїдні функції відобразити векторами, які обертаються з постійною кутовою швидкістю со проти годинникової стрілки.

Нехай маємо, наприклад, якусь синусоїдну величину $\alpha = A_m \sin(\omega t + \psi_\alpha)$. В координатних осях X-0-Y під кутом ψ_α до осі абсцис відкладемо в масштабі довжину вектора A_m і будемо його обертати проти годинникової стрілки з постійною кутовою швидкістю ω (рис. 4.6). За час t вектор $\overline{OM}$ повернеться на кут ωt і займе положення $\overline{OM'}$. Визначимо проекцію цього вектора на вертикальну вісь: $\overline{OK} = \overline{OM'}(\sin \omega t + \psi_\alpha) = A_m \sin(\omega t + \psi_\alpha)$. Як видно, ця проекція – це є миттєве значення синусоїдної величини: $\alpha = A_m \sin(\omega t + \psi_\alpha)$. Повний цикл зміни α ми одержимо за один повний оберт вектора $\overline{OM}$. Отже, синусоїдну величину можна відобразити вектором, який обертається з кутовою швидкістю, що дорівнює кутовій частоті ω відображальної функції, причому довжина вектора визначається амплітудою даної функції, а початкове положення в момент $t = 0$ – її початковою фазою ψ_α . В загальному випадку це можна записати так:

$$\alpha = A_m \sin(\omega t + \psi_\alpha) \Rightarrow \overline{A} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \angle \psi_\alpha. \quad (4.9)$$

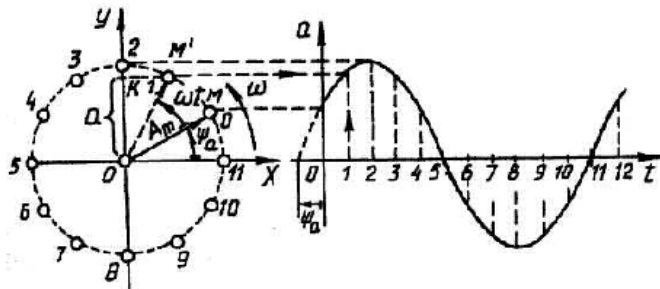


Рис. 4.6 Векторне відображення синусоїдної величини

Як правило, довжину вектора $\overline{OM}$ відкладають в масштабі такою, що дорівнює діючому значенню синусоїдної величини: $\overline{OM} = A = A_m / \sqrt{2}$.

Приклад 4.1.

Для ілюстрації використання векторного відображення синусоїдних величин розглянемо вузол (рис. 4.7,а), до якого підходять три струми i_1 , i_2 , i_3 .

Якщо відомі синусоїдні значення i_1 та i_2 , визначимо i_3 .

Результівний струм i_3 теж буде змінюватись за синусоїдним законом з цією самою частотою ω , але буде мати свою амплітуду $I_{m3} = \sqrt{2}I_3$ і початкову фазу ψ_3 :

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_1) + I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_2) = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_3).$$

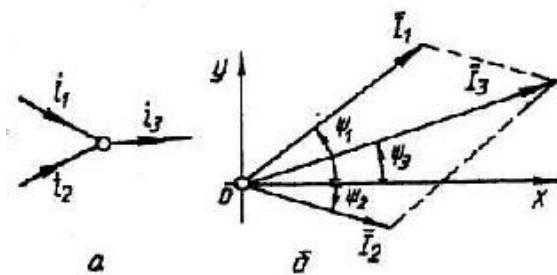


Рис. 4.7 Векторна діаграма струмів i_1 , i_2 , i_3

Значення величин I_3 і ψ_3 можна одержати з векторної діаграми після складання векторів $\bar{I}_1$ та $\bar{I}_2$ (рис. 4.7,б).

Отже, за допомогою зображених векторів та дій над ними можна розрахувати електромагнітний процес, який відбувається в електричному колі. Взаємне розташування векторів від часу не залежить, тому що всі вони обертаються з однаковою кутовою частотою ω . Найчастіше вони розглядаються безвідносно щодо їх обертання, як правило, якщо $t = 0$. Сукупність векторів (обертових чи

нерухомих), які характеризують усталений режим кола синусоїдного струму, називаються **векторною діаграмою**. Найчастіше векторні діаграми будують для діючих значень ЕРС, напруги й струму.

4.3. Резистивний, індуктивний та ємнісний опори в колі синусоїдного струму

У загальному випадку електричне коло змінного струму може мати резистивні (r), індуктивні (L) та ємнісні (C) елементи. У колах постійного струму індуктивний і ємнісний елементи проявляють себе в моменти увімкнення чи вимкнення кола та під час зміни параметрів схеми, коли змінюється струм і проявляється ЕРС самоіндукції $e_L = -L di_L / dt$ та ЕРС ємності $e_C = -1/C \int idt$; напруга на котушці $u_L = L di_L / dt$ та струм і напруга на конденсаторі $i_C = C du_C / dt$, $u_C = 1/C \int idt$.

В усталених режимах кіл постійного струму струм не змінюється і тому напруга на котушці u_L і струм в конденсаторі i_C не виникають, а напруга на конденсаторі u_C буде, відповідно до схеми, сталою величиною.

У колах змінного струму безперервно змінюється струм, в результаті чого виникає напруга на котушці та струм в конденсаторі, які змінюються в часі. Розглянемо окремо ці елементи (опори) в колі змінного струму.

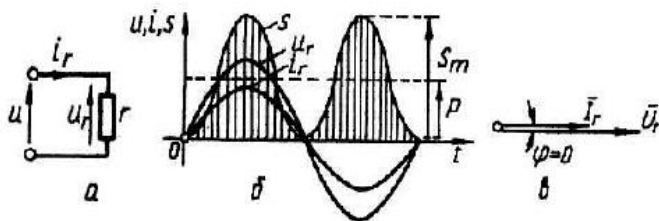


Рис. 4.8 Резистивний опір в колі синусоїдного струму (а), часові залежності i_r , u_r , s (б) та векторна діаграма I_r , U_r (в)

Резистивний опір r . Елемент r , в якому відбувається перетворення електромагнітної енергії в інші види енергії (теплову, променеву, механічну тощо) як необоротний процес, називають активним (резистивним) опором. До кола (рис. 4.8,а) прикладена синусоїдна напруга (для простоти викладення приймемо її початкову фазу ψ_U , такою, що дорівнює нулеві):

$$u = U_m \sin \omega t = U\sqrt{2} \sin \omega t. \quad (4.10)$$

Миттєве значення струму в колі згідно з законом Ома буде:

$$i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t = I_m \sin \omega t = I\sqrt{2} \sin \omega t, \text{ де } I_m = U_m / r. \quad (4.11)$$

Розділивши ліву і праву сторони останньої рівності на $\sqrt{2}$, одержимо закон Ома для кола з резистивним опором для діючих значень напруги і струму:

$$I = \frac{U}{r}. \quad (4.12)$$

Із виразів (4.10) та (4.11) випливає, що струм і напруга на резистивному опорі збігаються за фазою; кут зсуву фаз між струмом та напругою $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 0 = 0$, а коефіцієнт потужності $\cos \varphi = \cos 0^\circ = 1$.

На рис. 4.8,б зображені часові залежності напруги, струму та миттєвої потужності $s(t)$, а на рис. 4.8,в наведена векторна діаграма напруги та струму в резистивному опорі.

Миттєве значення потужності визначається добутком миттєвого значення напруги на миттєве значення струму:

$$s(t) = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = 2UI \cdot \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = UI(1 - \cos 2\omega t). \quad (4.13)$$

Як видно із (4.13) та з часової діаграми (рис. 4.8,б), потужність $s(t)$ в резистивному опорі змінюється від нуля до S_m і залишається завжди додатною. Це означає, що в колі з

резистивним опором потужність (енергія) увесь час надходить із мережі до споживача r і незворотно перетворюється в інші види (енергії). Визначимо середнє значення потужності за період $s(t)_{\text{сеп}}$. Цю потужність називають **активною потужністю** P .

$$P = s(t)_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T [UI(1 - \cos 2\omega t)] dt = UI;$$

підставивши $U = rI$, одержимо:

$$P = UI = rI^2. \quad (4.14)$$

Отже, активна потужність у резистивному опорі r перетворюється в тепло.

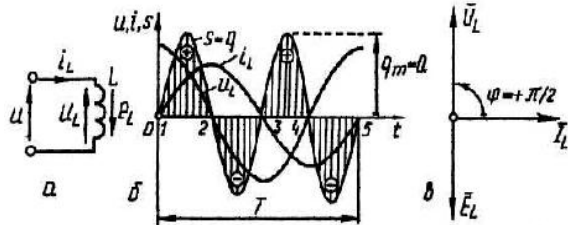


Рис. 4.9 Ідеальна котушка в колі синусоїдного струму (а), часові залежності i_L , u_L , s_L та векторна діаграма I_L , U_L , E_L (б)

Котушка індуктивності L . Індуктивний опір X_L Обвитки (котушки) електричних машин, трансформаторів, котушки різних електричних пристроїв тощо мають велику індуктивність. Параметрами котушок є резистивний опір r та індуктивність L . Розглянемо спочатку котушку, резистивний опір якої дуже малий і ним можна знехтувати – **ідеальну котушку** (рис. 4.9,а).

Під дією синусоїдної напруги струм у

котушці теж буде синусоїдним:

$$I_L = I_m \sin \omega t = I\sqrt{2} \sin \omega t. \quad (4.15)$$

Напруга на котушці є такою:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \omega L I_m \sin(\omega t + \pi/2) = U_m \sin(\omega t + \pi/2), \quad (4.16)$$

де $U_m = \sqrt{2}U = \omega L I_m = \omega L I\sqrt{2}$.

Розділивши ліву і праву частини останнього виразу на $\sqrt{2}$, одержимо закон Ома для кола змінного струму з індуктивністю:

$$I = \frac{U}{\omega L} = \frac{U}{x_L}, \quad \boxed{x_L = \omega L = 2\pi fL}, \quad (4.17)$$

де x_L – індуктивний опір котушки, $[x_L] = 1$ Ом.

Із виразів (4.15) і (4.16) випливає, що **напруга на котушці випереджує за фазою струм на 90°** або струм відстає від напруги на 90° . Кут зсуву фаз між струмом і напругою котушки є $\varphi = \psi_U - \psi_i = \pi/2 - 0 = +\pi/2$;

а $\cos \varphi = \cos(\pi/2) = 0$.

На рис. 4.9,б зображено часові залежності напруги, струму та миттєвої потужності $s(t)$, а на рис. 4.9,в наведена векторна діаграма напруги, струму та ЕРС самоіндукції E_L котушки індуктивності.

Миттєве значення потужності $s(i)$ в колі з індуктивністю є:

$$s(t) = ui = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_m \sin \omega t = 2UI \cdot \frac{\sin 2\omega t}{2} = UI \sin 2\omega t. \quad (4.18)$$

а середнє значення цієї потужності за період (активна потужність) дорівнює нулеві:

$$P = s(t)_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0.$$

Для з'ясування енергетичних процесів у колі з індуктивністю використаємо часові залежності миттєвих значень u , i , $s(t)$ (рис. 4.9,б). В інтервалі часу від $t = 0$ (точка 1) до $t = 1/4 T$ (точка 2), коли струм в колі зростає від 0 до I_m електрична енергія з мережі надходить в індуктивність ($s(t) > 0$) і нагромаджується в ній у вигляді енергії магнітного поля. Найбільше значення цієї енергії є при максимальному струмі (3.37): $W_m = LI_m^2 / 2$. В

інтервалі часу між точками 2 і 3 струм у колі зменшується і енергія магнітного поля котушки повертається в мережу ($s(t) < 0$). В момент часу, що відповідає точці 3, струм і енергія магнітного поля дорівнюють нулеві.

Отже, в колі з індуктивністю наявний неперервний періодичний процес обміну енергією між електричною мережею (джерелом електроенергії) і магнітним полем індуктивності. Цю енергію називають **реактивною енергією** і, відповідно, потужність – **реактивною потужністю**. Отже, миттєве значення; потужності $s(t)$, що підходить до ідеальної котушки ($r_k = 0$), – це миттєве значення реактивної потужності $q(t)$, а максимальне її значення (q_m) називають **реактивною потужністю** Q .

Як правило, реальна котушка, крім індуктивності L , має ще резистивний опір r_k . Цей опір зумовлений присутністю самого опору провідника котушки; ($r_{np} = \rho l / S$) та опору, що імітує втрати електричної енергії в сталі (ΔP_{cm}) магнітопроводу котушки ($r_{cm} = E^2 / \Delta P_{cm}$, де E – ЕРС самоіндукції котушки). Повний резистивний опір котушки $r_k = r_{np} + r_{cm} = P_k / I_k^2$, де P_k – активна потужність, що йде на втрати в котушці, I_k – струм котушки. В цьому випадку кут зсуву фаз $\varphi_k < 90^\circ$; схема і векторна діаграма мають вигляд, показаний на рис. 4.10.

Конденсатор С. Ємнісний опір X_C . У будь-якій електричній установці ємності утворюються між проводами і землею (в лініях електропередавання) та іншими елементами струмоведучих конструкцій. В силових установках конденсатори використовують для підвищення коефіцієнта потужності; в радіотехніці конденсатори застосовують в коливних контурах, фільтрах тощо.

Нехай до ідеального (без втрат) конденсатора (рис. 4.11,а) прикладена синусоїдна напруга:

$$u = u_C = U_m \sin \omega t. \quad (4.19)$$

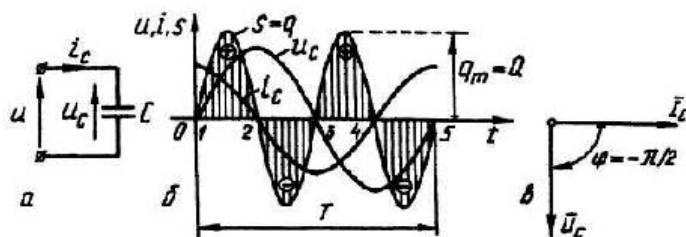


Рис. 4.11 Ідеальний конденсатор в колі синусоїдного струму (а), часові залежності i_C , u_C , s (б) та векторна діаграма $\vec{I}_C$, $\vec{U}_C$ (в)

Тоді струм в конденсаторі знайдемо із співвідношення

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_m \sin \omega t) = \omega C U_m \cos \omega t, \quad (4.20)$$

чи

$$i_C = I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.21)$$

де

$$I_m = \omega C U_m = U_m / (1/(\omega C)).$$

Поділимо ліву і праву сторону останнього виразу на $\sqrt{2}$. Одержимо закон Ома для кола з конденсатором:

$$I = U / (1/(\omega C)) = \frac{U}{x_C}, \quad \boxed{x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}},$$

де x_C – ємнісний опір; $[x_C] = 1 \text{ Ом}$.

Із виразів (4.19) і (4.21) видно, що **струм конденсатора випереджує за фазою напругу на 90°** або напруга відстає від струму на 90° . Кут зсуву фаз між напругою і струмом в конденсаторі: $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - \pi/2 = -\pi/2$, а $\varphi = \cos(-\pi/2) = 0$.

На рис. 4.11,б зображені часові залежності напруги, струму та миттєвої потужності, а на рис. 4.11,в наведена векторна діаграма напруги й струму ідеального конденсатора.

Миттєве значення потужності $s(t)$ в колі з конденсатором :

$$s(t) = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + \pi/2) = 2UI \sin 2\omega t / 2 = UI \sin 2\omega t,$$

а її середнє значення за період (активна потужність) дорівнює нулеві:

$$P = s(t)_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0.$$

Для з'ясування енергетичних процесів у колі з конденсатором використаємо часові залежності миттєвих значень (рис. 4.11,б). У першу чверть періоду між точками 1 і 2 напруга на конденсаторі зростає, конденсатор заряджається, електрична енергія з мережі надходить в конденсатор ($s(t) > 0$) і нагромаджується у формі енергії електричного поля (2.14): $W_E = Cu_C^2 / 2$. В наступну чверть періоду між точками 2 і 3 напруга на конденсаторі зменшується і струм змінює напрям; – проходить розряд конденсатора, енергія електричного поля повертається в мережу ($s(t) < 0$).

Отже, у колі з конденсатором, так само, як і в колі з індуктивністю, відбувається неперервний періодичний обмін енергії між мережею та конденсатором. Потужність, що характеризує швидкість зміни цієї енергії, теж називається реактивною потужністю. **Отже, реактивна енергія (потужність) коливається між джерелом електричної енергії і споживачем (не виходить з електричної мережі) і йде на утворення магнетних полів у котушках і електричних полів у конденсаторах.**

На рис. 4.11,в зображена векторна діаграма напруги й струму ідеального конденсатора.

Параметри недосконалого конденсатора. При змінній напрузі в конденсаторах з твердими або рідкими діелектриками, на відміну від повітряних конденсаторів, частина підведеної до них енергії тратиться на поляризацію діелектрика за рахунок струму зміщення i_D й на втрати, визвані струмом провідності i_γ в опорі R недосконалого діелектрика. Всі ці втрати виділяються у вигляді тепла. Такого роду конденсатори, які характеризуються втратами, прийнято називати **недосконалими конденсаторами**. У таких конденсаторах кут зсуву фаз φ між напругою та струмом за абсолютним значенням менший за $\pi/2$ на кут δ , і цей кут називають кутом втрат, який дорівнює:

$$\delta = \pi/2 - |\varphi|.$$

Недосконалий конденсатор можна замінити еквівалентною послідовною чи паралельною схемами з відповідними величинами C_1 , r_1 і C_2 , r_2 . На рис. 4.12 наведені ці схеми й відповідні їм векторні діаграми. Значення параметрів цих схем розраховують на основі дослідних даних U , I , та P , знятих для даного конденсатора. Конденсатори в заступних схемах C_1 і C_2 виступають вже без втрат як ідеальні.

Параметри (r_1 , C_1) послідовної, схеми визначаються такими співвідношеннями:

$$z = \frac{U}{I}; \quad r_1 = \frac{P}{I^2}; \quad x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = \sqrt{z^2 - r_1^2}; \quad C_1 = \frac{1}{\omega x_{C1}}, \quad (4.23)$$

а параметри (r_2 , C_2) паралельної схеми визначаються так:

$$P = \frac{U^2}{r^2}; \quad r_2 = \frac{1}{g_2} = \frac{U^2}{P}; \quad y = \frac{1}{U}; \quad b_{C2} = \omega C_2 = \sqrt{y^2 - g_2^2}; \quad C_2 = \frac{b_{C2}}{\omega}. \quad (4.24)$$

Необхідно зауважити, що $r_1 \neq r_2$, $C_1 \neq C_2$, але $r_1 \ll r_2$, а $C_1 \cong C_2$, а співвідношення між ними такі:

$$r_2 = r_1 \left[1 + \frac{1}{(\omega C_1 r_1)^2} \right]; \quad C_2 = C_1 \frac{1}{1 + (\omega C_1 r_1)^2};$$

Відміна між значеннями тим більша, чим більший, тангенс кута втрат $tg\delta$. В області високих частот $(\omega C_2 r_2)^2 \gg 1$ і тоді

$$r_1 = \frac{1}{r_2 (\omega C_2)^2}; \quad C_1 \cong C_2.$$

Тангенс кута втрат не залежить від схеми за якою проводилось вимірювання і розрахунок:

$$tg\delta = \omega C_1 r_1 = 1/(\omega C_2 r_2).$$

Значення $tg\delta$ залежать від типу діелектрика й можуть змінюватись з частотою, з плином часу, також залежать від температури та напруженості електричного поля.

На практиці основними параметрами конденсатора є його ємність, напруга й кут втрат (C, U, δ).

4.4. Послідовне з'єднання резистивного, індуктивного та ємнісного опорів у колі синусоїдного струму. Закон Ома в класичній формі. Трикутник опорів. Коефіцієнт потужності $\cos \varphi$

До кола (рис. 4.13, а) прикладена синусоїдна напруга:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Струм у колі теж буде синусоїдним $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$.

Для спрощення викладення підберемо таку початкову фазу напруги (ψ_u), Щоб початкова фаза струму дорівнювала нулеві: $\psi_i = 0$; початкова фаза напруги тоді буде $\psi_u = \varphi$, ($\varphi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - 0 = \psi_u$). Тоді буде мати:

$$i = I_m \sin \omega t, \text{ а } u = U_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.25)$$

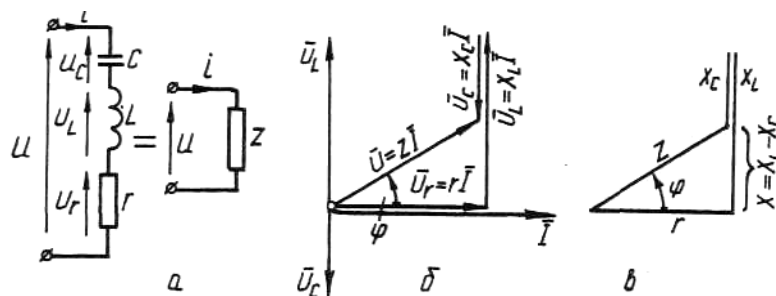


Рис. 4.13. Послідовне з'єднання r, L, C (а), векторна діаграма (б) та трикутник опорів (в)

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для миттєвих значень (рис. 4.13,а):

$$u = u_r + u_L + u_C$$

Виразивши напруги через струм і опори ділянок кола, одержимо:

$$u = r I_m \sin \omega t + x_L I_m \sin(\omega t + \pi/2) + x_C I_m \sin(\omega t - \pi/2),$$

або

$$u = U_{mr} \sin \omega t + U_{mL} \sin(\omega t + \pi/2) + U_{mC} \sin(\omega t - \pi/2) \quad (4.26)$$

На основі рівняння (4.26) побудуємо векторну діаграму для діючих значень напруг (рис. 4.13,б). Вектор напруги $\bar{U}_r = r \bar{I}$ на резистивному опорі збігається за напрямом із вектором струму, вектор $\bar{U}_L = x_L \bar{I}$ на індуктивності випереджує вектор струму на 90° , вектор напруги на ємності відстає від вектора струму на 90° . Отже, між векторами напруги на індуктивності та ємності утворюється кут, що дорівнює 180° . Вектор напруги, прикладеної до кола, дорівнює геометричній сумі векторів напруг на окремих її ділянках:

$$\bar{U} = \bar{U}_r + \bar{U}_L + \bar{U}_C,$$

а його величина

$$U = \sqrt{U_r^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (4.27)$$

Виразивши в (4.27) напруги через струм і опори, одержимо:

$$U = \sqrt{(rI)^2 + (x_L I - x_C I)^2} = I \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = zI.$$

Звідси

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}}, \quad (4.28)$$

де

$$z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{r^2 + x^2}; \quad (4.29)$$

$$x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \quad (4.30)$$

Співвідношення (4.28) – це **закон Ома**, записаний в класичній формі: тут U та I – діючі значення напруги та струму; z – повний опір кола, Ом; x – реактивний опір кола, Ом.

Поділивши сторони трикутника напруг (рис. 4.13,б) на діюче значення струму I , одержимо трикутник опорів (рис. 4.13,в). Із трикутника опорів визначимо коефіцієнт потужності схеми $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}}. \quad (4.31)$$

Детальніше про цю величину мова піде нижче.

4.5. Потужність в колі послідовного з'єднання резистивного r і реактивного x опорів

До схеми (рис. 4.14,а) прикладемо синусоїдну напругу $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ і в колі матимемо струм $i = I_m \sin \omega t$.

Напруга зсунута відносно струму на кут φ , який визначається із трикутника опорів (рис. 4.13,в):

$$\varphi = \arctg(x / r) = \arctg((x_L - x_C) / r).$$

Якщо $x_L > x_C$, тоді $\varphi > 0$ і напруга випереджує струм за фазою; якщо $x_L < x_C$ тоді $\varphi < 0$ і напруга відстає від струму. Якщо $x_L = x_C$, $\varphi = 0$, напруга збігається за фазою зі струмом. На рис. 4.14,б наведені часові залежності $u(t)$ та $i(t)$ для $\varphi > 0$.

Миттєве значення потужності:

$$\begin{aligned} s(t) &= u i = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin \omega t = 2UI \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = \\ &= 2UI \cos \varphi \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} + 2UI \sin \varphi \frac{\sin 2\omega t}{2}; \end{aligned}$$

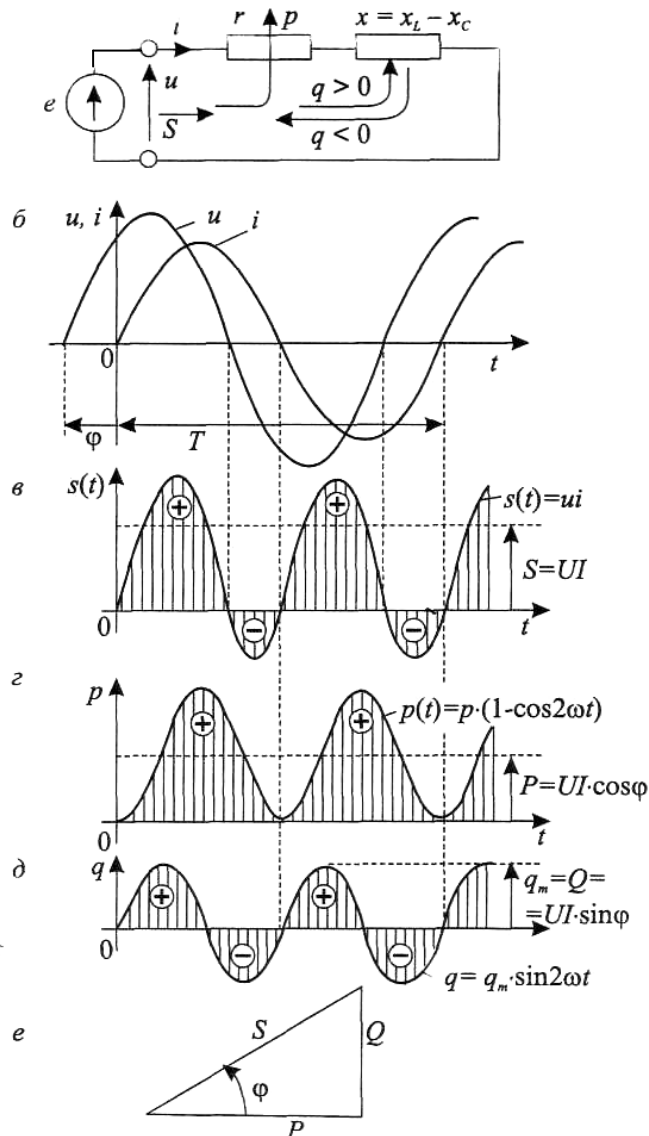


Рис. 4.14. Потужності $p(t)$, $q(t)$, $s(t)$ в колі з опором r - x

чи

$$s(t) = UI \cos \varphi \cdot (1 - \cos 2\omega t) + UI \sin \varphi \cdot (\sin 2\omega t) = p(t) + q(t). \quad (4.32)$$

Перша складова виразу (4.32) – це миттєве значення активної потужності $p(t)$, а друга складова – реактивної $q(t)$:

$$p(t) = UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t); q(t) = UI \sin \varphi (\sin 2\omega t).$$

На рис. 4.14, в, г, д показані часові залежності миттєвих величин потужностей, відповідно, повної $s(t)$, активної $p(t)$ та реактивної $q(t)$.

Амплітуда реактивної потужності є величиною, яку в колах синусоїдного струму називають реактивною потужністю, отже:

$$q_m = Q = UI \sin \varphi. \quad (4.33)$$

Визначимо середнє значення потужності за період – активну потужність:

$$\begin{aligned} P = s(t)_{\text{сеп}} &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos \varphi (1 - \cos 2\omega t) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin \varphi \sin 2\omega t dt = UI \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.34)$$

Інтеграл другої складової виразу (4.34) дорівнює нулеві.

Піднесемо до квадрата вирази (4.33) та (4.34) і додамо:

$$P^2 = (UI)^2 \cos^2 \varphi; Q^2 = (UI)^2 \sin^2 \varphi,$$

звідки

$$P^2 + Q^2 = (UI)^2 = S^2.$$

Величину добутку $U \cdot I$ називають *повною або позірною потужністю* S , а трикутник (рис. 4.14,е) – *трикутником потужностей*. Отже, формули для визначення активної, реактивної та повної потужностей є такими:

$$P = UI \cos \varphi, \quad Q = UI \sin \varphi, \quad S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (4.35)$$

Наведені потужності можуть бути теж розраховані за діючим значенням струму й відповідного опору за такими формулами:

$$P = rI^2; \quad Q = xI^2; \quad S = zI^2 \quad (4.36)$$

Одиниці вимірювання: $[S] = 1 \text{ ВА}, 1 \text{ кВА}$; $[P] = 1 \text{ Вт}, 1 \text{ кВт}$; $[Q] = 1 \text{ ВАр}, 1 \text{ кВАр}$.

Повна (позірна) S і активна P потужності завжди додатні. Якщо $\varphi > 0$ (резистивно індуктивні кола) – реактивна потужність Q додатна, а якщо $\varphi < 0$ (резистивно ємнісні кола) Q – від’ємна.

Повна потужність S характеризує найбільше значення середньої потужності (активної), яку можна одержати в колі за заданих діючих значень напруги та струму (тобто якщо $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$).

Із трикутника потужностей коефіцієнт потужності може бути визначений як:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (4.36)$$

Приклад 4.2. Електричне коло послідовно сполучених резистивного опору $r = 10$ Ом, індуктивності $L = 50$ мГн і ємності $C = 1000$ мкФ, приєднане до електричної мережі синусоїдної напруги з діючим значенням 220 В і частотою 50 Гц (рис. 4.13,а). Визначити повний опір кола z , $\cos \varphi$, діюче значення струму, напруги на елементах кола, потужності активну, реактивну й позірну та побудувати векторну діаграму.

Розв’язання.

Резистивний опір схеми $r = 10$ Ом.

Індуктивний опір $x_L = \omega L = 2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 15.7$ Ом.

Ємнісний опір $x_C = 1/(\omega C) = 1/(314 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}) = 3.18$ Ом

Повний опір схеми $z = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{10^2 + (15.7 - 3.18)^2} = 16$ Ом.

Коефіцієнт потужності: $\cos \varphi = r/z = 10/16 = 0.625$, $\varphi = 51^\circ 20'$,

$$\sin \varphi = x/z = (15.7 - 3.18)/16 = 0.81.$$

Діюче значення струму $I = U/z = 220/16 = 13.8$ А

Діючі значення напруг:

на резистивному опорі $U_r = rI = 13.8 \cdot 10 = 138$ В,

на котушці $U_L = x_L I = 13.8 \cdot 15.7 = 216$ В

на ємності $U_C = x_C I = 13.8 \cdot 3.18 = 44$ В.

Повне діюче значення напруги

$$U = \sqrt{U_r^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{138^2 + (216 - 44)^2} = 220 \text{ В.}$$

Потужності:

активна $P = UI \cos \varphi = 220 \cdot 13.8 \cdot 0.625 = 1900$ Вт = 1,9 кВт;

реактивна $Q = UI \sin \varphi = 220 \cdot 13.8 \cdot 0.81 = 2380$ ВАр = 2,38 кВАр;

повна $S = UI = 220 \cdot 13.8 = 3040$ ВА = 3,04 кВА.

Векторна діаграма буде аналогічною діаграмі зображених на рис. 4.13,б.

4.6. Паралельне з'єднання приймачів у колі змінного струму

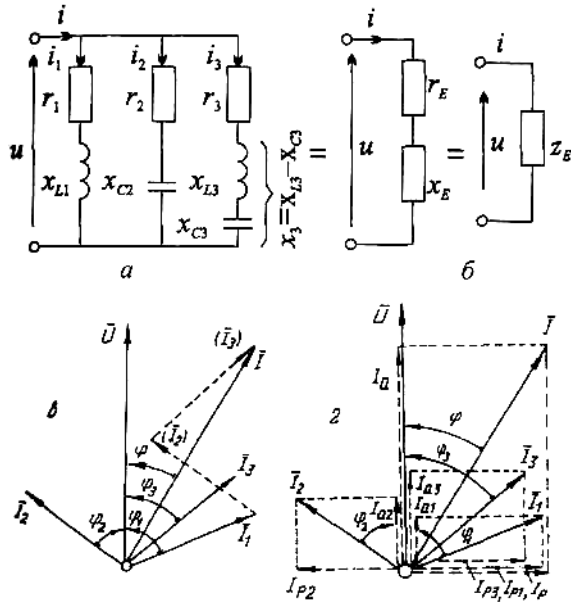


Рис. 4.15. Паралельне з'єднання в колі змінного струму (а), його еквівалентна схема (б) та векторні діаграми (в, г)

Як видно із схеми (рис. 4.15,а), для такого кола характерно те, що напруги на кожній вітці схеми однакові й дорівнюють напрузі мережі, а загальний струм дорівнює сумі струмів віток.

Спочатку розглянемо графоаналітичний метод розрахунку кола з паралельним з'єднанням приймачів. Розглянемо схему з трьох віток. Струм у кожній вітці визначається згідно із законом Ома:

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2}};$$

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2}};$$

$$I_3 = \frac{U}{\sqrt{r_3^2 + (x_{L3} - x_{C3})^2}}.$$

Кут зсуву фаз між струмом кожної вітки і напругою мережі визначається ³ трикутника опорів відповідної вітки через $\cos \varphi$ чи $\tan \varphi$:

$$\cos \varphi_1 = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + x_{L1}^2}}; \quad \cos \varphi_2 = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + x_{C2}^2}}; \quad \cos \varphi_3 = \frac{r_3}{\sqrt{r_3^2 + (x_{L3} - x_{C3})^2}}.$$

Загальний струм, як випливає із першого закону Кірхгофа, дорівнює геометричній сумі струмів усіх віток:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3.$$

Значення загального струму визначають графічно із векторної діаграми (рис. 4.15,в), побудову якої починаємо з напруги як із спільної величини для всіх віток схеми. Стрілки кутів φ на векторних діаграмах скеровані від струму до напруги.

Активна потужність кола дорівнює арифметичній сумі потужностей окремих віток:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = UI_1 \cos \varphi_1 + UI_2 \cos \varphi_2 + UI_3 \cos \varphi_3.$$

Реактивна потужність кола дорівнює алгебричній сумі реактивних потужностей всіх віток, причому реактивну потужність вітки з індуктивністю беруть із знаком "плюс" (кут $\varphi > 0$), а вітки з ємністю – зі знаком "мінус" (кут $\varphi < 0$):

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = UI_1 \sin \varphi_1 + UI_2 \sin \varphi_2 + UI_3 \sin \varphi_3$$

Повна потужність кола $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, а кут зсуву фаз між загальним струмом і напругою визначається із векторної діаграми або із співвідношення $\cos \varphi = P/S$.

Графоаналітичний метод невідгідний для розрахунку складніших кіл – громіздкий, вимагає великої точності графічної роботи і не забезпечує високого ступеня точності.

Тепер розглянемо **аналітичний** метод розрахунку розгалужених кіл змінного струму – т.з. **класичний метод**. В цьому методі використовують провідності, за допомогою яких можна аналітично розрахувати струми всіх віток і напруги на всіх ділянках кола.

Струм у кожній вітці кола розкладають на дві складові (рис. 4.15,г), одна з яких – це проекція на вектор напруги $\bar{U}$ – **активна складова** $\bar{I}_a$, а друга на лінію,

перпендикулярну до напруги – **реактивна складова** струму $\bar{I}_a$. Активна складова струму визначає активну потужність:

$$P = UI \cos \varphi = UI_a, \quad (4.37)$$

а реактивна складова струму – реактивну потужність:

$$Q = UI \sin \varphi = UI_p. \quad (4.38)$$

Із векторної діаграми (рис. 4.15,з) випливає, що:

$$\begin{aligned} I_{1a} &= I_1 \cos \varphi = \frac{U}{z_1} \cdot \frac{r_1}{z_1} = U \frac{r_1}{z_1^2} = Ug_1; \\ I_{1p} &= I_1 \sin \varphi = \frac{U}{z_1} = U \frac{x_{L1}}{z_1^2} = Ub_1, \end{aligned} \quad (4.39)$$

де

$$g_1 = \frac{r_1}{z_1^2} = \frac{r_1}{r_1^2 + x_{L1}^2}, \quad b_1 = \frac{x_{L1}}{z_1^2} = \frac{x_{L1}}{r_1^2 + x_{L1}^2}$$

відповідно, **активна** та **реактивна** провідності першої вітки. Тут $x_1 = x_{L1} - x_{C1} = x_{L1} - 0 = x_{L1}$.

Для другої вітки маємо:

$$g_2 = \frac{r_2}{z_2^2} = \frac{r_2}{r_2^2 + x_{C2}^2}, \quad b_2 = \frac{x_2}{z_2^2} = \frac{-x_{C2}}{r_2^2 + x_{C2}^2},$$

де

$$x_2 = x_{L2} - x_{C2} = 0 - x_{C2} = -x_{C2}.$$

Отже

$$I_{2a} = Ug_2; \quad I_{2p} = Ub_2.$$

І для k -ї вітки:

$$\begin{aligned} g_k &= \frac{r_k}{z_k^2} = \frac{r_k}{r_k^2 + x_k^2}, \quad b_k = \frac{x_k}{z_k^2} = \frac{x_k}{r_k^2 + x_k^2}; \\ I_{ka} &= U \cdot g_k; \quad I_{kp} = Ub_k \end{aligned} \quad (4.40)$$

Так можна визначити провідності усіх віток схеми и відповідно складові їх струмів I_a та I_p .

Загальна активна й реактивна провідності, активна й реактивна складові загального струму схеми дорівнюють сумі відповідних складових:

$$\begin{aligned} g_E &= g_1 + g_2 + \dots + g_n; \quad I_a = I_{1a} + I_{2a} + \dots + I_{na} = Ug_E; \\ b_E &= b_1 + b_2 + \dots + b_n; \quad I_p = I_{1p} + I_{2p} + \dots + I_{np} = Ub_E. \end{aligned} \quad (4.41)$$

В цій сумі реактивні провідності віток з індуктивним характером навантаження будуть додатними (зі знаком "плюс"), а віток з ємнісним характером від'ємними (зі знаком "мінус").

Повна еквівалентна провідність і сумарний струм схеми дорівнюють:

$$y_E = \frac{1}{z_E} = \sqrt{g_E^2 + b_E^2}; \quad I = U \cdot y_E = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}. \quad (4.42)$$

Еквівалентний резистивний r_E , реактивний x_E і повний Z_E опори кола (рис. 4.15,б) визначаються за допомогою таких співвідношень:

$$\boxed{r_E = \frac{g_E}{g_E^2 + b_E^2} = \frac{g_E}{y_E^2}; \quad x_E = \frac{b_E}{g_E^2 + b_E^2} = \frac{b_E}{y_E^2}; \quad z_E = \frac{1}{y_E} = \sqrt{r_E^2 + x_E^2}} \quad (4.43)$$

Тут необхідно відзначити, що якщо $b_E > 0$, то x_E буде індуктивним опором, а якщо $b_E < 0$, то x_E – ємнісним, і якщо $b_E = 0$ – тоді $x_E = 0$.

4.7. Мішане сполучення приймачів

Класичний метод розрахунку кіл змінного струму при мішаному сполученні приймачів полягає в тому, що паралельне з'єднання замінюємо еквівалентним послідовним сполученням, а відтак розглядаємо повну схему вже як послідовне з'єднання.

Спочатку визначаємо провідності віток, з'єднаних паралельно (рис. 4.16,а):

$$g_1, g_2, b_1, b_2, y_1, y_2.$$

Потім знаходимо еквівалентні провідності паралельно з'єднаних віток:

$$g_E = g_1 + g_2, \quad b_E = b_1 + b_2, \quad y_E = \sqrt{g_E^2 + b_E^2}.$$

Далі знаходимо опори r_E і x_E схеми (рис. 4.16,б):

$$r_E = \frac{g_E}{y_E^2}, \quad x_E = \frac{b_E}{y_E^2}.$$

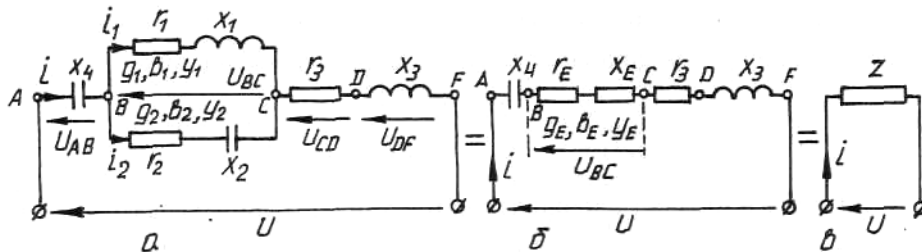


Рис. 4.16. Мішане сполучення приймачів у колі змінного струму

Надалі схему розглядаємо як послідовну і за законом Ома визначаємо струм:

$$I = U / Z = U / \sqrt{(r_E + r_3)^2 + (x_E + x_3 - x_4)^2}.$$

Напруга між точками B і C:

$$U_{BC} = I \sqrt{r_E^2 + x_E^2}.$$

Струми паралельних віток дорівнюватимуть:

$$I_1 = U_{BC} \cdot y_1 = U_{BC} / \sqrt{r_1^2 + x_1^2}; \quad I_2 = U_{BC} \cdot y_2 = U_{BC} / \sqrt{r_2^2 + x_2^2}.$$

Коефіцієнт потужності: $\cos \varphi = (r_E + r_3) / Z$.

Потужності: $S = UI$, $P = UI \cos \varphi$, $Q = UI \sin \varphi$.

Побудову векторної діаграми для схеми мішаного сполучення бажано починати з напруги на паралельній ділянці, для схеми (рис. 4.16,а) з напруги (рис. 4.17). Відтак рисуємо вектори струмів I_1 та I_2 відповідно під кутами φ_1 і φ_2 до напруги $\bar{U}_{BC}$. Знаходимо сумарний струм $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$.

Далі рисуємо вектори напруг $\bar{U}_{CD}$, $\bar{U}_{DF}$, $\bar{U}_{AB}$. Сума цих напруг дає напругу $\bar{U}_{AF}$, прикладену до кола. Послідовність векторів напруг на діаграмі має бути такою самою, що й на схемі.

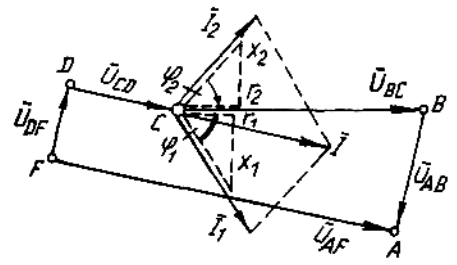
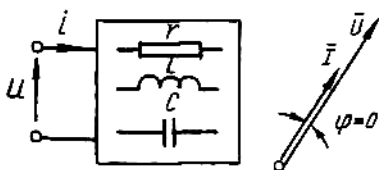


Рис. 4.17. Векторна діаграма струмів і напруг для схеми рис. 4.16

4.8. Резонанс в електричних колах



$$X_E = 0, \quad b_E = 0, \quad Z_{bx} = r_E, \quad \varphi = 0, \quad \cos \varphi = 1$$

Рис. 4.18. До визначення резонансу в електричному колі

Внаслідок того, що індуктивні й ємнісні опори, а також індуктивні й ємнісні провідності можуть взаємно компенсуватись, можливі випадки, коли в колі, яке має реактивні елементи, еквівалентний реактивний опір, і відповідно еквівалентна реактивна провідність дорівнюватимуть нулеві, й тоді струм в такому колі збігається за фазою з напругою, прикладеною до

клем цього кола, тобто коло загалом веде себе як активний опір. Явище, при якому струм у колі (рис. 4.18), за наявності у ньому реактивних опорів (індуктивностей та ємностей), збігається за фазою з напругою, прикладеною до цього кола, називають **резонансом**.

При резонансі електричного кола із мережі надходить тільки активна енергія (потужність P), а реактивна енергія (потужність q) циркулює (коливається) всередині схеми між котушкою індуктивності та конденсатором.

4.8.1. Резонанс у колі з послідовним сполученням елементів r , L , C (резонанс напруг)

Повний опір такого кола (рис. 4.19,а) виражається як:

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + (x_L - x_C)^2}.$$

Згідно з визначенням при резонансі виконується умова:

$$x = x_L - x_C = 0, \text{ або } \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \text{ чи } \omega^2 LC = 1 \quad (4.44)$$

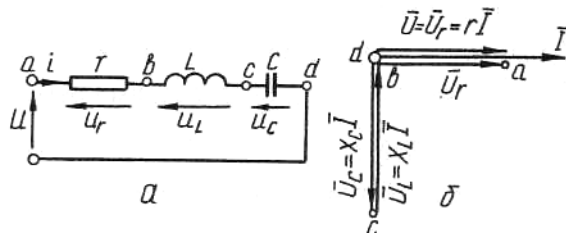


Рис. 4.19. Послідовне сполучення r , L , C (а), векторна діаграма $\bar{U}$ та $\bar{I}$ при резонансі (б)

Як випливає з (4.44), резонансу в колі можна досягти, змінюючи частоту, індуктивність чи ємність. Значення кутової частоти, індуктивності й ємності, за яких настає резонанс, визначаються з (4.44):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}. \quad (4.45)$$

Частоту ω_0 , $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ називають **резонансною**, вона є власною **частотою контуру**. З такою частотою в замкненому контурі $r - L - C$ при вимкненні u і закороченні клем $a - d$ схеми (рис. 4.19) енергія вільно коливається між індуктивністю та ємністю.

Тому, що при резонансі повний опір z досягає найменшого значення $z = r$, то струм при цьому буде мати має найбільше значення. Оскільки вектори $\bar{U}_L$ і $\bar{U}_C$ спрямовані протилежно один до одного й при резонансі однакові за величиною, то вектор прикладеної до кола напруги $\bar{U}$ дорівнює за величиною й напрямом вектору $\bar{U} = \bar{U}_r = r\bar{I}$. Може виявитися (при великих x_L і x_C), що значення напруг U_L і U_C будуть значно більшими, ніж значення прикладеної напруги U .

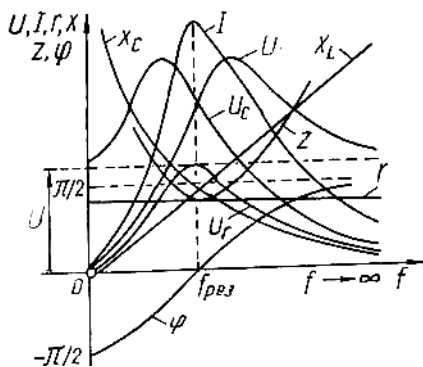


Рис. 4.20. Залежності U , I , r , x_L , x_C , Z , φ для схеми рис. 4.19 від частоти

Отже, при резонансі або в режимах, наближених до резонансу, напруги на котушці та конденсаторі можуть значно перевищувати прикладену до схеми напругу з мережі, що може призвести до аварійних режимів роботи (пошкодження ізоляції, нещасні випадки тощо). Тому при проектуванні й налагодженні електричних схем останні перевіряються на можливість виникнення в них резонансу напруг. Підвищення напруг U_L та U_C і взаємна їх компенсація при резонансі зумовило назву цього явища – **резонанс напруг**.

На рис. 4.20 наведені графіки залежностей U_r , U_L , U_C , I , r , x_C , x_L , φ від частоти f для схеми (рис. 4.19) при незмінній напрузі мережі.

Якщо $f = f_{рез} : x_L = x_C, I = U/r, U_L = U_C, U_r = U, \varphi = 0$.

Якщо $f \rightarrow \infty : x_L \rightarrow \infty, x_C \rightarrow 0, I \rightarrow 0, U_r \rightarrow 0, U_C \rightarrow 0$.

$U_L \rightarrow U, \varphi \rightarrow +\pi/2$.

Якщо $f = 0$: опір $x_L = 2\pi f_L = 0, x_C = 1/(2\pi f_C) \rightarrow \infty$, струм $I = 0; U_r = rI = 0, U_L = x_L I = 0, U_C = U, \varphi = -\pi/2$.

В інтервалі частот від $f = 0$ до $f_{рез}$ навантаження має ємнісний характер, струм випереджає за фазою напругу мережі ($\varphi < 0$). В інтервалі частот від $f_{рез}$ до $f = \infty$ навантаження має індуктивний характер, струм відстає за фазою від напруги ($\varphi > 0$).

Найбільше значення напруги на ємності одержується, якщо частота дещо менша за резонансну, а на індуктивності – дещо більша за резонансну.

Явище резонансу широко використовують в радіоелектронних пристроях та в заводських промислових установках.

4.8.2. Резонанс у колі з паралельним сполученням елементів r, L, C (резонанс струмів)

Спочатку розглянемо паралельне сполучення ідеальних елементів r, L, C (рис. 4.21,а). Із умови резонансу маємо:

$$b_E = b_L - b_C = 0, \text{ або } b_L = b_C, 1/(\omega L) = \omega C, \text{ чи } \omega^2 LC = 1 \quad (4.46)$$

З останнього виразу резонансна частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ визначається так само, як і при резонансі напруг. Досягти умови резонансу можна зміною значень ω, L чи C .

При резонансі струмів загальна провідність схеми у дорівнює активній провідності g , отже, досягає найменшого значення: $y = \sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2} = g$. Загальний струм $I = yU = gU$ теж буде мати найменше значення, а струми $I_L = b_L U = I_C = b_C U$, залежно від значень b_L та b_C , можуть досягти як завгодно великих значень, що набагато перевищують значення струму в нерозгалуженій частині кола. Збільшення діючих значень струмів у схемі при резонансі в паралельно сполучених вітках зумовило назву – **резонанс струмів**.

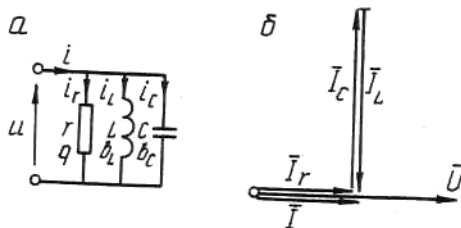


Рис. 4.21. Паралельне сполучення r - L - C (а), векторна діаграма при резонансі струмів (б)

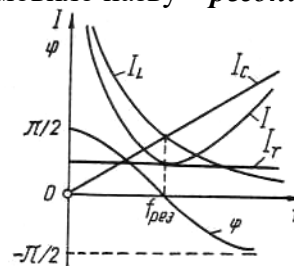


Рис. 4.22. Залежності $I_r, I_L, I_C, I, \varphi$ від частоти f для схеми (рис. 4.21)

На рис. 4.22 наведені графіки залежностей $I_r, I_L, I_C, I, \varphi$ від частоти f для схеми (рис. 4.21,а). Струм в індуктивності зворотно пропорційний частоті $I_L = U/(2\pi fL)$, а струм в конденсаторі прямо пропорційний частоті $I_C = U \cdot 2\pi fC$. Струм в колі з активним опором не залежить від частоти $I_r = U/r$. Значення загального струму, як видно із векторної діаграми, дорівнює $I = \sqrt{I_r^2 + (I_L - I_C)^2}$.

Якщо $f = 0 : I_L \rightarrow \infty, I_C = 0, I_r = U/r, I \rightarrow \infty, \varphi = +\pi/2$.

Якщо $f = f_{рез} : I_L = I_C, I = I_r = U/r, \varphi = 0$.

Якщо $f \rightarrow \infty : I_L \rightarrow 0, I_C \rightarrow \infty, I_r = U/r, I \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow -\pi/2$.

Резонанс струмів у колі з реальними елементами (рис. 4.23,а). Із визначення маємо: $b = 0, b = b_L - b_C = 0$ чи $b_L = b_C$, або з урахуванням (4.40), одержимо:

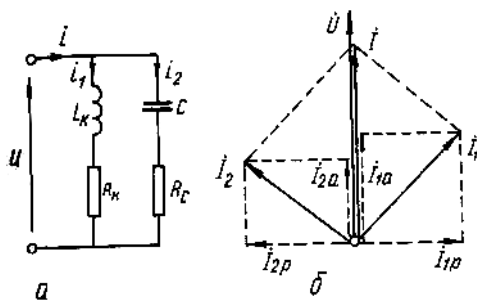


Рис. 4.23. Паралельне з'єднання реальних елементів L та C (а) і векторна діаграма при резонансі (б)

$$\frac{x_L}{R_K^2 + x_L^2} = \frac{x_C}{R_C^2 + x_C^2} \quad (4.47)$$

За цієї умови (4.47) в схемі (рис. 4.23,а) настає резонанс струмів. На рис. 4.23,б зображена векторна діаграма, що відповідає цьому режиму роботи. Реактивні складові струмів обох віток однакові ($I_{1P} = I_{2P}$), а загальний струм збігається за фазою з напругою.

Явище резонансу струмів або близьке до цього режиму широко використовується в силових електроенергетичних установках для підвищення коефіцієнта потужності $\cos \varphi$ промислових підприємств.

4.9. Символічний метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму

Застосування векторних діаграм (п.п. 4.6-4.7) для розрахунку кіл змінного струму дає змогу досягти наочності та спростити сам розрахунок. Однак векторні діаграми не завжди дають достатню точність і не завжди дають змогу одержати загальний розв'язок задачі. Значним кроком вперед порівняно з векторними діаграмами є введення в теорію змінних струмів Штейнмецом *символічного методу*, оснований на відображенні векторів комплексними числами. Цей метод дає змогу звести геометричні операції над векторами до алгебричних операцій над комплексними числами.

4.9.1. Деякі положення комплексного числення

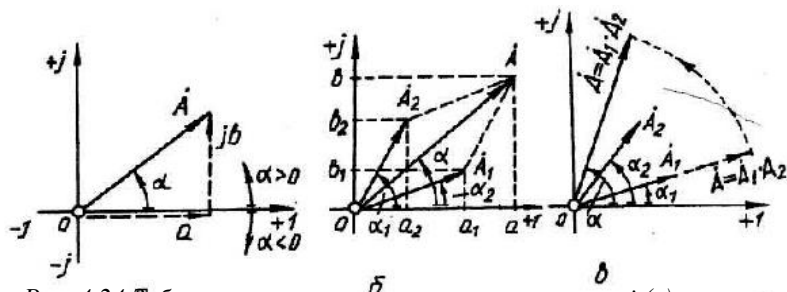


Рис. 4.24 Зображення комплексного числа на площині (а), складання двох комплексних чисел (б), множення двох комплексних чисел (в)

Як відомо з курсу математики, комплексне число $A = a + jb$ має дві складові: дійсну a та уявну b , які є координатами точки на комплексній площині (рис.

4.24,а). Комплексна площина є прямокутною системою координат, по осі абсцис, яку називають *віссю дійсних чисел* (+1) – (-1), відкладають дійсну частину комплексного числа **a**, а по осі ординат – яку називають *віссю уявних чисел* (+j) – (-j), відкладають уявну частину комплексного числа **b**, $j = \sqrt{-1}$. Комплексне число будемо позначати великою літерою з крапкою зверху. Комплексне число може бути зображене вектором, довжина якого є модулем комплексного числа, а положення визначається кутом (аргументом) а відносно додатного напрямку дійсної осі комплексної площини.

Виразивши *a* і *b* через модуль (довжину вектора) і кут α , можна записати комплексне число в тригонометричній формі, а застосувавши формулу Ейлера, комплексне число можна записати в показниковій формі:

$$\dot{A} = a + jb = A \cos \alpha + jA \sin \alpha = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) = Ae^{ja} \quad (4.48)$$

де $a + jb$ – алгебрична,

$A(\cos \alpha + j \sin \alpha)$ – тригонометрична,

Ae^{ja} – показникова форма запису комплексного числа;

$a = A \cos \alpha$, $b = A \sin \alpha$; $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа;

$\alpha = \arctg \frac{b}{a}$ – аргумент комплексного числа; α – на комплексній площині

відкладається від осі абсцис проти годинникової стрілки, якщо $\alpha > 0$; та за годинниковою стрілкою – якщо $\alpha < 0$; *e* – основа натурального логарифма.

Формула Ейлера показує зв'язок між показниковим та тригонометричним виразами комплексного числа:

$$e^{\pm ja} = \cos \alpha \pm j \sin \alpha = \exp(\pm ja) \quad (4.49)$$

і дає змогу переходити від однієї форми запису комплексного числа до іншої.

Розглянемо основні геометричні операції над векторами й алгебричні дії над комплексними числами, які їх відображають.

1) Спряжені комплексні числа $\dot{A}_1 = A_1 e^{ja} = a_1 + jb_1$ і $\dot{A}_2 = \tilde{A}_1 = a_1 - jb_1 = A_1 e^{-ja}$ мають однакові модулі й однакові, але протилежні за знаком аргументи. Спряжені комплексні числа є дзеркальним відображенням один одного відносно осі дійсних чисел (рис. 4.25,а).

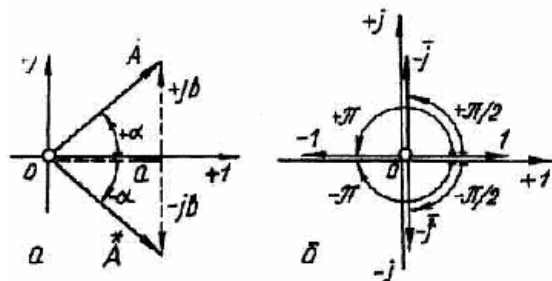


Рис. 4.25 Спряжені комплексні числа (а) та піднесення j^n (б)

2) Додавання чи віднімання двох (або більше) комплексних чисел можна провести аналітично:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{A}_1 \pm \dot{A}_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 \pm jb_2) = \\ &= (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) = a + jb, \end{aligned} \quad \text{або}$$

графічно за правилом складання векторів (рис. 4.24,б).

3) Добуток двох комплексних чисел, які відображають два вектори $\dot{A}_1$, $\dot{A}_2$, є комплексне число, якому відповідає вектор $\dot{A}$:

$$\dot{A} = \dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 = A_1 e^{ja_1} \cdot A_2 e^{ja_2} = A_1 A_2 e^{j(a_1+a_2)} = Ae^{ja}.$$

Вектор комплексу добутку двох векторів має довжину, що дорівнює добутку модулів, а аргумент *a* дорівнює алгебричній сумі аргументів множників (рис. 4.24,в).

Або в алгебричній формі:

$$\dot{A} = \dot{A}_1 \cdot \dot{A}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1) = a + jb.$$

Якщо комплексне число $\dot{A}$ помножити на $e^{j\beta}$, то нове комплексне число $\dot{B}$ буде мати цей самий модуль *A*, але повернутий на кут β проти стрілки годинника, якщо $\beta >$

0, і за стрілкою годинника – якщо $\beta < 0$. Часто множник $e^{j\beta}$ називають оператором повороту.

$$\dot{B} = \dot{A} \cdot e^{j\beta} = A e^{ja} \cdot e^{j\beta} = A e^{j(a+\beta)}.$$

Ураховуючи оператор повороту ($e^{j\beta}$), згідно з рис. 4.25,б або за формулою Ейлера, можна підрахувати j^n :

$$j^0 = 1;$$

$$j^1 = j = 1 \cdot e^{j\pi/2} = e^{j\pi/2} = e^{j90^\circ}; \quad j^3 = -j = e^{-j90^\circ} = e^{-j\pi/2};$$

$$j^2 = -1 = e^{\pm j180^\circ} = e^{\pm j\pi}; \quad j^4 = 1 \text{ і т.д.}$$

4) Ділення комплексних чисел

$$\dot{A} = \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{A_1 e^{ja_1}}{A_2 e^{ja_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(a_1-a_2)} = A e^{ja}, \text{ де } A = \frac{A_1}{A_2}, \quad a = a_1 - a_2.$$

Якщо комплексні числа подані в алгебричній формі, то тоді треба позбутись комплексного числа в знаменнику. Для цього необхідно чисельник і знаменник помножити на спряжене значення знаменника:

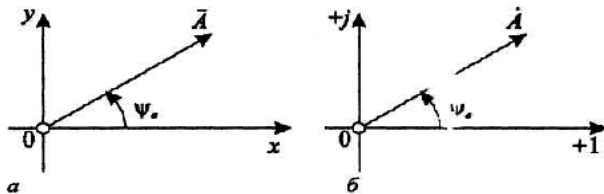
$$\begin{aligned} \dot{A} = \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} = a + jb. \end{aligned}$$

5) Піднесення комплексного числа до степеня

$$\dot{A}^n = (A e^{ja})^n = A^n \cdot e^{jan}.$$

4.9.2. Символічне (комплексне) відображення синусоїдних величин

В параграфі (4.2) було розглянуто векторне відображення синусоїдної величини (4.9) з зображенням її вектором на площині x - o - y (рис. 4.26, а). Замінивши декартову систему координат x - o - y комплексною площиною $(+1)$ - 0 - $(+j)$ (рис. 4.26,б), можемо за аналогією до формули векторного відображення (4.9):



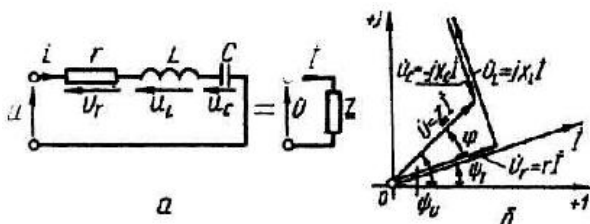
$$a = A_m \sin(\omega t + \psi_a) \Leftrightarrow \bar{A} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \angle \psi_a$$

записати формулу символічного (комплексного) відображення синусоїдної величини, яка буде мати такий вигляд:

Рис. 4.26 Зображення вектора $\bar{A}$ на площині X - O - Y (а) та зображення комплексного числа $\bar{A}$ на площині $+1$ - 0 - $+j$ (б)

$$a = A_m \sin(\omega t + \psi_a) \Leftrightarrow \dot{A} = \frac{A_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_a} = A \cdot \exp(j\psi_a), \quad (4.50)$$

де знак $\Leftrightarrow$ чи $\rightarrow$ означає "відповідає", "відображає", а $e^{j\psi_a} = \exp(j\psi_a)$.



Приклад 4.3. Розглянемо декілька прикладів переходу від миттєвого значення синусоїдної величини до комплексного її відображення, і навпаки.

$$i_1 = 14,1 \sin \omega t \text{ A} \rightarrow \dot{I}_1 = 14,1 / \sqrt{2} e^{j0^\circ} = 10 \text{ A};$$

Рис. 4.27 До виведення закону Ома в комплексній формі

$$\begin{aligned} i_2 &= 5\sqrt{2} \sin(\omega t \rightarrow 60^\circ) \text{ A} \rightarrow \dot{I}_2 = \\ &= 5\sqrt{2} / \sqrt{2} e^{-j60^\circ} = 5e^{-j60^\circ} = 5 \exp(-j60^\circ) \text{ A}; \\ u_1 &= 220\sqrt{2} \cos \omega t = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ B} \rightarrow \dot{U}_1 = \\ &= 220\sqrt{2} / \sqrt{2} e^{j90^\circ} = j220 \text{ B}; \\ e_1 &= 150 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ B} \rightarrow \dot{E}_1 = 150 / \sqrt{2} e^{-j90^\circ} = -j150 / \sqrt{2} \text{ B}. \end{aligned}$$

Зворотний перехід:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= 5 \text{ A} \rightarrow i_3 = 5\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}; \\ I_4 &= 10e^{-j50^\circ} \text{ A} \rightarrow i_4 = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - 50^\circ) \text{ A}; \\ \dot{U}_2 &= 50 + j50 = \sqrt{2} e^{+45^\circ} \text{ B} \rightarrow u_2 = 100 \sin(\omega t + 45^\circ) \text{ B}; \\ \dot{U}_3 &= -50 - j100 = \sqrt{50^2 + 100^2} e^{j \arctan \frac{-100}{-50}} = 112,2 e^{-116^\circ 30'} \text{ B} \rightarrow u_3 = 112,2\sqrt{2} \sin(\omega t - 116^\circ 30') \text{ B}; \end{aligned}$$

4.9.3. Закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі. Комплексні опори та провідності

До кола з послідовним сполученням елементів r , L , C (рис. 4.27, а) прикладена синусоїдна напруга, яка викличе синусоїдний струм, їх комплексні відображення будуть $\dot{U}$ та $\dot{I}$:

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) \rightarrow \dot{U} = U_m / \sqrt{2} e^{j\psi_u} = U e^{j\psi_u}; \\ i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) \rightarrow \dot{I} = I_m / \sqrt{2} e^{j\psi_i} = I e^{j\psi_i}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Для замкнутого контуру за другим законом Кірхгофа запишемо рівняння для миттєвих значень напруг:

$$u = u_r + u_L + u_C, \quad (4.52)$$

або в комплексній формі, відобразивши синусоїдні величини u_r , u_L , u_C комплексними величинами:

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_C, \quad (4.53)$$

де $\dot{U}_r = r\dot{I}$ — збігається за фазою зі струмом;

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I} = +j\omega L \dot{I} \text{ — випереджає струм на } 90^\circ;$$

$$\dot{U}_C = -j\omega C \dot{I} = -j\omega C \dot{I} \text{ — відстає від струму на } 90^\circ.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (4.53), одержимо:

$$\dot{U} = r\dot{I} + j\omega L \dot{I} - j\omega C \dot{I} = [r + j(\omega L - \omega C)]\dot{I} = \underline{Z}\dot{I},$$

звідки

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{r + j(\omega L - \omega C)} = \frac{\dot{U}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (4.54)$$

Рівність (4.54) називають **законом Ома в символічній (чи комплексній) формі**.

Опір

$$\underline{Z} = r + j\omega L = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (4.55)$$

називається **комплексним повним опором** схеми, позначається великою літерою $\underline{Z}$ з рискою знизу.

При відомих комплексних значеннях струму й напруги комплексний опір визначається як:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\dot{U}}}{\underline{\dot{I}}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + j z \sin \varphi = r + jx, \quad (4.56)$$

де

$$\boxed{\varphi = \psi_u - \psi_i; r = z \cos \varphi; x = z \sin \varphi; z = \sqrt{r^2 + x^2}.} \quad (4.57)$$

Якщо $\varphi > 0$, то $x > 0$ і являє собою індуктивний опір (x_L); якщо ($\varphi < 0$, то $x < 0$ і є ємнісним опором (x_C); і якщо $\varphi = 0$, то $x = 0$.

На рис. 4.27,б зображена векторна діаграма в комплексній площині для кола (рис. 4.27,а). Надалі векторні діаграми будемо рисувати в комплексній площині для комплексних діючих значень напруг та струмів ($\underline{\dot{U}}, \underline{\dot{I}}$).

Необхідно звернути увагу на те, що дійсною частиною комплексного опору є резистивний опір, а уявною частиною – реактивний опір.

$$\boxed{\operatorname{Re}(\underline{Z}) = r, \operatorname{Im}(\underline{Z}) = x.} \quad (4.58)$$

Символи Re – від французьких слів realiser – дійсний, а Im – imaginer – уявний.

Величина, зворотна комплексному опоріві, називається **комплексною провідністю**:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{z e^{j\varphi}} = y e^{-j\varphi} = y \cos \varphi - j y \sin \varphi = g - jb \quad (4.59)$$

Як видно з (4.59), дійсною частиною комплексної провідності є активна провідність, а уявною – реактивна провідність взята із протилежним знаком:

$$\boxed{g = \operatorname{Re}[\underline{Y}] = y \cos \varphi; b = -\operatorname{Im}[\underline{Y}] = y \sin \varphi.} \quad (4.60)$$

Величину $y = 1/z = \sqrt{g^2 + b^2}$ – називають повною провідністю кола.

Ураховуючи (4.59), закон Ома в комплексній формі може бути записаний ще так:

$$\boxed{\underline{\dot{I}} = \underline{Y} \underline{\dot{U}}.} \quad (4.61)$$

Закони Кірхгофа ($\sum I = 0, \sum rI = \sum E, \text{чи} \sum U, E = 0$) справедливі для кіл постійного струму, а для миттєвих значень струмів, ЕРС і напруг змінного струму матимуть такий вигляд:

$$\sum i = 0, \sum (ri, L di/dt, 1/C \int idt) = \sum e, \quad \text{чи} \quad \sum u, e = 0.$$

В електричних колах синусоїдного струму можна додавати діючі (або амплітудні) значення струмів, ЕРС і напруг, але у векторній формі, тобто додавати геометрично, і тому закони Кірхгофа для кіл синусоїдного струму у векторній формі запишуться так:

$$\sum \bar{I} = 0; \sum \bar{zI} = \sum \bar{U}, \bar{E} = 0. \quad (4.62)$$

Ця операція аналогічно виконується і комплексними числами. Тому закони Кірхгофа у комплексній формі запишуться так:

$$\boxed{\sum \dot{I} = 0; \sum \underline{Z} \dot{I} = \sum \dot{E}, \text{чи} \sum \dot{U}, \dot{E} = 0.} \quad (4.63)$$

Складаючи рівняння для електричних схем згідно з (4.63), необхідно попередньо вибрати додатні напрямки струмів у вітках, додатні напрямки ЕРС та напруг на елементах (r, l, C) схеми, та додатні напрямки обходу контурів – аналогічно, як в колах постійного струму.

4.9.4. Комплексна потужність

Розраховуючи коло змінного струму символічним методом, вигідно користуватися виразом потужності в комплексній формі, який одержують множенням комплексу напруги на спряжене значення комплексу струму. Нехай в опорі $\underline{Z}$ маємо:

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_u) \Rightarrow \dot{U} = Ue^{j\psi_u};$$

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i) \Rightarrow \dot{I} = Ie^{j\psi_i}, \quad I = Ie^{-j\psi_i}.$$

Тоді

$$UI^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + UI \sin \varphi = P + jQ.$$

Отже,

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = UI \cos \varphi + UI \sin \varphi = P + jQ, \quad \text{де } \tilde{S} = Se^{j\varphi}. \quad (4.64)$$

Отже, множачи комплекс напруги на спряжене значення комплексу струму, одержуємо комплексне число (комплексну потужність $\tilde{S}$), дійсна частина якого дорівнює активній потужності P , а уявна – реактивній потужності Q ; якщо перед уявною частиною одержимо знак "плюс" – це означає, що розрахунок стосується кіл індуктивного характеру, а якщо знак "мінус" – кіл ємнісного характеру.

4.9.5. Методи розрахунку електричних кіл змінного струму

У першому розділі ми розглянули низку методів розрахунку кіл постійного струму: а) метод перетворення; б) метод рівнянь Кірхгофа; в) метод контурних струмів; г) метод вузлових напруг; д) метод накладання; е) метод еквівалентного генератора.

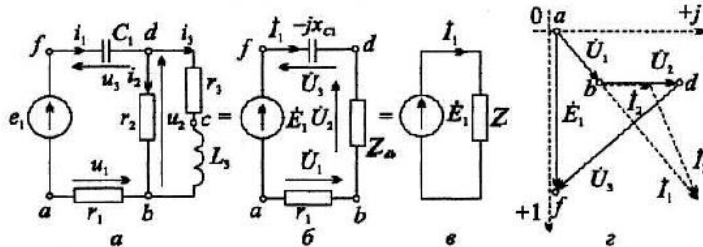


Рис. 4.28 Схема мішаного сполучення опорів (а) та її векторна діаграма (г)

Всі ці методи повністю справедливі для кіл змінного синусоїдного струму, якщо розрахунок проводити у комплексній формі. Розглянемо деякі із них на прикладах.

Метод перетворення.

Методом еквівалентних перетворень розв'яжемо задачу для кола синусоїдного струму та побудуємо

для нього топографічну векторну діаграму напруг і діаграму струмів.

Приклад 4.4. Фізичні величини кола рис. 4.28,а мають такі значення:

$$e_1 = 183,8 \sin 314 t \text{ В}; \quad C_1 = 187,3 \text{ мкФ};$$

$$r_1 = 7 \text{ Ом}; \quad r_2 = 20 \text{ Ом}; \quad r_3 = 4 \text{ Ом}; \quad L_3 = 25,48 \text{ мГн}.$$

$$\text{Комплексна ЕРС } \dot{E}_1 = E_m / \sqrt{2} e^{j\psi} = 183,8 / \sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ} = 130 \text{ В}.$$

Реактивні опори:

$$x_{L3} = \omega L_3 = 314 \cdot 25,48 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом};$$

$$x_{C1} = 1/(\omega C_1) = 1/(314 \cdot 187,3 \cdot 10^{-6}) = 17 \text{ Ом};$$

Комплексний опір паралельних віток:

$$\underline{Z}_{bd} = \frac{r_2(r_3 + jx_{L3})}{r_2 + r_3 + jx_{L3}} = \frac{20(4 + j8)}{20 + 4 + j8} = 5 + j5 = 7,07 e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

$$\text{Комплексний опір усього кола: } \underline{Z} = r_1 + \underline{Z}_{bd} - jx_{C1} = 7 + 5 + j5 - j17 = 12 - j12 = 17 e^{j45^\circ} \text{ Ом};$$

Комплексні струми і напруги в колі:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = \frac{130}{17e^{-j45^\circ}} = 7.65e^{+j45^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{U}_1 = r_1 \dot{I}_1 = 7 \cdot 7.65e^{+j45^\circ} = 53.5 \exp(j45^\circ) \text{ В};$$

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_{bd} \dot{I}_1 = 7.07 \exp(j45^\circ) \cdot 7.65 \exp(j45^\circ) = j54.0 \text{ В};$$

$$\dot{U}_3 = -j_{c1} \dot{I}_1 = -j17 \cdot 7.65 \exp(j45^\circ) = 130.0 \exp(-j45^\circ) \text{ В};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{r_2} = \frac{j54}{20} = j2.7 \text{ А}; \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{j54}{4 + j8} = 6 \exp(j26^\circ 30') \text{ А};$$

Потужності:

$$\tilde{S} = \dot{E}_1^* \dot{I}_1 = 130 \cdot 7.65 \exp(-j45^\circ) = 1000 \exp(-j45^\circ) = 707 - j707 \text{ ВА};$$

$$P = \operatorname{Re}[\tilde{S}] = \operatorname{Re}[707 - j707] = 707 \text{ Вт} = 0,707 \text{ кВт};$$

$$Q = \operatorname{Im}[\tilde{S}] = \operatorname{Im}[707 - j707] = -707 \text{ ВАр} = -0,707 \text{ кВАр};$$

$$S = |\tilde{S}| = |1000 \cdot \exp(-j45^\circ)| = 1000 \text{ ВА} = 1 \text{ кВА}.$$

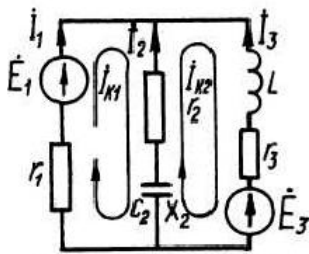


Рис. 4.29 Схема до прикладу 4.5

Перевірка. Активна потужність тратиться в резистивних опорах, отже:

$$P = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + r_3 I_3^2 = 2,7^2 \cdot 20 + 6^2 \cdot 4 + 7,65^2 \cdot 7 = 705 \text{ Вт},$$

що відповідає $\operatorname{Re}[\tilde{S}]$. Для побудови векторної діаграми вибираємо масштаби: $m_U = 30 \text{ В/см}$; $m_I = 2 \text{ А/см}$. Векторна діаграма наведена на рис. 4.28, з.

Приклад 4.5. Для знаходження струмів у схемі, зображеній на рис. 4.29, скласти систему рівнянь за методом рівнянь Кірхгофа та систему рівнянь за методом контурних

струмів.

Система рівнянь складена за методом рівнянь Кірхгофа:

$$1) \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0;$$

$$2) r_1 \dot{I}_1 - (r_2 - jx_2) \dot{I}_2 = \dot{E}_1;$$

$$3) (r_2 - jx_2) \dot{I}_2 - (r_3 + jx_3) \dot{I}_3 = -\dot{E}_3.$$

Система рівнянь, складена за методом контурних струмів:

$$1) \dot{I}_{K1}(r_1 + r_2 - jx_2) - \dot{I}_{K2}(r_2 - jx_2) = \dot{E}_1;$$

$$2) \dot{I}_{K2}(r_2 + r_3 + jx_3 - jx_2) - \dot{I}_{K1}(r_2 - jx_2) = -\dot{E}_3.$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{K1}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{K2} - \dot{I}_{K1}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{K2}.$$

4.9.6. Кола з взаємодуктивно зв'язаними котушками

Рівняння 3.39, записані для миттєвих значень напруг на індуктивно зв'язаних котушках, були такими:

$$u_1 = ri_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt};$$

$$u_2 = ri_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt},$$

запишемо їх в комплексному вигляді при зміні струмів та напруг за синусоїдним законом:

$$\dot{U}_1 = r\dot{I}_1 + jx_{L1}\dot{I}_1 + jx_M\dot{I}_2; \quad (4.)$$

$$\dot{U}_2 = r_2 \dot{I}_2 + jx_{L2} \dot{I}_2 + jx_M \dot{I}_1, \quad (65)$$

де $x_{L1} = \omega L_1, x_{L2} = \omega L_2$ – індуктивні опори котушок, зумовлені індуктивностями L_1 та L_2 ; $z_M = x_M = \omega M$ – індуктивний опір, зумовлений взаємною індуктивністю M .

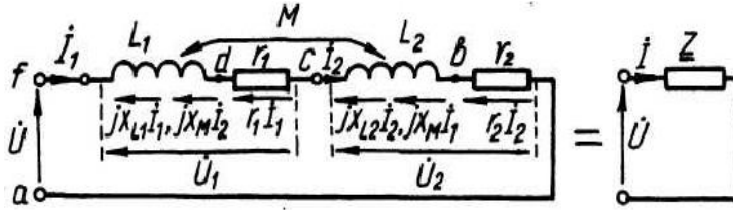


Рис. 4.30. Послідовне сполучення індуктивно зв'язаних котушок

Послідовне сполучення індуктивно зв'язаних котушок. Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для схеми (рис. 4.30) при узгодженому увімкненні котушок: "+M", очевидно, Тут $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}$.

$$(r_1 \dot{I} + jx_{L1} \dot{I} + jx_M \dot{I}_2) + (r_2 \dot{I} + jx_{L2} \dot{I}_2 + jx_M \dot{I}_1) = \dot{U}.$$

Звідси

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{(r_1 + r_2) + j(x_{L1} + x_{L2} + 2x_M)} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}, \quad (4.66)$$

тут

$$\underline{Z} = (r_1 + jx_{L1}) + (r_2 + jx_{L2}) + 2jx_M = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 + 2\underline{z}_M.$$

При зустрічному увімкненні котушок маємо "-M":

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{(r_1 + r_2) + j(x_{L1} + x_{L2} - 2x_M)} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}, \quad (4.67)$$

тут

$$\underline{Z} = (r_1 + jx_{L1}) + (r_2 + jx_{L2}) - 2jx_M = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 - 2\underline{z}_M.$$

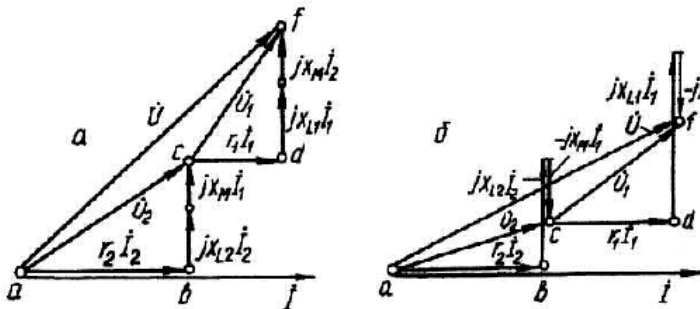


Рис. 4.31. Векторна діаграма схеми (рис. 4.30); а – для узгодженого і (б) – для зустрічного увімкнення котушок

Векторні діаграми наведені на рис. 4.31,а – для узгодженого й 4.31,б – для зустрічного вмикання котушок. Векторні діаграми починаємо будувати із вектора струму.

Паралельне сполучення індуктивно зв'язаних котушок. Запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа для схеми (рис. 4.32,а) – три рівняння і три невідомі $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0; \\ 2) \quad & r_1 \dot{I}_1 + jx_{L1} \dot{I}_1 + jx_M \dot{I}_2 = \dot{U}; \\ 3) \quad & r_2 \dot{I}_2 + jx_{L2} \dot{I}_2 + jx_M \dot{I}_1 = \dot{U}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

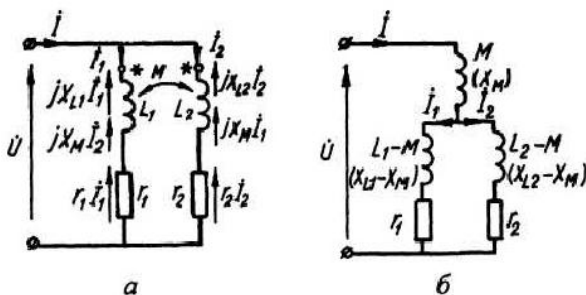


Рис. 4.32. Паралельне сполучення індуктивно зв'язаних котушок (а) та їх заміна еквівалентною схемою (б) вже без взаємних зв'язків

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо значення струмів $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}$.

Паралельно сполучені індуктивно зв'язані котушки можуть бути замінені еквівалентною схемою (рис. 4.32,б) вже без взаємних зв'язків. Якщо в рівняння (2) системи (4.68) підставити за $\dot{I}_2 = \dot{I} - \dot{I}_1$ значення із (1), а в (3) – за $\dot{I}_1 = \dot{I} - \dot{I}_2$, то одержимо рівняння, які відповідають схемі (4.32,б):

$$\begin{aligned} r_1 \dot{I}_1 + j(x_{L1} - x_M) \dot{I}_1 + jx_M \dot{I} &= \dot{U} \\ r_2 \dot{I}_2 + j(x_{L2} - x_M) \dot{I}_2 + jx_M \dot{I} &= \dot{U} \end{aligned} \quad (4.69)$$

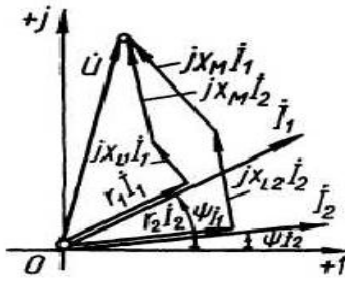


Рис. 4.33. Векторна діаграма i та $\dot{U}$ схеми при збудженому увімкненні котушок

Рівняння (4.69) справедливі для узгодженого сполучення. При зустрічному сполученні перед M (чи x_M) необхідно змінити знак.

На рис. 4.33 зображена векторна діаграма для схеми (рис. 4.32,а) при узгодженому увімкненні котушок. При зустрічному сполученні вектори $jx_M \dot{I}_2$ та $jx_M \dot{I}_1$ матимуть знак "мінус" ($-jx_M \dot{I}_2$, $-jx_M \dot{I}_1$) і протилежний напрям.

При проведенні маркування котушок визначають спосіб їх увімкнення за таким правилом: якщо струми в котушках відносно однойменних клем своїх котушок напрямлені в **один бік**, то котушки увімкнені **узгоджено**, якщо в **різні боки** – то **зустрічно**.

Передача енергії між індуктивно зв'язаними котушками. Покажемо, що при зсуві фаз між струмами двох індуктивно зв'язаних котушок, що не дорівнює 0 чи π , між ними проходить передача енергії магнітним полем.

Нехай відомі струми двох котушок: $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$; $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$; Комплексні потужності, що передаються з котушки 1 в котушку 2 взаємодуїдктивністю є такими:

$$\dot{S}_{1M} = \dot{U}_{1M} \cdot \dot{I}_1^* = j\omega \dot{I}_2 \cdot \dot{I}_1^* = j\omega M I_1 I_2 e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = -\omega M I_1 I_2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + j\omega M I_1 I_2 \cos(\psi_2 - \psi_1),$$

а її активна складова

$$P_{1M} = \text{Re}[\dot{S}_{1M}] = -\omega M I_1 I_2 \sin(\psi_2 - \psi_1).$$

Аналогічна для другої котушки:

$$\begin{aligned} \dot{S}_{2M} &= \dot{U}_{2M} \cdot \dot{I}_2^* = j\omega \dot{I}_1 \cdot \dot{I}_2^* = j\omega M I_1 I_2 e^{j\psi_1 - \psi_2}; \\ P_{2M} &= \text{Re}[\dot{S}_{2M}] = -\omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned}$$

Отже, $P_{1M} = -P_{2M} = \omega M I_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2).$

Як видно $P_{1M} + P_{2M} = 0$, тобто сумарна активна потужність, що надходить у взаємозв'язані вітки кола, дорівнює нулеві.

Якщо $0 < (\psi_1 - \psi_2) < \pi$ то $P_{1M} > 0$, а $P_{2M} < 0$ – в цьому випадку енергія передається із першої котушки в другу; і якщо $0 < (\psi_2 - \psi_1) < \pi$ то $P_{2M} > 0$, а $P_{1M} < 0$ – і тер проходить передача енергії із другої котушки в першу.

Сумарна реактивна потужність $Q_{1M} + Q_{2M}$ У загальному випадку не дорівнює нулеві й може бути як додатною, так і від'ємною.

Основна література:

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Ч.1. Линейные электрические цепи. – М.: Энергия, 1981.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1984.
3. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Ч.1,2. – М.: Энергия, 1981.
4. Основы теории цепей: Учебник для вузов/Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989.

Додаткова література:

1. Малинівський С.М. Загальна електротехніка: Підручник. – Львів : Видавництво “Бескид Біт”, 2003.
2. Сборник задач по теории электрических цепей/Под ред. П.А. Ионкина. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
3. Татур Т.А., Татур В.Е. Установившиеся и переходные процессы в электрических цепях: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 2001.
4. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высш. школа, 1998.

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1.

РОЗРАХУНОК СКЛАДНОГО ЛІНІЙНОГО КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1. Мета й призначення роботи: закріплення знань, отриманих на лекціях і практичних заняттях, шляхом застосування їх до розрахунку конкретного електричного кола. У роботі використовуються методи контурних струмів і вузлових потенціалів, а також метод еквівалентного генератора. Виробляється перевірка балансу потужностей.

1.2. Зміст роботи:

1.2.1. Для заданої схеми (табл. 1.1) скласти систему незалежних рівнянь за законами Кірхгофа (вирішувати цю систему не потрібно).

1.2.2. Скласти систему рівнянь по методу контурних струмів і записати її в матричній формі. Вирішити цю систему рівнянь на ЕОМ (роздруківку результатів обчислень вклеїти в роботу). Знайти струми галузей через контурні струми.

1.2.3. Скласти систему рівнянь по методу вузлових потенціалів і записати її в матричній формі. Вирішити цю систему на ЕОМ. Знайти струми галузей за узагальненим законом Ома.

1.2.4. Скласти баланс потужностей для вихідної схеми.

1.2.5. Визначити показання вольтметра.

1.2.6. Знайти струм другої галузі, що містить R_2 , E_2 , методом еквівалентного генератора.

1.2.7. Розрахувати й побудувати потенційну діаграму для будь-якого контуру.

1.3. Вихідні дані:

У табл. 1.2 наведені 29 варіантів розрахункового електричного кола, кожний студент виконує індивідуальний варіант завдання. Числові значення елементів схеми представлені в табл. 1.2 і вибираються відповідно до останньої цифри номера групи. Наприклад, для групи 273 – варіант №3. Для груп 241-244 варіант вибирається відповідно до суми цифр у номері групи; наприклад, для групи 244 номер варіанта буде $2 + 4 + 4 = 10$.

Номер схеми n (див. табл. 1.1) відповідає порядковому номеру, під яким прізвище студента записане в груповому журналі.

Таблиця 1.1

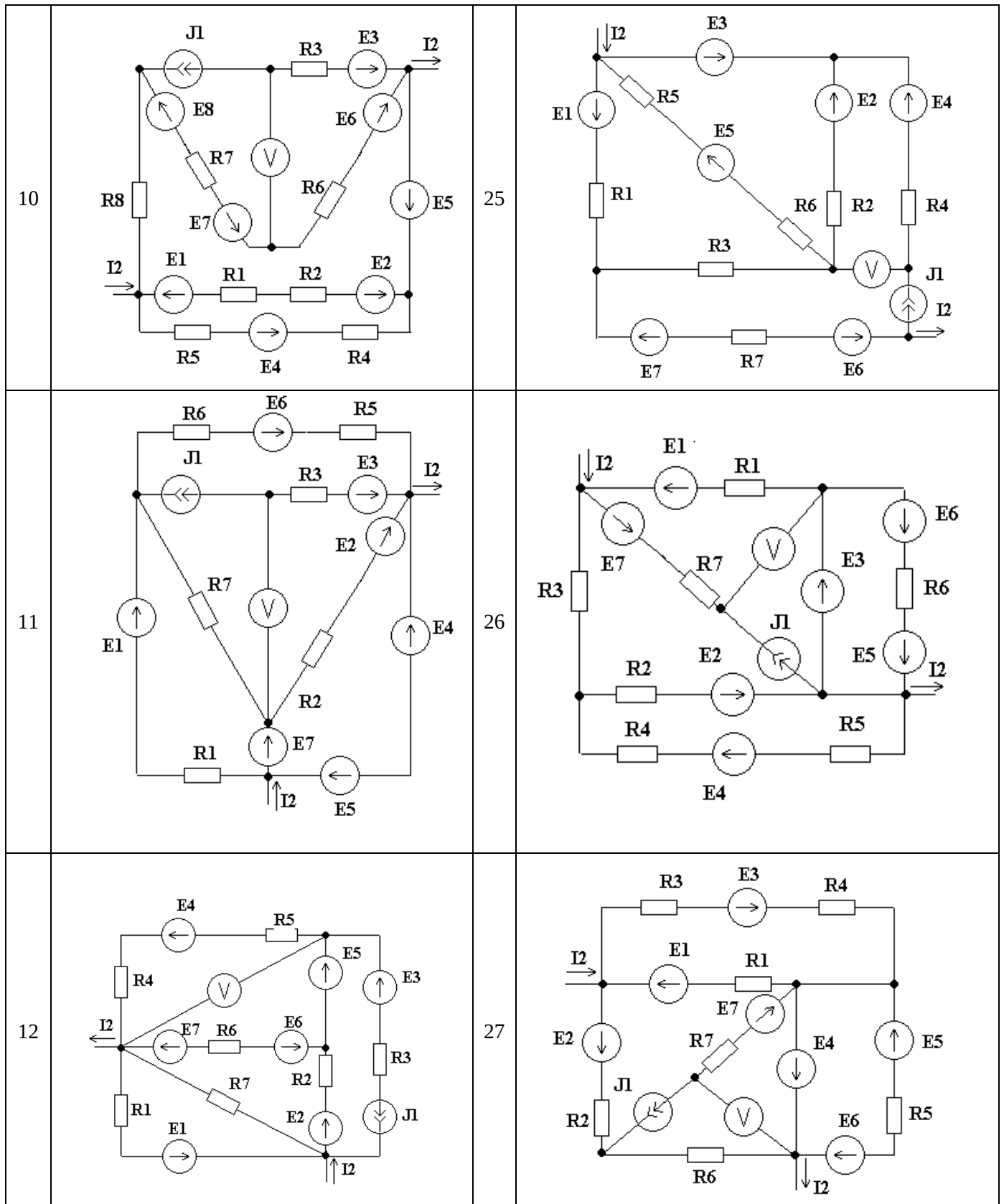
Номер варіанта	Числові значення параметрів елементів схем															
	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	I_1	I_2
	Ом							В							А	
1	10	5	15	8	6	5	4	10	30	20	40	15	10	20	10	5
2	5	8	6	10	7	15	4	20	10	30	15	40	20	10	5	3
3	8	10	6	15	7	4	5	40	15	10	20	30	10	20	3	10
4	10	6	8	7	15	5	4	30	10	15	40	20	2	10	2	8
5	6	5	10	15	4	8	7	15	40	10	20	20	30	10	8	2
6	7	10	8	15	4	6	5	20	10	30	40	15	10	20	6	7
7	15	6	5	8	10	4	7	10	40	15	20	20	30	10	7	6
8	4	15	5	7	10	8	6	20	10	20	40	30	15	10	5	2
9	10	6	4	8	15	7	5	30	10	20	40	15	20	10	2	5
10	8	5	15	6	10	4	7	10	20	30	40	10	20	15	1	6

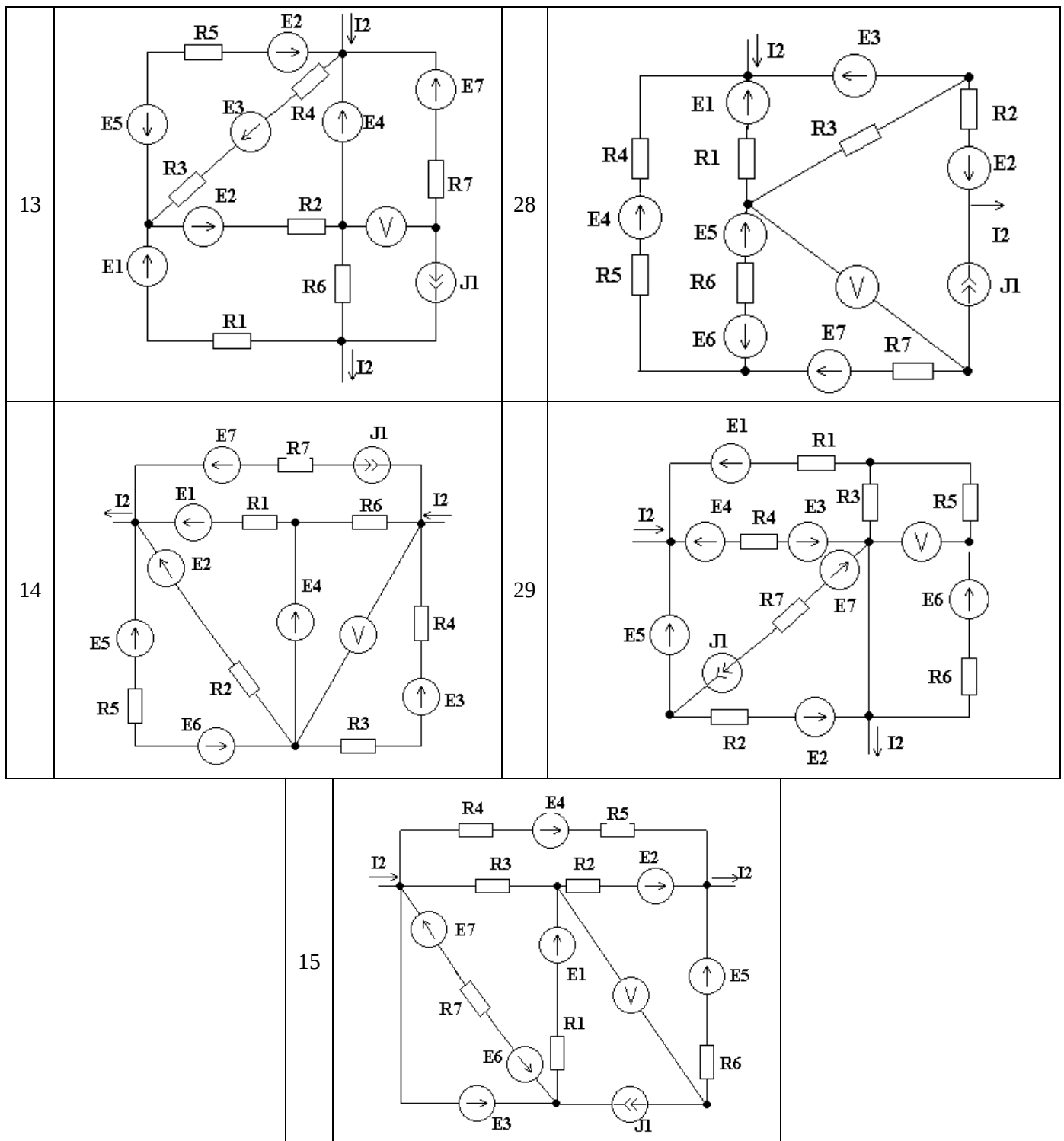
Таблиця 1.2.

n	Схема	n	Схема
1		16	
2		17	
3		18	

4		19	
5		20	
6		21	

7		22	
8		23	
9		24	





1.4. Методичні вказівки:

1.4.1. При розрахунку методом контурних струмів рекомендуються струми джерел струму I_1 і I_2 замикати по найкоротших шляхах і розглядати їх як контурні.

1.4.2. При виконанні п. 6 завдання ЕРС еквівалентного генератора E_E приймається рівною напрузі холостого ходу U_{20} на затискачах розімкнутої другої галузі. При цьому розрахунок струмів у схемі, що утворилася в результаті розриву другої галузі, найбільш доцільно виконувати методом вузлових потенціалів.

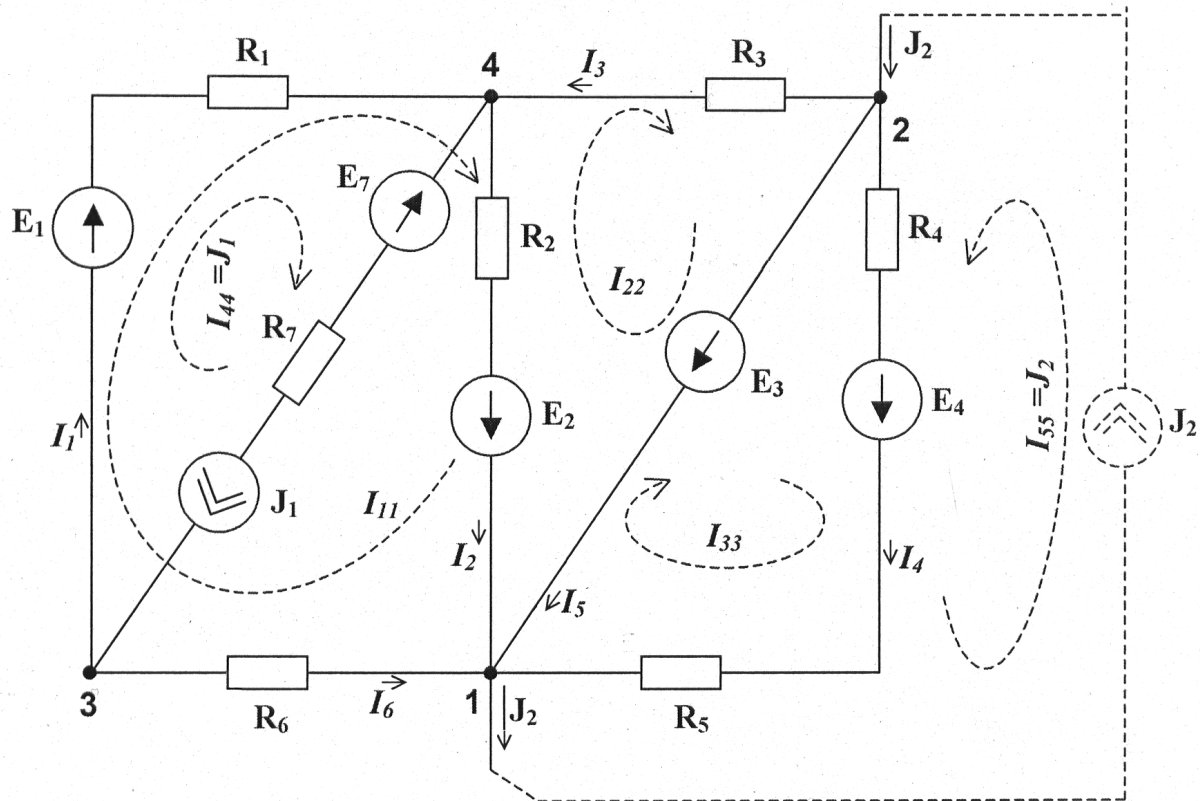
1.4.3. При виконанні п. 4 завдання вольтметр розглядається як ідеальний ($R_B = \infty$).

1.5. Приклад виконання завдання 1:

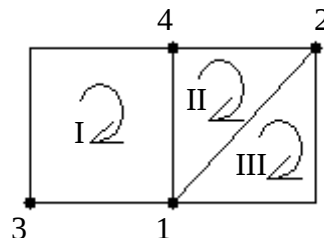
Вихідні дані:

Строчка даних 4, схема 7: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 6 \text{ Ом}$; $R_3 = 8 \text{ Ом}$; $R_4 = 7 \text{ Ом}$; $R_5 = 15 \text{ Ом}$; $R_6 = 5 \text{ Ом}$; $R_7 = 4 \text{ Ом}$; $E_1 = 30 \text{ В}$; $E_2 = 10 \text{ В}$; $E_3 = 15 \text{ В}$; $E_4 = 40 \text{ В}$; $E_5 = 20 \text{ В}$; $E_6 = 20 \text{ В}$; $E_7 = 10 \text{ В}$; $J_1 = 2 \text{ А}$; $J_2 = 8 \text{ А}$.

Для вихідної схеми вкажемо напрямки всіх струмів та визначимося з контурними струмами та вузлами.



Складемо граф для вихідної схеми:



Визначимося з кількістю рівнянь, які потрібно скласти для кожного з методів розв'язання.

Кількість віток	b	6
Кількість вузлів в системі	y	4
Кількість незалежних контурів	$k=(b-y+1)$	3
Кількість рівнянь за методом рівнянь станів	$N_{\text{МРС}}=b$	6
Кількість рівнянь за I законом Кірхгофа	$N_{\text{IЗ.К.}}=y-1$	3
Кількість рівнянь за II законом Кірхгофа	$N_{\text{IIЗ.К.}}=N_{\text{МРС}}-N_{\text{IЗ.К.}}$	3
Кількість рівнянь за методом контурних струмів	$N_{\text{МКС}}=k$	3
Кількість невідомих за методом вузлових потенціалів	$N_{\text{МУП}}=y-1 < b$	3

Перший закон Кірхгофа застосовується до вузлів і формулюється таким чином: алгебраїчна сума струмів у вузлі дорівнює нулю. $\sum_{k=1}^n I_k = 0$. Додатними записуються струми, що направлені від вузла, від'ємними – ті, що направлені до вузла. Слід зауважити, що потрібно враховувати струм джерела якщо воно з'єднано з вузлом.

Другий закон Кірхгофа застосовується до контурів електричного ланцюга та формулюється таким чином: у будь-якому контурі, алгебраїчна сума напруг на затисках віток, що входять до цього контуру дорівнює нулю. $\sum_{i=1}^n U_i = 0$, або $\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n R_i I_i$. Додатними записуються напруги та струми, напрямком яких співпадає з напрямком довільно вибраним напрямком обходу контуру.

1.

Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} -I_2 - I_4 - I_5 - I_6 + J_2 = 0 \\ I_3 + I_4 + I_5 - J_2 = 0 \\ I_1 + I_6 - J_1 = 0 \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_6 R_6 = E_1 + E_2 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 - E_3 \\ I_4 (R_4 + R_5) = E_4 - E_3 \end{cases}$$

2.

Запроваджуючи поняття контурних струмів, струми віток визначають як алгебраїчну суму оточуючих кожну задану вітку. Додатними записуються контурні струми, напрямком яких співпадає з напрямком струмів віток.

Визначимо струми у вітках через контурні струми:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} + J_1; \\ I_2 &= I_{11} - I_{22}; \\ I_3 &= -I_{22}; \\ I_4 &= I_{33} + J_2; \\ I_5 &= I_{22} - I_{33}; \\ I_6 &= -I_{11}. \end{aligned}$$

Запишемо систему рівнянь за методом контурних струмів у загальному вигляді:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + R_{13}I_{33} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} + R_{23}I_{33} = E_{22} \\ R_{31}I_{11} + R_{32}I_{22} + R_{33}I_{33} = E_{33} \end{cases}$$

В матричному вигляді, ця система має такий вигляд:

$$[R] \times [I] = [E], \text{ де } [R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}, [I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix}, [E] = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{bmatrix}.$$

Елементи головної діагоналі матриці $[R]$ – повні (власні) опори відповідних контурів. Повним опором контуру будемо називати суму опорів даного контуру. Елементи, що лежать поза головною діагоналлю ($R_{ij}, i \neq j$) – загальні опори для i -го та j -го контурів. Загальні опори записуємо зі знаком “+”, якщо контурні струми суміжних контурів орієнтовані згідно. Якщо

суміжні контури не мають загальних опорів, відповідний опір записуємо як нуль.

Слід зауважити, що якщо коло містить вітки з джерелом струму, то в цьому випадку ми вважаємо, що кожна вітка з джерелом струму входить до складу деякого контуру, який містить в собі інші вітки з джерелом ЕРС та опорів. При цьому, контурні струми даних контурів вважаються наперед відомими, та рівними струму джерела. Рівняння за методом контурних струмів в цьому випадку складають тільки для контурів з невідомими контурними струмами, але при запису слід враховувати усі контурні струми, як відомі, так і невідомі.

Складемо систему рівнянь за методом контурних струмів.

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (R_1 + R_2 + R_6) - I_{22} \cdot R_2 = E_1 + E_2 - I_{44} \cdot R_1 \\ -I_{11} \cdot R_2 + I_{22} \cdot (R_2 + R_3) = E_3 - E_2 \\ I_{33} \cdot (R_4 + R_5) = E_4 - E_3 - I_{55} \cdot (R_4 + R_5) \end{cases}$$

Підставимо в отриману систему рівнянь початкові дані.

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (10 + 6 + 5) - I_{22} \cdot 6 = 30 + 10 - 2 \cdot 10 \\ -I_{11} \cdot 6 + I_{22} \cdot (6 + 8) = 15 - 10 \\ I_{33} \cdot (7 + 15) = 40 - 15 - 8 \cdot (7 + 15) \end{cases} \quad \begin{cases} 21 \cdot I_{11} - 6 \cdot I_{22} = 20 \\ -6 \cdot I_{11} + 14 \cdot I_{22} = 5 \\ 22 \cdot I_{33} = -151 \end{cases}$$

У матричній формі, ця система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 21 & -6 & 0 \\ -6 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 5 \\ -151 \end{vmatrix}$$

Для розв'язку цієї системи застосуємо метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -6 & 0 \\ -6 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{vmatrix} = 5676$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -6 & 0 \\ 5 & 14 & 0 \\ 151 & 0 & 22 \end{vmatrix} = 6820$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 21 & 20 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ 0 & -151 & 22 \end{vmatrix} = 4950$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 21 & -6 & 20 \\ -6 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & -151 \end{vmatrix} = -38958$$

Знайдемо контурні струми.

$$I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6820}{5676} = 1,202 \text{ А};$$

$$I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4950}{5676} = 0,872 \text{ А};$$

$$I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-38958}{5676} = -6,864 \text{ А}.$$

Струми в вітках знаходимо через контурні струми.

$$I_1 = I_{11} + J_1 = 3,202 \text{ A};$$

$$I_2 = I_{11} - I_{22} = 0,33 \text{ A};$$

$$I_3 = -I_{22} = -0,872 \text{ A};$$

$$I_4 = I_{33} + J_2 = 1,136 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{22} - I_{33} = 7,736 \text{ A};$$

$$I_6 = -I_{11} = -1,202 \text{ A}.$$

Перевірити отримані результати можна шляхом підстановки значень до рівнянь, отриманих за II-м законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_6 R_6 = E_1 + E_2 \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = E_2 - E_3 \\ I_4 (R_4 - R_5) = E_4 - E_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3,202 \cdot 10 + 0,33 \cdot 6 - (-1,202 \cdot 5) = 30 + 10 \\ 0,33 \cdot 6 + (-0,872 \cdot 8) = 10 - 15 \\ 1,136 \cdot (7 - 15) = 40 - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40,01 - 40 = 0,01 \\ 4,996 - 5 = -0,004 \\ 24,992 - 25 = -0,008 \end{cases}$$

Як можна побачити з перевірки, загальна похибка в розв'язку за методом контурних струмів не перевищує 0,01. Ця похибка виникла як результат округлення при розрахунку системи рівнянь.

3.

У методі контурних струмів, ми вважали первісними невідомими контурні струми, а в методі вузових потенціалів, за невідомі беруться потенціали вузлів ланцюга. Струми у вітках можуть бути знайдені через потенціали вузлів завдяки закону Ома.

В матричному вигляді, система рівнянь має такий вигляд:

$[G] \times [\varphi] = [J]$, де $[G]$ – квадратна матриця вузових провідностей. Відомо, що провідність G – величина, обернена опору. $G = \frac{1}{R}$.

Елементи головної діагоналі матриці $[G]$ – узяті зі знаком “+” сума провідностей усіх віток, приєднаних до даного вузла (власна провідність). Елементи, що лежать поза головною діагоналлю (G_{ij} , $i \neq j$) – узяті зі знаком “-” сума провідностей віток, що з’єднують між собою вузли i та j (загальна провідність). Права частина кожного рівняння, J дорівнює алгебраїчній сумі добутку ЕРС джерела та провідності кожної вітки, що приєднана до даного вузла. Знак “+” – якщо ЕРС направлена до вузла, що розглядається, та “-”, якщо від вузла.

Для складання системи рівнянь за методом вузових потенціалів, один з вузлів необхідно заземлити.

Заземлимо вузол 1: $\varphi_1 = 0$. Тоді $\varphi_2 = -E_3 = -15 \text{ В}$.

Складемо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_4 \cdot \frac{1}{R_1} = -\frac{E_1}{R_1} + J_1 \\ -\varphi_3 \cdot \frac{1}{R_1} + \varphi_4 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{\varphi_2}{R_3} - J_1 \end{cases}$$

Підставляючи початкові дані, отримуємо:

$$\begin{cases} \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - \varphi_4 \cdot \frac{1}{10} = -\frac{30}{10} + 2 \\ -\varphi_3 \cdot \frac{1}{10} + \varphi_4 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) = \frac{30}{10} - \frac{10}{6} + \frac{-15}{8} - 2 \\ \begin{cases} 0,3 \cdot \varphi_3 - 0,1 \cdot \varphi_4 = -1 \\ -0,1 \cdot \varphi_3 + 0,39167 \cdot \varphi_4 = -2,54167 \end{cases} \end{cases}$$

В матричній формі ця система має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,39167 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -2,54167 \end{vmatrix}.$$

Розв'яжемо її за допомогою метода Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,39167 \end{vmatrix} = 0,1075$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -0,1 \\ -2,54167 & 0,39167 \end{vmatrix} = -0,64583$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,3 & -1 \\ -0,1 & -2,54167 \end{vmatrix} = -0,8625$$

Знайдемо потенціали вузлів 3 та 4:

$$\varphi_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-0,64583}{0,1075} = -6,008 \text{ В}; \quad \varphi_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-0,8625}{0,1075} = -8,023 \text{ В}.$$

Струми в гілках знаходимо згідно закону Ома.

$$I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 + E_1}{R_1} = \frac{-6,008 - (-8,023) + 30}{10} = 3,202 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = \frac{-8,023 - 0 + 10}{6} = 0,33 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_3} = \frac{-15 - (-8,023)}{8} = -0,872 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_4}{R_4 + R_5} = \frac{-15 - 0 + 40}{7 + 15} = 1,136 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_6} = \frac{-6,008 - 0}{5} = -1,202 \text{ А};$$

$$I_5 = J_2 - I_3 - I_4 = 8 - (-0,872) - 1,136 = 7,736 \text{ А, згідно з I-м законом Кірхгофа.}$$

Перевірку метода вузлових потенціалів виконують за I-м законом Кірхгофа.

$$\begin{cases} -I_2 - I_4 - I_5 - I_6 + J_2 = 0 \\ I_3 + I_4 + I_5 - J_2 = 0 \\ I_1 + I_6 - J_1 = 0 \\ \begin{cases} -0,33 - 1,136 - 7,736 + 1,202 + 8 = 0 \\ -0,872 + 1,136 + 7,736 - 8 = 0 \\ 3,202 - 1,202 - 2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Як видно з останньої системи рівнянь, отримані данні відповідають рівнянню за I-м законом Кірхгофа.

4.

Баланс потужності – наслідок застосування закону збереження енергії для електричних

ланцюгів.

Для розрахунку балансу потужності необхідно знати напругу на джерелах струму.

$$U_{J1} = J_1 R_7 + E_7 + I_1 R_1 - E_1 = 2 \cdot 4 + 10 + 3,202 \cdot 10 - 30 = 20,02 \text{ В.}$$

$$U_{J2} = I_4 \cdot (R_4 + R_5) - E_4 = 1,136 \cdot (7 + 15) - 40 = -15,008 \text{ В.}$$

Знайдемо потужність джерела та споживача енергії.

$$P_{дж} = \sum E_i \cdot I_i = E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_5 + E_4 \cdot I_4 - E_7 \cdot J_1 + U_{J1} \cdot J_1 + U_{J2} \cdot J_2 = 160,816 \text{ Вт;}$$

$$P_{cn} = \sum I_i^2 R_i = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot (R_4 + R_5) + I_6^2 \cdot R_6 + J_1 \cdot R_7 = 160,879 \text{ Вт.}$$

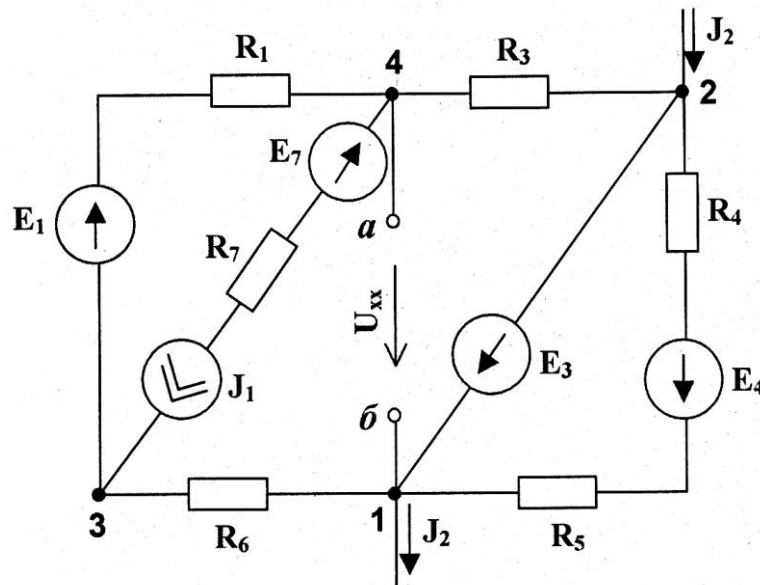
Як можна побачити, $P_{дж} \approx P_{cn}$, тобто баланс потужностей виконується.

5.

Знайдемо показники вольтметра як різницю потенціалів між точками його підключення. $V = \varphi_4 - \varphi_2 = -8,023 - (-15) = 6,977 \text{ В.}$

6.

Метод еквівалентного генератора використовується тоді, коли потрібно знайти струм в одній заданій вітці. Використаємо цей метод для розрахунку току I_2 . Умовно прибираємо з кола вітку, що містить R_2, E_2 .



Струм I_2 можна знайти за такою формулою: $I_2 = \frac{E_2 + E_{екв}}{R_2 + R_{екв}}$, де $E_{екв} = U_{xx}$ – напруга –

холостого ходу на затисках розімкненої вітки. $U_{xx} = \varphi_a - \varphi_b$.

Розв'яжемо отримане коло за допомогою метода вузлових потенціалів.

Заземлимо вузол 1: $\varphi_1 = 0$. Тоді $\varphi_2 = -E_3 = -15 \text{ В.}$

Складемо систему рівнянь.

$$\begin{cases} \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6} \right) - \varphi_4 \cdot \frac{1}{R_1} = -\frac{E_1}{R_1} + J_1 \\ -\varphi_3 \cdot \frac{1}{R_1} + \varphi_4 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{\varphi_2}{R_3} - J_1 \end{cases}$$

Підставляючи початкові дані, отримуємо:

$$\begin{cases} \varphi_3 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - \varphi_4 \cdot \frac{1}{10} = -\frac{30}{10} + 2 \\ -\varphi_3 \cdot \frac{1}{10} + \varphi_4 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{8} \right) = \frac{30}{10} + \frac{-15}{8} - 2 \\ 0,3 \cdot \varphi_3 - 0,1 \cdot \varphi_4 = -1 \\ -0,1 \cdot \varphi_3 + 0,225 \cdot \varphi_4 = -0,875 \end{cases}$$

В матричній формі ця система має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,225 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -0,875 \end{vmatrix}.$$

Розв'яжемо її за допомогою метода Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,225 \end{vmatrix} = 0,0575$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -0,1 \\ -0,875 & 0,225 \end{vmatrix} = -0,3125$$

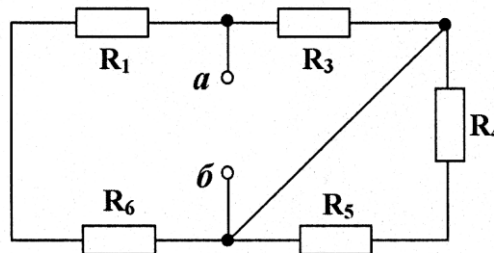
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,3 & -1 \\ -0,1 & -0,875 \end{vmatrix} = -0,3625$$

Знайдемо потенціали вузлів 3 та 4:

$$\varphi_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-0,3125}{0,0575} = -5,435 \text{ В}; \quad \varphi_4 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-0,3625}{0,0575} = -6,304 \text{ В}.$$

$$E_{екв} = U_{xx} = \varphi_4 - \varphi_1 = -6,304 \text{ В}.$$

Потрібно знайти $R_{екв}$. Для цього необхідно джерела ЕРС замкнути, вітки з джерелами струму розімкнути.



$$R_{екв} = \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_6)}{R_1 + R_3 + R_6} = \frac{8 \cdot (10 + 5)}{10 + 8 + 5} = 5,2174 \text{ Ом}.$$

Знаходимо значення току I_2 .

$$I_2 = \frac{E_2 + E_{екв}}{R_2 + R_{екв}} = \frac{10 + (-6,304)}{6 + 5,2174} = 0,329 \text{ А}.$$

7.

Для побудови потенційної діаграми, необхідно обійти обраний контур та визначити потенціал кожної точки.

Обходимо контур 1-2-3-4-1:

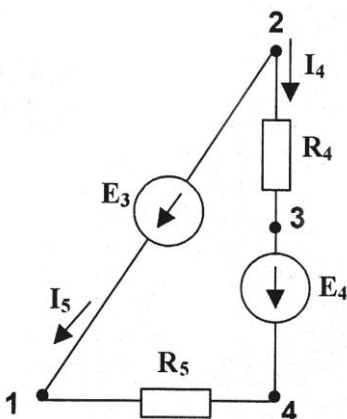
Заземлимо вузол 1: $\varphi_1 = 0$;

$$\varphi_2 = \varphi_1 - E_3 = 0 - 15 = -15 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - I_4 R_4 = -15 - 1,136 \cdot 7 = -22,952 \text{ В};$$

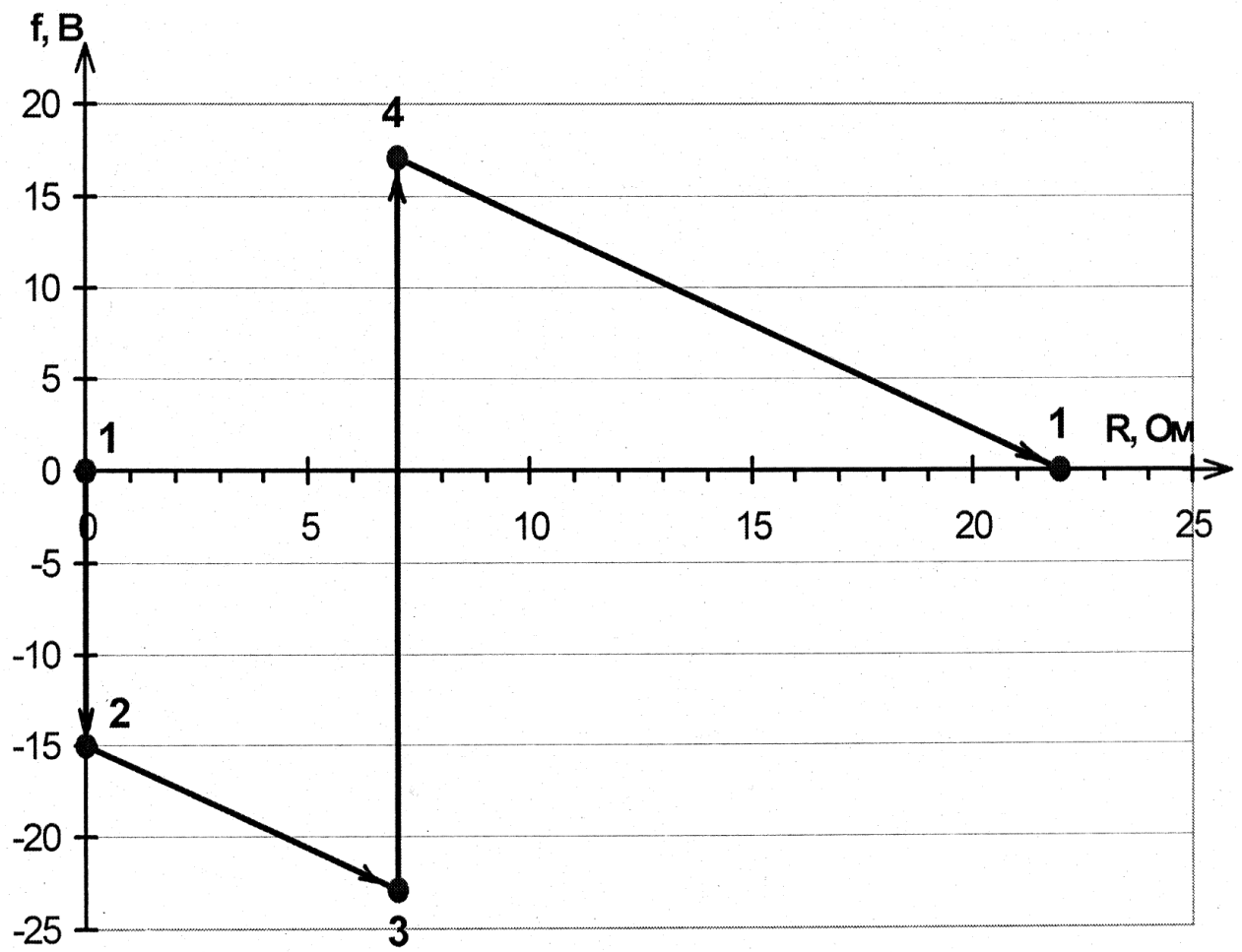
$$\varphi_4 = \varphi_3 + E_4 = -22,952 + 40 = 17,048 \text{ В}.$$

Перевіримо точність розрахунків:



$$\varphi_1 = \varphi_4 - I_4 R_5 = 17,048 - 1,136 \cdot 15 = 0,008 \text{ В}, \approx 0$$

За результатами розрахунків, побудуємо потенційну діаграму.



Завдання 2.

РОЗГАЛУЖЕНЕ КОЛО СИНУСОЇДАЛЬНОГО СТРУМУ

2.1. Мета й призначення роботи: закріплення знань за розділом «Методи розрахунку електричних кіл при постійних синусоїдальних струмах» шляхом розрахунку конкретного електричного кола із взаємною індуктивністю.

Завдання містить у собі застосування основних методів розрахунку електричних кіл – законів Кірхгофа, методів контурних струмів і вузлових потенціалів і методу еквівалентного генератора.

Передбачено побудову векторних і топографічних діаграм, складання балансу потужностей. Крім того, виробляється розрахунок параметрів пристрою, що компенсує, для підвищення коефіцієнта потужності навантаження. Завдання передбачає закріплення навичок виконання електротехнічних розрахунків на ЕОМ.

2.2. Зміст роботи:

2.2.1. Для заданої вихідної схеми (табл.2.1) скласти систему рівнянь за законами Кірхгофа й записати їх у матричній формі.

2.2.2. Для заданої вихідної схеми скласти систему рівнянь методом контурних струмів і записати їх у матричній формі.

2.2.3. Скласти таблицю даних для уведення в ЕОМ для розрахунку струмів вихідної схеми одним із методів (п.1 або 2 – на вибір).

2.2.4. Увести вихідні дані в ЕОМ і одержати комплексні значення струмів у галузях. Роздрукувати дані розрахунків на ЕОМ вклеїти в розрахунок. Записати вираження струмів в алгебраїчній і показовій формах, а також їхні миттєві значення.

2.2.5. Для одного з нижніх контурів розрахувати комплекси напруг на всіх елементах, у тому числі й напруги взаємної індукції. Побудувати векторну діаграму струмів і топографічну діаграму напруг для цього контуру.

2.2.6. За даними розрахунку побудувати на одному графіку криві миттєвих значень ЕРС e_2 і струму i_2 .

2.2.7. Обчислити показання ваттметра аналітично й по даним векторної діаграми струмів і топографічної діаграми напруг.

2.2.8. За результатами обчислень п.4 скласти баланс потужностей для вихідної схеми.

2.2.9. Вважаючи, що для заданої схеми індуктивний зв'язок між котушками відсутній, методом вузлових потенціалів знайти струми кола. Записати комплекси цих струмів в алгебраїчній і показовій формах.

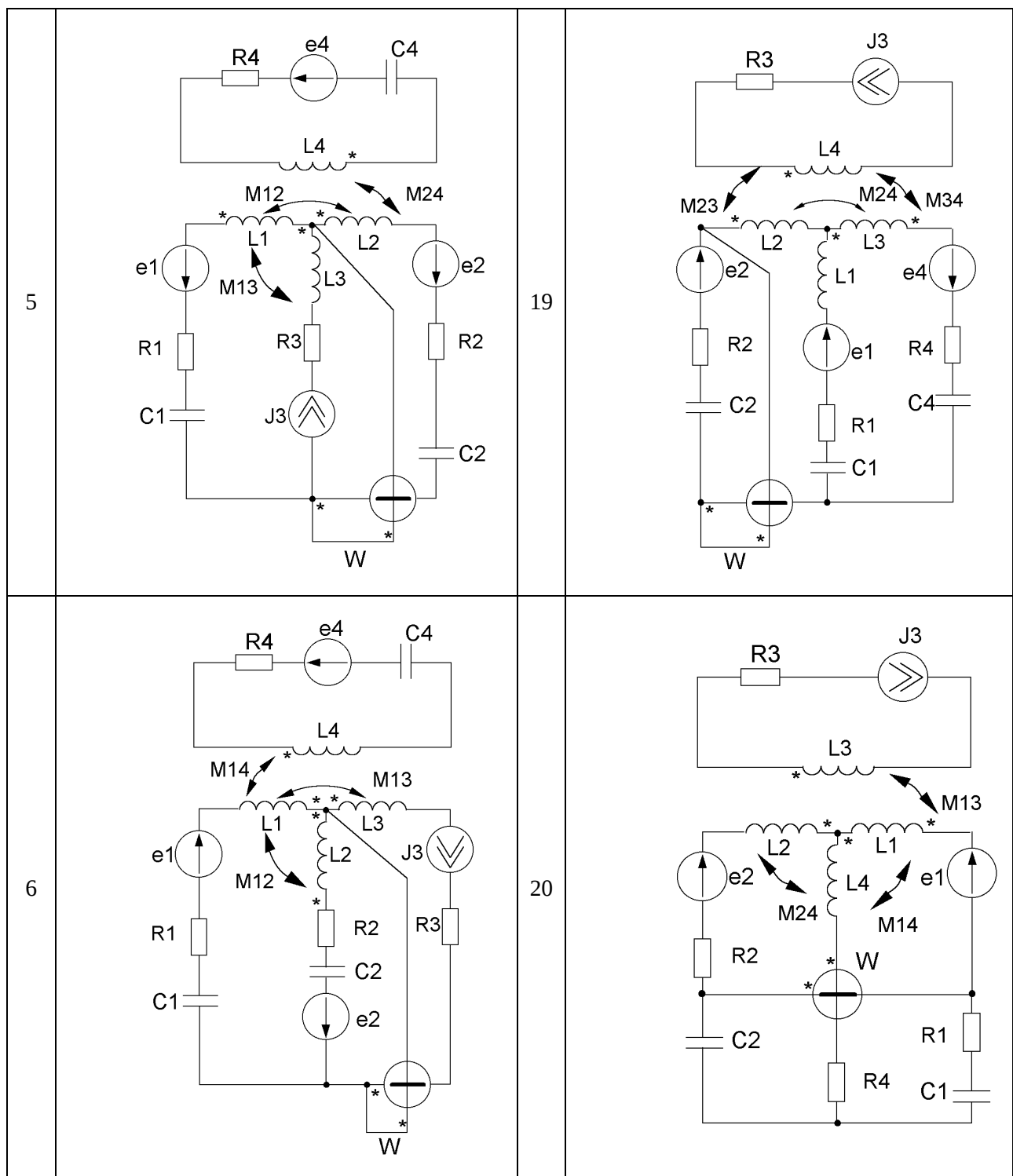
2.2.10. Приймаючи у якості навантаження R_2 , L_2 , знайти струм I_2 методом еквівалентного генератора, вважаючи, що індуктивний зв'язок між котушками відсутній.

2.2.11. Визначити, який реактивний елемент треба включити паралельно навантаженню, щоб коефіцієнт потужності навантаження дорівнював одиниці. Визначити, з яким $\cos \varphi$ буде працювати в цьому випадку джерело еквівалентної ЕРС.

Таблица 2.1.

n	Схема	n	Схема
1		15	
2		16	

3		17
4		18



7		21
8		22

9		23
10		24

11		25
12		26
25		
26		

13		27	
14		28	

2.3. Вихідні дані:

2.3.1. Номер схеми n вибирається за порядковим номером, під яким прізвище студента записане в груповому журналі.

2.3.2. Числові значення елементів схеми наведені в табл. 2.2, варіант завдання N вибирається відповідно до останньої цифри групи, для груп 241-244 – відповідно до суми цифр у номері групи.

2.3.3. Для всіх варіантів частота напруги мережі $f = 50$ Гц. ЕРС визначається за наступними формулами:

$$\square E_1 = \frac{100}{n}(n+N)e^{j^{15}\square(n+N)} B;$$

$$\square E_2 = \frac{80}{n}(n+N)e^{j^{8}\square(n+N)} B;$$

$$\square E_4 = \frac{120}{n}(n+N)e^{j^{12}\square(n+N)} B;$$

$$\square I_2 = 0,2n + j0,1N \text{ A};$$

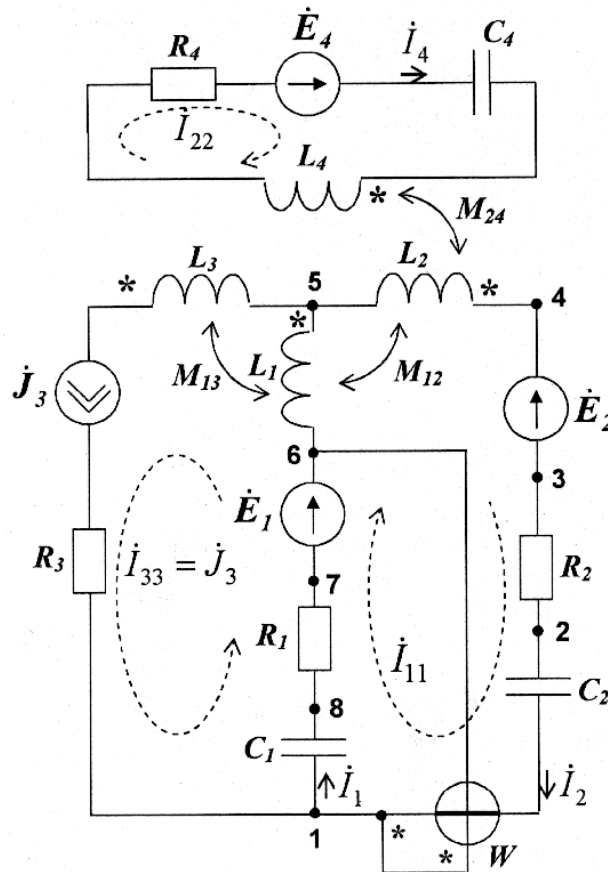
Таблиця 2.2.

Параметр	Числові значення для варіантів N										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$R_1, \text{ Ом}$	30	20	15	40	60	10	50	35	25	45	55
$L_1, \text{ Гн}$	0.10	0.20	0.15	0.12	0.16	0.18	0.13	0.10	0.14	0.16	0.19
$C_1, \text{ мкФ}$	100	120	150	200	250	130	180	110	170	140	130
$R_2, \text{ Ом}$	15	20	35	30	18	17	16	12	10	25	28
$L_2, \text{ Гн}$	0.20	0.30	0.15	0.25	0.28	0.15	0.23	0.28	0.17	0.18	0.22
$C_2, \text{ мкФ}$	200	300	350	250	280	320	330	270	220	350	300
$R_3, \text{ Ом}$	10	5	7	15	8	6	4	12	16	9	11
$L_3, \text{ Гн}$	0.05	0.10	0.12	0.15	0.08	0.06	0.11	0.07	0.13	0.09	0.10
$R_4, \text{ Ом}$	50	25	30	20	33	40	45	38	27	35	42
$L_4, \text{ Гн}$	0.20	0.15	0.25	0.10	0.17	0.19	0.22	0.11	0.18	0.13	0.21
$C_4, \text{ мкФ}$	220	200	150	250	180	150	170	190	230	240	190
$M_{12}, \text{ Гн}$	0.09	0.18	0.13	0.10	0.14	0.12	0.10	0.08	0.13	0.14	0.18
$M_{23}, \text{ Гн}$	0.03	0.08	0.11	0.13	0.06	0.05	0.10	0.05	0.12	0.08	0.07
$M_{34}, \text{ Гн}$	0.03	0.09	0.11	0.08	0.07	0.05	0.10	0.06	0.12	0.07	0.09
$M_{14}, \text{ Гн}$	0.08	0.13	0.14	0.09	0.12	0.15	0.11	0.09	0.12	0.12	0.17
$M_{13}, \text{ Гн}$	0.04	0.08	0.11	0.10	0.06	0.04	0.09	0.06	0.11	0.06	0.08
$M_{24}, \text{ Гн}$	0.16	0.13	0.12	0.07	0.16	0.13	0.17	0.10	0.14	0.11	0.17

2.4. Приклад виконання завдання 2:

Вихідні дані:

Строчка даних N=4, схема n=10: $R_1 = 40 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$; $R_3 = 15 \text{ Ом}$; $R_4 = 20 \text{ Ом}$; $L_1 = 0,12 \text{ Гн}$; $L_2 = 0,25 \text{ Гн}$; $L_3 = 0,15 \text{ Гн}$; $L_4 = 0,10 \text{ Гн}$; $C_1 = 200 \text{ мкФ}$; $C_2 = 250 \text{ мкФ}$; $M_{12} = 0,10 \text{ Гн}$; $M_{13} = 0,10 \text{ Гн}$; $M_{24} = 20 \text{ В}$; $f = 10 \text{ В}$;



Інші вихідні дані обчислюємо відповідно до наступних виразів:

$$\dot{E}_1 = \frac{100}{n}(n+N) \cdot e^{j \cdot 5^\circ(n+N)} = \frac{100}{10}(10+4) \cdot e^{j \cdot 5^\circ(10+4)} = 140e^{j70^\circ} = 47,883 + j131,557 \text{ В};$$

$$\dot{E}_2 = \frac{80}{n}(n+N) \cdot e^{j \cdot 8^\circ(n+N)} = \frac{80}{10}(10+4) \cdot e^{j \cdot 8^\circ(10+4)} = 112e^{j112^\circ} = -41,956 + j103,845 \text{ В};$$

$$\dot{E}_3 = \frac{120}{n}(n+N) \cdot e^{j \cdot 12^\circ(n+N)} = \frac{120}{10}(10+4) \cdot e^{j \cdot 12^\circ(10+4)} = 168e^{j168^\circ} = -164,329 + j34,929 \text{ В};$$

$$\dot{J}_3 = 0,2 \cdot n + j0,1 \cdot N = 0,2 \cdot 10 + j0,1 \cdot 4 = 2 + j0,4 = 2,0396e^{j11,31^\circ} \text{ А}.$$

1.

Розрахунок розгалуженого кола при наявності взаємної індуктивності можна вести, складаючи рівняння по першому й другому законам Кірхгофа. При цьому необхідно враховувати, що струм у будь-якій гілці залежить не тільки від ЕРС джерела, яке знаходиться в ній і від потенціалів тих вузлів, до яких вона приєднана, але також і від струмів інших гілок, які наводять ЕРС взаємної індукції.

Перший закон Кірхгофа $\sum \dot{I}_i = 0$ встановлює, що алгебраїчна сума струмів гілок, що сходяться в один вузол, дорівнює нулю. Він застосовується до незалежних вузлів, тобто таких, які відрізняються хоча б однією новою гілкою.

При складанні рівнянь за другим законом Кірхгофа ЕРС взаємної індукції звичайно враховуються як відповідні напруги. Знак комплексної напруги $\pm jX_{Mks} \dot{I}_s$ на елементі k

визначається на підставі зіставлення напрямку обходу елемента k і позитивного напрямку струму в елементі s . Якщо ці напрямки щодо однойменних затисків однакові, то напруга дорівнюватиме $jX_{Mks}\dot{I}_s$. У протилежному випадку напруга дорівнюватиме $-jX_{Mks}\dot{I}_s$.

Отже, другий закон Кірхгофа $\sum \dot{E}_i = \sum Z_i \dot{I}_i \pm jX_{Mks}\dot{I}_s$.

Визначаємо кількість рівнянь за законами Кірхгофа.

Число гілок з невідомими струмами $\Gamma = 3$,

отже, число рівнянь $n = \Gamma = 3$.

Кількість вузлів у схемі $B_3 = 2$.

Тоді: кількість рівнянь за I законом Кірхгофа $n = B_3 - 1 = 2 - 1 = 1$;

кількість рівнянь за II законом Кірхгофа $n_{II} = n - n_I = 3 - 1 = 2$.

Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{J}_3 = 0 \\ \dot{I}_1[R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})] + \dot{I}_2[R_2 + j(X_{L2} - X_{C2})] + jX_{M12}\dot{I}_1 + jX_{M12}\dot{I}_2 + jX_{M13}\dot{J}_3 - \\ - jX_{M24}\dot{I}_4 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2 \\ \dot{I}_4[R_4 + j(X_{L4} - X_{C4})] - jX_{M24}\dot{I}_2 = \dot{E}_4 \end{cases}$$

Представимо цю систему рівнянь у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 + j(X_{L1} - X_{C1} + X_{M12}) & R_2 + j(X_{L2} - X_{C2} + X_{M12}) & -jX_{M24} \\ 0 & -jX_{M24} & R_4 + j(X_{L4} - X_{C4}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_3 \\ \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - jX_{M13}\dot{J}_3 \\ \dot{E}_4 \end{bmatrix}$$

2.

Для розрахунку режиму складного електричного кола можна обмежитись спільним розв'язанням лише $k = (\Gamma - B_3 + 1) = 3 - 2 + 1 = 2$ незалежних рівнянь, складених на підставі другого закону Кірхгофа, скориставшись методом контурних струмів.

При цьому перший закон Кірхгофа, звичайно, завжди задовольняється.

Складемо систему рівнянь за методом контурних струмів.

Кількість рівнянь у системі рівняється числу незалежних контурів і дорівнює 2.

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}[R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2})] + \dot{J}_3[R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})] + j2X_{M12}\dot{I}_{11} - \\ - jX_{M24}\dot{I}_{22} + jX_{M12}\dot{J}_3 + jX_{M13}\dot{J}_3 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \\ - jX_{M24}\dot{I}_{11} + \dot{I}_{22}[R_4 + j(X_{L4} - X_{C4})] = \dot{E}_4 \end{cases}$$

Представимо цю систему рівнянь у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + j(X_{L1} + X_{L2} - X_{C1} - X_{C2} + 2X_{M12}) & -jX_{M24} \\ -jX_{M24} & R_4 + j(X_{L4} - X_{C4}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - \dot{J}_3[R_1 + j(X_{L1} - X_{C1} + X_{M12} + X_{M13})] \\ \dot{E}_4 \end{bmatrix}$$

3.

Визначаємо необхідні числові значення реактивних опорів.

$$X_L = \omega L; \quad X_C = \frac{1}{\omega C}; \quad X_M = \omega M, \quad \text{де } \omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ с}^{-1} - \text{кутова частота.}$$

Підставимо вихідні дані. Отримуємо:

$$\begin{aligned} X_{L1} &= 37,68 \text{ Ом}; & X_{C1} &= 15,924 \text{ Ом}; & X_{L1} - X_{C1} &= 21,756 \text{ Ом}; & X_{M12} &= 31,4 \text{ Ом}; \\ X_{L2} &= 78,5 \text{ Ом}; & X_{C2} &= 12,739 \text{ Ом}; & X_{L2} - X_{C2} &= 65,761 \text{ Ом}; & X_{M13} &= 31,4 \text{ Ом}; \\ X_{L3} &= 47,1 \text{ Ом}; & & & & & X_{M24} &= 21,98 \text{ Ом}; \\ X_{L4} &= 31,4 \text{ Ом}; & X_{C4} &= 12,739 \text{ Ом}; & X_{L4} - X_{C4} &= 18,661 \text{ Ом}; & & \end{aligned}$$

Підставляючи числові значення, отримуємо матрицю для розрахунку значень комплексних струмів за допомогою ПК.

Виконаємо розрахунок як системи рівнянь, складеної за законами Кірхгофа, так і системи рівнянь, складеної за методом контурних струмів.

Розрахунок виконаний на ПК за допомогою програми *MathCAD 2001 Professional*.

Розрахунок системи рівнянь, складеної за законами Кірхгофа:

Представимо систему рівнянь у такому вигляді:

$$[A] \times [I] = [B], \text{ де:}$$

$[A]$ – матриця коефіцієнтів системи

$[B]$ – матриця вільних членів

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_4 \end{bmatrix}$$

Підставляючи числові значення, отримуємо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 40 + 53.156j & 30 + 97.161j & -21.98j \\ 0 & -21.98j & 20 + 18.661j \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 + 0.4j \\ 102.399 - 35.088j \\ -164.329 + 34.929j \end{pmatrix}$$

$$\text{Розв'язок будемо шукати у вигляді } [I] = [A]^{-1} \times [B]$$

Розрахунок виконуємо за допомогою засобів САПР *MathCAD 2001 Professional*

$$I := A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_4 \end{pmatrix} := I \quad I = \begin{pmatrix} 0.537 + 0.007j \\ -1.463 - 0.393j \\ -4.092 + 3.957j \end{pmatrix}$$

Отримуємо значення струмів:

– у комплексній формі:

$$I_1 = 0.537 + 0.007j \quad \text{А}$$

$$I_2 = -1.463 - 0.393j \quad \text{А}$$

$$I_4 = -4.092 + 3.957j \quad \text{А}$$

– у показовій формі:

$ I_1 = 0.537$	A	$\arg(I_1) = 0.747$	град
$ I_2 = 1.515$	A	$\arg(I_2) = -164.964$	град
$ I_4 = 5.692$	A	$\arg(I_4) = 135.961$	град

Розрахунок системи рівнянь, складеної за допомогою методу контурних струмів:

Представимо систему рівнянь у такому вигляді:

$$[C] \times [I] = [D], \text{ де:}$$

$[C]$ – матриця коефіцієнтів системи

$[D]$ – матриця вільних членів

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{bmatrix} \text{ – матриця невідомих контурних струмів}$$

Підставляючи числові значення, отримуємо:

$$C = \begin{pmatrix} 70 + j150,317 & -j21,98 \\ -j21,98 & 20 + j18,661 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 43,661 - j157,4 \\ -164,329 + j34,929 \end{pmatrix}$$

$$\text{Розв'язок будемо шукати у вигляді} \quad [I] = [C]^{-1} \times [D]$$

Розрахунок виконуємо за допомогою засобів САПР *MathCAD 2001 Professional*

$$\begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot D \quad \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,463 - j0,393 \\ -4,092 + j3,957 \end{pmatrix}$$

Струми у гілках знаходимо через контурні струми:

$$I_1 = I_{11} + J_3 \quad I_1 = 0,537 + j0,007 \quad A$$

$$I_2 = I_{11} \quad I_2 = -1,463 - j0,393 \quad A$$

$$I_4 = I_{22} \quad I_4 = -4,092 + j3,957 \quad A$$

4.

Таким чином, ми отримали наступні значення комплексних струмів у гілках.

$$\dot{I}_1 = 0,537 + j0,007 = 0,537e^{j0,747^\circ} \quad A$$

$$\dot{I}_2 = -1,463 - j0,393 = 1,515e^{j164,964^\circ} \quad A$$

$$\dot{I}_4 = -4,092 + j3,957 = 5,692e^{j135,961^\circ} \quad A$$

Запишемо миттєві значення:

$$i_1(t) = 0,537\sqrt{2} \sin(314t + 0,747^\circ) A$$

$$i_2(t) = 1,515\sqrt{2} \sin(314t - 164,964^\circ) A$$

$$i_4(t) = 5,692\sqrt{2} \sin(314t + 135,961^\circ) A$$

5.

Приймемо $\phi_1 = 0$. Тоді послідовно обходимо зовнішній контур і розраховуємо потенціал кожної точки.

$$\dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_1 - jX_{C2}\dot{I}_2$$

$$\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_2 + R_2\dot{I}_2$$

$$\dot{\phi}_4 = \dot{\phi}_3 - \dot{E}_2$$

$$\dot{\phi}_5 = \dot{\phi}_4 + jX_{L2}\dot{I}_2 + jX_{M12}\dot{I}_1 - jX_{M24}\dot{I}_4$$

$$\dot{\phi}_6 = \dot{\phi}_5 + jX_{L1}\dot{I}_1 + jX_{M12}\dot{I}_2 - jX_{M13}\dot{I}_3$$

$$\dot{\phi}_7 = \dot{\phi}_6 - \dot{E}_1$$

$$\dot{\phi}_8 = \dot{\phi}_7 + R_1\dot{I}_1$$

Виконуємо розрахунок за допомогою *MathCAD 2001 Professional*

$$f_1 := 0$$

$$f_1 = 0$$

$$f_2 := f_1 - j \cdot X_{C2} \cdot I_2$$

$$f_2 = -5.005 + 18.631j \quad B$$

$$f_3 := f_2 + I_2 \cdot R_2$$

$$f_3 = -48.881 + 6.845j \quad B$$

$$f_4 := f_3 + E_2$$

$$f_4 = -90.837 + 110.69j \quad B$$

$$f_5 := f_4 + j \cdot X_{L2} \cdot I_2 + j \cdot X_{M12} \cdot I_1 - j \cdot X_{M24} \cdot I_4$$

$$f_5 = 26.763 + 102.703j \quad B$$

$$f_6 := f_5 + j \cdot X_{L1} \cdot I_1 + j \cdot X_{M12} \cdot I_2 - j \cdot X_{M13} \cdot I_3$$

$$f_6 = 26.272 + 139.831j \quad B$$

$$f_7 := f_6 - E_1$$

$$f_7 = -21.611 + 8.274j \quad B$$

$$f_8 := f_7 + I_1 \cdot R_1$$

$$f_8 = -0.113 + 8.558j \quad B$$

Перевіримо правильність розрахунку:

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_8 - jX_{C1}\dot{I}_1;$$

$$f_{ls} := f_8 - j \cdot X_{C1} \cdot I_1$$

$$f_{ls} = 0$$

За результатами розрахунку в масштабі побудуємо векторну діаграму (наведено в кінці)

6.

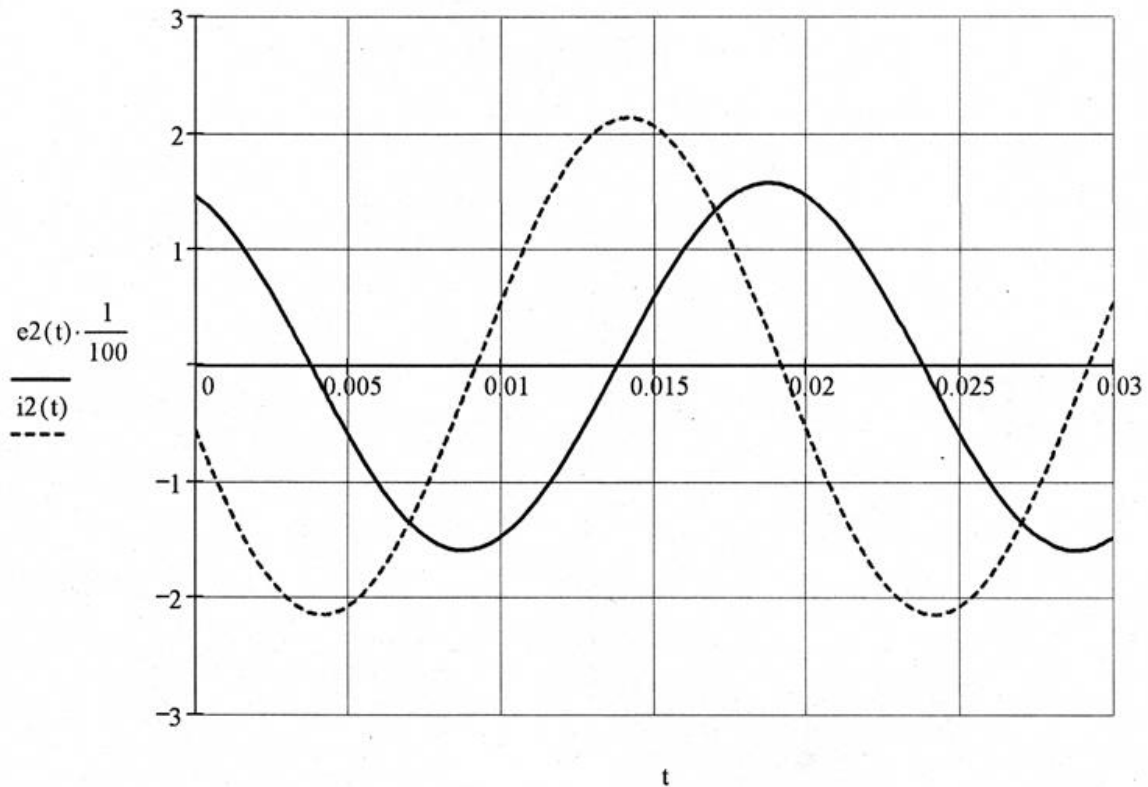
Запишемо миттєві значення ЕРС e_2 і струму i_2 :

$$e_2(t) = 112\sqrt{2} \sin(314t + 112^\circ) \text{ В};$$

$$i_2(t) = 1,515\sqrt{2} \sin(314t + 164,964^\circ) \text{ А};$$

Графіки $e_2(t)$ і $i_2(t)$ наведені нижче.

t:=0,0.0001...0.030



7.

Знаходимо показання ватметра

$$P_w = \operatorname{Re}[\bar{I}_2 \cdot (\dot{\phi}_6 - \dot{\phi}_1)].$$

$$P_w := \operatorname{Re}[\bar{I}_2 \cdot (\dot{\phi}_6 - \dot{\phi}_1)], \quad P_w = -93,36 \text{ Вт}$$

8.

Складемо баланс потужностей

Знаходимо напругу на джерелі струму:

$$\dot{U}_{J3} = \dot{J}_3 [R_3 + jX_{L3}] + \dot{I}_1 [R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})] - \dot{E}_1 + jX_{M12} \dot{I}_2 + jX_{M13} (\dot{I}_1 + \dot{J}_3)$$

$$U_{J3} := J_3 \cdot (R_3 + j \cdot XL3) + I_1 \cdot [R_1 + j \cdot (XL1 - XC1)] - E_1 + j \cdot XM12 \cdot I_2 + j \cdot XM13 \cdot (I_1 + J_3)$$

$$U_{J3} = -15,827 + 14,373j \text{ В}$$

$$|U_{J3}| = 21,379 \text{ В} \quad \arg(U_{J3}) \cdot k = 137,757 \text{ град}$$

Тепер знаходимо потужність джерела і споживача енергії:

Потужність джерела:

$$\tilde{S}_{дж} = \sum_{i=1}^n \dot{E}_i \bar{I}_i = \dot{E}_1 \bar{I}_1 - \dot{E}_2 \bar{I}_2 + \dot{E}_4 \bar{I}_4 + \dot{U}_{J3} \bar{J}_3;$$

$$S_{дж} := E_1 \cdot \bar{I}_1 - E_2 \cdot \bar{I}_2 + E_4 \cdot \bar{I}_4 + \dot{U}_{J3} \cdot \bar{J}_3;$$

$$S_{дж} = 790,904 + 781,176j \text{ В} \cdot \text{А}$$

Потужність споживача:

$$\tilde{S}_{cn} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i I_i^2 + j \sum_{i=1}^n 2X_{Mmn} I_m I_n \cos(\psi_{i_m} - \psi_{i_n});$$

$$\tilde{S}_{cn} = I_1^2 [R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})] + I_2^2 [R_1 + j(X_{L2} - X_{C2})] + J_3^2 [R_3 + jX_{L3}] + I_4^2 [R_4 + j(X_{L4} - X_{C4})] +$$

$$+ j2 \cdot [X_{M12} I_1 I_2 \cos(\psi_{i_1} - \psi_{i_2}) + X_{M13} I_1 J_3 \cos(\psi_{i_1} - \psi_{j_3}) - X_{M24} I_2 I_4 \cos(\psi_{i_2} - \psi_{i_4})].$$

$$P_{сп} := (|I_1|)^2 \cdot R_1 + (|I_2|)^2 \cdot R_2 + (|J_3|)^2 \cdot R_3 + (|I_4|)^2 \cdot R_4;$$

$$P_{\Sigma} = 790,904 \text{ Вт.}$$

$$Q_{\Sigma}' := (|I_1|)^2 \cdot (X_{L1} - X_{C1}) + (|I_2|)^2 \cdot (X_{L2} - X_{C2}) + (|J_3|)^2 \cdot X_{L3} + (|I_4|)^2 \cdot (X_{L4} - X_{C4});$$

$$Q_{\Sigma}' = 957,79 \text{ Вар.}$$

$$Q_1 := X_{M12} \cdot |I_1| \cdot |I_2| \cdot \cos(\arg(I_1) - \arg(I_2)) \quad Q_1 = -24.77 \text{ Вар}$$

$$Q_2 := X_{M13} \cdot |I_1| \cdot |J_3| \cdot \cos(\arg(I_1) - \arg(J_3)) \quad Q_2 = -33.841 \text{ Вар}$$

$$Q_3 := X_{M24} \cdot |I_2| \cdot |I_4| \cdot \cos(\arg(I_2) - \arg(I_4)) \quad Q_3 = -97.379 \text{ Вар}$$

$$Q_{\Sigma}'' := Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q_{\Sigma} := Q_{\Sigma}' + 2Q_{\Sigma}'' \quad Q_{\Sigma} = 781.176 \text{ Вар}$$

$$S_{\Sigma} := P_{\Sigma} + j \cdot Q_{\Sigma}$$

$$S_{\Sigma} = 790.904 + 781.176j \quad \text{В} \cdot \text{А}$$

$$S_{\text{дж}} = 790.904 + 781.176j \quad \text{В} \cdot \text{А}$$

$$S_{\Sigma} = 790.904 + 781.176j \quad \text{В} \cdot \text{А}$$

Як бачимо, $\tilde{S}_{\text{дж}} = \tilde{S}_{\Sigma}$, робимо висновок, що баланс потужностей виконується.

9.

Напруга між верхнім та нижнім вузлами схеми дорівнює:

$$\dot{U} = \frac{\frac{\dot{E}_1}{R_1 + j \cdot (X_{L1} - X_{C1})} + \frac{\dot{E}_2}{R_2 + j \cdot (X_{L2} - X_{C2})} - j_3}{\frac{1}{R_1 + j \cdot (X_{L1} - X_{C1})} + \frac{1}{R_2 + j \cdot (X_{L2} - X_{C2})}}$$

Виконуємо розрахунок за допомогою *MathCAD 2001 Professional*

$$U := \frac{\frac{E_1}{R_1 + j \cdot (X_{L1} - X_{C1})} + \frac{E_2}{R_2 + j \cdot (X_{L2} - X_{C2})} - J_3}{\frac{1}{R_1 + j \cdot (X_{L1} - X_{C1})} + \frac{1}{R_2 + j \cdot (X_{L2} - X_{C2})}} \quad U = -25.352 + 86.875j \text{ В}$$

Токи в гілках визначимо згідно закону Ома:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}}{R_1 + j \cdot (X_{L1} - X_{C1})}; \dot{I}_2 = \frac{-\dot{E}_2 + \dot{U}}{R_2 + j \cdot (X_{L2} - X_{C2})}; \dot{I}_4 = \frac{\dot{E}_4}{R_4 + j \cdot (X_{L4} - X_{C4})}$$

$$I_1' := \frac{E_1 - U}{R_1 + j \cdot (X_{L1} - X_{C1})}$$

$$I_2' := \frac{-E_2 + U}{R_2 + j \cdot (X_{L2} - X_{C2})}$$

$$I_4' := \frac{E_4}{R_4 + j \cdot (X_{L4} - X_{C4})}$$

Отримуємо значення струмів:

– у комплексній формі:

$$I_1' = 1.882 + 0.094j \quad \text{A}$$

$$I_2' = -0.118 - 0.306j \quad \text{A}$$

$$I_4' = -3.521 + 5.032j \quad \text{A}$$

– у показовій формі:

$$|I_1'| = 1.884 \quad \text{A}$$

$$\text{agr}(I_1') = 2.859 \quad \text{град}$$

$$|I_2'| = 0.328 \quad \text{A}$$

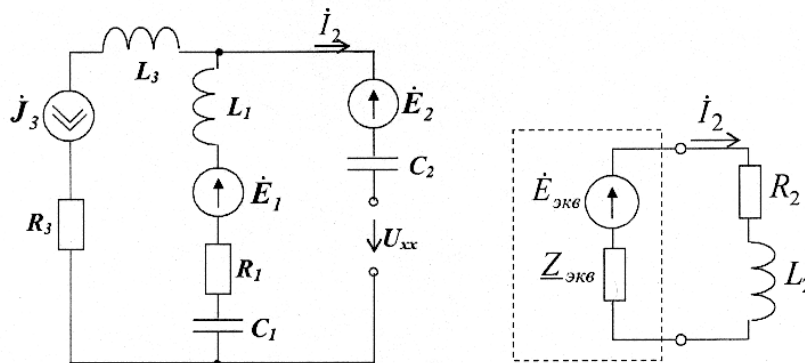
$$\text{agr}(I_2') = -111.088 \quad \text{град}$$

$$|I_4'| = 6.142 \quad \text{A}$$

$$\text{agr}(I_4') = 124.981 \quad \text{град}$$

10.

Вважаючи, що індуктивний зв'язок між котушками відсутній, знаходимо струм $\dot{I}_2$ за допомогою метода еквівалентного генератора.



Представимо частину схеми, зовнішню стосовно навантаження у вигляді двополюсника.

Струм $\dot{I}_2$ знаходимо відповідно закону Ома: $\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_{екв}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{екв}}$, де:

$\dot{E}_{екв} = U_{xx}$ – напруга холостого ходу на затискачах розімкнутої гілки.

$\underline{Z}_н = R_2 + jX_{L2} = 30 + j78,5 \text{ Ом}$ – опір навантаження.

$\underline{Z}_{екв} = R_1 + j(X_{L1} - X_{C1} - X_{C2}) = 40 + j(37,68 - 15,924 - 12,739) = 40 + j9,017 \text{ Ом}$ –

еквівалентний опір.

Знаходимо напругу холостого ходу:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{xx} &= \frac{\dot{E}_1}{R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})} - \dot{J}_3 - \dot{E}_2 = \dot{E}_1 - \dot{J}_3 \cdot [R_1 + j(X_{L1} - X_{C1})] - \dot{E}_2 = \\ &= 47,883 + j131,557 - (2 + j0,4) \cdot (40 + j21,756) + 41,956 - j103,845 = \\ &= 18,541 - j31,8 \text{ В.} \end{aligned}$$

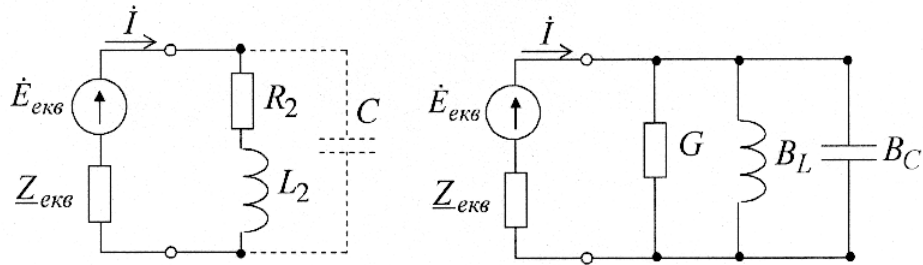
$$\dot{E}_{екв} = \dot{U}_{xx} = 18,541 - j31,8 \text{ В.}$$

Тоді знаходимо струм $\dot{I}_2$:

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \frac{\dot{E}_{екв}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{екв}} = \frac{18,541 - j31,8}{30 + j78,5 + 40 + j9,017} = \frac{18,541 - j31,8}{70 + j87,517} = \frac{36,8104e^{-j59,756^\circ}}{112,0679e^{-j51,346^\circ}} = 0,328e^{-j111,102^\circ} = \\ &= -0,118 - j0,306 \text{ A} \end{aligned}$$

11.

Замінімо послідовну сполуку елементів навантаження на паралельну.



$$G = \frac{R_2}{R_2^2 + X_{L2}^2} = \frac{30}{30^2 + 78,5^2} = 0,00424794 \text{ См} - \text{активна провідність};$$

$$B_L = \frac{X_{L2}}{R_2^2 + X_{L2}^2} = \frac{78,5}{30^2 + 78,5^2} = 0,01111544 \text{ См} - \text{реактивна провідність}.$$

Щоб $\cos \varphi$ дорівнював одиниці, необхідне дотримання умови $B_L = B_C$.

$B_C = \omega C$, визначимо величину шуканої ємності:

$$C = \frac{B_C}{\omega} = \frac{B_L}{\omega} = \frac{0,01111544}{314} = 3,5399 \cdot 10^{-5} \text{ Ф} \approx 35,4 \text{ мкФ}.$$

Визначимо $\cos \varphi_{\text{екв}}$.

$$\cos \varphi_{\text{екв}} = \cos(\psi_{\dot{E}_{\text{екв}}} - \psi_i) = \cos(\psi_{\dot{E}_{\text{екв}}/i}) = \cos(\psi_{Z^*}).$$

$$\underline{Z}^* = \underline{Z}_{\text{екв}} + \frac{1}{G - j(B_L - B_C)} = \underline{Z}_{\text{екв}} + \frac{1}{G} \quad (\text{тому що } B_L = B_C, B_L - B_C = 0).$$

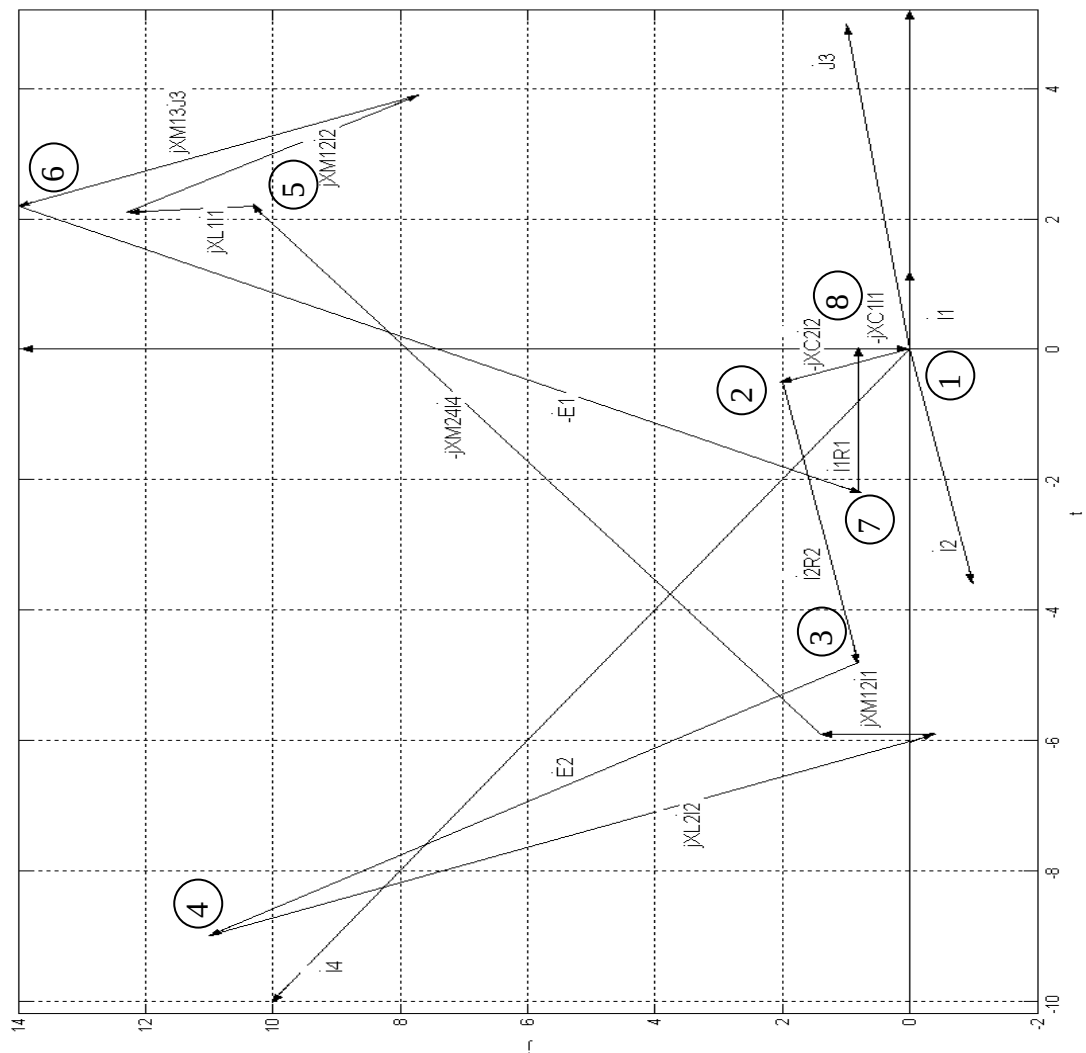
Тоді визначаємо:

$$\underline{Z}^* = 40 + j9,017 + \frac{30^2 + 78,5^2}{30} = 275,408 + j9,017 \text{ Ом}.$$

$$\psi_{Z^*} = \arctg \frac{9,017}{275,408} = 1,875^\circ = \varphi_{\text{екв}};$$

$$\cos \varphi_{\text{екв}} = \cos(1,875^\circ) = 0,9995.$$

Векторна діаграма, $M_0=1 \text{ В/мм}^2$, $M_1=0,04 \text{ А/мм}^2$



ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ

1. Визначте поняття “електричне коло”, “вузол”, “усувний вузол”, “вітка”, “контур”, “джерело ЕРС” та “джерело струму”.
2. Визначте поняття “граф електричного кола”, “дерево графа”, “зв’язок графа”, “незалежний контур графа”, “двополюсник” та “чотириполюсник”.
3. Зобразьте ВАХ ідеальних джерел ЕРС та струму, ВАХ реального джерела. Покажіть схеми заміщення реального джерела та наведіть аналітичний вираз його зовнішньої ВАХ.
4. Сформулюйте закон Ома для ділянки електричного кола (наведіть формулювання для різних видів ділянки).
5. Запишіть визначення та аналітичні вирази першого і другого законів Кірхгофа. Для кожного з законів наведіть по два формулювання. Запишіть в символічному вигляді, скільки рівнянь для даного кола слід скласти по першому і скільки по другому закону Кірхгофа.
6. Чим треба керуватися при виборі контурів, для яких слід скласти рівняння по другому закону Кірхгофа? Чому в жоден з цих контурів не повинно входити джерело струму?
7. Охарактеризуйте порядок розрахунку струмів розгалуженого кола за методом рівнянь стану.
8. Поясніть порядок побудови потенціальної діаграми. Чим відрізняється напруга від падіння напруги?
9. Охарактеризуйте сутність, основні положення та особливості методу контурних струмів.
10. Охарактеризуйте сутність, основні положення та особливості методу вузлових потенціалів.
11. За якої умови число рівнянь, складених за методом вузлових потенціалів (МВП), менше, ніж за методом контурних струмів? Покажіть, що метод двох вузлів є окремим випадком МВП.
12. Сформулюйте теорему компенсації.
13. Сформулюйте принцип і метод накладення.
14. Запишіть правила взаємного перетворення з’єднань "зірка" та "трикутник". Наведіть приклади, коли таке перетворення є корисним.
15. Сформулюйте основні правила перетворень активних ділянок кола (перенесення джерел ЕРС та струму, заміна паралельних віток еквівалентною).
16. Охарактеризуйте метод еквівалентних перетворень. Сформулюйте правила еквівалентних перетворень ділянок кола.
17. Сформулюйте теорему Тевеніна-Гельмгольца.
18. Дайте визначення активного двополюсника. Зобразьте дві його схеми заміщення, знайдіть їх параметри.
19. Охарактеризуйте метод еквівалентного генератора та перелічіть його основні етапи.
20. Сформулюйте правила складання матриць контурних опорів та контурних ЕРС.
21. Сформулюйте правила складання матриць вузлових провідностей та вузлових струмів.
22. Запишіть умову передачі максимальної потужності від реального джерела (активного двополюсника) в навантаження. Який при цьому ККД?
23. Дайте визначення таким поняттям: "нелінійний резистор", "нелінійне коло", "статичний опір", "диференціальний опір".
24. Дайте визначення некерованих та керованих нелінійних резистивних елементів. Якісно зобразьте ВАХ відомих Вам типів некерованих та керованих нелінійних резистивних елементів.
25. Як замінити ділянку з послідовним з’єднанням декількох нелінійних резистивних елементів одним еквівалентним?
26. Які методи використовуються для розрахунку нелінійних кіл постійного струму? Дайте їх порівняльну характеристику.
27. Поясніть порядок розрахунку нелінійних кіл методом двох вузлів.
28. Поясніть порядок розрахунку кола з одним нелінійним елементом методом еквівалентного генератора.
29. Поясніть порядок розрахунку складного кола з декількома (двома) нелінійними елементами.
30. Якими трьома величинами характеризують синусоїдально змінювану функцію?

31. Чому середнє значення синусоїдального струму визначають за півперіода, а не за період? Приладами якої системи і як вимірюється це значення?
32. Що розуміють під діючим значенням синусоїдального струму (напруги)? Приладами яких систем вимірюється це значення?
33. Поясніть сутність символічного методу розрахунку кіл синусоїдального струму.
34. Яким чином синусоїдальні функції часу зображуються векторами та комплексними числами?
35. Запишіть і проілюструйте основні співвідношення для ділянки синусоїдального струму з резистивним елементом.
36. Запишіть і проілюструйте основні співвідношення для ділянки синусоїдального струму з індуктивним елементом.
37. Запишіть і проілюструйте основні співвідношення для ділянки синусоїдального струму з ємнісним елементом.
38. Дайте визначення векторної діаграми. Якому моменту часу відповідає положення векторів струмів та напруг на векторній діаграмі? Чи залежить взаємне положення векторів від часу?
39. Дайте визначення і поясніть принцип побудови топографічної діаграми. Чим термін "топографічна діаграма" відрізняється від терміну "векторна діаграма напруг"?
40. Запишіть і проілюструйте векторною діаграмою закон Ома для ділянок кола з послідовним з'єднанням R-, L-, C- елементів. Дайте визначення комплексному опору ділянки. Запишіть його вирази.
41. Запишіть і проілюструйте векторною діаграмою закон Ома для ділянок кола з паралельним з'єднанням R-, L-, C- елементів. Дайте визначення комплексній провідності ділянки. Запишіть її вирази.
42. Наведіть дві схеми заміщення пасивного двополюсника в колі синусоїдального струму. Запишіть формули взаємозв'язку параметрів цих схем.
43. Запишіть вирази комплексної потужності через комплекси напруги і струму, а також через P , Q , S .
44. Наведіть рівняння балансу потужностей для кола без індуктивних зв'язків.
45. Наведіть відповідні аналітичні вирази та дайте фізичну інтерпретацію P , Q , S .
46. Що таке коефіцієнт потужності? З якою метою і яким чином добиваються його підвищення в енергетичних електроустановках?
47. Запишіть умову резонансу напруг. Покажіть якісний вигляд резонансних кривих для послідовного резонансного кола при зміні частоти.
48. Запишіть умову резонансу струмів. Покажіть якісний вигляд резонансних кривих для паралельного резонансного кола при зміні частоти.
49. Що розуміють під добротністю послідовного та паралельного резонансного кола? Що таке хвильовий опір? Наведіть відповідні аналітичні вирази.
50. Дайте визначення явищу взаємної індукції. Що таке взаємна індуктивність, опір взаємної індукції?
51. З якою метою і як розмічають однойменні затискачі індуктивно зв'язаних котушок?
52. Що розуміють під розв'язкою кіл з взаємною індуктивністю?
53. Які методи використовуються для розрахунку кіл з взаємними індуктивностями?
54. Запишіть вирази комплексних потужностей, що передаються між двома індуктивно зв'язаними вітками.
55. Запишіть рівняння балансу комплексних, активних і реактивних потужностей для кіл з взаємними індуктивностями.
56. На підставі чого всі методи розрахунку кіл постійного струму застосовуються в колах синусоїдального струму? Які обмеження на це застосування накладає наявність взаємних індуктивностей?
57. Зобразьте схему підключення ватметра для вимірювання активної потужності.
58. Покажіть якісний вигляд резонансних кривих послідовного резонансного кола при зміні його реактивних параметрів.
59. Покажіть якісний вигляд резонансних кривих паралельного резонансного кола при зміні його реактивних параметрів.
60. Запишіть рівняння балансу комплексних, активних і реактивних потужностей для кіл з взаємними індуктивностями.