

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О. Г. БІДНІЧЕНКО, С. О. СЛОБОДЯН

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ПЕРСПЕКТИВНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою НУК

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2017

УДК 514.18(075)
Б 59

Автори:

О. Г. Бідніченко, канд. техн. наук, доцент;
С. О. Слободян, канд. техн. наук, професор НУК

Рецензенти:

В. Д. Борисенко, д-р техн. наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії Миколаївського національного університету імені В.О. Сухомлинського;
А. Я. Казарезов, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри морської логістики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова

Бідніченко О. Г.

Б 59 Основи нарисної геометрії та перспективних зображень : навчальний посібник / О. Г. Бідніченко, С. О. Слободян. – Миколаїв : НУК, 2017. – 319 с.

Підручник містить теоретичні положення з усіх розділів курсу нарисної геометрії: ортогональні та аксонометричні проєкції, тіні та перспективи. Наведено основи побудови комплексних креслень геометричних об'єктів: точок, прямих і кривих ліній, площин та поверхонь.

Розкрито основні теоретичні положення та практичні методи побудови перспективних зображень, аксонометричних проєкцій і тіней.

Призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів денної і заочної форм навчання спеціальності "Дизайн" та всіх технічних спеціальностей.

УДК 514.18(075)

Навчальне видання

БІДНІЧЕНКО Олена Галіківна
С.ЛОБОДЯН Сергій Олегович

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ПЕРСПЕКТИВНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Навчальний посібник

Редактор *М. П. Фоміна*

Комп'ютерне складання та верстання: *А. В. Платонова, А. Д. Сорочинська*

Коректор *М. О. Паненко*

© Бідніченко О. Г., Слободян С. О., 2017

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2017

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 18.5. Об'єм даних 153354 кб.

Тираж 15 прим. Вид. № 4. Зам. № 162.

Видавець і виготовник Національний університет кораблебудування

імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ВСТУП

Нарисна геометрія є однією з перших дисциплін, яка вивчається на першому курсі вищих технічних навчальних закладів. Вона вивчає форми предметів, що нас оточують, та співвідношення між ними, встановлює закономірності та використовує їх для розв'язування практичних задач.

Перші чотири розділи посібника присвячені викладенню теоретичних основ створення комплексних креслень – конструювання проєкційного апарату, побудови ортогональних проєкцій точок, прямих ліній, площин, їх класифікації. Тут подані способи задання цих геометричних образів на комплексному кресленні, а також знаходження точок перетину прямих ліній з площинами та ліній взаємного перетину площин при різному їх розташуванні у просторі.

У п'ятому розділі посібника наведено чотири основних задачі перетворення креслення та спосіб заміни площин проєкцій, який є найбільш розповсюдженим для розв'язування багатьох практичних задач.

У наступних розділах посібника викладені питання, пов'язані з вивченням кривих ліній і поверхонь, їх побудовою на комплексних кресленнях, знаходженням проєкцій геометричних образів, які є наслідком перетину кривих ліній і поверхонь як між собою, так і з площинами окремого та загального положення.

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

Декілька розділів присвячені актуальному питанню з вивчення кривих ліній та поверхонь, які займають особливе положення в нарисній геометрії. За їх допомогою вдається розв'язувати різноманітні наукові та інженерні задачі. Криві лінії — це обриси багатьох споруд, деталей машин і механізмів, траєкторії об'єктів, що рухаються. Лінії широко використовуються при конструюванні поверхонь технічних форм. У посібнику наведено класифікацію, способи задавання та види кривих ліній і поверхонь, а також методи визначення перетину поверхонь із прямими лініями, площинами та поверхнями.

Окремий розділ посібника присвячено розгляду способів та методів побудови розгорток поверхонь. Це питання має суттєве практичне значення в нашому житті при конструюванні виробів із листового матеріалу.

Важливе місце у посібнику відведено теоретичним основам та практичній реалізації побудови перспективних зображень та аксонометричних проекцій геометричних об'єктів. Основна увага приділяється стандартним видам аксонометричних проекцій, які вивчаються у навчальному курсі нарисної геометрії та інженерної графіки. Розглянуті питання побудови лінійних перспективних зображень каскаду інженерних будівельних споруд. В якості апарату побудови лінійної перспективи використовується метод архітекторів.

В останньому розділі посібника стисло подано матеріал щодо основи теорії тіней, описано графічні прийоми нанесення власних і падаючих тіней на машинобудівних деталях та інженерних будівельних спорудах; наведені практичні рекомендації графічних прийомів нанесення власних і падаючих тіней на аксонометричних проекціях машинобудівних деталей та каскадах інженерних будівельних споруд.

Навчальний посібник написано спільно канд. техн. наук, доц. О. Г. Бідніченко та завідувачем кафедри комп'ютерно-

ВСТУП

інтегрованих технологій та інженерної графіки НУК, канд. техн. наук, проф. С.О. Слободяном. Матеріал посібника базується на курсах лекцій з нарисної геометрії та перспективи, які викладаються в Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова для студентів технічних спеціальностей та дизайну.

Автори висловлюють велику подяку д-ру техн. наук, проф. В. Д. Борисенку за слушні поради і допомогу під час написання посібника.



УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

1. Точки, розташовані у просторі, позначаються великими літерами латинського алфавіту або арабськими цифрами: $A, B, C, \dots$ чи $1, 2, 3, \dots$.

2. Лінії, паралельні площинам проєкцій (лінії рівня), позначаються: h – горизонталь; f – фронталь; p – профільна пряма. Інші прямі або криві лінії позначаються малими літерами латинського алфавіту: $a, b, c, \dots$.

3. Площини та поверхні позначаються великими літерами грецького алфавіту: Δ (дельта), Γ (гамма), Λ (лямбда), Π (пі), Σ (сигма), Ω (омега), T (тау) тощо.

4. Для основних площин проєкцій прийняті такі позначення: Π_1 – горизонтальна площина проєкцій; Π_2 – фронтальна площина проєкцій; Π_3 – профільна площина проєкцій. Нові площини проєкцій, які вводяться під час заміни площин проєкцій, позначаються $\Pi_4, \Pi_5, \dots$.

4. Проекції геометричних образів позначаються тими ж літерами (або цифрами), що й самі образи з додаванням індексу, який відповідає площині проєкцій. Так, $A_1, B_1, C_1, \dots$ – горизонтальні проєкції точок; $A_2, B_2, C_2, \dots$ – фронтальні проєкції точок; $A_3, B_3, C_3, \dots$ – профільні проєкції точок.

5. Якщо проєкції точок або ліній збігаються, то говорять, що ці проєкції тотожно рівні між собою: $A_2 = B_2, a_1 = b_1$.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

6. Взаємні положення образів позначаються так: $c \parallel l$ – пряма c паралельна прямій l ; $a \perp d$ – пряма a перпендикулярна до прямої d ; $(n \times m)$ – площина задана двома прямими n та m , що перетинаються.

7. Система прямокутних координат позначається $Oxyz$; початок координат – O .

8. Центр проєкціювання позначається великою латинською літерою S , напрям проєкціювання – малою латинською літерою s .

Додаткові позначення, які використовуються при побудові тіней, аксонометричних проєкцій та перспективи, наведено у відповідних розділах.



1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ ПРОЕКЦЮВАННЯ

1.1. Предмет і задачі нарисної геометрії

Нарисна геометрія є однією з гілок геометрії, яка вивчає форми предметів, що нас оточують, та співвідношення між ними, встановлює відповідні закономірності та використовує їх для розв'язання практичних задач.

Нарисна геометрія належить до математичних дисциплін і як наука має прикладний характер. Вона вивчає геометричні форми не за формулами, а графічно, тобто за кресленнями. Для вірного виконання креслень необхідно володіти основами нарисної геометрії. Професор В. І. Курдюмов, автор одного з перших підручників з нарисної геометрії, писав: "Якщо креслення – мова техніки, то нарисна геометрія – граматики цієї мови".

Предметом нарисної геометрії є вивчення методів побудови та читання креслень, розв'язування на них різноманітних геометричних задач. Формоутворюючими елементами простору є основні геометричні образи – *точка, пряма, площина, поверхня*.

Існують чотири *основні задачі* нарисної геометрії:

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ ПРОЕКЦІОНУВАННЯ

1. Пряма задача – вивчення методів зображення геометричних форм на площині, тобто вміння виконувати креслення.

2. Зворотна задача – вивчення геометричних форм за їх плоским зображенням, тобто вміння читати креслення.

3. Конструктивна задача – розв'язання геометричних задач на плоских зображеннях геометричних форм.

4. Прикладна задача – використання методів нарисної геометрії в процесі вирішення питань науки і техніки.

У нарисній геометрії кожне креслення будується за допомогою *методу проєкціювання*, тому креслення, що застосовуються в цій гільці геометрії, мають назву *проєкційних креслень*. Отже, основним методом нарисної геометрії є *метод проєкціювання геометричних форм на площину*. Отримане плоске зображення у результаті проєкціювання називається проєкцією. При побудові креслень широко застосовуються проєкційні властивості фігур, завдяки чому зображення надають можливості вивчати особливості самого оригіналу.

1.2. Метод проєкцій

В основі побудови будь-якого зображення лежить *метод проєкцій*, який передбачає, що в просторі є довільна точка та площина, які відповідно називаються *центром проєкціювання* та *площиною проєкцій* або картинною площиною. При проєкціюванні на площину проєкцій деякої точки через центр проєкціювання та цю точку проводять *проєкціювальний промінь* до перетину з площиною проєкцій. Точка перетину променю з площиною називається *проєкцією* точки. Сукупність проєкцій усіх точок деякої фігури створює проєкцію цієї фігури.

У нарисній геометрії фігури відображаються на площину способами *центрального* та *паралельного* проєкціювання.

При цьому відповідно одержуються центральні або паралельні проєкції.

1.3. Центральні проєкції

Ідею центрального проєкціювання можна зрозуміти з рис. 1.1. Точка S , з якої виходять проєкціювальні промені, називається *центром проєкцій* або *полюсом*. Площина Π_1 , на яку проєкціюється геометричний образ, називається *площиною проєкцій*. Площина Π_1 і точка S формують апарат центральної проєкції. Точку A , яку проєкціюють, називають *оригіналом*. Її проєкцію на площину Π_1 позначають A_1 .

Проекціювання можна виконати для будь-якої точки простору, за винятком точок, що знаходяться в площині, яка проходить через центр проєкцій S та паралельна площині проєкцій Π_1 .

При проєкціюванні більш складних геометричних образів, наприклад ліній, проводять деяку сукупність проєкціювальних променів через точки, що належать цій лінії (рис. 1.2). Сукупність таких променів утворює конічну поверхню, тому центральні проєкції інколи називають *конічними*.

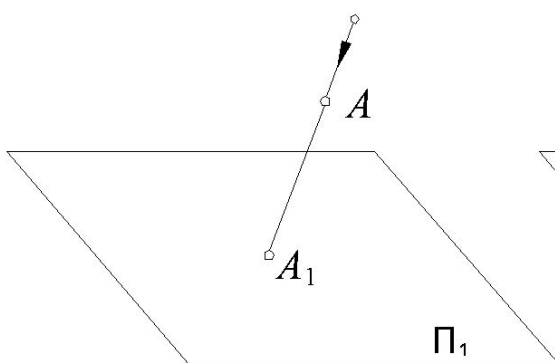


Рис. 1.1

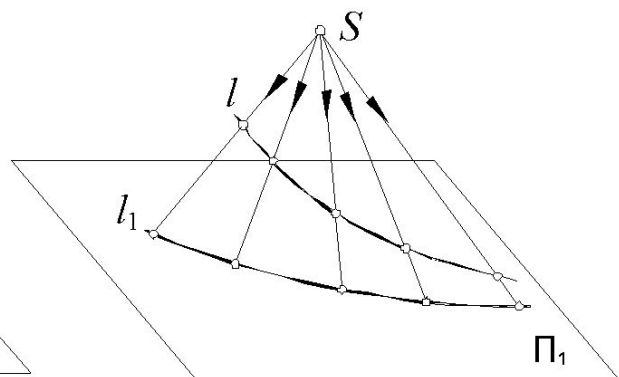


Рис. 1.2

Центральні проєкції використовуються в будівельних кресленнях, а також в образотворчому мистецтві. Вони є наочни-

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ ПРОЕКЦІОНУВАННЯ

ми, але будуються порівняно важко, до того ж в значній мірі спотворюють форму та розміри оригінала, тому ці проекції в технічних кресленнях не застосовуються.

1.4. Паралельні проекції

Паралельні проекції є окремим випадком центральних проекцій, в яких центр проєкціювання віддалений у нескінченність, а проєкційовальні промені взаємно паралельні (рис. 1.3). У цьому випадку також вибирають площину проєкцій, але замість центра проєкцій S задають напрям проєкціювання s . Площина Π_1 і напрям s утворюють *апарат паралельної проєкції*.

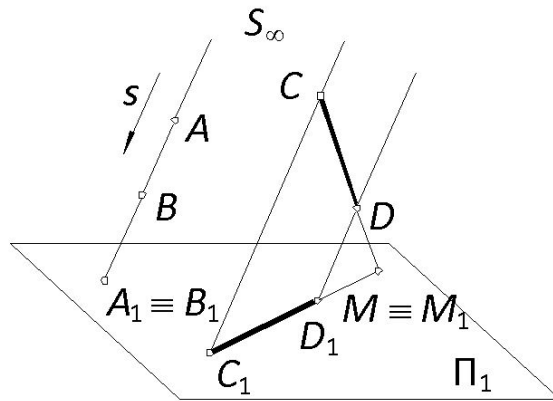


Рис. 1.3

Промені паралельного проєкціювання можуть утворювати з площиною проєкцій гострі або прямі кути. Залежно від цього розрізняють косокутне та прямокутне (ортогональне) проєкціювання.

Паралельні проєкції характеризуються певними властивостями. Оскільки проєкцією точки є точка, то проєкцією фігури є множина проєкцій всіх її точок.

Проекцією прямої в загальному випадку є пряма. Якщо відомі проєкції хоча б двох точок прямої, то визначається проєкція всієї прямої. Наведемо також деякі інші властивості паралельних проєкцій:

1. Якщо точка належить лінії, то її проєкція належить проєкції лінії.

2. Якщо дві лінії перетинаються, то їх проєкції також перетинаються, причому точка перетину проєкцій є проєкцією точки перетину ліній.

3. Проекції взаємно паралельних прямих взаємно паралельні.

4. Плоска фігура, паралельна площині проєкцій, проєкціюється на цю площину в рівну їй фігуру.

5. Плоский багатокутник у загальному випадку проєкціюється у багатокутник з тією ж кількістю вершин.

Ортогональне проєкціювання широко застосовується у технічному кресленні.

1.5. Оборненість креслення. Комплексне креслення

На практиці важливо не тільки вміти будувати зображення (проєкцію) певного предмета або геометричного образу на площині, але й необхідно вміти розв'язувати обернену задачу – за плоским зображенням (проєкцією) предмета реконструювати, тобто відновлювати сам оригінал. Якщо плоскому кресленню притаманна така властивість, то воно називається *оберненим*.

Усі технічні креслення мають бути оберненими, тобто давати повну інформацію про форму, розміри та положення геометричного образу, що проєкціюється, у просторі. Інакше креслення втрачає всякий сенс.

Розглянемо розв'язання оберненої задачі, пов'язаної з пошуком положення точки у просторі за її проєкцією. З рис. 1.4

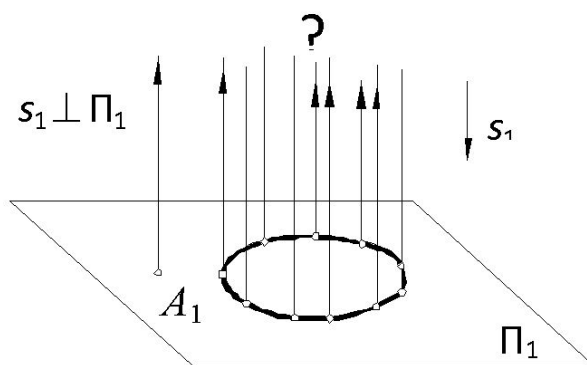


Рис. 1.4

впливає, що ця задача є невизначеною, оскільки в одну й ту ж точку на площині проєкцій проєкціюється безліч точок, що належать тому ж самому променю.

Так само за однією проєкцією геометричної фігури, яка складається з множини точок, не можна визначити

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ ПРОЕКЦІОНУВАННЯ

її форму та положення у просторі. Таке креслення називають *необерненим*.

Для забезпечення оберненості креслення застосовують сумісно дві взаємно перпендикулярні площини проекцій. Першу з них Π_1 називають *горизонтальною площиною проекцій*, другу Π_2 – *фронтальною площиною проекцій* (рис. 1.5, *а*). Площину Π_2 розташовують вертикально. Лінію Ox перетину площин Π_1 і Π_2 називають *віссю проекцій*.

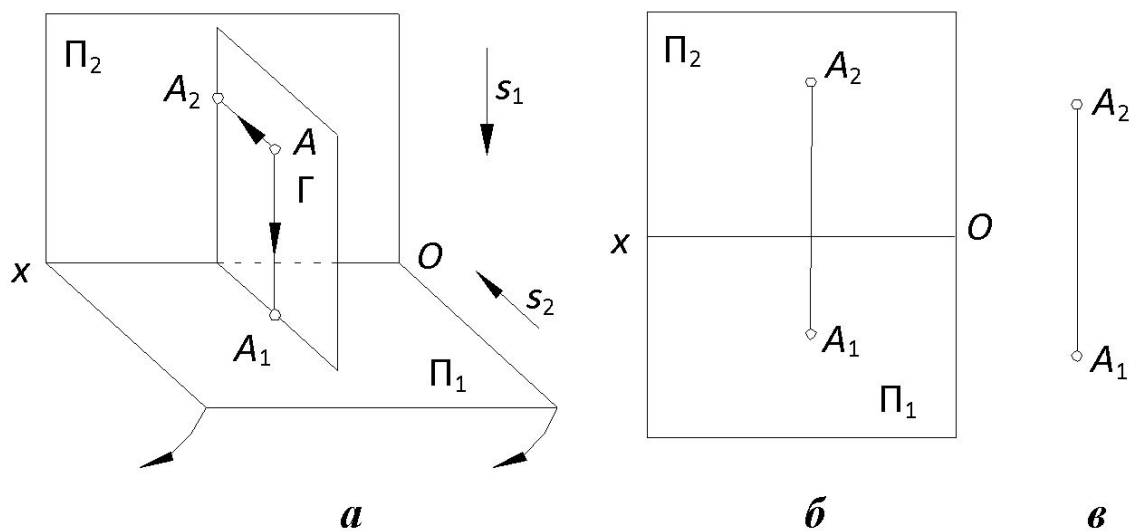


Рис. 1.5

Спроеціюємо деяку точку A за напрямками s_1 і s_2 , перпендикулярними до площин проекцій Π_1 та Π_2 . Матимемо проєкції A_1 та A_2 , які називаються відповідно *горизонтальною* та *фронтальною* проєкціями точки A . Якщо апарат проєкціювання відомий, можна відновити або інакше реконструювати точку в просторі. Для цього достатньо провести два проєкціювальних промені через проєкції точки, паралельно напрямкам s_1 і s_2 . Ці промені лежать у площині Γ , заданій трьома точками (A, A_1, A_2). Вони перетинаються, визначаючи шукану точку A . Звідси випливає, що зображення, одержані на двох площинах проєкцій, задають *обернену проєкційну модель*.

Від просторового зображення точки та її проєкцій переходять до плоского, або комплексного креслення, яке утворюється обертанням площини проєкцій Π_1 навколо осі Ox до її суміщення з фронтальною площиною Π_2 (рис. 1.5, *б*). Креслення, яке складається з кількох (мінімум двох) зв'язаних між собою проєкцій геометричної фігури, називається *комплексним*. Метод комплексного креслення в прямокутних проєкціях називається методом Монжа*.

На комплексному кресленні межі площин проєкцій та вісі не показують. Проєкції точок геометричного образу мають розташовуватися в проєкційній відповідності, тобто фронтальна та горизонтальна проєкції точки мають знаходитися на одній вертикальній лінії (рис. 1.5, *в*), яку називають *лінією сполучення*. На кресленні достатньо мати хоча б одну таку лінію, всі інші подібні лінії їй паралельні.

1.6. Ортогональна система трьох площин проєкцій

У деяких випадках двокартинне комплексне креслення стає незворотним. Приклад такого креслення наведено на рис. 1.6. Подані на цьому рисунку проєкції геометричного образу можуть давати плоска фігура або тіло (куб, призма, циліндр). Щоб зробити креслення зворотним, його доповнюють третьою площиною проєкцій.

Спроеціюємо деякий геометричний образ на три площини проєкцій (рис. 1.7). Третю площину проєкцій, яка перпендикулярна до перших двох, називають *профільною* площиною проєкцій і позначають Π_3 .

* Гаспар Монж (1746–1818) – видатний французький геометр і інженер часів Великої французької революції, який зробив суттєвий внесок у розвиток нарисної геометрії як науки. Основною його працею є книга "Нарисна геометрія", опублікована у 1798 р., в якій систематизовано та узагальнено досвід зображення просторових фігур на площині.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ ПРОЕКЦІОНУВАННЯ

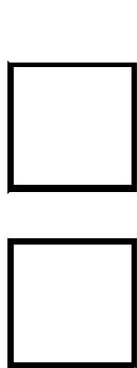


Рис. 1.6

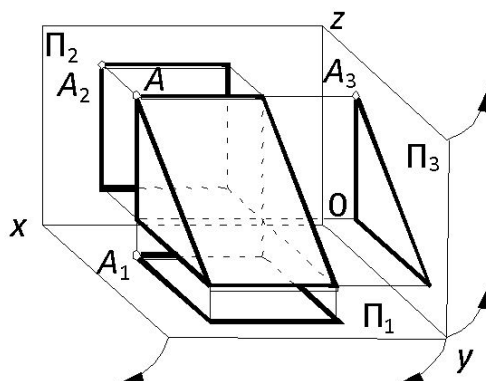


Рис. 1.7

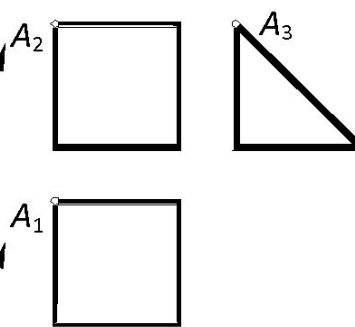


Рис. 1.8

Лінії перетину площин проекцій утворюють осі координат. Вісь x називають віссю *абсцис*, вісь y – віссю *ординат*, а вісь z – віссю *аплік*. Осі проекцій взаємно перпендикулярні та перетинаються в точці O . Їх розглядають як систему прямокутних координатних осей з початком у точці O .

Для отримання плоского креслення профільну площину проекцій Π_3 разом із зображенням обертають навколо осі Oz у напрямку стрілки до суміщення з площиною Π_2 , а площину Π_1 – навколо осі Ox . Отже, утворюється трикартинне комплексне креслення, яке є оберненим (рис. 1.8).

Фронтальна та профільна проекції кожної точки, наприклад точки A , знаходяться на горизонтальній лінії сполучення, а фронтальна та горизонтальна – на вертикальній лінії сполучення.

На кресленні є дві осі y , що впливає з факту проекційного зв'язку між площинами Π_1 та Π_3 . Умовно перервані на осі Oy лінії сполучення з'єднують циркулем дугами кіл із центром у точці O (рис. 1.9). Це ж саме можна зробити за допомогою так званої *постійної прямої креслення* k_0 , проведеної у довільному місці креслення під кутом 45° (рис. 1.10).

Зіставлення рис. 1.9 і 1.10 показує, що при побудові профільної проекції геометричного образу доцільно застосовувати

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

постійну пряму креслення, оскільки в цьому випадку побудови дещо простіші, до того ж їх можна виконати без застосування осей проекцій. Необхідно тільки стежити за точністю відкладання кута нахилу постійної прямої креслення.

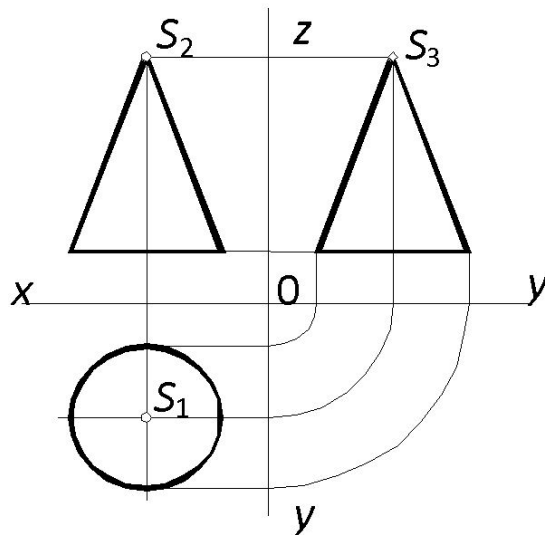


Рис. 1.9

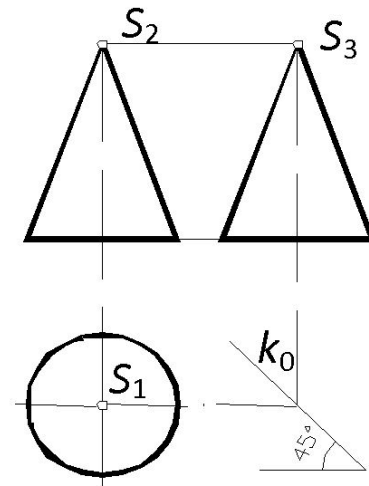


Рис. 1.10

2. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ

2.1. Загальні положення

Точка – найпростіший, нескінченно малий геометричний образ. У нарисній геометрії точку на комплексному кресленні умовно позначають колом невеличкого радіуса. Загальними положеннями проекцій точки є такі:

1) прямокутна проекція точки є основою перпендикуляра, проведеного з цієї точки на площину проекцій (рис. 2.1);

2) проекцією точки завжди є точка;

3) кожна точка має тільки одну проекцію на дану площину проекцій;

4) дві точки, розташовані на одному проекціювальному промені, проекціюються в одну точку;

5) одна проекція точки не визначає її положення у просторі відносно площин проекцій, тоді як дві проекції точки визначають положення самої точки відносно площин проекцій.

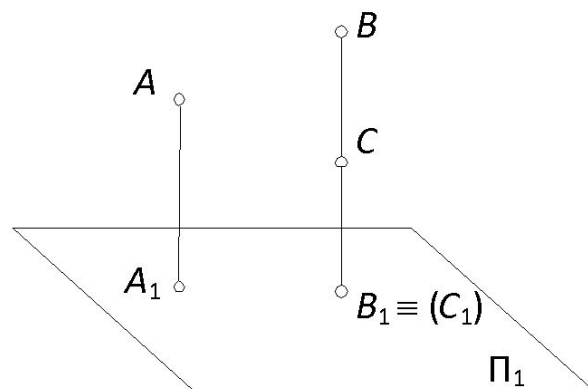


Рис. 2.1

2.2. Проекції точки на дві площини проекцій. Епюр точки

Сукупність двох або більше ортогональних проекцій точки часто називають *епюром* точки (від французького *epure* – ескіз). На рис. 2.2,*а* показано наочне зображення деякої точки A у системі двох ортогональних площин проекцій Π_1 і Π_2 , а справа на рис. 2.2,*б* – її двокартинне комплексне креслення. При суміщенні площини проекцій Π_1 з площиною Π_2 обертанням площини Π_1 навколо осі Ox проекції A_1 , A_2 точки A розташуються по обидві сторони від осі Ox і на одному перпендикулярі до неї. Відстань від проекції A_2 до осі Ox на епюрі відповідає відстані від самої точки A до горизонтальної площини проекцій Π_1 . Відстань від проекції A_1 до осі Ox відповідає відстані від самої точки A до фронтальної площини проекцій Π_2 .

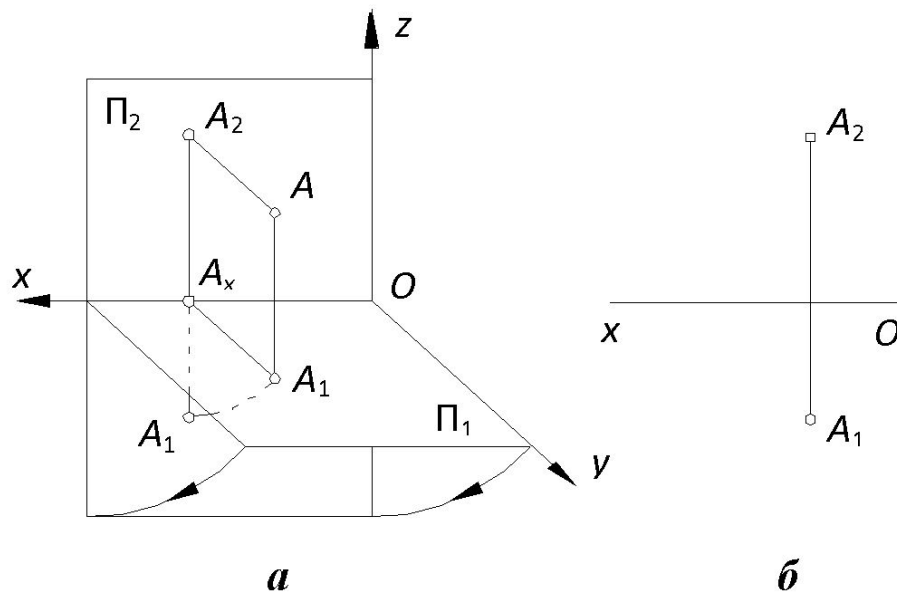


Рис. 2.2

Якщо точка лежить у будь-якій із площин проекцій, то одна з її проекцій збігається з цією точкою, а інша – лежить на осі проекцій. Наочні зображення та комплексні креслення (епюри) точок показані на рис. 2.3: точка A знаходиться

2. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ

в горизонтальній площині проєкцій Π_1 ; точка B – у фронтальній площині проєкцій Π_2 ; точка C – на осі проєкцій, тобто вона одночасно належить двом площинам проєкцій Π_1 і Π_2 .

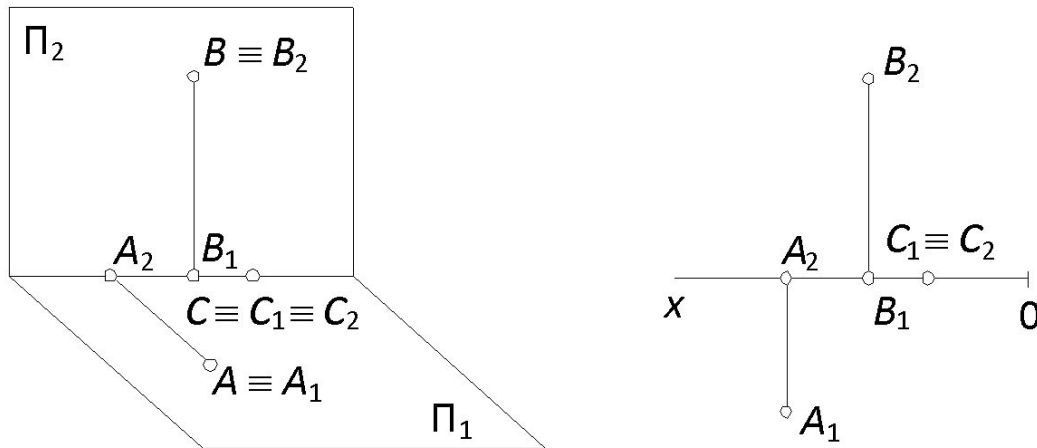


Рис. 2.3

2.3. Проекції точки на три площини проєкцій

Проекціювання на три площини проєкцій обумовлене необхідністю мати додаткові зображення геометричного образу. За третю площину проєкцій приймають профільну площину проєкцій Π_3 .

Вигляд просторової моделі точки A показано на рис. 2.4,*а*. Комплексне креслення цієї ж точки подано на рис. 2.4,*б*.

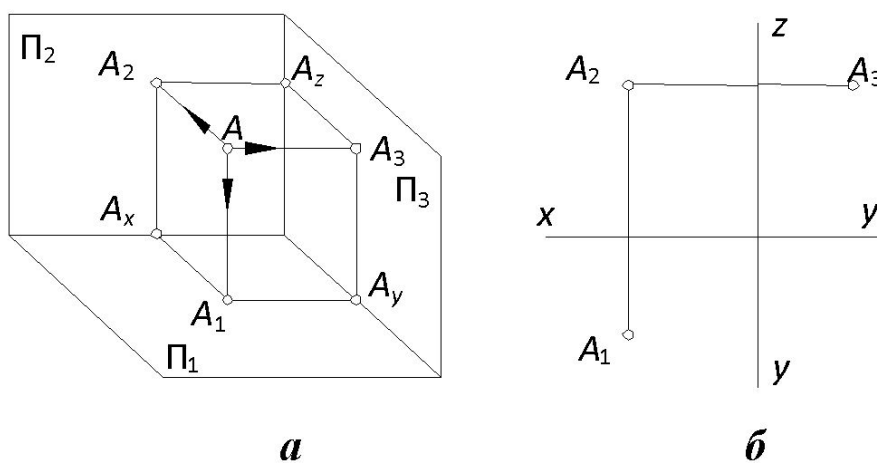


Рис. 2.4

Слід відзначити, що відстань від проекції A_1 точки до осі x дорівнює відстані від проекції A_3 точки до осі z .

Точку в просторі задають трьома її координатами x, y, z , під якими розуміють відстані від цієї точки до площин проекцій, відповідно, Π_3, Π_2, Π_1 . Координати точки визначаються числами одиниць виміру (у техніці одиницею виміру є міліметр).

Координату x називають *абсцисою* (вона визначає відстань від точки до площини проекцій Π_3), координату y називають *ординатою* (визначає відстань від точки до площини проекцій Π_2), координату z називають *аплікатою* (визначає відстань від точки до площини проекцій Π_1).

2.4. Побудова комплексного креслення точки за її координатами

У просторі існує безліч точок. Ці точки займають різні положення по відношенню до площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3 . Для того, щоб визначити положення конкретної точки окремо, треба знати три її ортогональних координати: *абсцису, ординату, аплікату*. При цьому площини проекцій Π_1, Π_2, Π_3 вважаються системою трьох взаємно перпендикулярних координатних площин, а точка O – початком відліку координат будь-якого геометричного образу, зокрема точки.

Координати точок записуються у дужках наступним чином: $A(x, y, z)$. Кожна проекція точки задається двома координатами. Так, координати x і y визначають горизонтальну, координати x і z – фронтальну та координати y і z – профільну проекції точки (рис. 2.5).

На рис. 2.6 подано приклад побудови трикартинного комплексного креслення точки A за її координатами: $A(5, 6, 4)$. Відрізки, які відповідають координатам (за масштабну одиницю взято відрізок довільної довжини), відкладаються на відповідних координатних осях: OA_x (5 одиниць) на осі Ox , OA_y (6 одиниць) на осі Oy та OA_z (4 одиниці) на осі Oz . Після цього

2. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ

через точки, позначені як A_x , A_y , A_z , проводять лінії сполучення, на перетині яких відмічають шукані проекції A_1 , A_2 і A_3 точки A .

Координати та проекції точок		
Координати	Наочне зображення	Комплексне креслення
	Горизонтальна проекція точки	
x і y $OA_x = x$ $OA_y = y$		
Фронтальна проекція точки		
x і z $OA_x = x$ $OA_z = z$		
Профільна проекція точки		
y і z $OA_y = y$ $OA_z = z$		

Рис. 2.5

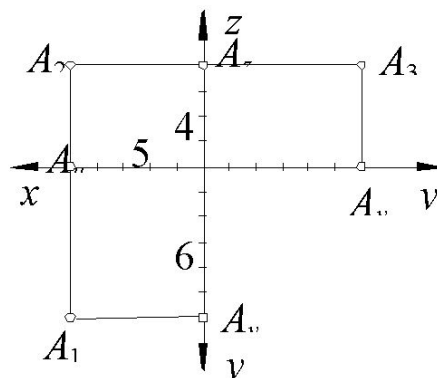


Рис. 2.6

Ще раз нагадаємо, що фронтальна A_2 та горизонтальна A_1 проекції точки A завжди знаходяться на одній прямій лінії, перпендикулярній до осі x . У свою чергу, фронтальна A_2 та профільна A_3 проекції точки A завжди знаходяться на одній прямій лінії, перпендикулярній до осі z . Відстань від горизонтальної проекції A_1 точки A до осі x (A_1A_x) дорівнює відстані від профільної проекції A_3 точки A до осі z ($A_1A_x = A_3A_z$).

2.5. Побудова проекції точки, якої не вистачає, за двома відомими її проекціями

Оскільки дві проекції точки визначають її положення відносно площин проекцій, а отже, і третю проекцію, то, маючи дві проекції точки, завжди можливо побудувати третю її проекцію. За комплексними кресленнями, показаними на рис. 2.7, можна простежити порядок побудови третьої проекції точки за двома відомими її проекціями. Хід побудов на рисунку визначено стрілками. Слід пам'ятати, що точка A_y зображується на кресленні разом із віссю y двічі.

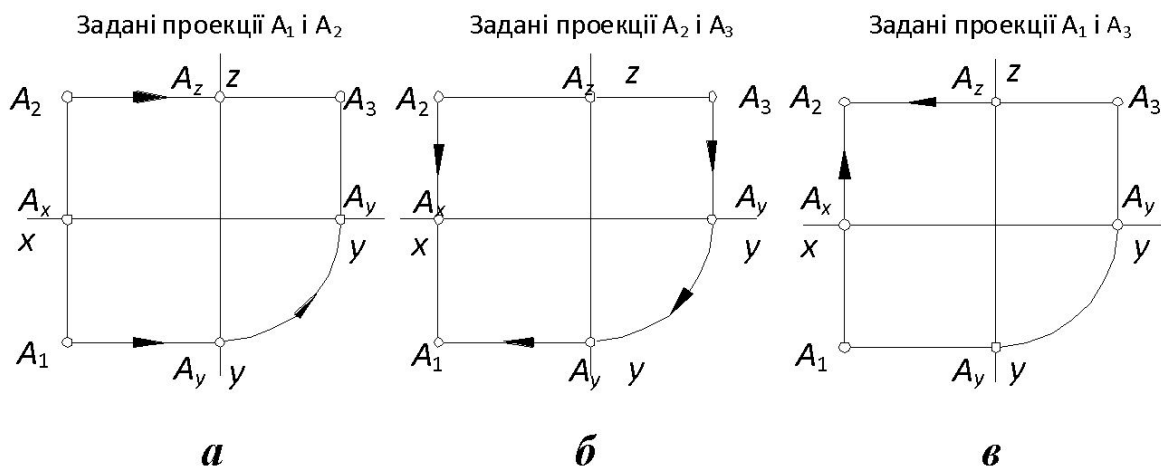


Рис. 2.7

2. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ

2.6. Взаємне розташування двох точок

У нарисній геометрії задачі, пов'язані з визначенням взаємного розташування різноманітних геометричних образів відносно один до одного, прийнято називати *позиційними задачами*. До таких задач також належать задачі на *взаємоналежність* та *перетин* геометричних образів.

Однією з основних позиційних задач є задача на визначення взаємного розташування двох точок.

Дві точки можуть збігатися або не збігатися. Якщо дві точки збігаються, то збігаються їх горизонтальні та фронтальні проєкції, тобто:

$$A_1 \equiv B_1 \text{ і } A_2 \equiv B_2.$$

Якщо ж точки A і B не збігаються, то їх горизонтальні та фронтальні проєкції різні (рис. 2.8) або, принаймні, не має збігатися одна пара їх проєкцій (рис. 2.9 і 2.10).

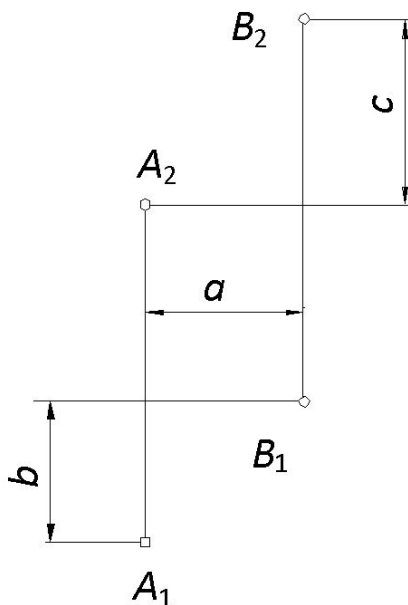


Рис. 2.8

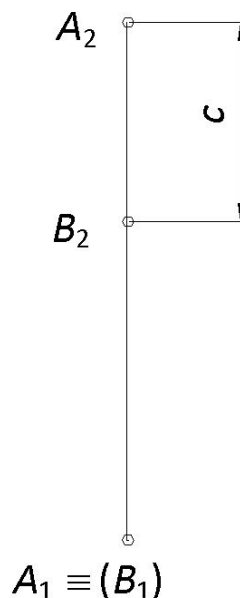


Рис. 2.9

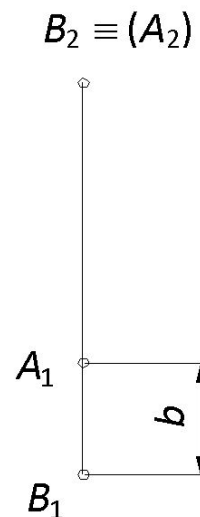


Рис. 2.10

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

У свою чергу, якщо точки A і B не збігаються, то виникає питання, як вони розташовані відносно одна одної та відносно спостерігача.

Розглядаючи рис. 2.8, можна визначити, що точки A і B не збігаються, причому точка A розташована лівіше за точку B на a одиниць і ближче за точку B на b одиниць та знаходиться нижче за точку B на c одиниць.

На рис. 2.9 зображені горизонтально конкуруючі точки A і B , а на рис. 2.10 – фронтально конкуруючі точки. Неважко побачити, що з двох горизонтально конкуруючих точок A і B (рис. 2.9) точка A розташована вище за точку B на c одиниць. При цьому говорять, що точка A розташована над точкою B або точка B розташована під точкою A . На площині проєкцій Π_1 точка A буде видимою, а точка B – невидимою.

З двох фронтально конкуруючих точок A і B (див. рис. 2.10) точка A розташована далі, ніж точка B , на b одиниць, тобто точка A знаходиться за точкою B або точка B знаходиться перед точкою A . На площині проєкцій Π_2 точка B буде видимою, а точка A – невидимою.

3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

3.1. Основні положення проєкціювання прямої

Пряму в нарисній геометрії розглядають як множину точок; її проєкції в загальному випадку прямі. З кінематичної точки зору під прямою розуміють траєкторію точки, що рухається з постійною швидкістю та не змінює свого напрямку. Пряма в просторі необмежена. Обмежену її частину називають *відрізком*. Основні положення проєкціювання прямої такі:

1) ортогональна проєкція прямої лінії на площину проєкцій є пряма, за винятком випадку, коли пряма перпендикулярна до площини проєкцій;

2) проєкція прямої розглядається як лінія перетину площини, що проходить через цю пряму перпендикулярно до площини проєкцій;

3) положення прямої лінії в просторі визначається двома її точками; щоб спроекціювати пряму треба спроекціювати дві її точки (для відрізка беруть його кінцеві точки) і з'єднати однойменні проєкції точок між собою.

3.2. Прямі загального положення

На комплексному кресленні пряма визначається своїми проєкціями (рис. 3.1,*а*), проєкціями відрізка (рис. 3.1,*б*) або проєкціями двох точок (рис. 3.1,*в*).

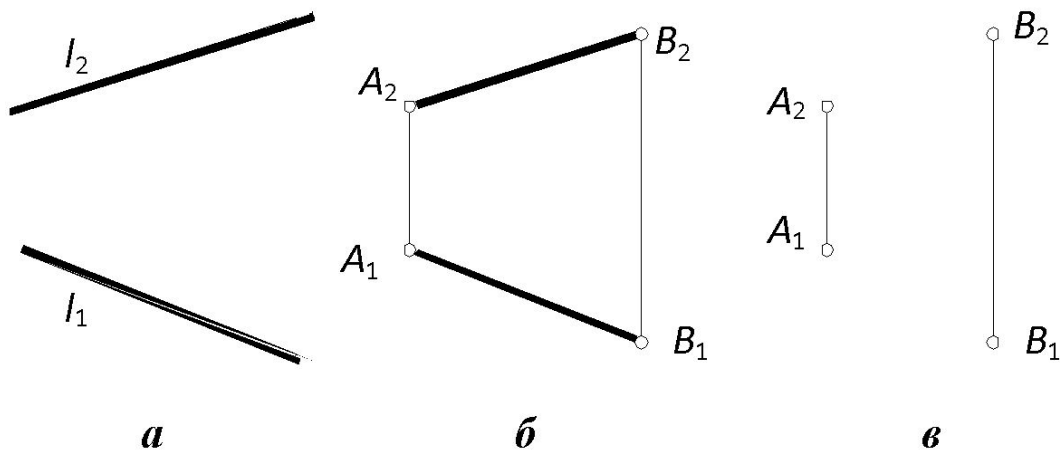


Рис. 3.1

Пряма, не паралельна або не перпендикулярна до жодної з площин проєкцій, називається *прямою загального положення*. Проєкції такої прямої нахилені до всіх осей проєкцій. Наочне зображення прямої загального положення показано на рис. 3.2.

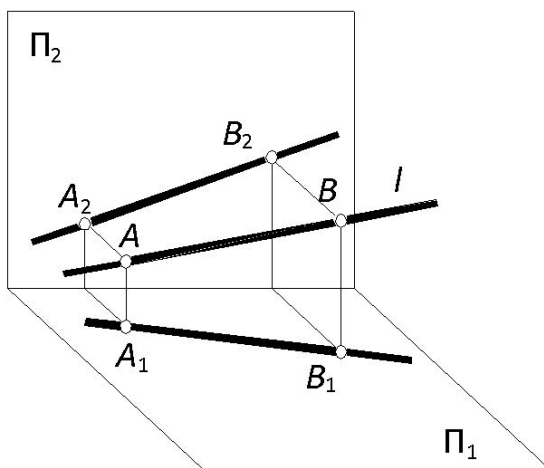


Рис. 3.2

Комплексним кресленням прямої є сукупність прямокутних її проєкцій на взаємно перпендикулярні площини проєкцій в їх суміщеному положенні.

Відрізок прямої загального положення проєкціюється на площини проєкцій у вигляді відрізків. Кожна з проєкцій такого відрізка має довжину меншу, ніж відрізок. Тому часто виникає потреба у визначенні натуральної величини відрізка та кутів його нахилу до площин проєкцій Π_1 та Π_2 .

Для знаходження натуральної (дійсної) величини відрізка прямої загального положення треба виконати деякі побудови. На рис. 3.3, *а* показано відрізок AB і дві площини проєкцій Π_1 та Π_2 . Якщо з точки A провести відрізок AC паралельно

Для знаходження натуральної (дійсної) величини відрізка прямої загального положення треба виконати деякі побудови. На рис. 3.3, *а* показано відрізок AB і дві площини проєкцій Π_1 та Π_2 . Якщо з точки A провести відрізок AC паралельно

3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

його горизонтальній проекції A_1B_1 , то утвориться прямокутний трикутник ABC . Гіпотенузою цього трикутника є відрізок AB .

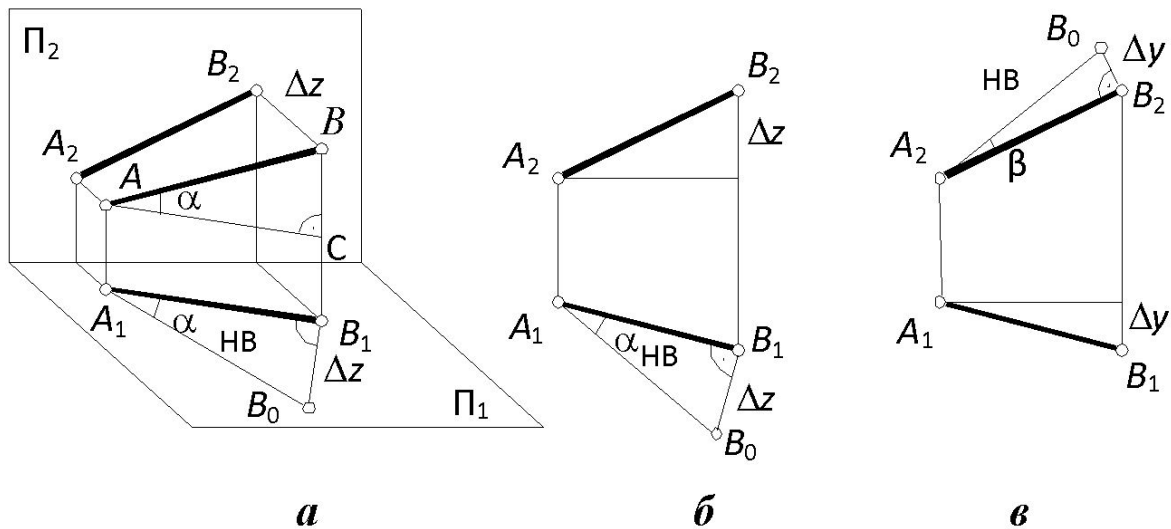


Рис. 3.3

Побудуємо у площині Π_1 трикутник $A_1B_1B_0$, рівний трикутнику ABC . У точці B_1 катета A_1B_1 проводимо перпендикуляр B_0B_1 за довжиною, що дорівнює відрізку BC , який відповідає різниці координат z точок B і A . Із рівності трикутників $A_1B_1B_0$ і ABC випливає, що гіпотенуза A_1B_0 трикутника $A_1B_1B_0$ дорівнює натуральній величині відрізка AB прямої загального положення.

Звернувшись до комплексного креслення (рис. 3.3, б), побачимо, що всі необхідні елементи для розв'язування задачі визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення присутні. Дійсно, є катет A_1B_1 (горизонтальна проекція відрізка AB) і відома довжина другого катета B_1B_0 (перевищення Δz одного кінця відрізка над іншим). Виконавши необхідні побудови, отримуємо натуральну величину відрізка AB прямої загального положення безпосередньо на комплексному кресленні.

Дивлячись на рис. 3.3, а, зазначимо, що кут α між гіпотенузою A_1B_0 і катетом-проекцією A_1B_1 дорівнює куту нахилу

відрізка AB до горизонтальної площини проєкцій Π_1 . Отже, в результаті розв'язування цієї задачі одночасно визначені натуральна величина відрізка та кут його нахилу до площини проєкцій Π_1 .

Для знаходження кута нахилу прямої до фронтальної площини проєкцій, тобто кута β , відповідні побудови треба виконати на площині проєкцій Π_2 (рис. 3.3, *в*). Зазначимо, що при побудові прямокутного трикутника у площині Π_2 застосовано різницю координат у кінців відрізка.

Розглянутий спосіб визначення натуральної величини відрізка прямої та кутів його нахилу до площин проєкцій називають *способом прямокутного трикутника*.

3.3. Прямі лінії окремого положення

Прямі лінії можуть займати окреме положення по відношенню до площини проєкцій. До таких прямих належать прямі, *паралельні* одній із площин проєкцій або *перпендикулярні* до якоїсь із площин проєкцій. Ця обставина розділяє прямі окремого положення на *прямі рівня* та *прямі проєкціювальні*.

Прямі рівня. Пряма, паралельна одній з площин проєкцій, називається *прямою рівня*. Пряма h (рис. 3.4, *а*), паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 , називається *горизонтальною прямою*, або *горизонталлю*. Пряма f (рис. 3.4, *б*), паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 , називається *фронтальною прямою*, або *фронталлю*. Пряма p (рис. 3.4, *в*), паралельна профільній площині проєкцій Π_3 , називається *профільною прямою рівня*.

Прямі рівня проєкціюються на одну з площин проєкцій у натуральну величину, а на дві інші – зі спотворенням. Фронтальна проєкція h_2 горизонталі паралельна осі проєкцій Ox (рис. 3.4, *а*), а горизонтальна h_1 – дорівнює натуральній вели-

3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

чині відрізка. Кут β між проекцією h_1 і віссю Ox дорівнює натуральній величині кута нахилу прямої h до площини Π_2 .

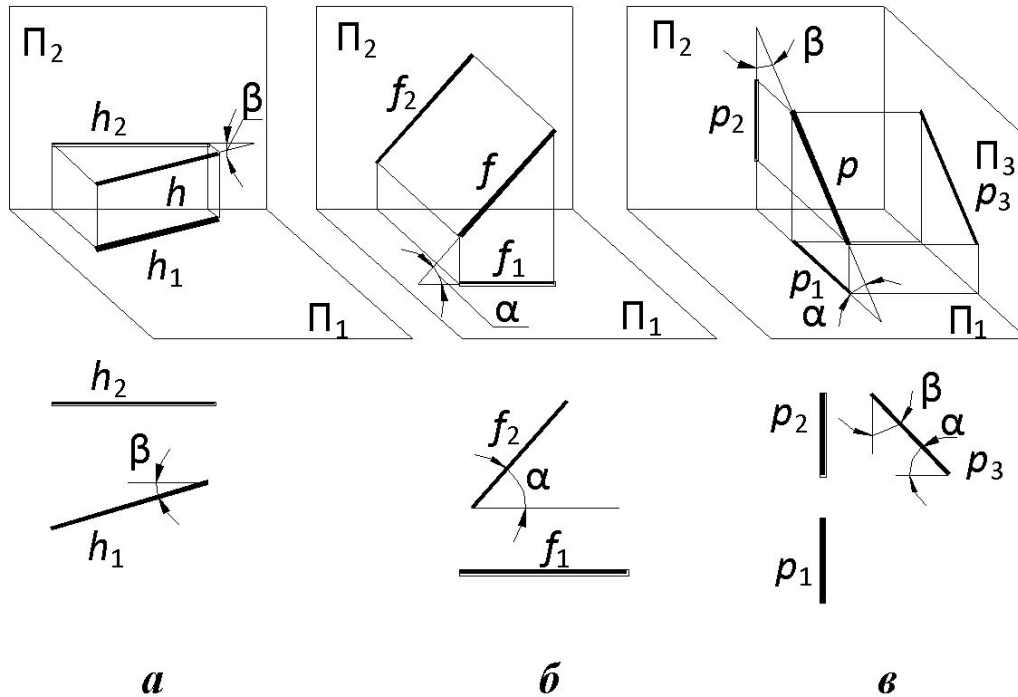


Рис. 3.4

На рис. 3.4,б горизонтальна проекція f_1 фронталі паралельна осі Ox , а фронтальна f_2 дорівнює натуральній величині відрізка прямої. Кут α між фронтальною проекцією f_2 і віссю Ox дорівнює натуральній величині кута нахилу прямої f до площини проєкцій Π_1 .

Фронтальна проекція профільної прямої розташовується паралельно осі Oz , горизонтальна – паралельно осі Oy . Проекція p_3 дорівнює натуральній величині та встановлює з осями Oy та Oz кути α і β , які відповідають кутам нахилу прямої до площин проєкцій Π_1 та Π_2 , відповідно (рис. 3.4,в).

Проекціювальні прямі. Пряма, перпендикулярна до однієї з площин проєкцій, називається проекціювальною прямою. Приклади наочних зображень таких прямих наведені на рис. 3.5.

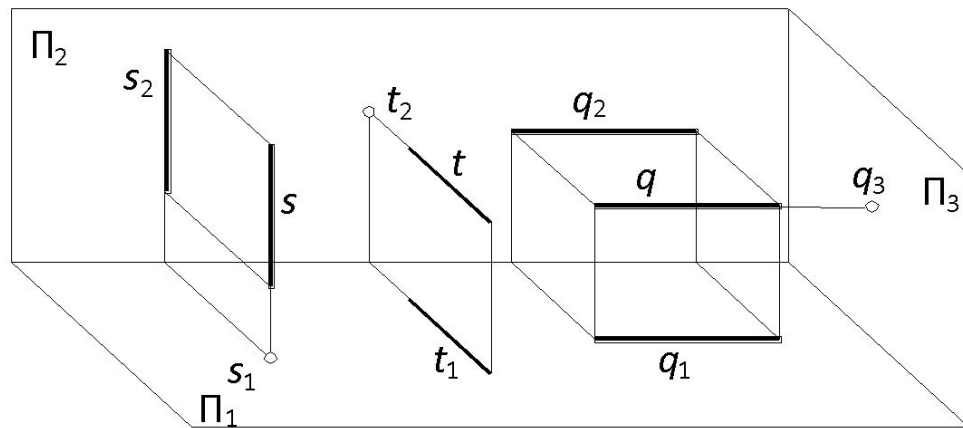


Рис. 3.5

Пряма, перпендикулярна до площини проєкцій Π_1 , називається *горизонтально-проєкціювальною прямою* (пряма s на рис. 3.6,*а*); пряма, перпендикулярна до площини проєкцій Π_2 , називається *фронтально-проєкціювальною прямою* (пряма t на рис. 3.6,*б*); пряма, перпендикулярна до площини проєкцій Π_3 , називається *профільно-проєкціювальною прямою* (пряма q на рис. 3.6,*в*).

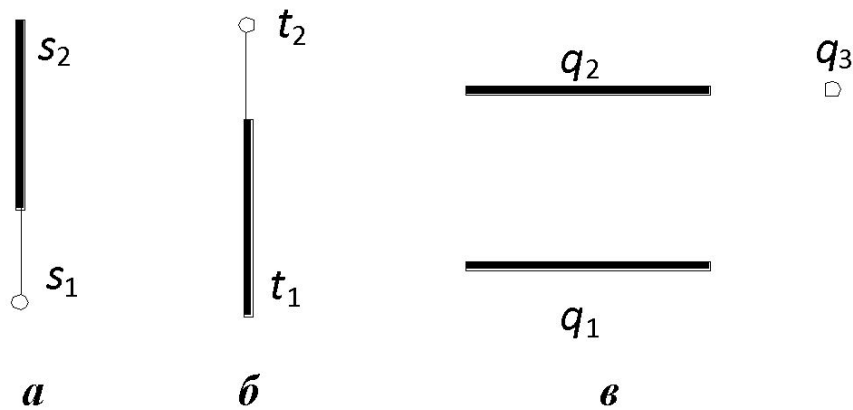


Рис. 3.6

На одну з площин проєкцій проєкціювальна пряма проєкціюється в точку, а на інші площини проєкцій – у вигляді відрізків, які займають горизонтальне або вертикальне положення. Їх величина дорівнює натуральній величині відрізка.

3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

3.4. Взаємне розташування двох прямих

Визначення взаємного розташування двох прямих належить до позиційних задач. Подібну задачу було розглянуто вище на прикладі найпростішого геометричного образу – точки. Дві прямі у просторі одна відносно другої можуть бути взаємно *паралельними*, *перетинатися* або *перехрещуватися* (мимобіжні прямі).

Паралельні прямі. Якщо прямі у просторі паралельні, то їх однойменні проєкції на будь-якій площині також взаємно паралельні (рис. 3.7,*а*). Виняток складають прямі, перпендикулярні до площини, які на цю площину проєктуються у точки. Однойменні проєкції паралельних прямих загального положення (рис. 3.7,*б*) паралельні між собою, тобто $A_1B_1 \parallel C_1D_1$, $A_2B_2 \parallel C_2D_2$. На рис. 3.7,*в* паралельні прямі MN і KF лежать у площині, перпендикулярній до площини проєкцій Π_1 , а на рис. 3.7,*г* паралельні прямі m і n , перпендикулярні до площини проєкцій Π_2 .

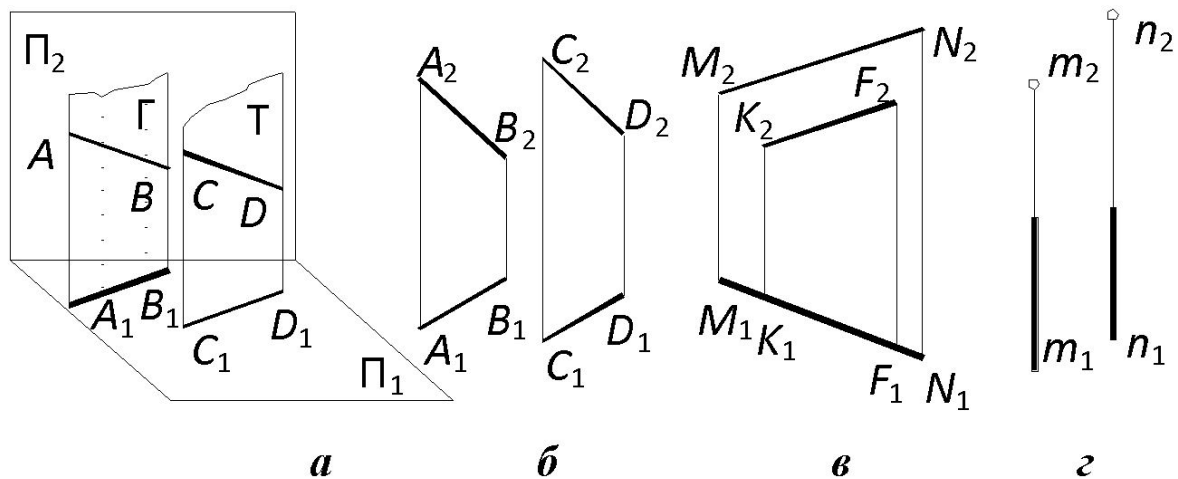


Рис. 3.7

Протилежне твердження стосовно того, що коли однойменні проєкції прямих паралельні, то ці прямі також паралельні, спрацьовує не завжди. Виняток становлять профільні прямі

рівня. Дві такі прямі, задані на комплексному кресленні, паралельні одна одній, якщо їх однойменні проекції на площині

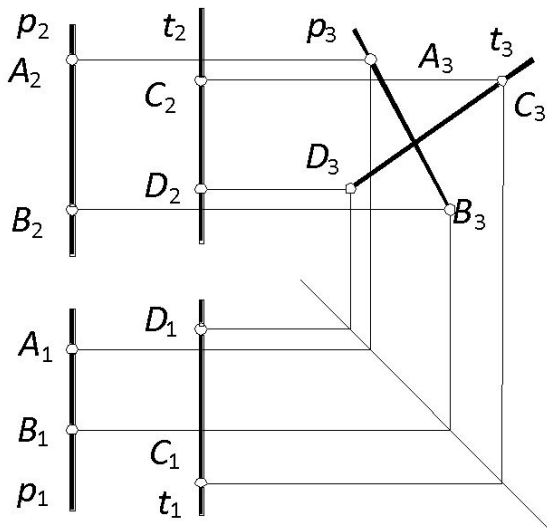


Рис. 3.8

проекцій Π_3 взаємно паралельні. Інакше прямі будуть мимобіжними (рис. 3.8). Отже, для визначення взаємного положення двох профільних прямих будуть профільні їх проекції.

Прямі, що перетинаються. Якщо прямі в просторі перетинаються, то на комплексному кресленні їх однойменні проекції перетинаються у точках, розташованих на одній

вертикальній лінії сполучення. На рис. 3.9,а зображено дві прямі загального положення, які перетинаються у деякій точці K . Проекції K_1 і K_2 точки K знаходяться на одній вертикальній лінії сполучення. На рис. 3.9,б показано дві прямі, які перетинаються та лежать у площині, перпендикулярній до площини проекцій Π_2 , а на рис. 3.9,в – прямі окремого положення, які перетинаються та лежать у горизонтальній площині.

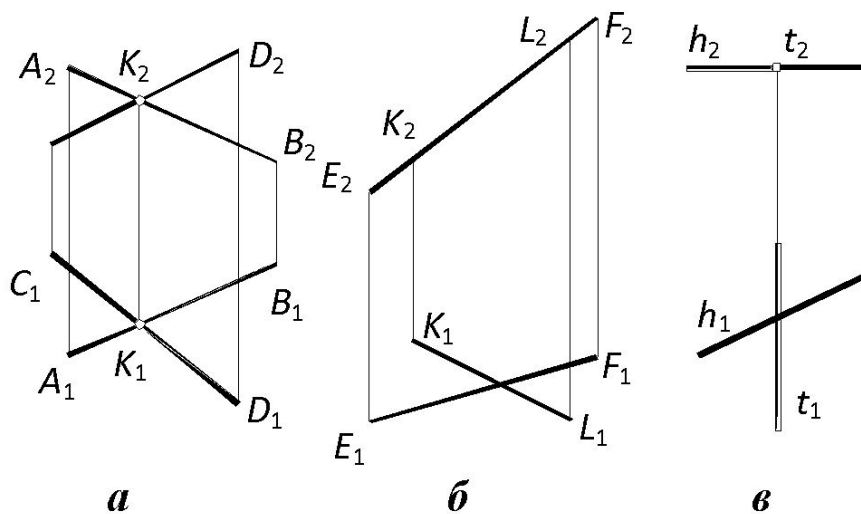


Рис. 3.9

3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

Мимобіжні прямі. Якщо дві прямі лінії не паралельні між собою і не перетинаються, то вони перехрещуються у просторі. Подібні прямі називають мимобіжними. Вони не мають спільної точки. Однойменні проекції двох мимобіжних прямих можуть перетинатися, але точки перетину кожної пари проекцій цих прямих не лежать на одній лінії сполучення.

Для визначення мимобіжності прямих загального положення досить мати дві пари їх однойменних проекцій. У таких випадках, по-перше, однойменні проекції (принаймні хоч би одна) обов'язково перетинаються, по-друге, на противагу рис. 3.9,*a* ці точки перетину не повинні бути розташованими на одній лінії сполучення.

На рис. 3.10 наведено приклад двох мимобіжних прямих a і b загального положення, однойменні проекції яких перетинаються в проекціях точок A_1 і B_2 .

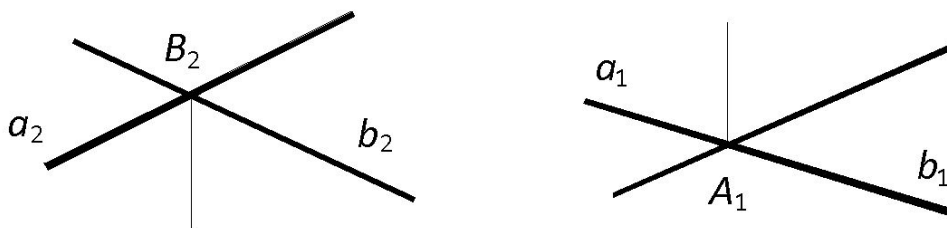


Рис. 3.10

3.5. Визначення видимості геометричних образів

Точка перетину однойменних проекцій мимобіжних прямих, наприклад на площині Π_1 (рис. 3.11,*a*) є проекцією двох точок, що лежать на одному перпендикулярі до площини Π_1 , з яких одна (точка 1) належить прямій a , а друга (точка 2) – прямій b .

Ці точки однаково віддалені від площини проекцій Π_2 , але відстань їх від площини Π_1 різна: точка 1 розташована далі від площини Π_1 , ніж точка 2 (рис. 3.11,*б*). Таким чином, якщо

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

дивитись на площину Π_1 у напрямку проєкціювання, точка 1, що належить прямій a , буде закривати точку 2, яка знаходиться на прямій b . Тому проєкцію цієї точки на площині Π_1 , тобто 2_1 , взято в дужки. Цим самим умовно визначено факт її невидимості.

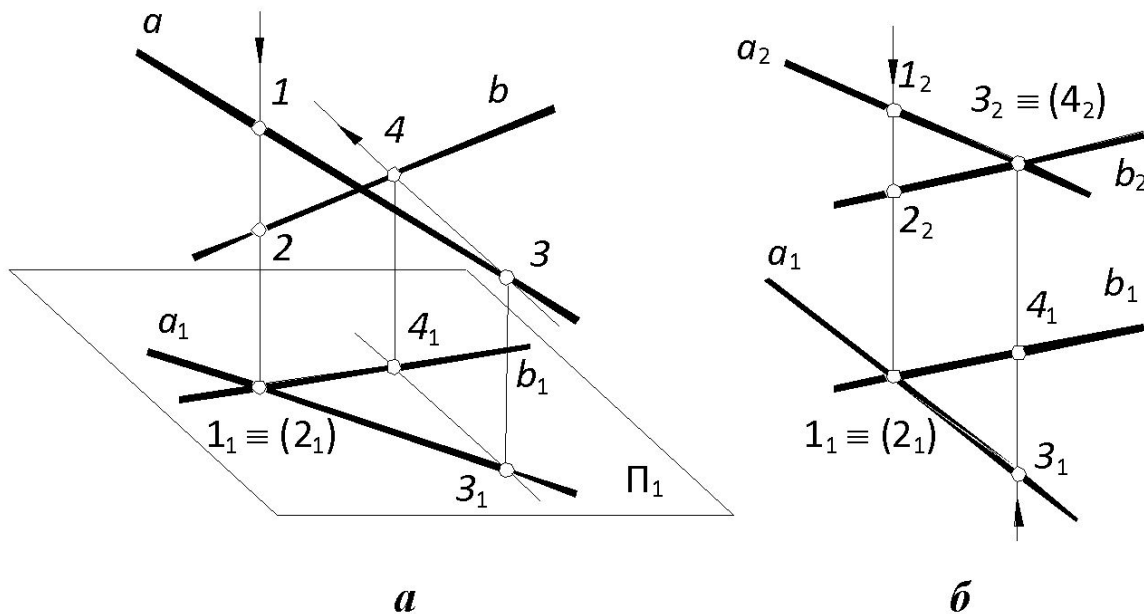


Рис. 3.11

Так само точка перетину проєкцій прямих на площині Π_2 є проєкцією двох точок 3 та 4, які знаходяться на одному перпендикулярі до площини проєкцій Π_2 . Точка 3 належить прямій a і закриває собою точку 4, що знаходиться на прямій b . Тому проєкцію точки 4 на площині Π_2 (проєкцію 4_2) треба взяти в дужки, оскільки вона невидима.

Пару точок, розташованих на одному перпендикулярі до площини проєкцій, називають *конкуруючими точками*. За їх допомогою визначається видимість геометричних фігур на епюрі. Такий спосіб визначення видимості геометричних елементів називається способом *конкуруючих точок*.

Слід пам'ятати, що з двох горизонтально конкуруючих точок на площині проєкцій Π_1 видимою буде точка, що роз-

3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

ташована вище, а з двох фронтально конкуруючих точок на площині проєкцій Π_2 видима точка, що розташована ближче (відносно спостерігача, який стоїть обличчям до площини проєкцій Π_2).

3.6. Взаємні положення точки та прямої

Наступною позиційною задачею є задача, пов'язана з визначенням взаємного розташування точки й прямої. Точка та пряма у просторі можуть займати такі положення по відношенню одна до одної:

- точка лежить на прямій;
- точка не лежить на прямій.

Для визначення приналежності точки до прямої потрібно розглянути їх проєкції. Точка належить прямій, якщо її проєкції належать тим же проєкціям прямої та знаходяться на одній лінії сполучення. Точка не належить прямій, коли хоча б одна з її проєкцій не належить тій же проєкції прямої. Справедливі й зворотні пропозиції, якщо тільки пряма не є профільною. На рис. 3.12 показані прямі m і n . Точка A , проєкції якої знаходяться на відповідних проєкціях прямої m , належить цій прямій.

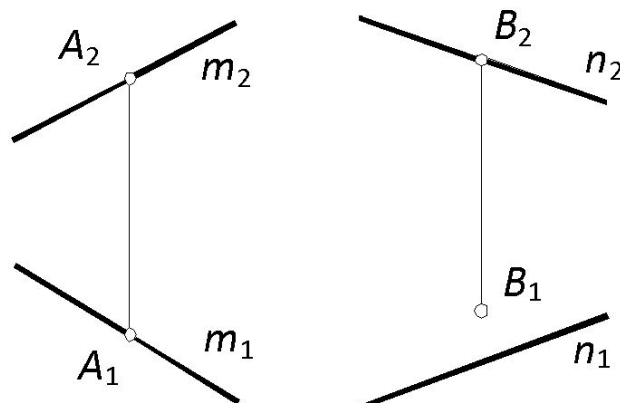


Рис. 3.12

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

Коли точка не належить прямій лінії, можливі два варіанти:

1) жодна з проєкцій точки не належить відповідній проєкції прямої (випадок очевидний);

2) одна із проєкцій точки належить однойменній проєкції прямої лінії. Точка B (див. рис. 3.12) не належить прямій n , оскільки її горизонтальна проєкція не знаходиться на горизонтальній проєкції прямої.

Для визначення взаємного розташування точки та профільної прямої рівня необхідно побудувати проєкції цих образів на площині проєкцій Π_3 .

На рис. 3.13 точка M належить профільній прямій рівня p , оскільки всі її проєкції лежать на проєкціях профільної прямої, а точка N не належить цій прямій, хоча її горизонтальна і фронтальна проєкції знаходяться на відповідних проєкціях профільної прямої.

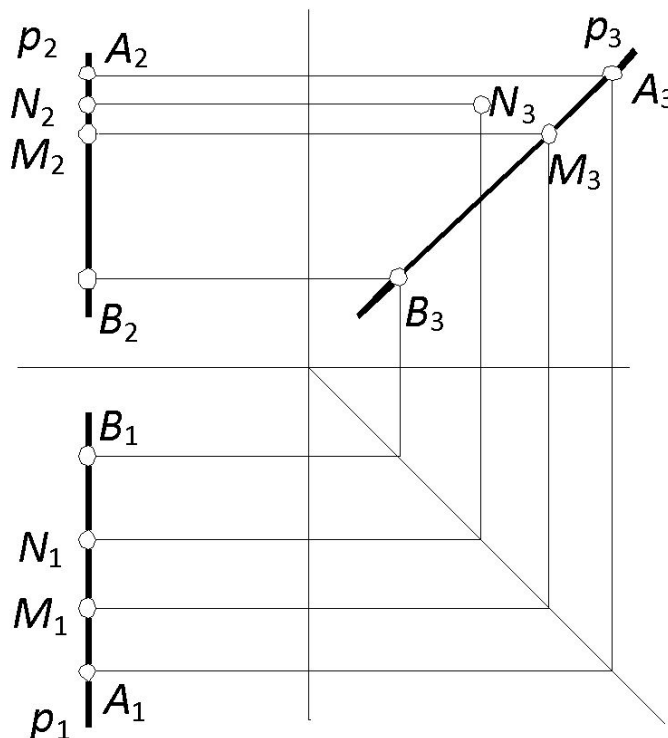


Рис. 3.13

3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ

3.7. Проекції прямого кута

При розв'язуванні багатьох задач суттєву роль відіграє умова перпендикулярності прямих і площин. Необхідно з'ясувати, як ця умова виконується на комплексному кресленні. Для цього визначимо властивості ортогональних проекцій прямого кута.

З елементарної геометрії відомо, що прямий кут проєкціюється на площину проєкцій в натуральну величину, якщо прямі, які його утворюють, розташовані паралельно цій площині (рис. 3.14,*а*). Якщо обидві прямі, які формують прямий кут, є прямими загального положення, то такий кут проєкціюється на площину проєкцій зі спотворенням (рис. 3.14,*б*).

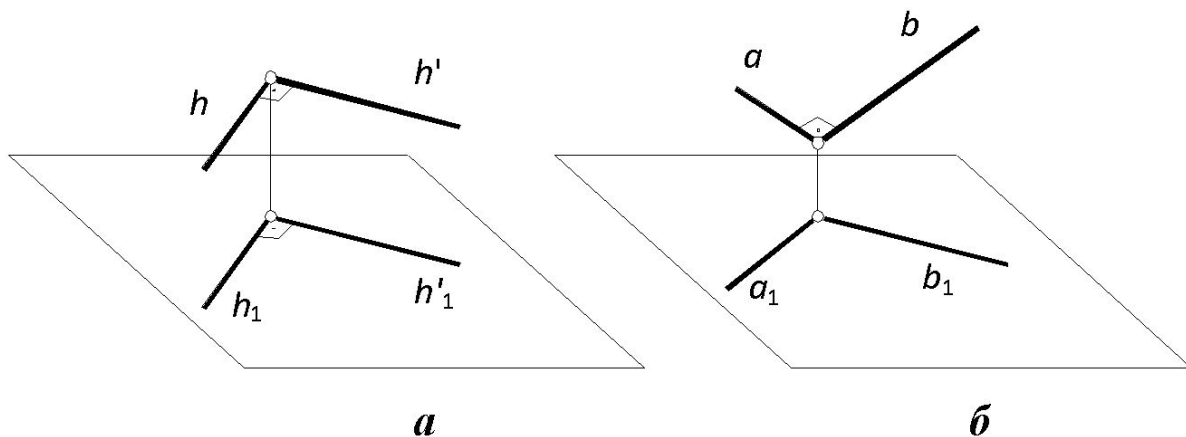


Рис. 3.14

У нарисній геометрії також при розв'язуванні багатьох задач дуже важливу роль відіграють проекції прямого кута. Якщо одна зі сторін прямого кута паралельна площині проєкцій, то його проєкція на цю площину проєкцій є також прямим кутом.

Нехай прямий кут A (рис. 3.15) утворюється прямою загального положення c і горизонталлю h . На горизонтальну площину проєкцій цей кут спроекціюється без спотворення. Довести це можна наступним чином.

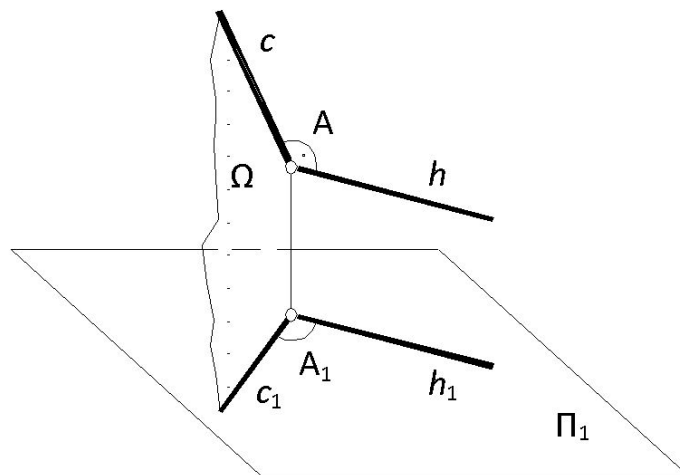


Рис. 3.15

Через пряму c та вертикальну лінію сполучення AA_1 проводимо площину Ω . Оскільки $h \perp c$ (за умови задачі) та $h \perp AA_1$ (за умови ортогонального проєкціювання), горизонталь h буде перпендикулярною до допоміжної площини Ω , тобто $h \perp \Omega$. З цього випливає, що проєкція $h_1 \perp \Omega$, оскільки $h \parallel h_1$. Звідси можна стверджувати, що $h \perp c_1$, і далі, що $h_1 \perp c_1$. Таким чином доведено, що прямий кут A на площину проєкцій Π_1 проєкціюється в натуральну величину.

Можна легко показати, що прямий кут неможливо спроекціювати ортогонально в прямий кут, якщо жодна зі сторін цього прямого кута не паралельна площині проєкцій. Інакше кажучи, якщо ортогональна проєкція прямого кута є прямим кутом, то, принаймні, одна зі сторін прямого кута розташовується паралельно площині проєкцій.

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

4.1. Способи задання площини на комплексному кресленні

Площина є найпростішою поверхнею. Вона належить до незамкнених поверхонь, оскільки її завжди можна продовжити. Площину в нарисній геометрії розглядають як поверхню нескінченно малої товщини та непрозору.

Площина може займати різні положення по відношенню до площин проекцій. Площину, яка не перпендикулярна та не паралельна жодній з площин проекцій, називають *площиною загального положення*. Вона не може бути показана на комплексному кресленні своїми проекціями (на відміну від точки чи прямої), оскільки це нескінченний геометричний образ, який перекриває все поле проекцій.

Відомо, що через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і тільки одну. Отже, на комплексному кресленні площину можна показати проекціями геометричних елементів, які повністю визначають її положення у просторі, а саме:

- а) трьома точками, які не лежать на одній прямій (рис. 4.1,*а*);
- б) прямою і точкою, розташованою поза прямою (рис. 4.1,*б*);
- в) двома прямими, що перетинаються (рис. 4.1,*в*);

- г) двома паралельними прямими (рис. 4.1,з);
 д) трикутником або іншою n -кутною плоскою фігурою (рис. 4.1,д).

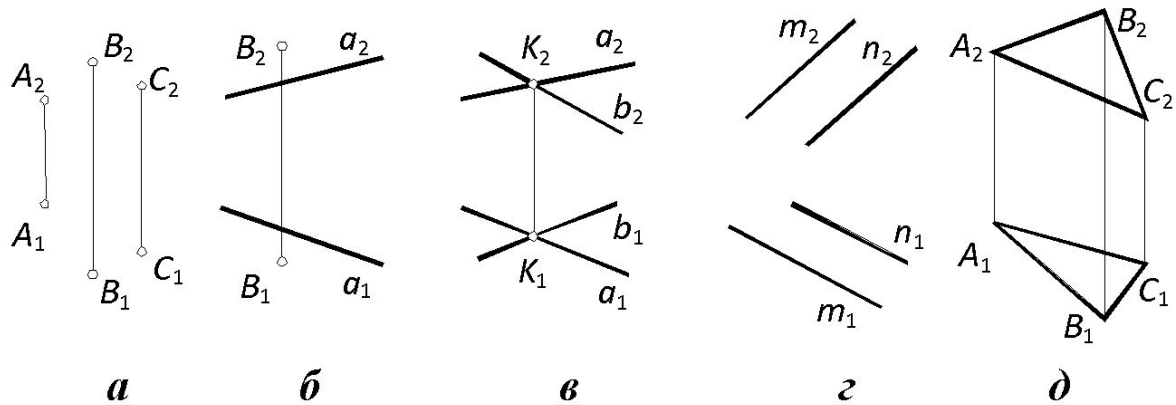


Рис. 4.1

Очевидно, що від одного способу задання площини легко перейти до іншого. Таким чином, щоб перейти від задання площини прямою та точкою до задання її трикутником, треба з'єднати точку з кінцями відрізка прямої.

Площини позначають великими літерами грецького алфавіту, разом із якими у дужках вказують на спосіб їх задання. Наприклад, $\Sigma(A,B,C)$ – площину "сигма" задано за допомогою трьох точок A , B та C ; $\Omega(AB \times BC)$ – площину "омега" задано двома відрізками, що перетинаються.

Існує ще один спосіб задання площини на кресленні – це спосіб слідів. На рис. 4.2,а зображено площину Σ загального положення. Прямі, за якими ця площина перетинається з площинами проєкцій, називаються *слідами площини*. Фронтальний слід f_0 – це лінія перетину площини Σ з площиною проєкцій Π_2 ; горизонтальний слід h_0 – з площиною проєкцій Π_1 ; профільний слід p_0 – з площиною проєкцій Π_3 . Точки парного перетину слідів площини на осях проєкцій називаються *точками збігу слідів площини*. Комплексне креслення площини Σ показано на рис. 4.2,б.

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

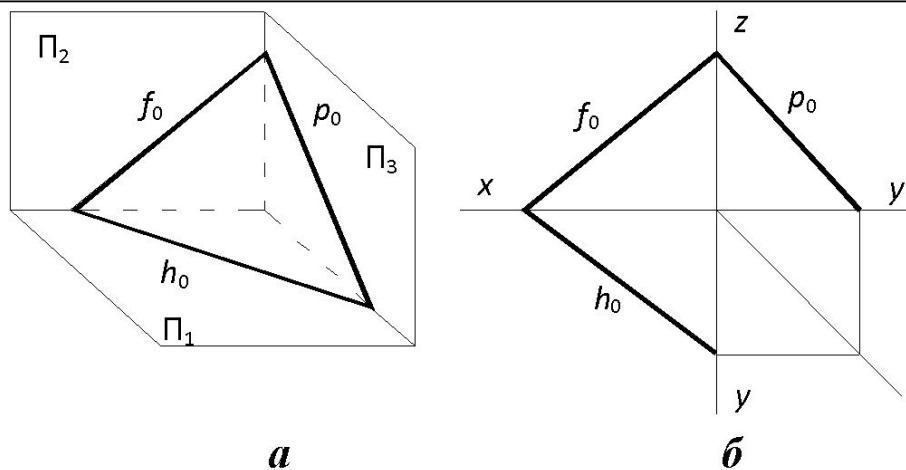


Рис. 4.2

4.2. Площини окремого положення

До площин *окремого положення* належать площини, перпендикулярні або паралельні площинам проєкцій. Площини окремого положення поділяють на *площини рівня* та *площини проєкціювальні*.

Площини рівня. *Площина рівня* – це площина, паралельна одній із площин проєкцій. Вона перпендикулярна до двох інших площин проєкцій та проєкціюється на них у пряму лінію. Розрізняють три види площин рівня: *горизонтальну* Θ , паралельну площині Π_1 (рис. 4.3, *а* і *б*); *фронтальну* Φ , паралельну площині Π_2 (рис. 4.3, *а* і *в*), і *профільну* Δ , паралельну площині Π_3 (рис. 4.3, *а* і *г*).

Площина рівня має такі проєкційні ознаки:

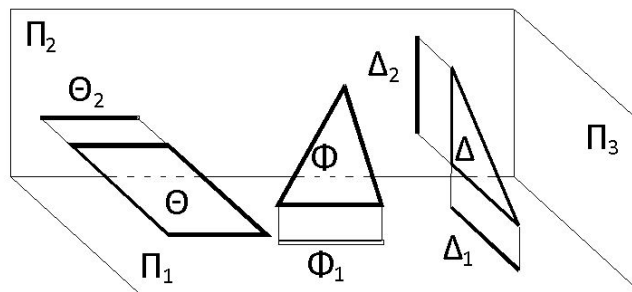
1. Довільна фігура, яка знаходиться у площині рівня, проєкціюється в натуральну величину на ту площину проєкцій, якій ця площина рівня паралельна. На дві інші площини проєкцій ця фігура проєкціюється у вигляді відрізків прямих ліній, які займають вертикальне або горизонтальне положення. Так, прямокутник Θ проєкціюється в натуральну величину на площину Π_1 (див. рис. 4.3, *б*), оскільки він лежить у горизонтальній площині рівня. На площину проєкцій Π_2 цей прямокутник проєкціюється у вигляді горизонтального

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

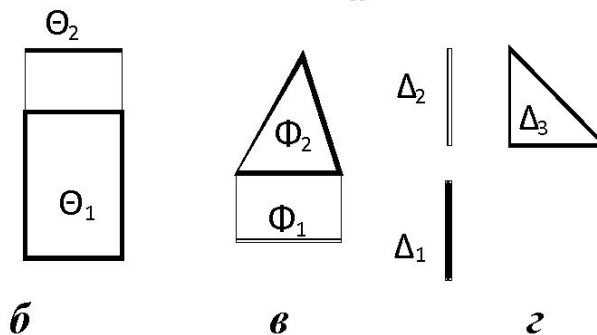
відрізка Θ_2 . Проекцію площини рівня у вигляді прямої прийнято називати *слідом-проекцією*.

2. Сліди-проекції площин рівня мають збиральну властивість, яка визначається тим, що проекції геометричних образів, які лежать у цих площинах, розташовуються на слідах-проекціях.

3. Необмежену певною фігурою площину рівня можна задати лише одним слідом-проекцією. Наприклад, горизонтальну площину рівня можна задати слідом-проекцією Σ_2 (рис. 4.4,*а*), фронтальну площину рівня – слідом-проекцією Γ_1 (рис. 4.4,*б*), профільну площину рівня – двома слідами-проекціями (рис. 4.4,*в*).



а

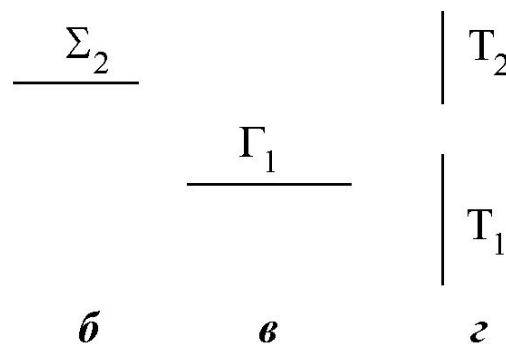


б

в

г

Рис. 4.3



б

в

г

Рис. 4.4

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИН

Проекціювальні площини. Проекціювальною називається площина, перпендикулярна до однієї з площин проєкцій. Оскільки площин проєкцій три, то розрізняють три види проєкціювальних площин: *горизонтально-проекціювальну* T , перпендикулярну до площини проєкцій Π_1 (рис. 4.5, *а і б*); *фронтально-проекціювальну* Ξ , перпендикулярну до площини проєкцій Π_2 (рис. 4.5, *а і в*), і *профільно-проекціювальну* Ψ , перпендикулярну до площини проєкцій Π_3 (рис. 4.5, *а і г*).

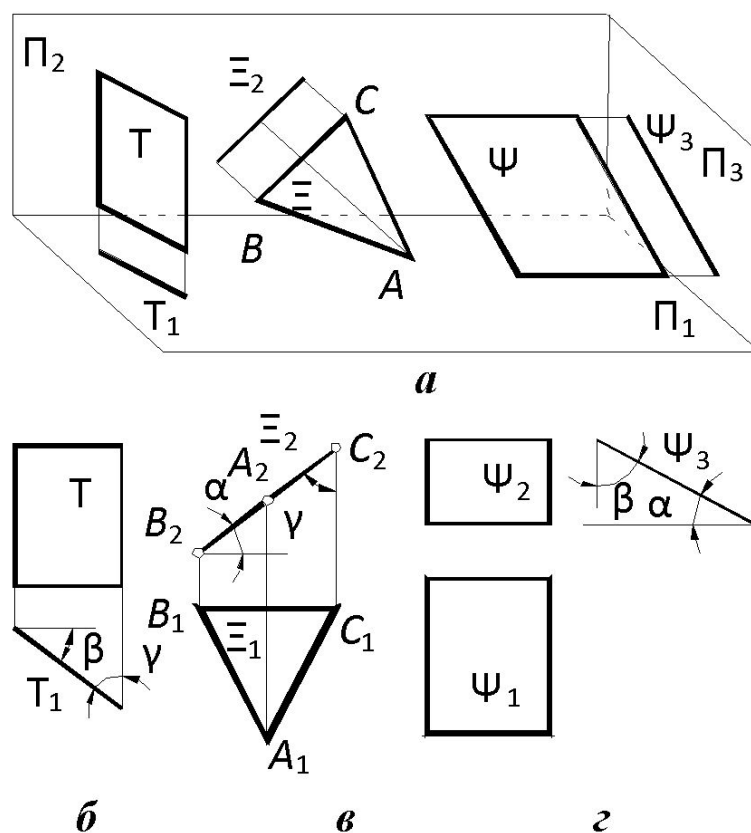


Рис. 4.5

Проекціювальна площина має такі проєкційні ознаки:

1. Проекціювальна площина на перпендикулярній до неї площині проєкцій зображується прямою лінією (слідом-проєкцією). На двох інших площинах проєкцій геометричний образ, що знаходиться у проєкціювальній площині, зображується зі спотворенням. Наприклад, трикутник ABC , який

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

лежить у фронтально-проекціювальній площині (див. рис. 4.5,в), зображується на площині проєкцій Π_2 у вигляді відрізка, нахиленого до осей Ox і Oz , а його горизонтальна проєкція $A_1B_1C_1$ не дорівнює натуральній величині трикутника ABC .

2. Слідам-проєкціям проєкціювальних площин притаманна збиральна властивість.

3. На кресленні горизонтально-проекціювальну площину

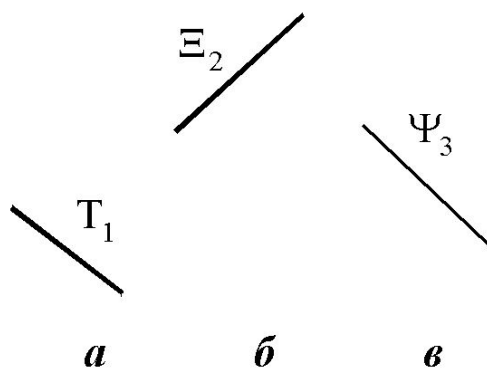


Рис. 4.6

можна задати лише одним слідом-проєкцією (рис. 4.6,а). Це також відноситься до фронтально-проекціювальних (рис. 4.6,б) та профільно-проекціювальних (рис. 4.6,в) площин.

4. За комплексним кресленням

можна визначити кути нахилу проєкціювальної площини до площин проєкцій. Позначимо кути нахилу

площини до площин проєкцій Π_1 , Π_2 , Π_3 , малими грецькими буквами α , β , γ , відповідно. Кут α для горизонтально-проекціювальної площини дорівнює 90° , а кути β і γ нахилу до площин проєкцій Π_2 і Π_3 можна виміряти на комплексному кресленні (див. рис. 4.5,б). Сума кутів β і γ дорівнює 90° .

4.3. Прямі і точки, що належать площині

Як зазначалося вище, задачі на взаємну приналежність різних геометричних образів належать до так званих позиційних задач. Розглянемо ще одну групу цих задач, пов'язаних із побудовою точок і прямих ліній у площині.

Пряма належить площині, якщо проходить через дві точки, що належать цій площині (рис. 4.7,а). Вона також належить площині, якщо проходить через одну з прямих цієї площини паралельно іншій прямій, проведеній у цій площині (рис. 4.7,б).

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

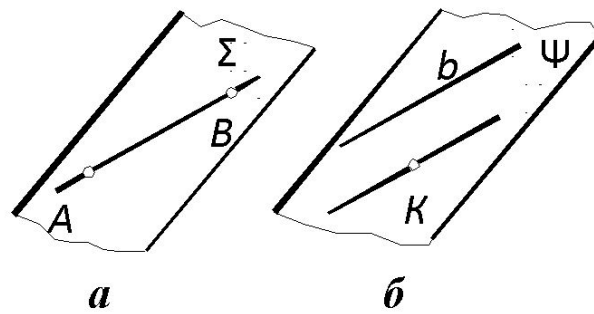


Рис. 4.7

Побудова точок і прямих у площинах окремого положення не викликає ускладнень, оскільки одна з проекцій цих геометричних образів збігається з однойменною проекцією площини. Приклади точок та прямих ліній, що знаходяться у площинах окремого положення, показані на рис. 4.8.

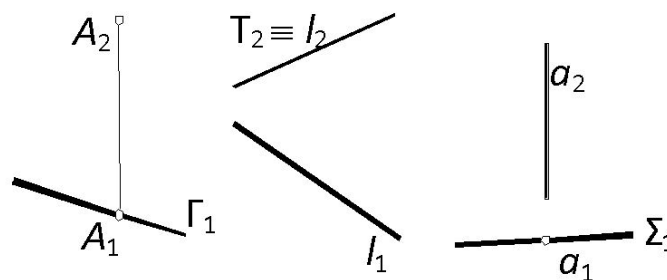


Рис. 4.8

Для побудови довільної прямої у площині загального положення досить задати її довільну горизонтальну або фронтальну проекцію, а другу проекцію визначити за вертикальною відповідністю. Припустимо, що в площині ABC треба провести довільну пряму MN (рис. 4.9). Побудову можна почати з будь-якої проекції, наприклад, з фронтальної M_2N_2 . Ця проекція перетне трикутник у точках M_2 і N_2 . Провівши вертикальні лінії сполучення, знайдемо горизонтальні проекції M_1 і N_1 на відповідних сторонах трикутника. Пряма M_1N_1 і є шуканою горизонтальною проекцією прямої.

Розглянемо ще один приклад. Деяка площина загального положення задана трьома точками A , B і C (рис. 4.10). Треба провести через точку C будь-яку пряму, яка належить площині ABC . З'єднаємо точки A і B , одержимо пряму AB , яка лежить у площині ABC . Далі проводимо пряму CD так, щоб вона лежала у площині. Для цього на фронтальній проекції проводимо C_2D_2 , де D_2 – точка перетину проекцій A_2B_2 і C_2D_2 . Оскільки точка D належить прямій AB , то проекції точки D лежать на одній лінії сполучення. Будуємо проекцію D_1 точки D (проводимо вертикальну лінію сполучення із точки D_2 до перетину з A_1B_1 і одержуємо горизонтальну проекцію D_1 точки D). У горизонтальній площині маємо дві точки C_1 та D_1 , що лежать у площині ABC , тобто пряма C_1D_1 є горизонтальною проекцією CD . Пряма CD є шуканою прямою, яка належить площині ABC та проходить через точку C .

Точка лежить у площині, якщо вона лежить на прямій, що належить цій площині. Щоб побудувати проекції точки, яка належить площині, треба у цій площині побудувати проекції прямої та взяти на ній точку.

На рис. 4.11 площину задано паралельними прямими l і m . Треба знайти горизонтальну проекцію A_1 точки A , що лежить у цій площині, за умови, що відома її фронтальна проекція A_2 . Через A_2 проводимо фронтальну проекцію I_22_2 довільної допоміжної прямої, що належить площині. Знаходимо горизонтальну проекцію I_12_1 цієї прямої та проводимо вертикальну лінію сполучення A_2A_1 до перетину з I_12_1 . Точка A_1 є горизонтальною проекцією шуканої точки A .

На рис. 4.12 побудовано фронтальну проекцію деякої точки K , яка лежить у площині трикутника ABC за умови, що відома її горизонтальна проекція K_1 .

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

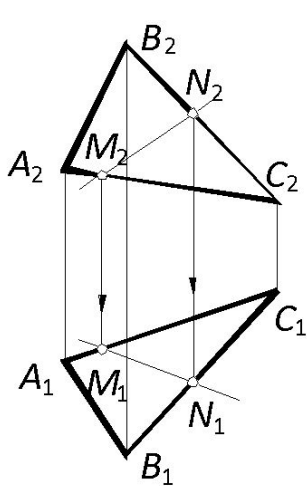


Рис. 4.9

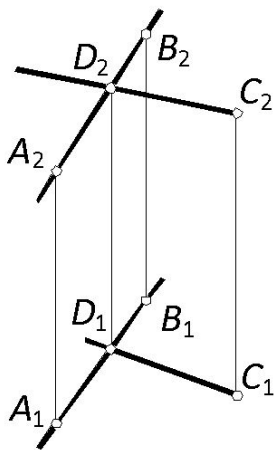


Рис. 4.10

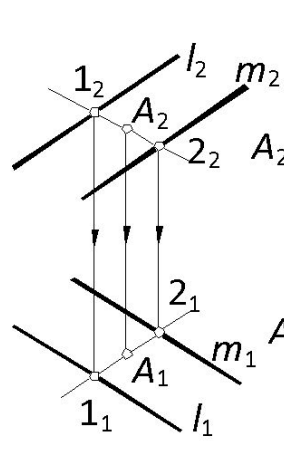


Рис. 4.11

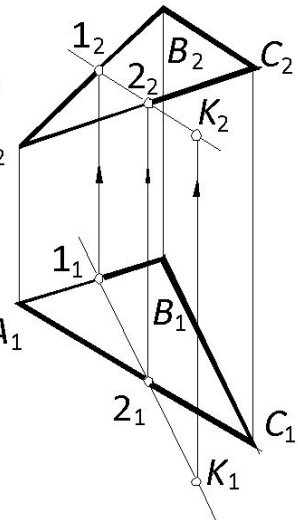


Рис. 4.12

4.4. Головні лінії площини

До головних ліній площин належать *лінії рівня* та *лінії найбільшого нахилу* до площин проекцій.

Лінії рівня. Лініями рівня площини називають лінії, паралельні одній із площин проекцій та належать заданій площині.

Горизонталлю h деякої площини є пряма, що належить цій площині та проходить паралельно площині проекцій Π_1 . Фронтальна проекція h_2 горизонталі h паралельна осі проекцій Ox . Побудову горизонталі починають з проведення її фронтальної проекції h_2 . На рис. 4.13, **а** площину задано прямими a і b , що перетинаються в точці C . Проводимо $h_2 \parallel Ox$ до перетину з фронтальними проекціями прямих a_2 і b_2 в точках 1_2 і 2_2 . Горизонтальні проекції 1_1 і 2_1 цих точок знаходяться на вертикальних лініях сполучення. Пряма h_1 є горизонтальною проекцією горизонталі h . У площині можна провести безліч горизонталей.

Горизонталь, що належить горизонтально-проекціоувальній площині Θ , зображено на рис. 4.13, **б**, а горизонталь,

що лежить у фронтально-проекціювальній площині Σ , – на рис. 4.13,в.

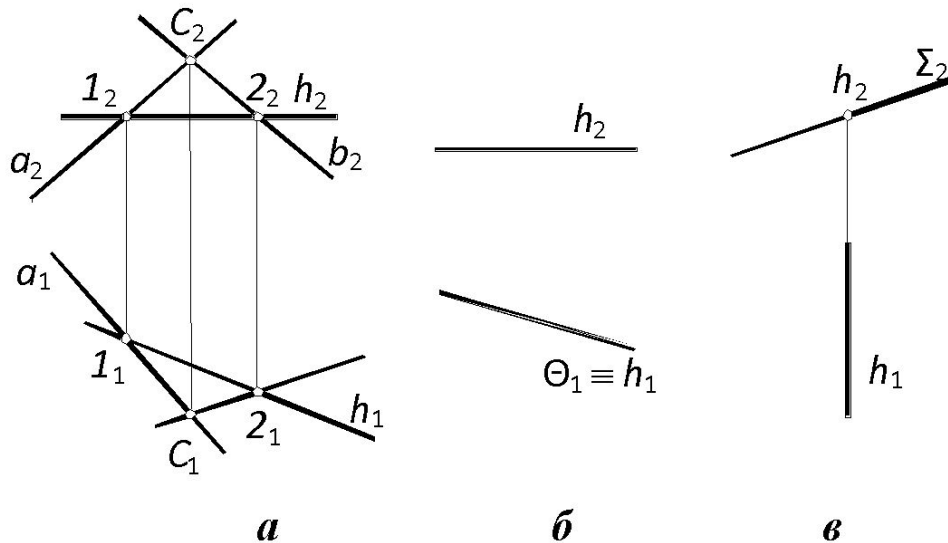


Рис. 4.13

Фронталлю f площини називається пряма, що належить цій площині і проходить паралельно площині проєкцій Π_2 . Горизонтальна проєкція f_1 фронталі f паралельна осі Ox . Побудову фронталі починають з її горизонтальної проєкції f_1 .

На рис. 4.14 площину задано трикутником ABC . Проводимо $f_1 \parallel Ox$, яка перетинає горизонтальні проєкції A_1B_1 і B_1C_1 у точках 1_1 і 2_1 . Провівши вертикальні лінії сполучення, знаходимо фронтальні проєкції 1_2 і 2_2 цих точок і з'єднуємо їх. Пряма f_2 є фронтальною проєкцією фронталі f . У площині можна провести безліч фронталей, паралельних між собою.

Фронталь у фронтально-проекціювальній площині Θ показано на рис. 4.14,б, а в горизонтально-проекціювальній площині Γ – на рис. 4.14,в.

Лінії найбільшого нахилу. Лінії найбільшого нахилу площини до площин проєкцій – це лінії, що належать площині та утворюють найбільший кут з відповідною площиною проєкцій. По відношенню до площини проєкцій Π_1 їх ще називають лініями скату.

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

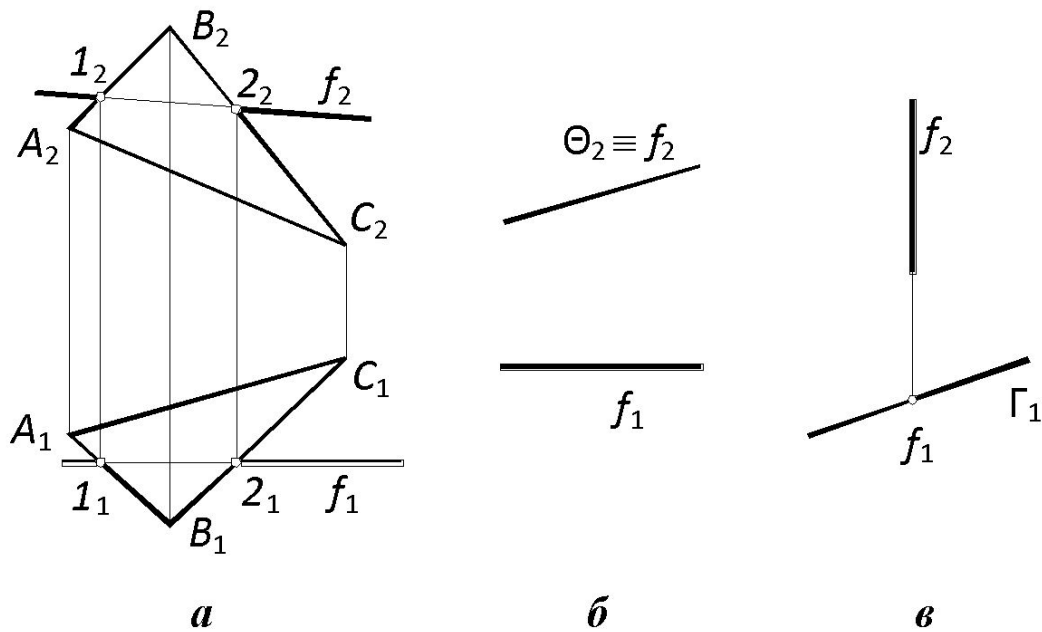


Рис. 4.14

Лінія найбільшого нахилу до Π_1 перпендикулярна до горизонталі цієї площини, лінія найбільшого нахилу до Π_2 – до фронталі, а лінія найбільшого нахилу до Π_3 – до профільної прямої рівня.

Якщо у площині Φ (рис. 4.15,а) провести пряму t , перпендикулярну до горизонталі h , то з усіх прямих цієї площини вона утворить найбільший кут нахилу α до площини Π_1 . Це лінія скату. Згідно з теоремою про проєкції прямого кута можна зробити висновок, що прямий кут, утворений певною лінією скату t та горизонталлю h , спроекціюється на площину Π_1 без спотворення. Це означає, що горизонтальна проєкція t_1 перпендикулярна до h_1 , тобто $t_1 \perp h_1$.

На рис. 4.15,б лінію скату побудовано на комплексному кресленні. Площину Φ задано трикутником ABC . Лінія скату t проходить через вершину B , перпендикулярно до горизонталі h . Одночасно визначено кут нахилу α відрізка BK лінії скату до площини проєкцій Π_1 . Для цього застосовано метод прямокутного трикутника. Слід пам'ятати, що знайдений кут

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

дорівнює куту нахилу заданої площини α до площини проєкцій Π_1 .

Для визначення кута нахилу β заданої площини до фронтальної площини проєкцій Π_2 необхідно побудувати фронталь f і лінію нахилу $q_2 \perp f_2$. Приклад розв'язування цієї задачі показано на рис. 4.15, в.

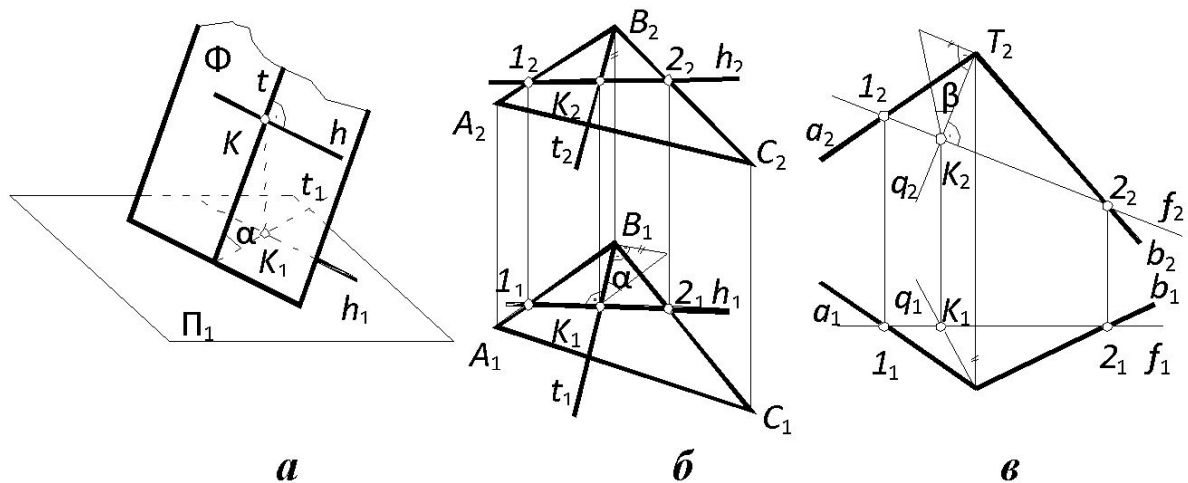


Рис. 4.15

4.5. Прямі, паралельні та перпендикулярні до площин

Проведення прямих, паралельних та перпендикулярних до довільних площин, базується на відповідних теоремах елементарної геометрії.

Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій, яка належить цій площині. Для проведення прямої a , паралельній площині Σ , необхідно в заданій площині Σ провести довільну пряму b , а потім через деяку точку простору T провести пряму a , паралельну прямій b (рис. 4.16, а).

На рис. 4.16, б через точку T проведено пряму a , паралельну площині загального положення, яку задано прямою d і точкою M поза нею. Проекцію прямої a_2 проведено паралельно $M_2 1_2$, а проекцію a_1 – паралельно $M_1 1_1$, де M_1 – до-

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

вільна пряма, що проходить через точку M та перетинає пряму d у точці I .

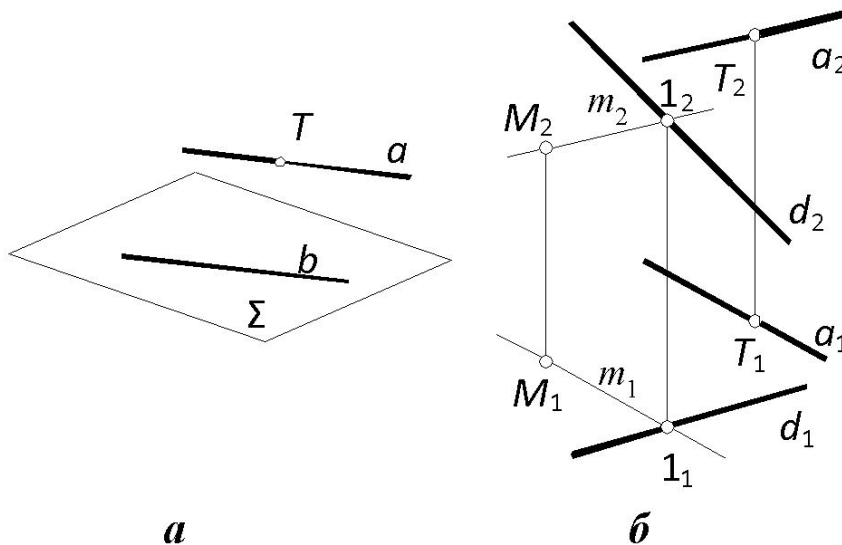


Рис. 4.16

При побудові прямої, паралельної площині Σ , замість довільної прямої у цій площині можна взяти головну її лінію, наприклад лінію рівня.

Для перевірки паралельності прямої деякій площині достатньо у площині побудувати проекції цієї прямої (рис. 4.17). Одну із проекцій прямої, наприклад $1_1 2_1$, проводять паралельно однойменній проекції заданої прямої $t(t_1)$. Якщо інша проекція цієї прямої паралельна однойменній проекції заданої прямої, то пряма та площина взаємно паралельні. У протилежному випадку пряма не буде паралельна заданій площині. На рис. 4.17 пряма, яка проведена через точку A , не паралельна площині.

На рис. 4.18 через деяку точку K проведено пряму l , яка є паралельною горизонтально-проекціювальній площині Θ . У цьому випадку через K_1 проводимо горизонтальну проекцію l_1 шуканої прямої паралельно сліду-проекції Θ_1 .

Фронтальна проекція l_2 пройде через K_2 довільно. Отже, умова паралельності прямої та площини окремого положення

полягає в тому, що проекція прямої має бути паралельною однойменному сліду-проекції площини.

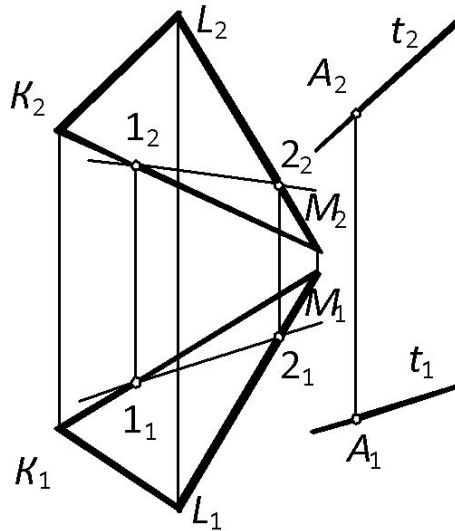


Рис. 4.17

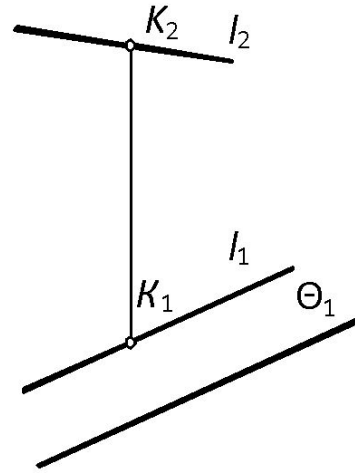


Рис. 4.18

Пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, які перетинаються і належать цій площині.

Перпендикуляр до площини буде перпендикулярним до будь-якої прямої, що проведена у цій площині. Через кожну точку простору можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до заданої площини.

На рис. 4.19,а показано пряму n , перпендикулярну до двох прямих a і b , що лежать у площині Ξ та взаємно перетинаються, тому можна стверджувати, що пряма n перпендикулярна до площини Ξ , тобто $n \perp \Xi$. На комплексному кресленні довільний вибір прямих a і b не призведе до бажаного результату, оскільки прямі кути між прямими загального положення n і a та n і b проєкціюються на площини проєкцій зі спотворенням. За теоремою про проєкції прямого кута випливає, що замість довільних прямих a і b треба взяти дві головні прямі площини – горизонталь h і фронталь f , які визна-

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

чають напрями проекцій перпендикуляра відповідно на площинах проекцій Π_1 та Π_2 .

Для проведення перпендикуляра до заданої площини (рис. 4.19,б) треба провести горизонтальну його проекцію n_1 перпендикулярно до h_1 ($n_1 \perp h_1$), а фронтальну проекцію n_2 перпендикулярно до f_2 ($n_2 \perp f_2$). Або інакше: якщо пряма перпендикулярна до площини, то проекції цієї прямої перпендикулярні до відповідних проекцій горизонталі та фронталі цієї площини.

На комплексному кресленні (рис. 4.19,в) через точку T проведено перпендикуляр n до площини Σ , заданої двома прямими a і b , що перетинаються. Спочатку в площині Σ будують горизонталь h та фронталь f , а потім через точку T проводять проекції перпендикуляра n ($n_1 \perp h_1$ та $n_2 \perp f_2$).

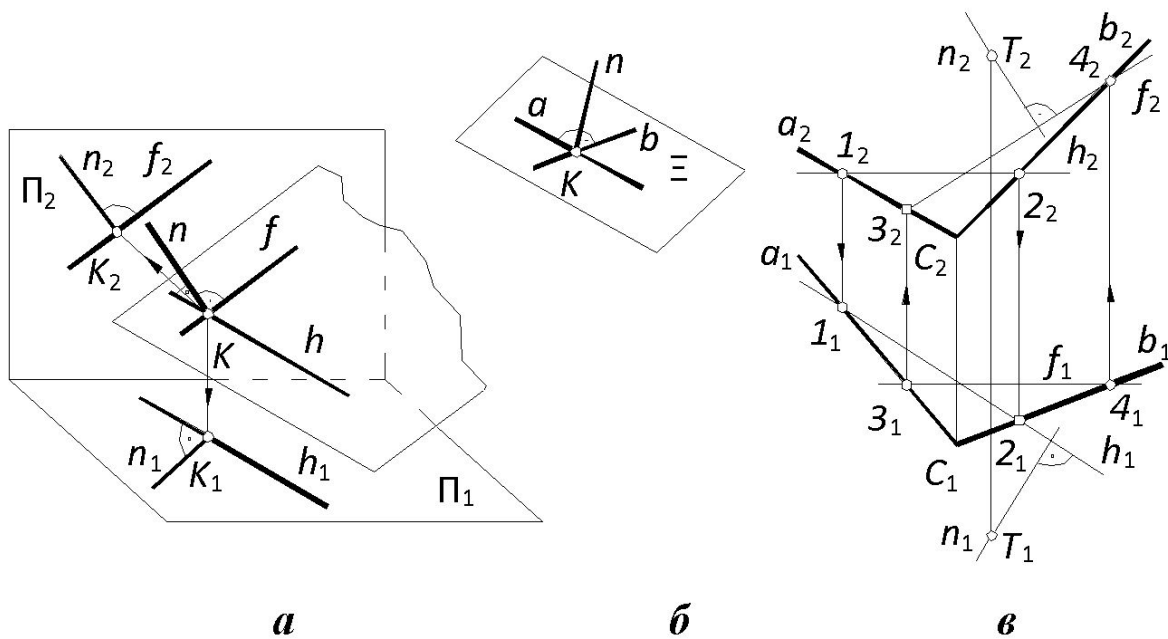


Рис. 4.19

Приклади проведення перпендикулярів до проєкціювальних площин показані на рис. 4.20.

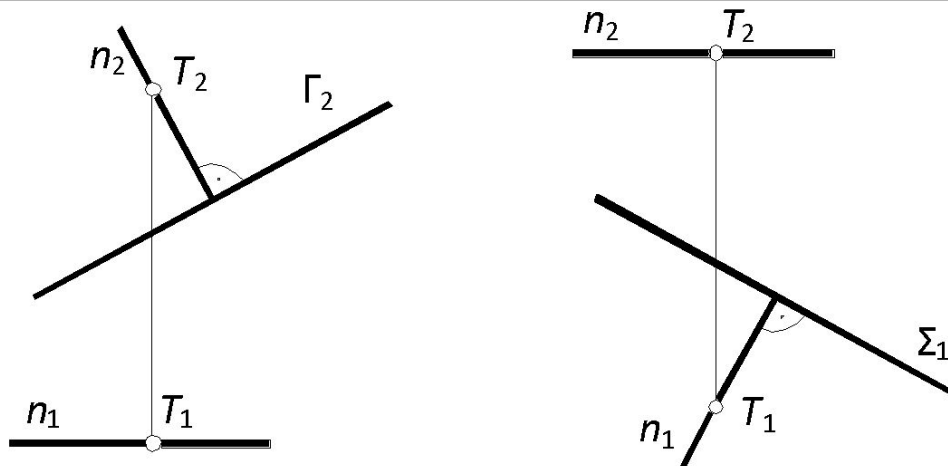


Рис. 4.20

4.6. Перетин прямої з площиною

Якщо пряма не належить площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину в єдиній точці. Задача на перетин прямої з площиною є також однією з позиційних задач. Можливі такі випадки розміщення геометричних образів:

- а) обидва геометричні образи є проєкціювальними по відношенню до однієї й тієї ж площини проєкцій;
- б) обидва геометричні образи є проєкціювальними по відношенню до різних площин проєкцій;
- в) пряма проєкціювальна – площина загального положення;
- г) пряма загального положення – площина окремого положення;
- д) обидва геометричні образи займають загальне положення.

На рис. 4.21, *а* показано випадок, коли площина – трикутний відсік ABC та пряма l займають горизонтально-проєкціювальне положення. Горизонтальна проєкція трикутного відсіку ніби збирає на себе проєкції всіх фігур, що належать площині відсіку. Збіг горизонтальних проєкцій відсіку та прямої дозволяє стверджувати, що в цьому випадку пряма l належить відсіку ABC .

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

Показаний на рис. 4.21,б інший випадок перетину прямої з площиною, які є проєкціювальними відносно різних площин проєкцій, можна вважати тривіальним. На рис. 4.21,в подано випадок знаходження точки перетину проєкціювальної прямої t з площиною загального положення, заданої прямими a і b , що перетинаються. Задача розв'язується за допомогою січної площини-посередника, проведеної через "вироджену" проєкцію прямої. За допоміжну січну площину-посередник беруть площину окремого положення. Друга проєкція точки перетину геометричних образів знаходиться у місці перетину лінії перетину допоміжної площини із заданою та проєкцією прямої t .

На рис. 4.21,г показано випадок, коли площина RST є горизонтально-проєкціювальною, а пряма l займає загальне положення. Точка M перетину прямої з площиною визначається безпосередньо на площині проєкцій Π_1 як точка перетину проєкцій прямої та площини. Фронтальна проєкція точки M визначається за вертикальною проєкційною відповідністю.

Якщо вважати трикутний відрізок непрозорим, приходимо до висновку, що частина відрізка прямої буде невидимою, бо він "перекривається" на площині проєкцій Π_2 площиною трикутника. Позначимо на площині Π_2 точку l_2 перетину проєкції прямої l_2 зі стороною відрізка R_2T_2 . За допомогою вертикальної лінії сполучення визначимо точку l_1 на площині та точку 2_1 – на прямій. Оскільки точка l розташована ближче до спостерігача, ніж точка 2 , то площина у цій точці "перекриває" пряму. Тому на площині проєкцій Π_2 відрізок проєкції прямої l_2 від точки M_2 до точки 2_2 буде невидимим.

Розглянемо, нарешті, останній випадок, коли пряма та площина займають у просторі загальне положення. Для визначення точки перетину прямої з площиною в цьому випадку доцільно застосувати спосіб допоміжних січних площин-посередників. Порядок розв'язання задачі такий:

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

– через задану пряму l проводять допоміжну площину T (ця площина для простоти побудови є площиною окремого положення);

– знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною січною площиною-посередником;

– визначають точку перетину двох прямих – заданої та лінії перетину.

На рис. 4.21, **д** через задану пряму l проведено горизонтально-проекціювальну площину T ($l_1 \equiv T_1$). Знайдено лінію перетину двох площин – пряму $1-2$ (її горизонтальною проекцією є відрізок $1_1 2_1$). За проекційною відповідністю визначено фронтальну проекцію прямої $1_2 2_2$. У перетині l_2 та $1_2 2_2$ знайдено шукану проекцію точки M_2 – точки перетину прямої з площиною. Горизонтальна проекція M_1 цієї точки знаходиться на вертикальній лінії сполучення. Видимість проекцій прямої l визначена методом конкуруючих точок 3 і 4 та 2 і 5 .

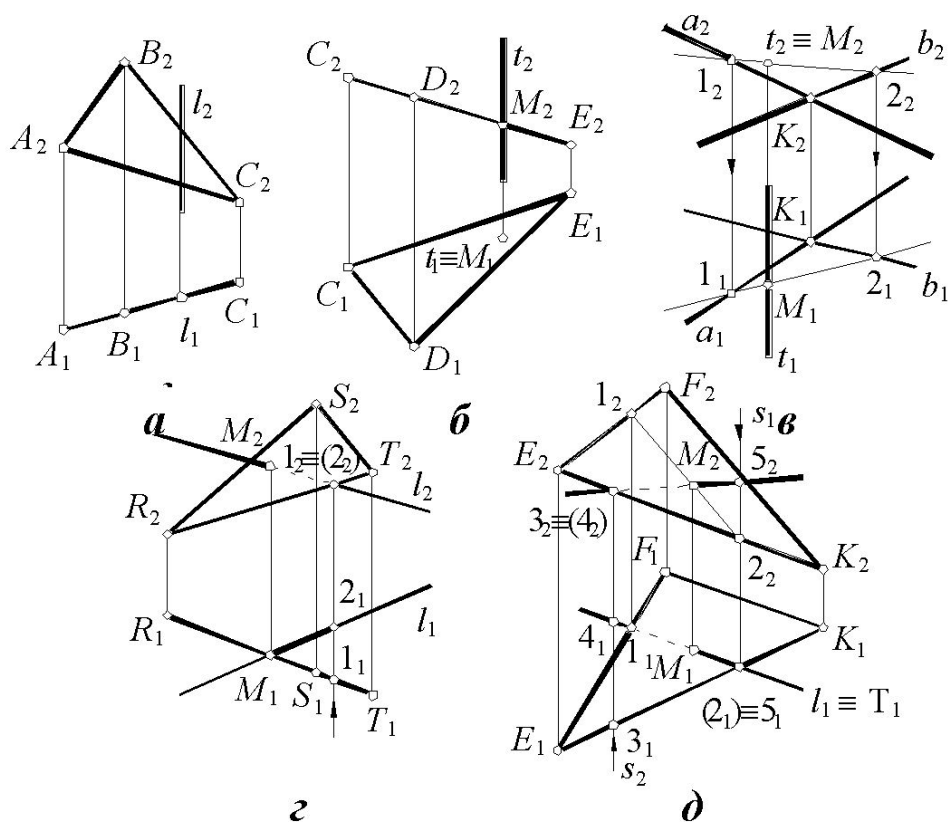


Рис. 4.21

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

Для з'ясування взаємного положення прямої та площини загального положення також доцільно скористатися способом допоміжних січних площин-посередників. При визначенні взаємного положення заданої прямої та знаходженні лінії перетину двох площин можливі три випадки:

- дві прямі перетинаються в одній точці, тобто задана пряма перетинається з площиною в цій точці;
- дві прямі паралельні, що означає паралельність заданих прямої та площини;
- дві прямі збігаються, тобто пряма належить площині.

На рис. 4.22,*а* зображено трикутний відсік ABC та пряму загального положення l . Для визначення їх взаємного положення використано фронтально-проекціювальну площину Σ , яку проведено через пряму l , та знайдено лінію перетину двох площин – пряму $l-2$. Із розгляду горизонтальних проекцій прямих l_1 та $l_1 2_1$ випливає, що пряма l перетинає площину ABC у точці D .

На рис. 4.22,*б* побудовано пряму m , паралельну площині ABC . Тут також побудовано пряму $l-2$, одержану в результаті перетину трикутного відсіку з фронтально-проекціювальною площиною Γ . Горизонтальна проекція прямої m_1 має бути паралельною горизонтальній проекції прямої $l-2$.

На рис. 4.22,*в* показано пряму n , проекції якої збігаються з проекціями прямої $l-2$, що належить площині ABC . А це означає, що пряма n належить цій площині.

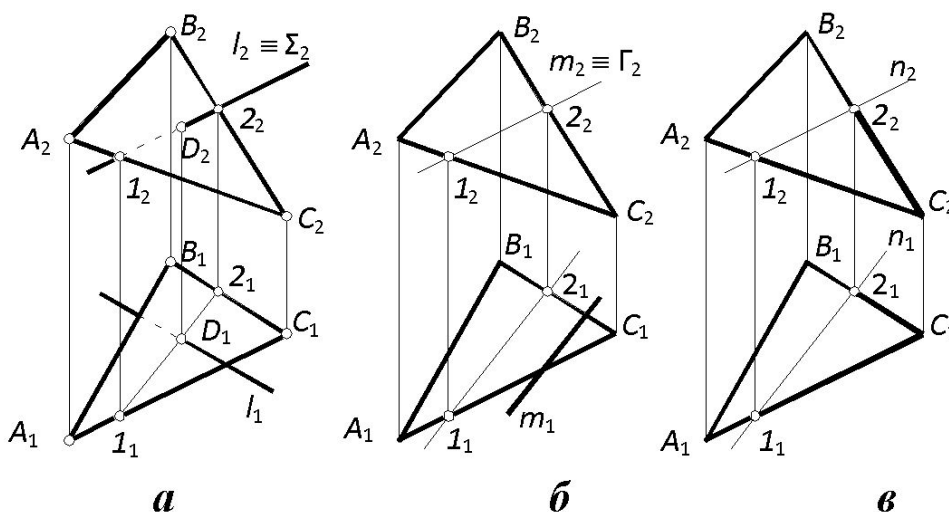


Рис. 4.22

4.7. Взаємно паралельні площини

Дві площини взаємно паралельні, якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини (рис. 4.23, *а*). Такими прямими, що перетинаються, можуть бути як прямі загального, так і окремого положення.

Відзначимо, що це ще один приклад позиційних задач, які послідовно розглядаються у посібнику.

Трикутники ABC і DEK (рис. 4.23, *б*) паралельні між собою, бо сторони AB і AC одного трикутника відповідно паралельні сторонам DE і DK другого трикутника. Треті сторони BC і EK трикутників можуть бути й непаралельними, тобто займати довільне положення.

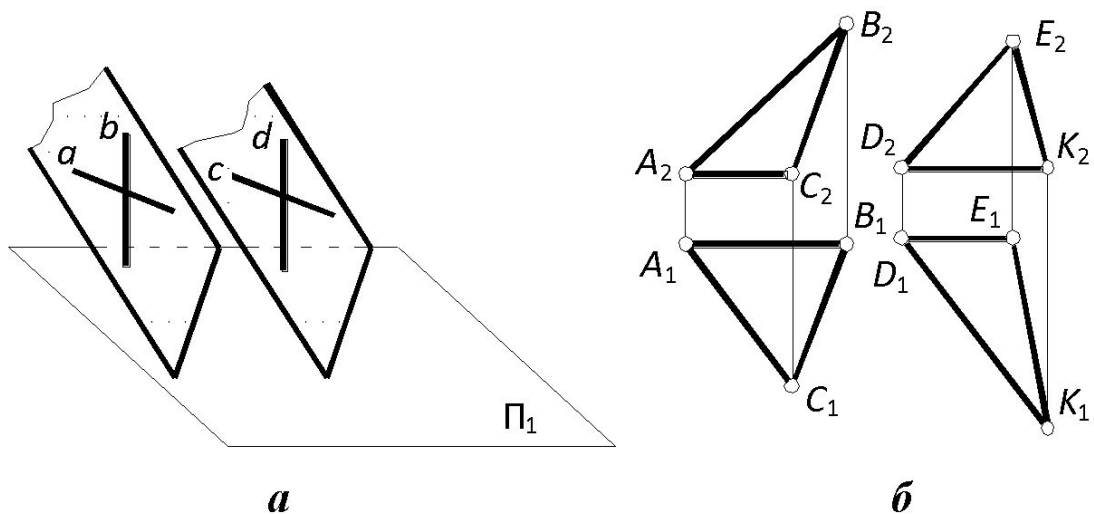


Рис. 4.23

Площини окремого положення паралельні між собою, якщо паралельні їх однойменні сліди-проекції. На рис. 4.24, *а* показані паралельні фронтально-проекціювальні площини Δ і Γ , а на рис. 4.24, *б* – горизонтально-проекціювальні площини Ξ і Λ .

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

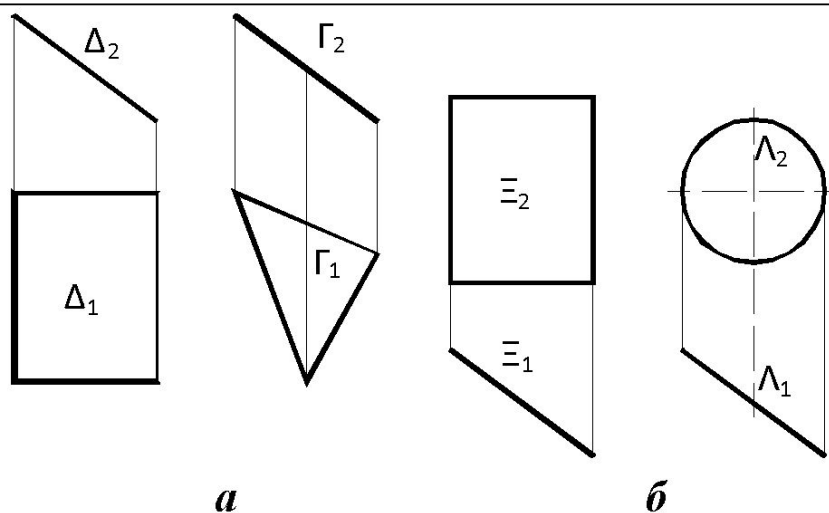


Рис. 4.24

У загальному випадку для того, щоб через деяку точку простору провести площину, паралельну заданій площині, необхідно виконати такі дії:

– у заданій площині провести дві будь-які прямі, що перетинаються;

– через задану точку простору провести дві прямі, що перетинаються, паралельно тим, які побудовані у площині.

Ці прямі й визначатимуть шукану площину, паралельну заданій площині.

Припустимо, що через деяку точку D простору треба провести площину, паралельну заданій площині ABC (рис. 4.25).

Через проекцію D_2 точки D проводимо дві проекції прямих m_2 і n_2 , відповідно паралельні проекціям A_2B_2 і A_2C_2 трикутника ABC . Те ж саме робимо у площині Π_1 . Через проекцію D_1 точки D проводимо проекції прямих m_1 і n_1 , відповідно паралельних A_1B_1

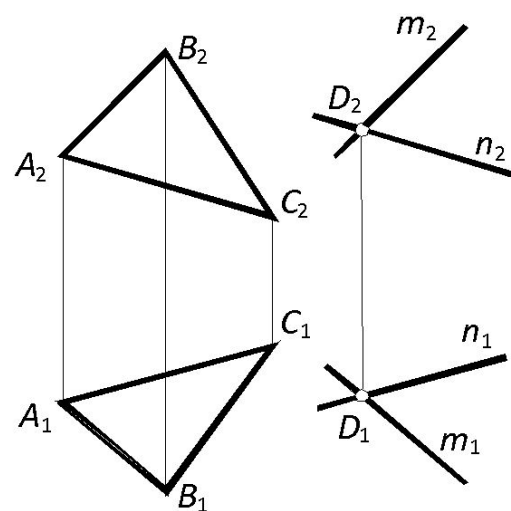


Рис. 4.25

та A_1C_1 . Прямі m і n , що перетинаються в точці D , визначають шукану площину, паралельну вихідній площині трикутника ABC .

4.8. Взаємно перпендикулярні площини

З елементарної геометрії відомо, що дві площини будуть взаємно перпендикулярними, якщо одна з цих прямих проходить через перпендикуляр до другої площини. Для побудови площини, перпендикулярної до заданої площини, необхідно спочатку побудувати пряму, перпендикулярну до цієї площини, а потім через пряму провести шукану площину (рис. 4.26, *а*).

Розв'яжемо цю задачу на комплексному кресленні (рис. 4.26, *б*). Через пряму m треба провести площину, перпендикулярну до площини, заданої трикутним відсіком ABC . Із довільної точки K прямої m опускаємо перпендикуляр n на площину ABC . Нагадуємо, що горизонтальна проекція шуканого перпендикуляра є перпендикулярною до горизонталі заданої площини, тобто $n_1 \perp h_1$, а фронтальна проекція – перпендикулярна до фронталі, тобто $n_2 \perp f_2$.

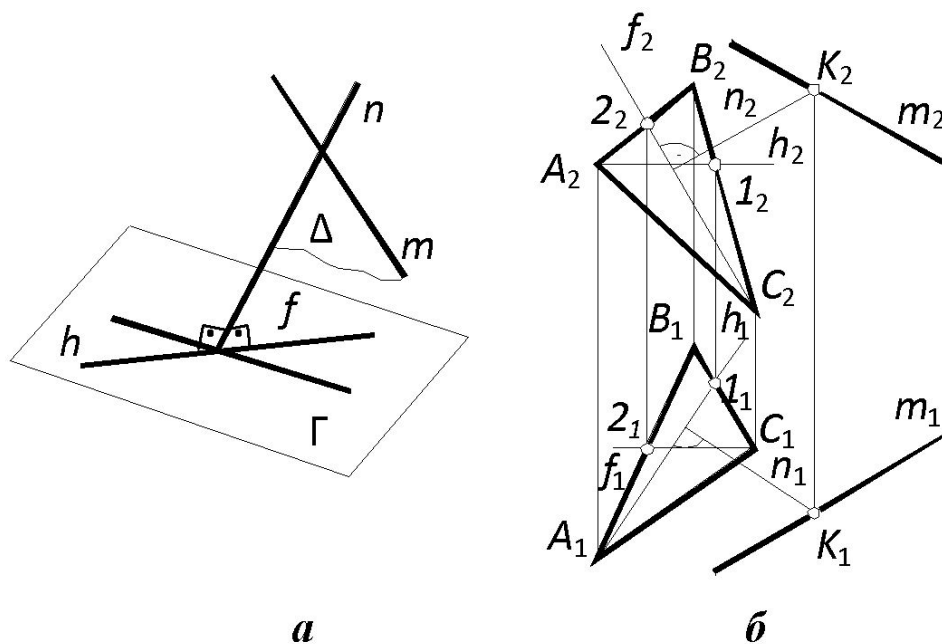


Рис. 4.26

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИН

Через пряму n можна провести безліч площин, кожна з яких буде перпендикулярною до площини ABC . Тому вибираємо будь-яку пряму m для того, щоб одержати одне з можливих рішень цієї задачі

4.9. Площини, що перетинаються

Лінією перетину двох площин є пряма, яка одночасно належить двом площинам, що перетинаються. Для того, щоб побудувати лінію перетину, достатньо знайти дві точки, які належать одночасно двом площинам, що перетинаються, та з'єднати їх прямою. В залежності від розташування площин у просторі можливі такі варіанти їх взаємного перетину:

- а) обидві площини окремого положення;
- б) одна площина окремого, а друга загального положення;
- в) обидві площини загального положення.

Перший випадок взаємного перетину площин показано на рис. 4.27, *а*, де для прикладу розглянуто перетин двох вертикальних трикутних відсіків. Перетин їх горизонтальних проєкцій визначає вертикальну лінію перетину цих двох площин, яка на площині проєкцій Π_2 знаходиться за проєкційною відповідністю.

Звідси можна зробити такий висновок: *дві площини, перпендикулярні до будь-якої площини проєкцій, перетинаються за прямою, перпендикулярною до тієї ж самої площини проєкцій.*

На рис. 4.27, *б* один відсік займає загальне положення, а другий – горизонтально-проєкціовальне. Лінія взаємного перетину площин у цьому випадку збігається на площині проєкцій Π_1 з горизонтальною проєкцією проєкціовального відсіку ABC – це проєкція прямої l_12_1 . За вертикальною проєкційною відповідністю визначається фронтальна проєкція лінії перетину двох площин. Та частина цієї прямої, яка знаходиться в межах фронтальної проєкції $A_2B_2C_2$ (на рисунку

вона показана товстою лінією), буде шуканою фронтальною проекцією.

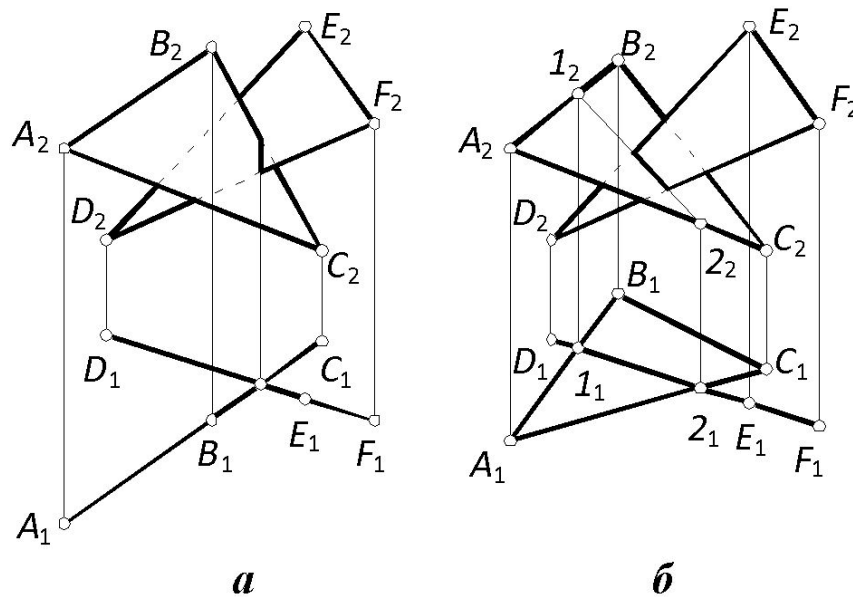


Рис. 4.27

Розглянемо перетин двох площин загального положення. Лінію їх перетину будують, застосовуючи допоміжні січні площини-посередники. Для цього доцільно використовувати площини окремого положення.

На рис. 4.28 показано розв'язування подібної задачі, де довільно вибрана горизонтальна площина рівня Δ перетинає задані площини Σ і Λ за горизонталями 1–2 та 3–4. Ці горизонталі перетинаються в точці R . Для знаходження другої точки перетину заданих площин треба взяти ще одну допоміжну січну площину-посередник.

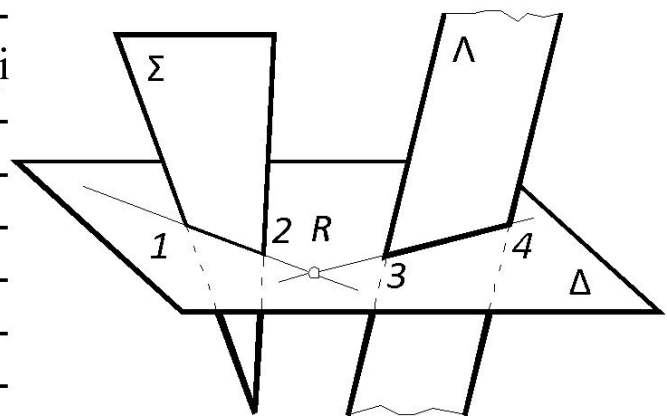


Рис. 4.28

Комплексне креслення цієї ж задачі показано на рис. 4.29. Другу січну площину

4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ

посередник $\Gamma(\Gamma_2)$ проведено паралельно площині $\Delta(\Delta_2)$. Ця площина-посередник перетинає задані площини за прямими, що проходять через точки 4 і 5 та 6 і 7. Ці лінії перетину перетинаються і визначають точку S , що є другою шуканою точкою.

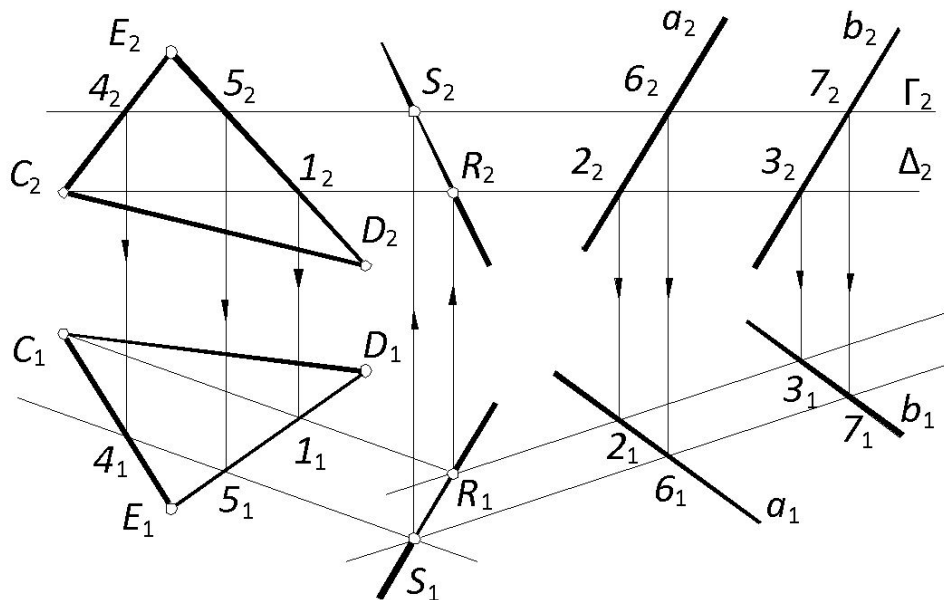


Рис. 4.29

На рис. 4.30 розглянуто дещо складніший, з точки зору просторового уявлення, випадок побудови лінії перетину площин, заданих трикутними відсіками, проекції яких взаємно перекривають одна одну. Лінію перетину RS цих відсіків будують по точках перетину двох сторін одного трикутника з площиною другого трикутника. Побудову точки R перетину сторони EF трикутника EDF з площиною трикутника ABC виконують за схемою, розглянутою на рис. 4.29.

Через пряму EF , вибрану довільно, проводять допоміжну проекціювальну площину-посередник $\Gamma(\Gamma_1)$. Визначають лінію 1–2 перетину цієї допоміжної площини з трикутним відсіком ABC . Точка R перетину знайденої лінії 1–2 зі стороною EF є точкою перетину сторони одного трикутника з площиною

другого трикутника, тобто вона належить лінії перетину заданих трикутників.

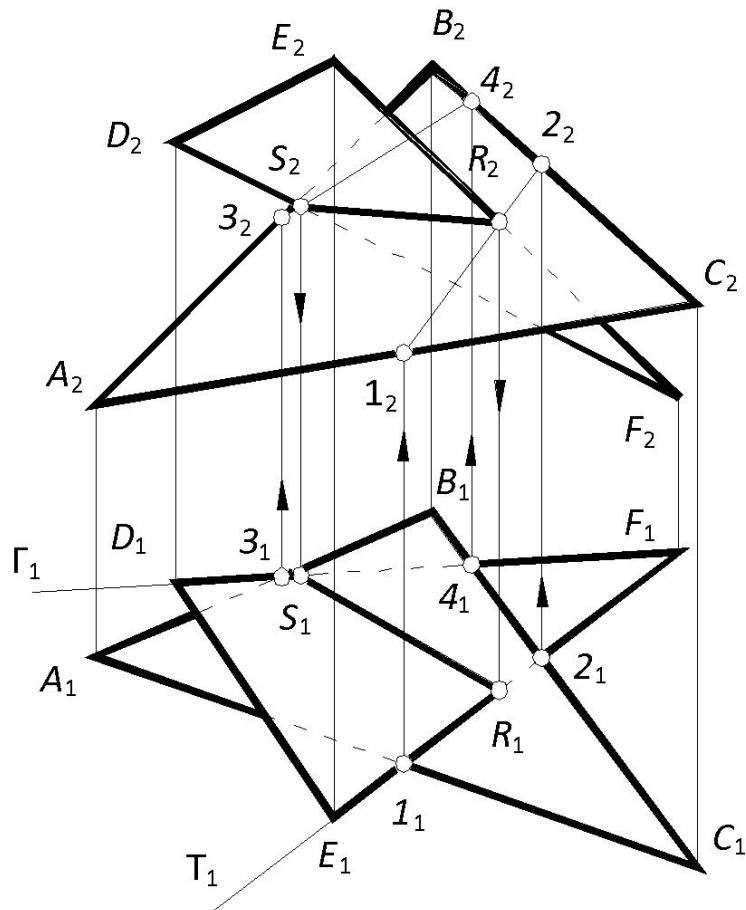


Рис. 4.30

Таким же чином визначається друга спільна для двох заданих трикутників точка. Через сторону DF трикутника EDF проводять допоміжну проєкціювальну площину-посередник $\Gamma(\Gamma_1)$ і будують лінію $3-4$ її перетину з площиною трикутника ABC . Проекція $3_2 4_2$ цієї лінії перетинається з проєкцією сторони $D_2 F_2$ трикутника EDF у точці S_2 . Точку S з'єднують із точкою R . Пряма лінія RS є шуканою лінією перетину двох трикутників ABC та EDF .

Видимість заданих трикутників відносно площин проєкцій Π_1 і Π_2 визначена із застосуванням метода конкуруючих точок.

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

5.1. Основні задачі перетворення

У багатьох задачах нарисної геометрії необхідно знаходити натуральні розміри геометричних образів або їх окремих елементів. Відомо, що при розміщенні геометричного образу паралельно деякій площині проєкцій він проєкціюється на цю площину в натуральну величину, тобто без спотворення. За такими проєкціями можна легко визначити довжини відрізків, площі фігур, величини кутів нахилу окремих елементів геометричного образу (відрізків прямих, відсіків площин) до площин проєкцій тощо.

Отже, є практична потреба вивчення способів, які б давали змогу переводити геометричні образи із загального положення в окреме по відношенню до тієї чи іншої площини проєкцій. Подібні дії, тобто переведення геометричного образу із загального положення в окреме, в якому розв'язування конкретних задач суттєво спрощується, називають *перетворенням комплексного креслення*. Здобуті після перетворення комплексного креслення проєкції дають можливість розв'язувати задачі найпростішими графічними способами.

Продемонструємо, наскільки складність розв'язування конкретної задачі залежить від розташування геометричних

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

образів по відношенню до площин проекцій. На рис. 5.1–5.3 показані проекції точки A і прямої l . У першому випадку пряма перпендикулярна до площини проекцій Π_1 , у другому – вона паралельна площині проекцій Π_2 , а в третьому – це пряма загального положення. Необхідно визначити відстань від точки A до прямої l .

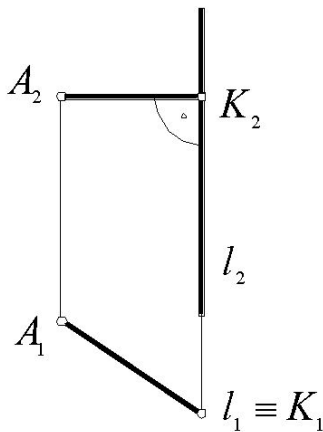


Рис. 5.1

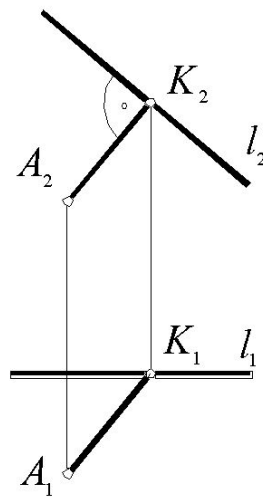


Рис. 5.2

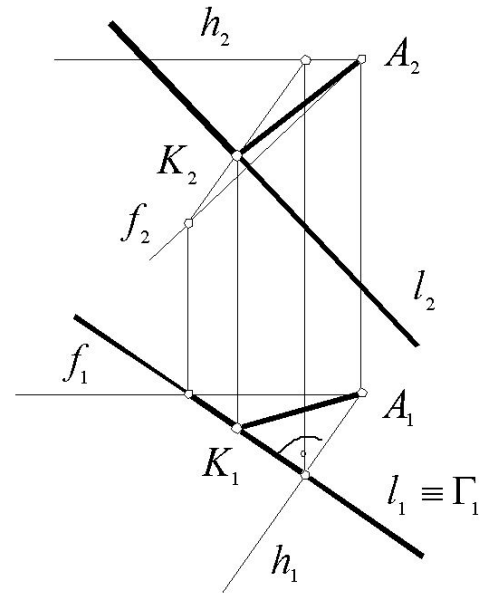


Рис. 5.3

Шуканий відрізок AK має бути перпендикулярним до прямої. У перших двох випадках пряма l паралельна площині Π_2 , тому на цю площину проекцій прямий кут між AK і l проєкціюється без спотворення. Але оскільки на рис. 5.1 пряма $l \perp \Pi_1$, то відрізок AK , перпендикулярний до l , буде паралельним Π_1 , а його горизонтальна проєкція визначатиме шукану відстань.

На рис. 5.2 і 5.3 виявилось можливим побудувати тільки проєкції шуканого відрізка. В останньому випадку ці побудови мають дещо складніший характер. Через точку A спочатку було проведено площину загального положення $T(h \times l)$, перпендикулярну до l , а потім визначено точку K перетину прямої l із площиною Γ .

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Порівняння цих креслень показує, що складність розв'язування однієї й тієї ж задачі суттєво залежить від взаємного розташування проекцій геометричних образів, а також від їх положення по відношенню до площин проекцій.

Тому, щоб від двох останніх випадків перейти до першого, як доцільнішого, треба, зберігши взаємне розташування заданих точки і прямої, змінити їх положення відносно площин проекцій.

Перехід від загального положення геометричного образу до окремого здійснюється зміною взаємного положення геометричного образу, що проєкціюється, та площини проєкцій. Це досягається двома шляхами:

по-перше, переміщенням у просторі геометричного образу таким чином, щоб він зайняв окреме положення відносно площин проекцій, які при цьому не змінюють свого положення у просторі;

по-друге, переміщенням площин проекцій у нове положення, по відношенню до якого геометричний образ (який не змінює свого положення у просторі) опиниться в окремому положенні.

Перший шлях веде до *способу обертання* та його різновиду – *способу плоскопаралельного переміщення*; другий складає теоретичну базу *способу заміни площин проекцій*.

В основі розв'язування багатьох задач нарисної геометрії лежать прості задачі, які об'єднуються в чотири групи і призводять до перетворення:

- 1) *прямої загального положення на пряму рівня*;
- 2) *прямої рівня на проєкціювальну пряму*;
- 3) *площини загального положення на проєкціювальну площину*;
- 4) *проєкціювальної площини на площину рівня*.

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

У перших двох задачах *основним елементом* перетворення є пряма лінія, а в двох останніх – *площина*. Основний елемент перетворюється незалежно від інших. Решта елементів фігури (точки, прямі, площини, поверхні), які перетворюються спільно з основним, є *залежними елементами перетворення*.

Перша задача розв'язується при визначенні натуральної величини відрізка прямої загального положення, кутів нахилу її до площин проекцій, при побудові взаємно перпендикулярних прямих тощо; *друга задача* – при визначенні відстані від прямої до точки, відстані між двома паралельними або мимобіжними прямими, натуральної величини двогранного кута, утвореного двома площинами і так далі; *третьа задача* – при визначенні натуральної величини відстані від точки до площини, кута нахилу площини до площин проекцій тощо; *четверта задача* – при визначенні натуральної величини плоскої фігури, лінійного кута та інших подібних задач.

У більшості задач нарисної геометрії необхідно послідовно розв'язувати першу та другу задачі перетворення комплексного креслення – якщо основним елементом є пряма; або третю та четверту задачі – коли основним елементом перетворення є площина.

5.2. Спосіб заміни площин проекцій

У нарисній геометрії існує декілька способів перетворення комплексного креслення: спосіб обертання навколо осі, обертання навколо лінії рівня, спосіб плоско-паралельного переміщення, спосіб заміни площин проекцій. При перетворенні креслення способом обертання зміна взаємного положення геометричного образу, що проєкціюється, та площин проєкцій досягається шляхом переміщення образу в нове положення при незмінності положень площин проєкцій. Спосіб заміни площин проєкцій передбачає зміну взаємних положень

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

геометричного образу та площин проекцій шляхом переходу від заданих площин проекцій до нових, більш доцільних.

Геометричний образ свого положення у просторі не змінює. При виборі положення нової площини проекцій керуються тим, щоб по відношенню до нової площини образ, що проєкціюється, зайняв окреме положення, яке забезпечує отримання проєкцій, найбільш зручних для розв'язування задачі.

Додамо також, що нас цікавлять не проміжні, а кінцеві положення площин проекцій. Ці нові площини проекцій будемо позначати, як Π_4 , Π_5 , Π_6 і так далі. Можна сказати, що "старі" площини проекцій Π_1 і Π_2 замінюються новими площинами Π_4 , Π_5 тощо. Звідси випливає назва способу перетворення – *заміна площин проекцій*.

У деяких випадках достатньо замінити тільки одну площину проекцій Π_1 на Π_4 або Π_2 на Π_4 . Якщо така заміна не забезпечує бажаного вигляду нової проєкції геометричного образу, то виконують заміну двох площин.

При заміні площин проекцій необхідно дотримуватись таких умов:

- 1) площини проекцій замінюються не одночасно, а послідовно;
- 2) кожна нова площина проекцій має бути перпендикулярною до тієї площини, яка залишається та утворює з нею нову систему площин проекцій.

Розглянемо суть способу заміни площин проекцій на прикладі точок, прямих і площин та розв'яжемо чотири основні задачі на перетворення.

Подивимося, які зміни відбуваються з проєкціями точки при переході від однієї системи площин проекцій до іншої. На рис. 5.4 показано точку A , що знаходиться у системі площин проекцій Π_1/Π_2 . Замінімо одну з цих площин, наприклад Π_2 ,

іншою, також вертикальною площиною Π_4 і побудуємо проекцію точки A на цю площину. Оскільки горизонтальна площина проєкцій Π_1 є спільною для "старої" та " нової" систем, то координата z точки A залишається незмінною. Отже, *відстань від нової проєкції A_4 до нової осі Π_1 / Π_4 дорівнює відстані від проєкції, що замінюється, до осі Π_1 / Π_2* . При цьому проєкцію A_4 визначено як основу перпендикуляра, проведеного із точки A на Π_4 . Горизонтальна проєкція A_1 залишається тією ж самою, але координата y точки A тепер інша. Вона визначається відстанню від точки A до площини Π_4 , яка на комплексному кресленні дорівнює відстані від проєкції A_1 до осі Π_1 / Π_4 . Зазначимо, що ця вісь на кресленні вибрана довільно.

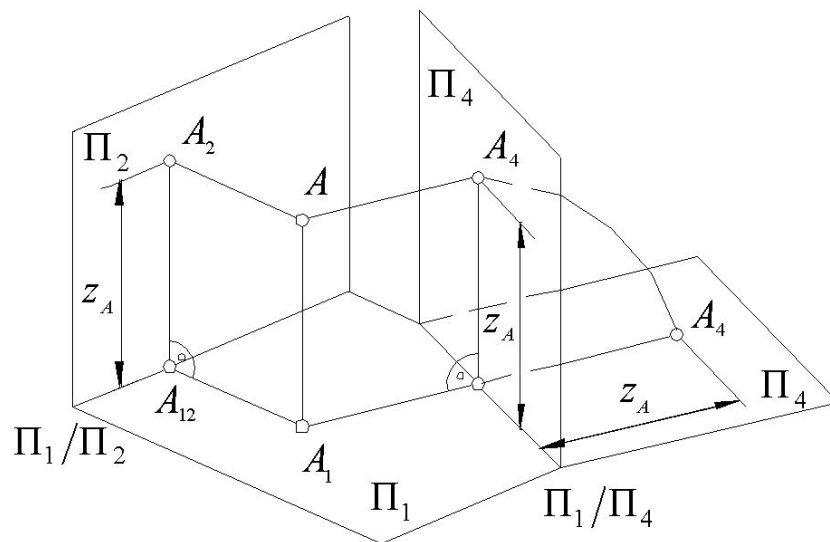


Рис. 5.4

Для побудови комплексного креслення площина Π_4 обертанням навколо осі Π_1 / Π_4 суміщається з площиною Π_1 . Суміститься з Π_1 й нова проєкція A_4 точки A , яка виявиться на спільному перпендикулярі до нової осі Π_1 / Π_4 , проведеному з горизонтальної проєкції A_1 точки A (рис. 5.5).

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

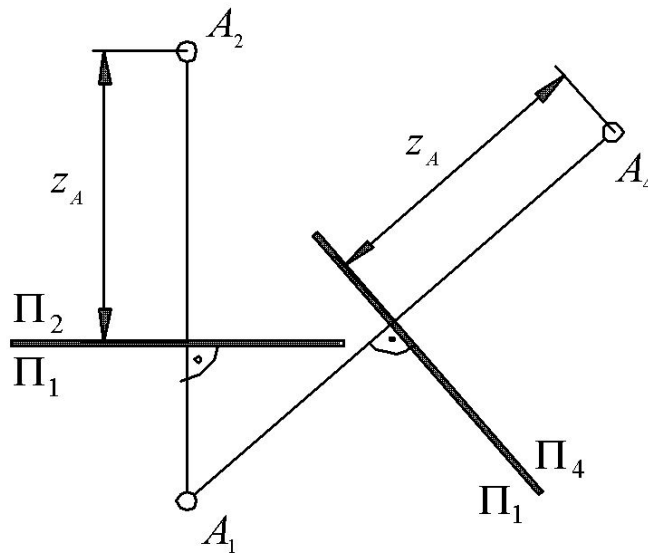


Рис. 5.5

Подібним же чином можна замінити горизонтальну площину проєкцій Π_1 площиною Π_4 , також перпендикулярною до Π_2 (рис. 5.6). У цьому випадку не змінюється величина координати y , яка визначає відстань від точки B до спільної для двох систем проєкцій площини Π_2 . Тому відстань від нової проєкції B_4 точки B до нової осі Π_4/Π_2 дорівнює відстані від проєкції B_1 цієї точки до осі Π_2/Π_1 , тобто $B_4 B_{24} = B_1 B_{12}$.

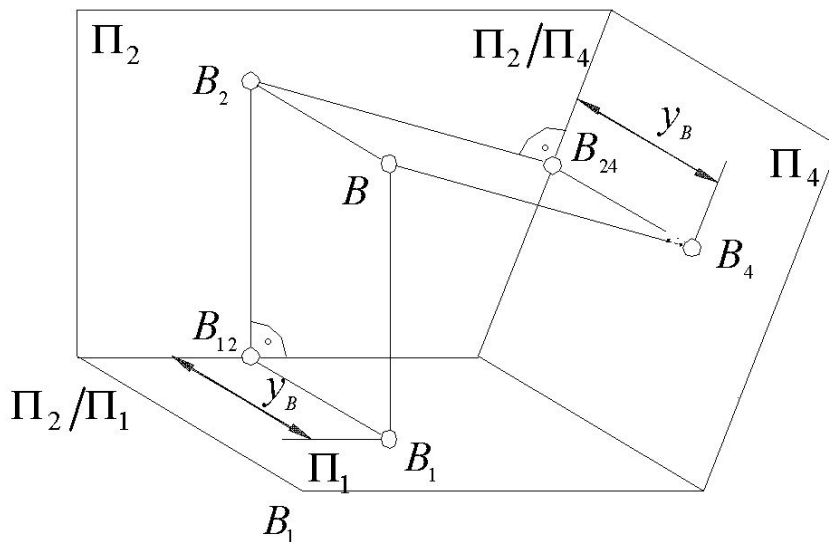


Рис. 5.6

При побудові нової проекції точки B на комплексному кресленні (рис. 5.7) із B_2 опущено перпендикуляр на нову вісь Π_4/Π_2 , далі від цієї осі відкладено координату y точки B , що визначило положення проекції цієї точки на площину Π_4 .

Деякі перетворення проекцій вимагають подвійної заміни площин проекцій. Послідовний перехід від однієї системи площин проекцій до другої здійснюється з дотриманням такого правила: *відстань від нової проекції точки до нової осі дорівнює відстані від проекції точки, що замінюється, до попередньої осі.*

На рис. 5.7 при першій заміні для осі Π_4/Π_2 попередньою, або старою, була вісь Π_4/Π_2 і тому $B_4B_{24} = B_1B_{12}$, а при переході від системи площин Π_2/Π_4 до площин Π_4/Π_5 новою віссю виступає вісь Π_4/Π_5 , по відношенню до якої вісь Π_4/Π_2 тепер вже є попередньою. Слід додати, що при всіх перетвореннях різнойменні проекції точок розташовуються на спільних перпендикулярах до відповідних осьових ліній.

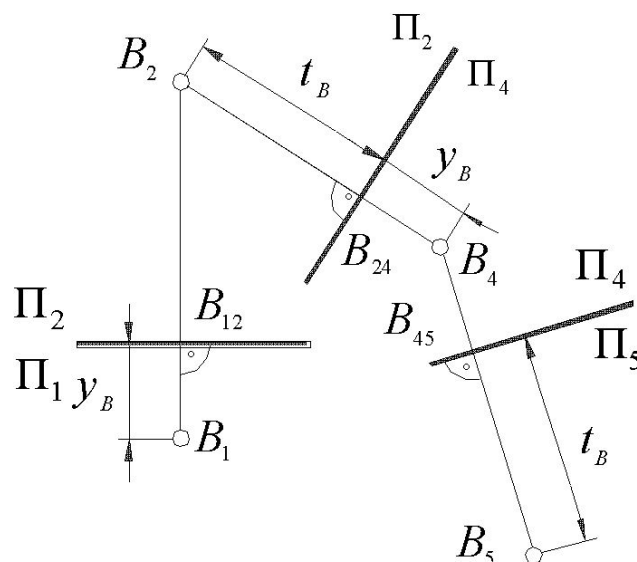


Рис. 5.7

Перетворення прямої загального положення на пряму рівня (задача 1). У системі площин Π_1/Π_2 задано відрізок AB

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

прямої загального положення (рис. 5.8). Для того, щоб у новій системі площин проєкцій ця пряма зайняла положення прямої рівня, необхідно нову площину проєкцій Π_4 розташувати паралельно відрізку AB і перпендикулярно до площини проєкцій Π_1 . Утворюється нова система взаємно перпендикулярних площин Π_1, Π_4 , вісь Π_1 / Π_4 якої паралельна проєкції A_1B_1 відрізку AB . Спроєкціювавши AB на площину Π_4 , отримаємо його проєкцію A_4B_4 . Для здобуття нового плоского комплексного креслення площину Π_4 обертанням навколо осі Π_1 / Π_4 суміщаємо з площиною Π_1 .

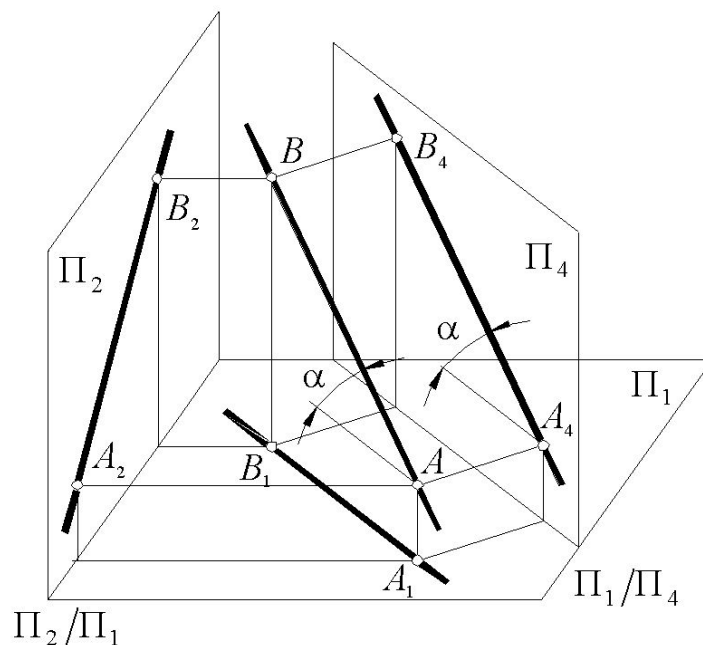


Рис. 5.8

У системі площин проєкцій Π_1, Π_4 пряма AB є прямою рівня, її проєкція на Π_4 дорівнює дійсній величині відрізка AB , а кут α між проєкцією A_4B_4 та новою віссю Π_1 / Π_4 є кутом нахилу відрізка AB до площини Π_1 .

Переходимо до комплексного креслення (рис. 5.9). На цьому кресленні в системі площин Π_1, Π_2 маємо відрізок AB прямої загального положення. Пам'ятаємо, що при перетворенні креслення способом заміни площин проєкцій необхідно

мати осі проекцій, які виступають базами відліку координат окремих точок. Якщо на комплексному кресленні вісь Π_1 / Π_2 відсутня, то треба вибрати вісь системи площин Π_1, Π_2 на

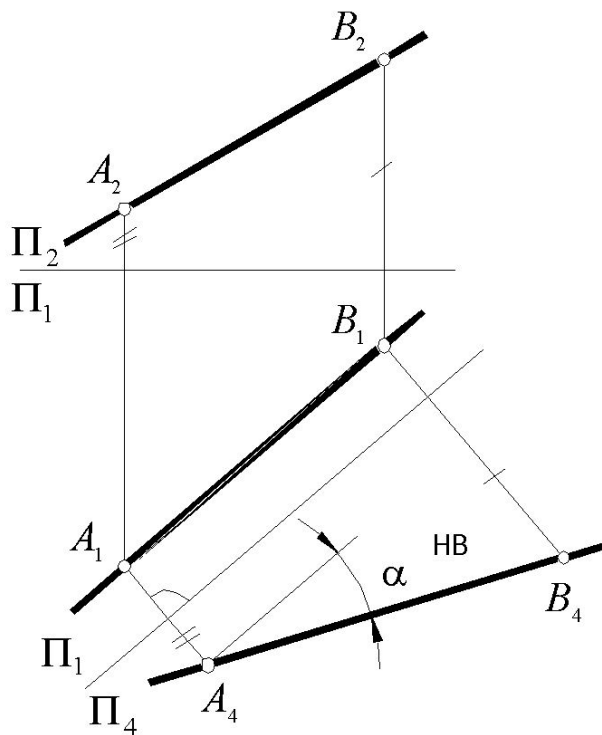


Рис. 5.9

довільному місці між горизонтальною та фронтальною проекціями відрізка.

Перехід до нової системи площин реалізується за три кроки:

1. Будують нову вісь проекцій згідно з умовами задачі. У нашому випадку нова вісь проекцій Π_1 / Π_4 паралельна горизонтальній проекції A_1B_1 відрізка AB . Відстань від нової осі проекцій до проекції A_1B_1 довільна.

2. Проводять нові лінії сполучення перпендикулярно до нової осі проекцій. Ці лінії починаються від тих про-

екцій точок, які переходять до нового креслення. На рис. 5.9 лінії сполучення йдуть від кінців A_1, B_1 горизонтальної проекції відрізка до нових проекцій, перпендикулярно до нової осі.

3. На нових лініях сполучення від нової осі відкладають відстані, які дорівнюють відстаням від "старих" проекцій точок до старої осі (у нашому випадку це координати z точок A і B , тобто віддалення проекцій A_2 і B_2 від осі Π_1 / Π_2).

Отже, маємо нове двокартинне креслення, яке складається зі старої проекції A_1B_1 відрізка та нової, додаткової проекції A_4B_4 . На цьому кресленні пряма загального положення перетворена на пряму рівня. Тепер це ні горизонталь, ні фрон-

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

таль, оскільки ми відійшли від старої, початкової системи площин проєкцій Π_1, Π_2 . Нова, додаткова проєкція A_4B_4 є натуральною величиною відрізка AB , а кут α – натуральною величиною кута його нахилу до горизонтальної площини Π_1 .

Незвичайність цього креслення ще й у тому, що вісь проєкцій нахилена. Щоб перейти до звичайного горизонтального розташування осі проєкцій, достатньо повернути креслення на необхідний кут.

Якщо треба знайти кут β нахилу відрізка AB до площини Π_2 , то площину проєкцій Π_1 замінюють новою площиною проєкцій Π_4 , паралельною відрізку AB і перпендикулярною до площини проєкцій Π_2 (рис. 5.10). Нову вісь проєкцій Π_1/Π_2 проводять паралельно фронтальній проєкції відрізка A_2B_2 на довільній відстані. Очевидно, що проєкція A_4B_4 дорівнює натуральній величині відрізка AB , а кут між цією проєкцією і віссю Π_2/Π_4 є кутом β нахилу відрізка до площини проєкцій Π_2 . Зазначимо одну особливість цього прикладу. Оскільки горизонтальні проєкції точок A і B розташовані по різні сторони від осі Π_1/Π_2 , то і проєкції A_4 і B_4 цих точок знаходяться по різні сторони від нової осі. Пояснюється це тим, що $y_A > 0$, а $y_B < 0$.

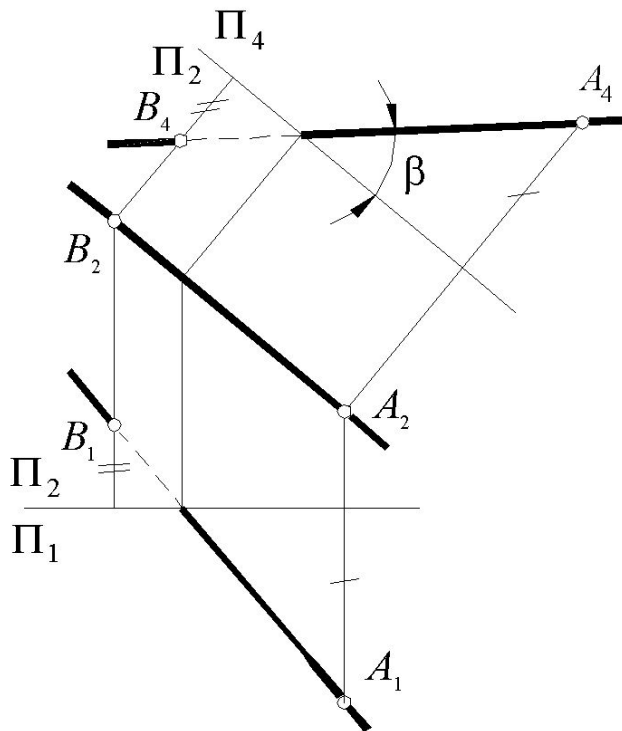


Рис. 5.10

Перетворення прямої рівня на проєкціювальну пряму (задача 2). Цю задачу будемо розв'язувати як продовження

першої задачі. На рис. 5.11 пряма AB у системі площин проєкцій Π_1, Π_4 є прямою рівня. Для перетворення її на проєкціювальну пряму необхідно ввести до розгляду нову площину проєкцій Π_5 і розташувати її перпендикулярно до відрізка AB . Отже, площина Π_4 замінить собою горизонтальну площину проєкцій Π_1 .

Утворюється нова система двох взаємно перпендикулярних площин Π_4 і Π_5 з новою віссю проєкцій Π_4/Π_5 . Спроєкціювавши відрізок AB на нову площину проєкцій Π_5 , отримаємо нову, "вироджену" проєкцію $A_5 \equiv (B_5)$ відрізка AB . Для отримання плоского креслення треба сумістити площину проєкцій Π_5 з площиною Π_4 обертанням її навколо осі проєкцій Π_4/Π_5 .

Розглянемо комплексне креслення (рис. 5.12). Для зручності комплексне креслення в системі площин Π_1, Π_4 повернуто таким чином, щоб положення осі проєкцій Π_1/Π_4 відповідало наочному зображенню рис. 5.11.

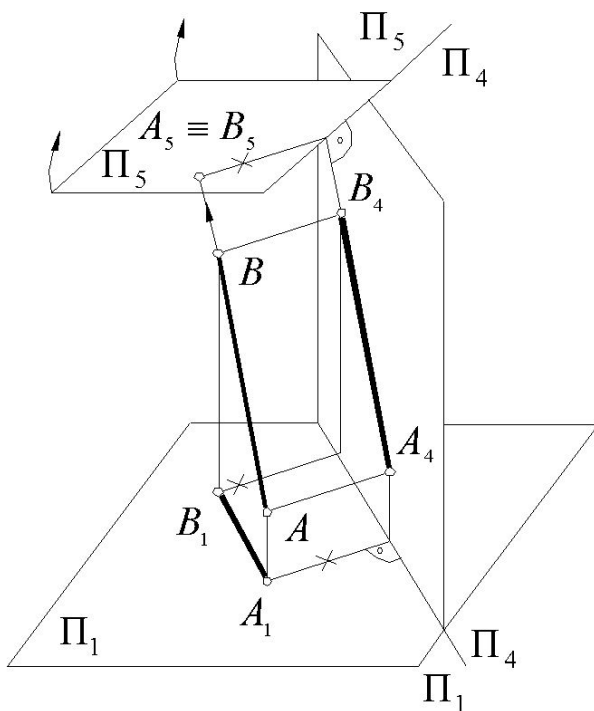


Рис. 5.11

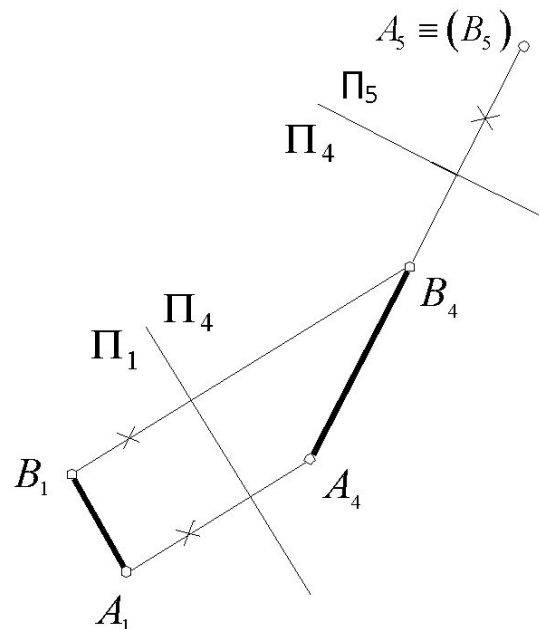


Рис. 5.12

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Перехід до нової системи площин на комплексному кресленні реалізується у тому ж порядку, що використовувався при розв'язуванні попередньої задачі (задачі 1):

1. Будуємо вісь проекцій Π_4 / Π_5 перпендикулярно до проекції A_4B_4 , що випливає з умови задачі, пов'язаної з перетворенням прямої рівня на пряму проекціювальну.

2. Через проекції A_4 і B_4 , які переходять із старого у нове комплексне креслення, проводимо нові лінії сполучення, перпендикулярно до нової осі Π_4 / Π_5 (зрозуміло, що у нашому випадку ці лінії збігаються).

3. На нових лініях сполучення від нової осі відкладаємо відрізки, що відповідають відстаням від горизонтальних проекцій A_1 і B_1 точок до старої осі Π_1 / Π_4 . Отримуємо нову, додаткову проекцію $A_5 \equiv (B_5)$ відрізка AB .

Таким чином, маємо нове комплексне креслення, яке складається зі старої проекції A_4B_4 та нової, додаткової проекції $A_5 \equiv (B_5)$. На цьому новому кресленні пряма рівня AB є проекціювальною прямою.

Нагадаємо, що нові вісі проекцій будують на довільних відстанях від тих проекцій геометричних образів, які переходять до нового креслення. Ці відстані визначаються тільки зручністю розв'язування конкретної задачі та наявністю вільного місця на аркуші паперу.

Для перетворення прямої загального положення на проекціювальну пряму необхідно послідовно розв'язувати першу та другу задачі на одному комплексному кресленні. Дійсно, перетворення однієї із проекцій деякої прямої загального положення на точку вимагає подвійної заміни площин проекцій, оскільки у системі площин Π_1, Π_2 площина, перпендикулярна до цієї прямої, не буде ортогональною ні до Π_1 , ні до Π_2 .

Перетворення прямої загального положення на пряму проекціювальну подане на рис. 5.13. Нагадаємо, що при

переході від системи площин проєкцій Π_1, Π_2 до системи площин Π_1, Π_4 площину проєкцій Π_4 розташовано перпендикулярно до Π_1 і паралельно відріzkу AB . Це відповідає розв'язуванню першої задачі на перетворення. За другої заміни площин проєкцій нову площину Π_5 розташовують перпендикулярно до прямої загального положення, цим самим забезпечують умову ортогональності системи площин проєкцій Π_4, Π_5 . На нову площину проєкцій Π_5 пряма AB проєціюється в точку.

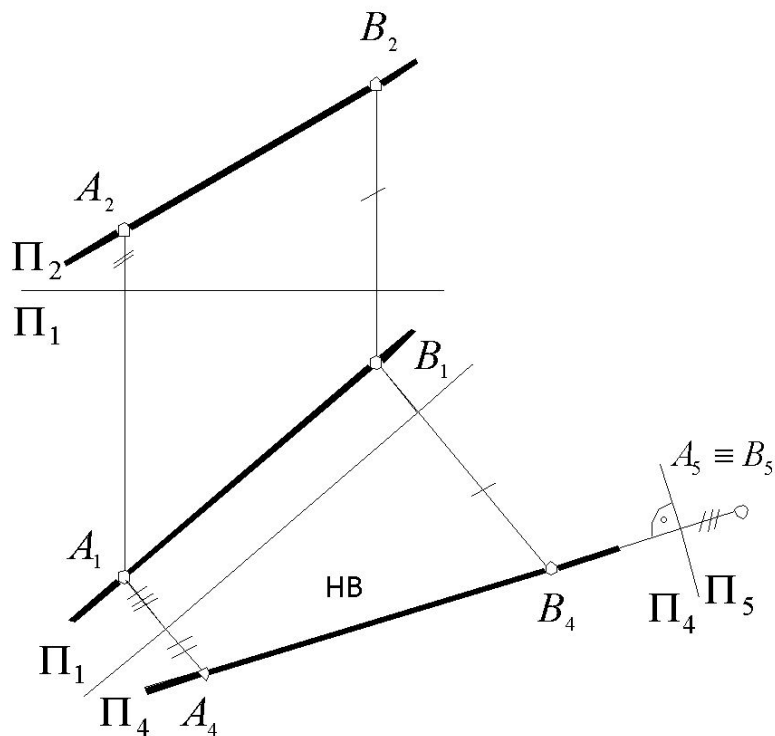


Рис. 5.13

Таким чином, у системі площин проєкцій Π_4, Π_5 пряма загального положення AB перетворилася на проєціювальну пряму.

Перетворення площини загального положення на площину проєціювальну (задача 3). Нехай площина загального положення задана трикутним відсіком ABC (рис. 5.14). Для розв'язування цієї задачі нову площину проєкцій розташовують

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

перпендикулярно до трикутного відсіку ABC і однієї з площин проєкцій. А це свідчить про те, що нова площина проєкцій є перпендикулярною до лінії перетину заданої площини з однією із площин проєкцій. Саму лінію не будують, оскільки її напрям визначають за допомогою головної лінії площини (горизонталі чи фронталі). Тому у заданій площині загального положення, перш за все, проводять одну із подібних ліній, наприклад, горизонталь A_1 . Ця горизонталь необхідна для орієнтування нової площини проєкцій Π_4 .

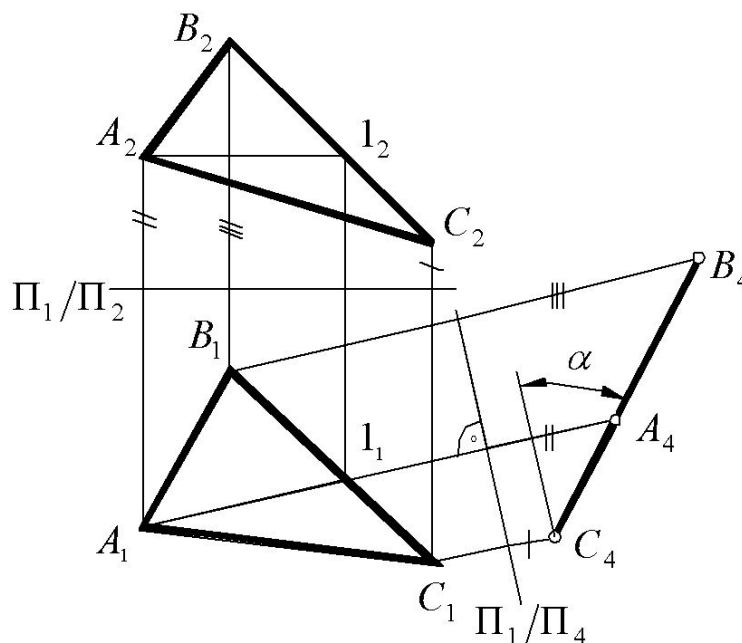


Рис. 5.14

Розташувавши $\Pi_4 \perp A_1$, забезпечуємо виконання одразу двох умов: нова площина Π_4 буде перпендикулярною і до Π_1 , і до площини ABC . Нову вісь проєкцій Π_1 / Π_4 проводять під прямим кутом до $A_1 l_1$. Провівши через горизонтальні проєкції вершин трикутника лінії сполучення, перпендикулярні до нової осі, відкладають на них від осі Π_1 / Π_4 відрізки, що дорівнюють z_A, z_B, z_C . Далі будують нову проєкцію $A_4B_4C_4$ трикутника ABC , яка є прямою лінією. Додамо, що на площину

Π_4 , яка перпендикулярна до трикутника і до площини проєкцій Π_1 , без спотворення проєціюється кут α , утворений трикутним відсіком з площиною проєкцій Π_1 .

Подібне перетворення виконане на рис. 5.15, де площина проєкцій Π_1 замінена площиною Π_4 , перпендикулярною до Π_2 і трикутника ABC . Для цього у площині трикутника побудовано фронталь, перпендикулярно до якої розташовано площину Π_4 . Нова вісь Π_2 / Π_4 проведена перпендикулярно до $A_2 l_2$. Площина трикутника відносно площини проєкцій Π_4 є проєкціювальною. На площину Π_4 кут β нахилу трикутника ABC до площини проєкцій Π_2 проєціюється без спотворення.

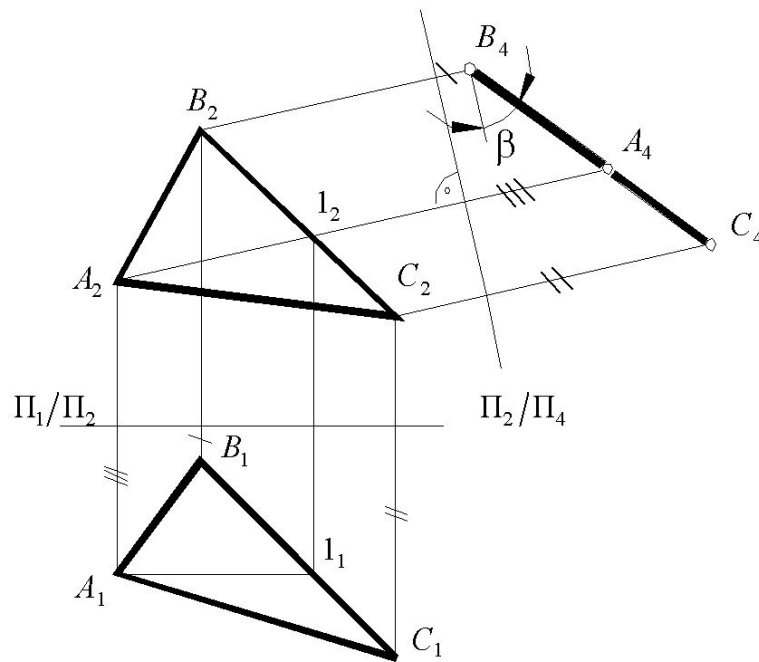


Рис. 5.15

Перетворення проєкціювальної площини на площину рівня (задача 4). Цю задачу будемо розглядати як продовження попередньої (третьої) задачі. Для зручності вісь Π_1 / Π_4 розташуємо горизонтально.

Нагадаємо, що для перетворення проєкціювальної площини у площину рівня необхідно ввести нову площину про-

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

екції Π_5 , паралельну площині трикутника. Вісь проекцій Π_4/Π_5 має бути паралельною "виродженій" проекції трикутника, яка є результатом розв'язування третьої задачі.

Спочатку паралельно "виродженій" проекції $A_4B_4C_4$ трикутника на довільній відстані від неї будуюмо нову вісь проекцій Π_4/Π_5 (рис. 5.16), а потім від вершин A_4, B_4, C_4 проводимо нові лінії сполучення, перпендикулярні до нової осі Π_4/Π_5 і на них відкладаємо відстані, які визначають віддалення проекцій точок A_1, B_1, C_1 від старої осі Π_1/Π_4 . У результаті матимемо нове комплексне креслення площини ABC , яке складається зі старої проекції прямої $A_4B_4C_4$ відсіку та його нової, додаткової проекції $A_5B_5C_5$. На цьому кресленні площина ABC є площиною рівня, а проекція $A_5B_5C_5$ відповідає його натуральній величині.

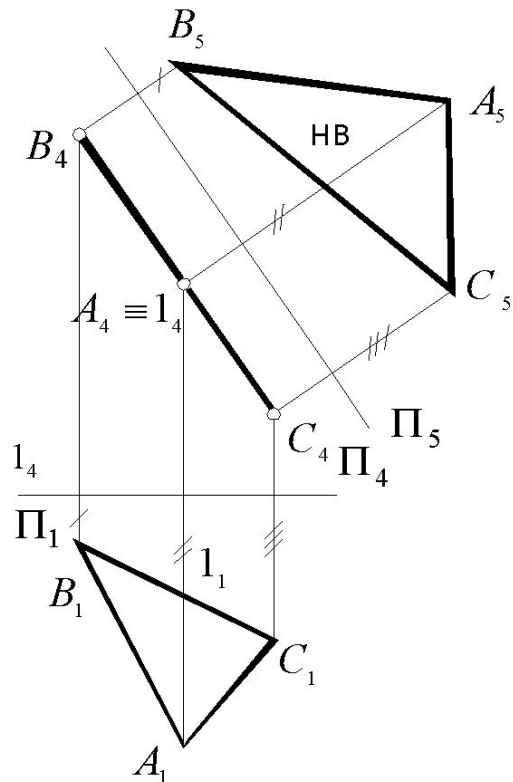


Рис. 5.16

Для перетворення площини загального положення на площину рівня послідовно розв'язують третю та четверту задачі на одному комплексному кресленні (рис. 5.17). Треба створити таку нову ортогональну систему площин проекцій, в якій одна з цих площин була б паралельна трикутному відсіку. У системі Π_1, Π_2 таку площину побудувати неможливо. Дійсно, площина, паралельна трикутнику, не буде перпендикулярною ні до Π_1 , ні до Π_2 , тобто вона не утворює з площинами проекцій ортогональної системи. Звідси випливає необхідність виконання подвійної заміни площин проекцій. Спочатку

площина Π_2 замінюється площиною Π_4 , а потім площина Π_1 – площиною Π_5 .

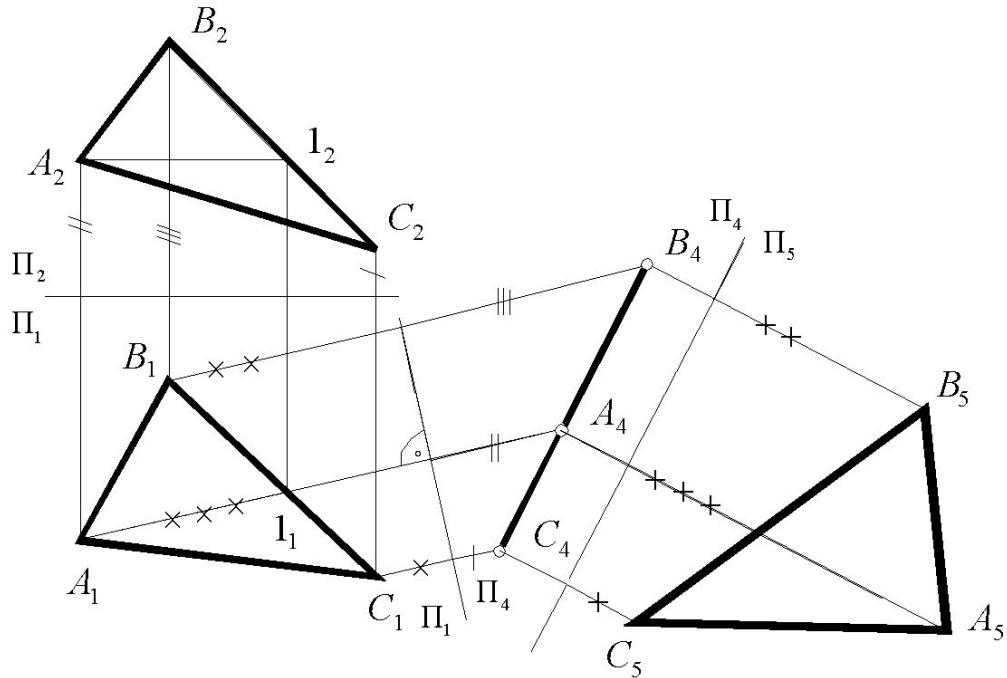


Рис. 5.17

5.3. Приклади застосування способів перетворення проєкцій до розв'язування задач

Способи перетворення проєкцій знаходять широке застосування при розв'язуванні багатьох задач нарисної геометрії. Розглянемо кілька прикладів задач, де застосування способів перетворення проєкцій суттєво спрощує їх розв'язування.

Приклад 1. Побудувати лінію перетину двох трикутних відсіків площин ABC і DEK (рис. 5.18).

Способом заміни площин проєкцій будуємо додаткове комплексне креслення за умови, що один із трикутників, наприклад ABC , займе положення проєкціовальної площини. Горизонталь A_1 визначає напрям нової площини проєкцій. Знаходимо проєкції $A_4B_4C_4$ і $D_4E_4K_4$ трикутників. Проєкція $A_4B_4C_4$ площини ABC має вигляд прямої лінії.

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

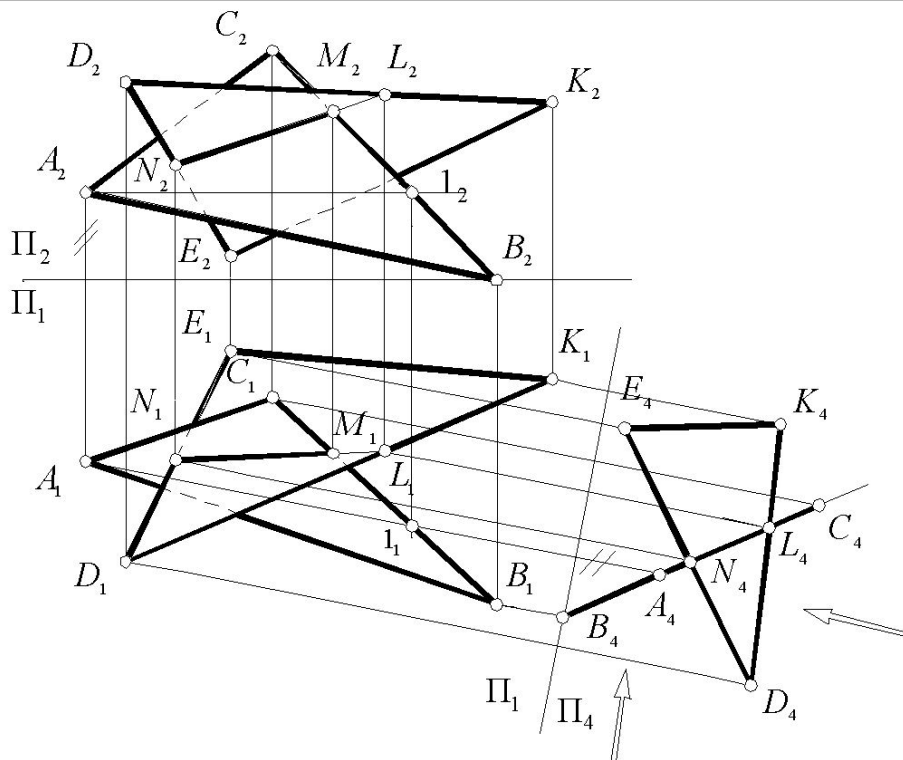


Рис. 5.18

Це дає можливість легко знайти проекції точок L_4 і N_4 лінії перетину на Π_4 . Зробивши побудови у зворотному напрямку, знаходимо проекції L_1 і N_1 точок L і N на Π_1 . Перетин L_1N_1 з B_1C_1 визначає проекцію M_1 другої крайньої точки лінії перетину заданих площин. Остаточню маємо проекції M_1N_1 і M_2N_2 лінії перетину на площини Π_1 і Π_2 . Видимість сторін трикутників відносно цих площин проекцій визначена за напрямом стрілок методом конкуруючих точок.

Приклад 2. За ортогональним кресленням деякої геометричної моделі побудувати її наочне зображення за довільним напрямом проєкціювання r (рис. 5.19).

Задача буде розв'язана тільки тоді, коли напрям проєкціювання займе положення проєкціовальної прямої. Для цього потрібно зробити подвійне перетворення проєкцій. При застосуванні способу заміни площин проєкцій спочатку вводять площину проєкцій Π_4 , паралельну проєкції напрямку r_1 , а потім площину проєкцій Π_5 , перпендикулярну до заданого

напрямку. Додаткова проекція моделі, яка побудована на площині проекцій Π_5 , є її наочним зображенням.

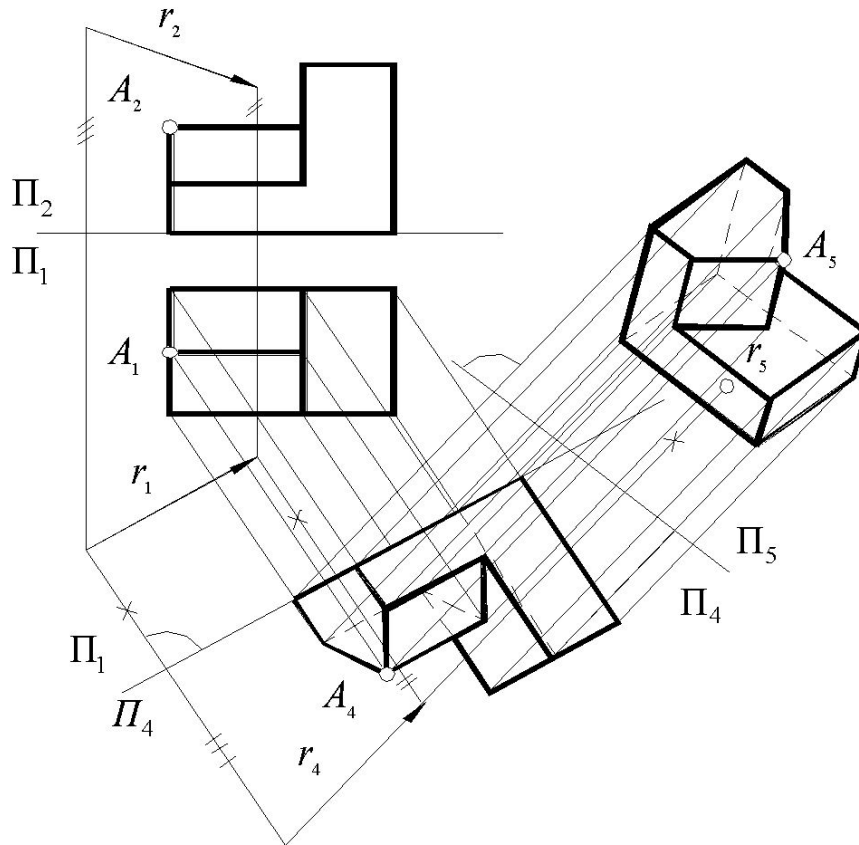


Рис. 5.19

Приклад 3. Визначити відстань від точки A до прямої l (рис. 5.20).

Відстань від довільної точки простору до деякої прямої визначається довжиною перпендикуляра, проведеного із цієї точки до прямої. Пряма l згідно з рисунком займає загальне положення. Використовуючи спосіб заміни площин проекцій перетворимо креслення так, щоб пряма l зайняла проекціовальне положення (тобто стала точкою). Для цього виконують подвійну заміну площин проекцій. Ці перетворення виконують так, щоб взаємне розташування прямої l і точки A не змінювалося.

Пряма l зайняла проекціовальне положення відносно площини Π_5 , а її проекція на цю площину "виродилася" у точ-

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

ку. На Π_5 також спроекційовано точку A . Відстань між новою проекцією A_5 точки A і новою проекцією l_5 прямої l буде шуканою.

На рис. 5.20 показано зворотний процес перетворення проєкцій відрізка AK від системи площин Π_4/Π_5 до початкової Π_1/Π_2 . Слід додати, що проєкцію відрізка AK на площину Π_4 побудовано паралельно осі Π_4/Π_5 . Це впливає з того, що цей відрізок паралельний площині проєкцій Π_5 .

Приклад 4. Визначити відстань від точки A до заданої площини.

Відстань від точки до площини визначається довжиною перпендикуляра, проведеного із заданої точки на площину. Складність розв'язування цієї задачі суттєво залежить від положення площини відносно площин проєкцій. На рис. 5.21 площина Ω , відстань до якої від точки A треба знайти, є площиною окремого положення. Тому шукана відстань визначається порівняно просто. Достатньо із A_1 провести перпендикуляр на "вироджену" проєкцію Ω_1 площини і знайти горизонтальну проєкцію M_1 точки M . Відрізок A_1M_1 є дійсною величиною шуканої відстані від точки A до площини Ω_1 . Фронтальна проєкція цього відрізка розташовується паралельно осі x .

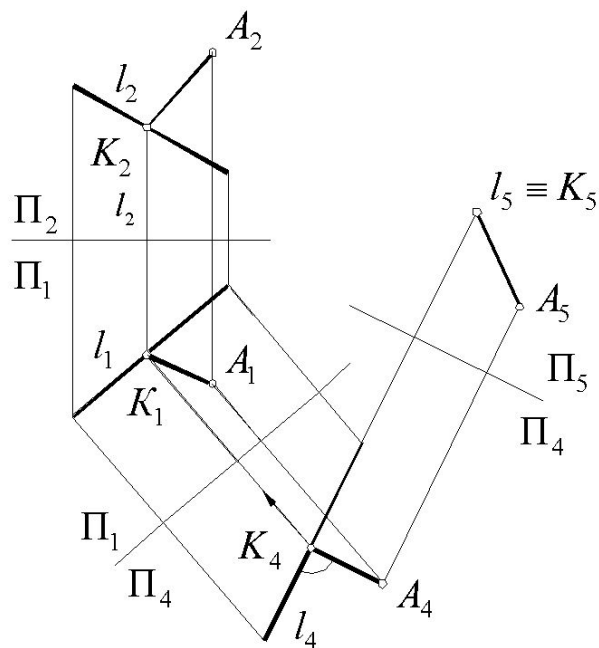


Рис. 5.20

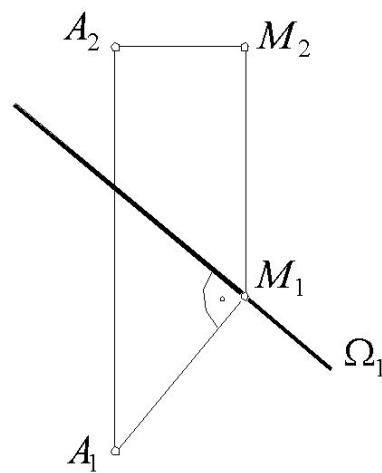


Рис. 5.21

Відстань від деякої точки до площини загального положення можна знайти без застосування способів перетворення проєкцій. Приклад розв'язування подібної задачі показано на рис. 5.22, де проєкції перпендикуляра n побудовані за допомогою головних ліній площини загального положення – горизонталі h і фронталі f (нагадаємо, що $n_1 \perp h_1$ і $n_2 \perp f_2$). Основа перпендикуляра (точка K) визначена за відомою схемою із застосуванням допоміжної площини-посередника Σ . Дійсна величина шуканої відстані знайдена способом обертання.

Але цей шлях визначення відстані між точкою та площиною загального положення нераціональний. Подібні задачі доцільно розв'язувати сумісним перетворенням площини і точки до вигляду, показаного на рис. 5.23, на якому задана площина є площиною окремого положення.

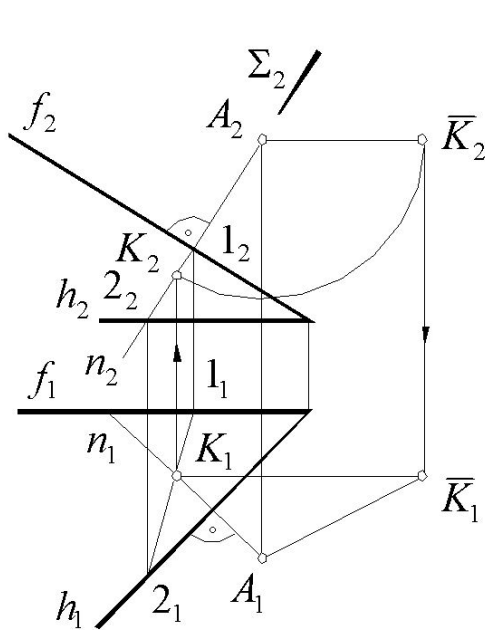


Рис. 5.22

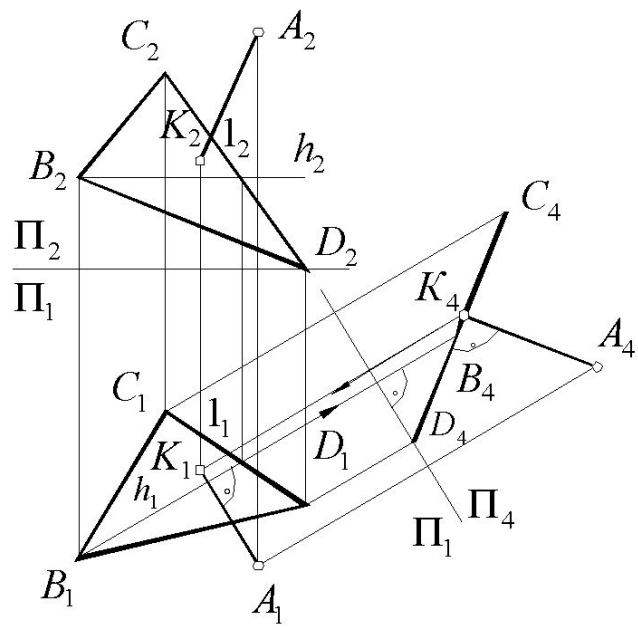


Рис. 5.23

На рис. 5.23 цю задачу розв'язано способом заміни площин проєкцій. Задану площину загального положення BCD перетворено на площину проєкціювальну із застосуванням горизонталі h , тобто розв'язано третю основну задачу на перетворення.

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

При цьому точка A зберігає своє положення відносно заданої площини. Будуємо її нову проекцію на площині Π_4 . Відрізок AK є дійсною величиною відстані між точкою A і площиною загального положення B, C, D . При поверненні точки K до системи площин Π_1, Π_2 проекцію A_1K_1 перпендикуляра AK проведено паралельно осі Π_1/Π_4 . Проекцію K_2 точки K знайдено на вертикальній лінії сполучення, яку проведено через K_1 , на відстані від осі Π_1/Π_2 , що дорівнює віддаленню проекції точки K_4 від осі Π_1/Π_4 .

Приклад 5. Визначити відстань між заданими паралельними прямими.

Відстань між паралельними прямими вимірюється довжиною перпендикуляра, проведеного до цих прямих. Креслення доцільно перетворити таким чином, щоб прямі зайняли проєкціювальне положення, тобто спроектувалися у точки. Довжина відрізка між "виродженими" проєкціями прямих визначить натуральну величину відстані між паралельними прямими. Рішення цієї задачі знаходиться послідовним розв'язуванням першої та другої задач на перетворення проєкцій.

На рис. 5.24 проєкції двох паралельних прямих загального положення подвійною заміною площин проєкцій перетворено на точки. Відстань між "виродженими" проєкціями заданих прямих є шуканою. Дійсно, другою заміною площин проєкцій нова площина проєкцій Π_5 буде розташована під прямим кутом до заданих прямих. Отже, перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї прямої на іншу, буде паралельним площині проєкцій Π_5 і спроектується на неї без спотворення.

Приклад 6. Визначити відстань між двома паралельними площинами.

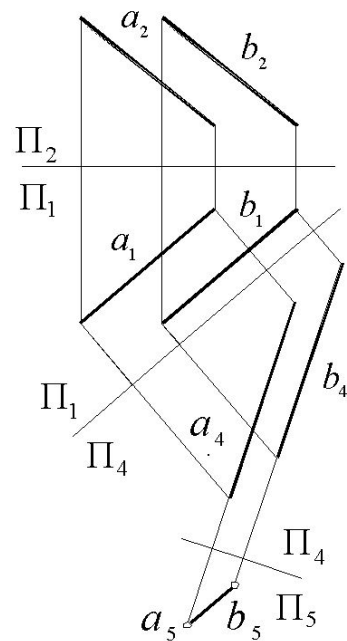


Рис. 5.24

Відстань між двома паралельними площинами вимірюється довжиною відрізка перпендикуляра, проведеного з довільної точки однієї площини на другу. Найпростіший шлях розв'язування цієї задачі пов'язаний із перетворенням обох площин на площини проєкціювальні. Цього можна досягти заміною однієї з площин проєкцій (третя задача на перетворення).

На рис. 5.25 це перетворення виконано із застосуванням двох фронталей f і f' , побудованих у паралельних площинах Γ і T . Відрізок $O_4O'_4$ на площині проєкцій Π_4 визначає відстань між площинами Γ і T . Точки O і O' найближчі одна до одної у цих площинах. Проекція $O_2O'_2$ паралельна осі проєкцій Π_1/Π_4 і будується на довільній відстані від неї.

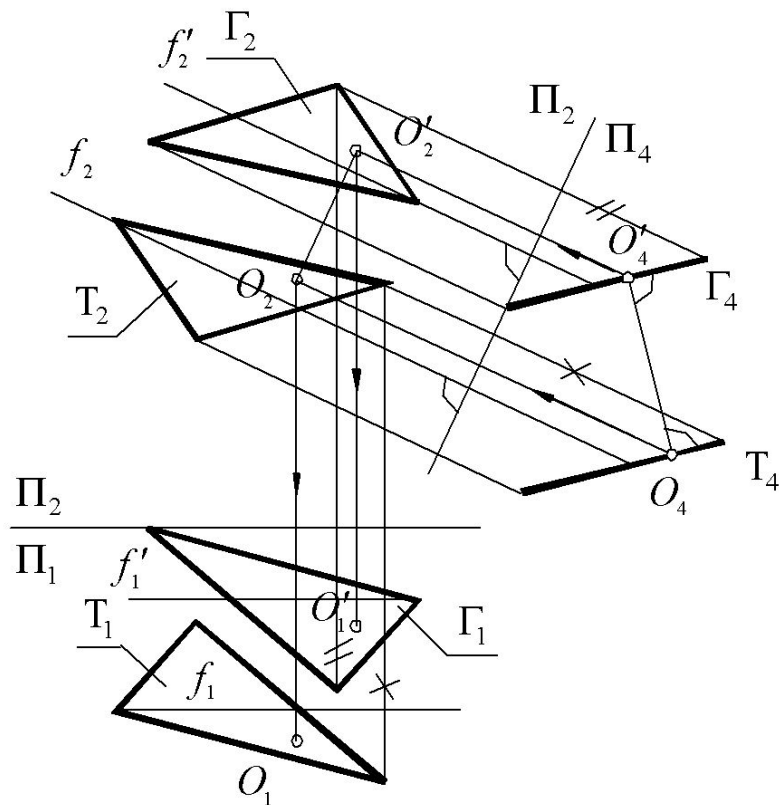


Рис. 5.25

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

Приклад 7. Визначити натуральний вигляд перерізу геометричної моделі.

Під перерізом геометричної моделі розуміють фігуру, яка утворюється при її перетині з площиною окремого положення. Зрозуміло, що отримана фігура буде плоскою, тому знаходження її натуральної величини зводиться, в основному, до побудов, розглянутих у попередньому підрозділі. Але, у зв'язку з деякою незвичайністю цих побудов, розглянемо розв'язування цієї задачі на прикладі піраміди.

На рис. 5.26 показано піраміду, що перетинається горизонтально-проекціовальною площиною Θ . Розглядаючи кожну з трьох граней піраміди як деяку площину загального положення, будуємо три лінії перетину, які разом утворюють трикутник $1-2-3$. Цей трикутник проєкціюється на площину Π_2 зіспотворенням. Для знаходження його натуральної величини можна застосувати один із відомих нам методів перетворення проєкцій і розв'язати четверту задачу на перетворення комплексного креслення тільки для плоского перерізу, не звертаючи уваги на піраміду.

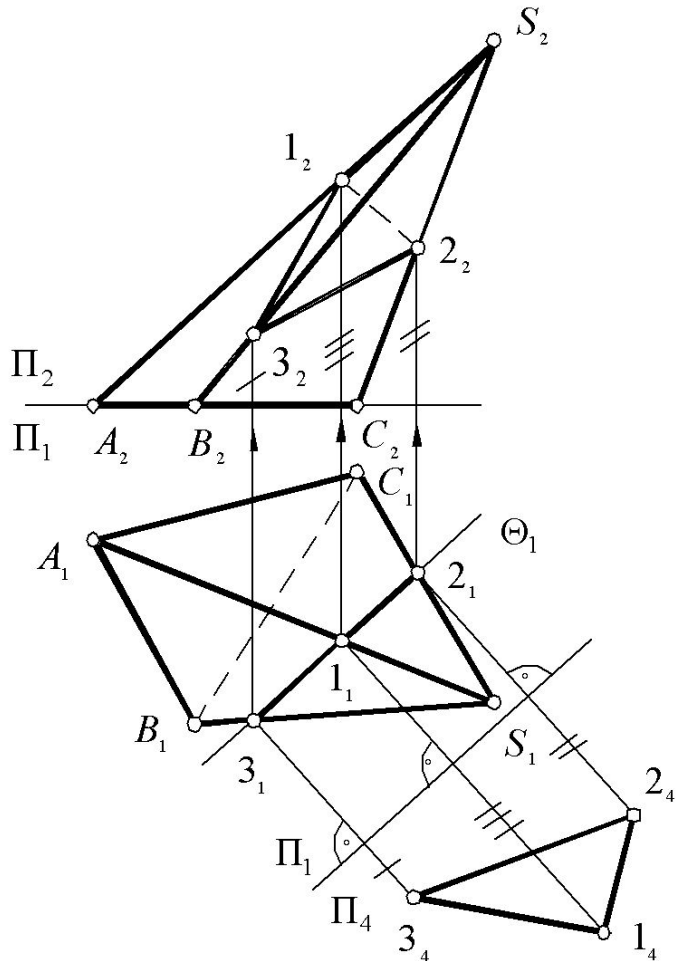


Рис. 5.26

На рис. 5.26 цю задачу розв'язано способом заміни площин проекцій. Додаткову площину проекцій розташовано паралельно перерізу піраміди. Нова вісь проекцій Π_1 / Π_4 проведена паралельно горизонтальній проекції площини Θ . Стара вісь Π_1 / Π_2 збігається з фронтальною проекцією основи піраміди. Подальші побудови зроблено за відомою нам схемою.

Приклад 8. Визначити кут між двома площинами.

Визначення кута між двома площинами спрощується, якщо площини задані таким чином, що на комплексному кресленні присутня лінія їх перетину. Тобто дві площини явно утворюють двограний кут (рис. 5.27). У цьому випадку розв'язування задачі зводиться до перетворення лінії AB на проекціювальну

пряму, що можливе послідовним виконанням першої та другої основних задач. Обидві площини при цьому також займуть положення проекціювальних

На рис. 5.27 задача розв'язана способом заміни площин проекцій. Після першої заміни відрізок AB – спільне ребро двограного кута – зайняв положення прямої рівня. Нова вісь проекцій Π_1 / Π_4 була розташована паралельно горизонтальній проекції A_1B_1 ребра.

Після другої заміни площин проекцій, коли площина Π_1 була замінена площиною Π_5 , відрізок AB перетво-

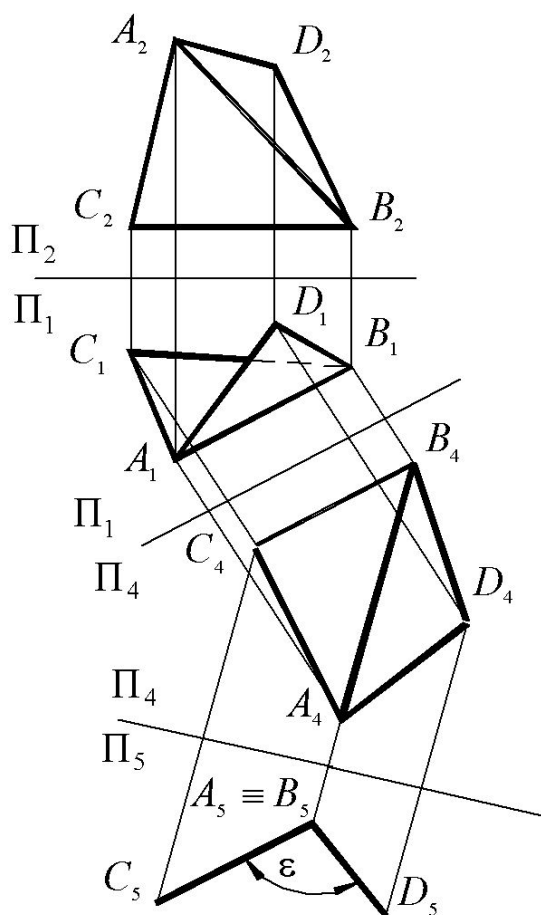


Рис. 5.27

5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ

рився на проєкціювальну пряму. Нова вісь проєкцій Π_4 / Π_5 перпендикулярна до проєкції A_4B_4 відрізка AB . Кут ε між проєкціями-прямими площин є шуканим кутом між заданими площинами.

Розглянуті вище метричні задачі, більшість з яких доцільно розв'язувати із застосуванням способів перетворення комплексного креслення, дуже часто стають складовою частиною різноманітних конструктивних задач, які на практиці доводиться розв'язувати при розробці тих чи інших технічних проєктів. Тому оволодіння методами їх розв'язування має дуже важливе практичне значення.

6. КРИВІ ЛІНІЇ

6.1. Способи утворення кривих ліній

Криві лінії займають одне з провідних місць у різних галузях науки і техніки. Вони набули широкого застосування у геометричному моделюванні різних технічних об'єктів. За кривими лініями виконують обводи суден, літаків, автомобілів, лопаток турбін і компресорів тощо.

За допомогою кривих ліній можна наочно простежити хід того чи іншого процесу, відобразити результати експериментальних досліджень або теоретичних розрахунків. Вони надають можливість краще зрозуміти геометричні властивості тієї чи іншої залежності, дослідити закономірності, для яких ще не знайдено аналітичного виразу, розв'язати певну наукову або інженерну задачу.

Крива лінія – це деяка сукупність точок простору, координати яких є функціями двох змінних. Відомо, що майже кожна крива лінія має кілька визначень, тому існують різні способи їх утворення. Внаслідок цього при визначенні кривої лінії часто виходять з її наочного зображення, яке надає можливість розв'язувати різні задачі, застосовуючи метод проєкцій. Криву лінію можна розглядати як:

а) апроксимуючу будь-якої множини точок, отриманих за дискретним законом;

6. КРИВІ ЛІНІЇ

б) геометричне місце послідовних положень точки, яка неперервно рухається у просторі. Якщо траєкторія рухомої за певним законом точки A_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) є крива l (рис. 6.1, *а*), то такий спосіб задання кривої називається кінематичним;

в) обвідну деякої прямої лінії, яка неперервно рухається у просторі (рис. 6.1, *б*);

г) траєкторію точки, що незмінно зв'язана з рухомою площиною кривою (рис. 6.1, *в*);

д) результат перетину кривої поверхні з площиною;

е) результат перетину поверхонь, з яких хоча б одна є кривою поверхнею.

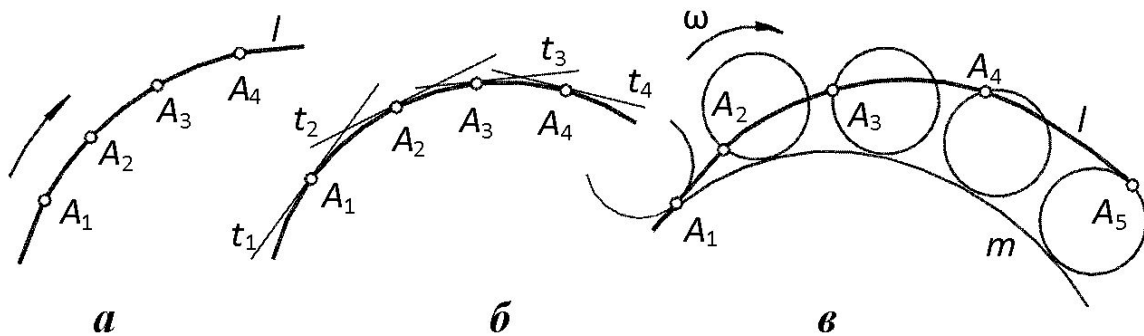


Рис. 6.1

6.2. Класифікація кривих ліній

У нарисній геометрії криві лінії класифікуються за такими ознаками:

а) у залежності від розташування точок кривої у просторі криві лінії поділяють на *плоскі* та *просторові*. Якщо всі точки кривої лінії належать деякій площині, то таку криву лінію називають *плоскою*, а коли ця умова не виконується або інакше, коли крива лінія не може бути суміщена з площиною всіма своїми точками, така крива лінія називається *просторовою*. До плоских кривих належать коло, еліпс, парабола, гіпербола, синусоїда тощо, до просторових кривих ліній – гвинтова лінія, лінія перетину двох кривих поверхонь та інші;

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

б) за способом утворення криві лінії поділяються на *закономірні*, які мають певний аналітичний вираз, і *незакономірні*, утворення яких має емпіричний характер. Закономірні криві лінії можуть бути задані аналітично та графічно, а незакономірні – тільки графічно;

в) закономірні криві лінії поділяються на *алгебраїчні*, які у декартовій системі координат задаються алгебраїчним рівнянням, та *трансцендентні*, які задаються неалгебраїчними рівняннями. До перших належать, наприклад, коло, еліпс, гіпербола, парабола тощо, до других – синусоїда, спіраль Архімеда, лемніската Бернуллі і т. д.

Алгебраїчні криві характеризуються *порядком*, який визначається найвищим степенем їх рівняння. З геометричної точки зору, порядок кривої n визначається найбільшим числом точок її перетину з прямою лінією. Ці точки можуть бути дійсними, такими, що збігаються, та уявними. На рис. 6.2 наведено приклад визначення порядку еліпса. Пряма l_1 перетинає еліпс у двох точках, тому еліпс є кривою другого порядку. У випадку, коли пряма l_2 дотична до еліпса, точки 1 і 2 збігаються. Для прямої l_3 обидві точки уявні.

Порядок просторової алгебраїчної кривої лінії визначається степенем рівняння, яке її описує, або найбільшою кількістю точок перетину з площиною (рис. 6.3).

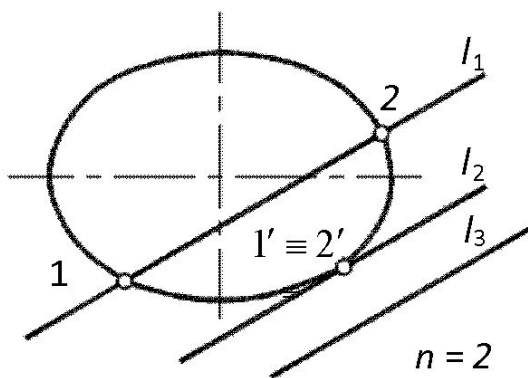


Рис. 6.2

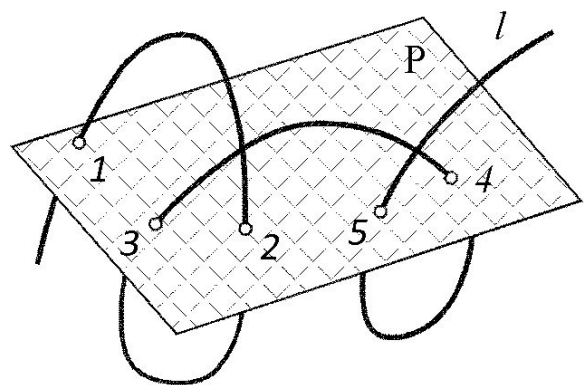


Рис. 6.3

6. КРИВІ ЛІНІЇ

Для трансцендентних кривих ліній поняття порядку не існує, оскільки вони мають нескінченне число циклів і тому для них $n = \infty$.

6.3. Криві другого порядку

Криві другого порядку знайшли широке застосування у техніці, що пояснюється простотою їх побудови та аналітичного виразу. Оскільки ці криві отримують перетином конуса обертання площиною, їх ще називають *конічними перерізами*. До конічних перерізів належать *коло*, *еліпс*, *парабола*, *гіпербола*.

При перетині площиною всіх твірних конуса обертання утворюються плоскі замкнені криві – *коло* або *еліпс*. На рис. 6.4 січна площина Δ перпендикулярна до осі i конуса обертання. У цьому випадку поверхня конуса перетинається з площиною по *колу* a .

Якщо січна площина Λ нахилена до осі конуса (рис. 6.5), у перетині утворюється *еліпс* b . Конічна поверхня незамкнена, її можна продовжити в обидві по відношенню до вершини S сторони. Площина Λ дає у перетині еліпс, а площина Σ – тільки його частину. Кут γ нахилу площин Λ і Σ до осі конуса має перевищувати кут δ нахилу твірних конуса до його осі.

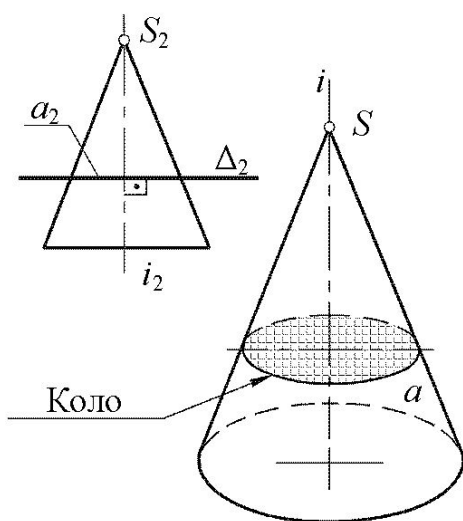


Рис. 6.4

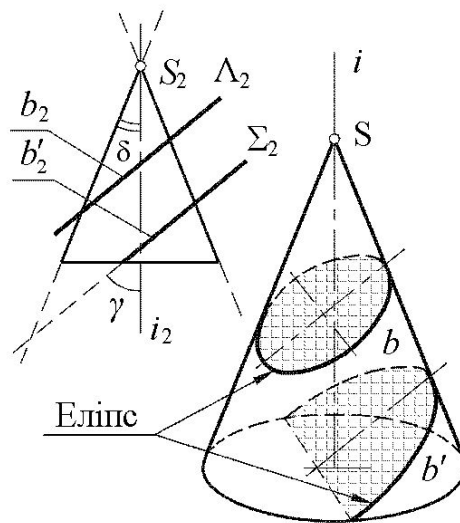


Рис. 6.5

На рис. 6.6 поверхня конуса обертання перетинається площиною T , паралельною тільки одній твірній конуса, що має місце при куті $\gamma = \delta$. У цьому випадку в перетині конуса утворюється *парабола* c з вершиною в точці F . Друга гілка конуса, що знаходиться по інший бік від вершини S , площиною T не перетинається.

І, нарешті, на рис. 6.7 показано січну площину, яка перетинає обидві гілки конуса обертання. Ця площина паралельна двом твірним конуса SG і SH , а кут $\gamma < \delta$ або $\gamma = 0$. У цьому випадку в перерізі утворюється крива лінія, яка складається з двох гілок. Така крива називається *гіперболою*. Вона має вершини K і L .

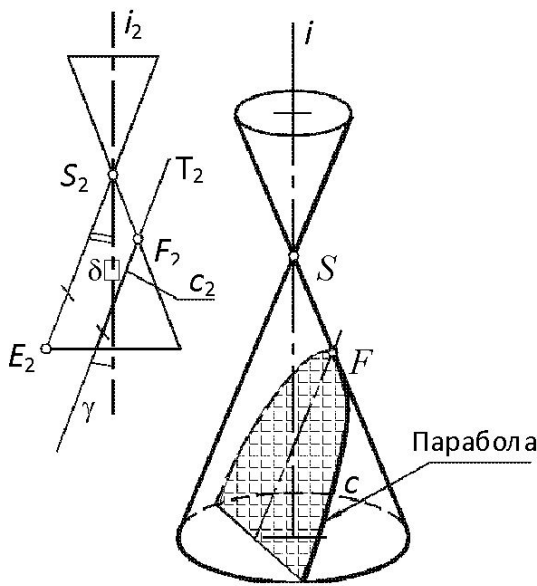


Рис. 6.6

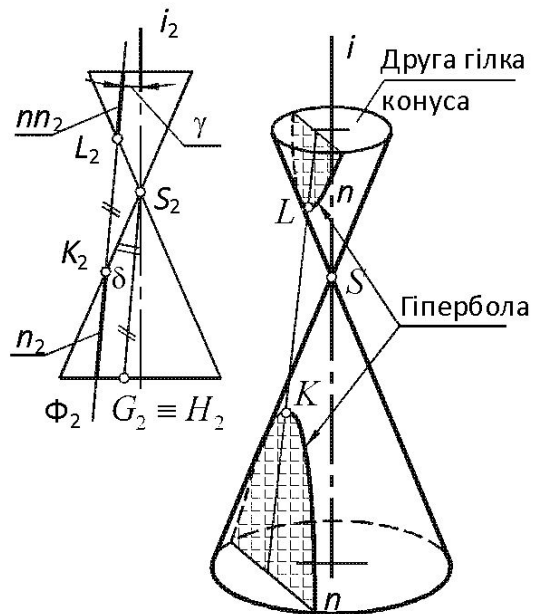


Рис. 6.7

Слід пам'ятати, що проекцією кола може бути еліпс і, навпаки, проекцією еліпса може бути коло. Збереження порядку кривої при ортогональному проєкціюванні – це одна із властивостей плоских кривих ліній.

6. КРИВІ ЛІНІЇ

На рис. 6.8 подано спосіб побудови еліпса за його великою $2a$ і малою $2b$ осями – відомий у літературі як *спосіб двох кіл*. Із центра еліпса O проводять два концентричних кола, діаметри яких дорівнюють великій $AB = 2a$ та малій $CD = 2b$ осям еліпса. Велике коло ділять на деяку кількість частин. Точки поділу $1, 2, 3, \dots, n$ сполучають із центром O прямими лініями, які ділять мале коло на ту ж кількість частин (точки $1', 2', 3', \dots, n'$). Із точок поділу великого кола проводять прямі, паралельні малій осі еліпса, а із точок поділу малого кола – прямі, паралельні великій осі. Перетин однойменних прямих дає точки I, II, III, ... N, що належать еліпсу. З'єднавши отримані точки плавною лекальною кривою, отримаємо еліпс.

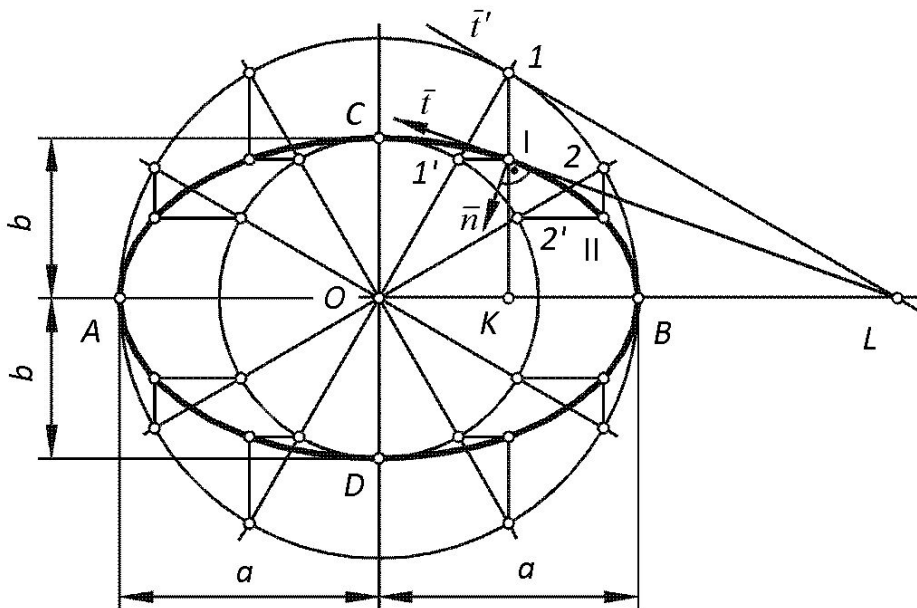


Рис. 6.8

На цьому ж рисунку показано побудову дотичної та нормалі до еліпса у довільній точці (точка I). У точці I великого кола проводимо дотичну t' (перпендикулярну радіусу $O1$) і продовжуємо її до перетину в точці L з продовженням великої осі. Оскільки точка L нерухома, а точка I кола переходить

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

у точку I еліпса, то шукана дотична t пройде через точки I та L . Нормаль $\bar{n}$ у точці I складає прямий кут із дотичною t .

Приклад побудови параболи за її віссю Ox , вершиною A і довільною точкою M , що належить параболі, показано на рис. 6.9. Спираючись на точки A і M , будують прямокутник $ACMH$ і ділять його сторони AC і CM на однакову кількість рівних частин, наприклад на п'ять. Точки поділу нумерують у напрямках, показаних стрілками. З'єднують вершину A із точками $1, 2, 3, \dots$ на прямій CM , а через точки $1', 2', 3', \dots$ проводять прямі, паралельні осі Ox . Перетин однойменних прямих визначає точки, які належать параболі. Знайдені точки сполучають плавною лекальною кривою.

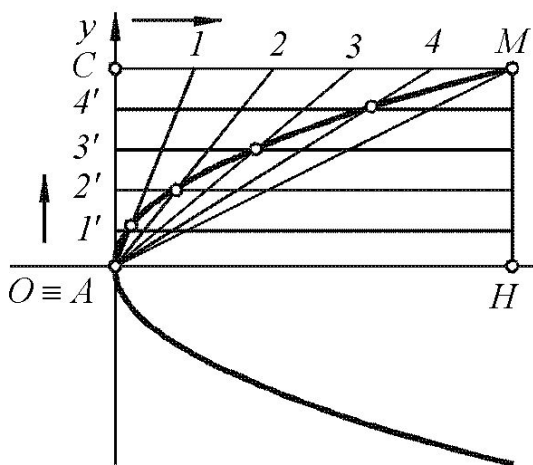


Рис. 6.9

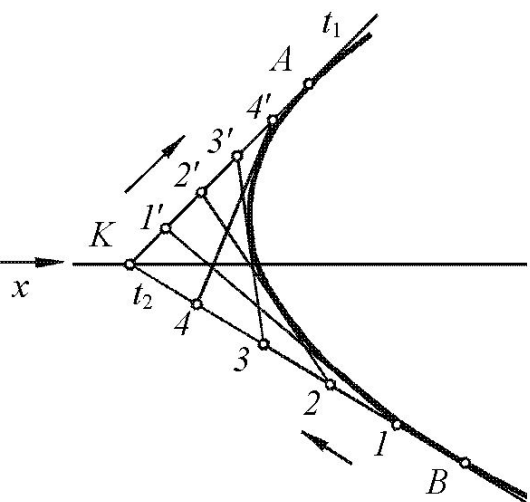


Рис. 6.10

Побудову параболи, дотичної в точках A і B до двох прямих, які перетинаються у точці K , показано на рис. 6.10. Відрізки AK і BK розділяють на однакову кількість рівних частин. Точки поділу нумерують у напрямках, показаних стрілками. Однойменні точки сполучають прямими і будують плавну лекальну криву лінію, що огинає ці прямі. Отримана крива є шуканою параболою. Слід зазначити, що подібний

6. КРИВІ ЛІНІЇ

спосіб дуже часто застосовують при моделюванні кривих обводів профілів лопаток турбін.

6.4. Просторові криві лінії

Криві лінії, всі точки яких не належать одній площині, мають назву просторових або ліній подвійної кривини. Просторову лінію на комплексному кресленні задають послідовним рядом її точок. Щоб установити особливі точки такої кривої лінії, необхідно зіставити дві її проекції.

Так, просторова крива лінія, яка не має особливих точок, може їх мати у своїх проекціях (рис. 6.11). Проекції кривої m мають подвійні точки, хоча сама просторова крива їх не має. Конкуруючі точки 1–4 дозволяють краще уявити розташування кривої m у просторі.

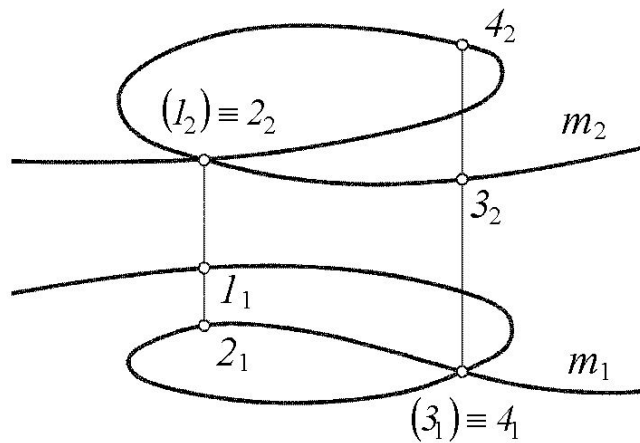


Рис. 6.11

Звідси випливає ще одна властивість просторових кривих ліній. Якщо плоску криву можна вивчати за однією її проекцією (зрозуміло, "невиродженою"), то для вивчення просторової кривої лінії необхідні дві або більше проекцій.

Із просторових кривих ліній у техніці широко застосовуються гвинтові лінії. Гвинтову лінію можна розглядати як результат переміщення точки по поверхні обертання.

Якщо зафіксувати положення точки на поверхні прямого кругового циліндра вістрям добре загостреного олівця, а потім почати обертати циліндр навколо його осі та рівномірно

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

переміщувати олівець уздовж осі циліндра, то олівець опише на циліндричній поверхні просторову криву – циліндричну гвинтову лінію. Вісь циліндричної поверхні буде віссю гвинтової лінії, а радіус циліндричної поверхні – радіусом гвинтової лінії.

Отже, при рівномірному обертанні циліндра й прямолінійному переміщенні олівця отримують циліндричну гвинтову лінію, так звану *гелісу*, яка є траєкторією руху точки, що рівномірно обертається навколо осі та рухається з постійною швидкістю вздовж цієї осі. Величину P переміщення точки вздовж осі за один оберт називають *кроком гвинтової лінії*.

Для побудови геліси спочатку креслять проекції прямого кругового циліндра (рис. 6.12). Коло основи циліндра (горизонтальна проекція геліси) ділять на певне число рівних частин. На таке ж число частин ділять крок (на фронтальній проекції). Із точок ділення кола проводять лінії сполучення, а через відповідні точки ділення кроку – горизонтальні прямі. Відмічають точки $1_2, 2_2, 3_2, \dots, 12_2, 1'_2$, в яких перетинаються відповідні прямі. З'єднавши отримані точки ($1_2, 2_2, 3_2, \dots, 12_2, 1'_2$) плавною кривою, отримують фронтальну проекцію гвинтової лінії.

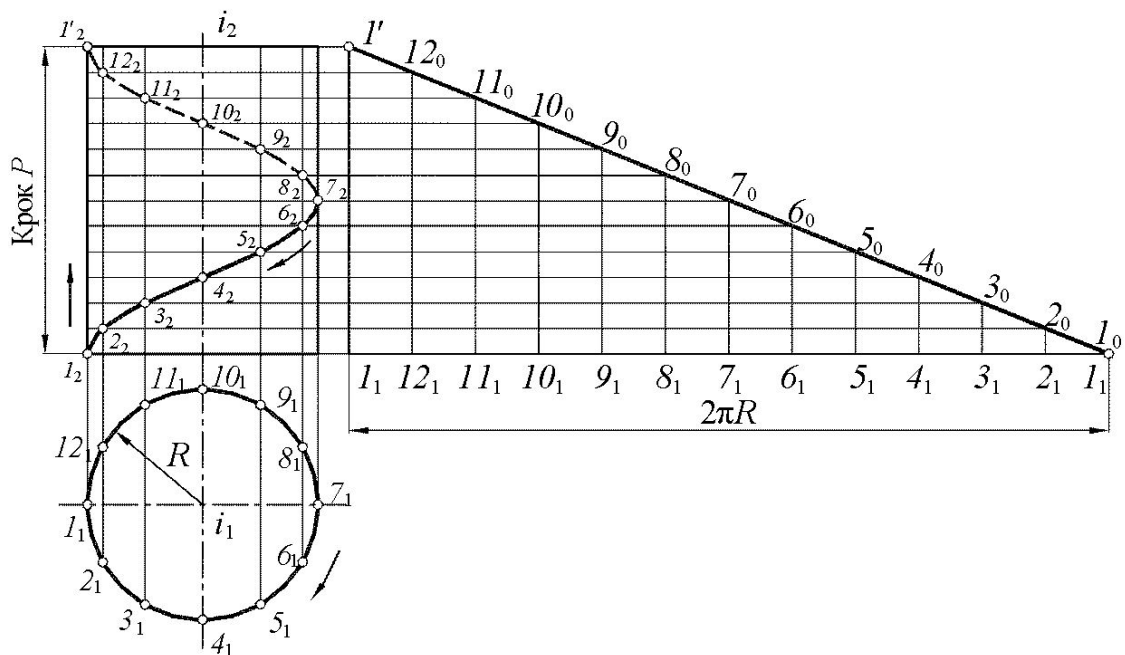


Рис. 6.12

6. КРИВІ ЛІНІЇ

Гвинтові лінії підрозділяються на *праві* та *ліві* (з правим або лівим ходом). Підставою для такого ділення є напрям руху точки, що "спускається" по гвинтовій лінії. Якщо проекція цього напрямку на площину, перпендикулярну до осі гвинтової лінії, збігається з напрямком руху годинникової стрілки, то лінія називається гвинтовою лінією правого ходу, інакше гвинтову лінію вважають лівою. На рис. 6.12 показана права гвинтова лінія.

Гіпотенуза трикутника $I_0 I_0 I_1$, зображеного на рис. 6.12 справа, є розгорткою геліси уздовж її кроку. Циліндрична гвинтова лінія цілком визначається радіусом, кроком і напрямом.

Як приклад незакономірних просторових кривих ліній можна розменити циліндричні перерізи лопатки осьової газової турбіни (рис. 6.13). Поверхня лопатки розрізається кількома коаксіальними циліндричними поверхнями. При цьому утворюються замкнені просторові контури – так звані аеродинамічні профілі лопатки. Ці профілі використовуються як при проектуванні лопатки, так і при її виготовленні та контролі.

При проектуванні корпусу судна, у першу чергу, розробляють його *теоретичне креслення*, яке є сукупністю ліній, що отримуються при перетині поверхні корпусу судна трьома площинами рівня. Горизонтальні січні площини рівня визначають *ватерлінії*, фронтальні січні площини – *батокси*, і, нарешті, профільні січні площини – *шпангоути* (рис. 6.14).

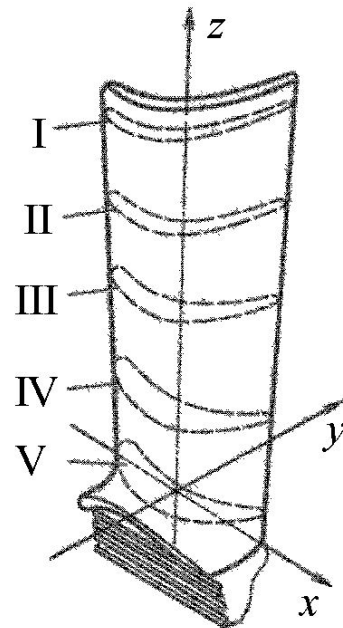


Рис. 6.13

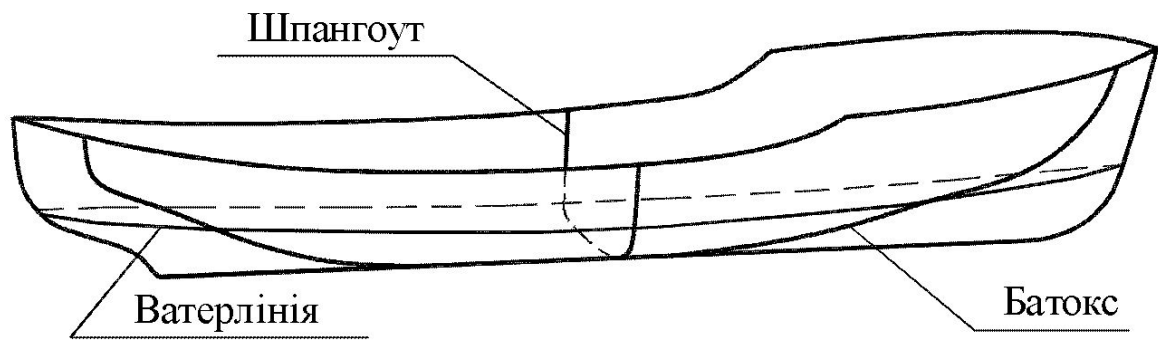


Рис. 6.14

Усі ці лінії належать до незакономірних кривих, хоча й забезпечують корпусу судна необхідну обтічність.

7. БАГАТОГРАННИКИ

7.1. Піраміди

Одним із видів просторових геометричних форм є багатогранники – замкнені просторові фігури, обмежені плоскими багатокутниками. Багатокутники, які утворюють багатогранну поверхню, називаються її *гранями*, сторони багатокутників – *ребрами*, а вершини – *вершинами* багатогранної поверхні. Ребра та вершини багатогранників утворюють *просторову сітку*.

Якщо пряма лінія l проходить через деяку точку простору S і переміщується по замкненій ламаній m , то у просторі утворюється *пірамідальна поверхня* (рис. 7.1). Перетнувши пірамідальну поверхню деякою площиною Π , отримаємо піраміду $SABC$ (рис. 7.2). Отже, піраміда – це багатогранник, одна грань якого є багатокутник (основа), а бічні грані – трикутники, які мають спільну точку S – *вершину піраміди*. Прямі лінії, по яких перетинаються грані та які проходять через вершину піраміди і точки зламу ламаної лінії, називаються *ребрами піраміди* (прямі a, b, c). Пряма лінія l називається *твірною*, ламана m – *напрямною*. Ребра піраміди поділяються на *бічні* і *ребра основи*.

Коли висота h піраміди розташована перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій, тобто основа піраміди паралельна цій площині проєкцій, то побудову піраміди починають з горизонтальної проєкції основи $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 7.3). Для цього навколо точки $O_1 \equiv S_1$ проводять коло заданого радіуса і розбивають його на n частин (у нашому випадку $n = 6$).

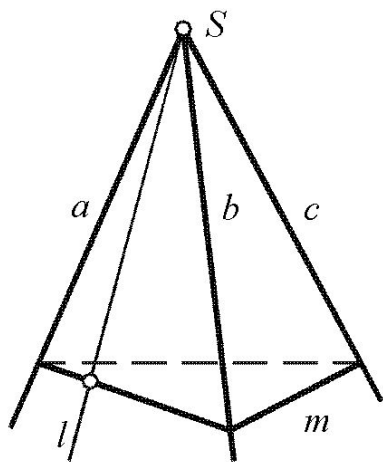


Рис. 7.1

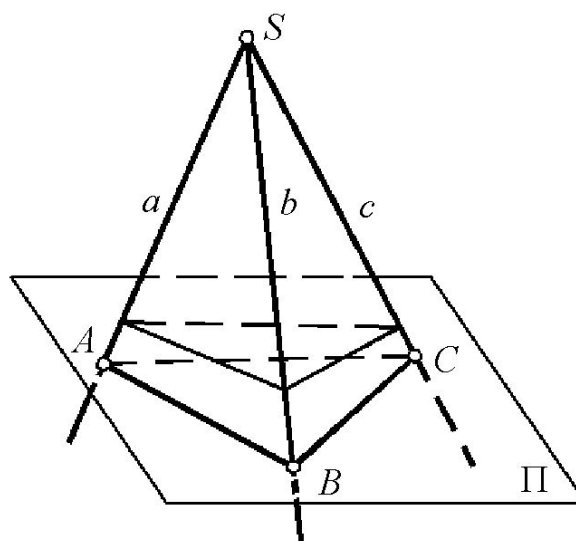


Рис. 7.2

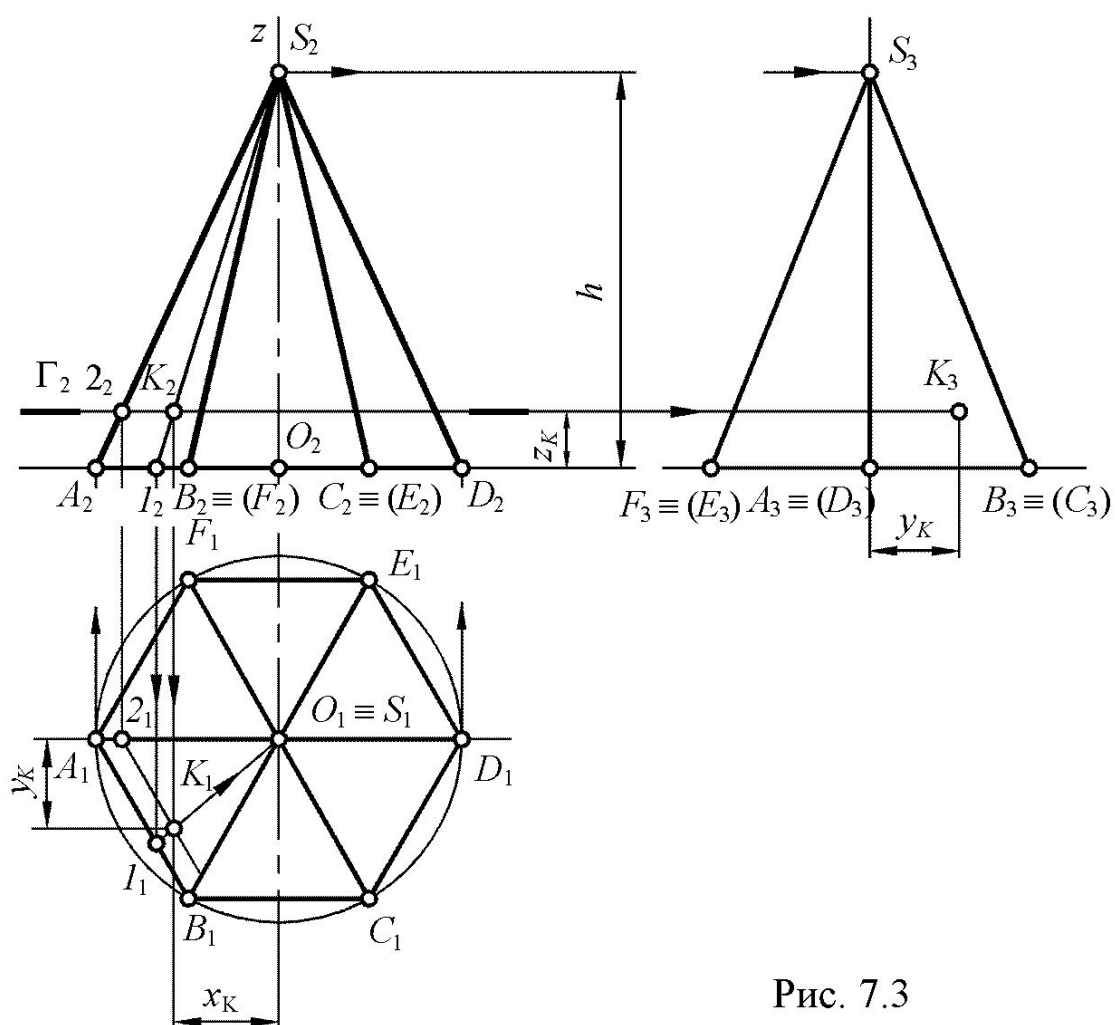


Рис. 7.3

7. БАГАТОГРАННИКИ

Фронтальна проекція основи піраміди має бути розташована горизонтально. Її проводять у зручному місці вище горизонтальної проекції піраміди, зберігаючи вертикальну проекційну відповідність. Одержують проекції точок $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ і O_2 . Через O_2 проводять фронтальну проекцію осі z , відкладають висоту піраміди h і здобувають S_2 – фронтальну проекцію вершини піраміди. Її горизонтальна проекція S_1 збігається з O_1 . Отже, мають горизонтальну і фронтальну проекції вершини піраміди. З'єднуючи прямими лініями однойменні проекції відповідних вершин, отримують горизонтальну і фронтальну проекції піраміди.

Профільна проекція піраміди будується на вільному місці креслення із збереженням проекційної відповідності. Отримують профільні проекції точок $S_3, A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3$, які з'єднують прямими лініями і, отже, отримують шукану проекцію піраміди.

Для перевірки цього твердження будують на бічній поверхні піраміди довільну точку K . Побудови починають з фронтальної проекції, де на грані SAB беруть проекцію K_2 деякої точки K . Грань SAB є площиною загального положення, вона не має жодних особливостей, тому шукані проекції K_1 і K_3 знаходять за проекційною відповідністю. Відомо, що точка належить площині, коли вона належить деякій прямій, що належить цій площині. Виходячи з цього, проводять через S_2 і K_2 пряму до її перетину в точці I_2 з фронтальною проекцією A_2B_2 ребра AB . Далі одержують S_1I_1 і, нарешті, K_1 . Проекцію K_3 будують за проекційною відповідністю.

Подібну задачу можна розв'язувати іншим, більш універсальним способом. Через точку K проводять січну площину-посередник – площину $\Gamma(\Gamma_2)$. Площини-посередники у кожному випадку вибирають із розрахунку отримання найбільш простого розв'язування задачі. Якщо точка K належить площині Γ

і грані SAB , вона мусить розташовуватися на лінії їх перетину. Тому визначають фронтальну проекцію 2_2K_2 цієї лінії, знаходять проекцію 2_1 точки 2 , через яку паралельно A_1B_1 проводять горизонтальну проекцію лінії перетину і, нарешті, здобувають горизонтальну проекцію K_1 точки K . Профільну проекцію цієї точки будують аналогічно прикладу, наведеному вище.

Розглянемо випадок, коли задана горизонтальна проекція K_1 точки K . Спочатку через K_1 проводять пряму, паралельну A_1B_1 , і знаходять проекцію 2_1 точки 2 . Провівши вертикальну лінію сполучення, знаходять фронтальну проекцію 2_2 точки 2 , а далі рівень січного посередника $\Gamma(\Gamma_2)$, який і визначає проекцію K_2 точки K . Профільну проекцію K_3 точки K будують розглянутим вище способом.

Якщо заданою є профільна проекція K_3 точки K , то побудова проекцій K_2 і K_1 відбувається за такою схемою. Проекція K_3 визначає рівень січної площини-посередника $\Gamma(\Gamma_2)$, тому знаходять проекцію 2_2 точки 2 , а за нею проекцію 2_1 цієї точки та пряму, що проходить через точку 2 , паралельно A_1B_1 . На площині проекцій Π_3 визначають відстань y_K , яку відкладають на площині проекцій Π_1 і проводять горизонтальну лінію до перетину з попередньою прямою. Знаходять проекцію K_1 , проекція K_2 точки K на перетині вертикальної лінії сполучення з проекцією січної площини $\Gamma(\Gamma_2)$.

7.2. Призми

Розглянемо ще раз рис. 7.1 і припустимо, що вершина S піраміди перемістилася у нескінченність. При цьому бічні ребра піраміди перетворюються на паралельні прямі лінії. Зазначимо, що у цьому випадку вершина S замінюється напрямом s (рис. 7.4), а поверхня стає призматичною.

7. БАГАТОГРАННИКИ

Таким чином, якщо твірна l переміщується по довільній напрямній замкненій ламаній лінії так, що у будь-якому положенні вона залишається паралельною заданому напрямку s , то утворюється замкнена *гранна поверхня*, яка називається *призматичною*. Якщо площини, які формують гранну поверхню, замикають простір з усіх боків, то утворюється багатогранник.

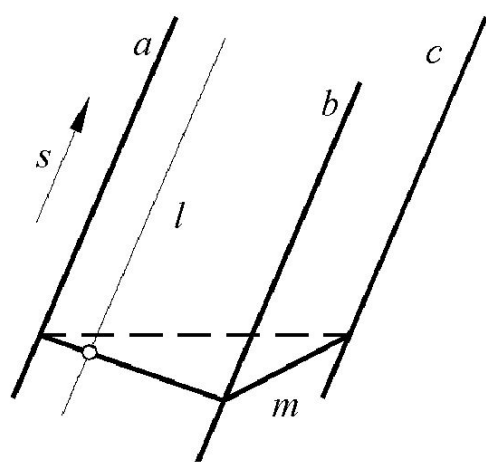


Рис. 7.4

Призмою називається багатогранник, який утворюється у перерізі призматичної поверхні двома паралельними площинами (рис. 7.5). Отже, призма – це багатогранник, у якого дві грані (основи) є однаковими багатокутниками з відповідно паралельними сторонами, а бічні грані у загальному випадку – паралелограми.

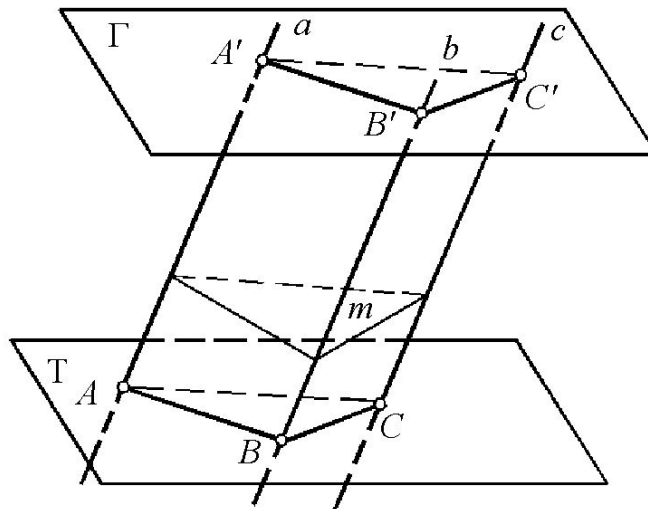


Рис. 7.5

Призма називається прямою (рис. 7.6), коли бічні ребра перпендикулярні до основи, і *похилою* (рис. 7.7), коли вони не

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

перпендикулярні до основи. Бічні грані прямокутної призми – прямокутники, похилої – паралелограми. Призми поділяються на правильні й неправильні.

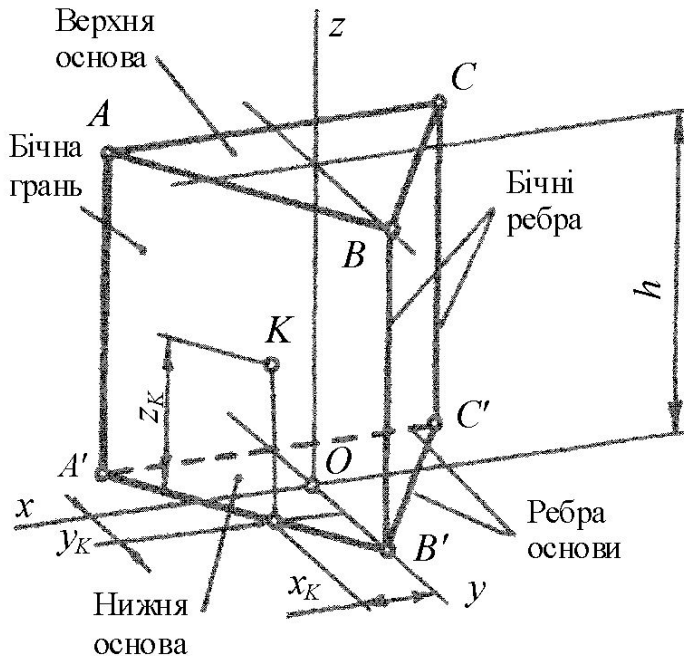


Рис. 7.6

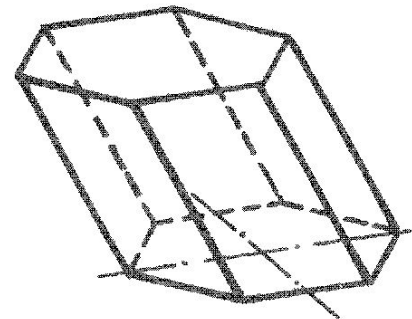


Рис. 7.7

*Правильною називається призма, в основі якої лежить правильний багатокутник. За формою основи призми бувають трикутні, чотирикутні, п'ятикутні і т. д. Якщо в основі призми лежить прямокутник або паралелограм, вона називається паралелепіпедом. Прямий паралелепіпед, в основі якого лежить прямокутник, називається *прямокутним*.*

Процес побудови призми на комплексному кресленні показано на прикладі прямої правильної трикутної призми (рис. 7.8).

Проаналізуємо розташування граней основи, бічних граней і ребер призми відносно площин проєкцій. З заданих умов випливає, що верхня й нижня основи призми є горизонтальними площинами рівня, їх горизонтальні проєкції на площину проєкцій Π_1 відображаються у натуральну величину.

7. БАГАТОГРАННИКИ

Вертикальні ребра призми є горизонтально-проекціювальними прямими. На площині Π_1 вони мають вироджені проекції. На інші площини проєкцій вони проєкціюються у натуральну величину. Бічні грані також перпендикулярні до площини проєкцій Π_1 .

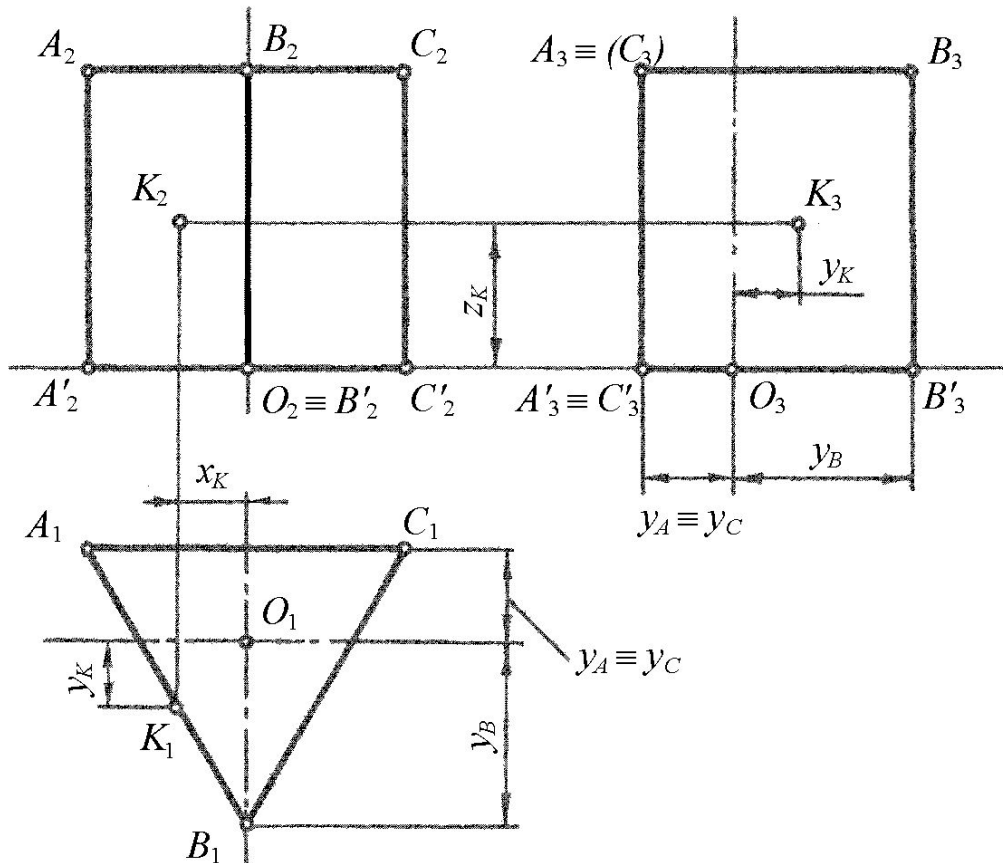


Рис. 7.8

Зроблений аналіз свідчить, що спочатку треба будувати горизонтальну проєкцію призми, яка є рівностороннім трикутником. Одну зі сторін цього трикутника доцільно розташувати паралельно горизонтальній осі. Наступним кроком є побудова фронтальної проєкції призми, яка має вигляд прямокутника. Профільну проєкцію призми креслять на вільному місці праворуч, дотримуючись проєкційної відповідності.

Метрична визначеність зображення призми на комплексному кресленні перевіряється побудовою довільної точки, що належить бічній грані. Задаються, наприклад, у грані $AA'BB'$ фронтальною проекцією K_2 точки K . Ця грань є горизонтально-проекціювальною площиною, тому на виродженій її проекції A_1B_1 можна легко знайти горизонтальну проекцію K_1 точки K , для чого достатньо через K_2 провести вертикальну лінію сполучення до перетину з A_1B_1 . Профільну проекцію K_3 точки K знаходять за принципом, розглянутим вище при побудові подібної точки на піраміді (див. рис. 7.3).

7.3. Перетин багатогранника площиною

Лінією перетину багатогранника площиною в загальному випадку є плоский багатокутник. Плоску фігуру, отриману при перетині багатогранника площиною, називають *перерізом*. Проекції багатокутника-перерізу можуть вироджуватися в прямі лінії.

Переріз багатогранника площиною можна побудувати або по точках перетину ребер багатогранника, або по лініях перетину граней багатогранника з площиною. Задача зводиться до визначення точок перетину прямої з площиною або до визначення ліній перетину площин.

Оскільки розв'язування першої задачі простіше, ніж другої, то зазвичай при побудові перерізу багатогранника будують вершини перерізу як точки перетину ребер багатогранника із січною площиною. Після побудови вершин перерізу з'єднують відрізками прямих ліній кожні дві вершини, які лежать в одній і тій же грані багатогранника. При цьому сторони перерізу, які лежать у видимих гранях, будуть видимі, а ті, що лежать у невидимих гранях, – невидимі.

7. БАГАТОГРАННИКИ

Розглянемо приклади побудови перерізів багатогранника площиною. Спочатку розберемо прості випадки, коли або січна площина, або поверхня багатогранника є проєкціювальними.

Приклад 1. Побудувати проєкції перерізу піраміди $SABCDE$ фронтально-проєкціювальною площиною Γ (рис. 7.9).

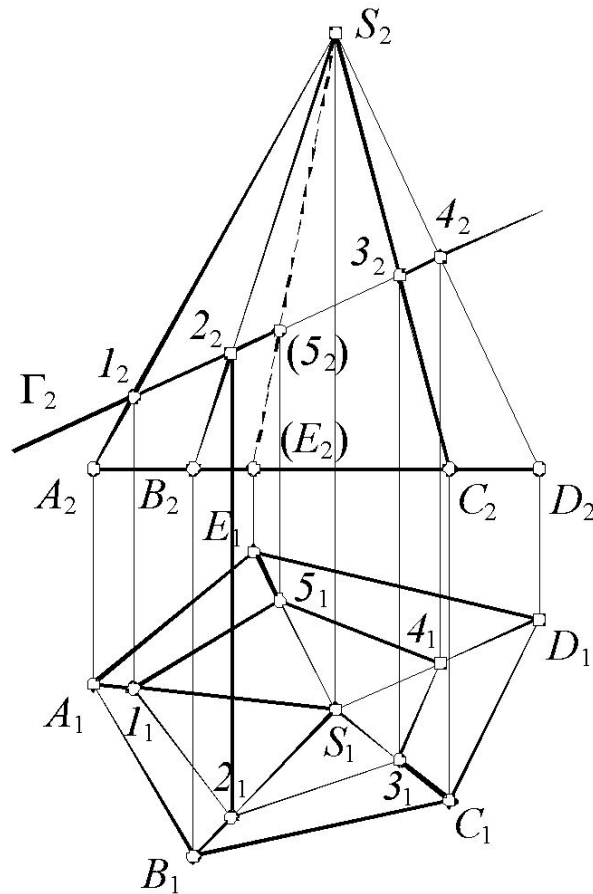


Рис. 7.9

Оскільки фронтальна проєкція перерізу у цьому випадку вироджується у відрізок прямої, що збігається з фронтальною проєкцією Γ_2 площини Γ , то можна відзначити фронтальні проєкції $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$ і 5_2 вершин шуканого перерізу. Горизонтальні проєкції $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1$ вершин перерізу знаходимо на відповідних горизонтальних проєкціях ребер. З'єднуючи ці точки у послідовному порядку відрізками прямих, отримують горизонтальну проєкцію перерізу.

Приклад 2. Побудувати горизонтальну та фронтальну проєкції перерізу трикутної призми $ABCA'B'C'$ площиною загального положення Λ , заданою двома прямими a і b , що перетинаються (рис. 7.10). Бічні грані заданої призми – горизонтально-проєкціювальні площини.

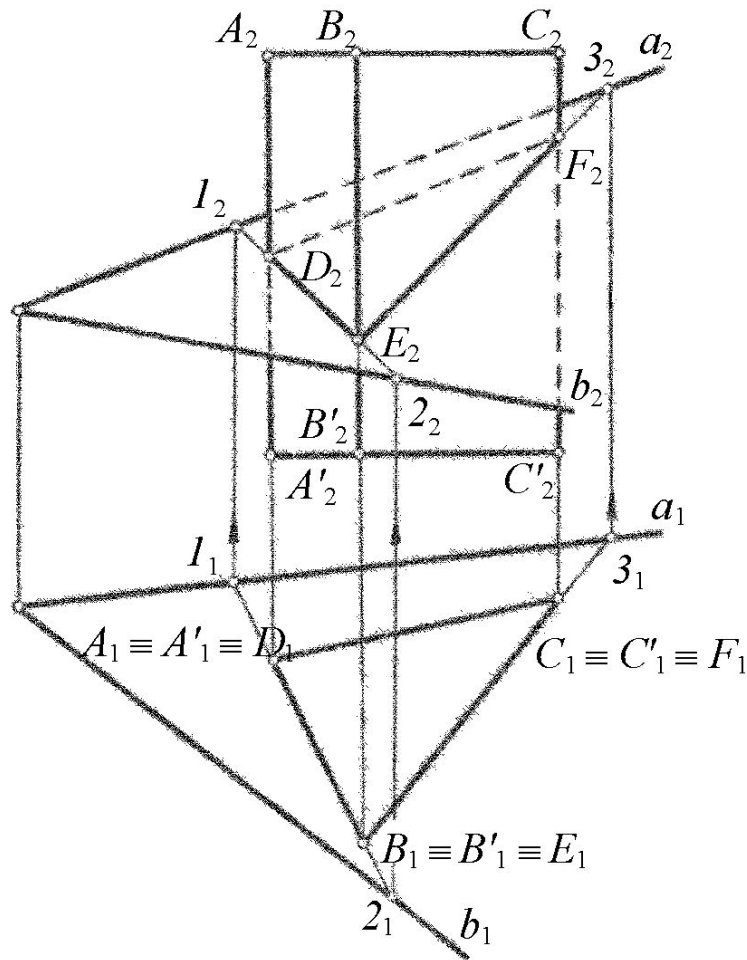


Рис. 7.10

Оскільки бічні ребра призми є горизонтально-проєкціювальними прямими, то горизонтальні проєкції D_1 , E_1 і F_1 вершин D , E і F шуканого перерізу збігаються з горизонтальними проєкціями самих ребер. Фронтальні проєкції D_2 , E_2 і F_2 цих вершин легко визначаються за умови їх приналежності січній площині Λ , для цього застосовані прямі $1-2$ та $E-3$.

7. БАГАТОГРАННИКИ

7.4. Перетин багатогранника з прямою лінією

Пряма лінія може перетинати поверхню багатогранника в одній, двох або більше точках. Якщо багатогранник опуклий – не більш ніж у двох точках. У цілому розв'язування цієї задачі засноване на схемі визначення точки перетину прямої лінії з площиною.

При перетині багатогранників прямою лінією можливі два випадки:

- 1) грані багатогранника проєкціювальні;
- 2) грані багатогранника займають загальне положення.

У першому випадку точки перетину прямої лінії з гранями визначають відразу на одній із проєкцій, а в другому – треба виконати ще додаткові побудови.

Нехай пряма загального положення l перетинає пряму трикутну призму ABC (рис. 7.11). Точки перетину 1 і 2 прямої з гранями знаходять безпосередньо на площині проєкцій Π_1 . Фронтальні проєкції цих точок визначають за вертикальною проєкційною відповідністю. Відрізок прямої між точками входу і виходу невидимий на обох проєкціях.

На рис. 7.12 показано призматичну поверхню Σ і пряму загального положення t . Треба побудувати точки перетину цих геометричних образів.

Для розв'язування задачі вводять до розгляду допоміжну фронтально-проєкціювальну площину-посередник P , яка перетинає призматичну поверхню Σ по трикутнику $1-2-3$. Точки M і N перетину прямої t із трикутним контуром перерізу є шуканими точками перетину прямої t із призматичною поверхнею Σ .

У деяких випадках за площини-посередники доцільно брати площини загального положення або застосовувати косокутне проєкціювання. Так, на рис. 7.13 показано знаходження точок перетину прямої загального положення з похилою

призмою. При пошуку точок перетину використано паралельне косокутне допоміжне проєкціювання у напрямі ребер призми на площину її нижньої основи. Призма спроекціюється своєю основою $A_1B_1C_1$, а пряма – відрізком $\bar{D}_1\bar{E}_1$. Перетин відрізка з основою призми визначить допоміжні проєкції шуканих точок $\bar{1}_1$ та $\bar{2}_1$. Проєкціюванням їх у зворотному напрямку знаходять шукані точки 1_1 і 2_1 . Фронтальні проєкції цих точок визначаються за вертикальною проєкційною відповідністю.

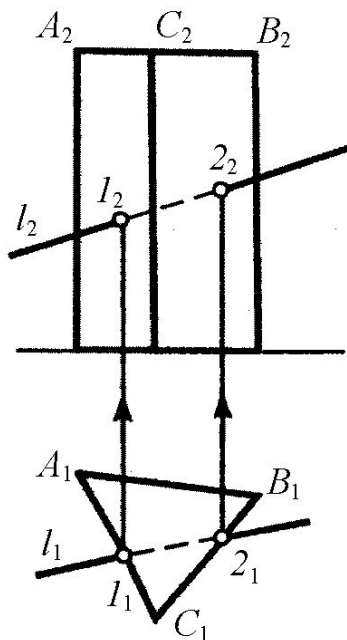


Рис. 7.11

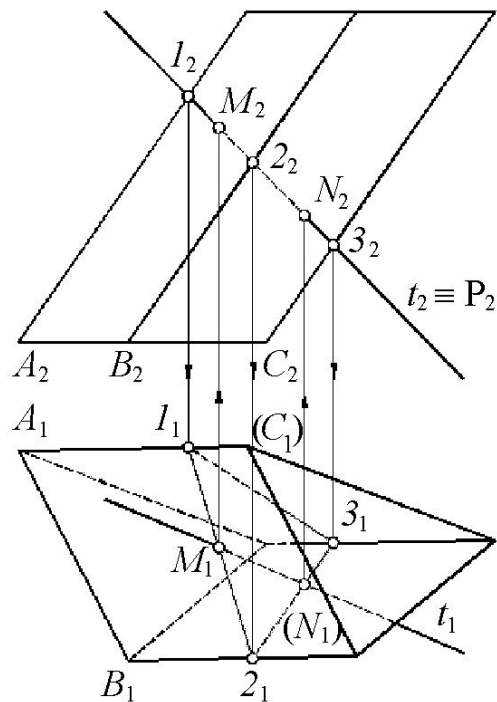


Рис. 7.12

Перетин прямої з поверхнею трикутної піраміди показано на рис. 7.14. У цьому випадку також застосовано допоміжне косокутне проєкціювання, але не паралельне, а центральне з вершини піраміди S на горизонтальну площину її основи. При цьому піраміда проєкціюється своєю основою, а відрізок прямої – відрізком $\bar{D}_1\bar{E}_1$. У перетині з основою визначають

7. БАГАТОГРАННИКИ

допоміжні проекції шуканих точок $\bar{I}_1$ та $\bar{2}_1$, які також центральньо повертаються на пряму D_1E_1 . Це точки I_1 і 2_1 . Фронтальні проекції точок перетину піраміди з прямою визначають за вертикальною проекційною відповідністю або повертають центральним допоміжним проєкціюванням на площину проєкцій Π_2 .

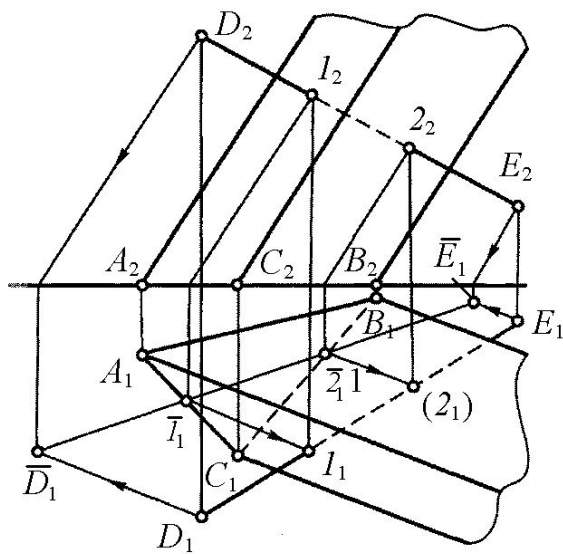


Рис. 7.13

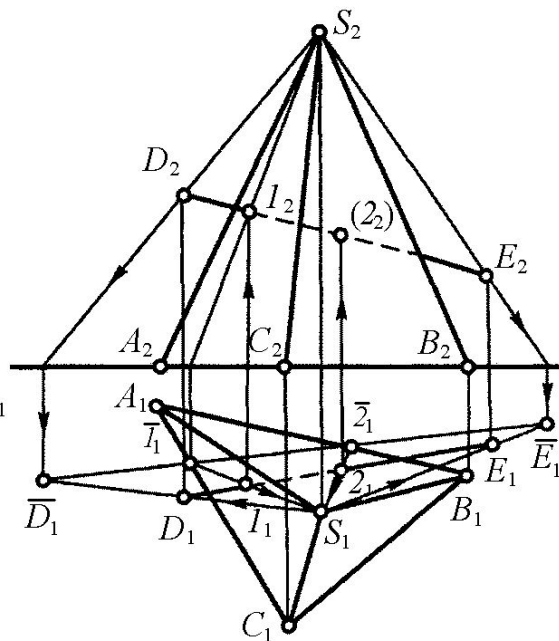


Рис. 7.14

Слід зазначити, що можливі ситуації, коли відрізок $\bar{D}_1\bar{E}_1$ не перетинає проєкцію основи фігур, показаних на рис. 7.13 і 7.14. Це означає, що й пряма DE не перетинає поверхню призми або піраміди.

7.5. Взаємний перетин багатогранників

Лінію, спільну для двох багатогранників, що перетинаються, називають *лінією взаємного перетину*. Це деяка просторова ламана лінія, яка може розпадатися на дві й більше окремих частин.

Вершинами лінії перетину багатогранників є точки перетину ребер першого багатогранника із гранями другого, а також ребер другого багатогранника із гранями першого. Сторонами або ланками лінії перетину є відрізки прямих, за якими перетинаються грані обох багатогранників.

Побудова вершин лінії перетину багатогранників зводиться до багаторазового розв'язування задачі про перетин прямої з площиною, а побудова сторін цієї лінії – до багаторазового розв'язування задачі про перетин двох площин. Спочатку треба знайти вершини лінії перетину, а її сторони побудувати з'єднанням відповідних вершин. Сполучати можна лише ті точки, які належать одній грані як одного, так і другого багатогранника.

При взаємному перетині багатогранників можливі два випадки:

1) один із багатогранників знаходиться у проєкціювальному положенні (при цьому одна проєкція лінії перетину вже існує, залишається визначити другу проєкцію);

2) треба визначити обидві проєкції. У цьому випадку доцільно застосовувати спосіб допоміжних січних площин-посередників.

На рис. 7.15,*а* показано перетин двох граней пірамідальної поверхні Σ площиною Γ по ламаній 1–2–3, а на рис. 7.15,*б* – взаємний перетин двогранних кутів, утворених відповідно площинами Γ і Δ , Δ і Λ . Лінія перетину є просторовою ламаною 1–2–3–4.

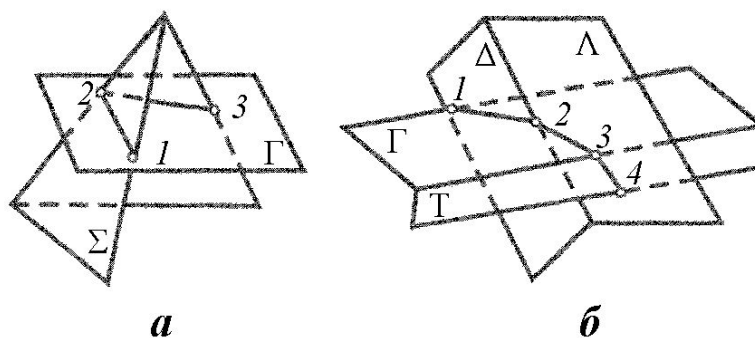


Рис. 7.15

7. БАГАТОГРАННИКИ

Перетин двох призм, коли одна з них знаходиться у проєкціювальному положенні (призма ABC), зображено на рис. 7.16. Із розташування геометричних образів, які перетинаються, випливає, що існують лінії входу та виходу. Такий перетин називається "проникненням". Призма DEF перетинає грань AC по трикутнику $1_1 2_1 3_1$, фронтальні проєкції якого визначають за вертикальною проєкційною відповідністю. Лінія виходу є просторовим п'ятикутником $4-5-6-8-7-4$, що належить двом горизонтально-проєкціювальним граням AB і BC . При цьому точки 4 , 5 і 8 знаходять так само, як і три попередні, за допомогою вертикальних ліній сполучення. Для знаходження двох точок на вертикальному ребрі B застосовано горизонтально-проєкціювальну січну площину. У перетині цього трикутника з вертикальним ребром B визначаємо точки 6 і 7 . Знайдені п'ять точок з'єднують просторовою ламаною.

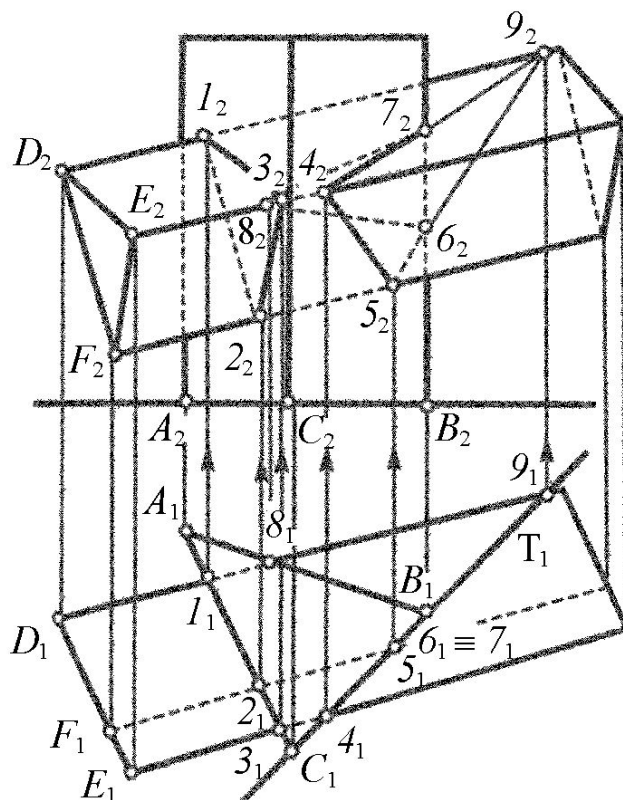


Рис. 7.16

Видимість лінії перетину визначають із таких міркувань:

а) дві видимі грані дають у перетині видиме ребро лінії перетину;

б) у перетині двох невидимих граней або однієї видимої та другої невидимої утворюється невидиме ребро лінії перетину;

в) точки переходу видимої частини лінії перетину в невидиму лежать на крайніх обрисних ребрах багатогранників.

Таким чином, видимими на фронтальній проекції будуть відрізки $1-3$ і $3-2$, а також $4-7$ і $4-5$. При визначенні видимості на площині проекцій Π_2 враховують перекривання ребер однієї призми гранями іншої.

Інколи для побудови лінії перетину багатогранників доцільно застосовувати певну комбінацію відомих методів. Так, на рис. 7.17 показано правильну шестигранну піраміду, в якій зроблено отвір із застосуванням тригранної призми з бічними гранями, перпендикулярними до площини проекцій Π_2 . Одна з граней призми є горизонтальною площиною рівня (позначена літерою Σ). Спочатку будують лінію перетину цієї площини з усією бічною поверхнею піраміди. Для цього розглядають точку G , яка є точкою перетину бічного ребра SA піраміди з січною площиною Σ . Оскільки ця площина паралельна основі піраміди, лінія її перетину з бічною поверхнею піраміди дасть фігуру, подібну основі. Але нас цікавить не весь переріз, а тільки його частина $1_1 2_1 3_1 4_1 6_1 8_1 9_1 10_1$. Точки перерізу знаходяться із застосуванням вертикальної проекційної відповідності.

Площина Δ , яка збігається з вертикальною стороною трикутника основи призми, є профільною площиною рівня. Лінія її перетину з пірамідою на площині проекцій Π_1 є відрізком $4_1 5_1 6_1$. Точки $4_1, 5_1, 6_1$ знаходяться за вертикальною проекційною відповідністю. Точки перетину третьої площини Ω , яка збігається з похилою стороною основи призми і є фронтально-проекціювальною площиною, з поверхнею піраміди знаходяться як точки перетину цієї площини з ребрами піраміди.

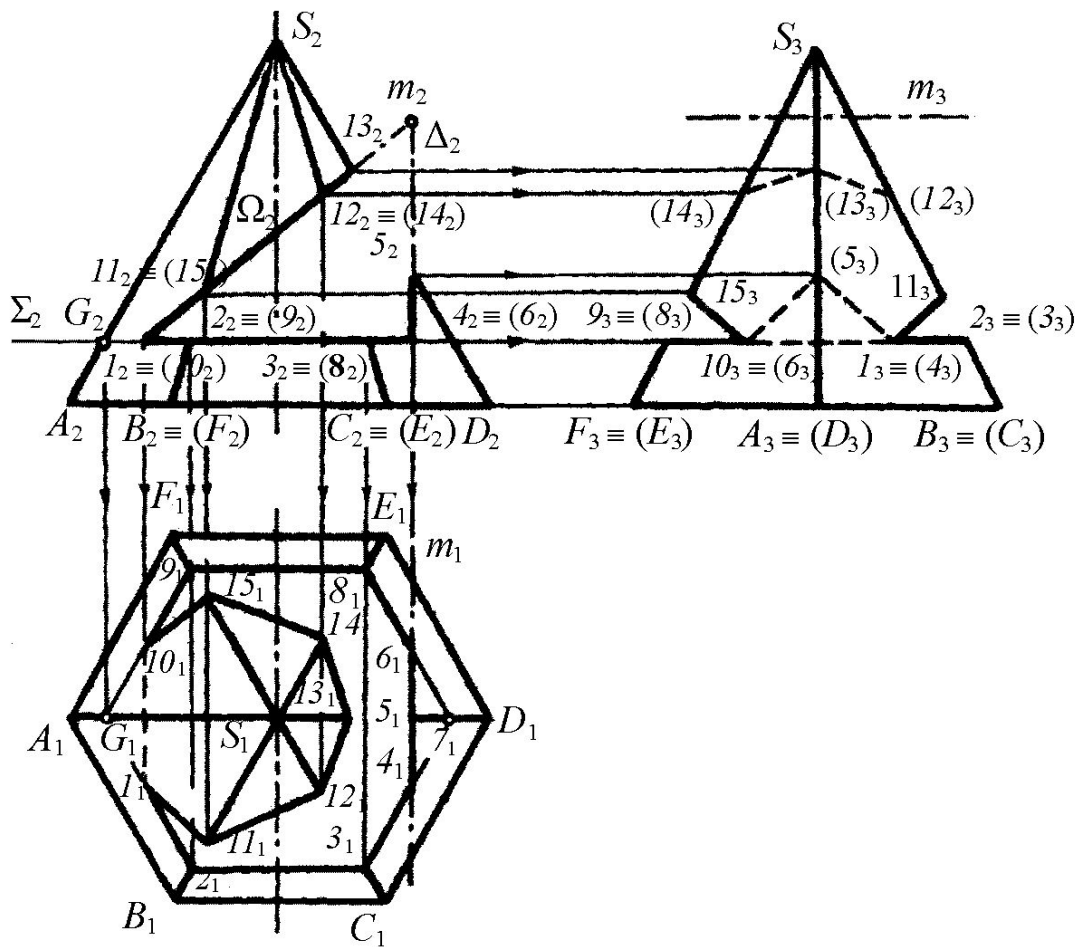


Рис. 7.17

Перш ніж з'єднати отримані точки, слід зауважити, що ребро призми $m(m_1, m_2)$ не перетинає піраміду, тому лінія перетину багатогранників є просторовою ламаною замкненою лінією.

Профільну проекцію піраміди з призматичним отвором будують із застосуванням проекційної відповідності та з урахуванням видимості ліній.

8. ПОВЕРХНІ

8.1. Поняття й визначення поверхні

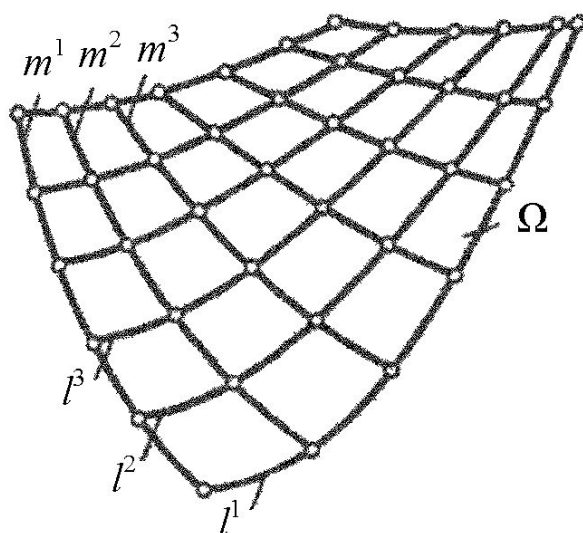


Рис. 8.1

У нарисній геометрії поверхня визначається як слід лінії або іншої рухомої поверхні. На будь-якій поверхні Ω можна, у загальному випадку, провести два сімейства ліній l і m (рис. 8.1), які задовольнятимуть наступній умові: ніякі дві лінії одного сімейства не перетинаються між собою і, навпаки, кожна лінія одного сімейства перетинає всі лінії

іншого сімейства. У цьому випадку поверхня Ω може бути утворена рухом лінії l , яка називається *твірною*, по нерухомих лініях m другого сімейства, які називаються *напрямними*. Неважко зробити висновок, що можна поміняти місцями твірні та напрямні й при цьому буде утворена та ж сама поверхня.

Подання поверхні як сукупності всіх послідовних положень деякої лінії, що переміщується у просторі, зручно для графічних побудов. При цьому лінія, що утворює поверхню, може

8. ПОВЕРХНІ

під час свого руху деформуватися. Подібну поверхню називають поверхнею зі змінною твірною. Існують поверхні, що утворюються твірною, яка не змінює своєї форми, але змінює положення у просторі. Наприклад, бічну поверхню відомого з курсу стереометрії кругового конуса (рис. 8.2) можна утворити обертанням прямолінійної твірної l навколо нерухомої осі i . У цьому випадку твірна свою форму не змінює, тобто вона залишається сталою. Але цю ж саму поверхню можна отримати рухом кола r так, що його центр рівномірно переміщується по прямій лінії i – осі конуса – від його основи до вершини й одночасно із цим рухом радіус рівномірно зменшується. У точці S він набуде нульового значення. У цьому випадку твірна має змінну форму.

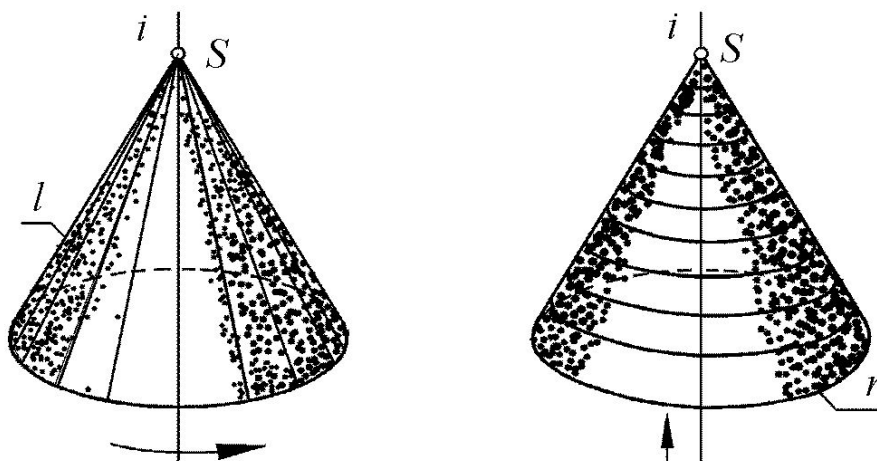


Рис. 8.2

Отже, конічну поверхню можна уявити, з одного боку, як сімейство прямих ліній, що суцільно заповнюють поверхню, а з іншого боку, як сімейство кіл, які також суцільно заповнюють поверхню. Звичайно, при зображенні поверхні обмежуються показом цих ліній лише в деяких її положеннях.

Уявлення про утворення поверхні безперервним рухом дозволяє називати такі поверхні *кінематичними*. Вище було зазначено, що лінію, яка утворює поверхню, у кожному її

положенні називають твірною. Твірна може бути прямою або кривою лінією. Кінематична поверхня є геометричним місцем ліній, які рухаються у просторі за деяким законом. Про кінематичні поверхні говорять як про поверхні, що мають безперервний каркас тих або інших сімейств ліній.

Поверхня, що утворюється за наявності деякого закону переміщення твірної, називається *закономірною*. Якщо закон переміщення твірної невідомий, то поверхня називається *незакономірною*. На відміну від кінематичних *незакономірні* поверхні мають *дискретний каркас*, тобто каркас переривчастий. Це означає, що каркас такої поверхні складається із сімей нерухомих ліній певної форми. Ці каркаси характерні для складних обтічних поверхонь, наприклад, поверхонь корпусу судна, літака, автомобіля тощо, які не можна подати певними аналітичними виразами.

8.2. Задання поверхні на комплексному кресленні

Поверхню з позиції кінематичного способу її утворення розглядають як множину всіх положень лінії, що рухається. При такому підході до утворення поверхні можна стверджувати, що вона буде задана (визначена), якщо в будь-який момент руху твірної будуть відомі її положення й форма, а це, у свою чергу, дозволить однозначно відповісти на запитання, чи належить точка простору даній поверхні, чи ні.

Кінематичний спосіб утворення поверхні підводить нас до думки, що для задання поверхні на комплексному кресленні досить мати на ньому такі елементи поверхні, які дозволяють побудувати кожен її точку. Сукупність цих елементів поверхні називають *визначником поверхні*. Не важко здогадатися, що визначником прямої лінії є дві її точки, а визначником площини – три її точки, які не лежать на одній прямій.

8. ПОВЕРХНІ

Для того, щоб установити визначник поверхні, слід виходити з кінематичного способу її утворення. Оскільки поверхня може бути утворена різними шляхами, очевидно, та ж сама поверхня може мати різні визначники.

Замислимося над тим, який визначник може мати, наприклад, сферична поверхня. Мабуть, досить задати її центр O та будь-яку точку M на її поверхні (рис. 8.3). На підставі цього визначника (елементи визначника записують у дужках після позначення поверхні) можна побудувати будь-яку точку заданої поверхні. Виходячи з розгляду рис. 8.3, можна стверджувати, що поверхня Ω задана однозначно й повністю.

Циліндричну поверхню на комплексному кресленні можна задати таким визначником: твірною прямою лінією l та напрямною кривою r (рис. 8.4). У цьому випадку можна також побудувати будь-яку точку поверхні Σ . Отже, циліндрична поверхня є також заданою на комплексному кресленні.

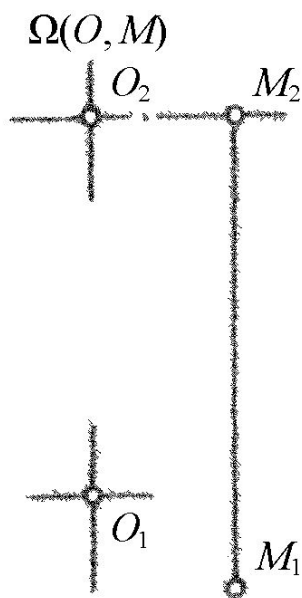


Рис. 8.3

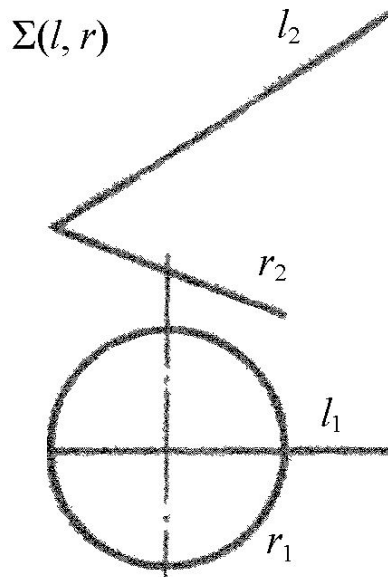


Рис. 8.4

Задання поверхні на комплексному кресленні проекціями її визначника забезпечує оберненість креслення, його

метричну визначеність, але не дає наочного зображення, що значно ускладнює як процес створення креслень, так і їх читання. Дійсно, непідготовленому читачеві досить важко на рис. 8.3 побачити сферу, а на рис. 8.4 – циліндр. Такий читач звик бачити в проекціях самі поверхні або їх відсічені частини (відсіки). Тому спочатку треба з'ясувати, що має входити до поняття "проекції поверхні".

При проєкціюванні будь-якої поверхні виділяють ті проєкціювальні промені, які торкаються поверхні. Так, при проєкціюванні сфери Θ на площину проєкцій Π_1 (рис. 8.5) ці промені будуть торкатися поверхні сфери по колу a . Сукупність цих променів утворить проєкціювальну циліндричну поверхню Φ , яка нібито обгортає поверхню сфери Θ . Лінія a дотику цієї проєкціювальної поверхні Φ із заданою поверхнею сфери Θ називається *контуром*. Для сфери контуром є коло, для іншого типу поверхонь контуром може бути просторова крива лінія.

Лінія перетину a_1 проєкціювальної циліндричної поверхні Φ із площиною Π_1 називається *обрисом* поверхні Θ й одночасно *горизонтальною проєкцією* цієї поверхні. Отже, проєкцією поверхні (тобто її обрисом) є проєкція контуру. Не слід ототожнювати поняття "контур" і "обрис". Перший належить геометричному образу, а другий – комплексному кресленню.

Аналогічна картина матиме місце й при проєкціюванні сфери Θ на площину проєкцій Π_2 . Проєкціювальні промені торкаються сфери Θ по лінії b . Це також контур сфери, а b_2 – проєкція контуру на площину Π_2 .

Отже, на комплексному кресленні поверхня сфери зображується проєкціями своїх контурів (рис. 8.6). На горизонтальній площині проєкцій Π_1 проєкція контуру сфери називається *екватором*, а на фронтальній площині проєкцій Π_2 –

8. ПОВЕРХНІ

головним меридіаном. На відміну від інших ліній обриси на кресленні літерами не позначаються.

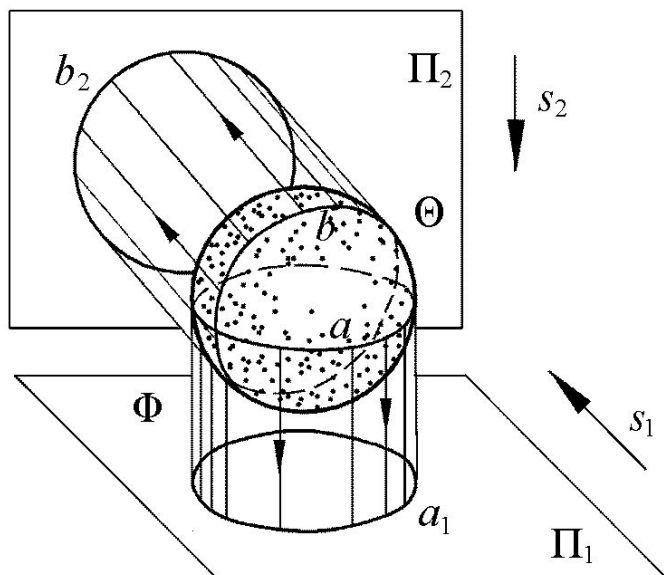


Рис. 8.5

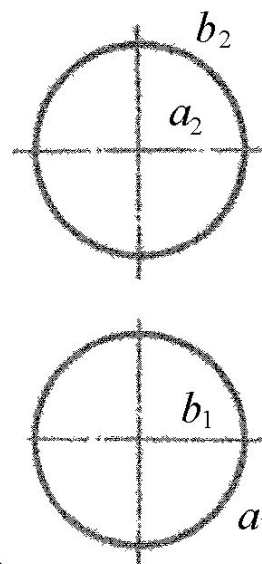


Рис. 8.6

Таким чином, криву поверхню на кресленні показують її обрисами. Але одними обрисами можна зображувати тільки замкнені поверхні, такі, як сфера, еліпсоїд, тор і т. п. А якщо поверхні незамкнені, наприклад, циліндричні, конічні та інші? У таких випадках поверхню відсікають площинами й показують на комплексному кресленні її відсічену частину.

Наприклад, на рис. 8.7 тонкими лініями зображено незамкнену конічну поверхню обертання Ξ з умовними лініями обриву. Проекціями її контурів будуть прямі a_2 , b_2 , c_1 , d_1 . Відсікають цю поверхню двома паралельними фронтально-проекціювальними площинами $T(T_2)$ і $\Gamma(\Gamma_2)$. Отримане при цьому коло t називається *лінією відсікання*, якщо розглядають поверхню Ξ як тонку непрозору оболонку, або *осовою*, якщо мають на увазі геометричну модель, виконану із суцільного матеріалу.

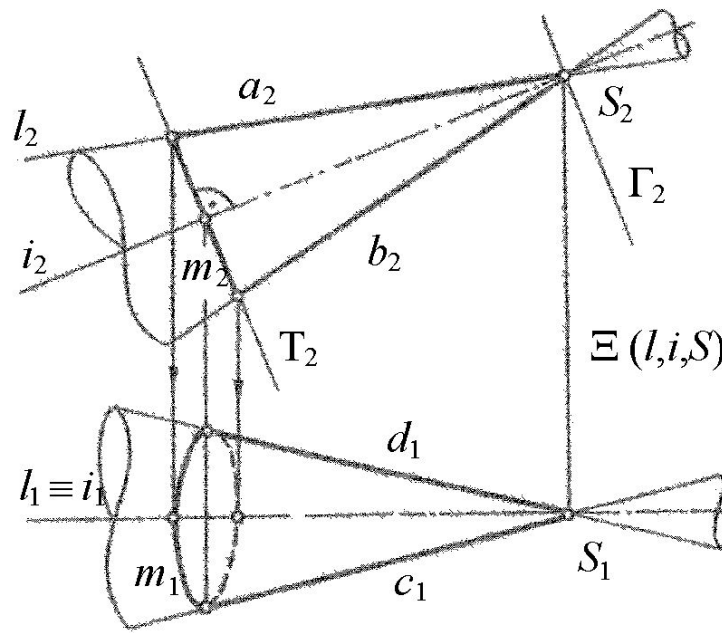


Рис. 8.7

Таким чином, для незамкнених поверхонь до поняття "проекція поверхні", крім обрисів, входять ще й проекції ліній відсікання (або проекції основ).

Розмаїття форм поверхонь створює певні труднощі для їх дослідження, тому поверхні необхідно групувати за характерними ознаками. Так, ознакою для віднесення поверхні до тієї або іншої групи можуть бути:

- закон руху твірної лінії (обертання, гвинтовий рух, рух за напрямками тощо);
- форма твірної (пряма або крива лінія, твірна постійної або змінної форми і т. д.);
- властивість розгортюваності (поверхні розгортні або нерозгортні);
- точність задання (закономірні або незакономірні поверхні).

Труднощі класифікації поверхонь виявляються ще й у тому, що деякі з них можуть бути віднесені одночасно до тієї або іншої групи. Так, циліндр обертання можна віднести і до лінійчастих, і до циклічних поверхонь, утворених рухом кола. Тому із усього розмаїття поверхонь у посібнику будуть розглянуті ті, які найбільш часто зустрічаються в практичній діяльності:

8. ПОВЕРХНІ

- поверхні обертання;
- лінійчасті поверхні;
- гвинтові поверхні;
- незакономірні поверхні.

Перші три види поверхонь належать до закономірних поверхонь. Останній вид поверхонь подається дискретним каркасом, тобто наближено.

8.3. Поверхні обертання загального вигляду

Поверхні обертання зі сталою криволінійною твірною набули широкого застосування у різних галузях техніки, будівництві та архітектурі завдяки простоті їх формування. Так називають поверхні, утворені обертанням будь-якої лінії навколо прямої, що є *віссю обертання* й одночасно *віссю поверхні*. Визначником поверхні обертання є вісь обертання та одна твірна. Зазвичай на комплексних кресленнях вісь поверхні обертання розташовують перпендикулярно до однієї з площин проєкцій.

Кожна точка $A', B', C', D', E', \dots$ твірної при обертанні навколо осі i (рис. 8.8) описує коло, центр якого належить осі обертання, а площина – перпендикулярна до неї. Ці кола називаються *паралелями*. Найбільшу паралель (проходить через точку D') називають *екватором* поверхні, найменшу (проходить через точку B') – *горлом*.

Площини Ω , які проходять через вісь обертання називають

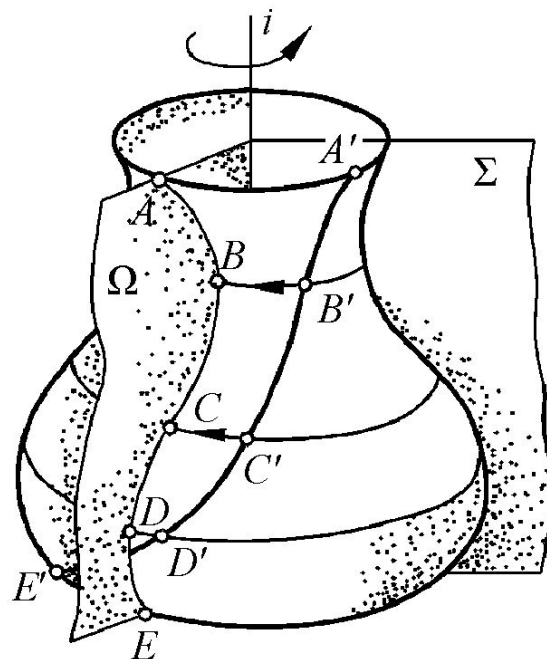


Рис. 8.8

меридіональними площинами, тому й лінії $ABCDE$, по яких вони перетинають поверхню, називають *меридіанами*. При вивченні таких поверхонь за вісь обертання приймають проєкціювальну пряму (найчастіше – горизонтально-проєкціювальну). Меридіональну площину Σ , яка паралельна відповідній площині проєкцій, називають *головною меридіональною площиною*, а лінію її перетину з поверхнею обертання – *головним меридіаном*. Усі меридіани на поверхні обертання конгруентні.

Зазначимо найважливіші властивості поверхонь обертання загального вигляду:

1. Якщо меридіан поверхні обертання проходить через дві точки поверхні, то він є найкоротшою лінією між цими точками, тобто є геодезичною лінією.

2. Кожна з паралелей поверхні обертання перетинає меридіани під прямим кутом, тобто паралелі й меридіани утворюють прямокутну сітку на поверхні обертання.

3. Кожна з нормалей до поверхні обертання перетинає вісь поверхні.

Це означає, що для будь-якої поверхні обертання можна будувати вписані або описані сфери.

Розглянемо приклад (рис. 8.9), коли твірна l є плоскою кривою лінією й перебуває в одній площині з віссю i поверхні Ψ . У цьому випадку твірна є меридіаном.

При повному оберті навколо осі i крива l утворює поверхню обертання загального вигляду Ψ . Усі точки твірної переміщуються по колах-паралелях.

Слід зауважити, що будь-яку поверхню обертання можна розглядати як суцільно заповнену сімейством кіл-паралелей (рис. 8.9,*а*). Однак розглянута поверхня обертання Ψ має також інше сімейство ліній – сімейство меридіанів (рис. 8.9,*б*).

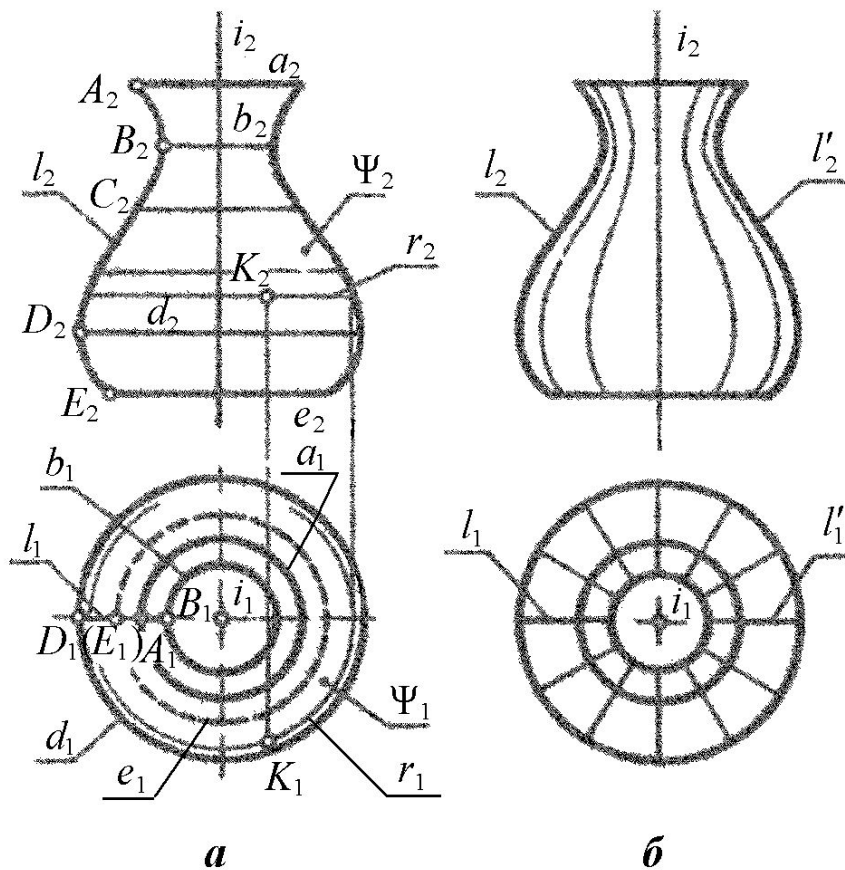


Рис. 8.9

Зіставлення цих двох безперервних каркасів свідчить про те, що каркас кіл-паралелей має безсумнівну перевагу перед каркасом меридіанів. Він більш доступний для його зображення на комплексному кресленні, тому будь-яку точку K на поверхні обертання Ψ (та й взагалі на будь-якій поверхні обертання) зазвичай задають за допомогою ліній першого каркаса, тобто кіл-паралелей. У наведеному прикладі точку K задано на поверхні за допомогою кола-паралелі r (див. рис. 8.9, *a*).

У підсумку зазначимо, що проєкції заданої поверхні обертання Ψ загального вигляду складаються з таких елементів:

- а) обрисів (у фронтальній проєкції – головний меридіан l_2 і l'_2 , а в горизонтальній – екватор d_1 і горло b_1);
- б) проєкцій ліній відсікання – кола a_1 і e_1 . Їх утворюють точки A та E кривої l .

При визначенні видимості точок на площині проєкцій Π_2 керуються таким правилом: точки, які знаходяться нижче горизонтальної проєкції осі симетрії проєкції поверхні на Π_1 , на площину проєкцій Π_2 проєкціюються як видимі.

8.4. Поверхні обертання другого порядку

Розглянемо поверхні, які утворені обертанням кривих ліній другого порядку навколо осі. Безпосередньо криві в цьому випадку є і твірними, і меридіанами поверхні.

При обертанні кола a навколо його осі (діаметра) утворюється поверхня *сфери* Φ (рис. 8.10). Точку A побудовано з використанням паралелі сфери. Обидві проєкції цієї точки видимі.

При обертанні еліпса b навколо його малої осі утворюється поверхня *стислого еліпсоїда* або *сфероїда* Ψ (рис. 8.11). Проєкції точки B побудовані з використанням паралелі еліпсоїда. Оскільки B_2 знаходиться нижче горизонтальної осі проєкції поверхні на Π_2 , то її горизонтальна проєкція невидима.

При обертанні еліпса c навколо його великої осі утворюється поверхня *витягнутого еліпсоїда* Σ (рис. 8.12). Проєкції точки C на обох площинах проєкцій невидимі.

При обертанні параболи d навколо її осі i утворюється поверхня *параболоїда* обертання Θ (рис. 8.13).

При обертанні гіперболи g навколо її уявної осі i утворюється поверхня *однопорожнинного гіперболоїда* обертання Ω (рис. 8.14). Якщо ж гіперболу l обернути навколо її дійсної осі i , то буде утворена поверхня *двопорожнинного гіперболоїда* обертання Φ (рис. 8.15), яка складається з двох окремих порожнин.

Кожна з цих поверхонь має два неперервних каркаси: каркас кіл-паралелей та каркас меридіанів. Як було вказано

8. ПОВЕРХНІ

вище, перший каркас більш простий у графічному відношенні, тому його застосовують при розв'язуванні задач. Отже, точки на всіх цих поверхнях побудовані із застосуванням паралелей та з урахуванням видимості. Горизонтальна проекція точки C невидима, оскільки закривається верхньою порожниною.

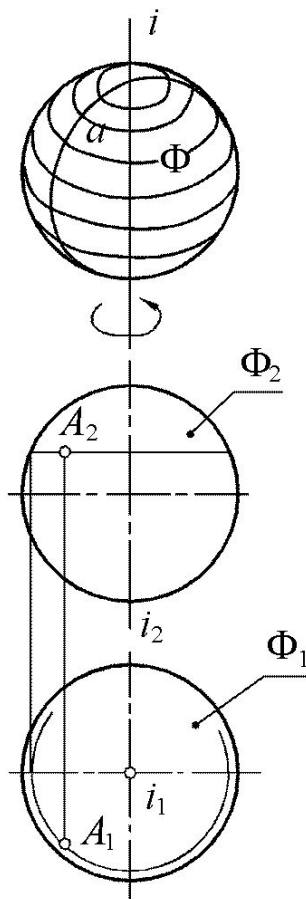


Рис. 8.10

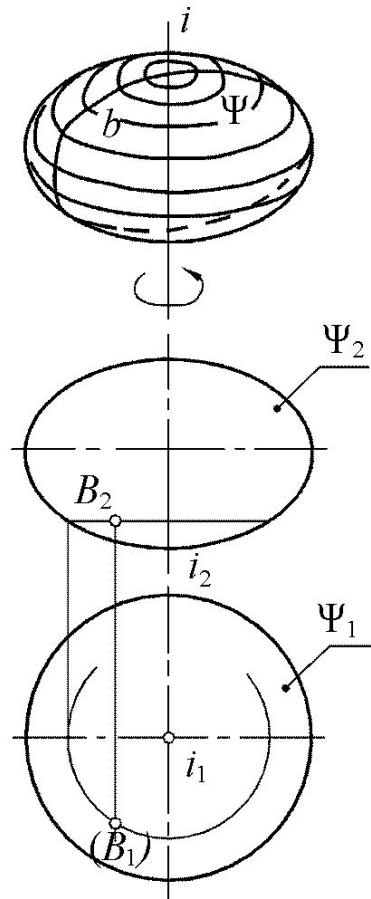


Рис. 8.11

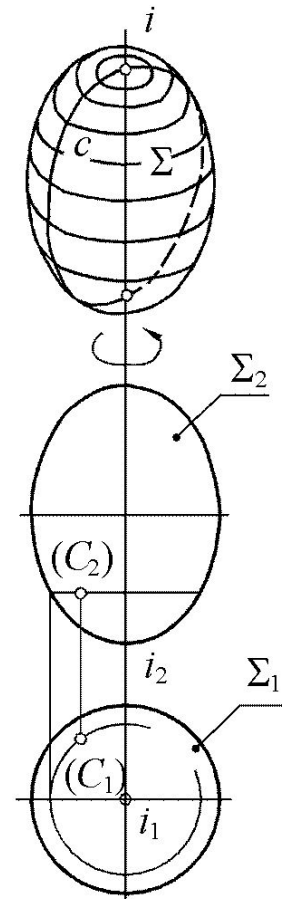


Рис. 8.12

Розглянуті поверхні обертання є поверхнями обертання другого порядку, оскільки аналітично вони задаються рівняннями другого порядку. Графічно порядок поверхні визначається максимальною кількістю точок перетину довільної прямої лінії з кожною з цих поверхонь. Зрозуміло, що максимальна кількість точок перетину дорівнює двом.

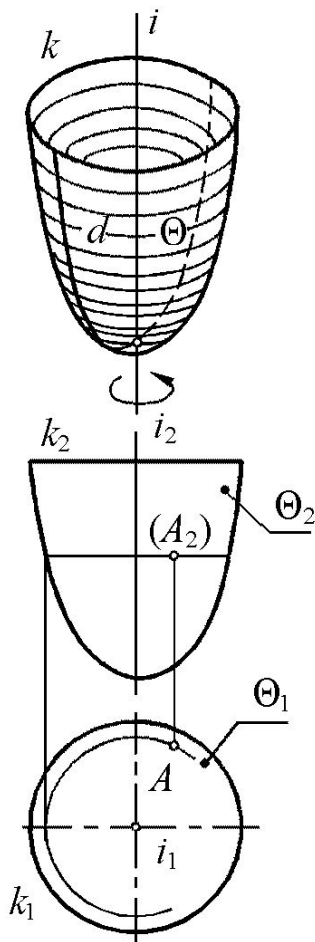


Рис. 8.13

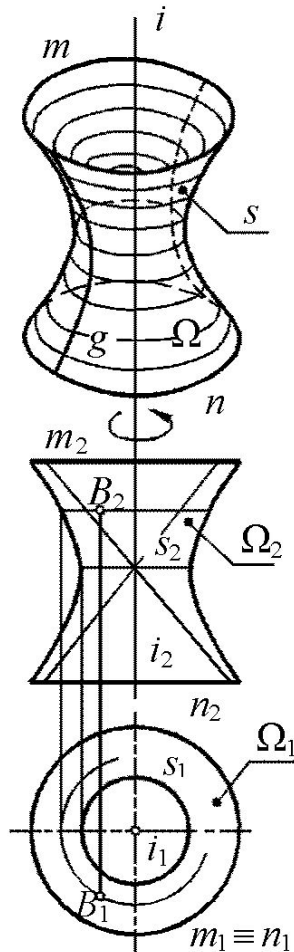


Рис. 8.14

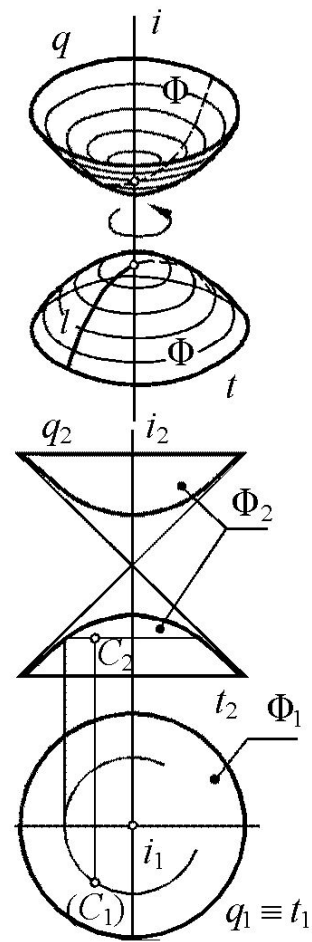


Рис. 8.15

Слід прийняти до відома, що поверхні сфери та еліпсоїдів (див. рис. 8.10–8.12) є замкненими, тому їх на комплексному кресленні зображують повністю, тобто показують їх обрисами (проекціями контурів). Поверхні параболоїда і гіперболоїда (див. рис. 8.13–8.15) незамкнені (параболу й гіперболу можна продовжити). Ці поверхні на комплексному кресленні зображуються своїми відсіками. Коло k , m , n , q , t є лініями відсікання цих поверхонь. Коло s – горло однопорожнинного гіперболоїда.

Поверхні обертання другого порядку дуже широко застосовуються в науці, техніці та будівництві. Поверхні багатьох машинобудівних деталей, ємкості для зберігання газу, покриття споруд, куполи будинків тощо подаються сферичними поверхнями.

8. ПОВЕРХНІ

Параболоїд обертання застосовується в конструкціях прожекторів та автомобільних фар. Дзеркала цих пристроїв мають форму параболоїдів обертання завдяки фокальним властивостям параболи. Якщо у фокусі параболи розташувати джерело світла, то світлові промені, відбиваючись від параболи, будуть поширюватися паралельно один одному (рис. 8.16). На цій же властивості заснована й дія звукоуловлювачів і радіотелескопів.

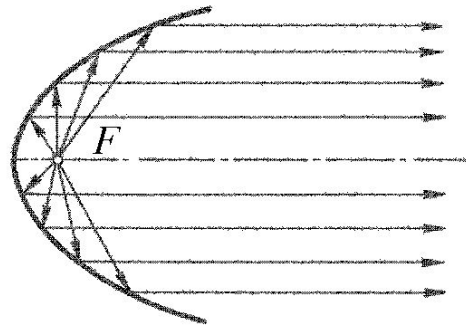


Рис. 8.16

Поверхня однопорожнинного гіперболоїда обертання успішно застосовується при проектуванні залізобетонних градирень, опор водонапірних башт, морських маяків, а також покриттів великих видовищних споруд. Ця поверхня забезпечує конструкції високу міцність і легкість. Поверхня двопорожнинного гіперболоїда обертання використовується у системах радіолокації. Наша земна куля має форму стислого еліпсоїда.

8.5. Поверхні обертання четвертого порядку

Обертанням кола (або його дуги) навколо деякої осі i можна утворити поверхню обертання четвертого порядку. Для цього вісь обертання має знаходитися в площині кола, що обертається, та не проходити через його центр. Отримана поверхня називається тором.

На рис. 8.17 показані три можливі різновиди тора: *відкритий*, *закритий*, *із самоперетином*. Твірною для відкритого та закритого торів виступає коло, тоді як у тора із самоперетином твірною є дуга кола. У відкритий та закритий тори можуть бути вписані сфери. Тор також можна розглядати як поверхню, що огинає сфери однаково радіуса, центри яких знаходяться на колі – осевій лінії.

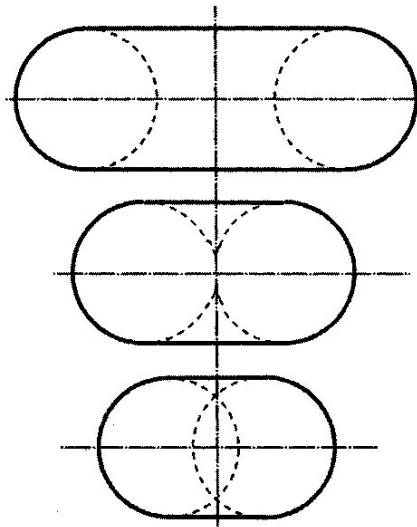


Рис. 8.17

Відкритий тор (рис. 8.18) утворюється за умови, що вісь обертання i не має спільних точок із твірним колом m (тобто не торкається його та не перетинає). Подібна ситуація має місце, коли відстань від центра O кола m до осі обертання i перевищує радіус твірного кола. Відкритий тор часто називають *круговим кільцем*.

Тор має дві системи кругових перерізів: у площинах, перпендикулярних до його осі, і в площинах, що проходять через вісь тора.

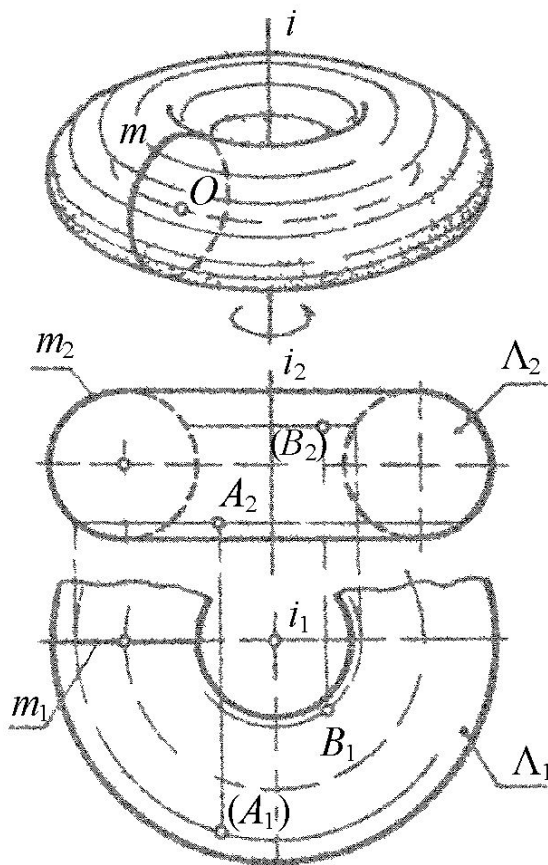


Рис. 8.18

При побудові точок на поверхні тора застосовують кола-паралелі, радіус яких визначається як відстань від осі обертання до твірного кола. Треба бути уважним при виборі точок перетину з твірним колом. На рис. 8.18 точку A побудовано із застосуванням зовнішньої точки перетину паралелі на площині проєкцій Π_2 із твірним колом, точку B — із внутрішньою точкою перетину. Видимість точок визначається на підставі розглянутих вище підходів, а також з урахуванням особливостей кільцеподібної форми тора.

Тор із самоперетином утворюється тоді, коли вісь, навколо якої обертається твірне коло, перетинає це коло (рис. 8.19).

8. ПОВЕРХНІ

На рис. 8.20 показано *бочкоподібний тор*. Поверхня Σ такого тора утворюється обертанням дуги AB твірного кола навколо осі i . На рис. 8.21 подано частину кругового кільця, яке називається *глобоїдом*.

Торові поверхні мають четвертий порядок, оскільки довільна пряма перетинає ці поверхні максимум у чотирьох точках. Ці поверхні замкнені, їх можна показувати на кресленні повністю, тобто їх обрисами (див. рис. 8.18 і 8.19). На рис. 8.20 і 8.21 торові поверхні зображені своїми відсіками.

Як поверхня обертання тор має горло, екватор та головний меридіан, яким виступає твірне коло.

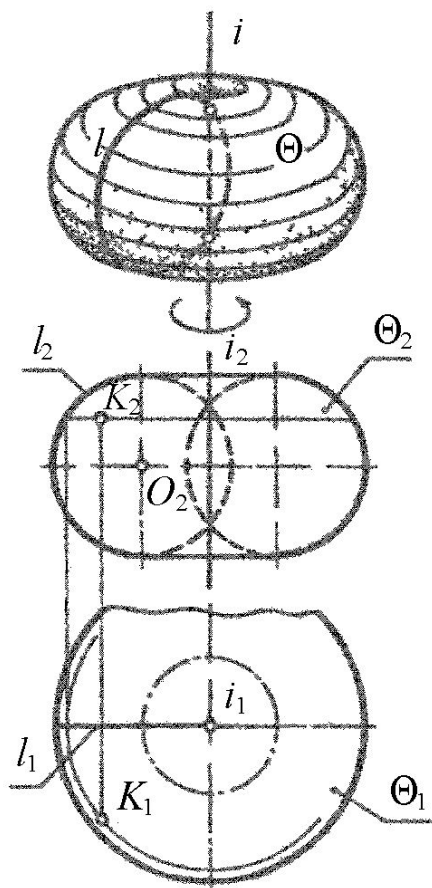


Рис. 8.19

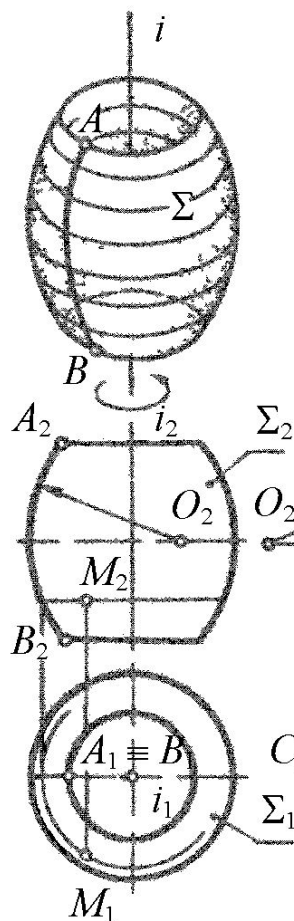


Рис. 8.20

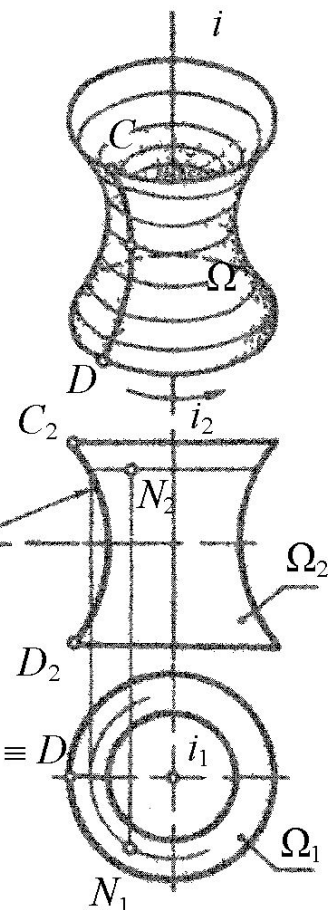


Рис. 8.21

8.6. Лінійчасті поверхні обертання

Поверхні, які утворюються рухом прямої лінії, називаються *лінійчастими*. Найпростішою з таких поверхонь є площина, яку можна утворити прямою лінією, що рухається по двох напрямних – паралельних прямих.

Розглянемо лінійчасті поверхні, які утворюються обертанням прямої лінії відносно деякої осі. Залежно від положення прямої, що формує поверхню, відносно осі обертання розрізняють три види кривих лінійчастих поверхонь обертання. На рис. 8.22 твірна пряма k перетинає вісь i у точці S .

При обертанні цієї прямої утвориться *конічна поверхня обертання* Φ , яка має дві порожнини, розташовані по обидві сторони від вершини S . Оскільки конус обертання – це поверхня, яка нескінченно простирається у напрямку її твірних, то при побудові конуса обертання на комплексному кресленні твірні обмежують двома точками. Точки A і B належать лініям відсікання.

На рис. 8.23 твірна l паралельна осі i . При обертанні цієї прямої утворюється лінійчаста *циліндрична поверхня обертання* Σ . Ця поверхня також незамкнена. Точки C і D належать лініям відсікання.

На рис. 8.24 твірна m і вісь i є мимобіжними прямими. При обертанні цієї прямої навколо осі i утворюється вже знайома нам поверхня *однопорожнинного гіперболоїда обертання* Ψ . Точки E і F утворюють при обертанні лінії відсікання, а найближча до осі i точка H – коло-паралель мінімального радіуса, тобто горло поверхні.

Таким чином, сімейство прямолінійних твірних, що суцільно заповнюють поверхню гіперболоїда, є його третім безперервним каркасом (нагадаємо, що перші два каркаси – це каркас кіл-паралелей і каркас меридіанів).

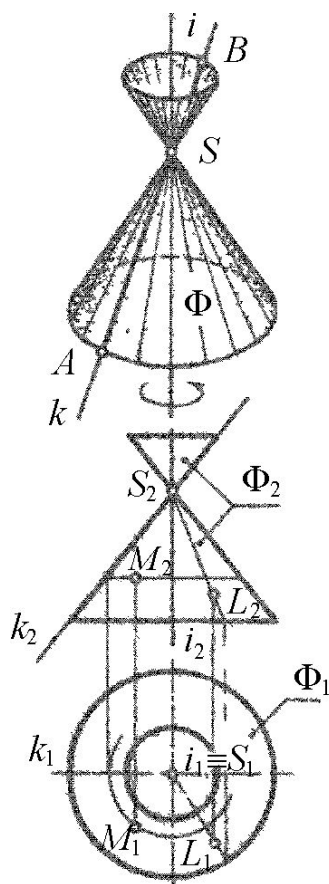


Рис. 8.22

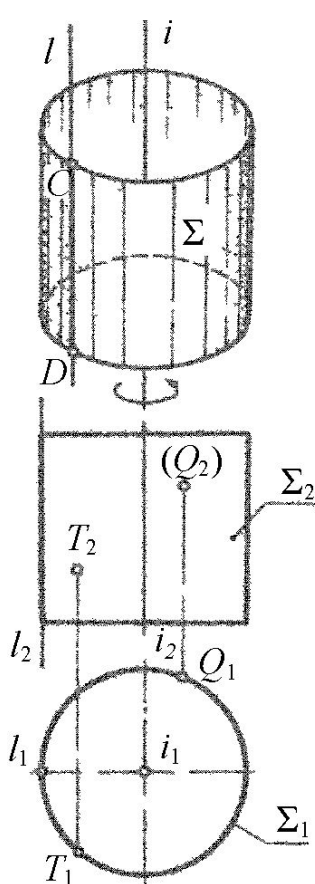


Рис. 8.23

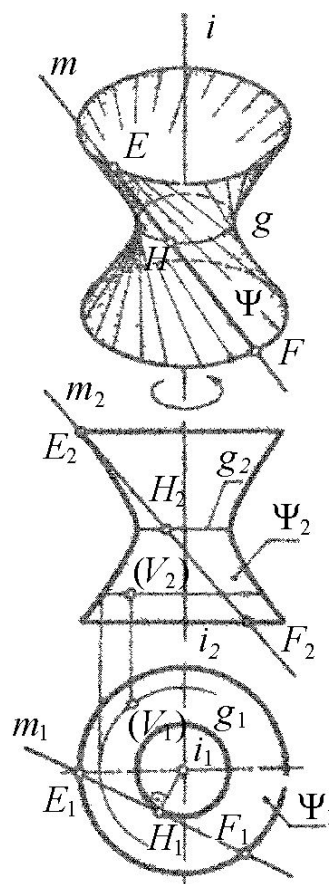


Рис. 8.24

Розглянуті вище три поверхні обертання належать до поверхонь другого порядку; вони незамкнені, тому на кресленнях зображуються своїми відсіками. Конус обертання зазвичай показують однією порожниною. Точки на конічній поверхні обертання можна задавати як лініями безперервного каркаса кіл-паралелей (точка M), так і лініями другого безперервного каркаса – твірними прямими (точка L) – див. рис. 8.22. Відзначимо, що при побудові точок на конічній поверхні доцільно користуватися каркасом кіл-паралелей, що приводить до більш точного графічного результату.

Для задання точок на поверхні циліндра обертання будувати допоміжні лінії каркаса не потрібно, оскільки сама

поверхня циліндра є проєкціювальною. Вона в горизонтальній площині проєкцій зображується у вигляді кола, на якому розташовуються проєкції всіх точок (див. рис. 8.23).

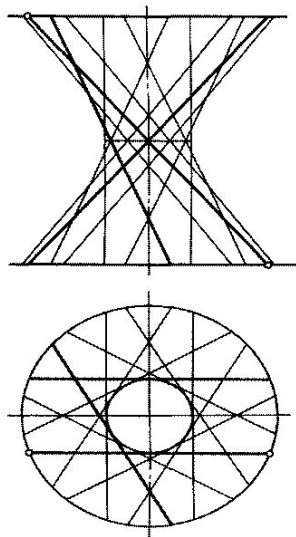


Рис. 8.25

І нарешті, поверхня однопорожнинного гіперболоїда обертання. До двох його безперервних каркасів – каркаса кіл-паралелей і каркаса меридіанів-гіпербол – додається третій безперервний каркас – каркас прямих ліній (рис. 8.25), які також суцільно заповнюють поверхню гіперболоїда. При виборі каркаса однопорожнинного гіперболоїда обертання для розв'язування задач перевага як і раніше залишається за першим каркасом – сімейством кіл-паралелей (точка V на рис. 8.24).

8.7. Лінійчасті поверхні з однією напрямною

При утворенні найпростішої лінійчастої поверхні – площини – напрямною є пряма лінія. Якщо за напрямну взяти криву лінію, то прямолінійна твірна, переміщуючись по цій кривій, утворить криволінійну поверхню.

На рис. 8.26 лінійчаста поверхня Ω утворена прямою лінією, що проходить через нерухому точку S й переміщується по напрямній кривій лінії. Така лінійчаста поверхня називається *конічною поверхнею загального вигляду*. Точка S є вершиною поверхні.

Конічна поверхня загального вигляду належить до незамкнених поверхонь. На комплексному кресленні показаний її відсік, обмежений двома крайніми положеннями l та l' твірної, напрямною m і вершиною S . Для кращого сприйняття поверхні на ній доцільно наносити кілька ліній каркаса. Зазвичай користуються тільки прямолінійним каркасом.

8. ПОВЕРХНІ

Якщо прямою є крива другого порядку – еліпс або коло, то у загальному випадку утворюється поверхня еліптичного конуса (рис. 8.27), в окремому – поверхня конуса обертання (рис. 8.28). У такий конус вписується сфера. Вписати сферу в поверхню еліптичного конуса неможливо.

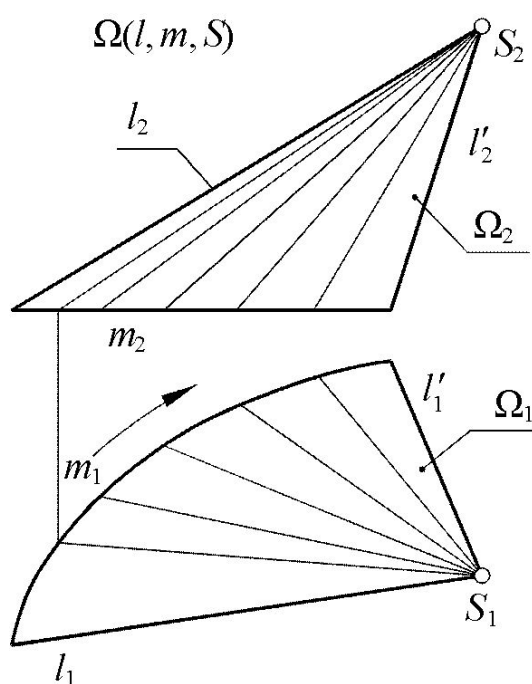


Рис. 8.26

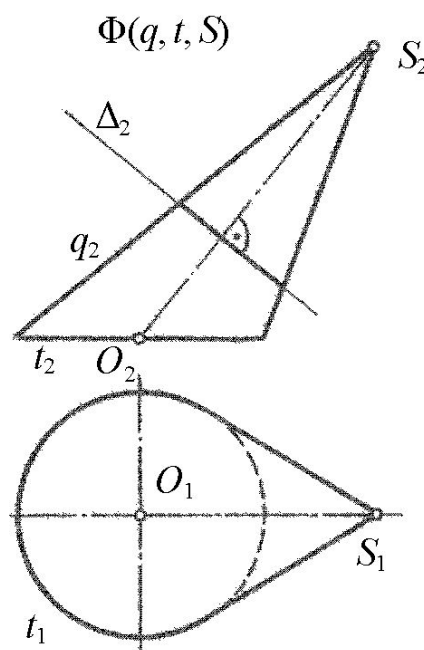


Рис. 8.27

Зазначимо, що конус отримав назву еліптичного, оскільки площина Δ (див. рис. 8.27), перпендикулярна до осі SO такого конуса, перетинає його поверхню по еліпсу (звідси й назва – еліптичний).

Побудову точок на поверхні еліптичного конуса можна виконувати, застосовуючи каркас кіл (рис. 8.29) або каркас лінійчастих твірних (рис. 8.30). У цілому ці побудови зрозумілі. Але деякі пояснення треба зробити щодо рис. 8.29. Радіус кіл-перерізів зменшується по мірі їх руху до вершини конуса. У нашому випадку величина радіуса визначається на фронтальній площині проєкцій. Це відстань від проєкції осі конуса

до крайньої лінійчастої твірної. Центр кола-проекції на Π_1 знаходиться у точці O_1 перетину вертикальної лінії сполучення з горизонтальною проекцією осі конуса.

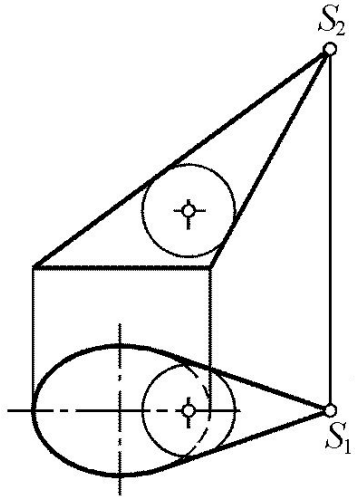


Рис. 8.28

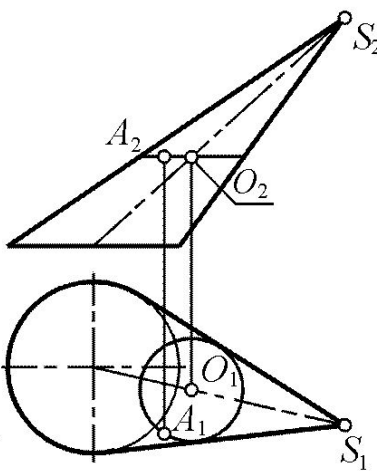


Рис. 8.29

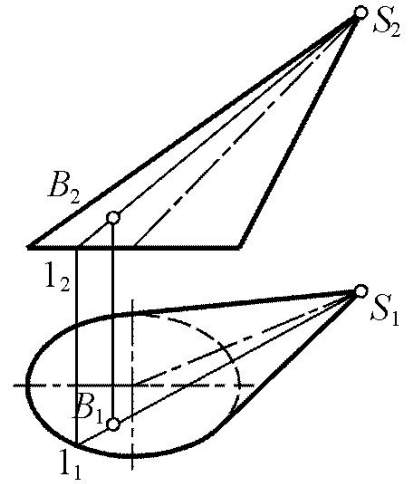


Рис. 8.30

Нарешті зазначимо, що замість криволінійної напрямної можна взяти ламану лінію (нехай це буде плоский чотирикутник $ABCD$, рис. 8.31). При цьому буде утворена відома з попереднього розділу гранна пірамідальна поверхня.

Повернемося до рис. 8.26 і представимо, що вершина S поверхні віддалена у нескінченність за напрямком $\vec{r}$. Тоді твірна l у всіх своїх положеннях утворить безперервний каркас, що складається з паралельних прямих ліній (рис. 8.32). Утворена при цьому лінійчаста поверхня Δ називається *циліндричною поверхнею загального вигляду*. Вона також є незамкнутою поверхнею, на комплексному кресленні показаний її відсік.

Якщо напрямною є коло або еліпс, то в загальному випадку утворюється поверхня *еліптичного циліндра* (рис. 8.33 і 8.34). Площина, перпендикулярна до твірної, перетинає такий циліндр по еліпсу. Якщо ж у циліндричну поверхню можна вписати сферу, то її можна розглядати як поверхню циліндра обертання (рис. 8.35). В еліптичний циліндр сфера не вписується.

8. ПОВЕРХНІ

Найпростішим із безперервних каркасів конічної та циліндричної поверхонь загального вигляду є сімейство прямолінійних твірних, які суцільно заповнюють лінійчасту поверхню. За допомогою ліній цього каркаса на вказаних поверхнях задано точки B і D (див. рис. 8.30 і 8.34). У деяких випадках доцільно застосовувати лінії іншого каркаса – каркаса кіл (точки A і C на рис. 8.29 і 8.33).

Як і у випадку конічної поверхні, при утворенні циліндричної поверхні за напрямну можна взяти плоску ламану лінію (наприклад трикутник ABC , рис. 8.36). При цьому буде утворена відома нам призматична поверхня.

Що стосується застосування конічних і циліндричних поверхонь у техніці, то важко назвати такі її галузі, де б ці поверхні не використовувалися. Особливо широко вони застосовуються у промисловому будівництві й суднобудуванні, при конструюванні бункерів, оболонок-перекрыттів, систем вентиляції, прокладанні тунелів метро тощо.

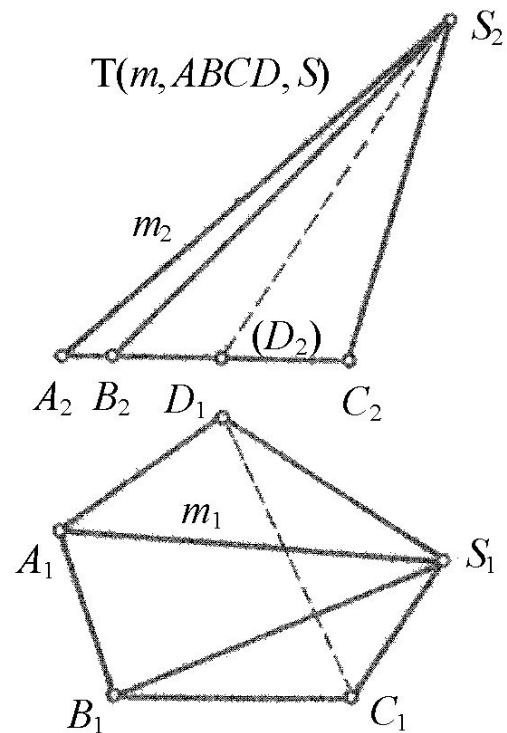


Рис. 8.31

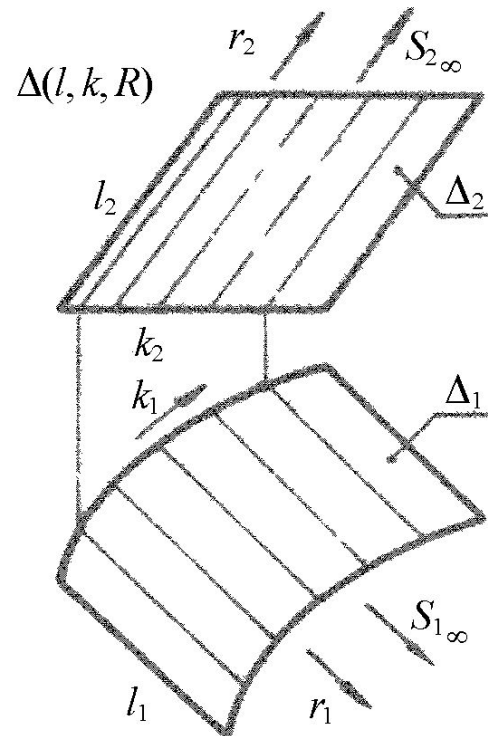


Рис. 8.32

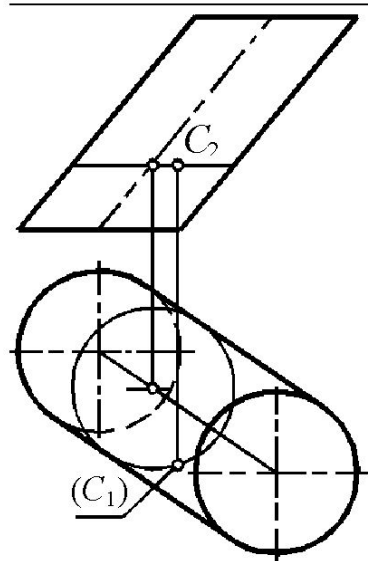


Рис. 8.33

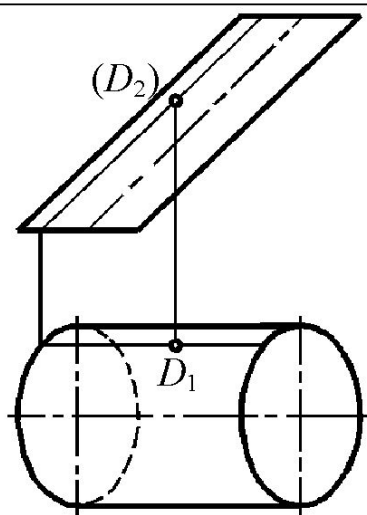


Рис. 8.34

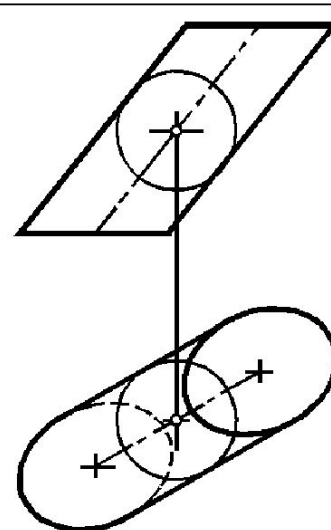


Рис. 8.35

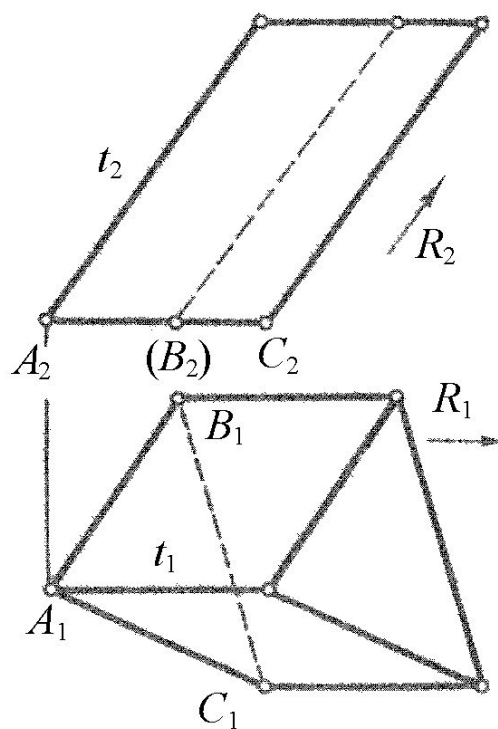


Рис. 8.36

8.8. Лінійчасті поверхні з двома напрямними і площиною паралелізму

Додатковою умовою формування лінійчастих поверхонь з однієї напрямною є існування вершини, через яку прохо-

8. ПОВЕРХНІ

дить твірна пряма лінія. В іншому випадку поверхня не була б однозначною.

Розглянемо лінійчасті поверхні з двома напрямними. Відразу ж відзначимо, що дві напрямні не визначають однозначно лінійчасту поверхню. Тому вводиться додаткова умова у вигляді деякої площини, паралельно якій переміщуються твірні при своєму русі по напрямних лініях. Подібна площина називається *площиною паралелізму*.

Отже, поверхні із площиною паралелізму можна визначити як множину прямих ліній (твірних), які паралельні деякій площині (площині паралелізму) і перетинають дві дані лінії – напрямні.

Лінійчасті поверхні з двома напрямними й площиною паралелізму називаються поверхнями Каталана (бельгійського математика, який досліджував властивості цих лінійчастих поверхонь).

Залежно від форми напрямних ліній утворюються три види лінійчастих поверхонь з площиною паралелізму: *циліндроїди, коноїди й косі площини*. Розглянемо послідовно ці поверхні.

Циліндроїд. Поверхня циліндроїда утворюється у тому випадку, коли напрямні m і n (рис. 8.37) є гладкими просторовими або плоскими кривими лініями (якщо напрямні плоскі криві лінії, то площини, в яких знаходяться напрямні, не мають збігатися одна з одною). По напрямних рухається лінійчаста твірна l , залишаючись паралельною площині паралелізму Δ .

Для визначення проєкцій прямолінійних твірних поверхні циліндроїда достатньо провести прямі, паралельні площині паралелізму. Побудову твірної AB показано на рис. 8.38. Спочатку проводять A_1B_1 паралельно Σ_1 , позначають горизонтальні проєкції точок A_1 і B_1 , за ними знаходять фронтальні проєкції A_2 і B_2 , які з'єднують прямою лінією.

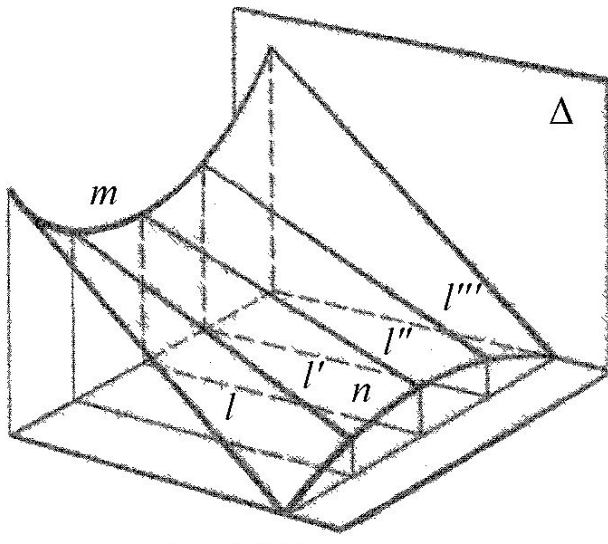


Рис. 8.37

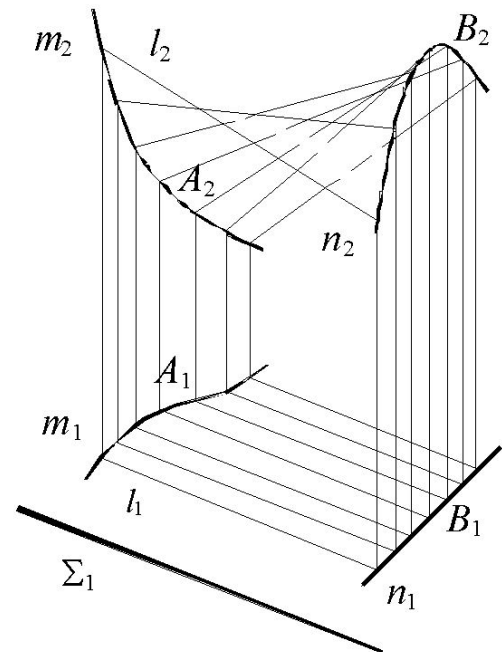


Рис. 8.38

Поверхні циліндроїда знаходять застосування в інженерній практиці. Зокрема, вони використовуються при виготовленні повітроводів великого розміру. На рис. 8.39 показано перехід від циліндричної труби Θ до циліндричної труби Ω того ж самого діаметра за допомогою циліндроїда Γ , площиною паралелізму якого виступає площина проєкцій Π_2 . На прикладі цієї конструкції показано побудову точок A і B на поверхні циліндроїда. Оскільки точка A задана своєю горизонтальною проєкцією A_1 , то пошук її фронтальної проєкції труднощів не додає. Треба через A_1 провести горизонтальну проєкцію твірної циліндроїда паралельно осі O_x (нагадаємо, що площиною паралелізму є площина проєкцій Π_2 , тому всі твірні є фронталями), знайти фронтальну проєкцію твірної, прив'язавшись до горизонтальних проєкцій напрямних q_1 і t_1 , побудувати фронтальну проєкцію твірної та визначити положення проєкції A_2 .

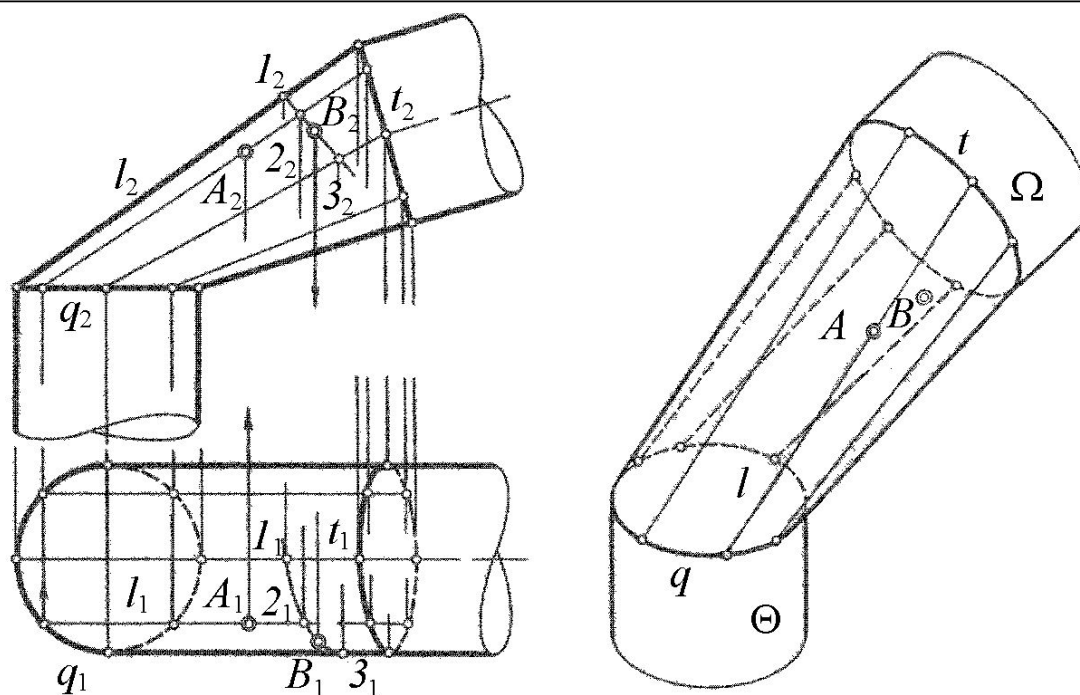


Рис. 8.39

Якщо задано B_2 – фронтальну проекцію точки й треба знайти її горизонтальну проекцію, потрібно застосувати дещо інші побудови (напрям фронтальної проекції твірної, що проходить через B_2 , невідомий). Проводять через B_2 фронтальну проекцію довільної лінії, яка належить цій поверхні. Для зручності фронтальну проекцію лінії прийнято прямою, отже, лінія на поверхні буде плоскою. Відзначивши точки перетину фронтальної проекції проведеної лінії з фронтальними проекціями твірних, будують їх горизонтальні проекції й з'єднують плавною кривою. На цій кривій і розташується горизонтальна проекція точки B .

Коніод. Це лінійчаста поверхня з площиною паралелізму, у якої одна напрямна пряма, а друга крива лінія.

Комплексне креслення коніода показано на рис. 8.40. Зіставлення цього рисунка з рис. 8.38 показує, що принцип формування поверхонь циліндроїда й коніода однаковий. Для прикладів, що розглядаються, розходження тільки у вигляді

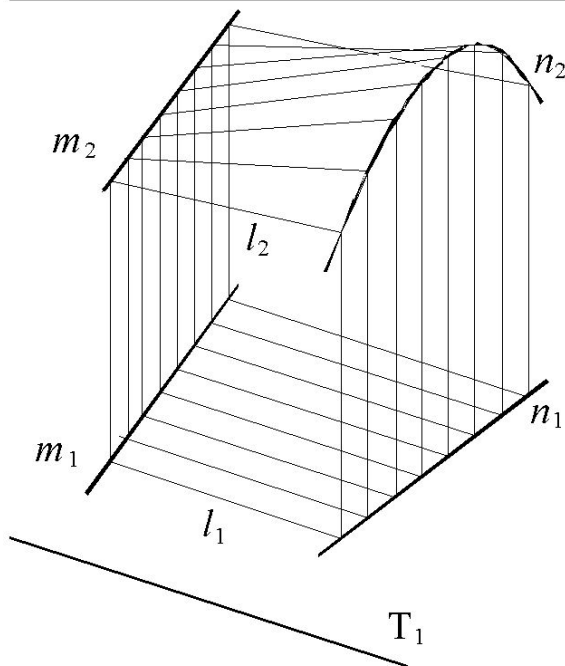


Рис. 8.40

напрямної m . У коноїда це пряма лінія. Каркасом поверхні коноїда є сімейство мимобіжних прямих, паралельних площині паралелізму T .

Коноїди набули широкого застосування у техніці, зокрема, кораблебудуванні – при формуванні носової частини судна, в авіаційній промисловості – при конструюванні літальних апаратів, у гідротехнічних спорудах – формуванні мостових опор; у будівництві – при конструюванні оболонок-покриттів промислових споруд; у сільськогосподарському машинобудуванні (відвали плугів, шнеки, транспортери).

нок-покриттів промислових споруд; у сільськогосподарському машинобудуванні (відвали плугів, шнеки, транспортери).

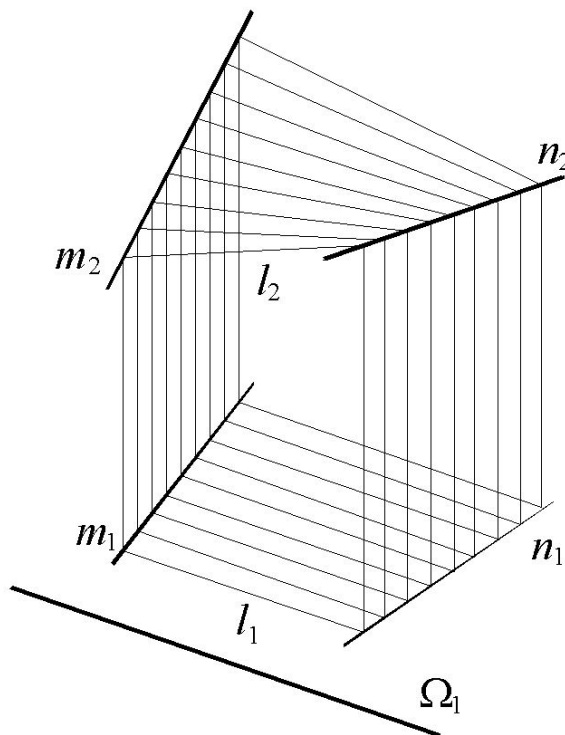


Рис. 8.41

Коса площина. Якщо за напрямні лінійчастої поверхні з площиною паралелізму взяти дві мимобіжні прямі, то буде утворена поверхня косої площини. Це крива поверхня. Застосування в її назві слова "площина" обумовлюється тим, що в утворенні цієї складної поверхні беруть участь тільки прямолінійні елементи (рис. 8.41). Побудова каркаса твірних косої площини нічим не відрізняється від аналогічних побудов, розглянутих вище для циліндроїда і коноїда.

8. ПОВЕРХНІ

Коса площина – це поверхня другого порядку. Її називають ще *гіперболічним параболоїдом*, оскільки в перерізі цієї поверхні площиною можна отримати як параболу, так і гіперболу.

Коса площина (гіперболічний параболоїд) має дві площини паралелізму. На рис. 8.42 напрямними поверхні виступають дві прямі b і c , а площина паралелізму паралельна граням $ADHE$ і $BCGF$. Твірною виступає пряма a . Якщо за напрямні взяти прямі a і d (рис. 8.43), то твірною буде пряма b (або c). Грані $ABFE$ і $DCGH$ у цьому випадку паралельні другій площині паралелізму. Косу площину (гіперболічний параболоїд) можна розглядати як дві множини прямих, кожна з яких має свою площину паралелізму.

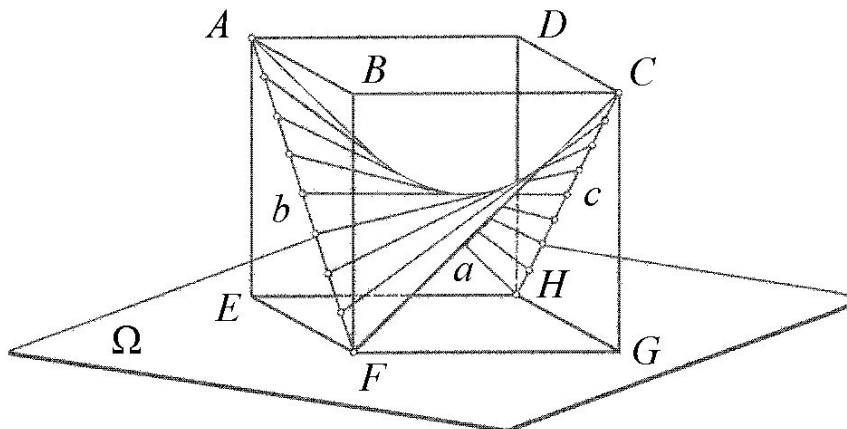


Рис. 8.42

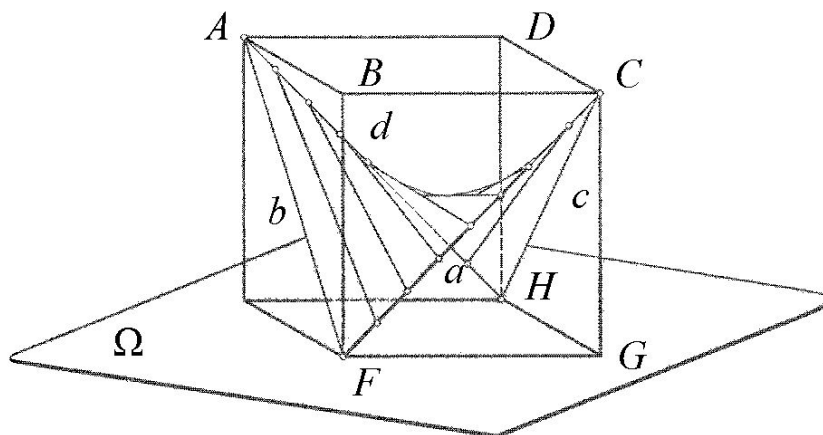


Рис. 8.43

Косі площини широко застосовуються в інженерно-будівельній справі. Цими поверхнями утворені покриття різних будівель, крила вітряків, бічні стінки набережних при переході від похилої стінки до вертикальної тощо.

На завершення розгляду лінійчастих поверхонь з двома напрямними й площиною паралелізму підкреслимо, що циліндроїд, коноїд і коса площина розрізняються видом напрямних ліній, які входять до їх визначників.

8.9. Гвинтові поверхні

Гвинтова поверхня утворюється гвинтовим рухом деякої лінії. Лінія, яка здійснює гвинтовий рух, називається твірною поверхні.

Під *гвинтовим рухом* розуміють рух, який складається з двох рухів: *поступального* руху, паралельного деякій осі (осі гвинта), і *обертального* навколо тієї ж осі. Гвинтовий рух характеризується кроком, який дорівнює лінійному переміщенню твірної за один оберт.

Якщо твірною гвинтової поверхні є пряма лінія, то поверхня називається *лінійчастою гвинтовою поверхнею* або *гелікоїдом* (від слова "геліса" – циліндрична гвинтова лінія). Гелікоїд називається *прямим* або *косим* залежно від того, перпендикулярна твірна до осі гелікоїда або нахилена до неї під деяким кутом.

Прямий гелікоїд Δ (рис. 8.44) утворюється рухом відрізка AB прямолінійної твірної l вздовж напрямних, з яких одна є циліндричною гвинтовою лінією m , а інша – її вісь i , причому в усіх своїх положеннях твірна l паралельна площині паралелізму, перпендикулярної до осі i . За площину паралелізму часто приймають одну із площин проєкцій. У прямого гелікоїда твірна l перетинає гвинтову вісь i під прямим

8. ПОВЕРХНІ

кутом. Прямий гелікоїд може бути віднесений до числа коноїдів і названий гвинтовим коноїдом.

На рис. 8.45 показано комплексне креслення відсіку прямого гелікоїда Λ висотою в один крок гвинтової лінії. Для його зображення спочатку викреслюють один виток геліси m радіусом $R = AB$. При русі прямолінійного відрізка AB твірної точка A переміщується по гелісі m , займаючи на ній проміжні положення на рівні точок 1, 2, 3 Таким чином, при русі відрізка AB утворюється прямолінійний каркас гвинтової поверхні, який формується мимобіжними горизонталями.

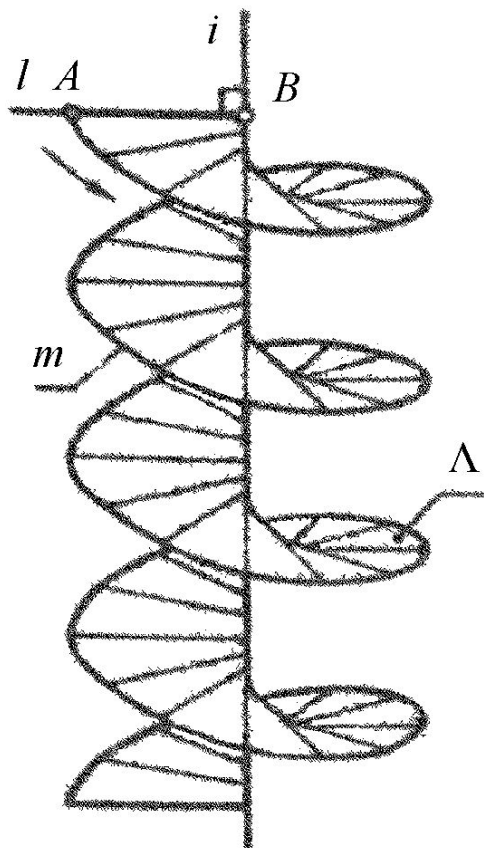


Рис. 8.44

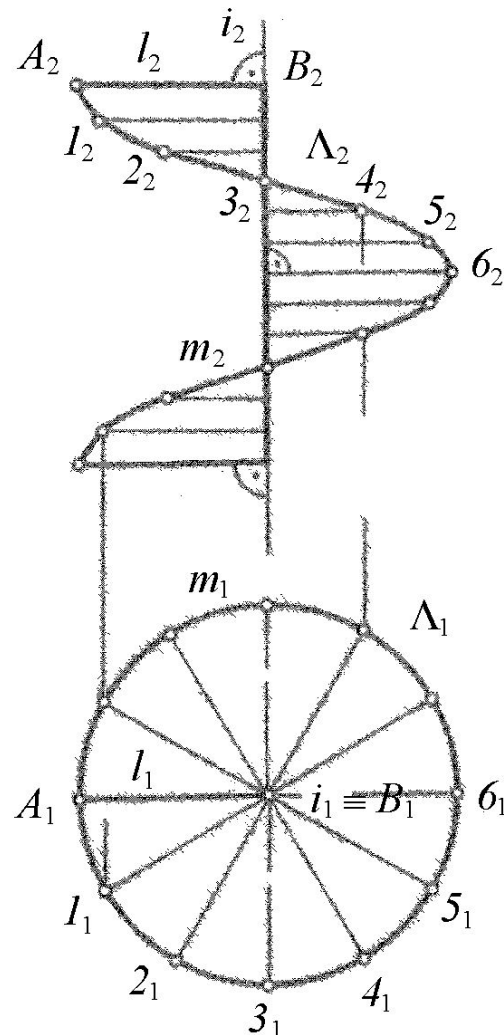


Рис. 8.45

Косий гелікоїд. Розглянемо гвинтову лінійчасту поверхню косого гелікоїда. На відміну від прямого гелікоїда тут прямолінійна твірна l нахилена до осі i гвинтової поверхні (рис. 8.46).

У цьому випадку твірна l також переміщується вздовж напрямних: кривій m – геліси й прямій i – осі поверхні, але тут вже не може бути площини паралелізму. Отже, косий гелікоїд не належить до коноїдів.

На рис. 8.47 представлено комплексне креслення відсіку косого гелікоїда Ω . Для його зображення також спочатку креслять один виток геліси m із проміжними положеннями точки A (див. рис. 8.45). Що ж стосується точки B , то побудова її проміжних положень із урахуванням збереження значення кута α нахилу твірної l до осі i можна виконати двома способами:

1. Опустити точку B по осі i на таку ж висоту, на яку за цей час опуститься точка A (у нашому випадку $1/12$ кроку гвинтової поверхні).

2. Задати поверхню Φ співвісного напрямного конуса, твірні якого нахилені до осі обертання під таким же кутом α . Тоді всі проміжні положення твірної відрізка AB будуються паралельно відповідним твірним напрямного конуса Φ . Прямолінійний каркас косого гелікоїда складається із сімейства мимобіжних прямих загального положення.

Іноді поверхню косого гелікоїда називають архімедовим гвинтом, оскільки в поперечному перерізі цієї поверхні утворюється алгебраїчна крива – спіраль Архімеда (рис. 8.48). Архімедів гвинт використовується в різних машинах для переміщення сипучих тіл і в'язких рідин, у гвинтових компресорах і т. п.

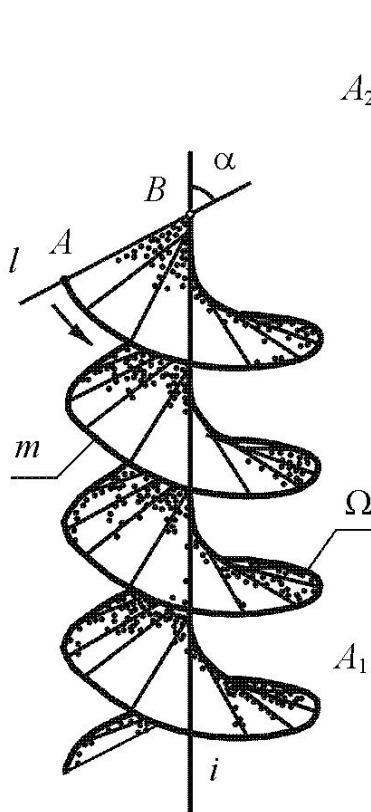


Рис. 8.46

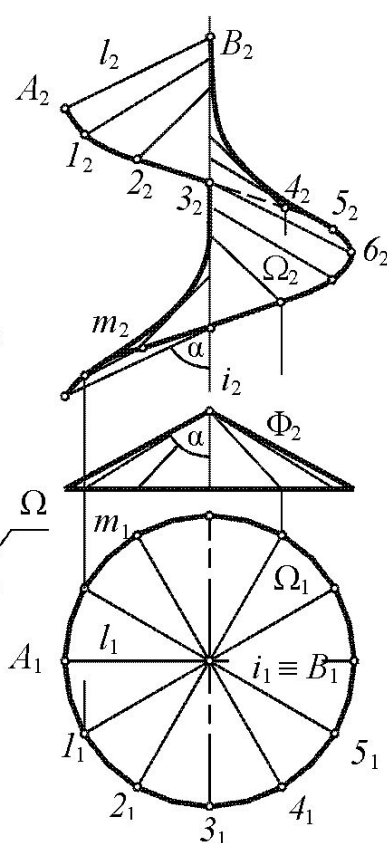


Рис. 8.47

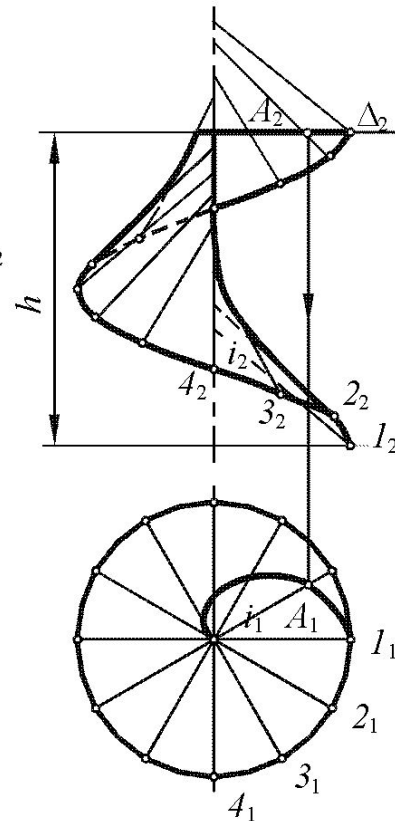


Рис. 8.48

8.10. Незакономірні поверхні

Усі розглянуті вище кінематичні поверхні є закономірними, оскільки вони можуть бути описані математичними рівняннями. Кожна з них має мінімум два сімейства ліній, що взаємно перетинаються і формують безперервний каркас цих поверхонь. Це означає, що через будь-яку точку поверхні може бути побудована лінія каркасу.

Але у техніці дуже часто зустрічаються поверхні, форма яких обумовлена дією певних законів, наприклад аеро- і гідродинаміки (поверхні корпусу судна, літальних і підводних апаратів, лопаток турбін і компресорів тощо), і які мають відповідати естетичним вимогам (наприклад, поверхня кузова легкового автомобіля). Ці поверхні не можуть бути виражені

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

математичними рівняннями і тому належать до незакономірних поверхонь. Їх задають певною кількістю нерухомих ліній, які складають дискретний, тобто переривчастий каркас поверхні.

Конструктори корпусів суден, літальних апаратів, кузовів легкових автомобілів, лопаток турбін і компресорів тощо спочатку створюють моделі поверхонь об'єктів, що проектується, досліджують їх різноманітні якості. Потім на розробленій геометричній моделі поверхні визначають сімейство нерухомих ліній певного напрямку (рис. 8.49). Подібне сімейство нерухомих ліній $l^1, l^2, l^3, \dots$ сформує дискретний каркас поверхні Φ .

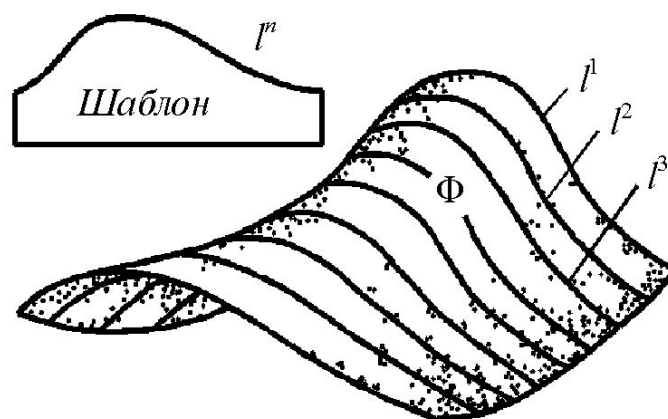


Рис. 8.49

Далі лінії каркаса з високою точністю викреслюють у натуральну величину на великих за розміром кресленнях (так званих плазах, якщо мова йдеться про суднобудування) і за ними виготовляють шаблони. За шаблонами роблять металеві штампи для пресів. Чим щільніше каркас, тобто частіше розташовані його лінії, тим точніше виготовляється сконструйована поверхня. Якщо каркас поверхні складається з одного сімейства нерухомих ліній, то він називається *простим* або *однолінійним*.

На практиці часто застосовується каркас, який складається з двох сімейств нерухомих ліній, що взаємно перетинаються (рис. 8.50). Такий каркас називається *сітчастим* або *дволі-*

8. ПОВЕРХНІ

нійним. Сімейство ліній c перетинає все сімейство ліній b . Сітчастий каркас дає більш повну інформацію про поверхню, зокрема, у точках перетину ліній з різних сімейств можна провести дотичну площину.

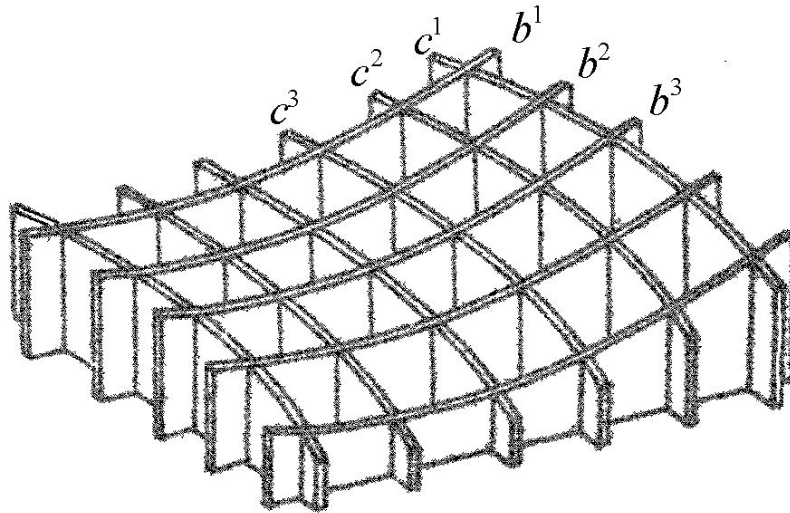


Рис. 8.50

У суднобудуванні для задання поверхні корпусу судна використовується *теоретичне креслення*, яке дає ясне й точне уявлення про геометричну форму корпусу судна. При цьому поверхня корпусу судна задається трьома сімействами нерухомих плоских кривих ліній, що призводить до трилінійного каркаса (рис. 8.51), який складається з таких елементів:

1) *шпангоутів* – плоских кривих ліній, одержуваних при перерізі корпусу судна профільними площинами рівня $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \dots$;

2) *ватерліній* – плоских кривих ліній, одержуваних при перерізі корпусу судна горизонтальними площинами рівня $T^1, T^2, T^3, \dots$;

3) *батоксів* – плоских кривих ліній, одержуваних при перерізі корпусу судна фронтальними площинами рівня $\Sigma^1, \Sigma^2, \dots$.

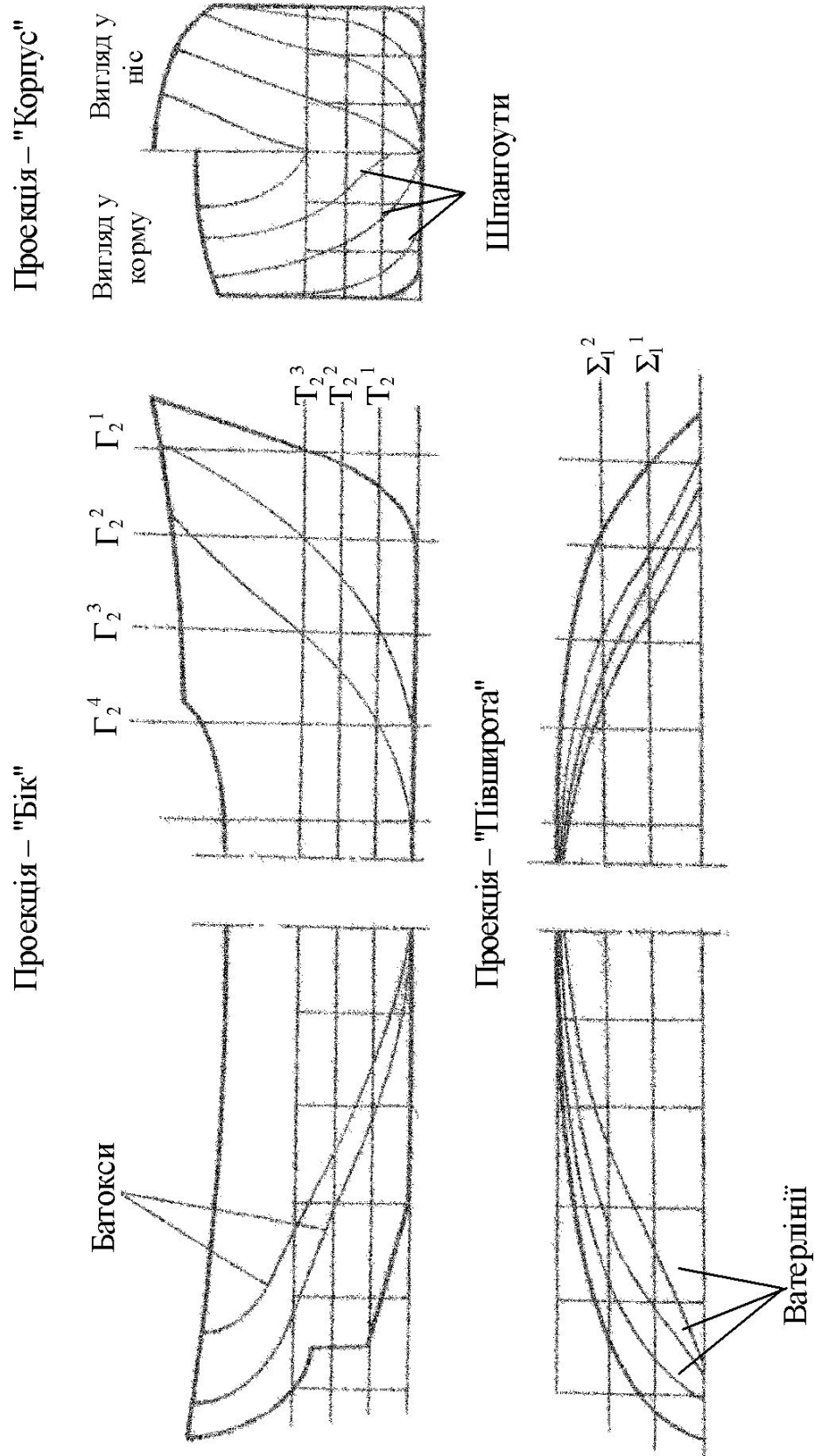


Рис. 8.51

8. ПОВЕРХНІ

Всі січні площини, як правило, розташовуються на рівних відстанях одна від одної. Проекції січних площин утворюють *сітку* теоретичного креслення з вертикальних і горизонтальних прямих ліній.

Кожна лінія перерізу корпусу судна (шпангоут, ватерлінія, батокс) на одній із проекцій теоретичного креслення зображується кривою лінією, а на двох інших проекціях – прямими лініями.

На практиці зустрічаються криволінійні поверхні, крива твірна яких у процесі формування поверхні змінює свій вигляд. Подібні поверхні називаються криволінійними з твірною змінного вигляду. На рис. 9.52 наведено приклад поверхні зі змінною твірною випадкового вигляду й показано побудову проекцій A_1 і A_2 точки A , що лежить на цій поверхні.

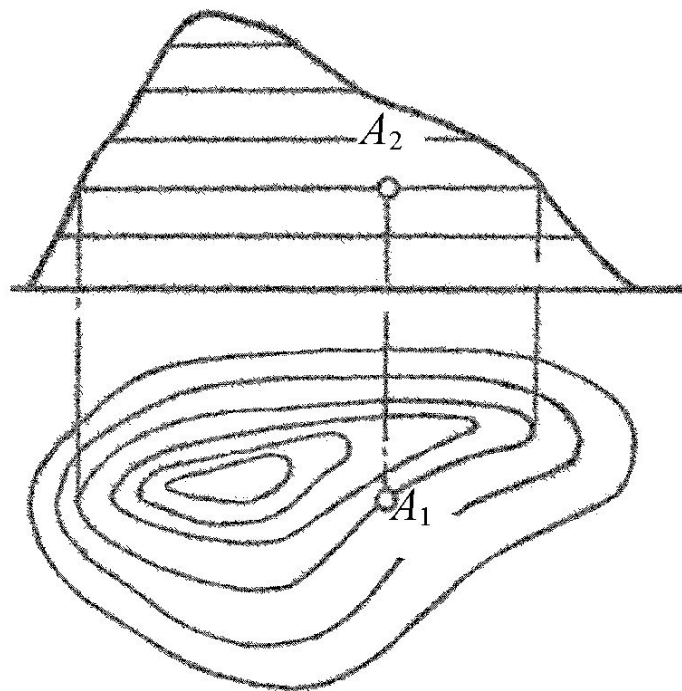


Рис. 8.52

У будівництві велике значення має земна або *топографічна поверхня*. Для її зображення визначається дискретний каркас, який і приймається за зображення поверхні.

Топографічна поверхня задається на комплексному кресленні (топографічній карті) простим або однолінійним каркасом. Поверхня землі умовно розсікається низкою горизонтальних площин рівня $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \Gamma^4, \dots$, які знаходяться одна від одної на рівних відстанях (рис. 8.53). У результаті на горизонтальній площині проєкцій утворюється сімейство кривих ліній рівня – горизонталей. Кожна така горизонталь має свою позначку, яка визначає висоту розташування точок цієї горизонталі над рівнем моря.

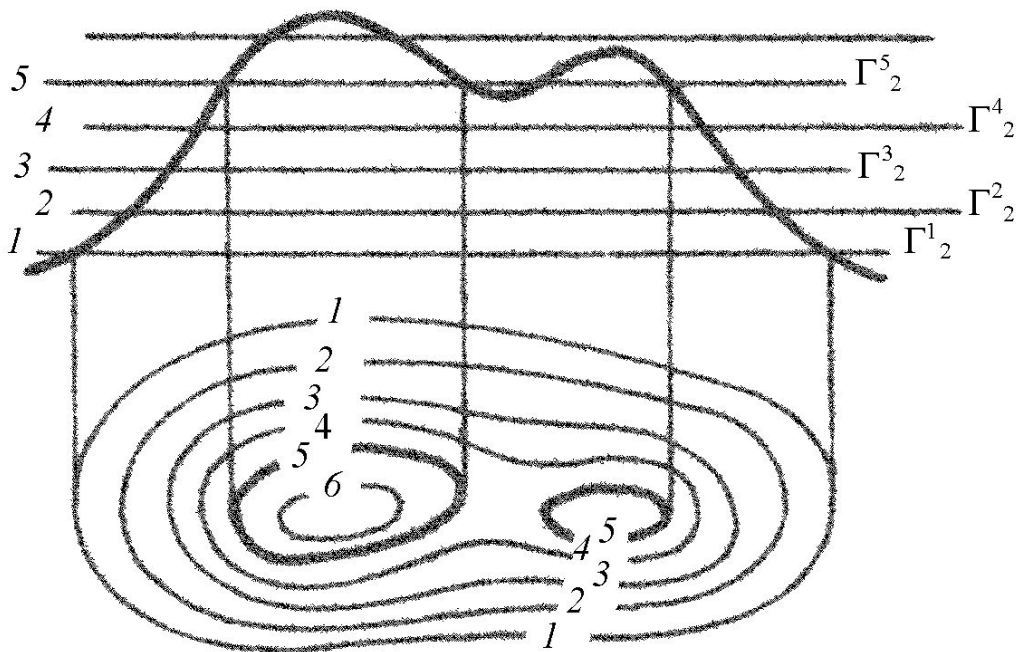


Рис. 8.53

Залежно від поданого на топографічній карті масштабу висотні позначки на горизонталях можуть бути кратними одному, п'яти, десяти або більше метрам. Кожну п'яту горизонталь обводять товстішою лінією.

Зазначимо, що фронтальну проєкцію земного рельєфу на топографічній карті не показують.

8. ПОВЕРХНІ

Каркасна поверхня з дискретним каркасом відрізняється від закономірної кінематичної поверхні з її безперервним каркасом тим, що її каркас не визначає поверхню однозначно. Якщо на закономірних поверхнях довільну точку можна побудувати з будь-яким ступенем точності, то на каркасних поверхнях високої точності задання точок домогтися неможливо, оскільки у проміжках між лініями каркаса поверхня може мати різну кривину. Єдиним способом збільшення точності задання точок на каркасній поверхні є ущільнення каркаса, тобто зменшення відстані між його лініями.

9. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ І ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ

9.1. Перетин поверхні з проекціювальною площиною

У загальному випадку лінія перетину кривої поверхні з площиною є плоскою кривою, яка може розпадатися й на прямі лінії у випадку перетину площини з лінійчастою поверхнею вздовж її твірної.

Основним способом побудови точок лінії перетину поверхні з площиною є спосіб допоміжних січних площин-посередників, який передбачає введення ряду допоміжних проекціювальних площин, що перетинають задану поверхню по деяких лініях, а січну площину – по прямим. Точки перетину цих ліній з прямими, які є спільними для даної поверхні й даної площини, є точками шуканої лінії перетину.

При виборі допоміжних проекціювальних площин-посередників слід керуватися простотою побудови ліній перетину цих площин із заданою поверхнею. Ці лінії мають бути графічно простими, тобто прямими або колами. Крім того, якщо цими лініями є кола, то поверхня повинна бути також розташована щодо площин проекцій таким чином, щоб ці кола не спотворювалися на одній із площин проекцій.

Визначення проекцій ліній перетину починають із побудови опорних точок – точок, розташованих на обрисових

9. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ...

твірних поверхні (точки, які визначають границі видимості проекцій кривої); точок, віддалених на екстремальні (максимальну й мінімальну) відстані від площин проекцій. Після цього визначають довільні (проміжні) точки лінії перетину.

Якщо проміжні точки визначаються за допомогою того ж самого прийому, то для знаходження опорних точок, як правило, доводиться користуватися різними способами.

Складність розв'язування задачі побудови лінії перетину поверхні з площиною суттєво залежить від розташування заданих геометричних образів у просторі. Воно спрощується, якщо один із геометричних образів (поверхня або площина) займає окреме положення, тобто є проєкціювальним. Розглянемо кілька прикладів побудови лінії перетину поверхні з проєкціювальною площиною.

На рис. 9.1 циліндрична поверхня загального вигляду перетинається фронтально-проєкціювальною площиною $T(T_2)$. Для побудови лінії перетину, згідно з розглянутою вище схемою, візьмемо кілька січних площин (Δ_2 , Λ_2 , Σ_2), які для цієї лінійчастої поверхні збігаються з лініями каркаса. Принцип побудови лінії перетину зрозумілий і не потребує додаткових пояснень.

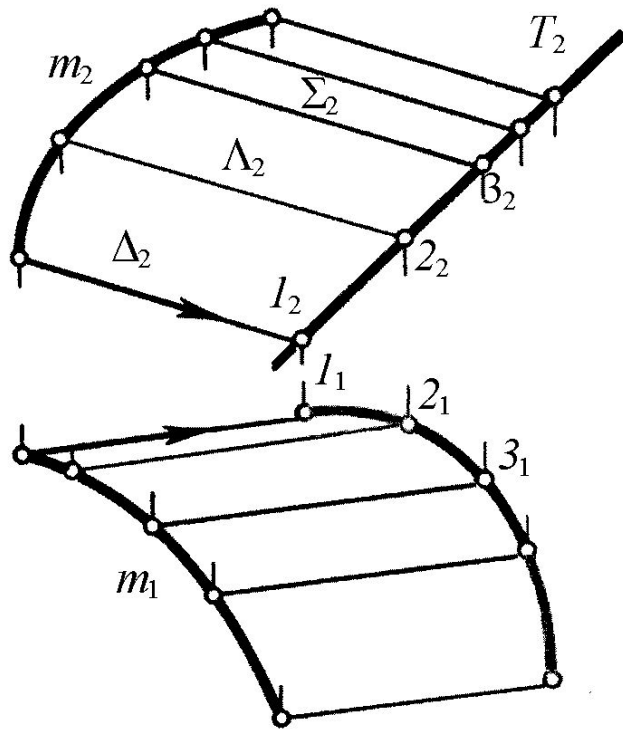


Рис. 9.1

На рис. 9.2 задані конічна поверхня обертання Γ і фронтально-проєкціювальна площина Φ . Лінією їх взаємного

перетину є плоска крива другого порядку – парабола t (січна площина паралельна одній із твірних конічної поверхні).

Фронтальна проекція t_2 лінії перетину вже є на комплексному кресленні (вона збігається з виродженою проекцією Φ_2 площини Φ). Будують горизонтальну проекцію параболі. Точки 1 (вершина параболі), 2 і 3 є опорними. Їх положення визначаються без додаткових побудов. Проміжні точки 4, 5, ... лінії перетину t будують із застосуванням ліній каркаса. У цьому випадку доцільно користуватися сімейством кіл-горизонталей, оскільки вони дають більш точне розв'язання задачі, ніж сімейство прямих-твірних.

На рис. 9.3 наведено приклад побудови лінії перетину сфери з горизонтально-проекціювальною площиною Ω . Коло, за яким площина Ω перетинає сферичну поверхню, проєкціюється на Π_2 у вигляді еліпса. Точки 1 і 6 знаходяться на екваторі сфери, точки 2 і 3 – на її головному меридіані. Фронтальні проєкції цих точок відділяють видиму і невидиму частини еліпса. Проміжні точки еліпса знаходять із застосуванням допоміжних січних площин Σ і Ψ . Точки 4 і 5 визначають велику вісь еліпса, довжина якої дорівнює діаметру кола-перерізу, тобто відрізок 4_2-5_2 дорівнює відрізку 1_1-6_1 . Січна площина Σ проведена через точку перетину перпендикуляра, опущеного із O_1 на Ω_1 .

Розглянемо наступний приклад (рис. 9.4). Фронтально-проекціювальна площина Ω перетинає поверхню еліптичного циліндра T . Лінією перетину є замкнена крива с другого порядку – еліпс.

Фронтальна проекція c_2 шуканої лінії перетину вже є на кресленні – вона збігається з проекцією Ω_2 січної площини Ω . Необхідно побудувати горизонтальну проекцію c_1 лінії пере-

9. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ...

тину c . Спочатку будують опорні точки. Такими є найвища й найнижча точки 1 і 2 , які знаходяться на крайніх бічних твірних EF і GH . Ще дві опорні точки (3 і 4) – обрисові, і знаходяться вони на горизонтальних обрисових твірних. Визначаються вони в такий спосіб. Майбутній переріз-еліпс має торкатися обрисових твірних KL і MN . Тому позначають спочатку фронтальні проекції 3_2 і 4_2 цих опорних точок, а потім горизонтальні проекції 3_1 і 4_1 . Зазначимо, що опорні точки 3 і 4 є границями видимості лінії перетину в горизонтальній площині проекцій.

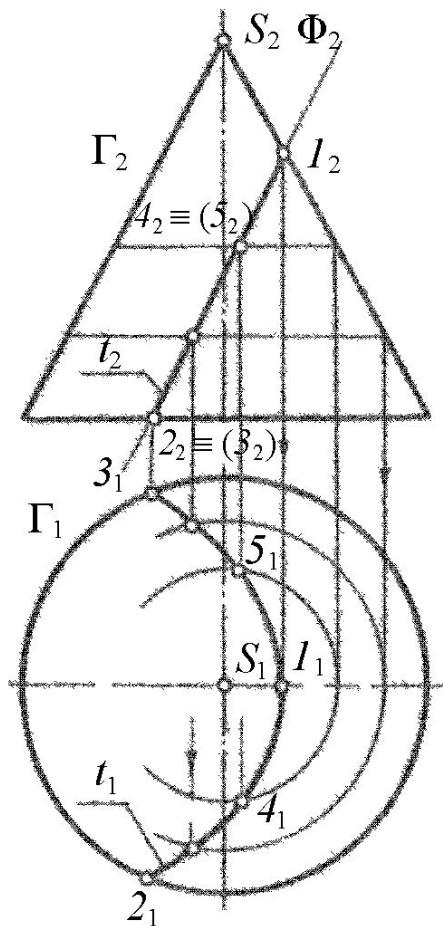


Рис. 9.2

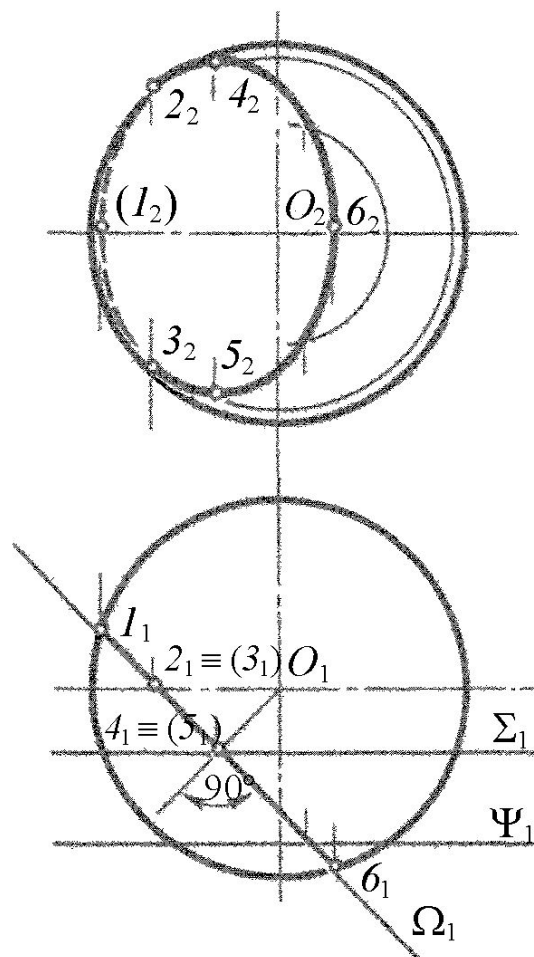


Рис. 9.3

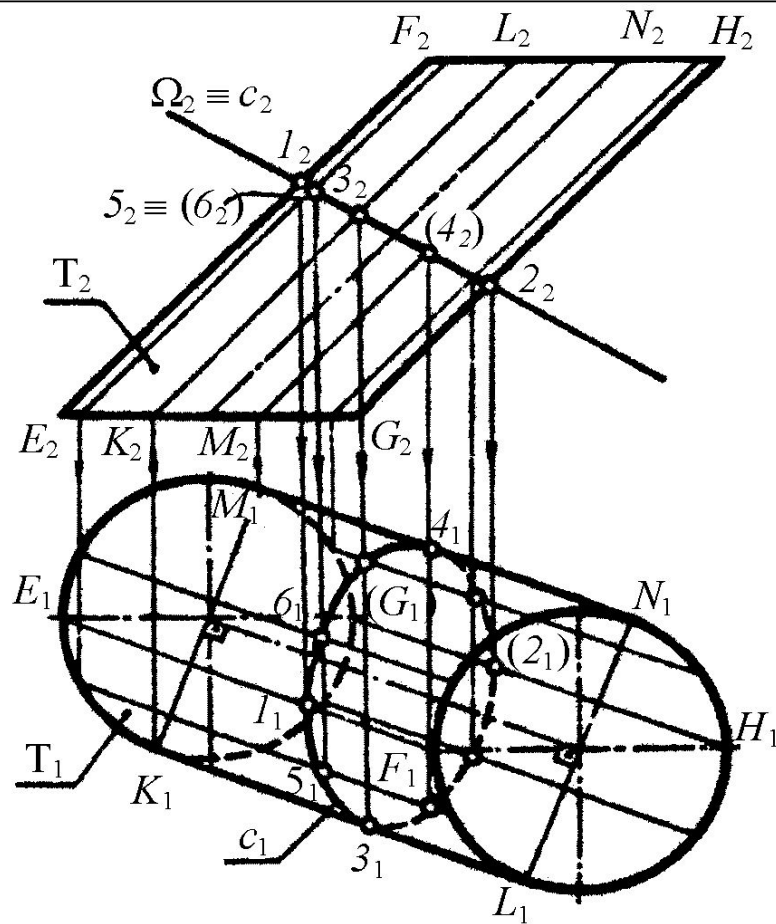


Рис. 9.4

Проміжні точки 5, 6 ... лінії перетину будують за допомогою ліній каркаса. У розглянутому випадку зручно користуватися сімейством прямолінійних твірних, оскільки сімейство горизонтальних кіл істотно збільшує кількість ліній на кресленні.

З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією c_1 , отримують другу проекцію шуканої лінії перетину. Зазначимо, що зі збільшенням кількості проміжних точок графічна точність кривої перетину зростає.

9.2. Перетин поверхонь з площиною загального положення

Лінію перетину поверхні довільно розташованою площиною будують (як і у випадку проєкціювальних площини)

9. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ...

по точках, застосовуючи допоміжні січні площини-посередники.

Розглянемо випадок, коли площина, що перетинає поверхню, займає загальне положення, а поверхня – окреме. Під окремим положенням поверхонь розуміється їх проєкціювальне положення, що можливе не для всіх поверхонь, розглянутих вище, а тільки для деяких, наприклад циліндричних.

На рис. 9.5 задані циліндрична проєкціювальна поверхня Σ і площина загального положення T ($ABCD$). Треба побудувати лінію їх перетину з урахуванням видимості.

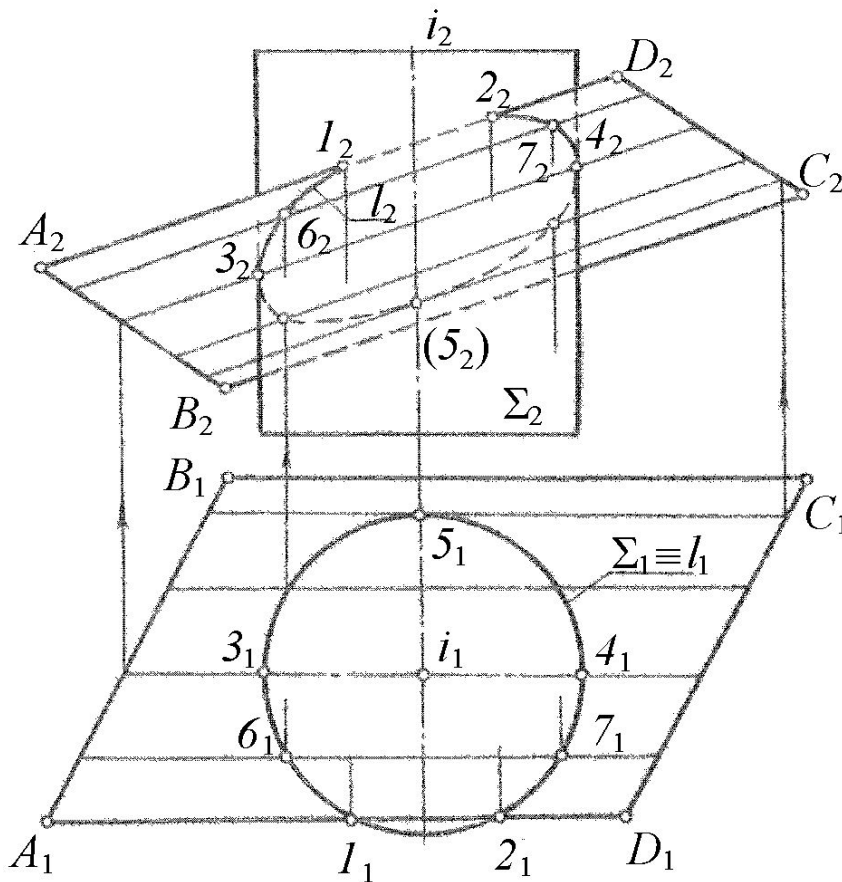


Рис. 9.5

З рисунка 9.5 неважко встановити, що лінією перетину цих геометричних образів є плоска крива другого порядку – еліпс. Горизонтальна проєкція l_1 цієї кривої збігається з виродженою

проекцією Σ_1 циліндричної поверхні Σ . Залишається побудувати фронтальну проекцію l_2 цієї лінії перетину, що виконується за допомогою спеціальним образом обраних прямих площини T .

Опорними є точки 1 і 2 (точки перетину кромки AD відсіку з поверхнею циліндра), 3 і 4 (крайні бічні, що є границями видимості лінії перетину, а також точка 5 . Точки $6, 7, \dots$ є проміжними. Після побудови лінії перетину встановлюється її видимість.

Найбільш доцільним підходом до розв'язання задачі побудови лінії перетину поверхні з площиною загального положення є перетворення комплексного креслення до вигляду, коли або поверхня (якщо вона циліндрична), або площина стають проекціювальними.

На рис. 9.6 сферична поверхня перетинається площиною загального положення Δ , заданою своїми головними лініями – фронталлю f і горизонталлю h . Випадок, що розглядається, можна звести до подібного (рис. 9.3). Зробимо заміну площин проекцій, замість площини Π_2 введемо площину Π_4 , перпендикулярну до горизонталі h . У новій системі площин Π_4 / Π_1 задана площина зайняла положення проекціювальної. Розв'язання задачі починається з нової додаткової проекції.

Найвища й найнижча точки лінії перерізу на додатковій проекції позначені відповідно як 1 ($1_1, 1_4$) і 2 ($2_1, 2_4$). Цифрами 3 ($3_1, 3_2$) і 4 ($4_1, 4_2$) позначені точки, розташовані на контурі горизонтальної проекції сфери. Вони розрізняють видиму і невидиму частини горизонтальної проекції лінії перетину.

Зазначимо, що точки (3 і 4) можна знайти й безпосередньо в системі площин Π_2 / Π_1 за допомогою площини Δ , яка проходить через центр сфери паралельно Π_1 . Площина Δ перетинає площину Λ по горизонталі h' (h'_1, h'_2), а сферу – по екватору. Перетин горизонтальних проекцій екватора й горизонталі визначає горизонтальні проекції точок 3 і 4 .

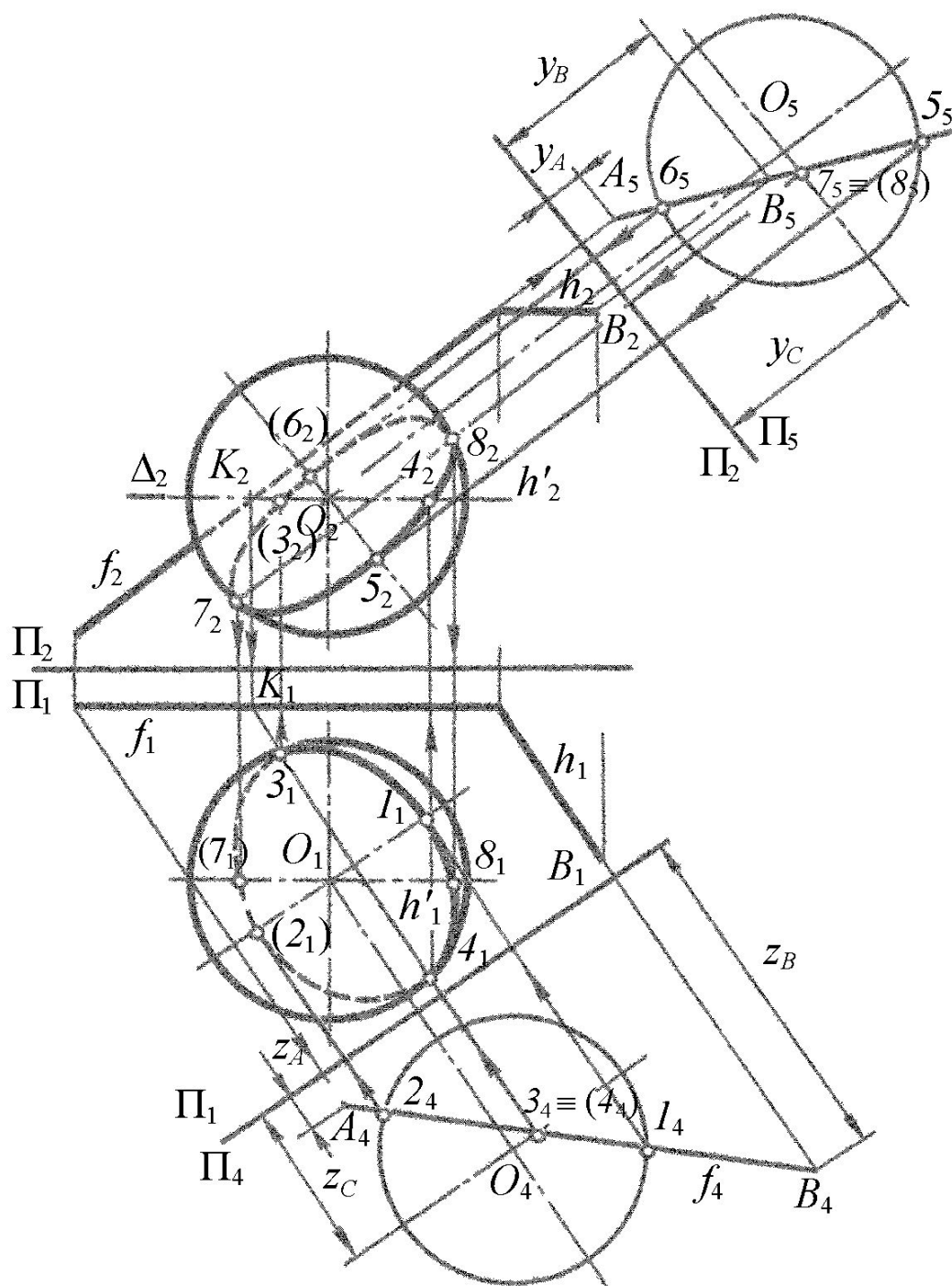


Рис. 9.6

Побудову фронтальної проекції перерізу можна виконати незалежно від уже побудованої проекції перерізу на площині Π_1 . Для цього доцільно перейти від системи площин

проекцій Π_2 / Π_1 до системи Π_5 / Π_2 Нова площина проекцій Π_5 перпендикулярна до фронталі заданої площини.

Зазначимо, що цифрами 5 і 6 позначені точки, найбільш й найменш віддалені від площини Π_2 . Точки 7 і 8 розташовані на головному меридіані сфери й визначають границі видимості фронтальної проекції лінії перерізу. Проміжні точки визначаються за допомогою додаткових паралелей сфери.

9.3. Перетин поверхонь з прямою лінією

Пряма й поверхня можуть перетинатися між собою в одній або кількох точках. Окремим випадком перетину може бути торкання цих геометричних образів.

Точки перетину прямої лінії з поверхнею в основному визначають за такою схемою:

- 1) через пряму лінію проводять допоміжну січну площину (часто про-екціювальну);
- 2) будують лінію перетину цієї допоміжної площини з поверхнею;
- 3) знаходять точки перетину прямої лінії з лінією перетину поверхні допоміжною січною площиною.

На рис. 9.7 показано перетин прямої лінії AB з циліндричною поверхнею загального вигляду. Ця поверхня задана напрямною MN і напрямом прямолінійної твірної – прямої MT . Через пряму AB проведено допоміжну фронтально-проекціювальну площину Γ , яка перетинає циліндричну поверхню за кривою $I - 4$. Ця крива будується по точках, в яких твірні поверхні перетинають площину Γ . У перетині отриманої кривої з заданою прямою лінією AB знаходять точку K , в якій пряма AB перетинає циліндричну поверхню загального вигляду.

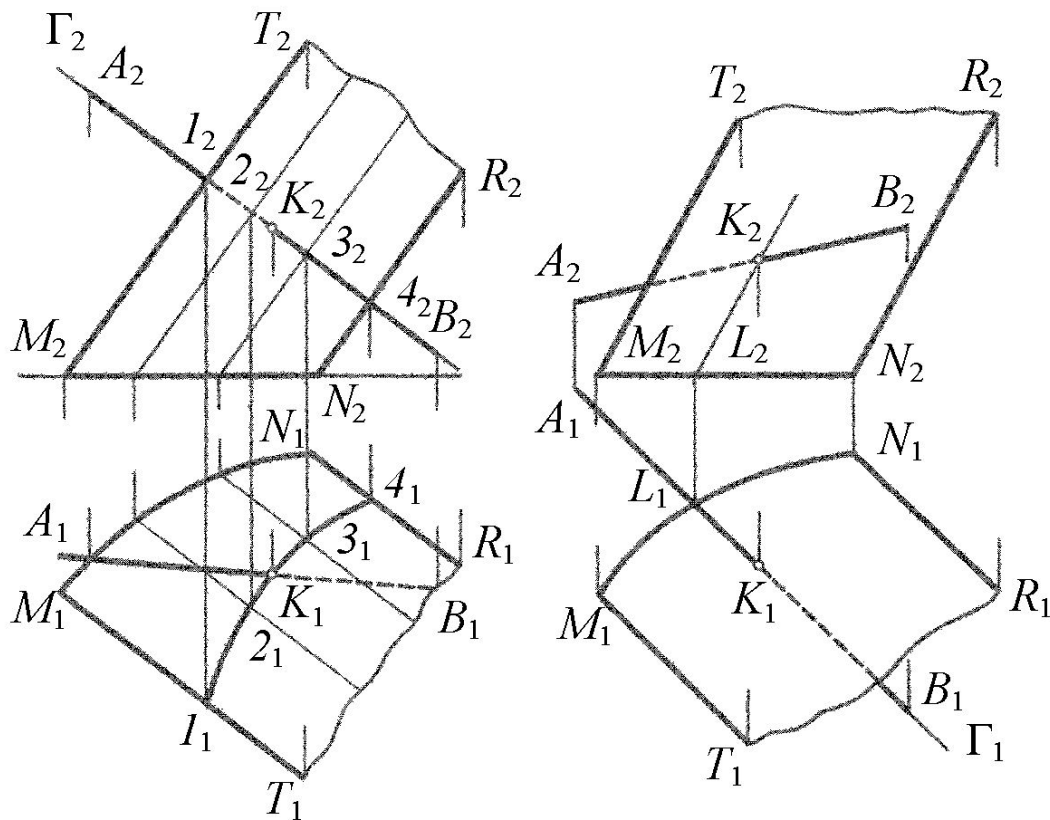


Рис. 9.7

Побудова, показана на рис. 9.7 ліворуч, значно спрощується, якщо (рис. 9.7, праворуч) допоміжна площина Γ паралельна твірній MT : поверхня виявляється перетнутою по прямій, паралельній MT , яка визначається за однією точкою L . Це один із можливих окремих випадків, а саме задана пряма AB лежить у площині, паралельній твірній MT .

Іноді показ допоміжної січної площини зайвий. Приклади наведено на рис. 9.8: прямий круговий циліндр, вісь якого перпендикулярна до площини Π_1 , і конус обертання за такого ж положення його осі перетинаються прямою AB . Горизонтальна проекція K_1 точки перетину прямої AB , перпендикулярної до площини Π_1 , з бічною поверхнею прямого кругового конуса збігається з горизонтальною проекцією самої прямої. Провівши горизонтальну проекцію твірної ST і побудувавши

її фронтальну проекцію S_2T_2 , знаходять фронтальну проекцію K_2 шуканої точки.

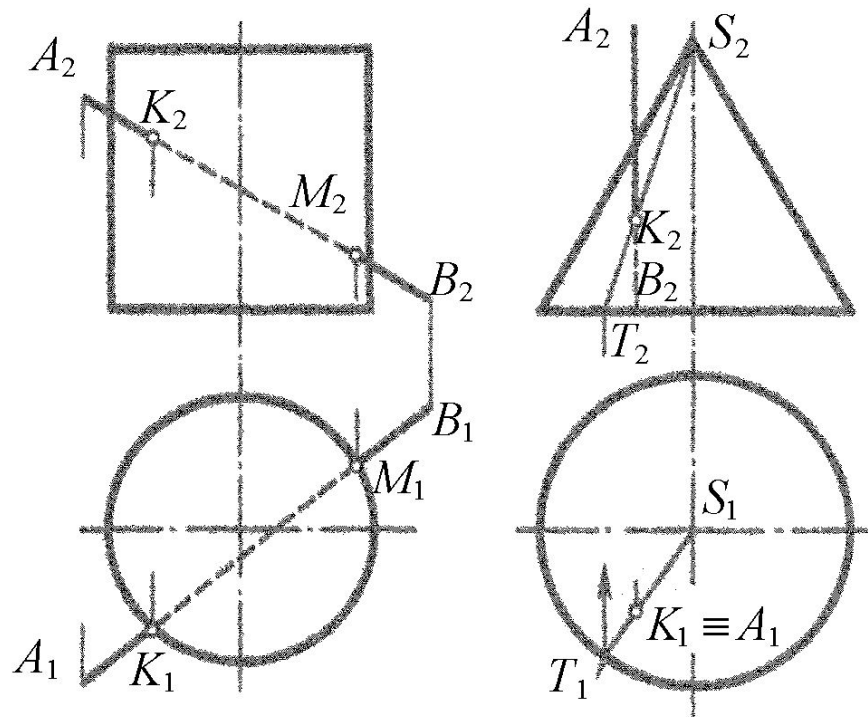


Рис. 9.8

Якщо обидва геометричні образи (поверхня й пряма, що її перетинає) не проєкціювальні, то доводиться застосовувати допоміжну січну площину-посередник, але вибрати її треба такою, щоб у перетині із заданою поверхнею вона давала прості графічні лінії – прямі й кола. Доцільно уникати складних перерізів, які вимагають побудову лекальних кривих. Приклад розв'язування задачі з побудовою лекальних кривих показано на рис. 9.9.

Для розв'язування задачі (рис. 9.9), де поверхня обертання перетинається прямою загального положення, через задану пряму проведено горизонтально-проєкціювальну площину Ω і побудовано криву перетину площини й поверхні. На рисунку показано одну із допоміжних площин (Σ), за допомогою яких побудовано лінію перетину. Пряма a перетинає цю криву

9. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ...

в точках A і B . Із розгляду рисунка випливає, що немає необхідності будувати всю криву, тому перед тим, як шукати цю лінію, треба визначити область можливого перетину лінії й поверхні. Вона розташована між горизонтальними площинами, які проходять через точки C і D .

Розглянемо кілька прикладів, кожний із яких вимагає індивідуального підходу для отримання достатньої графічної точності розв'язання задачі при мінімальних витратах часу.

На рис. 9.10 пряма загального положення AB перетинає поверхню сфери. Обрані за середники проєкціювальні площини дадуть у проєкціях лекальні криві – еліпси. Рациональне розв'язування цієї задачі полягає

в перетворенні креслення таким чином, щоб переріз-коло спроекціювався у натуральну величину. Це можна зробити однією заміною площини проєкцій, у результаті якої пряма загального положення AB стає прямою рівня.

Нова площина проєкцій проведена паралельно горизонтальній проєкції прямої. Через пряму проведено допоміжну горизонтально-проекціювальну площину, яка перетне сферу по колу радіуса R . На площині проєкцій Π_4 побудовано це коло, яке у перетині з проєкцією прямої дасть проєкції шуканих точок 1_4 і 2_4 . Повертаючи їх у зворотному напрямку,

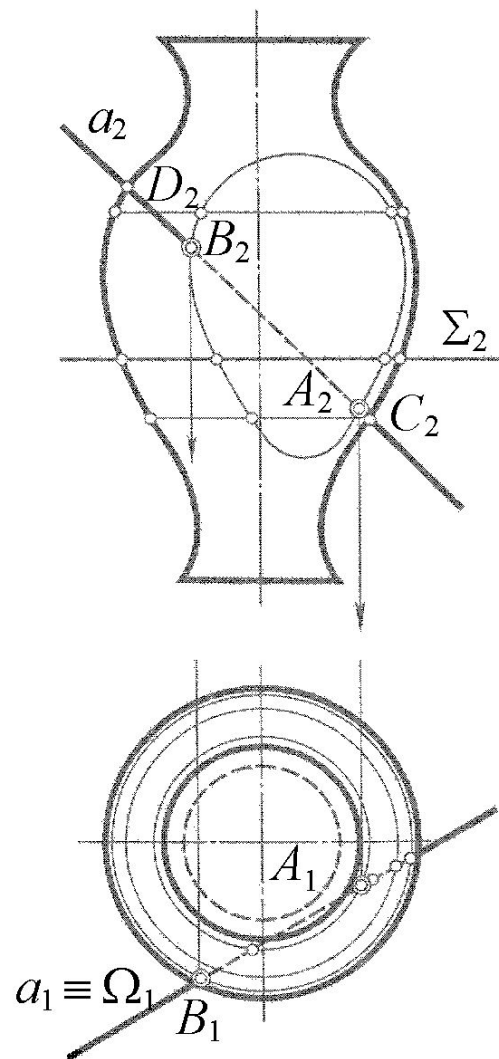


Рис. 9.9

знаходимо спочатку горизонтальні, а потім фронтальні проєкції шуканих точок 1 та 2 .

На рис. 9.11 пряма загального положення l перетинає поверхню циліндра обертання. У цьому випадку проєкціувальні площини-посередники у перерізі дадуть лекальні криві. Але оскільки циліндрична поверхня може стати проєкціувальною, то потрібно перетворити креслення. Нову площину Π_4 потрібно вибрати перпендикулярно до осі i циліндра обертання. Тоді циліндрична поверхня спроекціюється на площину Π_4 у коло. Перетин цього кола із заданою прямою а визначить шукані точки перетину A і B .

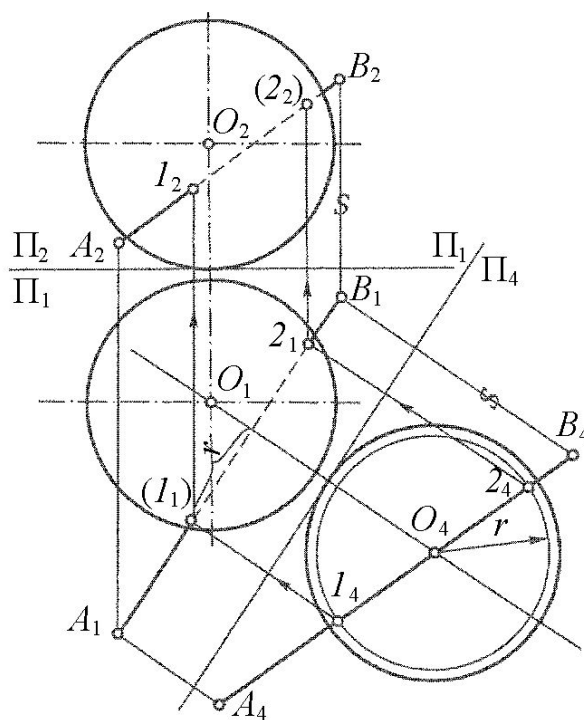


Рис. 9.10

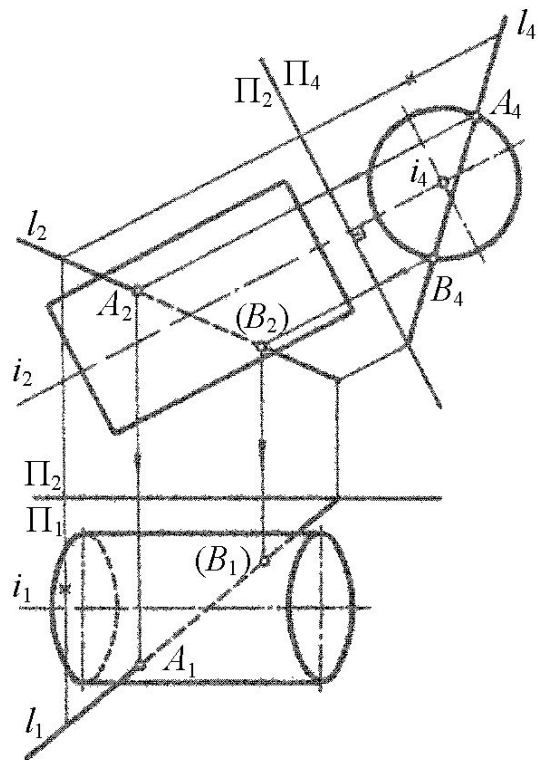


Рис. 9.11

9.4. Побудова точок перетину поверхонь з прямою лінією із застосуванням січної площини загального положення

Використання допоміжної січної проєкціувальної площини для знаходження точок перетину прямої загального

9. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ...

положення з поверхнею не завжди приводить до спрощення розв'язання задачі. Можливі випадки, коли краще застосовувати площину загального положення. Ілюстрацією, що підтверджує цю думку, може стати задача з визначення точок перетину прямої загального положення з конічною та циліндричною поверхнями.

Площина перетинає конічну поверхню по кривій лінії. Виняток становить тільки площина, яка проходить через вершину конічної поверхні. У цьому випадку крива розпадається на дві прямі – твірні конічної поверхні.

На рис. 9.12 показано перетин конуса обертання з прямою загального положення. За січну площину-посередник взято площину загального положення, яка проходить через вершину S конуса та пряму $I-2$. Січна площина визначається двома прямими, що перетинаються у точці S . На кресленні вона має проєкції $S_1 I_1 2_1$ та $S_2 I_2 2_2$. Для розв'язання поставленої задачі необхідно побудувати лінію перетину цієї площини з основою конуса. Продовжують $S_2 I_2$ та $S_2 2_2$ до перетину з проєкцією основи конуса на площині Π_2 . Через точки перетину цих прямих з основою конуса проводять вертикальні лінії сполучення до їх перетину з продовженнями проєкцій $S_1 I_1$ та $S_1 2_1$. Отримують точки $\bar{I}_1$ і $\bar{2}_1$, які з'єднують прямою лінією. Відрізок $\bar{A}_1 \bar{B}_1$ цієї прямої є лінією перетину основи конуса з допоміжною січною площиною загального положення. З'єднують $\bar{A}_1$ і $\bar{B}_1$ з проєкцією вершини конуса S_1 . Точки A_1 і B_1 будуть горизонтальними проєкціями шуканих точок перетину конуса з прямою загального положення $I-2$. Фронтальні проєкції цих точок будують із застосуванням вертикальних ліній сполучення.

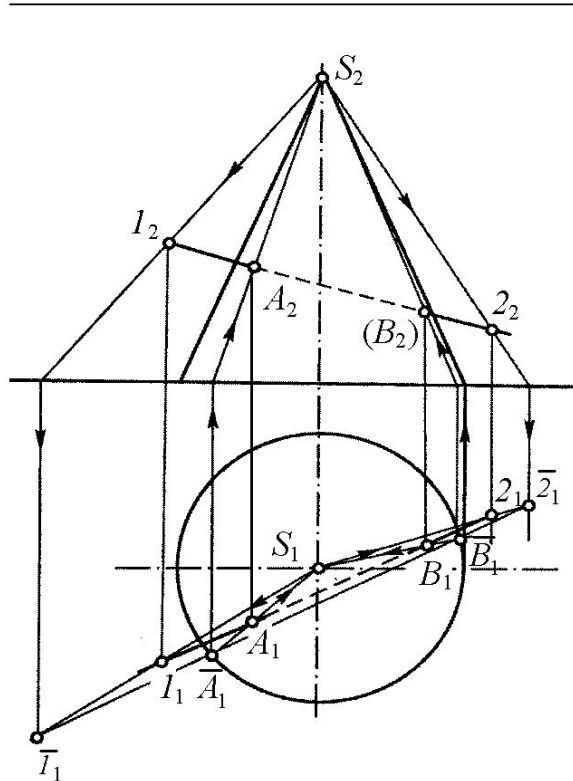


Рис. 9.12

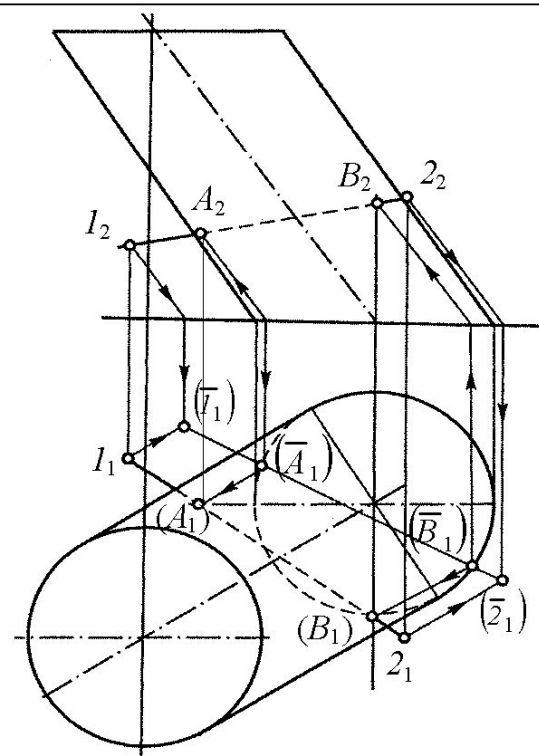


Рис. 9.13

Якщо пряма, яка з'єднує точки $\bar{I}_1$ і $\bar{2}_1$, не перетинає основу конуса, то й задана пряма не перетинає поверхню конуса.

На рис. 9.13 пряма загального положення перетинає еліптичний циліндр. Площина-посередник загального положення має перетинати циліндричну поверхню по твірних. Ця площина проходить через пряму $I-2$ паралельно твірним циліндра. Перетин відрізка $\bar{I}_1\bar{2}_1$ з основою циліндра визначить допоміжні проєкції шуканих точок $\bar{A}_1$ і $\bar{B}_1$, які повертаються у зворотному напрямку на пряму $I-2$.

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

10.1. Загальні підходи до побудови лінії перетину двох поверхонь

Лінією перетину двох поверхонь може бути пряма, плоска й просторова крива лінія або будь-яке сполучення із цих ліній. У загальному випадку криві поверхні перетинаються по просторовій кривій лінії. Лінія перетину кривої поверхні із гранною складається з ланок плоских кривих із точками зламу в місцях перетину ребер гранної поверхні з кривою.

Для побудови лінії перетину двох поверхонь треба перетнути їх низкою *допоміжних поверхонь-посередників*, побудувати лінії перетину заданих поверхонь із допоміжними, відмітити спільні для них точки, з'єднати отримані точки поспільно між собою.

На рис. 10.1 показано, що поверхні Ω і Σ перетинаються деякою поверхнею Φ . Ця допоміжна поверхня перетинає поверхню Ω по лінії AB , а поверхню Σ – по лінії CD . Точка K , в якій перетинаються лінії AB і CD , є спільною для поверхонь Ω і Σ . Отже, вона належить лінії їх перетину. Повторюючи подібний прийом кілька разів, отримують сукупність точок шуканої лінії перетину однієї поверхні з іншою.

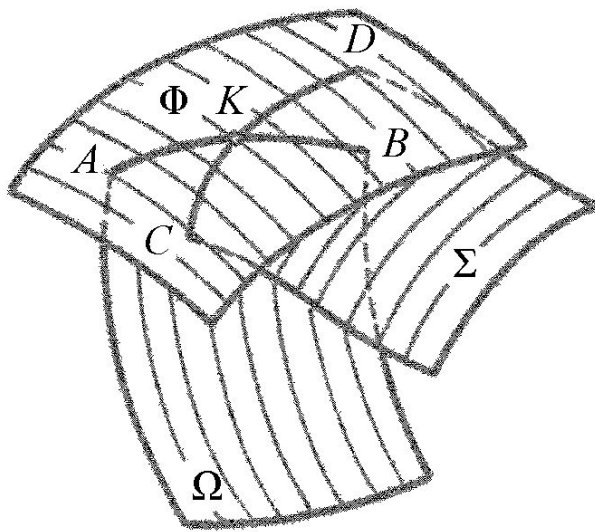


Рис. 10.1

За поверхні-посередники беруть проекційвальні поверхні, площини та сфери, і залежно від цього розрізняють наступні способи побудови точок лінії перетину двох поверхонь: спосіб допоміжних проекційвальних поверхонь, спосіб допоміжних площин і спосіб допоміжних сфер. Застосування того або іншого способу за-

лежить як від типу поверхонь, що перетинаються, так і від їх взаємного розташування.

Спосіб допоміжних проекційвальних поверхонь застосовують у випадку, коли одна із поверхонь, що перетинаються, лінійчаста циліндрична або призматична. Спосіб допоміжних проекційвальних площин-посередників застосовують тоді, коли обидві поверхні можна перетнути по графічно простих лініях деякою сукупністю проекційвальних площин або площин рівня.

Спосіб допоміжних сфер-посередників застосовують при побудові лінії перетину поверхонь, які мають спільну площину симетрії, розташовану паралельно одній з площин проєкцій. При цьому кожна з поверхонь повинна містити сімейство кіл, по яких її можуть перетинати допоміжні сфери, спільні для обох заданих поверхонь. Зокрема, спосіб допоміжних сфер-посередників можна застосовувати при побудові лінії перетину двох поверхонь обертання, осі яких перетинаються й паралельні одній з площин проєкцій.

У деяких випадках лінія перетину поверхонь другого порядку розпадається на плоскі криві другого порядку. Тоді, якщо

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

заздалегідь відомий вигляд цих кривих, можна уникнути трудомісткої побудови лінії перетину по точках і провести побудову цих кривих за їх основними елементами.

Зазначимо також, що коли одна з поверхонь, які перетинаються, є проєкціювальною, наприклад проєкціювальною циліндричною поверхнею, то побудова лінії перетину спрощується, оскільки у цьому випадку одразу визначаються точки перетину проєкціювальної поверхні із графічно простими лініями другої поверхні.

Звідси випливає, що при побудові лінії перетину якої-небудь поверхні із циліндричною буває корисним перетворити циліндричну поверхню на проєкціювальну способом заміни площин проєкцій.

Яким би способом не проводилася побудова лінії перетину поверхонь, при знаходженні точок цієї лінії необхідно дотримуватися певної послідовності. У лінії перетину двох поверхонь так само, як і в лінії перетину поверхні із площиною, розрізняють точки опорні й проміжні.

У першу чергу визначають опорні точки, оскільки вони завжди дозволяють бачити, в яких межах розташовані проєкції лінії перетину і де між ними є сенс визначати проміжні точки для більш точної побудови лінії перетину поверхонь.

Визначення видимості лінії перетину здійснюють окремо для кожної ділянки, обмеженої точками видимості, при цьому видимість усієї ділянки збігається з видимістю якої-небудь проміжної точки цієї ділянки.

При побудові лінії перетину необхідно мати на увазі, що її проєкції завжди розташовуються у межах площі знаходження однойменних проєкцій поверхонь, що перетинаються.

10.2. Перетин поверхонь, одна з яких проєкціювальна

При побудові лінії перетину враховується властивість циліндричних і призматичних поверхонь проєкціюватися,

відповідно, у криву й ламану лінію, коли твірні циліндра або ребра призми перпендикулярні до площини проєкцій. У цьому випадку проєкції будь-якої лінії, що знаходиться на проєкціювальній поверхні, збігаються з виродженою проєкцією цієї поверхні.

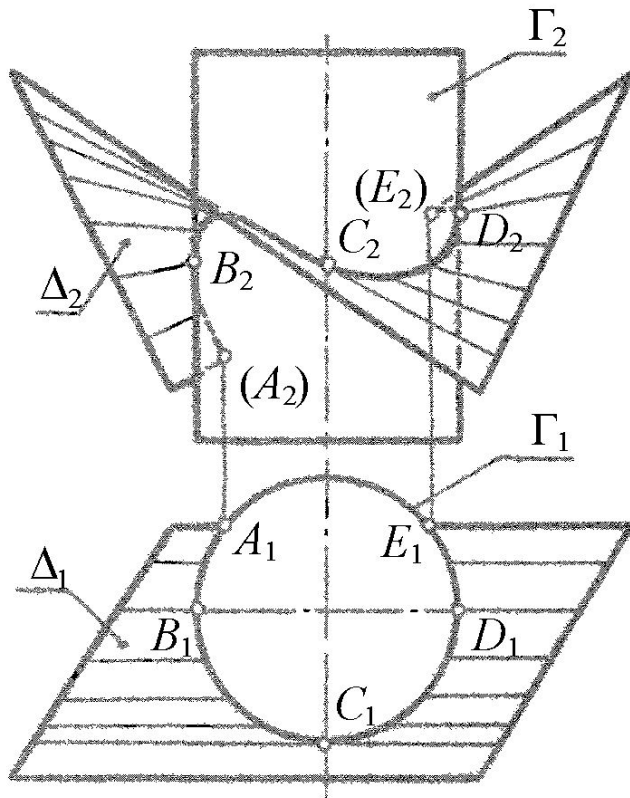


Рис. 10.2

На рис. 10.2 задані дві поверхні, які взаємно перетинаються: коса площина Δ і проєкціювальний циліндр обертання Γ . Лінія їх перетину одночасно належить обом поверхням. Отже, можна стверджувати, що одна із проєкцій цієї лінії перетину вже є на комплексному кресленні (вона збігається з виродженою проєкцією проєкціювальної поверхні).

Оскільки просторова крива $ABCDE$ одночасно належить поверхні косої площини Δ , задача зводиться до побудови її фронтальної проєкції $A_2B_2C_2D_2E_2$, для чого застосовуються лінії каркаса цієї поверхні. Нагадаємо, що каркасом косої площини є сімейство прямих ліній, у даному випадку паралельних площині паралелізму Π_2 , тобто є сімейством фронталей.

Спочатку будують опорні точки A, E, C . До опорних також належать точки B і D . Інші є проміжними. Отримані проєкції точок з'єднують за допомогою лекала плавною кривою лінією й визначають її видимість.

Спочатку будують опорні точки A, E, C . До опорних також належать точки B і D . Інші є проміжними. Отримані проєкції точок з'єднують за допомогою лекала плавною кривою лінією й визначають її видимість.

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

На рис. 10.3 і 10.4 зображені поверхні сфери Θ і проекціювального циліндра Λ , які взаємно перетинаються. Оскільки одна з проекцій лінії їх перетину на кресленні присутня (вона збігається з виродженою проекцією циліндра – колом Λ_1), то шукану криву можна розглядати як таку, що належить поверхні сфери Θ . Відсутню проекцію цієї кривої (у даному випадку фронтальну) будують за допомогою ліній каркаса сфери.

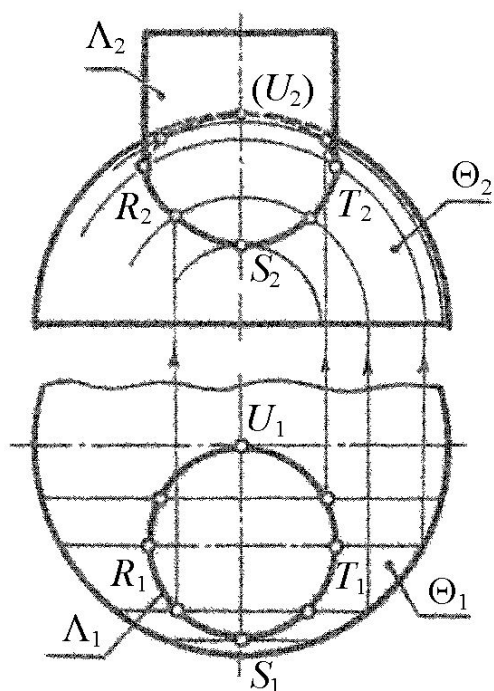


Рис. 10.3

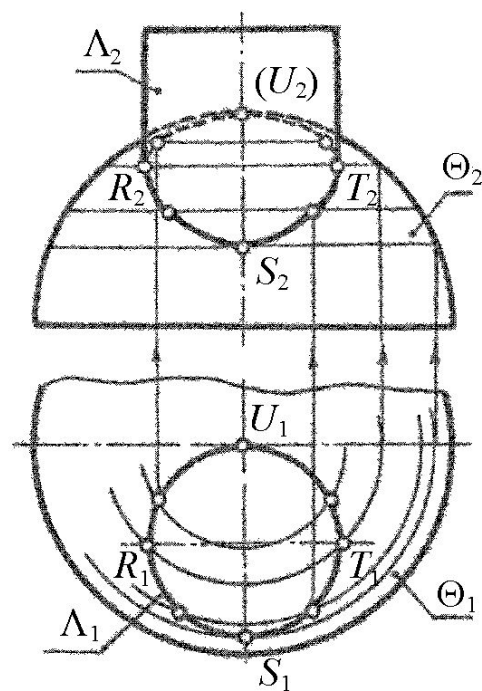


Рис. 10.4

На рис. 10.3 використано сімейство кіл, паралельних фронтальній площині проекцій Π_2 , а на рис. 10.4 – горизонтальній площині проекцій Π_1 . Точки R, S, T, U лінії перетину є опорними: U – найвища (вона знаходиться на головному меридіані), S – найнижча, R і T – крайні бічні (вони знаходяться на бічних твірних циліндра й одночасно є межею видимості кривої). Інші точки – проміжні.

Розглянемо ще один приклад побудови лінії перетину півсфери Λ з циліндричною проекціювальною поверхнею Θ , вісь

якої перпендикулярна до площини проєкцій Π_2 (рис. 10.5). Оскільки поверхня циліндра є проєкціовальною, то фронтальна проєкція лінії перетину q_2 збігається з виродженою проєкцією Θ_2 циліндра. Побудуємо горизонтальну проєкцію q_1 лінії перетину як лінію, що належить поверхні сфери Λ по окремих точках.

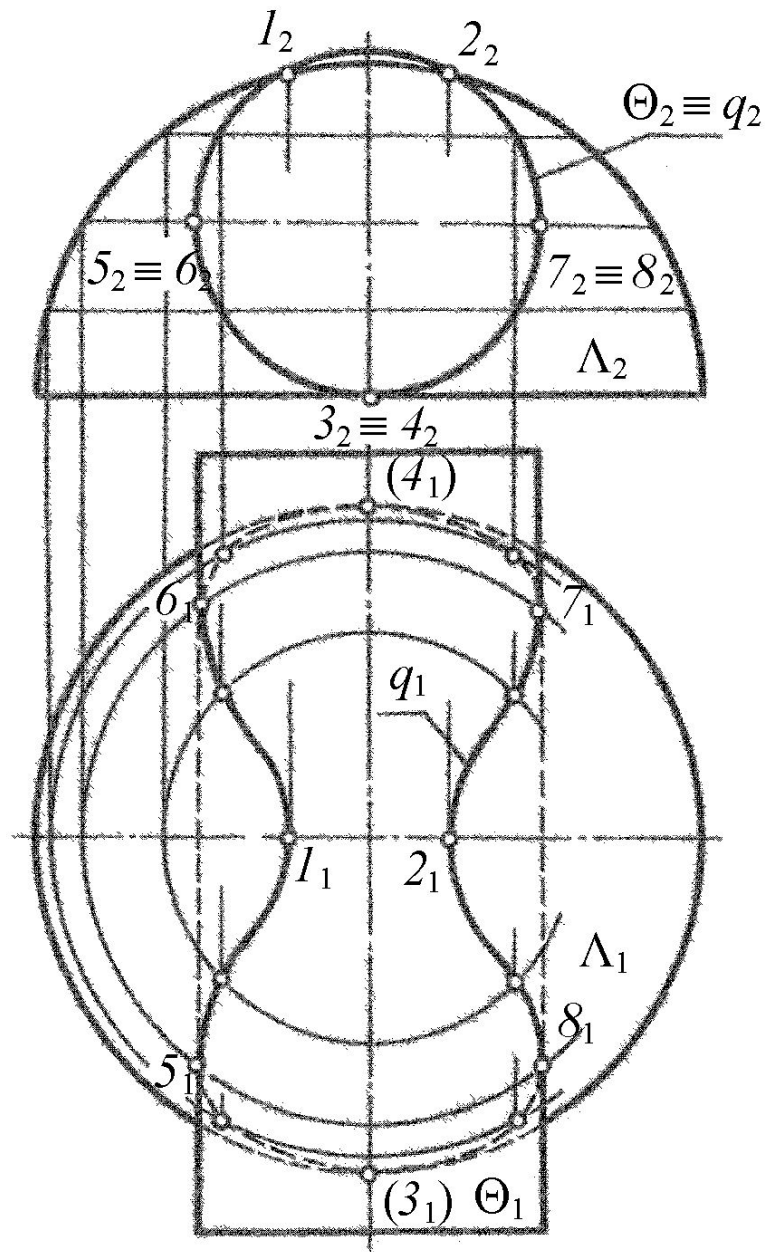


Рис. 10.5

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

Опорними точками лінії перетину q є точки 1 і 2, які знаходяться на головному меридіані сфери; точки 3 і 4, які знаходяться на екваторі сфери; точки 5–8, які розташовані на крайніх бічних твірних циліндра. Ці точки знаходяться на межі видимості лінії перетину.

Точки 5–8 та інші проміжні точки лінії перетину будують за допомогою ліній каркаса сфери – сімейства кіл-паралелей. З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією, отримують проекцію q_1 шуканої лінії перетину q поверхонь сфери й циліндра.

Оскільки лінія перетину має форму єдиного замкнутого контуру, тобто не розпадається на окремі ділянки, то такий перетин називається *неповним прониканням* або *врізанням*.

На рис. 10.6 поверхні, що розглядаються, перетинаються таким чином, що лінія їх взаємного перетину розпадається на два окремих контури. Такий взаємоперетин поверхонь називається *повним прониканням*.

Якщо тепер із комплексних креслень, показаних на рис. 10.5 і 10.6, вилучити поверхню циліндра обертання, то поверхню сфери, що залишилася, називають або відсіченою поверхнею (рис. 10.7,*а*), або поверхнею з крізним отвором (рис. 10.7,*б*).

Коли циліндрична поверхня обертання займає положення, не перпендикулярне до якоїсь із площин проекцій, тобто поверхня не є проекціовальною, виникає необхідність у перетворенні

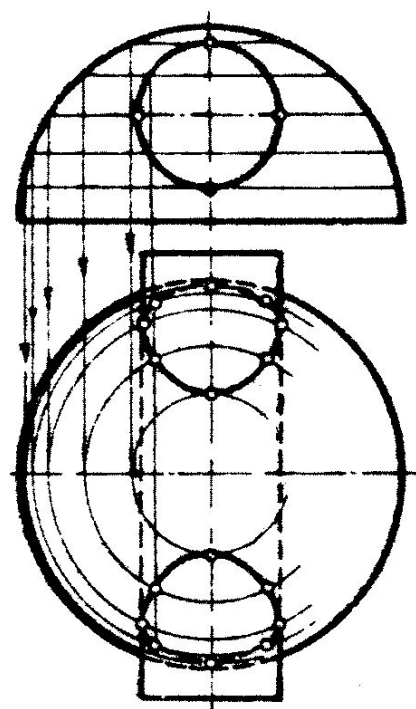


Рис. 10.6

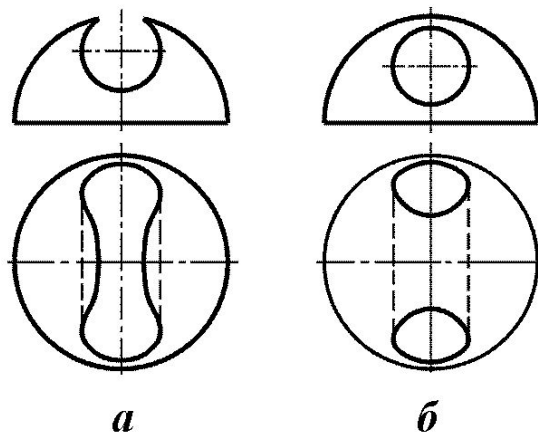


Рис. 10.7

комплексного креслення. На рис. 10.8 зображені відсіки поверхонь тора Θ й циліндра Σ , які взаємно перетинаються. Для побудови лінії їх взаємного перетину креслення перетворюють таким чином, щоб циліндрична поверхня зайняла проєкціувальне положення.

Обидва відсіки проєкціюють на нову площину проєкцій Π_4 , уведену замість площини Π_2 , перпендикулярно до твірних циліндра. Отримують нове комплексне креслення, з якого й починають розв'язування задачі побудови лінії перетину. Точки A, B, C, D є опорними, інші – проміжними. Використовуючи каркас поверхні тора (доцільно брати сімейство кіл-паралелей поверхні тора), будують горизонтальну проєкцію $A_1B_1C_1D_1$ шуканої лінії взаємного перетину відсіків тора й циліндра обертання.

Фронтальну проєкцію цієї кривої можна побудувати або за допомогою тих же ліній каркаса, або шляхом перенесення висот кожної точки з нової проєкції (висота l для точок B і D на рис. 10.8). З'єднавши побудовані проєкції точок плавною кривою лінією й визначивши її видимість, отримують шукану лінію перетину заданих відсіків поверхонь.

Слід зазначити, що при побудові лінії перетину поверхню еліптичного циліндра перетворювати на поверхню проєкціувальну не рекомендується, оскільки виродженою проєкцією такої поверхні є складна графічна крива – еліпс, для побудови якого треба визначити певну кількість точок.

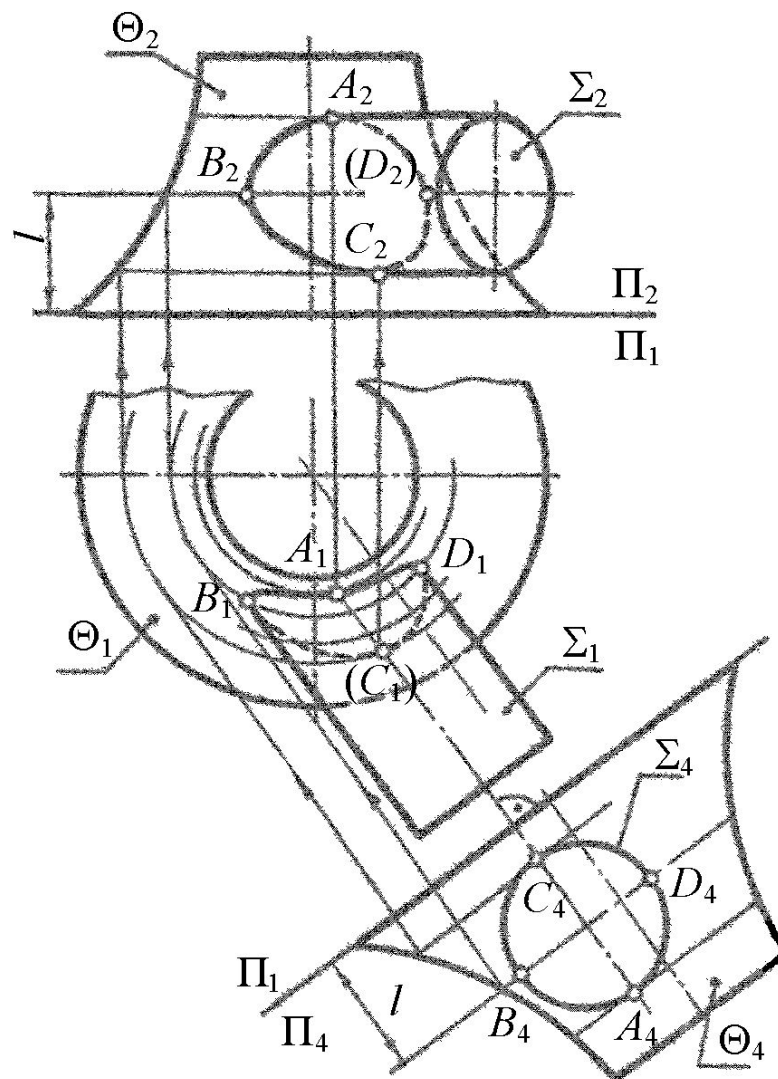


Рис. 10.8

10.3. Спосіб допоміжних січних площин-посередників

У тих випадках, коли обидві поверхні, що взаємно перетинаються, не є проєкціювальними і не можуть бути такими (сфера, конус, тор і т. п.), для побудови лінії їх перетину користуються допоміжними січними площинами-посередниками. Спосіб базується на застосуванні таких допоміжних площин-посередників, які перетинають обидві поверхні по простих

графічних лініях – прямих або колах. Часто вибирають ті площини-посередники, що мають вигляд площин рівня.

На рис. 10.9 задані конічна поверхня обертання Ω й сфера Σ . Необхідно побудувати лінію їх взаємного перетину з урахуванням видимості.

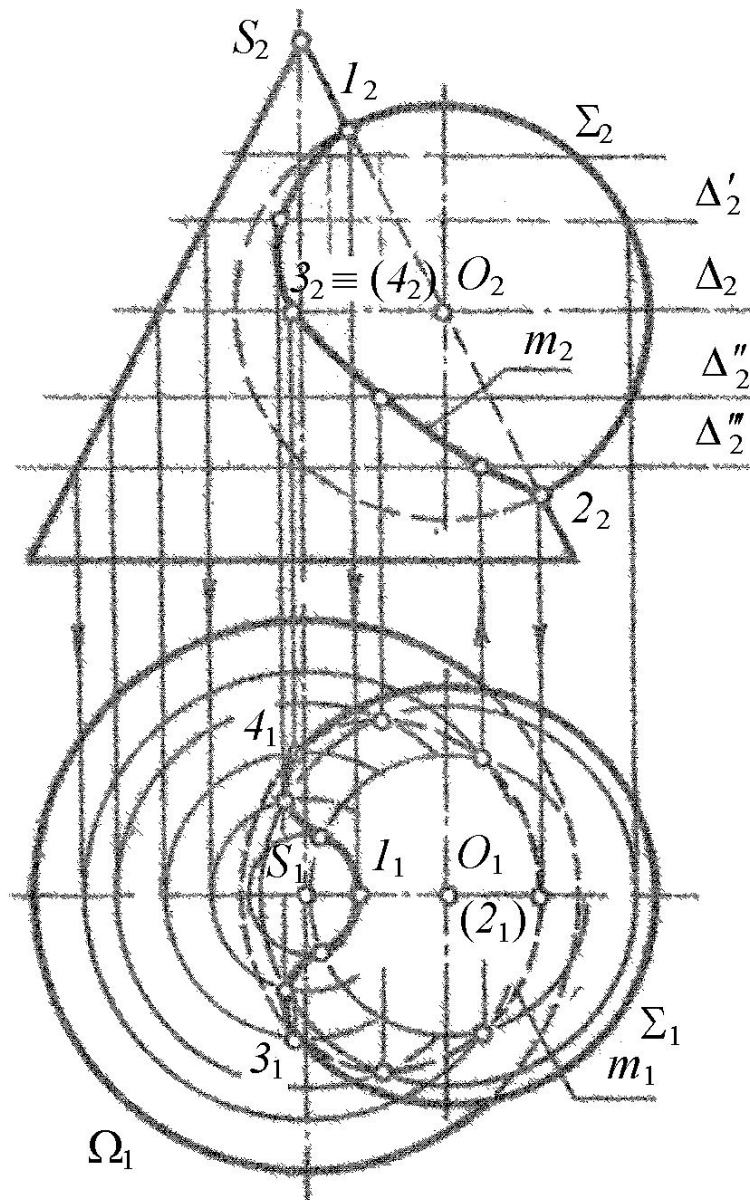


Рис. 10.9

Опорними точками кривої перетину m є найвища точка I , найнижча точка 2 , а також точки 3 і 4 , які знаходяться на ек-

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

ваторі сфери Σ . Ці точки відділяють видиму й невидиму ділянки лінії перетину.

Точки 3 і 4, а також усі проміжні точки лінії перетину m будуються за допомогою площин-посередників. Найбільш зручними при розв'язуванні цієї задачі є горизонтальні площини-посередники. Вони перетинають обидві поверхні по колах-паралелях.

Площина-посередник Δ , проведена через центр сфери O , перетинає її по екватору, а поверхню конуса – по колу. При взаємному перетині ці кола визначають дві точки 3 і 4, які належать лінії перетину поверхонь.

Аналогічно визначаються всі проміжні точки (за допомогою площин-посередників Δ' , Δ'' , Δ''' , ...). З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією m , отримують шукану лінію перетину заданих конічної й сферичної поверхонь. Після цього визначається видимість кривої лінії m .

На рис. 10.10 показано побудову лінії перетину поверхонь конуса обертання Λ і еліптичного циліндра Ψ .

Вище зазначалося, що перетворювати еліптичний циліндр на проєкціювальний не має сенсу, оскільки таке перетворення тільки ускладнює розв'язування задачі. Тому для побудови лінії перетину цих поверхонь доцільно застосувати спосіб допоміжних січних площин-посередників. Більш зручними у цьому випадку є горизонтальні площини рівня. Так, площина Φ перетинає поверхню конуса обертання по колу m , а еліптичний циліндр – по твірних t і k . Ці лінії знаходяться в одній і тій же площині Φ і перетинаються між собою в точках 1 і 2, які належать лінії перетину. Це проміжні точки. Опорні точки кривої лінії перетину будують за допомогою площин рівня Ω , Σ , T . Дотичні до еліптичного циліндра площини рівня Ω і T визначають найвищу й найнижчу точки A і C лінії перетину. Допоміжна січна площина Σ проведена через вісь еліптичного

циліндра. Вона дає можливість знайти опорні точки B і D . Побудувавши достатню кількість проміжних точок і з'єднавши їх плавною кривою лінією з урахуванням видимості, отримують шукану лінію перетину заданих відсіків поверхонь.

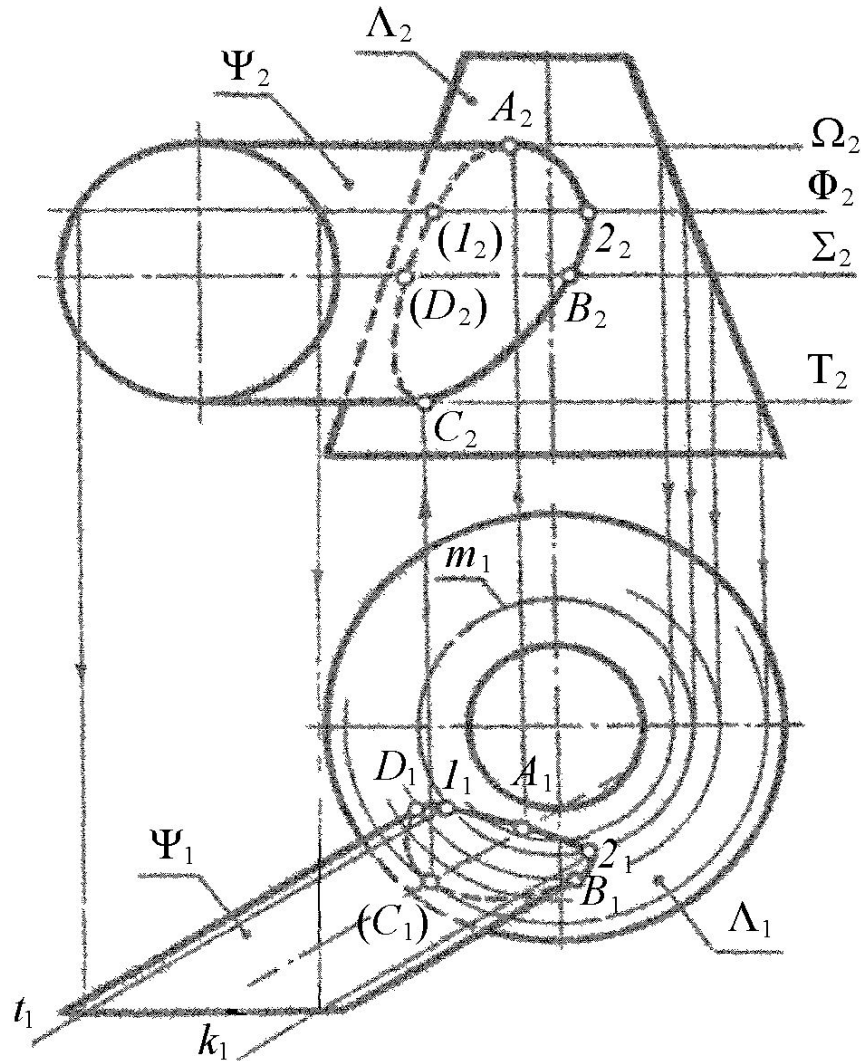


Рис. 10.10

Розглянемо ще один приклад побудови лінії перетину поверхонь із застосуванням способу допоміжних січних площин-посередників. На рис. 10.11 подані дві поверхні обертання – сфера Δ і конус Γ . Для побудови їх лінії перетину за посередники візьмемо горизонтальні площини рівня, які перетинають обидві поверхні по колах. Так, площина P , пе-

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

ретиною сферу й конус, відповідно, по колах l і n , визначає точки 1 і 2 , які належать шуканій лінії перетину.

Для визначення найвищої і найнижчої опорних точок лінії перетину, між якими будуть проводитися всі проміжні площини-посередники, виконують наступні побудови. Через вісь конуса й центр сфери проводять спільну площину симетрії Ω (Ω_1) (рис. 10.12), яка перетне конус по твірних прямих, а сферу – по колу-меридіану. Ці лінії при взаємному перетині визначають шукані опорні точки – найвищу S і найнижчу R . Для їх побудови треба площину Ω повернути навколо центра сфери до положення фронтальної площини рівня ($\bar{\Omega}_1$). У новому положенні твірні конуса у перетині з головним меридіаном сфери дають найвищу $\bar{S}$ і найнижчу $\bar{R}$ точки. Зворотним поворотом площини Ω в її вихідне положення визначають опорні точки R й S у заданому положенні відсіків поверхонь.

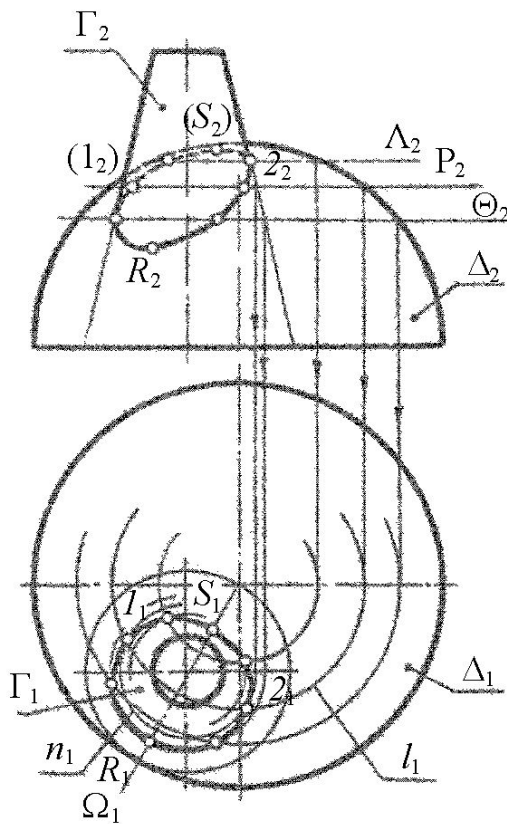


Рис. 10.11

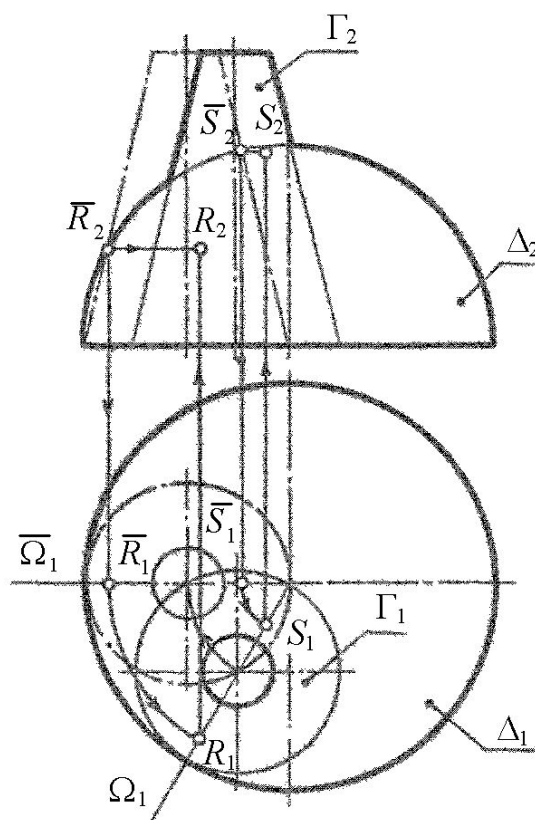


Рис. 10.12

10.4. Спосіб допоміжних січних сфер-посередників

При побудові лінії перетину деяких поверхонь, а також при особливому їх взаємному розташуванні, не завжди раціонально застосовувати допоміжні січні площини-посередники. У певних випадках застосовують спосіб допоміжних січних сфер-посередників.

Так, для побудови лінії перетину двох довільних поверхонь обертання доцільно скористатися властивістю, притаманною цим поверхням. Вона полягає у тому, що дві будь-які співвісні поверхні обертання перетинаються по колах, які проходять через точки перетину меридіанів поверхонь (рис. 10.13).

В окремому випадку, коли одна з поверхонь обертання – сфера, наведена вище, пропозиція може бути сформульована інакше: якщо центр січної сфери знаходиться на осі поверхні обертання, то сфера перетне дану поверхню по колах, число яких дорівнює числу точок перетину головних меридіанів поверхонь (рис. 10.14).

Поверхня сфери може перетинатися по колу не тільки зі співвісною поверхнею обертання, але й з будь-якою іншою поверхнею, яка має сімейство кіл, наприклад, з циліндричною або конічною поверхнями обертання та ін.

В основі способу сфер-посередників використовується властивість сфери, центр якої знаходиться на осі поверхні обертання, перетинати цю поверхню по колах-паралелях.

На рис. 10.15, де показані тільки фронтальні проекції поверхонь, центр O сфери знаходиться на осі i конічної та на осі i' циліндричної поверхонь обертання.

Оскільки вісь обертання i конічної поверхні збігається з віссю обертання сфери, то вони мають спільні кола-паралелі. Такими є кола k і r . Ці кола проєкціюються у відрізки прямих k_2 і r_2 , перпендикулярних до осі i . По довжині вони дорівнюють діаметрам цих кіл.

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

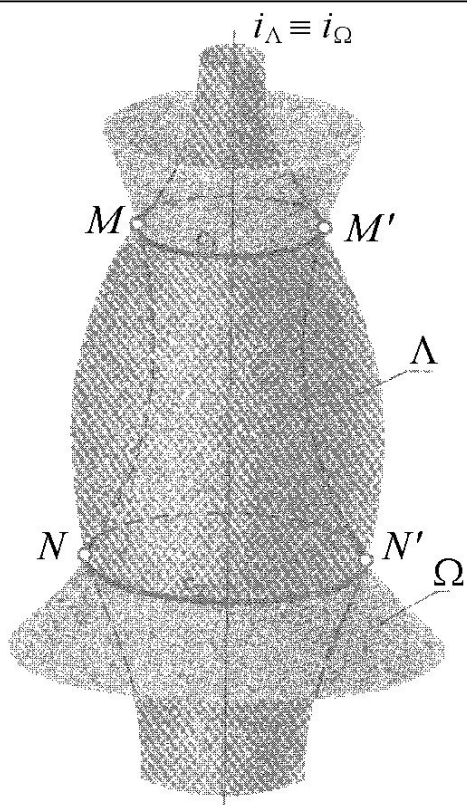


Рис. 10.13

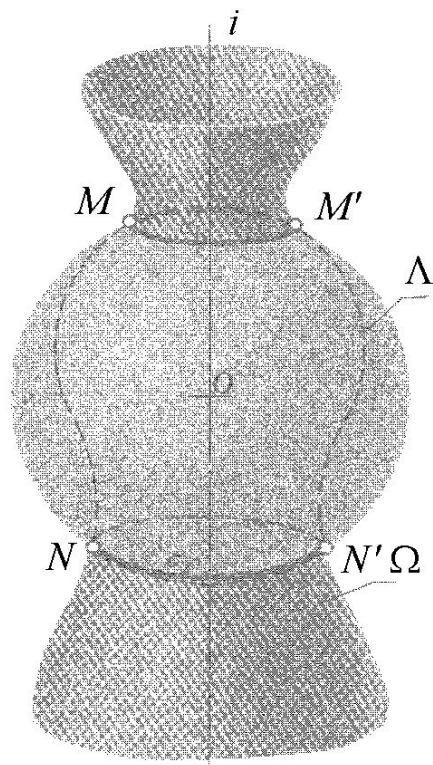


Рис. 10.14

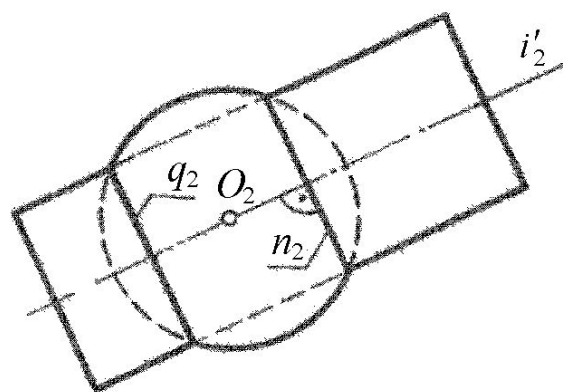
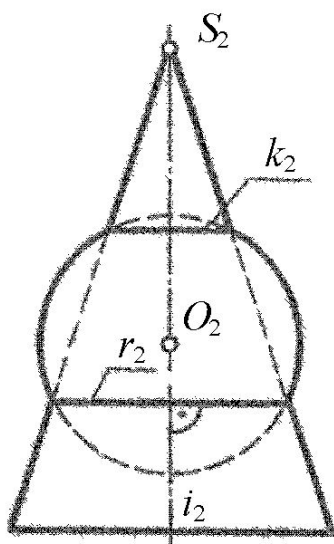


Рис. 10.15

Також по колах q і n сфера перетинає циліндричну поверхню обертання. Проекції цих кіл вироджуються у відрізки прямих q_2 і n_2 , перпендикулярних до осі i' .

Ця властивість сфер використовується при побудові лінії перетину двох поверхонь обертання з осями, що перетинаються. Точка перетину осевих ліній є центром концентричних сфер-посередників.

На рис. 10.16 задані поверхні обертання: конічна T і циліндрична Ψ . Їх вісі обертання i й i' паралельні площини проєкції Π_2 і перетинаються в точці O . Необхідно побудувати лінію перетину цих поверхонь.

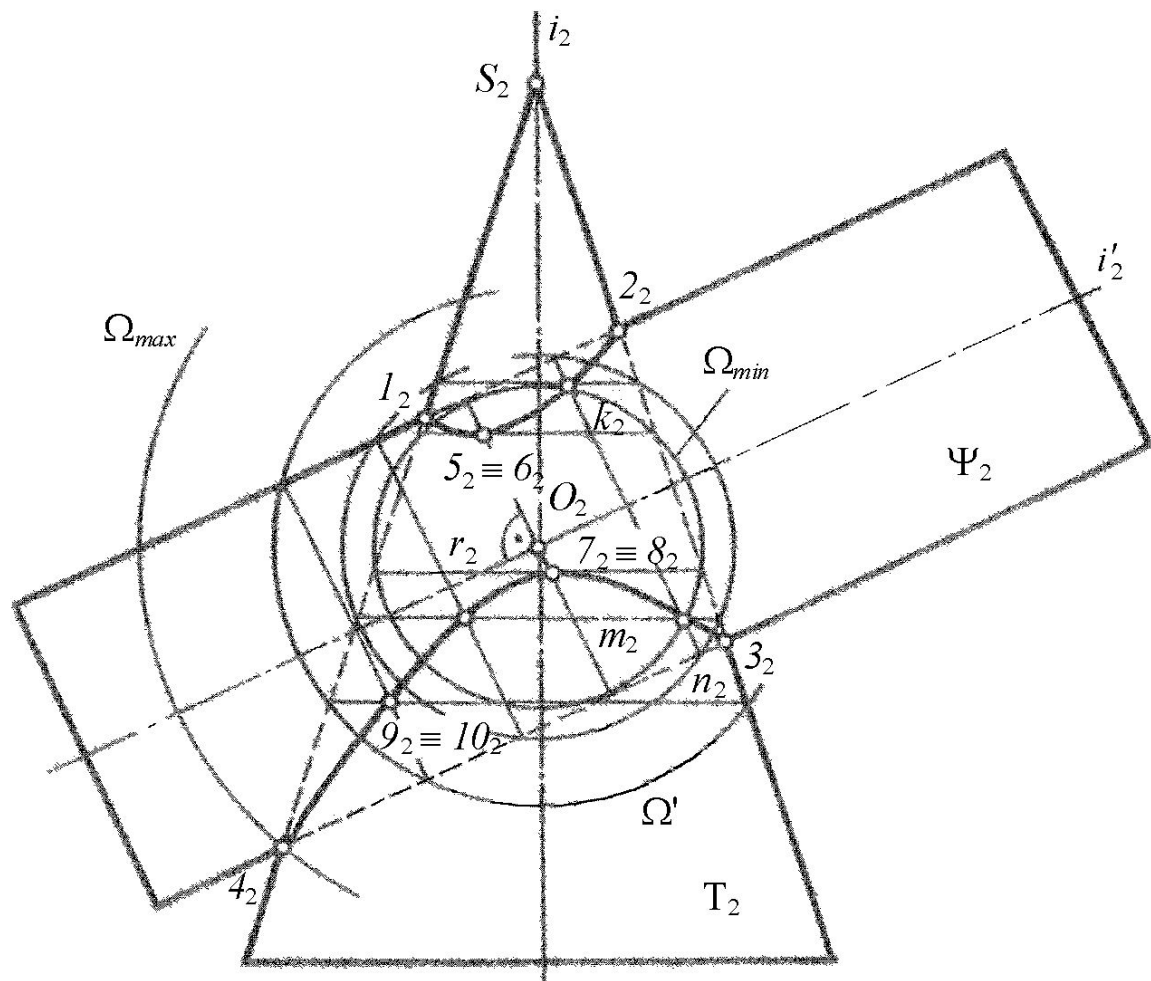


Рис. 10.16

Специфіка способу сфер-посередників дозволяє розв'язувати цю задачу в одній площині проєкцій. Перш за все визначають опорні точки лінії перетину. Такими будуть точки $1, 2,$

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

3 і 4, в яких перетинаються проекції контурів поверхонь T і Ψ . Потім установлюють радіуси мінімальної й максимальної сфер-посередників (всі проміжні сфери знаходяться всередині цього сферичного кільця).

Сферою мінімального радіуса є та, що торкається однієї поверхні, а іншу перетинає. У нашому випадку це сфера $\Omega_{\min}$. Вона торкається поверхні циліндра Ψ по колу m , а поверхню конуса обертання T перетинає по колах k і r .

Оскільки ці три кола m , k і r належать одній і тій же сферичній поверхні $\Omega_{\min}$, то вони перетинаються між собою в чотирьох точках 5–8. Ці точки також є опорними.

Сферою максимального радіуса є сфера $\Omega_{\max}$, яка проходить через найбільш віддалену опорну точку – точку 4.

Для побудови проміжних точок лінії перетину проводять кілька січних сфер-посередників між сферами $\Omega_{\min}$ й $\Omega_{\max}$. Так, проміжна сфера-посередник Ω' визначає точки 9 і 10.

З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією, отримують лінію перетину заданих поверхонь T і Ψ . Лінія перетину є просторовою кривою четвертого порядку. Вона складається з двох окремих замкнених контурів. Такий перетин називається повним.

За необхідності можна побудувати й горизонтальну проекцію поверхонь, що взаємно перетинаються. Горизонтальну проекцію лінії перетину доцільно будувати із застосуванням ліній безперервного каркаса кінчної поверхні T – тобто кіл-паралелей (у горизонтальній проекції вони зображуються у натуральну величину).

Розв'язування ще однієї подібної задачі показано на рис. 10.17, де побудовано лінію перетину циліндричної поверхні Σ з поверхнею обертання Θ довільного виду. Вісі поверхонь паралельні площині проекцій P_2 і перетинаються в точці O . Хід розв'язування задачі такий же, як і на рис. 10.16.

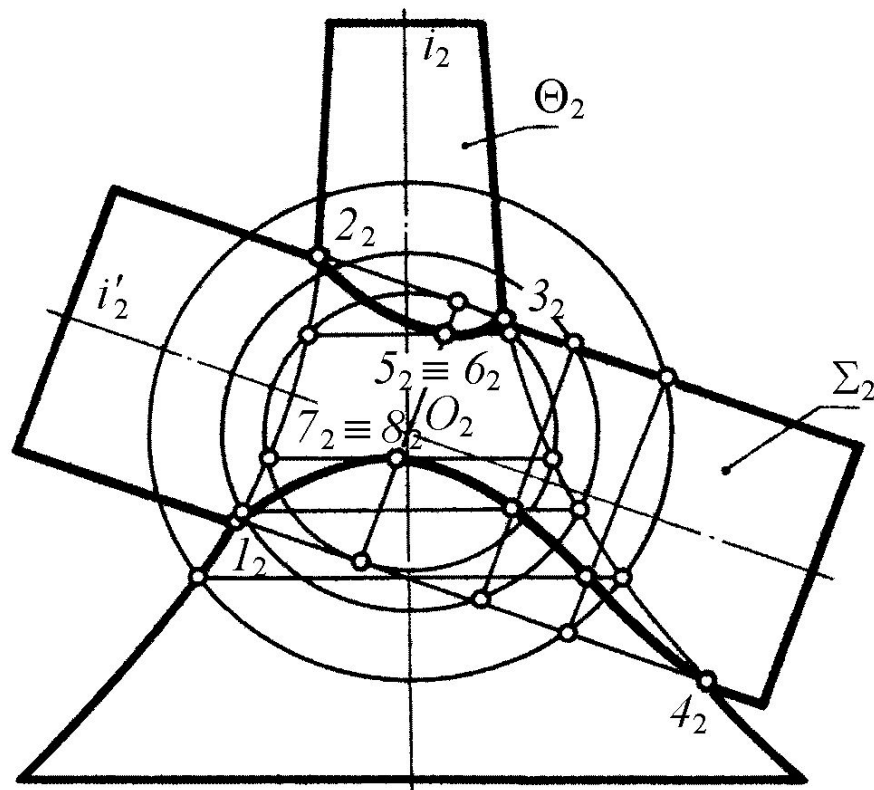


Рис. 10.17

Розглянемо розв'язування задачі побудови лінії взаємного перетину поверхні тора Γ і сфери Φ , осі яких визначають площину, паралельну фронтальній площині проєкцій, тобто фронтальну площину рівня (рис. 10.18).

Оскільки віссю сферичної поверхні може бути будь-яка пряма, що проходить через її центр, то за центр допоміжних сфер-посередників можна прийняти довільну точку на осі поверхні обертання Γ . Тому графічне розв'язання задачі з визначення лінії перетину заданих поверхонь виконується у такий спосіб.

Беруть точку O_2 за центр кіл – фронтальних проєкцій допоміжних січних сфер. Проводять фронтальну проєкцію допоміжної сфери-посередника Λ . Визначають відрізки $1_2 2_2$ і $3_2 4_2$ – фронтальні проєкції кіл, по яких сфера-посередник Λ перетинає задані поверхні Γ і Φ . Точки 5_2 і 6_2 перетину проєкцій кіл (відрізків $1_2 2_2$ і $3_2 4_2$) належать шуканій лінії пере-

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

тину поверхонь. Фронтальні проекції опорних точок A_2 і B_2 визначаються перетином фронтальних проекцій головних меридіанів поверхонь Γ і Φ . Горизонтальні проекції лінії перетину будують за допомогою паралелей поверхні Φ .

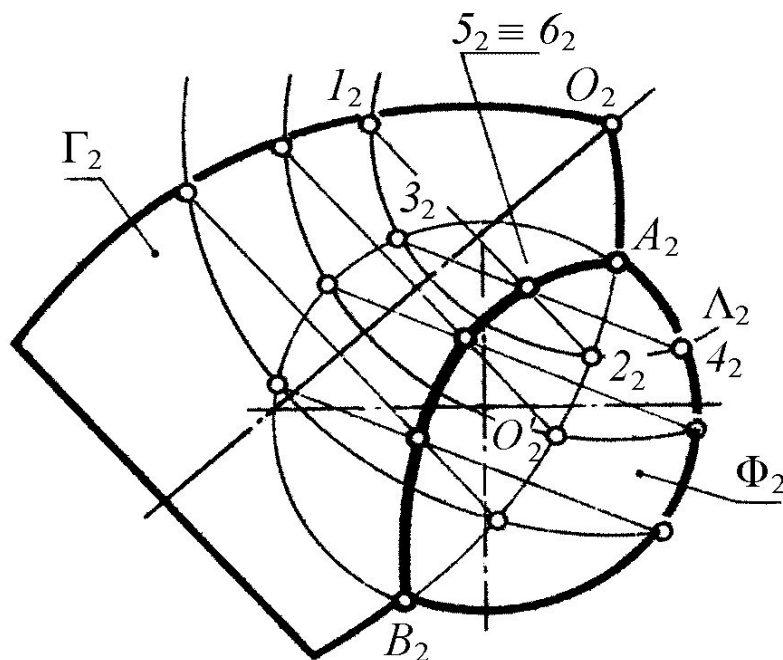


Рис. 10.18

Якщо вісі двох поверхонь обертання, що перетинаються, знаходяться не в площині рівня, а в площині проєкціювальній (рис. 10.19), то для побудови лінії перетину способом сфер-посередників комплексне креслення необхідно перетворити. Нову площину проєкцій Π_4 доцільно провести паралельно осі i заданої конічної поверхні. Поставлену задачу розв'язують на новому комплексному кресленні методом сфер-посередників. Сфери-посередники проводять із точки O_4 перетину осьових ліній i і i' . Розв'язування задачі завершують побудовою фронтальної проєкції лінії перетину заданих поверхонь, для чого через проєкції точок лінії перетину на площині проєкцій Π_1 проводять вертикальні лінії сполучення, на яких відкладають відстані від проєкцій цих точок на площині проєкцій Π_4 до осьової лінії, що розмежує площини проєкцій Π_1 і Π_4 .

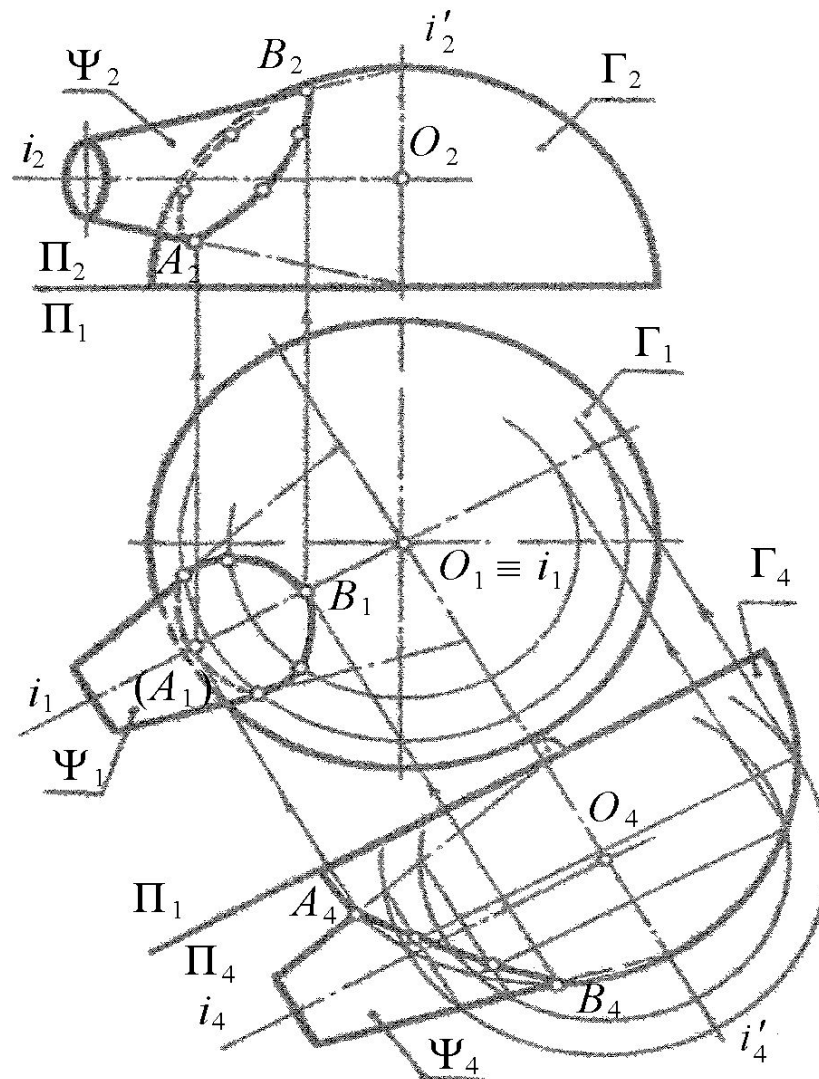


Рис. 10.19

10.5. Окремий випадок взаємного перетину поверхонь обертання другого порядку

Відомо, що порядок кривої лінії перетину двох поверхонь дорівнює добутку порядків поверхонь, тому дві поверхні другого порядку завжди перетинаються по кривій четвертого порядку. За певних умов ця крива розпадається на кілька ліній більш низького порядку. При цьому сума порядків ліній, на які розпадається алгебраїчна крива, дорівнює порядку самої лінії. Зокрема, крива четвертого порядку може розпадатися на дві криві другого порядку.

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

Умови, за яких крива четвертого порядку розпадається на дві криві другого порядку, можуть бути сформульовані теоремою Гаспара Монжа:

Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку або вписані в неї, то лінія їх перетину розпадається на дві криві другого порядку, площини яких проходять через прями, що з'єднують точки перетину ліній².

На рис. 10.20 конічна і циліндрична поверхні обертання описані навколо однієї і тієї ж сфери Δ . Необхідно побудувати лінію їх перетину.

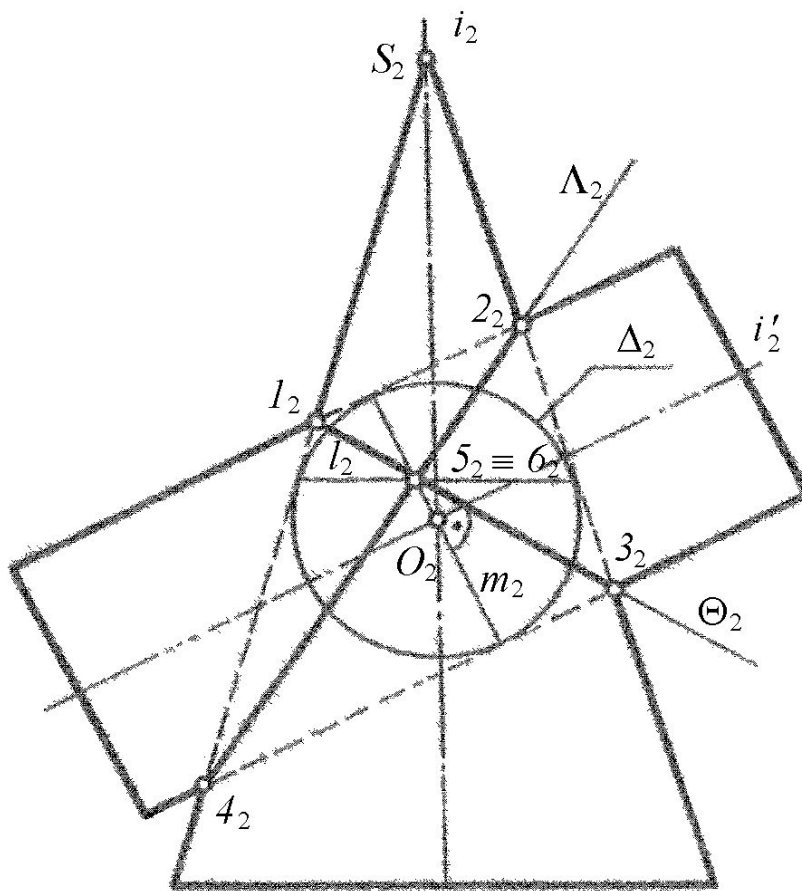


Рис. 10.20

Конічна поверхня торкається сфери Δ по колу l , а циліндрична – по колу m . Обидва кола знаходяться на одній і тій же сфері та перетинаються між собою в точках 5 і 6. Ці точки у нарисній геометрії називаються точками подвійного дотику поверхонь.

² Цю теорему вперше довів Гаспар Монж.

Отже, точки 1–6 належать до опорних точок. Для побудови проміжних точок шуканої лінії перетину проводять декілька сфер-посередників із центра O (на кресленні ці сфери не показані).

У результаті проекції всіх побудованих точок розташуються на двох прямих: 1–3 і 2–4. Це означає, що просторова крива лінія перетину четвертого порядку розпалася на дві плоскі криві другого порядку, тобто на два еліпси, один із яких належить площині Λ , а іншій – площині Θ .

На рис. 10.21 відсіки поверхонь конуса Σ і циліндра обертання Θ описані навколо сфери Δ , яка торкається поверхні конуса по колу t , а поверхні циліндра – по колу p . Згідно з записаною вище теоремою Монжа просторова крива лінія перетину поверхонь також розпадається на дві плоскі криві – еліпси. Побудова проекцій цих кривих виконується за методикою, описаною вище. При взаємному перетині проекцій кіл t і p визначаються точки 3 і 4, які належать шуканій лінії перетину. На рисунку показані проекції поверхонь і ліній перетину на горизонтальну площину проекцій, а саме: лінії перетину проєкціюються на площину Π_1 у вигляді двох еліпсів, окремі ділянки яких є видимими, а решта – невидимими.

Зазначимо, що теорема Монжа набуває широкого застосування при конструюванні трубопроводів, які виготовляються з листового матеріалу.

На рис. 10.22 показано побудову перехідних конічних поверхонь, що з'єднують циліндричні ділянки трубопроводів Θ , Σ і Ω , вісі яких знаходяться в одній фронтальній площині рівня. Якщо вписати в кожен із заданих труб сферу, то сфери, вписані у труби Θ , Σ і Ω циліндричної форми, визначають перехідні конічні поверхні Γ і T , дотичні до цих вписаних сфер. При побудові ліній перетину заданих циліндричних і перехідних конічних поверхонь застосовано теорему Монжа, з якої випливає, що шукані лінії перетину будуть плоскими кривими. Фронтальні проекції цих ліній будуть відрізками прямих A_2C_2 , B_2C_2 , C_2D_2 , E_2F_2 і G_2H_2 , які визначаються точками перетину крайніх твірних поверхонь, що взаємно перетинаються.

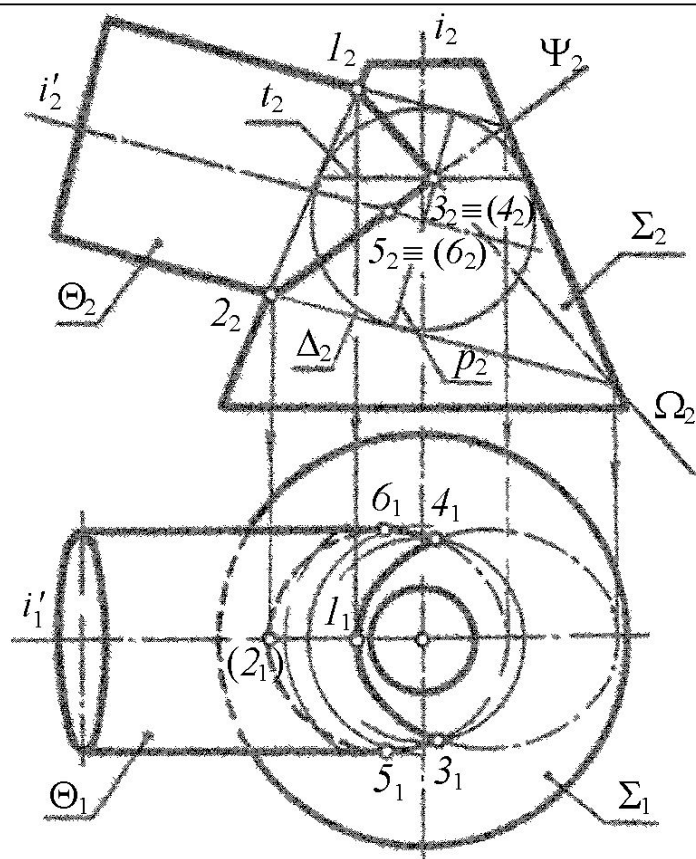


Рис. 10.21

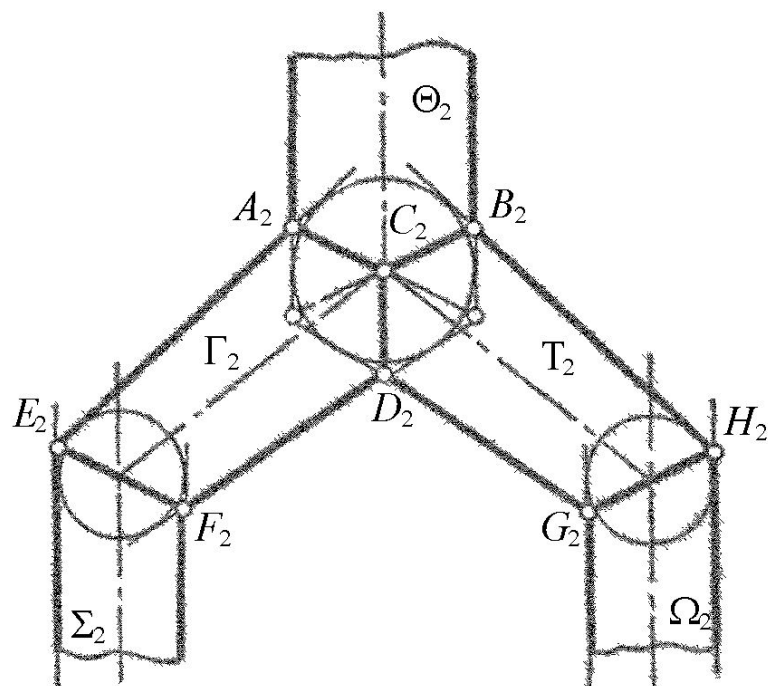


Рис. 10.22

10.6. Перетин кривих поверхонь з багатогранниками

Вище зазначалося, що лінія перетину кривої поверхні з багатогранником складається з деякої сукупності плоских кривих ліній. Це є наслідком того, що кожна грань гранної поверхні є відсіком площини.

Побудова лінії взаємного перетину кривої поверхні з багатогранником суттєво спрощується, коли одна із поверхонь, які перетинаються, є проєкціювальною. У цьому випадку одна проєкція шуканої лінії перетину збігається з проєкцією цієї поверхні і за нею треба знайти другу проєкцію. Для визначення точок, що належать лінії перетину, найчастіше використовують допоміжні січні проєкціювальні площини-посередники.

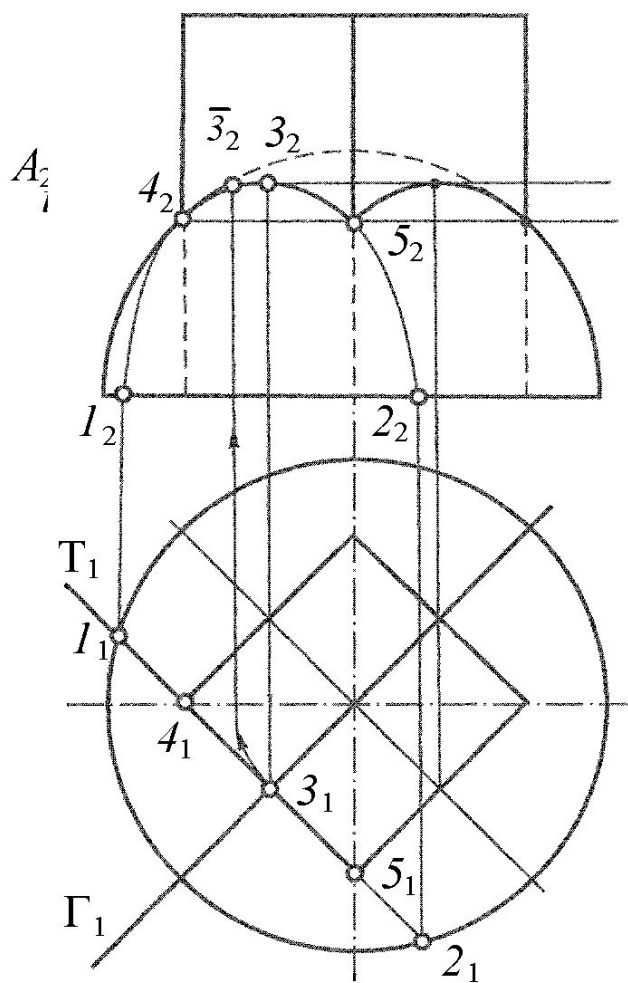


Рис. 10.23

На рис. 10.23 показано побудову лінії перетину півсфери з правильною чотиригранною призмою. На горизонтальній проєкції лінія перетину збігається з проєкцією призми і складається з чотирьох однакових дуг кола. Через ліву передню грань призми проведено горизонтально-проєкціювальну площину T , яка перетинає півсферу по півколу $1-3-2$, що на площині проєкцій Π_2 зобразиться півеліпсом. Точки 1_2 і 2_2 визначаються за вертикальною проєкційною відповідністю. Для знаходження найвищої точки 3 через середину лівої грані проведено горизонтально-

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

проекціювальну площину Γ , яка перетинає півсферу по півколу, а ліву грань призми – по прямій. Повернувши цю площину разом із прямою та кривою на кут 45° до фронтального положення, знайдемо на площині проєкцій Π_2 повернуту проєкцію найвищої точки – $\bar{3}_2$. Повертаємо назад цю точку до перетину з серединною прямою лівої грані. Точка 4 знайдеться на перетині лівого ребра призми з фронтальним меридіаном півсфери на площині проєкцій Π_2 . Інші точки лежатимуть у цій же горизонтальній площині, оскільки поверхні, що перетинаються, мають дві площини симетрії.

На рис. 10.24 побудовано лінію перетину циліндра обертання з проекціювальною призматичною поверхнею, грані якої перпендикулярні до площини проєкцій Π_1 . Опорними є точки A і B – крайні права й ліва точки лінії перетину, C і D , в яких лінія перетину переходить від видимої до невидимої частини, а також E і F – перетину ребра призматичної поверхні з циліндричною. Фронтальні проєкції цих точок, рівною мірою, як і проміжні, будують із застосуванням допоміжних січних площин. Проводять горизонтально-проекціювальну площину Ω ; із циліндричною поверхнею вона перетинається по твірних t і q , а з призматичною – по прямій l . Щоб провести фронтальні проєкції твірних циліндричної поверхні, будують половину нормального перерізу поверхні (проєкцію на площину Π_4) і відмічають на ньому твірні (t_4 або q_4). Відстань e від неї до осі перерізу дорівнює відстані від фронтальної проєкції осі циліндра до фронтальних проєкцій твірних t і q . У перетині фронтальних проєкцій твірних обох поверхонь відмічають точки M_2 і K_2 , які належать фронтальній проєкції лінії їх перетину.

Побудову лінії перетину конуса обертання з чотиригранною призмою, яка знаходиться у фронтально-проекціювальному положенні, показано на рис. 10.25. Дві лінії взаємного перетину складаються з двох дуг кіл радіусів R' і R'' та сегментів гіперболи, по яких профільні грані призми перетинають конус. Проведено дві горизонтальні січні площини Σ та Ω , що

визначили радіуси кіл. Для знаходження гіпербол, які лежать у профільних площинах рівня, побудовано профільну проекцію поверхонь, що перетинаються. Через ліву профільну грань призми проведено профільну січну площину рівня Γ , що перетинає поверхню конуса по гіперболі. Ніжні точки гіперболи 1 та 2 лежать на перетині профільної площини з колом основи, а найвища точка 3 визначиться на фронтальній площині проєкцій. Проміжні точки 4–7 знайдуться на перетині площин Σ та Ω з профільною площиною рівня Γ . Отже, дві симетричні лінії взаємного перетину складаються з двох дуг горизонтальних кіл та сегментів гіпербол, які лежать у профільних площинах рівня.

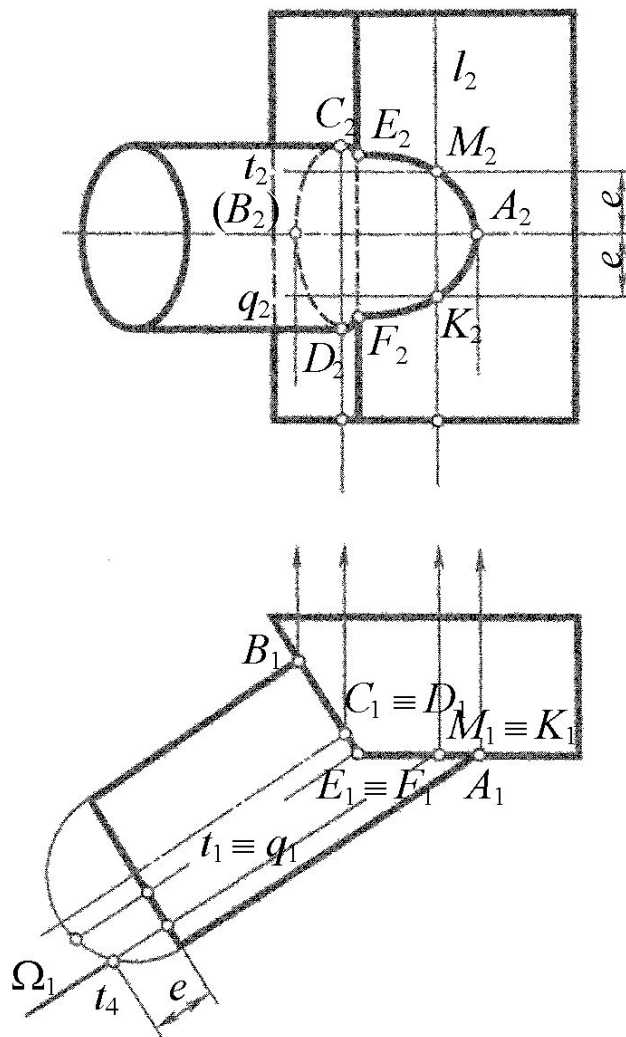


Рис. 10.24

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

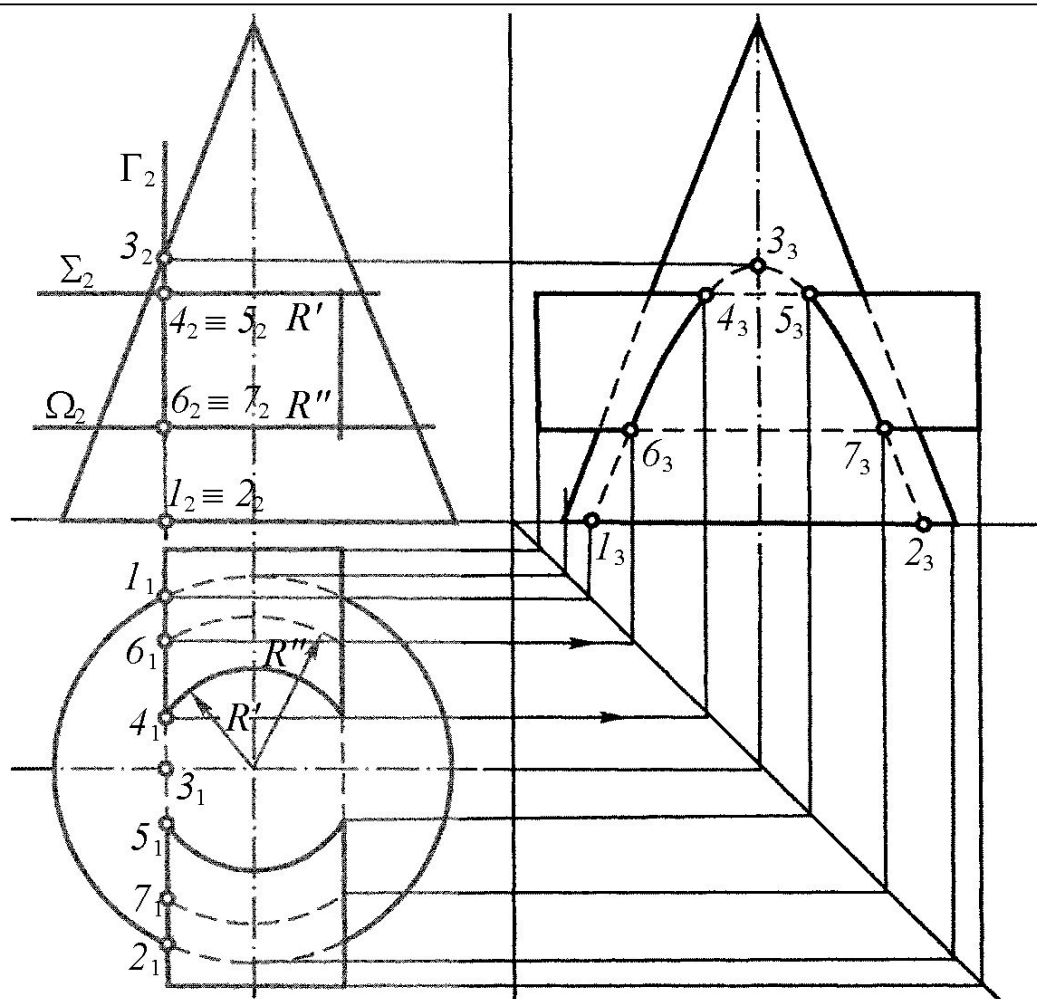


Рис. 10.25

10.7. Приклади побудови ліній перетину двох поверхонь

На завершення розділу розглянемо кілька прикладів побудови лінії перетину двох поверхонь, які за тих чи інших ознак можуть бути віднесені до вище розглянутих підходів до побудови кривої перетину поверхонь, але ці приклади складають певний інтерес і можуть бути застосовані при виконанні завдань з цієї тематики.

Так, на рис. 10.26 побудовано лінію перетину проєкційовальної циліндричної поверхні з поверхнею конуса обертання. Фронтальна проєкція лінії перетину збігається з виродженою проєкцією циліндра. Для побудови горизонтальної проєкції

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

застосовані горизонтальні січні площини рівня, які з циліндричною поверхнею перетинаються по твірних, а з конічною – по колах-паралелях. Наприклад, площина Ω перетинає конічну поверхню по колу a , циліндричну – по прямих b і c . Коло a з прямою b перетинається у точках A і B , а з прямою c не перетинається. Точки A і B належать лінії перетину поверхонь. У точках C і D лінія перетину при погляді зверху переходить від видимої частини до невидимої; вони побудовані за допомогою площини Σ . Найвища і найнижча точки (F і E) лінії перетину визначаються за їх фронтальною проекцією, яка відома.

У випадку, поданому на рис. 10.27, точки для фронтальних проекцій, по яких похилий циліндр перетинає поверхню циліндра обертання з віссю, розташованою вертикально, знайдені, виходячи з положення горизонтальних проекцій цих точок. Треба тільки побудувати фронтальні проекції від-повідних твірних похилого циліндра обертання.

Із точок, відмічених на рис. 10.27, до числа характерних належать точки 1 і 5 – найбільш близькі до осі вертикального циліндра на видимій та невидимій частинах фронтальної проекції правої лінії, 3 і 9 – найбільш і найменш віддалені від площини проекцій Π_1 на обрисових твірних похилого циліндра, 4 і 8 – які відділяють проекцію обрисової твірної вертикального циліндра від проекції кривої. Цим точкам відповідають точки такого ж значення на кривій ліворуч. Зазначимо, що точки 7–10 на площині проекцій Π_1 не позначені.

На рис. 10.28 для побудови проекцій точок B_2 , D_2 і E_2 використані профільні їх проекції B_3 , D_3 і E_3 , які знаходяться на виродженій проекції горизонтально розташованого півциліндра. За цими точками знайдені фронтальні проекції твірних похилого циліндра й проекції B_2 , D_2 і E_2 . Для цього на фронтальній проекції побудовано півкола основи похилого циліндра і збережені відстані l , l' , які беруться на профільній площині проекцій. Маючи ж проекції B_3 , D_3 , E_3 , A_2 , B_2 , C_2 , D_2 , E_2 , можна знайти проекції A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 .

10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

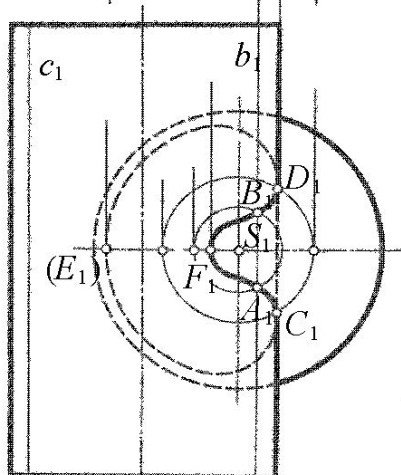
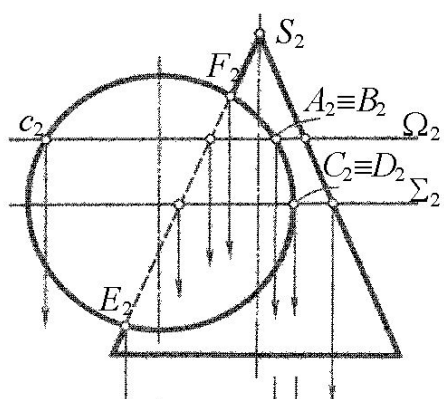


Рис. 10.26

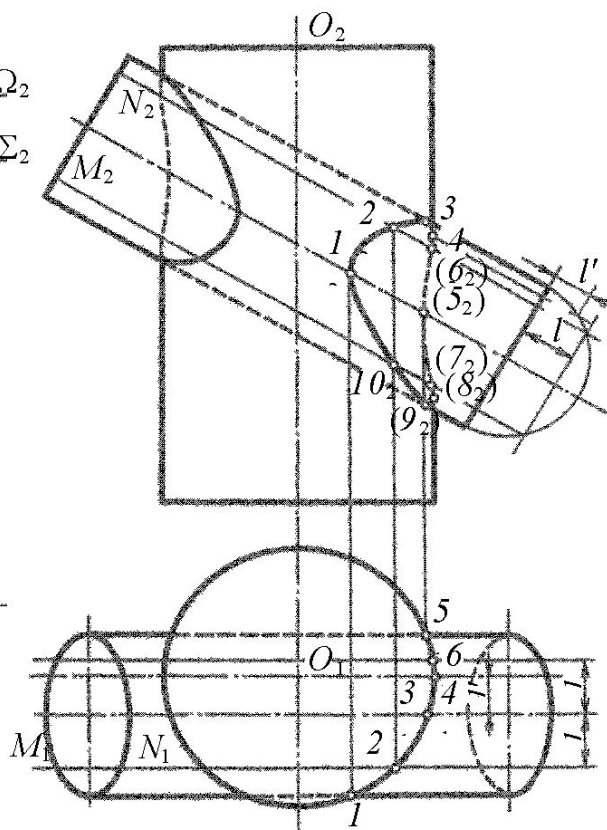


Рис. 10.27

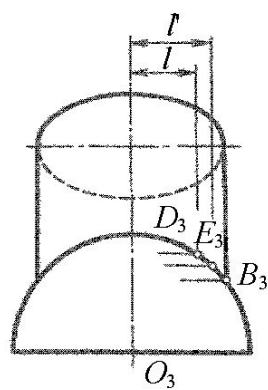
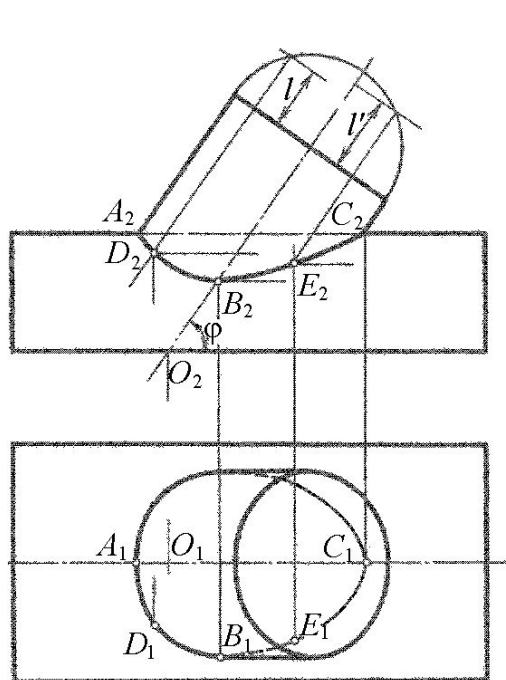


Рис. 10.28

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

Для побудови горизонтальної проекції лінії перетину поверхонь тора й циліндра обертання на рис. 10.29 використані фронтальні проекції точок, оскільки проекція лінії перетину на площині Π_2 вже існує. Це дає можливість побудувати точки іншої (горизонтальної) проекції лінії перетину. У випадку, показаному на рис. 10.29 ліворуч, на горизонтальній проекції отримана кутова точка (точка зламу), що є наслідком дотику проекції циліндра обертання екватора тора.

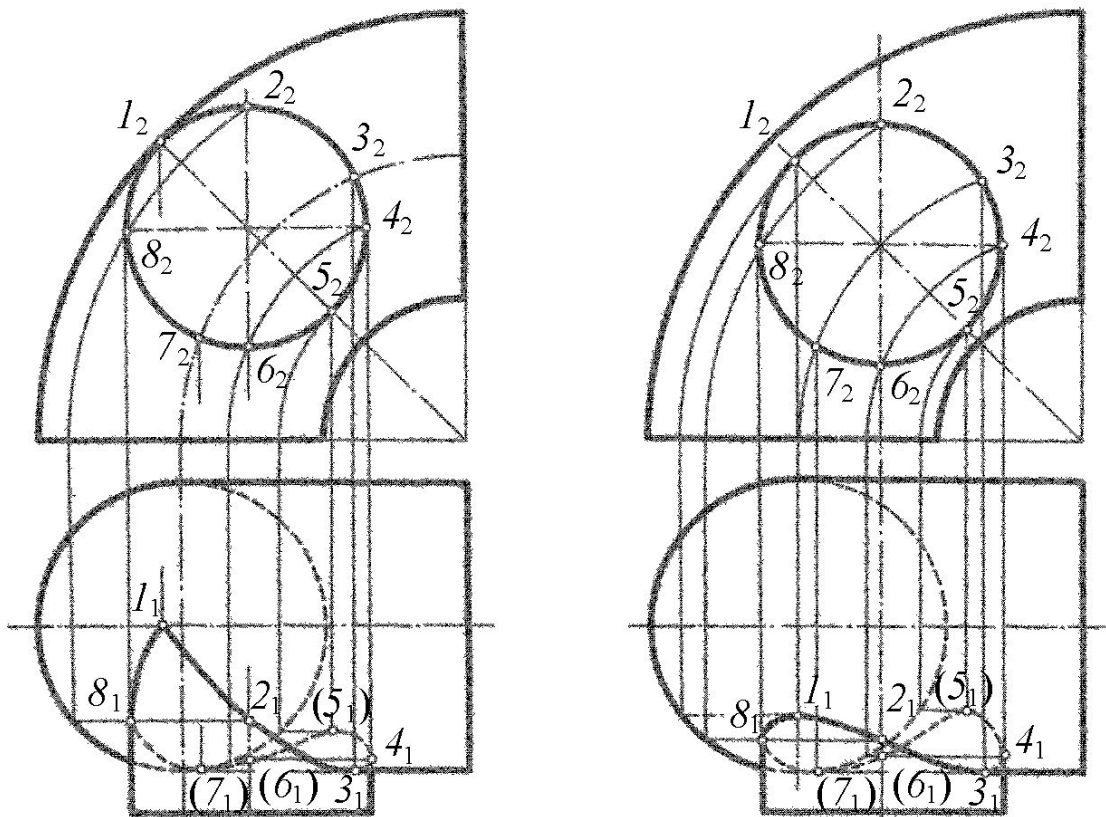


Рис. 10.29

11. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

11.1. Загальні поняття про розгортання поверхонь

Представляючи поверхню у вигляді гнучкої, але нерозтяжної плівки, можна говорити про таке перетворення поверхні, за якого вона сполучається з площиною без складок і розривів. Слід зазначити, що далеко не кожна поверхня дозволяє таке перетворення. Далі буде показано, які типи поверхонь можна сполучити з площиною за допомогою згинання, без розтягання й стиску.

Поверхні, які допускають таке перетворення, називаються *розгортними*, а фігура на площині, на яку поверхня перетворюється, називається *розгорткою* поверхні. На розгортці зберігаються натуральні довжини ліній, площ фігур, кутів між лініями тощо.

Побудова розгорток поверхонь має велике практичне значення при конструюванні різних виробів із листового матеріалу. При цьому необхідно зазначити, що часто доводиться виготовляти з листового матеріалу не тільки розгортні поверхні, але й поверхні, що не розгортаються. У цьому випадку нерозгортну поверхню розбивають на частини, які приблизно замінюють розгортними, а потім будують розгортки цих частин. Більш докладно це буде показано нижче на окремих прикладах.

З'ясуємо тепер, які види поверхонь належать до типу розгортних. Очевидно, що це всі багатогранні поверхні. Розгорткою багатогранника є плоска фігура, отримана послідовним сполученням з однією й тією ж площиною всіх її граней. Тому побудова розгортки багатогранної поверхні зводиться до визначення натурального виду її окремих граней – плоских багатокутників.

Із кривих поверхонь до розгортних належать лінійчасті поверхні, в яких дотична площина торкається поверхні у всіх точках її прямолінійної твірної. Із числа розглянутих у даному посібнику розгортними є циліндричні й конічні поверхні.

Усі інші криві поверхні не розгортаються на площину й тому за необхідності виготовлення цих поверхонь із листового матеріалу їх наближено заміняють розгортними поверхнями.

11.2. Розгортки пірамідальних поверхонь

Побудова розгортки пірамідальних поверхонь призводить до багаторазової побудови натурального виду трикутників, з яких складається задана пірамідальна поверхня. Оскільки цей спосіб призводить до розбивки пірамідальної поверхні на трикутники, то його прийнято називати способом *триангуляції*.

Побудуємо повну розгортку поверхні частини трикутної піраміди $SABC$, розташованої між площиною основи та січною фронтально-проекціовальною площиною Σ (рис. 11.1).

Спочатку будують розгортку бічної поверхні всієї піраміди $SABC$. Оскільки бічні грані піраміди є трикутниками, то для побудови розгортки потрібно побудувати натуральні величини цих трикутників. Для цього попередньо визначають натуральні величини бічних ребер. Це виконують за допомогою метода прямокутних трикутників, у кожному з яких одним катетом є величина, на яку точка S знаходиться вище за точки A , B і C , а другим катетом – відрізок, рівний горизонтальній проекції відповідного бічного ребра.

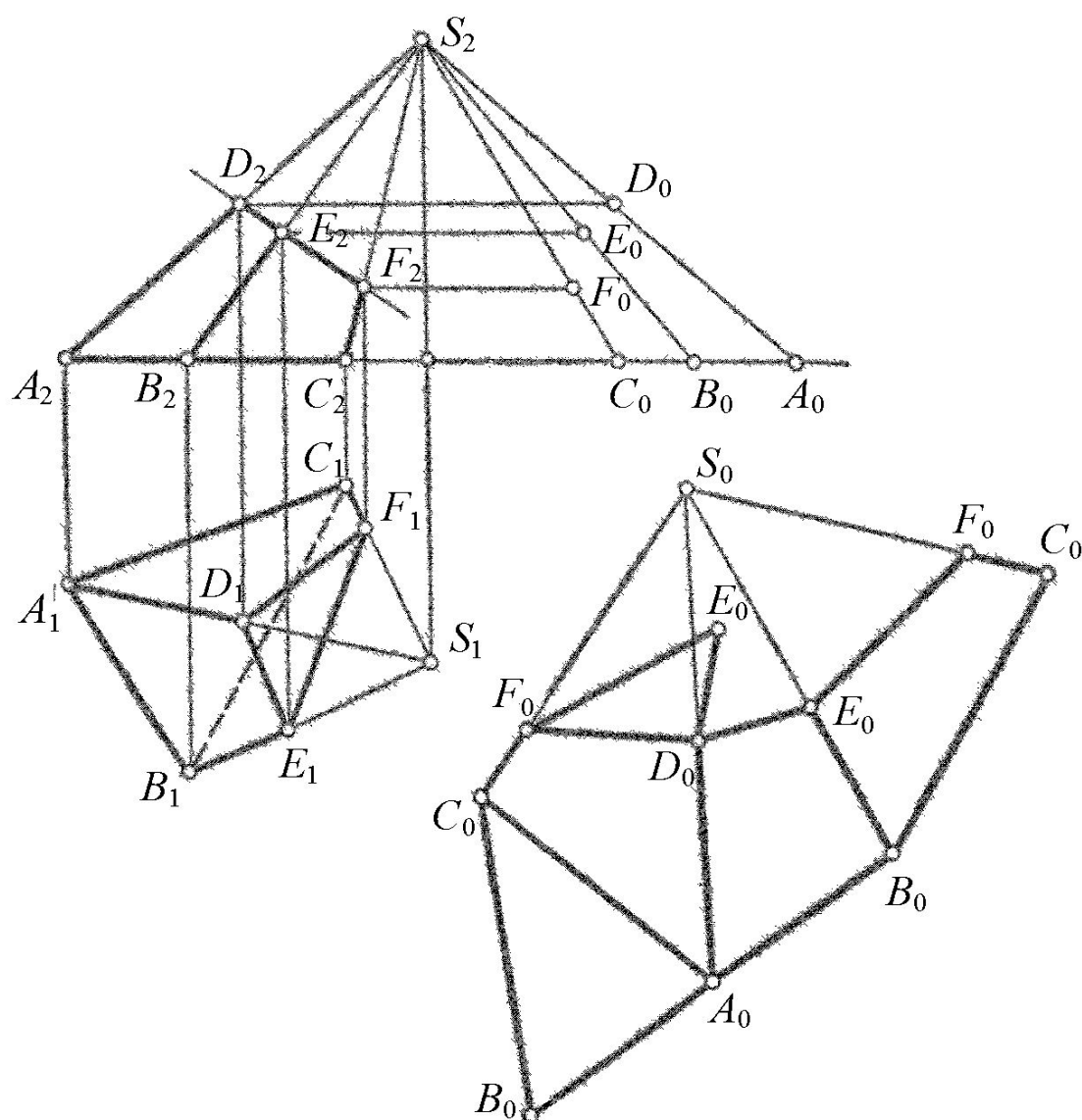


Рис. 11.1

Оскільки сторони нижньої основи піраміди є горизонталями, то їх натуральні величини можна знайти безпосередньо на площині проєкцій Π_1 .

Після цього кожна бічна грань будується як трикутник по трьох сторонах. Розгортка бічної поверхні піраміди має вигляд трьох трикутників, які примикають один до одного, зі спільною вершиною у точці S_0 .

Для нанесення на розгортку точок D_0 , E_0 і F_0 , які відповідають вершинам D , E і F перетину піраміди площиною Σ ,

визначають їх натуральні відстані від вершини S , для чого переносять точки D , E і F на відповідні натуральні величини бічних ребер. Після побудови розгортки бічної поверхні зрізаної частини піраміди додають до неї трикутники $A_0B_0C_0$ і $D_0E_0F_0$, які є натуральними видами основ зрізаної піраміди.

11.3. Розгортки призматичних поверхонь

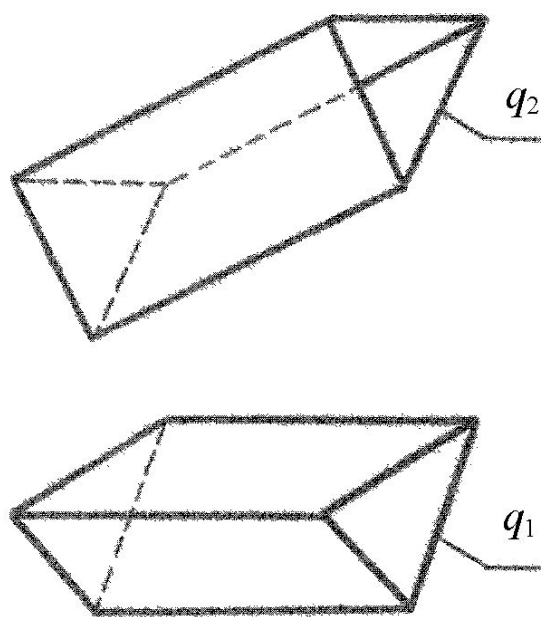


Рис. 11.2

Поверхню призми можна розгорнути двома способами – *способом нормального перерізу* і *способом розкатки*. Незалежно від способу розгортання призматичну поверхню необхідно мати заданою відносно площин проекцій таким чином, щоб її ребра були паралельними одній із площин проекцій, тобто займали положення прямих рівня (рис. 11.2).

Якщо при цьому лінії відсікання q поверхні проєкціюються зі спотворенням (так, як

це показано на рис. 11.2), то для побудови розгортки доцільно застосовувати спосіб *нормального перерізу*. Якщо ж лінія відсікання q проєкціюється на якусь із площин проекцій у натуральну величину, а ребра призми при цьому паралельні іншій площині проекцій, то побудову розгортки поверхні такої призми доцільно виконувати *способом розкатки*.

У випадку, коли поверхня призми розташована так, що її ребра займають загальне положення, то комплексне креслення необхідно одним із відомих способів перетворити до вигляду, показаного на рис. 11.2.

11. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Нормальним перерізом призматичної поверхні називається переріз її площиною, перпендикулярною до ребер призми.

На рис. 11.3 зображена призматична поверхня Δ , ребра якої є фронталями. Нормальний переріз цієї поверхні дає фронтально-проекціювальна площина Γ , перпендикулярна до її ребер.

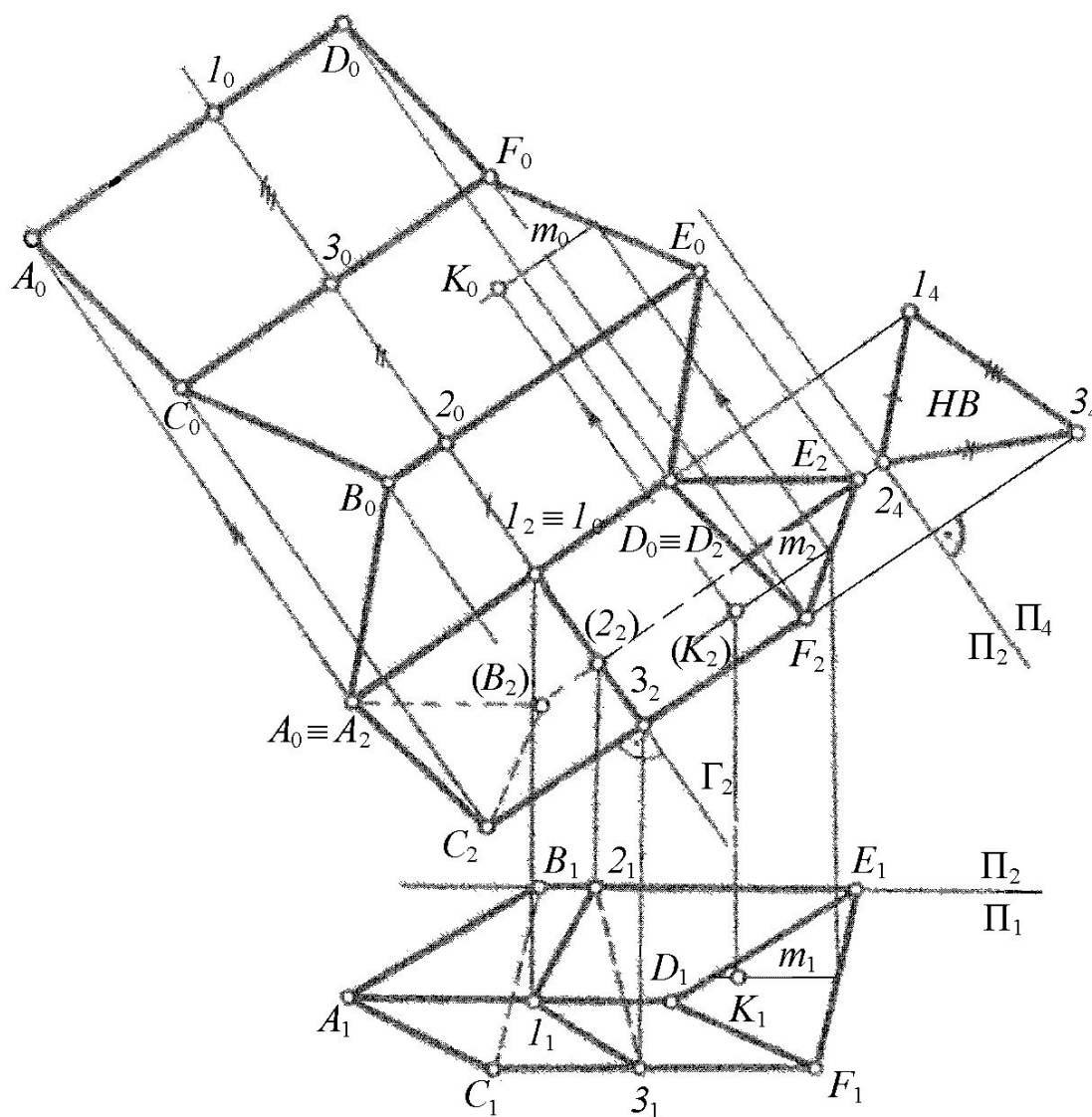


Рис. 11.3

Для побудови розгортки бічної поверхні призми необхідно контур нормального перерізу розгорнути в пряму лінію. Спочатку заміною площин проекцій визначають натуральну величину нормального перерізу (трикутника $1-2-3$). Потім на

лінії Γ_2 від точки I відкладають відрізки, рівні сторонам трикутника $I_4 2_4 3_4$. Цим самим випрямляють периметр нормального перерізу в пряму лінію.

Потім через точки 2_0 , 3_0 і I_0 проводять напрями ребер перпендикулярно лінії Γ_2 і на них фіксують точки B_0 , E_0 , C_0 , F_0 , A_0 , D_0 , які з'єднують ламаною лінією. Плошка фігура $A_0 B_0 C_0 \dots E_0 D_0$ є розгорткою призматичної поверхні Δ . Точку K перенесено з поверхні Δ на її розгортку за допомогою прямої m .

Розглянемо побудову розгортки поверхні призми способом розкатки (рис. 11.4). У цієї призми верхня і нижня основи паралельні площині проєкцій Π_1 і, отже, проєкціюються на неї у натуральну величину. Бічні ребра паралельні площині проєкцій Π_2 . Таким чином, усі умови застосування способу розкатки для побудови розгортки поверхні призми мають місце.

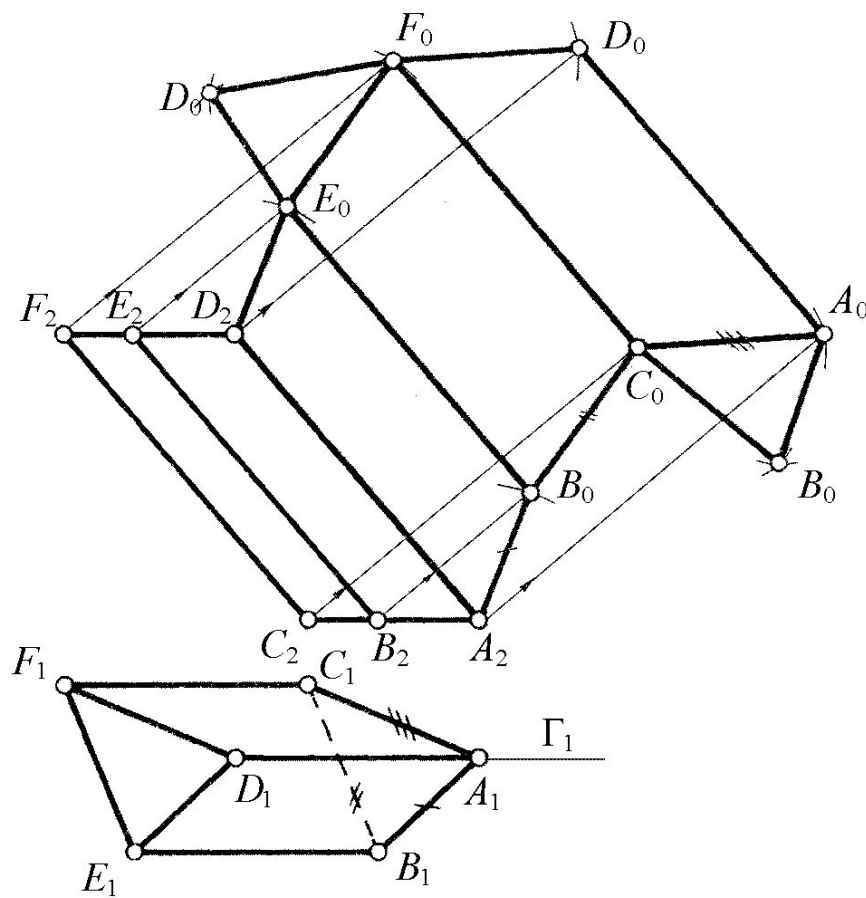


Рис. 11.4

11. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Візьмемо за площину розгортки поверхні призми площину Γ , яка проходить через ребро AD паралельно фронтальній площині проєкцій. Сумістимо грань $ADEB$ з площиною Γ . Для цього умовно розріжемо бічну поверхню призми вздовж ребра AD , а потім здійснимо поворот грані $ADEB$ навколо ребра AD .

Для знаходження суміщеного з площиною Γ положення ребра B_0E_0 із точки B_2 проводимо промінь, перпендикулярний до A_2D_2 , і відмічаємо на ньому дугою радіуса A_1B_1 , проведеною із центра A_2 , точку B_0 . Через B_0 проводимо пряму B_0E_0 , паралельну A_2D_2 .

Суміщене положення ребра B_0E_0 приймають за нову вісь обертання і повертають навколо неї грань $BEFC$ до суміщення з площиною Γ . Для цього із точки C_2 проводять промінь, перпендикулярний до суміщеного ребра B_0E_0 , а із точки B_0 – дугу кола радіусом, рівним B_1C_1 . Перетин дуги з променем визначає положення точки C_0 . Через C_0 проводять C_0F_0 паралельно B_0E_0 . Аналогічно знаходять положення ребра A_0D_0 . З'єднавши точки $A_2B_0C_0A_0$ і $D_2E_0F_0D_0$ відрізками прямих ліній, отримують плоску фігуру $A_2B_0C_0A_0D_0F_0E_0D_2$ – розгортку бічної поверхні призми. Для отримання повної розгортки призми достатньо до будь-якого із ланцюгів ламаної лінії $A_2B_0C_0A_0$ і $D_2E_0F_0D_0$ додати трикутники основи $A_0B_0C_0$ і $D_0E_0F_0$.

11.4. Розгортки кінчних поверхонь

Розгортку кінчної поверхні виконують наближено шляхом вписування у неї пірамідальної поверхні з достатньою кількістю граней. Зрозуміло, чим більше граней має піраміда,

тим точніше будується розгортка. Такий спосіб побудови розгортки конічної поверхні називається *триангуляцією*.

Лінію відсікання конічної поверхні Σ (рис. 11.5) ділять на рівні частини, точки ділення $1, 2, 3 \dots$ з'єднують прямими лініями з вершиною в точці S . Отримують ребра вписаної пірамідальної поверхні. Натуральні величини цих ребер визначають обертанням навколо вертикальної осі i , яка проходить через вершину S конічної поверхні, до положення фронталей.

Дуги $1-2, 2-3, 3-4 \dots$ лінії відсікання заміняють хордами, визначають натуральні величини граней-трикутників за трьома сторонами способом засічок. Побудувавши всі трикутники, ламану лінію. $R_0 I_0 2_0 3_0 \dots$ заміняють плавною кривою лінією. Одержують наближену розгортку поверхні еліптичного конуса Σ . Відсік поверхні розрізаний по найменшій твірній ST .

Для побудови на розгортці кривої лінії ABA , що належить конічній поверхні, використовують ті ж твірні. Відстані від вершини S до точок перетину кривої з твірними вимірюють на натуральних величинах цих твірних.

Розгортання поверхні конуса обертання (рис. 11.6) виконується простіше. У цьому випадку відпадає необхідність у визначенні натуральних величин твірних-ребер, оскільки вони всі рівні між собою. Крива $T_0 R_0 T_0$ розгортки є дугою кола, радіус якої дорівнює довжині твірної конуса. Для побудови на розгортці кривої лінії ABA , яка належить поверхні конуса обертання, застосовують твірні, попередньо повернуті до положення бічних твірних SR або ST , які проєкціюються на площину Π_2 у натуральну величину.

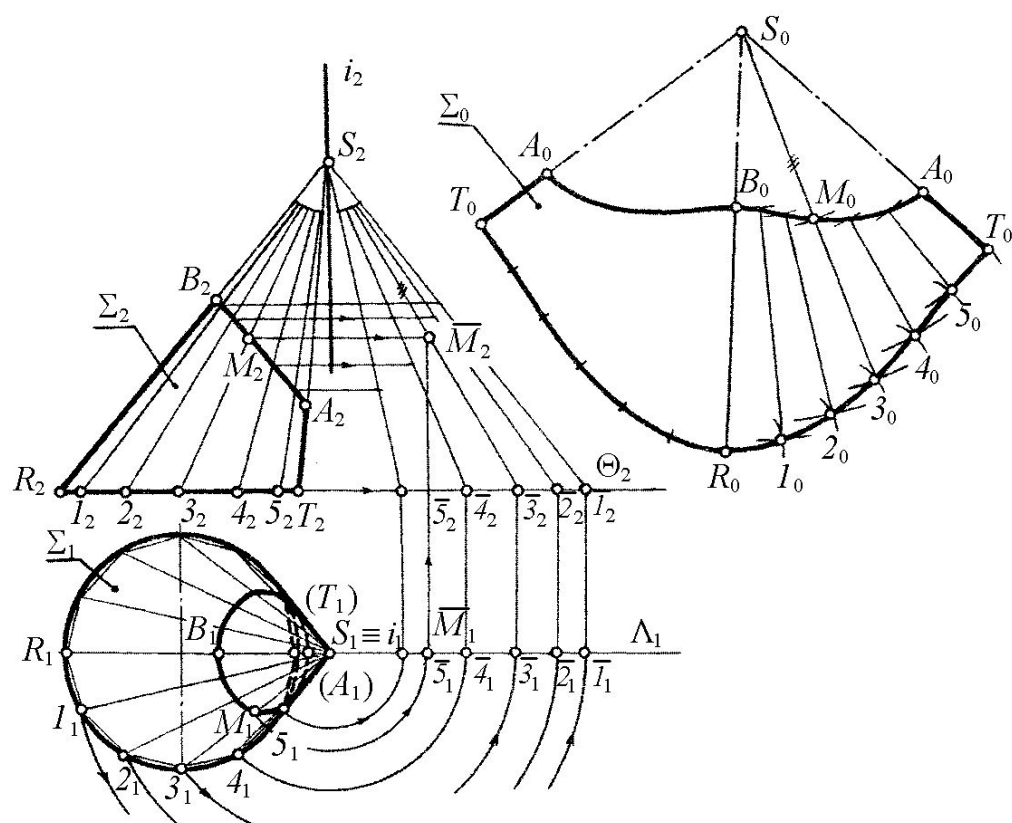


Рис. 11.5

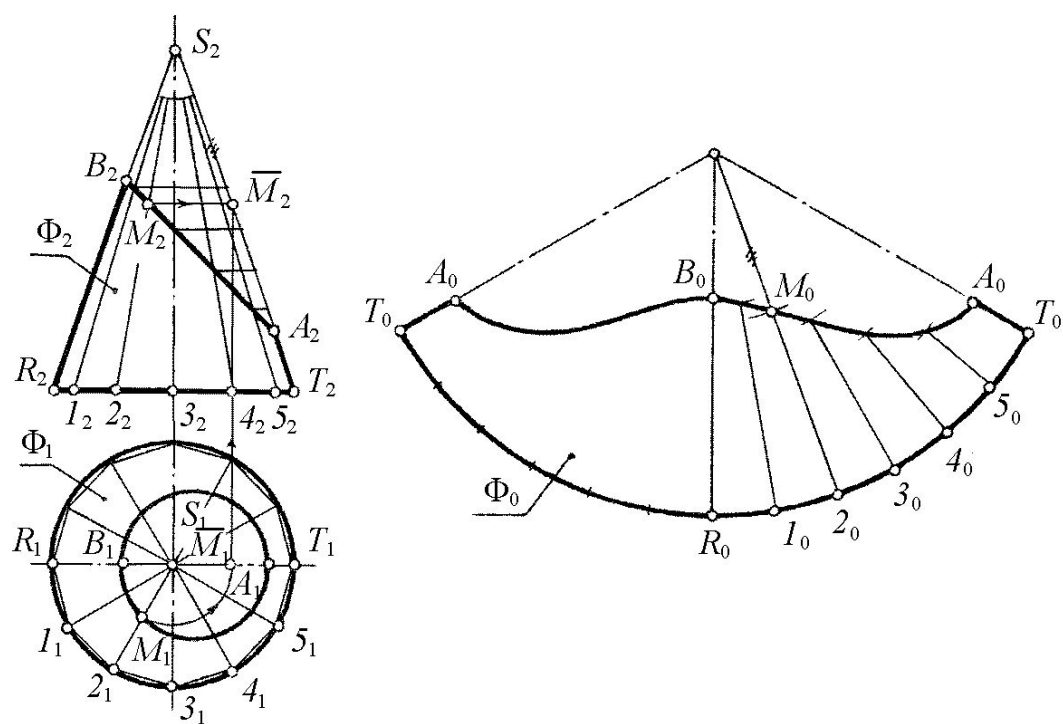


Рис. 11.6

11.5. Розгортки циліндричних поверхонь

Розгортку циліндричних поверхонь, як і розглянутих вище призматичних поверхонь, виконують або способом нормального перерізу, або способом розкатки. Вибір способу залежить від розташування циліндричної поверхні відносно площин проекцій. Але у кожному випадку криволінійна циліндрична поверхня замінюється на вписану гранну поверхню. При цьому бічні грані будуть не трикутниками, а паралелограмами.

У випадку використання способу нормального перерізу початковою стадією розв'язання задачі є побудова нормального перерізу циліндричної поверхні.

Нормальним перерізом циліндричної поверхні є її переріз площиною, перпендикулярною до твірних. Для циліндричної поверхні нормальний переріз можна одержати, спроекціювавши циліндр на площину, перпендикулярну до його твірних, іншими словами необхідно отримати вироджену проекцію циліндра, яка і буде його нормальним перерізом.

На рис. 11.7 заміною площини проекцій отримана вироджена проекція заданого відсіку – еліпса з осями m і n . У цьому випадку відразу ж отримують натуральну величину нормального перерізу.

Наступним кроком розв'язання задачі є випрямлення контуру нормального перерізу. Для цього еліпс ділять на деяку кількість частин (не менше 12). Замінюючи дуги еліпса хордами, відкладають їх на прямій лінії. Одержують відрізок A_0A_0 , рівний по довжині периметру нормального перерізу.

Оскільки точки ділення еліпса можна вважати виродженими проекціями твірних циліндричної поверхні, то на перпендикулярах до відрізка A_0A_0 , які проходять через ці точки,

11. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

відкладають натуральні величини твірних вверх і вниз від відрізка A_0A_0 . З'єднавши кінці твірних плавними кривими лініями, одержують розгортку відсіку еліптичного циліндра Γ .

Для побудови на розгортці кривої лінії MKN , яка належить циліндричній поверхні, використовують ті ж твірні, які проєкціюються на площину Π_2 у натуральну величину.

Розгортка поверхні циліндра обертання (рис. 11.8) виконується простіше. Нормальним перерізом у цьому випадку є коло. Відрізок прямої I_0I_0 дорівнює довжині кола. Крива ABA , що належить поверхні циліндричного відсіку, будується за допомогою твірних.

На рис. 11.9 побудовано розгортку поверхні еліптичного циліндра, основи якого паралельні горизонтальній, а твірні – фронтальній площині проєкцій. Отже, розгортку цієї поверхні можна виконувати способом розкатки. Горизонтальна проєкція нижньої основи поділена на 12 частин (на рис. 6.9 позначені точки нижньої половини проєкції). Через точки розподілу проведені проєкції твірних на площинах проєкцій Π_1 і Π_2 . Із фронтальної проєкції точки I_2 , як із центра, проводять засічку радіусом, рівним довжині хорди I_1-2_1 . Знаходять точку її перетину з прямою лінією, яка проходить через проєкцію точки 2_2 , перпендикулярно до твірних еліптичного циліндра. Цю точку позначають як 2_0 . Із цієї точки, як із центра, проводять засічку радіусом I_1-2_1 , а через точку 3_2 – пряму, перпендикулярну до твірних циліндра. Цей процес продовжують доти, поки не буде завершено обхід по колу нижньої проєкції основи циліндра. Отримані точки $I_0, 2_0, 3_0, \dots$ з'єднують плавною кривою лінією l . Подібним способом будують лінію t . Отриману фігуру вважають розгорткою поверхні еліптичного циліндра.

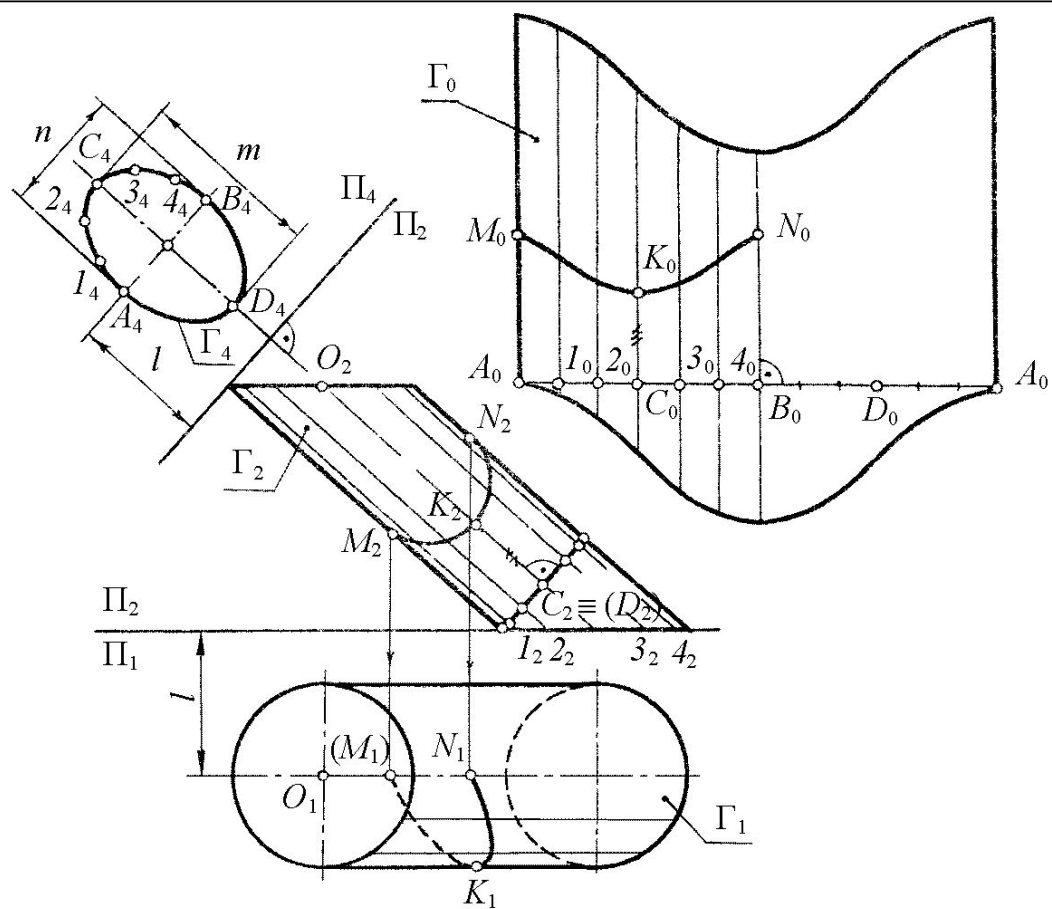


Рис. 11.7

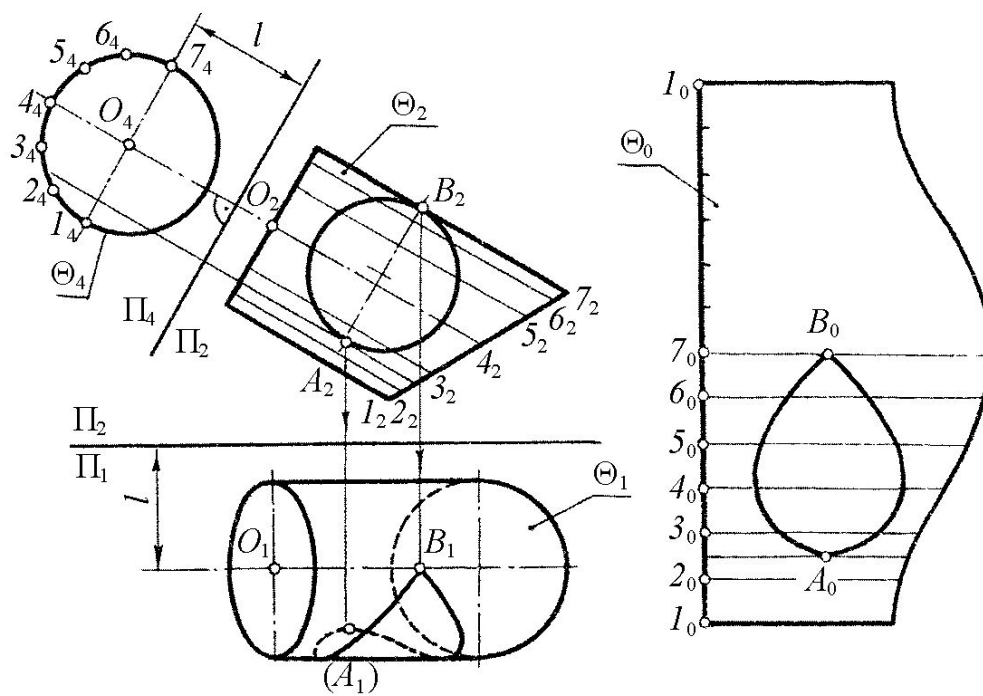


Рис. 11.8

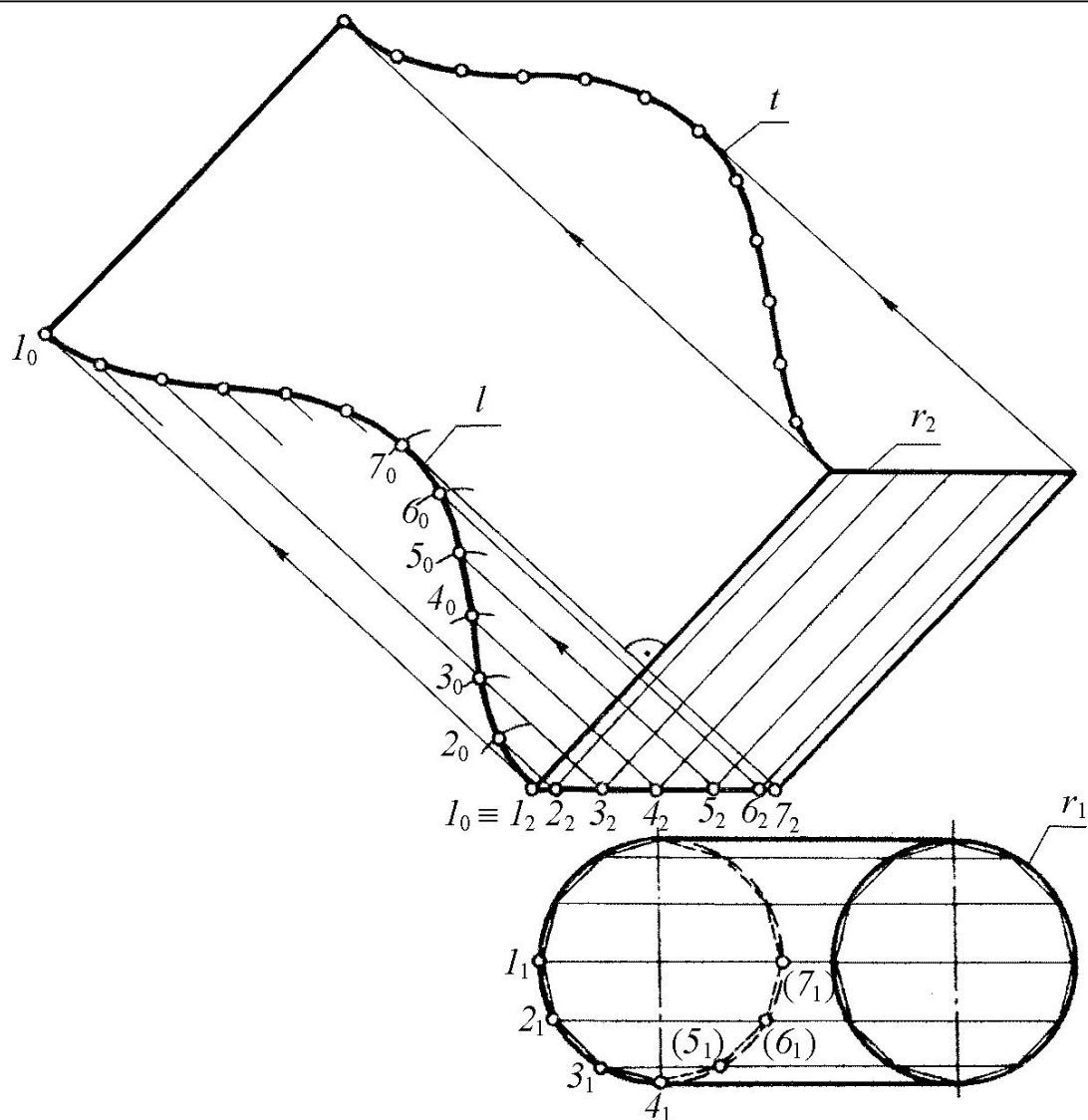


Рис. 11.9

11.6. Умовні розгортки поверхонь

У попередніх підрозділах було показано, що із розглянутих у посібнику поверхонь до розгортних можна віднести гранні поверхні, лінійчасті поверхні загального виду та лінійчасті поверхні обертання. Всі інші поверхні належать до нерозгортних – вони не можуть бути суміщені з площиною без розривів і склеювання. Тому розглянемо розв'язування задачі по-будови розгорток нерозгортних поверхонь – це

поверхні обертання – сфера і тор, які знаходять практичне застосування у техніці, будівництві тощо.

Загальний прийом розв'язання задачі на побудову умовної розгортки нерозгортних поверхонь полягає у тому, що відсіки заданої поверхні апроксимуються (заміняються) відсіками розгортних поверхонь – гранними, циліндричними, конічними. Задану поверхню розсікають пучком площин, які проходять через вісь поверхні, на вузькі, рівні між собою відсіки.

Побудову умовної розгортки сфери показано на рис. 11.10. Сферу розсічено трьома горизонтально-проекціувальними площинами Γ , Δ і T на шість рівних відсіків. Розсічення сфери на шість відсіків зроблено для полегшення пояснення прикладу побудови, на практиці сферу розсікають на 12 і більше відсіків.

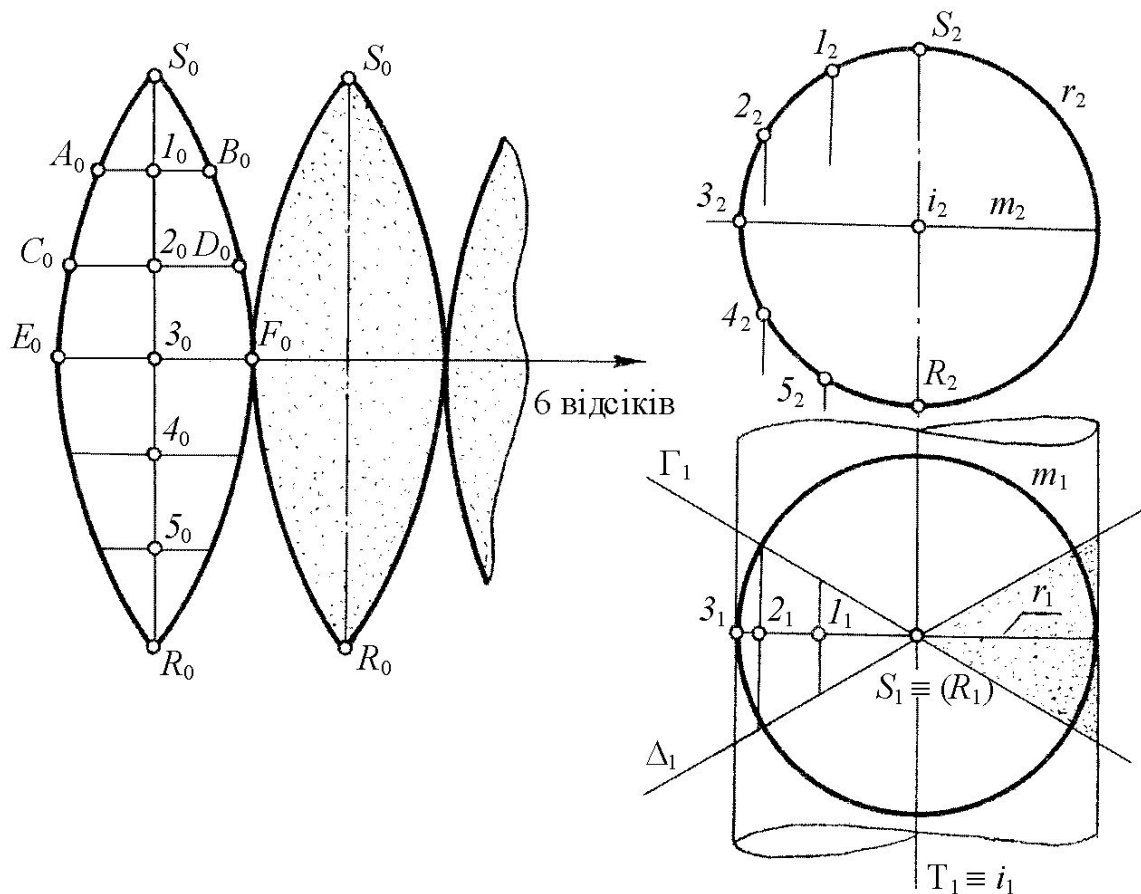


Рис. 11.10

11. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Для розгортки кожного сферичного відсіку (рис. 11.11), необхідно замінити його, тобто апроксимувати, описаним циліндричним відсіком (рис. 11.12). Далі розгортають цей циліндричний відсік. Спочатку розпрямляють півмеридіан SR , розділивши його на шість рівних частин. Отримують пряму лінію $S_0 I_0 2_0 \dots R_0$ (див. рис. 11.10). Твірні AB , CD , EF тощо. циліндричного відсіку, які проходять через точки 1 , 2 , 3 , ... є фронтально-проекціювальними прямими і на горизонтальну площину вони проекціюються у натуральну величину. На розгортці ці твірні пройдуть через точки I_0 , 2_0 , 3_0 , ... перпендикулярно до лінії симетрії $S_0 I_0 2_0 3_0 \dots R_0$.

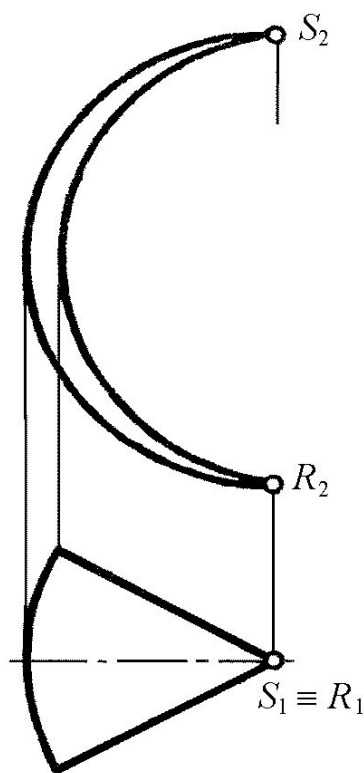


Рис. 11.11

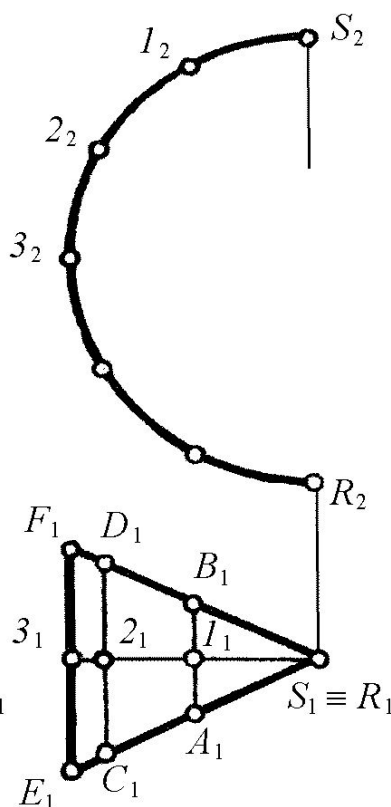


Рис. 11.12

З'єднавши кінці цих твірних плавними кривими лініями, отримують умовну (наближену) розгортку одного відсіку поверхні сфери. Для повної розгортки треба побудувати ще п'ять таких відсіків.

Розглянуті побудови виконані із застосуванням допоміжних циліндричних поверхонь.

Умовну розгортку поверхні сфери можна також побудувати із застосуванням допоміжних конічних поверхонь (рис. 11.13). Поверхню сфери розрізають горизонтальними площинами рівня на окремі пояси, які потім замінюють на вписані конічні поверхні. На рис. 11.13 пояси II–V є розгортками поверхонь усічених конусів обертання. Пояс I замінений циліндричною поверхнею. Недоліком цього способу є недоцільність розкрою матеріалу (довгі полоси зі значними радіусами кривини).

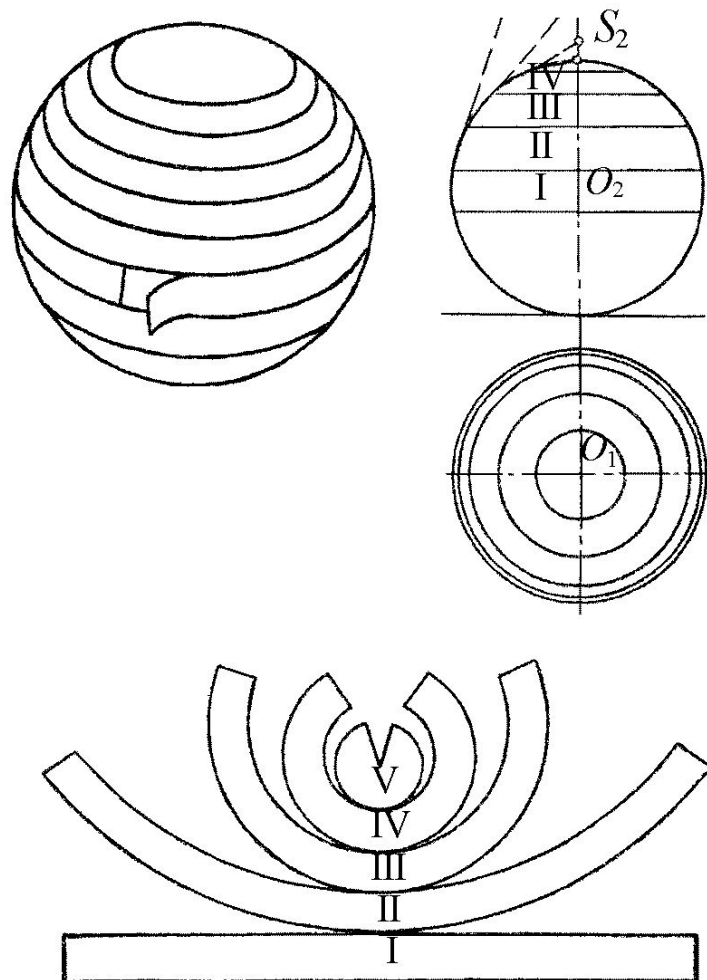


Рис. 11.13

11. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

За цим прикладом можна будувати розгортку будь-якої іншої поверхні обертання.

На рис. 11.14 подано розгортку ще однієї нерозгортної поверхні обертання – поверхні кругового кільця або тора. Розгортку виконано із застосуванням способу допоміжних циліндричних поверхонь.

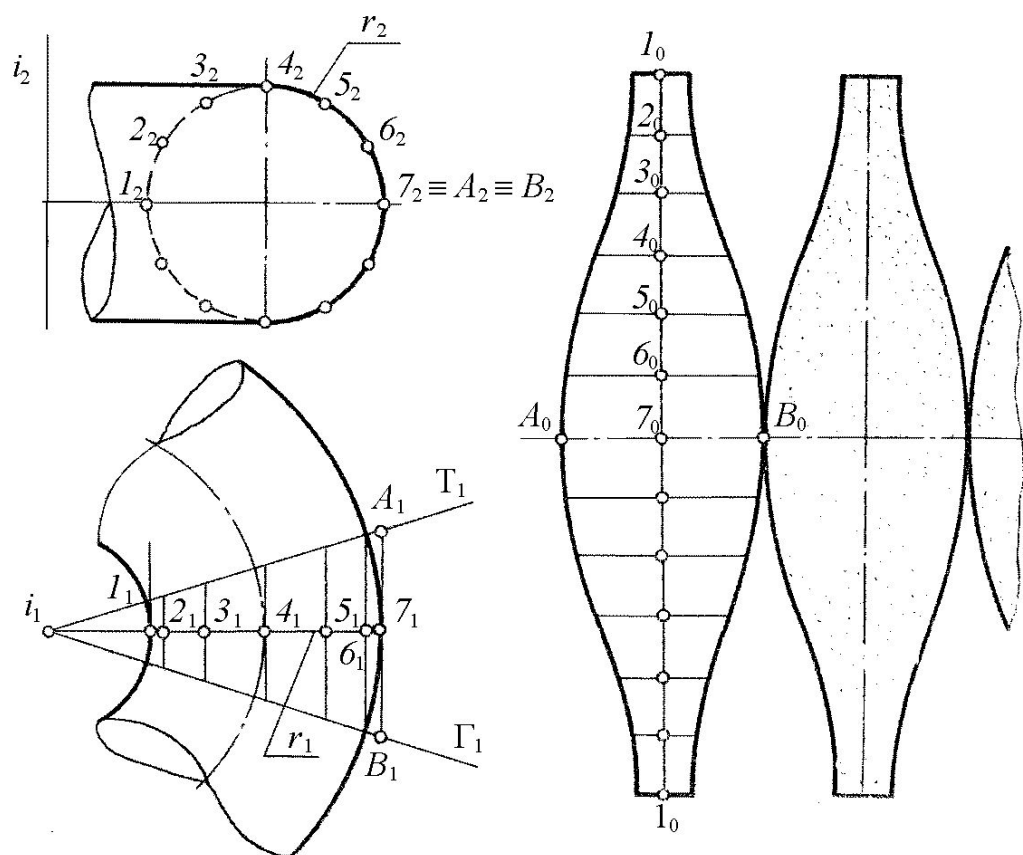


Рис. 11.14

Кожний відсік поверхні тора апроксимується циліндричним відсіком (один такий відсік знаходиться між площинами T і Γ).

Подальший процес розсорткування подібний розглянутому вище. Кільцевий циліндричний відсік розгортається по малій твірній (проходить через точку I).

Потім розгортається у пряму лінію меридіан-коло і будуються твірні циліндричного відсіку. Чим на більшу кількість відсіків розділена поверхня, тим точнішою є її розгортка.

12. ПЕРСПЕКТИВА

12.1. Основні поняття та визначення

Перспективні проекції, які отримуються шляхом центрального проєкціювання, є науковою базою реалістичного рисунка, тому що дають можливість отримувати зображення предметів, наближені до їх зорового образу. Крім цього, цей вид проєкцій використовується також і для побудови наочних зображень різних технічних об'єктів. Такі зображення, як і метод їх побудови, називають "перспективою".

Перспектива – наука про зображення предметів у просторі на площині або будь-якій поверхні у відповідності до тих уявних скорочень їх розмірів, змінень обрисів форми і світло-тіньових відношень, які мають місце в натурі.

Поняття "перспектива" походить від латинського слова "perspicere", що у перекладі означає "дивитись наскрізь".

Перспектива може бути побудована різними способами і на різних поверхнях: на нахиленій і вертикальній площинах, на поверхні циліндра, сфери тощо. Перспективні побудови мають виконуватися з високою точністю і акуратністю за допомогою креслярських інструментів.

Лінійна перспектива вивчає способи побудови перспективних зображень на площині. Задача лінійної перспективи – побудова обрису різних тіл таким чином, щоб уявлення про

12. ПЕРСПЕКТИВА

форми і характер предметів при огляді їх в натурі та на рисунку були тотожними. Побудова зображень складних технічних об'єктів на основі зорової перспективи дуже складна і може досить легко призвести до неточностей при передачі їх форми і розмірів, побудова ж рисунків за відомими розмірами або ортогональними проекціями таких об'єктів взагалі неможлива.

Основний закон лінійної перспективи полягає в тому, що предмети, які мають однакові розміри і віддалені від спостерігача на різну відстань, на картині зображуються неоднаковими: чим далі знаходиться предмет, тим менше на картині буде його зображення.

В основу побудови перспективних зображень покладено метод центрального проєкціювання, який достатньо повно відповідає властивостям зору людини. Сутність цього методу полягає у тому, що сукупність точок зображення предмета на площині отримується в результаті перетину із цією площиною проєкціювальних прямих, які проведені через точки предмета з деякої точки простору, яка має назву *центр проєкції* (точка S на рис. 12.1).

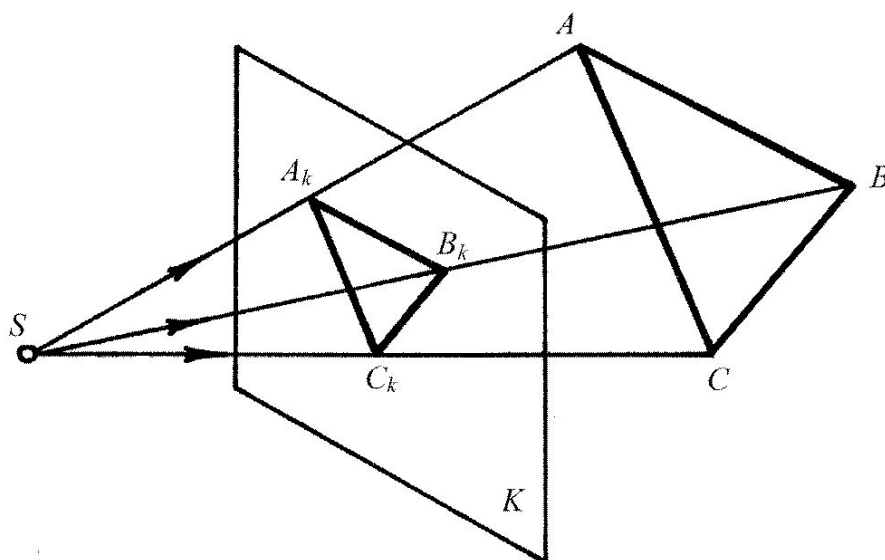


Рис. 12.1

Для того, щоб отримати центральну проекцію відрізка $A'B'$ на заданій площині K з центром проєкцій у точці S , необхідно провести з точки зору промені, направлені в кінці відрізка (точки A' та B'), до перетину цих промінів із площиною K (рис. 12.2,*а*). Після поєднання за допомогою прямої отриманих на площині точок A і B , будемо мати перспективу заданого відрізка, або його центральну проєкцію.

У залежності від того, де буде розташовано відрізок (перед площиною або за нею), його перспектива може бути менше за сам відрізок (див. рис. 12.2,*а*) або більше за нього (див. рис. 12.2,*б*).

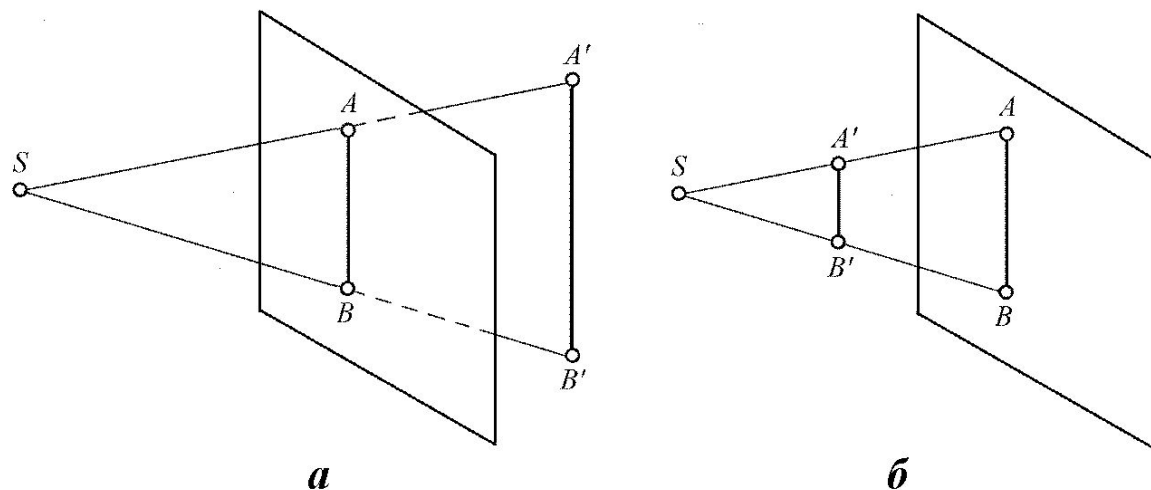


Рис. 12.2

На принципі центральної проєкції ґрунтується отримання фотографічних зображень.

Центральна проєкція предмета – це його зображення, яке отримано за допомогою прямих (або проєкціювальних променів), що проведені з однієї точки.

Якщо проєкціювальні промені направити з точки S не на площину, а на внутрішню поверхню циліндра, то отримане зображення буде мати назву – *панорамна перспектива*. При проєкціюванні предмета на внутрішню поверхню сфери отримуємо *купольну перспективу*.

12. ПЕРСПЕКТИВА

Вивчення побудови перспективних зображень краще за все розглядати за допомогою проєкціювального апарату, який складається з системи площин, ліній та точок.

При побудові перспективних зображень на площині використовують допоміжну систему площин, ліній і точок, яка має назву системи перспективних координат. Розглянемо основні елементи цієї системи (рис. 12.3).

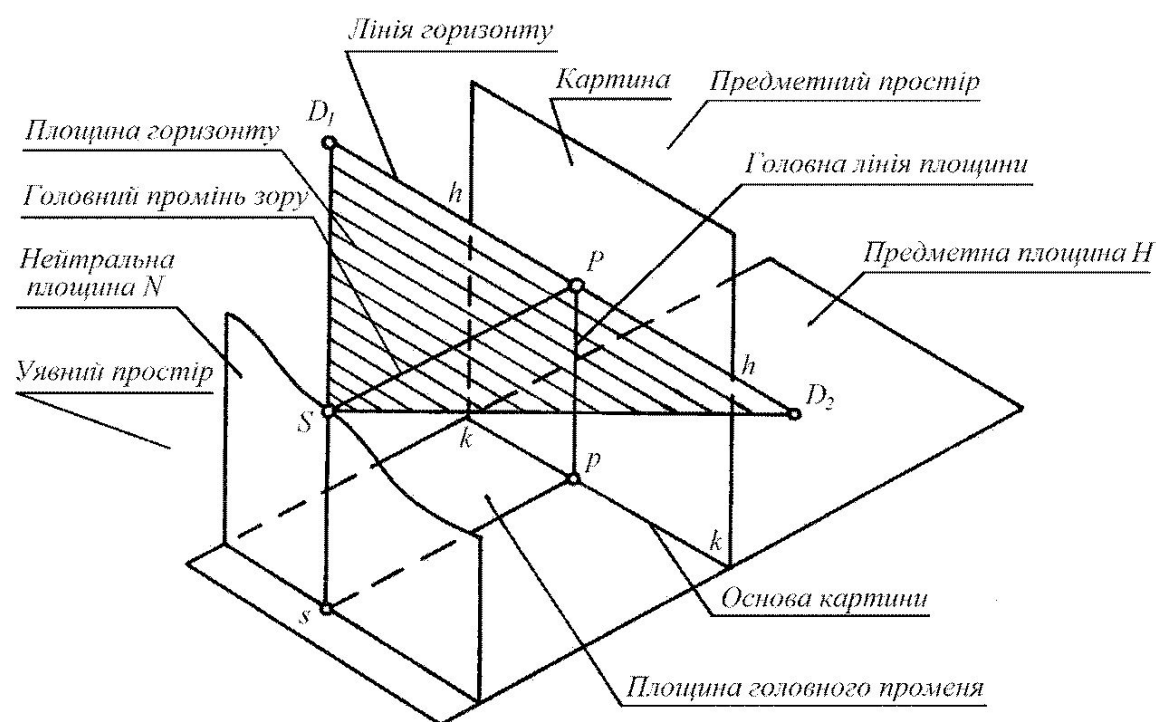


Рис. 12.3

1. Горизонтальна предметна площина H , на якій розташовується предмет для зображення, спостерігач та картинна площина.
2. Картинна площина або просто картина K , на якій будується перспективне зображення предмета.
3. Лінія перетину картини з предметною площиною називається *лінією основи картини* і визначає положення останньої відносно предметної площини $k-k$.
4. Центр проєкцій або точка зору S , яка визначає положення очей спостерігача відносно картинної та предметної

площин. Ортогональна проекція точки зору s на предметну площину називається точкою стояння, а величина перпендикуляра Ss – висотою точки зору.

5. Головна точка картини P є ортогональною проекцією точки зору на картинну площину. Відрізок перпендикуляра визначає відстань від спостерігача до картини, яка має назву головної відстані. Сам перпендикуляр називається головним променем зору.

6. Лінія $h-h$ перетину з картиною горизонтальної площини, що проходить через точку зору, має назву – *лінія горизонту* або просто горизонт. Вона завжди проходить через головну точку картини паралельно лінії основи картини. Відрізок перпендикуляра, який опущено з будь-якої точки лінії горизонту на основу картини, наприклад Pp , визначає на картині висоту точки зору (висоту горизонту).

7. Дистанційні точки D_1, D_2 розташовуються на лінії горизонту, праворуч і ліворуч від головної точки картини P , на відстані, яка дорівнює головній відстані картини.

8. Площина N , яка проходить через точку зору паралельно картинній площині, називається *нейтральною площиною*.

Простір, у якому звичайно розташовують предмети і який знаходиться перед спостерігачем за картиною, називається *предметним*. Простір, що знаходиться між картиною і нейтральною площиною, називається *нейтральним*, а простір за нейтральною площиною позаду спостерігача – *уявним*.

Крім предметного простору, іноді об'єкти для зображення розташовують також і у нейтральному просторі. В уявному просторі розглядаються, як правило, тільки деякі нескінченно віддалені точки.

12.2. Перспектива точки

Центральна проекція або перспектива точки A , яку розташовано у предметному просторі, отримується як точка пере-

Перспективи самих точок та їх основ для будь-яких точок предметного простору завжди розташовуються на картині, вище за лінію її основи $k-k$. Нижче за лінію $k-k$ можуть розташовуватися лише перспективи точок, що знаходяться у нейтральному та уявному просторах.

Основа точки M , яка знаходиться у предметній площині, збігається із самою точкою. Також збігаються на картині перспектива цієї точки і перспектива її основи (рис. 12.5).

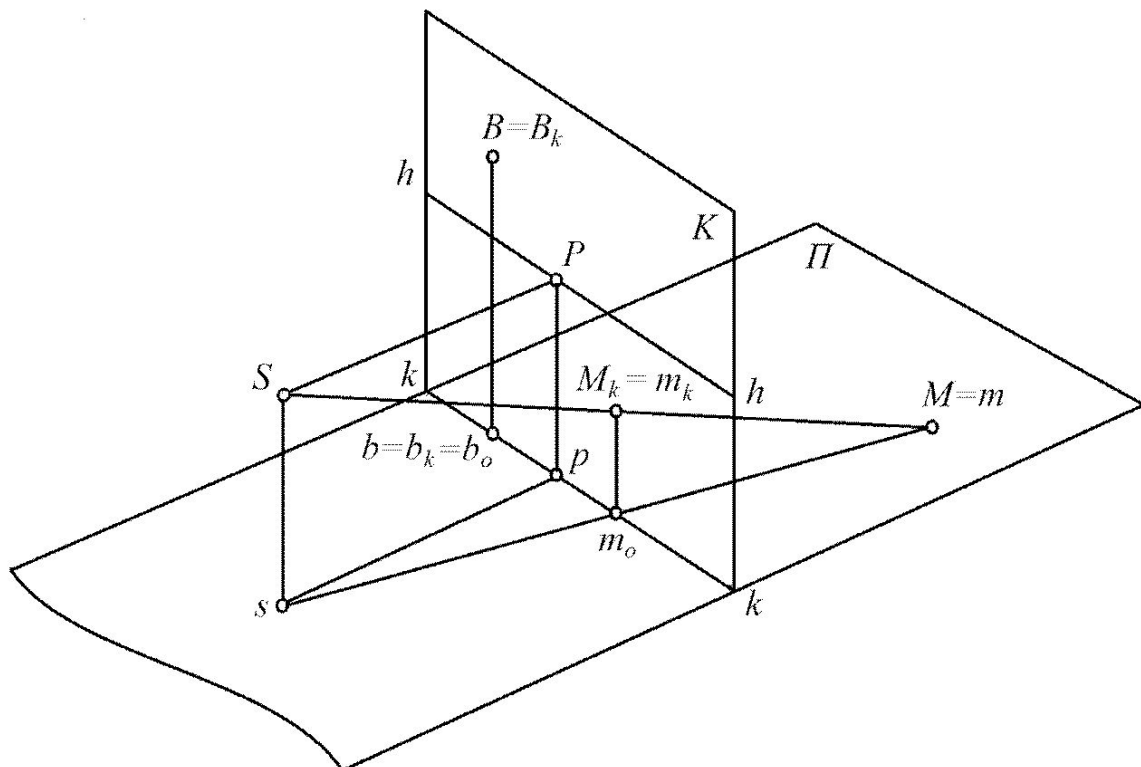


Рис. 12.5

Перспектива точки B , яку розташовано у картинній площині, збігається і з самою точкою.

12.3. Перспектива прямої лінії

Перспектива прямої лінії, яка довільно розташована у просторі, отримується на проєкціювальному апараті як сукупність

12. ПЕРСПЕКТИВА

точок перетину з картинною площиною зорових променів, проведених у кожній точці цієї прямої. Ці промені утворюють площину, яка має назву променева. Таким чином, перспектива прямої на площину являє собою пряму лінію, оскільки є результатом перетину двох площин – картинної та променевої. Із цього випливає, що для побудови перспективи прямої достатньо побудувати перспективу двох її точок, тоді пряма, проведена через знайдені точки, буде являти собою перспективу заданої прямої.

Оскільки перспектива будь-якої точки простору визначається двома її проекціями, то перспектива прямої AB на картинній площині буде задана центральними проекціями цієї прямої та її основи (рис. 12.6).

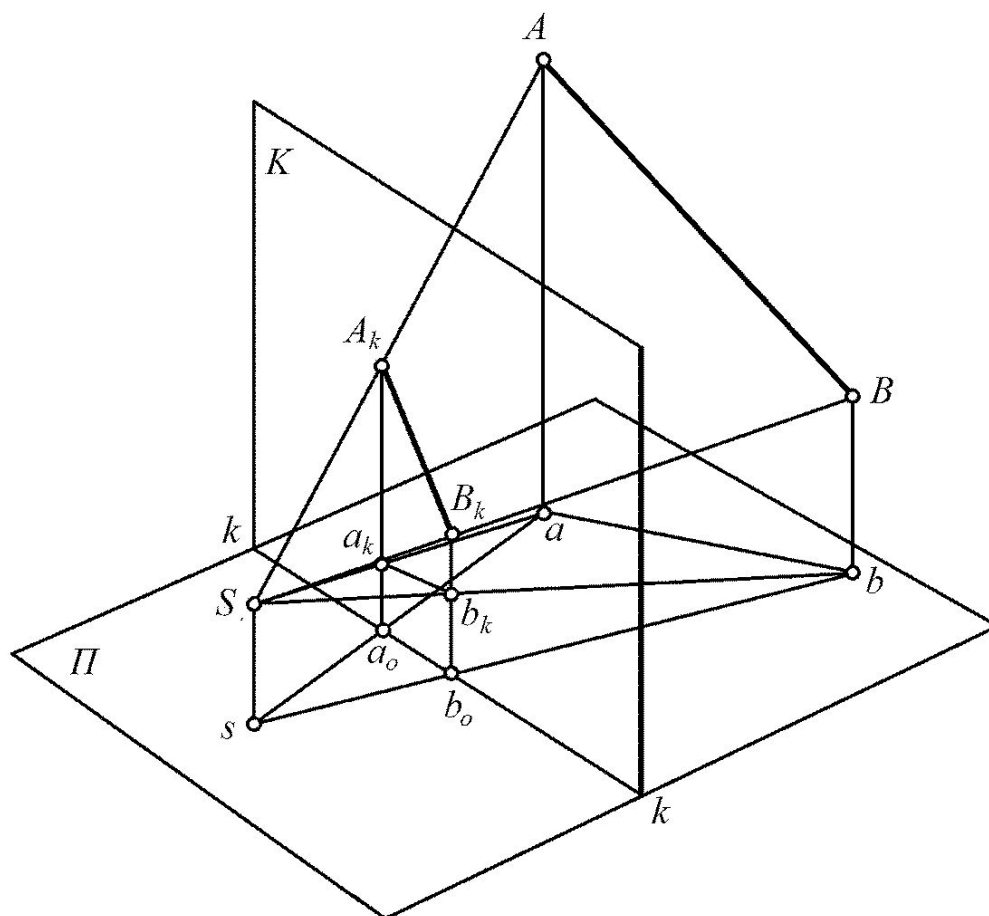


Рис. 12.6

12.4. Гранична точка прямої. Лінія горизонту

Для побудови зображення нескінченно віддаленої точки F_{∞} прямої AB необхідно провести зоровий промінь через цю точку (рис. 12.7). Але тоді промінь зору стане паралельним самій прямій, а точка його перетину з картинною площиною буде служити центральною проекцією нескінченно віддаленої точки цієї прямої. З побудови випливає, що проекція прямої AB не може бути продовжена на картині далі точки $F_{\infty k}$, яка має назву – *гранична точка прямої*. З побудови видно, що для будь-якої прямої, розташованої в предметній площині, гранична точка відстоїть від основи картини на відстань, яка дорівнює висоті точки зору.

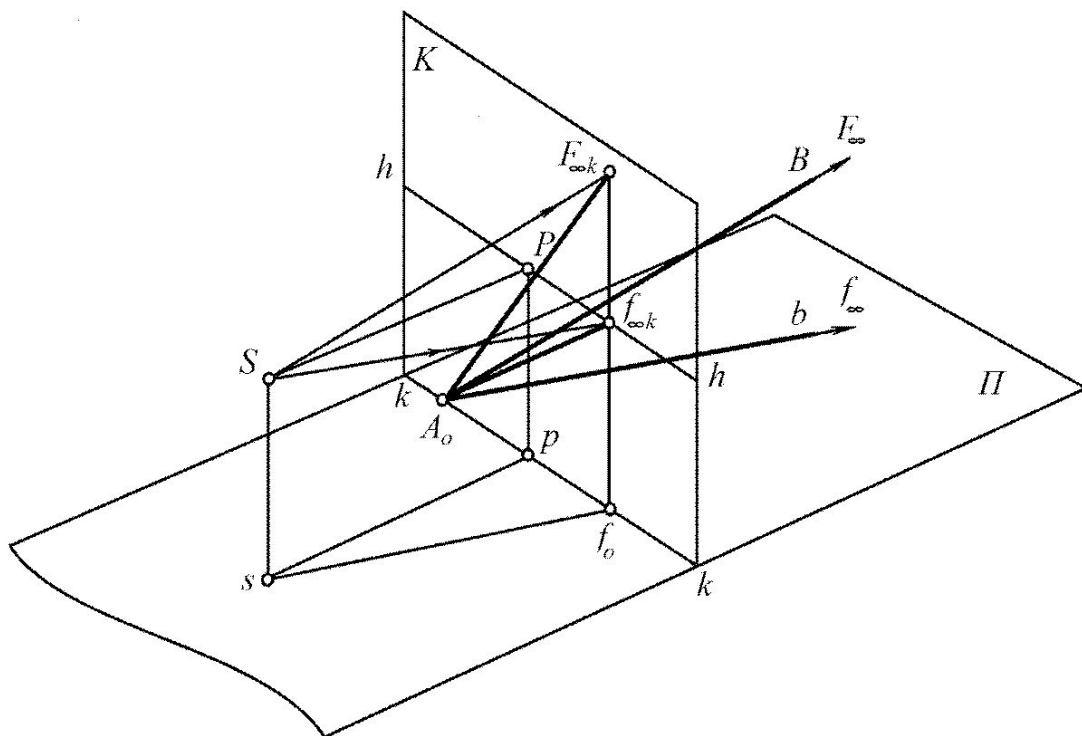


Рис. 12.7

Таким чином, сукупність граничних точок всіх прямих, розташованих у предметній площині, представляють на картині пряму, що розташована паралельно основі картини

12. ПЕРСПЕКТИВА

і відстоїть від неї на відстань, яка дорівнює висоті точки зору. Ця пряма є граничною прямою предметної площини. Вона являє собою перспективу нескінченно віддаленої прямої предметної площини та обмежує на картині зображення предметної площини з усіма точками і лініями, що їй належать. Гранична пряма предметної площини на картині є лінією горизонту $h-h$. Положення початкової і граничної точок прямої наведено на рис. 12.7.

Лінія горизонту, головна точка картини та основа картини є основними елементами перспективного зображення, які служать опорою для правильної побудови зображення на картинній площині.

На рис. 12.8, зображена окремо від проєкціувального апарату площина картини K з нанесеними на ній основою картини, лінією горизонту та головною точкою P .

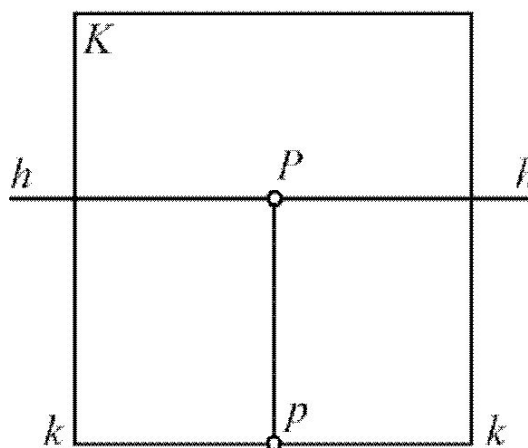


Рис. 12.8

Наявність на картині зазначених елементів дає можливість отримати основні відомості про взаємне розташування елементів проєкціувального апарату. Лінії горизонту та основи обмежують частину картинної площини, на яку проєкціюються точки предметної площини, а також точки предметного простору, розташованих нижче площини горизонту.

12.5. Побудова перспективи точки за її ортогональними проєкціями

На рис. 12.9 задані ортогональні проєкції точки A , яка розглядається в системі двох взаємно перпендикулярних площин

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

проекцій. На цьому ж кресленні подана проекція картинної площини K , розташована перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій H , заданої своїм слідом $k-k$, а також проекції точки зору S . Центральні проєкції точки A можуть бути отримані як точки перетину зорових променів, проведених з точки зору через точку A та її основу, з горизонтально-проєкціювальною картинною площиною K .

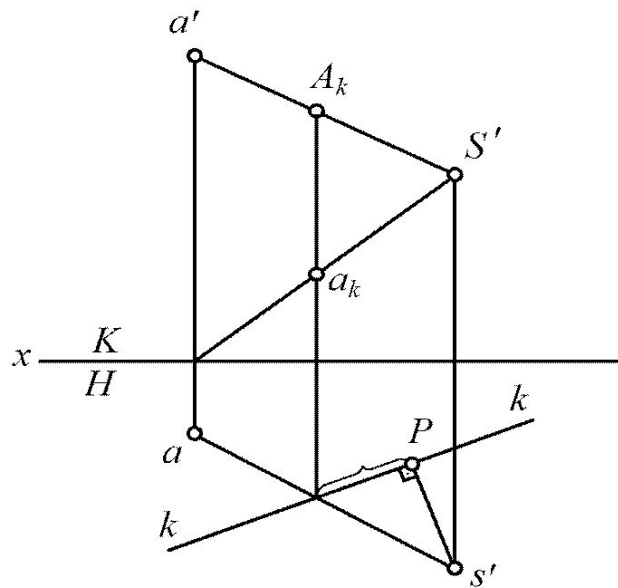


Рис. 12.9

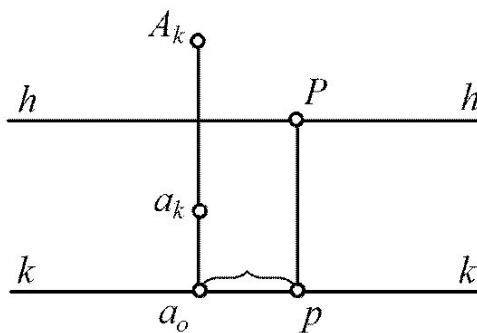


Рис. 12.10

На рис. 12.10 зображено задану окремо картинну площину K із побудованою на ній перспективою точки A . Положення центральних проєкцій точки відносно основи картини визначено за фронтальною проєкцією на рис. 12.9. Положення лінії зв'язку визначено по

відношенню до головної точки картини – P . Перспектива прямої лінії за її заданими ортогональними проєкціями може бути визначена за перспективами двох точок – кінців її відрізка таким чином, як це показано на рис. 12.9.

12.6. Перспектива пучка паралельних прямих.

Точка сходу

Розглянемо на проєкціювальному апараті побудову центральних проєкцій групи паралельних прямих, розташованих у предметній площині та ззовні. Перспектива кожної із заданих прямих визначена на кресленні її картинним слідом та граничною точкою. Для побудови граничних точок були проведені проєкціювальні промені, паралельні напрямку прямих і напрямку їх основи. З побудови випливає, що перспективи прямих мають спільну граничну точку F_{ok} . Таким чином, розглянута група паралельних прямих зобразиться на картині у вигляді пучка прямих, які сходяться в одній точці. Ця спільна гранична точка F_{ok} має назву точки сходу паралельних прямих (рис. 12.11).

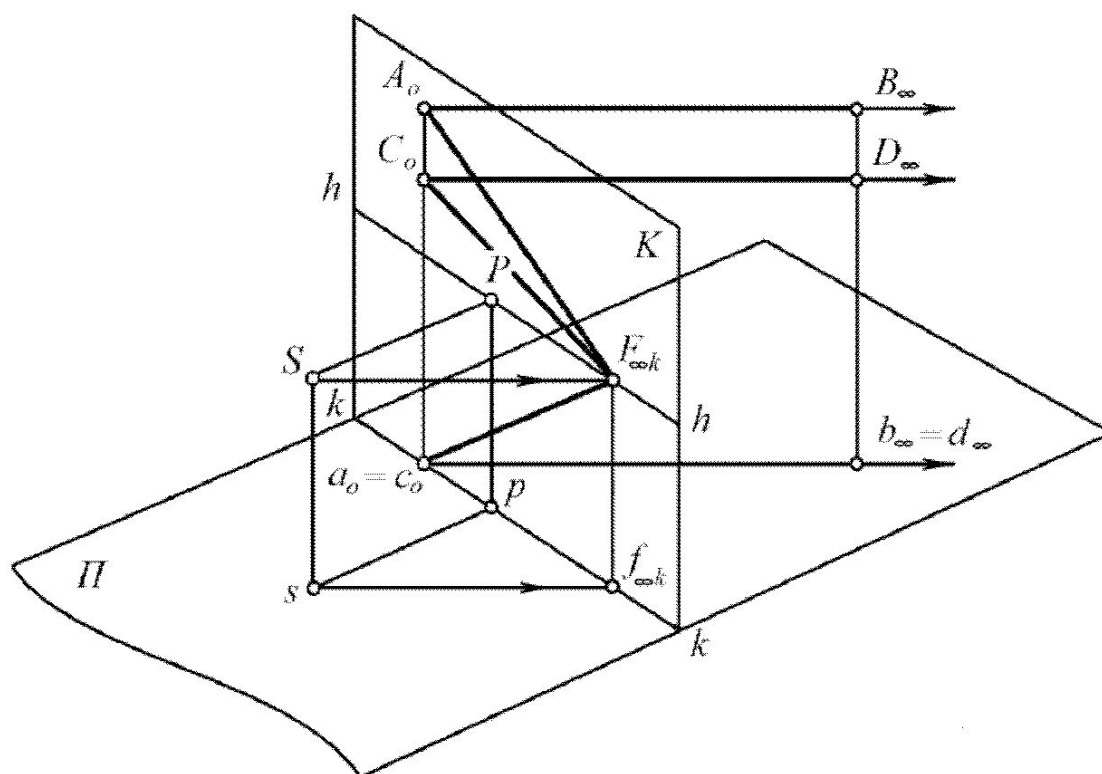


Рис. 12.11

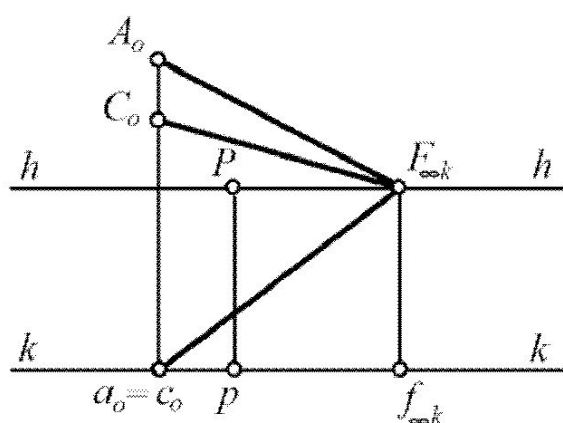


Рис. 12.12

Перспективу пучка паралельних прямих наведено на рис. 12.12.

Оскільки паралельні лінії можуть займати різне положення по відношенню до предметної та картинної площин, точки сходу їх перспективних проєкцій також будуть займати різне положення

відносно основних елементів картини – лінії горизонту, головної точки тощо. Установимо розташування на картині точок сходу перспектив найбільш характерних напрямків паралельних прямих.

Для побудови перспектив прямих, перпендикулярних до картини, з точки зору S проводимо промінь, паралельний заданим прямим (рис. 12.13).

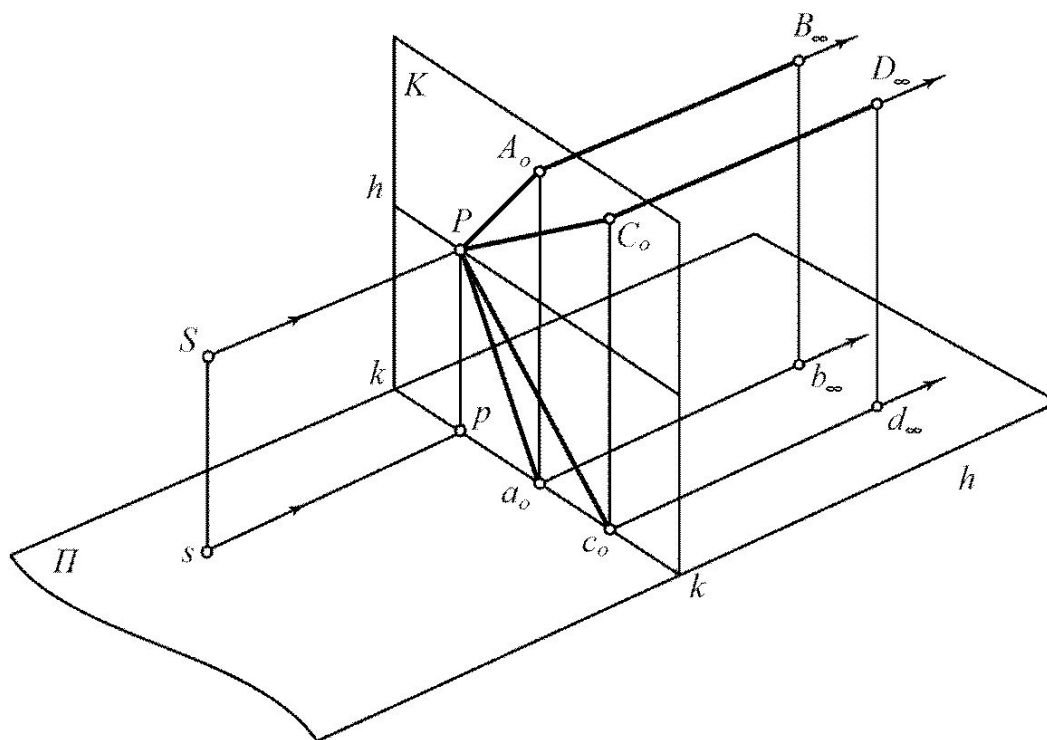


Рис. 12.13

12. ПЕРСПЕКТИВА

Він перетне картинну площину в головній точці картини. Відповідно, точкою сходу перспектив прямих, перпендикулярних до картинної площини, виступає головна точка картини.

При побудові та читанні перспективних зображень велику роль відіграє визначення точок сходу перспектив основ заданих паралельних прямих. У прямих, перпендикулярних до картинної площини, їх основи також перпендикулярні до картини, які вони самі. Тому точкою сходу перспектив їх основ буде також головна точка картини P (рис. 12.14).

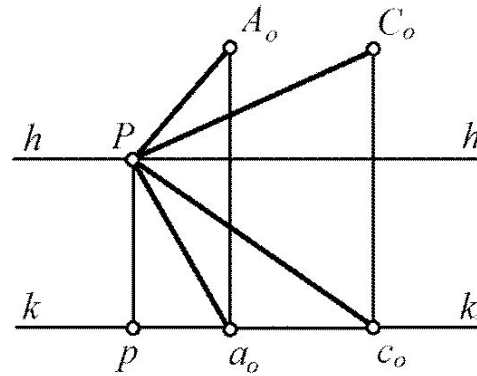


Рис. 12.14

Тому точкою сходу перспектив їх основ буде також головна точка картини P (рис. 12.14).

При побудові перспектив найрізноманітніших об'єктів майже завжди виникає необхідність у зображенні прямих, які розташовані у горизонтальних площинах і нахилені до картини під різними кутами. Розглянемо випадок, коли задані прямі паралельні предметній площині та нахилені до картинної площини під кутом 45° (рис. 12.15). З точки зору S проводимо проєкціювальні промені, паралельні заданим прямим. Точка сходу прямих D_1 буде розташована на лінії горизонту, тому що проєкціювальні промені, паралельні горизонтальним прямим, розташовані у площині горизонту. Відрізки DP та SP рівні між собою як сторони рівнобедреного прямокутного трикутника SDP . З цього випливає, що отримана точка сходу D_2 збіглася із дистанційною точкою картини.

Таким чином, точкою сходу перспектив горизонтальних прямих, які складають з картиною кут 45° , є одна із дистанційних точок D_1 , D_2 (рис. 12.16, див. рис. 12.15).

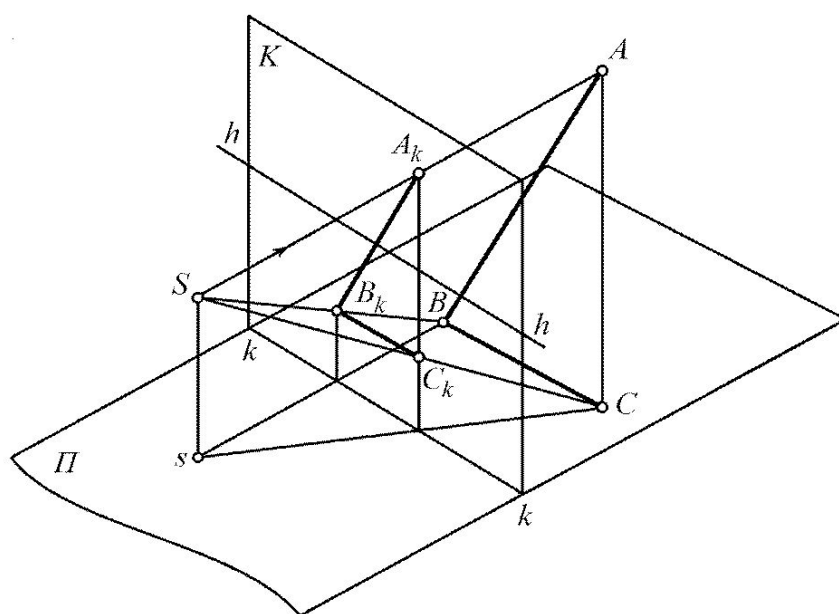


Рис. 12.18

Якщо точки сходу перспектив горизонтальних прямих розташовуються на лінії горизонту, то для зображення сукупності паралельних прямих загального положення існує наступне загальне правило: точки сходу перспектив висхідних прямих розташовуються вище за лінію горизонту (рис. 12.19), а спадних прямих – нижче.

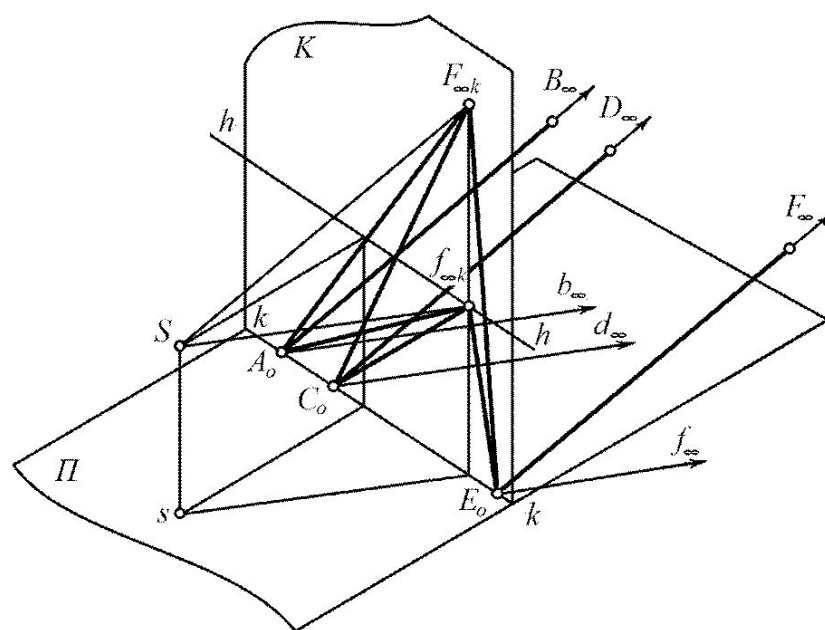


Рис. 12.19

12. ПЕРСПЕКТИВА

Точки сходу перспектив основ як висхідних (рис. 12.20), так і спадних прямих, завжди будуть розташовуватися на лінії горизонту, а точки сходу самих перспектив таких прямих – на перпендикулярі до лінії горизонту, який установлено з точки сходу перспектив основ.

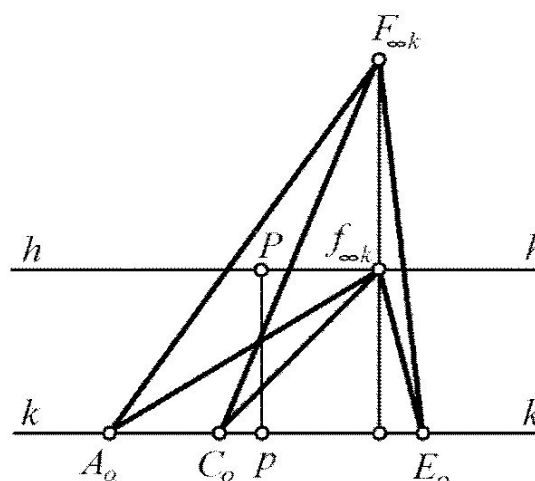


Рис. 12.20

12.7. Побудова перспектив

Прямі окремого положення (горизонтальні, вертикальні, паралельні та перпендикулярні до картинної площини) найчастіше обмежують контури об'ємних об'єктів – інженерних та архітектурних споруд. Крім цього вони часто використовуються як допоміжні при визначенні перспективних зображень предметів складних форм, наприклад автомобіля. Тому, зупинимося більш детально на побудові такого виду прямих (рис. 12.21–12.23).

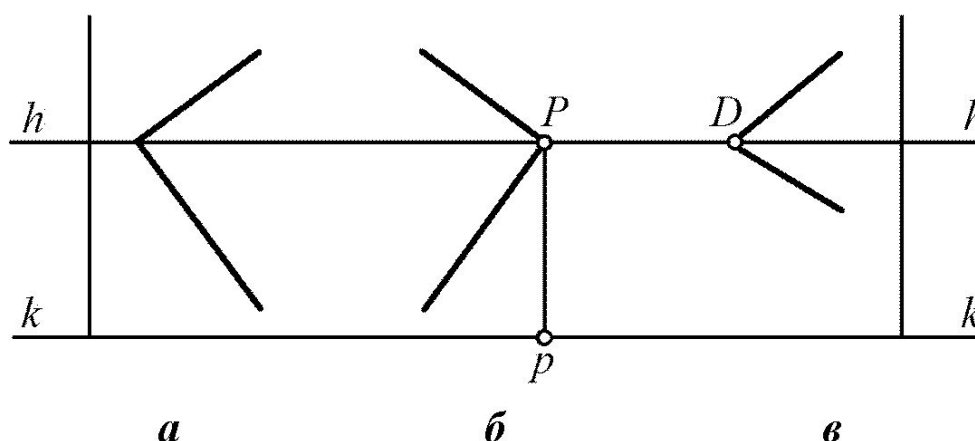


Рис. 12.21

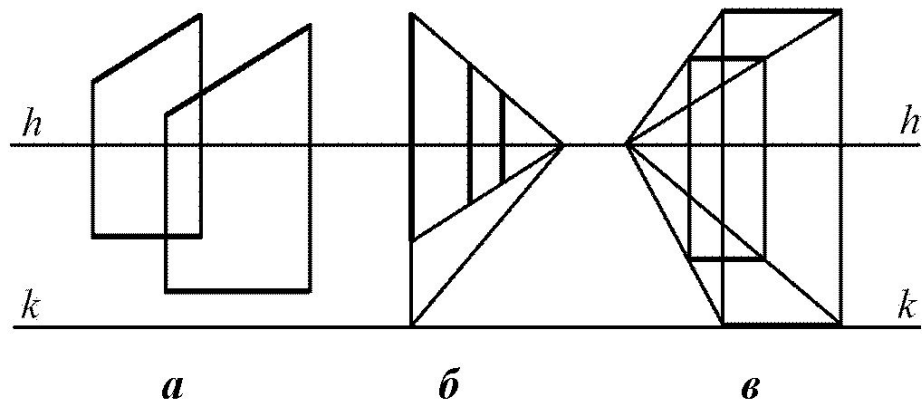


Рис. 12.22

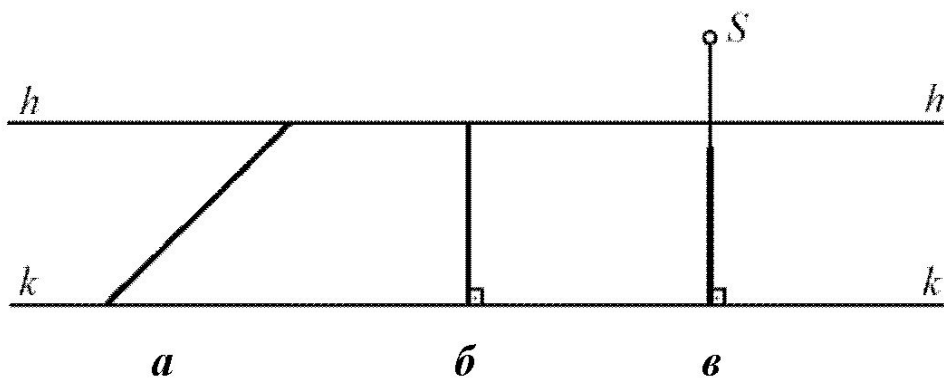


Рис. 12.23

1. Горизонтальна пряма: перспектива і вторинна проекція збігаються в одній точці на горизонті (див. рис. 12.21,*а*).

2. Пряма, що перпендикулярна до картинної площини: перспектива і вторинна проекція збігаються в головній точці картини P (див. рис. 12.21,*б*).

3. Горизонтальна пряма, що розташована під кутом 45° до картини: перспектива і вторинна проекція збігаються в дистанційній точці D (див. рис. 12.21,*в*).

4. Пряма, що паралельна картині: перспектива паралельна самій прямій, а її вторинна проекція – основі картини. Взаємно паралельні прямі, які паралельні картині, паралельні й у перспективі (див. рис. 12.22,*а*).

5. Вертикальні прямі у перспективі також вертикальні, а вторинні їх проекції – точки. Чим більша відстань між кар-

12. ПЕРСПЕКТИВА

тинною площиною та відрізком вертикальної прямої, тим він коротший у перспективі (див. рис. 12.22, **б**).

6. Прямі, які паралельні горизонту або основі картини, і в перспективі є паралельними горизонту або основі картини. Відрізки таких прямих і в перспективі тим коротше, чим далі від картинної площини вони розташовані (див. рис. 12.22, **в**).

7. Пряма, яка належить предметній площині: перспектива і вторинна проекція збігаються (див. рис. 12.23, **а**).

8. Пряма, яка належить предметній площині та проходить через точку зору S , – радіальна пряма, що у перспективі перпендикулярна до основи картини (див. рис. 12.23, **б**).

9. Пряма, яка проходить через точку S : перспектива являє собою точку, а вторинна проекція згідно з попереднім пунктом буде перпендикулярна до основи картини (див. рис. 12.23, **в**).

12.8. Розподіл відрізка прямої на рівні та пропорційні частини

Розподіл відрізка прямої на рівні або пропорційні частини базується на відомій з елементарної геометрії теоремі: сторони кута поділяються паралельними прямими на пропорційні відрізки (рис. 12.24).

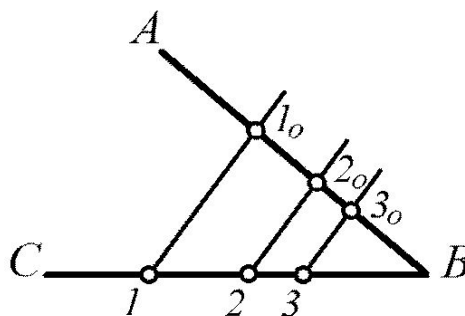


Рис. 12.24

На рис. 12.25 показано розподіл відрізка прямої загального положення на три рівні частини. При цьому спочатку було виконано розподіл на три рівні частини основи відрізка прямої AB . Перспектива основи була взята за одну зі сторін кута, а друга сторона кута проведена паралельно основі картини. На останній були відкладені

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

три довільних, але рівних відрізків. Враховуючи те, що паралельні прямі, які відсікають на сторонах кута рівні відрізки, розташовані у предметній площині, точка їх сходу знаходиться на горизонті.

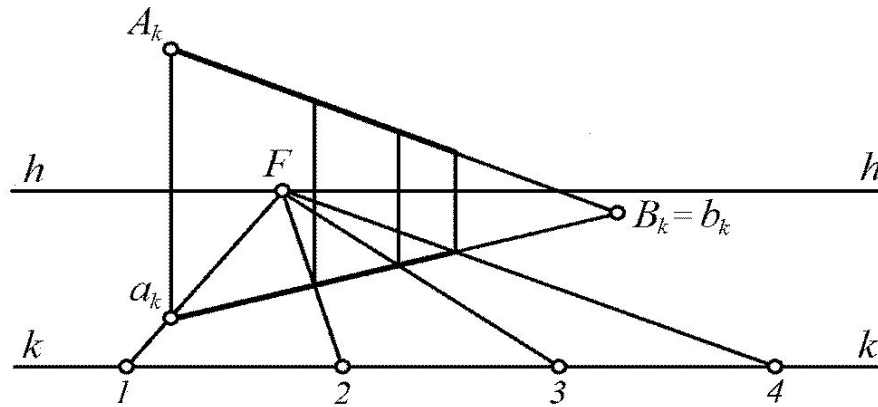


Рис. 12.25

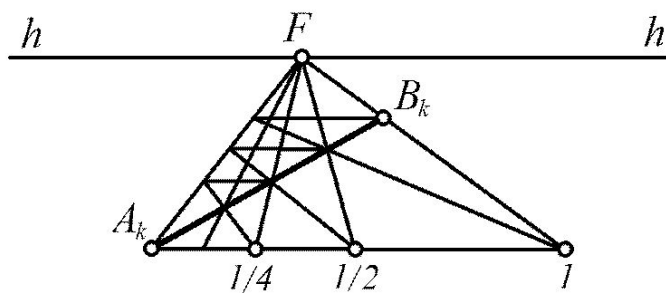


Рис.12.26

На рис. 12.26 та 12.27 зображено, як можна поділити відрізки горизонтальної та нахиленої прямих або збільшити їх кратно двом.

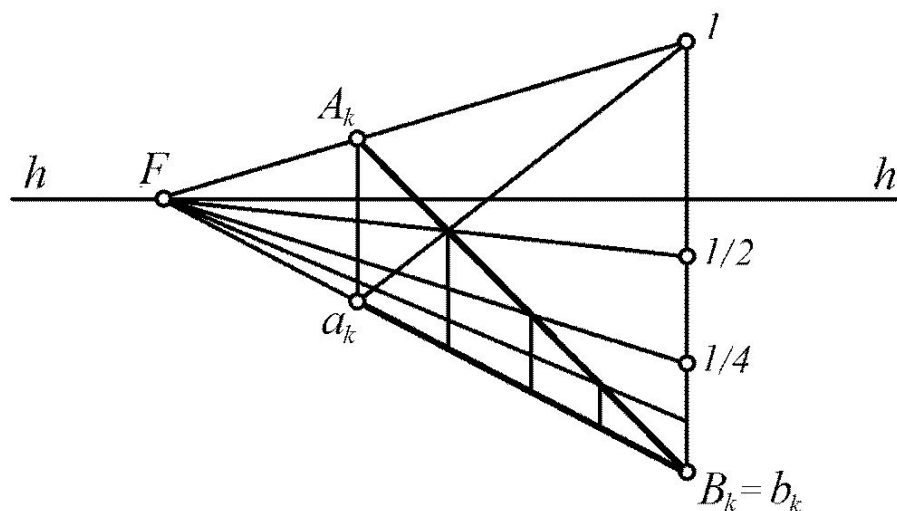


Рис. 12.27

12. ПЕРСПЕКТИВА

12.9. Побудова перспективи паралельних прямих при недосяжній точці сходу

Об'єми переважної більшості інженерних об'єктів – це паралелепіпеди, тобто сукупності паралельних ліній. Тому дуже важливо оволодіти навичками побудови сукупності паралельних прямих, особливо горизонтальних. Як правило, побудова сукупності паралельних прямих з досяжною точкою сходу не викликає будь-яких труднощів. Нагадаємо лише, що для сукупності паралельних прямих, спрямованих паралельно предметній площині, точка сходу розташовується на лінії горизонту. Прямі, що непаралельні предметній площині, мають точку сходу вище або нижче за лінію горизонту в залежності від того, підвищуються або знижуються точки над предметною площиною по мірі їх віддалення від площини картини. Найбільші труднощі викликають побудови сукупності паралельних прямих із недосяжною у межах картини точкою сходу. У зв'язку з цим, розглянемо приклади розв'язання окремих задач такого виду.

На рис. 12.28 через точку A_k проведена пряма, що паралельна прямій, розташованій у предметній площині. При цьому розподіл допоміжних вертикальних відрізків у заданому відношенні здійснюється обов'язково відносно точок, розташованих на лінії горизонту.

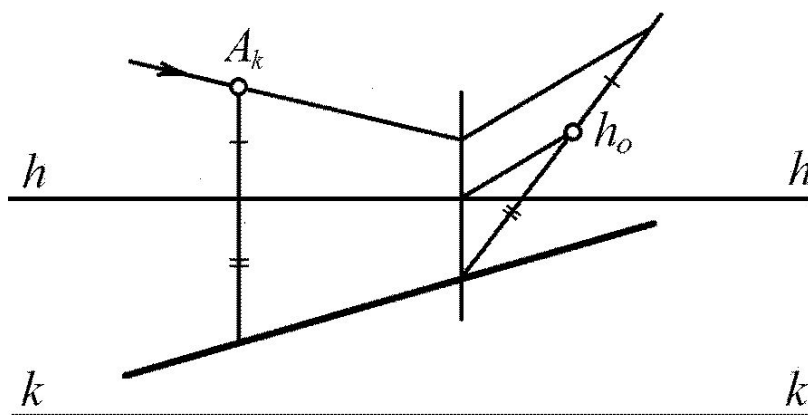


Рис. 12.28

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

Ряд горизонтальних ліній, паралельних заданій, також можна провести через точки допоміжної вертикальної прямої (рис. 12.29).

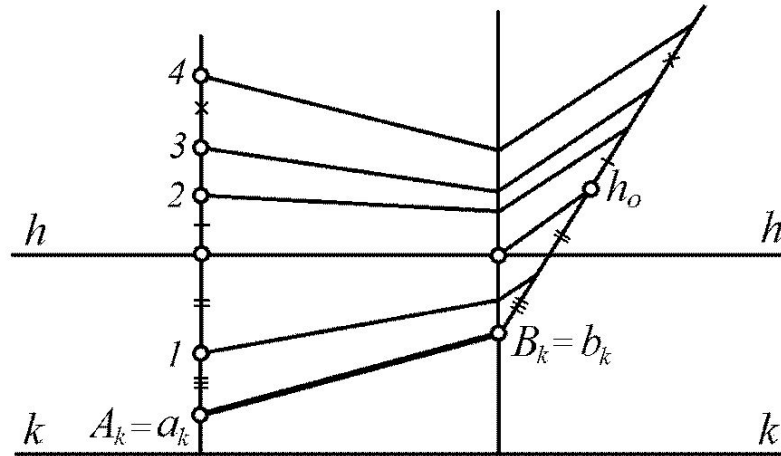


Рис. 12.29

Як і в попередньому випадку слід мати на увазі, що відповідність встановлюється між точками, розташованими на лінії горизонту.

Провести через точку A пряму, паралельну заданій, можна скориставшись точками перетину діагоналей двох трапецій зі спільною боковою стороною на лінії горизонту (рис. 12.30).

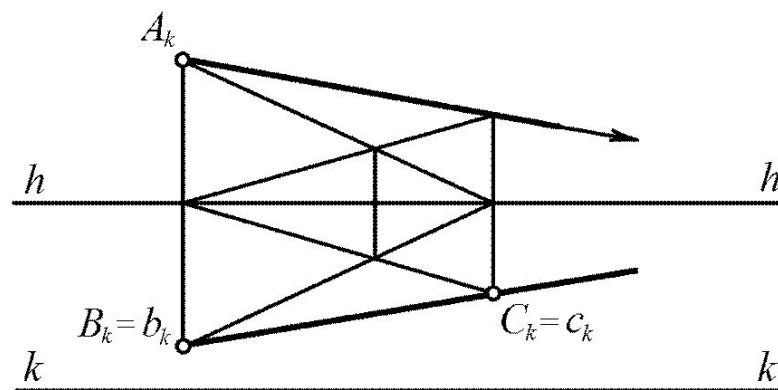


Рис. 12.30

На рис. 12.31, **а, б** показано, як можна провести пряму, паралельну заданій, через задану точку за допомогою паралельних прямих із досяжною точкою сходу.

12. ПЕРСПЕКТИВА

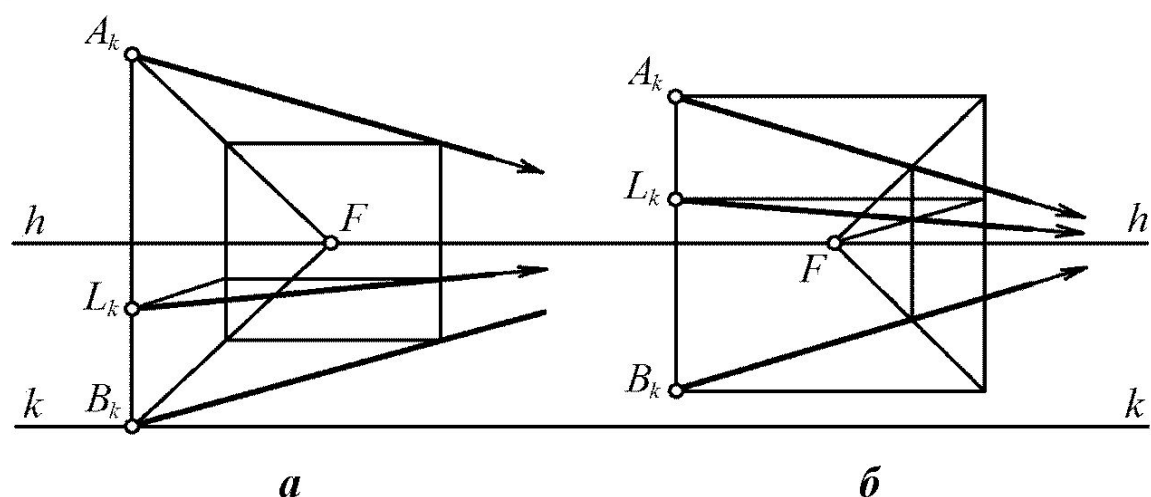


Рис. 12.31

Для проведення ряду паралельних ліній через точки вертикальної прямої у недосяжну точку сходу доцільно скористатися допоміжною вертикальною площиною, горизонталі якої збігаються у досяжній точці на горизонті. Допоміжну площину можна побудувати так, щоб вона мала з основною площиною спільне ближнє (рис. 12.32,*а*) або дальнє ребро (рис. 12.32,*б*).

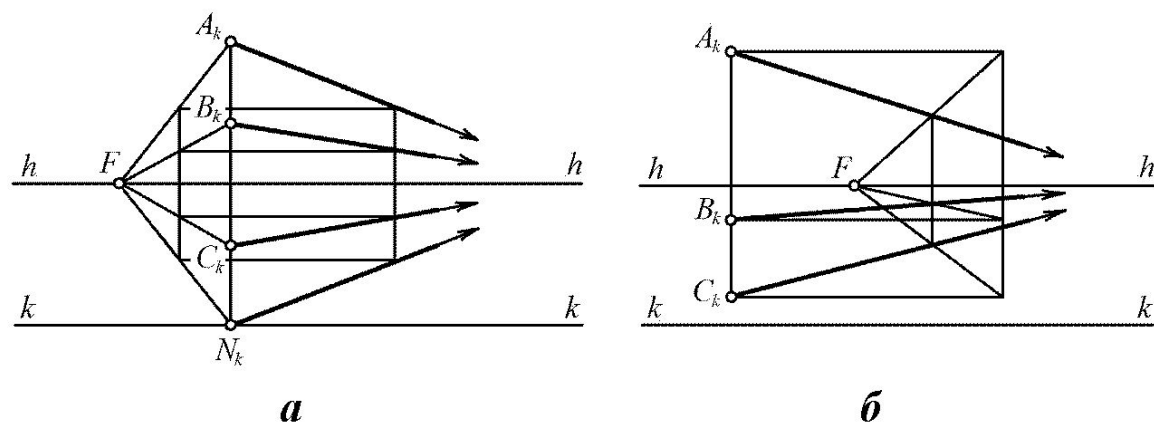


Рис. 12.32

Розглянуті прийоми побудови паралельних прямих зручно використовувати при перевірці правильності перспективних зображень інженерних конструкцій (рис. 12.33,*а,б*). Видно, що отримано невірні напрямки верхніх сторін правих граней.

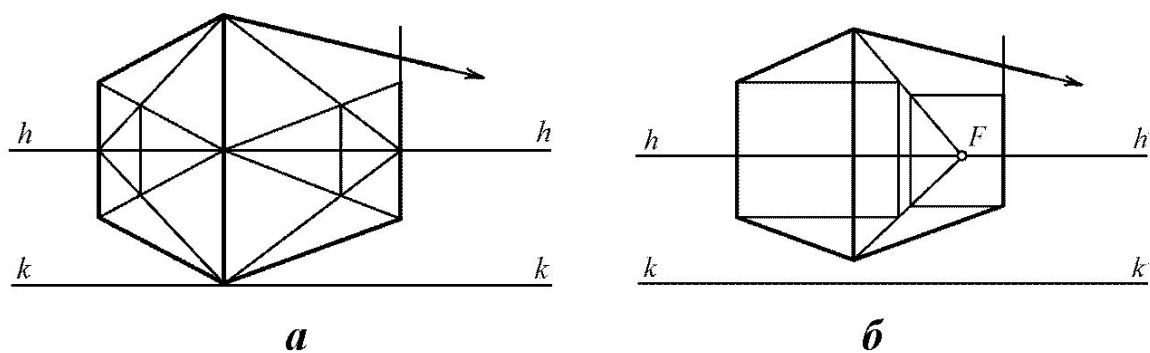


Рис. 12.33

12.10. Перспективний масштаб. Дистанційна точка

При побудові перспективних зображень необхідно не тільки надати уявлення про форму кожного предмету, але й правильно передати розмірні співвідношення, як між його частинами, так і між окремими предметами, зображеними на картині. Одним зі шляхів розв'язання такого роду задач є використання масштабу, який дозволив би встановлювати співвідношення між натуральними і перспективними лінійними розмірами зображення.

Одиниця довжини заданого в натурі лінійного масштабу є на картині змінною величиною. Вона змінюється у залежності від кута нахилу до площини картини, а також від відстані від картини кінців відрізка, який підлягає виміру.

Розглянемо побудову масштабів для виміру відрізків, розташованих у трьох головних напрямках предметного простору. Для цього сумістимо координатну площину xOz з площиною картини, а площину xOy з предметною площиною. Тоді, відповідно, осі координат розташуються: Ox – по основі картини, Oy – перпендикулярно до картини, Oz – вертикально. Перспективи осей Ox і Oz збігуться із самими натуральними осями разом із їх масштабами, тому що розташовані у самій площині картини, а перспектива осі Oy буде спрямована у головну точку P .

12. ПЕРСПЕКТИВА

Перспективні масштаби, побудовані у зазначених напрямках, прийнято називати *масштабами широт, висот та глибин* відповідно (рис. 12.34).

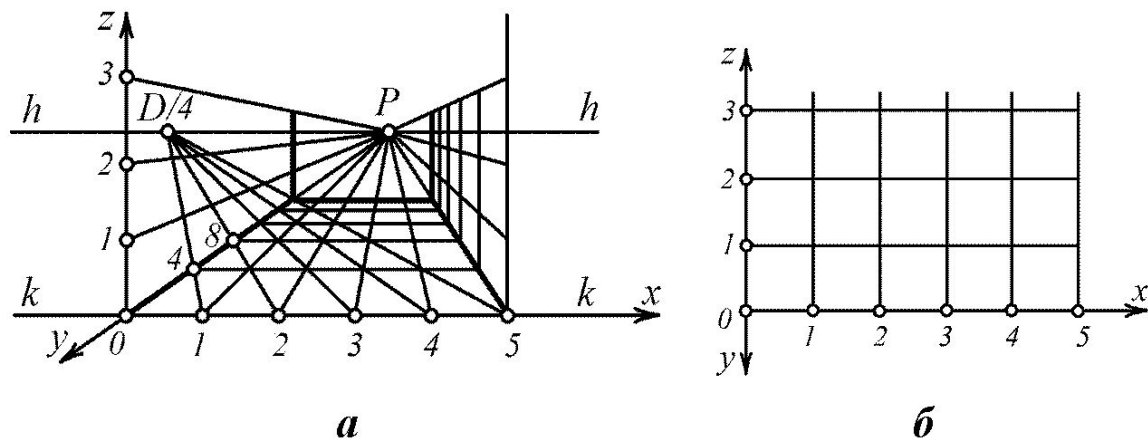


Рис. 12.34

Для визначення масштабних одиниць вздовж осі Oy у перспективі користуються дистанційними точками. На практиці, при побудові перспективних зображень, відстань від картини за довжиною, як правило, значно перевищує лінійні розміри картини, внаслідок чого дистанційна точка виходить за межі аркуша, на якому виконується зображення. У такому випадку для побудови масштабу глибин використовують так звану дробову дистанційну точку. Позначивши відповідну дробову дистанційну точку, її можна використовувати як точку сходу ліній переносу позначок натурального масштабу. За такої побудови кожна позначка натурального масштабу при переносі на перспективний масштаб буде позначати відрізок, який відповідає n одиницям натурального масштабу.

На рис. 12. 34 за допомогою перспективного масштабу побудована перспективна сітка. Для її побудови використана дробова дистанційна точка $D/4$. На такій перспективній сітці координати x і z на одній глибині рівні одна одній, а координата y тим менша, чим глибше точка віддалена від картинної площини.

При визначенні довжин великої кількості вертикально розташованих відрізків дуже зручною є масштабна стінка, що являє собою вертикальну площину, поділену горизонтальними лініями через одиницю висоти, не обов'язково перпендикулярними до картинної площини (рис. 12.35).

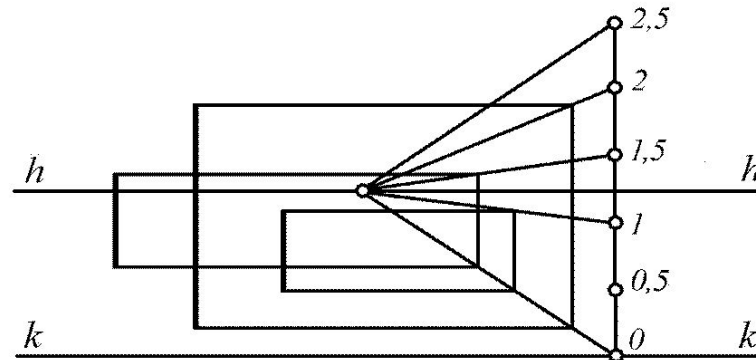


Рис. 12.35

У певних випадках при виконанні перспективних зображень виникає необхідність задавати перспективний масштаб у довільному напрямку. Побудову перспективного масштабу на прямій, розташованій у предметній площині та не перпендикулярній площині картини, зображено на рис. 12.36.

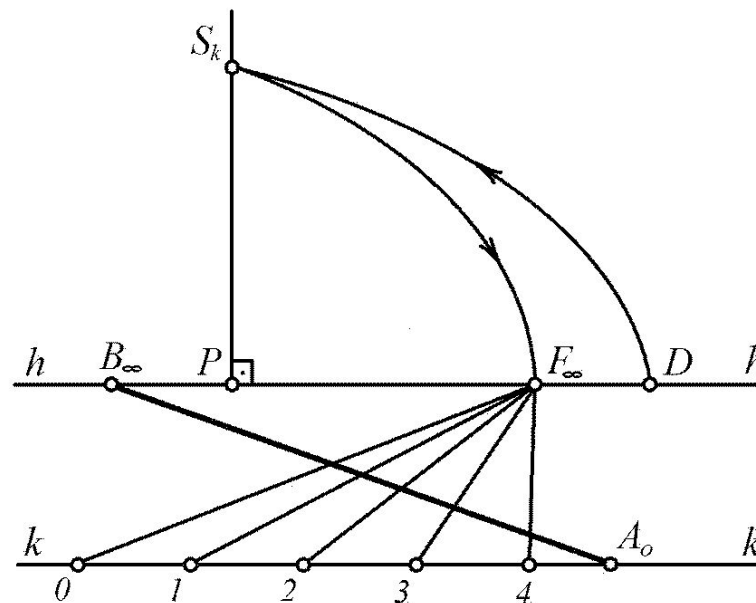


Рис. 12.36

12. ПЕРСПЕКТИВА

Суміщена точка зору побудована за заданими головною та дистанційною точками. Позначки перспективного масштабу на прямій, розташованій у предметній площині, нанесено за допомогою ліній переносу, які проведені через точку F – точку сходу ліній переносу, що має назву *точки виміру* або *масштабної точки*.

12.11. Побудова перспектив кривих ліній. Перспектива кола

Побудова перспективи інженерних та архітектурних об'єктів і споруд круглої форми пов'язана з визначенням перспективи кола. Перспективою кола може бути коло, пряма, еліпс, парабола або гіпербола. Однак при виконанні перспективних зображень, найчастіше виникає необхідність побудови перспективи кола у формі еліпса. У зв'язку з цим розглянемо побудову перспективного зображення кола такого виду.

Для зображення горизонтального та вертикального кола найбільш простим є використання описаного квадрата, сторони якого зручно орієнтувати паралельно і перпендикулярно до площини картини. Перспективи діагоналей тоді визначаються за дистанційними точками (рис. 12.37).

Якщо дистанційна точка опиниться розташованою за межами картини, то можна скористатися дробовими дистанційними точками. Тоді на основі картини відкладається частина відрізка, який підлягає виміру, що відповідає частині дистанційної або головної відстані, яку було використано при побудові. Для спрощення побудови можна задати половину або чверть суміщеного квадрата та, відповідно, половину або чверть кола.

У випадку, якщо восьми точок для зображення кола більшого радіуса буде замало, додаткові точки визначають у місцях

найбільшої кривини. На рис. 12.37 така точка визначена як перетин радіальної прямої з лінією, паралельною стороні описаного квадрата.

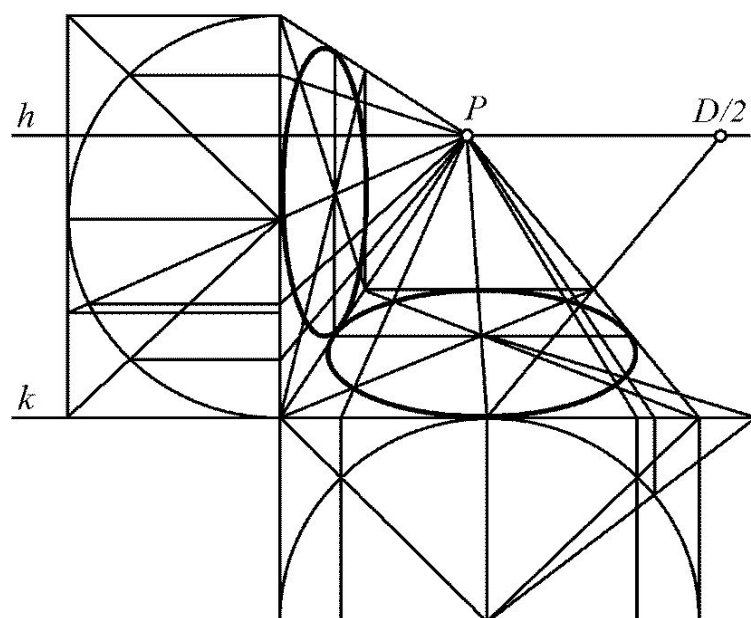


Рис. 12.37

Якщо засвоїти закономірності, що є в основі побудови перспективи кола, то можна легко перейти до побудови на картині сімейства кіл (рис. 12.38).

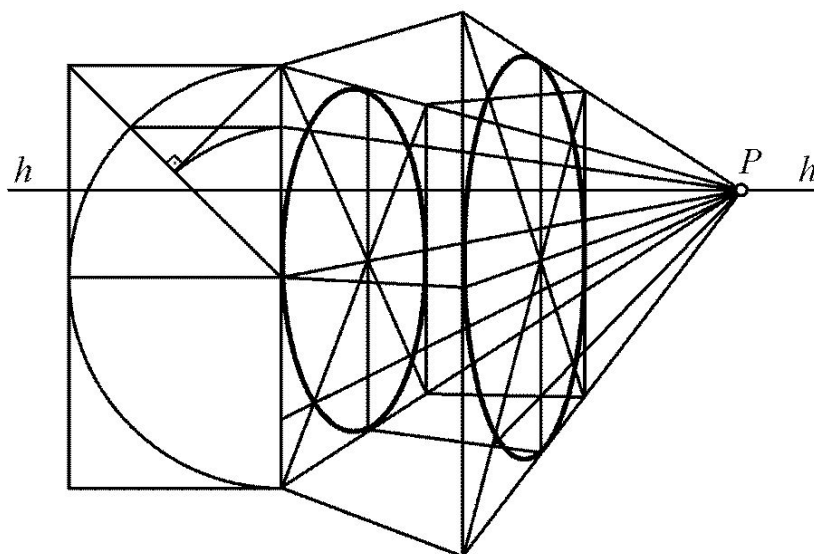


Рис. 12.38

12. ПЕРСПЕКТИВА

12.12. Побудова перспективи кута заданої величини

Побудова будівлі у перспективі, і побудова перспективи інтер'єру, а також їх зовнішнього вигляду часто пов'язана із необхідністю побудови перспективи кута заданої величини і, в першу чергу, розташованого у предметній площині або у площині, якій вона паралельна.

Для побудови на картині кута заданої величини сумістимо площину горизонту з картинною площиною. Побудуємо за суміщеної точки зору S заданий кут у натуральну величину та позначимо точки зустрічі його сторін із лінією горизонту. Тоді будь-який кут на картині з довільною вершиною A і сторонами, спрямованими у визначені точки C та B , відобразить кут, розташований у предметній площині або у площині, що їй паралельна, і рівний за величиною заданому куту (рис. 12.39).

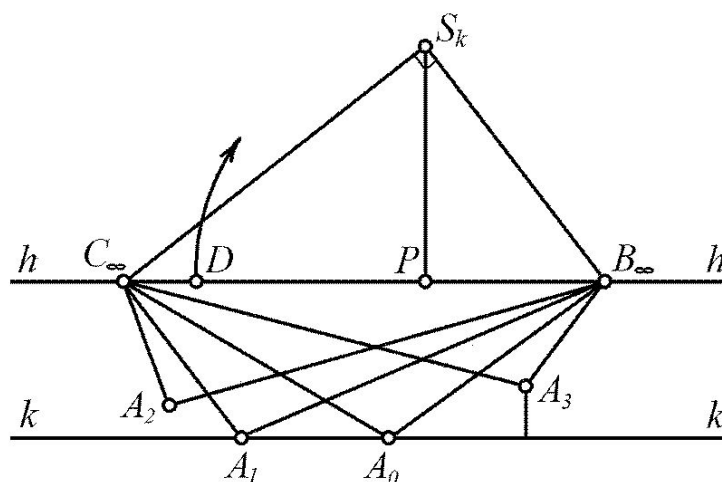


Рис. 12.39

Якщо величина дистанційної або головної відстані не дозволяє розташувати суміщену точку зору в межах картини, то у цьому випадку, як і у попередньому, можна задати будь-яку дистанційну точку і, відповідно, дробову суміщену точку зору (рис. 12.40).

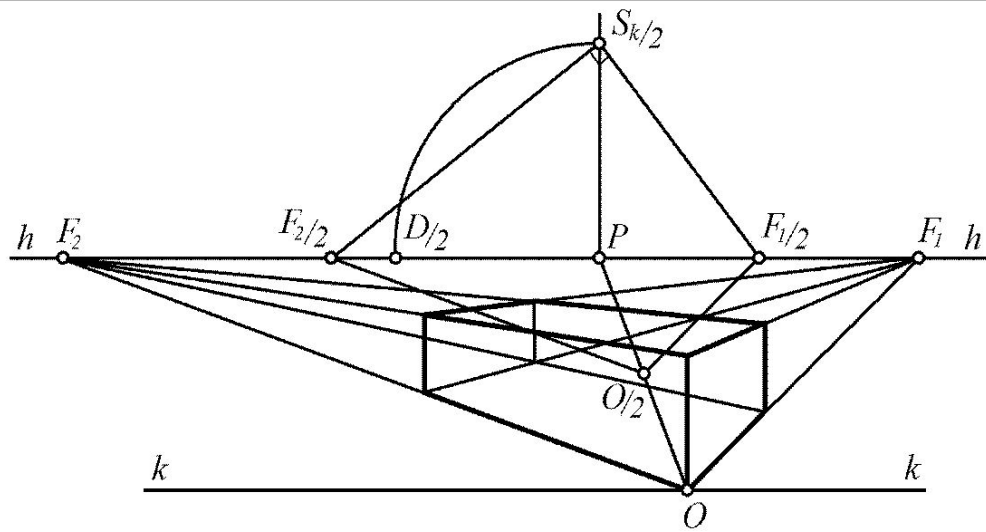


Рис. 12.40

12.13. Перспектива площини

Площина у перспективі може бути задана за допомогою проєкцій тих самих геометричних елементів, якими її визначають у просторі: трьома точками, не розташованими на одній прямій; прямою і точкою, що їй не належить; двома прямими, які перетинаються; двома паралельними прямими. Частіше за все площину в перспективі визначають будь-якою плоскою фігурою, обмеженою відрізками прямих ліній, побудова перспектив яких може здійснюватися на основі встановлених раніше правил.

Іноді при побудові контурів зображень і тіней у перспективі буває зручно використовувати проєкції слідів площини та її лінію сходу. Слідами площини у перспективі будуть лінії її перетину з картинною і предметною площинами (рис. 12.41).

Площина у просторі нескінченна. Для побудови нескінченно віддаленої прямої площини через точку зору проведемо променеву проєкціювальну площину, паралельну заданій площині. Пряма перетину променевої площини з картиною є перспективою нескінченно віддаленої прямої площини R

12. ПЕРСПЕКТИВА

і має назву лінії сходу не тільки площини R , але й усіх площин, які їй паралельні.

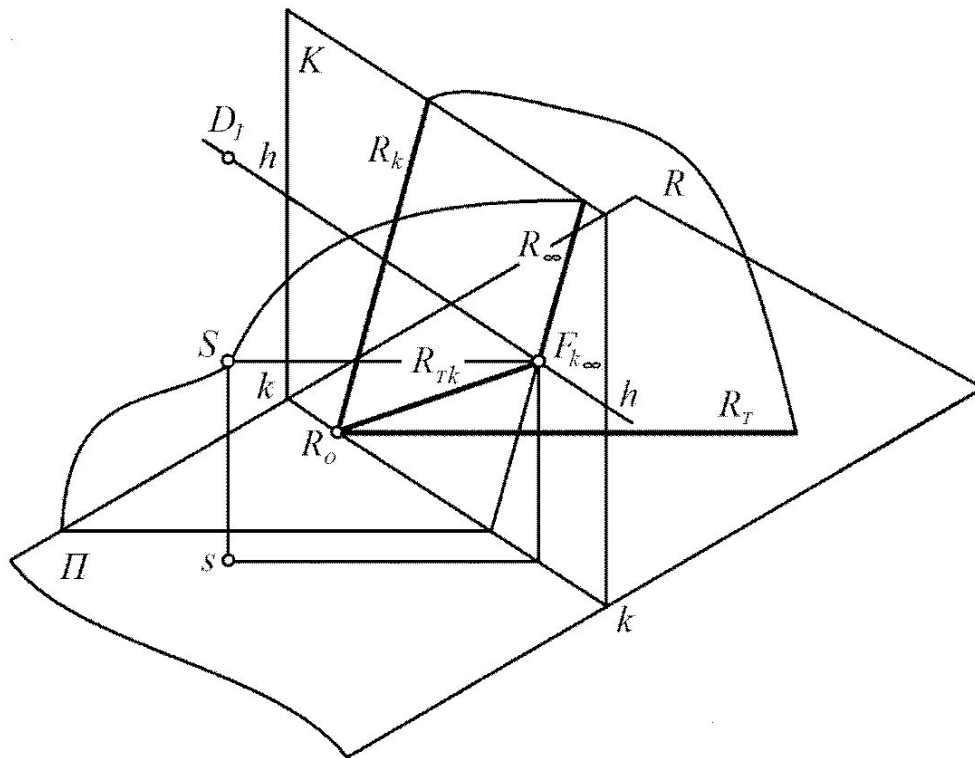


Рис. 12.41

Лінія сходу і картинний слід площини взаємно паралельні, які прямі, отримані у результаті перетину двох паралельних площин третьою площиною – площиною картини (рис. 12.42).

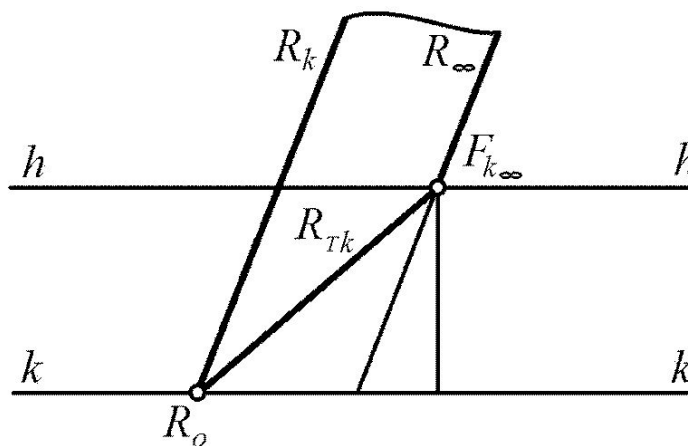


Рис. 12.42

12.14. Побудова перспективи за заданими ортогональними проекціями. Метод архітекторів

Як вже зазначалося, побудова перспективи різних будівель та інженерних споруд пов'язана із заданням великої кількості паралельних прямих. Тому для зображення такого типу об'єктів доцільно скористатися методом, який у технічній літературі називається *методом архітекторів* і ґрунтується на побудові точок сходу сукупності домінуючих паралельних прямих.

На рис. 12.43 задані дві ортогональні проекції умовного об'єкта. Крім цього, на креслені відображено положення основи картини, основи головної точки, висота горизонту і проекції точки зору. На основі картини знайдені проекції точок сходу двох сукупностей паралельних прямих I і II. На основі картини визначено початки прямих – 1, 2, 3, 4.

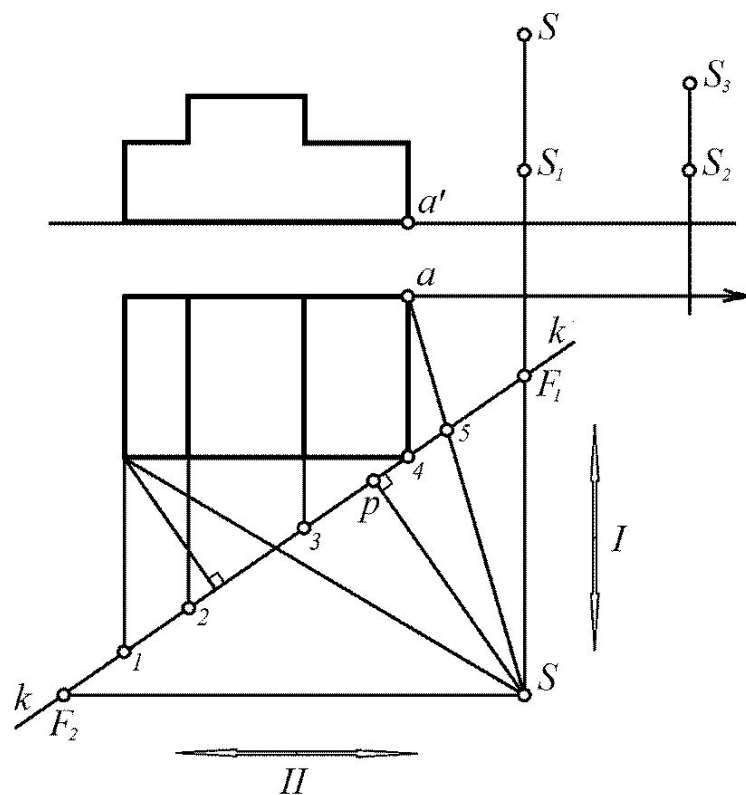


Рис. 12.43

12. ПЕРСПЕКТИВА

На рис. 12.44 подано побудову перспективного зображення основи заданої геометричної форми, а на рис. 12.45 – заданого тіла у цілому.

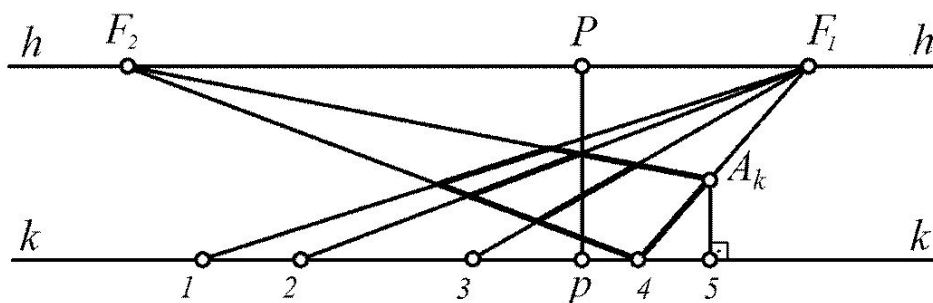


Рис. 12.44

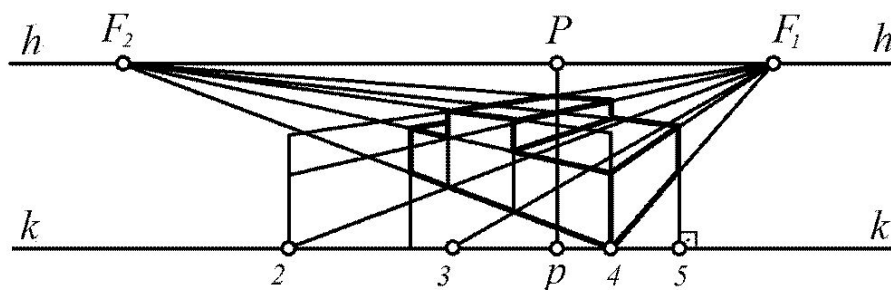


Рис. 12.45

Для побудови перспективи основи або плану з ортогональних проекцій на основу картини було перенесено початкові точки прямих і основу головної точки, а на лінії горизонту позначено головну точку і точки сходу F_1 і F_2 (див. рис. 12.44). Точки плану у перспективі визначені на перетині перспектив відповідних прямих двох сукупностей. У випадку, якщо початкова точка будь-якої з паралельних прямих опиниться за межами картини, як початкова точка прямої, що паралельна напрямку Π і проходить через вершину A , то перспектива вершини може бути побудована за допомогою прямої, яка проходить через цю точку і перпендикулярна до площини картини.

При побудові перспективи у цілому треба мати на увазі, що висотні розміри ребер будуть проєкціюватися у натуральну

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

величину тільки в тому випадку, коли вони розташовані у картинній площині або суміщені з нею. На рис. 12.45 висоти ребер, розташованих у глибині картинної площини, визначені за допомогою сукупності домінуючих паралельних прямих із точками сходу F_1 і F_2 .

Побудова перспективи, як правило, починається із задання перспективи плану зображуваного предмету. Для того, щоб не засмічувати поле основного зображення і забезпечити більш високу точність графічних операцій, доцільно скористатися додатковим планом, який побудовано у горизонтальній площині, розташованій на деякій глибині від предметної площини (рис. 12.46). Тоді основа картини переміститься вниз на деяку величину разом із позначеними на ній точками. Точки нового та заданого плану при цьому розташуються на вертикальних лініях зв'язку, а точки сходу однойменних прямих двох планів будуть розташовані на лінії горизонту. Перспективи вертикальних ребер будують при цьому із точок заданого плану або основи предмету, а їх висоти, які суміщено з картиною, відкладають від заданої основи картини.

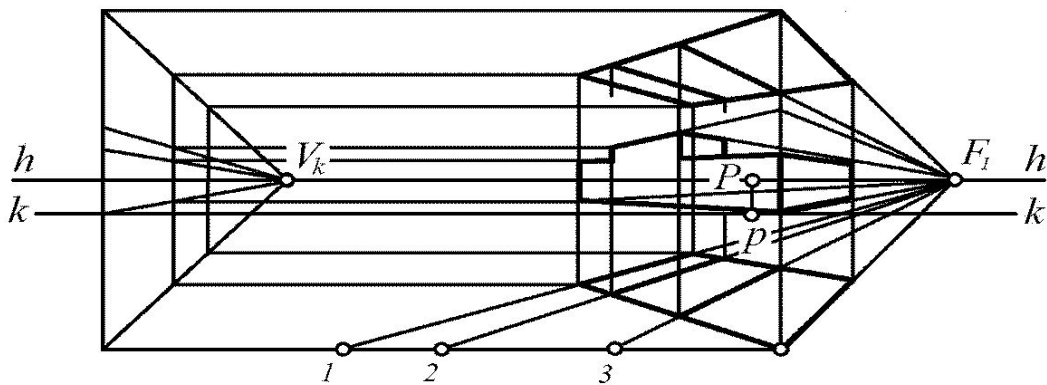


Рис. 12.46

Якщо неможливо винести план униз, то з таким же успіхом його можна підняти над перспективою. Це особливо зручно, якщо найбільш складною і насиченою деталями є верхня сторона зображуваного предмета.

12. ПЕРСПЕКТИВА

Розглянуті додаткові побудови прийнято називати *додатковим* або *опущеним планом*.

Ще одною формою допоміжної побудови, яку широко використовують при побудові перспективи, є, бокова стіна. Її вводять для того, щоб при зображенні чисельних висот сітка допоміжних ліній не накладалася на основне зображення. На рис. 12.46 висоти умовного об'єкту побудовані за допомогою бокової стіни з точкою сходу горизонталей V_k (точка зору S_2 , див. рис. 12.43). Допоміжні проекції перспектив основ ребер із заниженого плану винесено на основу допоміжної бокової площини, далі по вертикальних лініях зв'язку в перетині з відповідними горизонталями позначені верхні точки ребер, а після цього зворотним переміщенням, паралельним картинній площині, визначені перспективи ребер на потрібних глибинах.

12.15. Вибір точки і кута зору

Зображення, побудоване за законами лінійної перспективи, відповідає зоровому уявленню предмета одним оком при нерухомому його положенні перед предметом. Для того, щоб контур предмета на картині відповідав звичному уявленню, яке отримано при нормальному розгляді предмета в натурі, має бути виконано декілька умов.

1. Кут зору треба обирати наближеним до 30° . Для різних людей він коливається у межах $18 \dots 53^\circ$. При цьому напрям головного променя зору повинен збігатися із бісектрисою кута зору (рис. 12.47).

2. Відстань точки зору від картини можна взяти рівною і більшою за подвійну діагональ рамки картини, якщо вважати, що остання має форму прямокутника, вписаного у коло поля зору.

3. Площину картини слід орієнтувати щодо найбільш виразної сторони об'єкта під кутом $20 \dots 45^\circ$. Зручно суміщувати картинну площину з ближнім ребром зображуваного предмета.

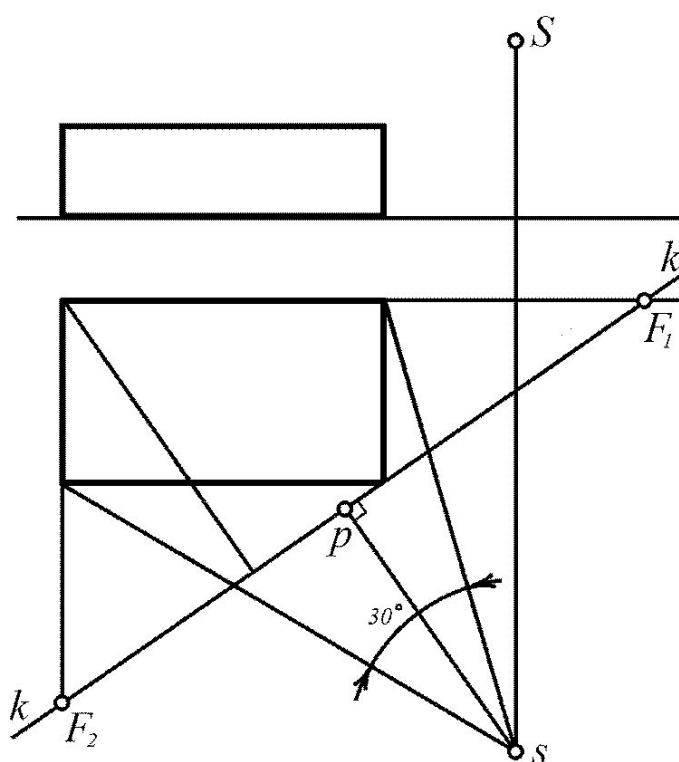


Рис. 12.47

4. Висоту точки зору часто обирають на рівні очей людини, яка стоїть. У цьому випадку, якщо найбільш виразним є зображення предмета при погляді на нього знизу або зверху, то точку зору можна відповідним образом пересувати по висоті (див. рис. 12.43). Точкам зору S_1 , S_2 , S_3 , S_4 відповідають зображення на рис. 12.26, 12.27, 12.29, 12.30.

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

13.1. Загальні відомості, визначення, класифікація

При зображенні різних геометричних предметів, таких, як машина чи будівля, вузол або деталь, у залежності від поставленої технічної задачі, обирають такі проекції, які зможуть забезпечити або найбільшу наочність, або найменшу трудомісткість побудов, або зручність виміру окремих частин і всього предмета у цілому. При цьому доводиться віддати перевагу чомусь одному, оскільки перелічені вище властивості зображень в основному суперечливі. Ортогональні проекції, як правило, є найменш трудомістким способом зображення предметів, але вони не мають достатньої наочності. Це пояснюється тим, що при зображенні предметів прагнуть так розташувати їх відносно площин проекцій, щоб найбільш важливі грані, ребра та осі були паралельними або перпендикулярними до цих площин. У випадку, коли предмет є складним за формою (наприклад, машина або будівельна конструкція), відсутність наочності іноді стає перешкодою для правильного читання креслення, тому стає необхідним доповнити креслення зображенням, яке має достатню наочність. Найбільшу наочність зображення, безумовно, має перспектива, але вона трудомістка і не дозволяє без допоміжних, іноді достатньо складних

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

побудов, розв'язувати метричні задачі. Виникає необхідність у таких зображеннях, які б не мали зазначених недоліків. Це аксонометричні проекції.

Аксонометричні проекції належать до паралельних проєкцій і, відповідно, володіють усіма їх властивостями. Для них використовуються також основні положення паралельних проєкцій: аксонометричні проєкції паралельних прямих паралельні між собою; рівні відрізки, які належать паралельним прямим, проєкціюються у рівні відрізки; якщо точка ділить відрізок у певному співвідношенні, то її аксонометрична проєкція ділить аксонометричну проєкцію відрізка у тому ж співвідношенні.

Людина, не знайома з методами ортогонального проєкціювання на три площини проєкцій, навряд чи, зможе одразу уявити, що вона бачить на рис. 13.1.

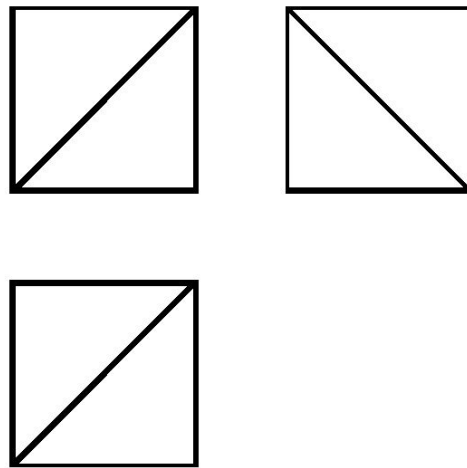


Рис. 13.1

Щоб полегшити процес просторової уяви використовуються аксонометричні проєкції. На рис. 13.2 наведено приклад цього креслення, виконаного в аксонометричній проєкції. На ньому показано зображення куба з вирізом в аксонометричній проєкції і його проєкції на три взаємно перпендикулярні площини. Тепер зрозуміло, як отримуються ортогональні проєкції фігури.

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

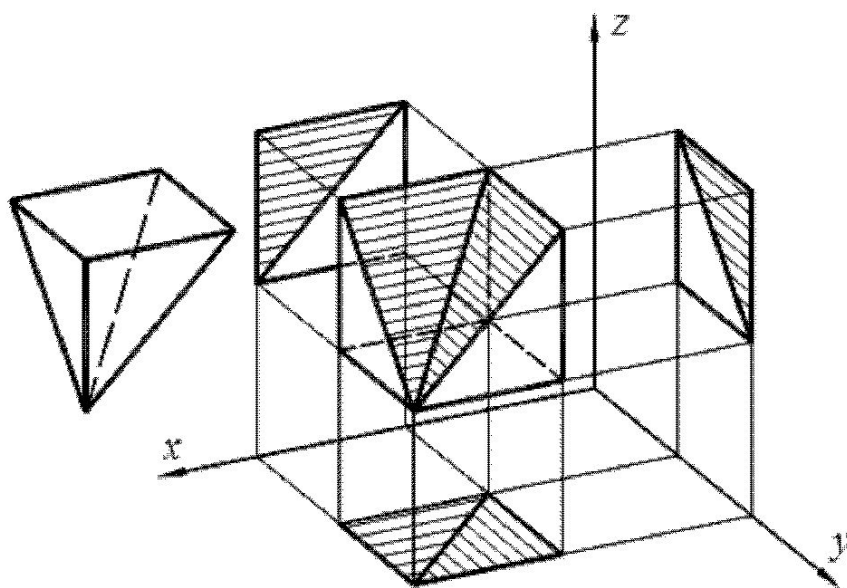


Рис. 13.2

Отже, за допомогою аксонометричних проєкцій можна показати конструктивну будову як цілого виробу, так і будову окремих його частин, технологічні процеси обробки, складання та монтажу. Аксонометричні проєкції використовують для передачі технічного задуму автора при проектуванні та конструюванні нових виробів.

При розгляді наочного зображення відомості про предмет формуються лише на основі єдиного образу, представленого з однієї нерухомої точки зору. На наочному зображенні має бути видно найбільшу кількість складових частин предмета, які виявляють його форму в цілому. Окремі частини предмета не повинні повністю закривати інші його частини.

Аксонометричною проєкцією або просто аксонометрією предмета (з грецької "ахон" – вісь та "metreo" – вимірюю) називається зображення, отримане шляхом проєкціювання паралельними променями геометричного предмета разом із осями прямокутних координат x , y , z , до яких він віднесений у просторі, на довільно розташовану площину Π' , що має назву "аксонометричної площини". Проєкції на неї осей Ox , Oy , Oz

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

називаються аксонометричними осями – $0'x'$, $0'y'$, $0'z'$. Розмір кута між ними залежить від напрямку проєкціювання s і положення площини Π' відносно осей x , y , z .

Якщо напрям проєкціювання s є перпендикулярним до аксонометричної площини проєкцій, така аксонометрична проєкція називається *прямокутною*, якщо ж напрям проєкціювання не перпендикулярний до аксонометричної площини проєкцій – *косокутною*.

Розглянемо відрізок e (рис. 13.3), який є одиницею масштабу при вимірюванні оригіналу (тобто у просторі). Відкладемо цю масштабну одиницю від початку координат O по координатних осях x , y , z . Тоді $e_x = e_y = e_z = e$. Назвемо їх *натуральними масштабами*.

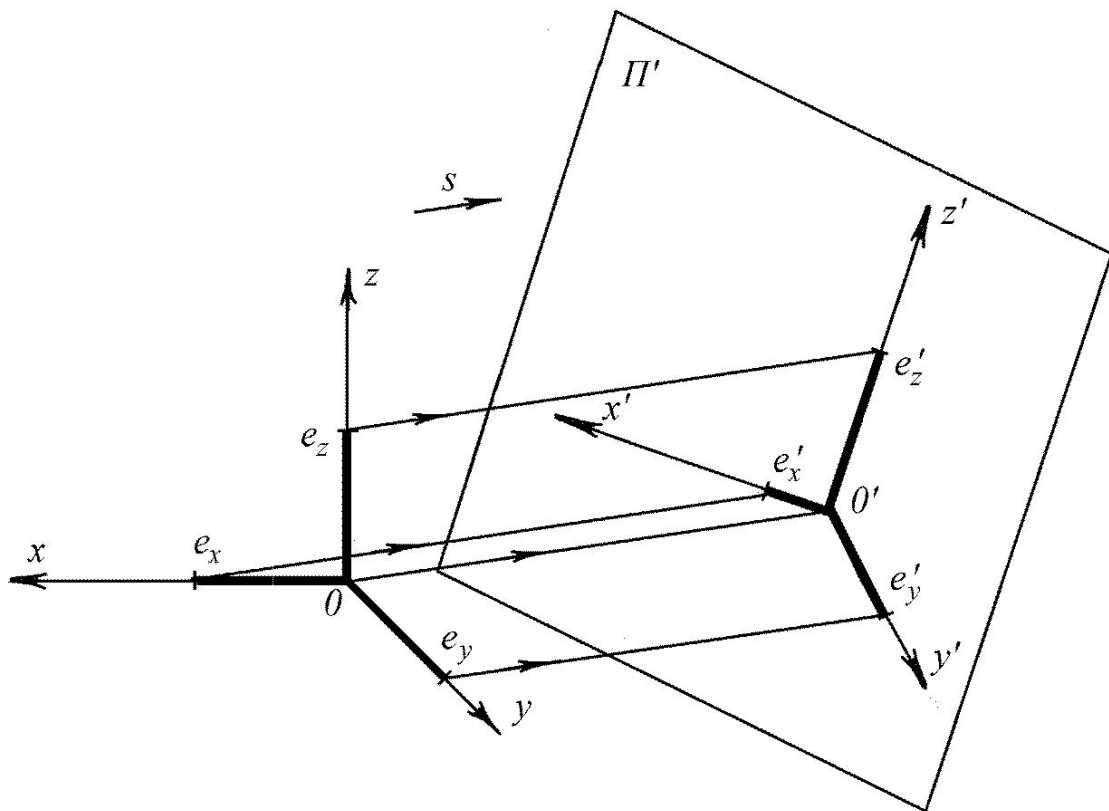


Рис. 13.3

Спроеціюємо ці натуральні масштаби за напрямом s на відповідні аксонометричні осі $0'x'$, $0'y'$, $0'z'$. Отримані проєкції

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

e'_x, e'_y, e'_z будемо називати аксонометричними масштабами. Видно, що у загальному випадку $e'_x \neq e'_y \neq e'_z \neq e$ (рис. 13.3).

Отже, кожна аксонометрична вісь має свій масштаб, який відрізняється від натурального. Однак користуватися масштабами при побудові аксонометричних проекцій незручно, тому на практиці використовують так звані коефіцієнти (показники) спотворення.

Відношення аксонометричного масштабу до натурального називається *коефіцієнтом спотворення* по даній осі:

$$u = \frac{e'_x}{e_x} - \text{коефіцієнт спотворення по осі } 0x;$$

$$v = \frac{e'_y}{e_y} - \text{коефіцієнт спотворення по осі } 0y;$$

$$w = \frac{e'_z}{e_z} - \text{коефіцієнт спотворення по осі } 0z.$$

Ці коефіцієнти спотворення є натуральними. Вони показують, у скільки разів відбулося спотворення розмірів оригіналу вздовж аксонометричних осей при його проєкціюванні на аксонометричну площину. Для прямокутної аксонометрії коефіцієнт спотворення завжди менше одиниці, а для косокутної він може бути будь-яким.

Усі натуральні коефіцієнти спотворення пов'язані між собою певними співвідношеннями:

$$- \text{ для прямокутної аксонометрії } u^2 + v^2 + w^2 = 2;$$

$$- \text{ для косокутної аксонометрії } u^2 + v^2 + w^2 > 2.$$

У залежності від напрямку проєкціювання s на аксонометричну площину Π' та кутів нахилу координатних осей $0x, 0y, 0z$

до цієї площини можуть бути отримані різні види аксонометричних проєкцій одного й того ж предмета. Однак, побудова довільної аксонометрії пов'язана з певними труднощами обчислювального характеру.

13.2. Види аксонометричних проєкцій

Співвідношення між коефіцієнтами спотворення визначають той чи інший вид аксонометричної проєкції. Оскільки існує три різних коефіцієнти спотворення, то можливе існування трьох різних видів аксонометричних проєкцій – ізометрії, диметрії та триметрії.

Розглянемо, які співвідношення між коефіцієнтами спотворення визначатимуть той чи інший вид аксонометричної проєкції.

На рис. 13.4 показано довільну аксонометричну площину Π' , яка перетинає осі x, y, z ортогональної системи координат відповідно у точках P'_x, P'_y і P'_z . Точка O' є прямокутною аксонометричною проєкцією початку координат O на аксонометричну площину Π' . З'єднавши O' прямими лініями з P'_x, P'_y і P'_z , отримаємо аксонометричні осі координат x', y', z' та кути α, β, γ які вони утворюють із осями ортогональної системи координат.

Отже, як вже було зазначено, можливі три варіанти співвідношення між коефіцієнтами спотворення.

1. Аксонометрична площина проєкцій Π' займає таке положення відносно площин Π_1, Π_2, Π_3 , за якого $\alpha = \beta = \gamma$, унаслідок чого $u = v = w$ (за трьома напрямками коефіцієнти спотворення однакові). Такий вид аксонометричної проєкції називається *ізометрією*.

У цьому випадку матимемо $3u^2 = 2$, звідки $u = v = w = 0,82$. Аксонометричні осі x', y', z' утворюють між собою кут 120° .

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

2. Аксонометрична площина проєкцій Π' займає таке положення відносно площин Π_1, Π_2, Π_3 , за якого $\alpha = \gamma \neq \beta$, унаслідок чого $u = w \neq v$ (за двома напрямками коефіцієнти спотворення однакові). Такий вид аксонометричної проєкції називається *диметрією*.

Можна так підібрати кут β нахилу осі до площини Π' , що коефіцієнт спотворення v вздовж аксонометричної осі y' буде вдвічі менший за коефіцієнти u і w , тобто $v = 0,5$.

Якщо розглядати прямокутний вид аксонометричної проєкції, то за таких співвідношень між коефіцієнтами спотворення з формули $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ отримуємо $2u^2 + 0,25u^2 = 2$, звідки матимемо значення натуральних коефіцієнтів спотворення: $u = w = 0,94$; $v = 0,47$.

Аксонометричну вісь z' зазвичай розташовують вертикально. Кут нахилу осі x' до горизонтальної лінії дорівнює $41^\circ 25'$.

3. Аксонометрична площина проєкцій Π' займає довільне положення відносно площин Π_1, Π_2, Π_3 . Тоді $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, унаслідок чого $u \neq v \neq w$, що дає безліч варіантів аксонометричних проєкцій. Такий вид аксонометричної проєкції називається *триметрією*.

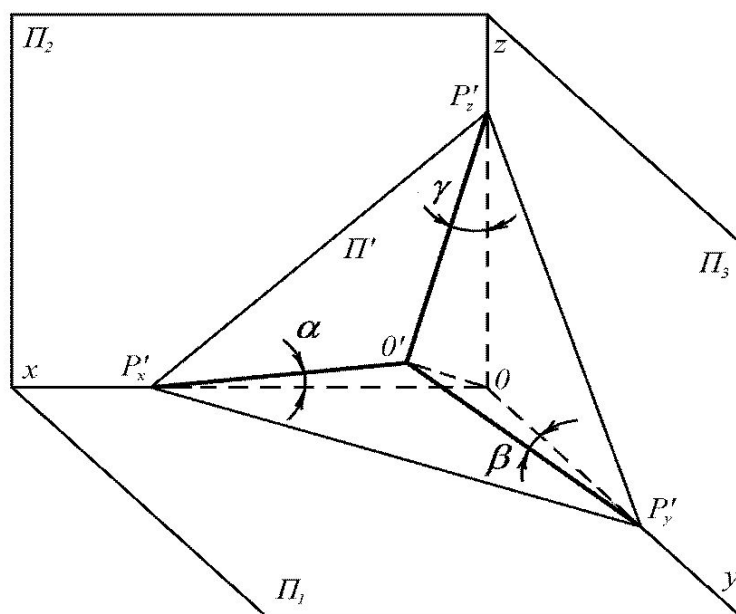


Рис. 13.4

Один із можливих варіантів триметричної проекції, коли вісь x' нахилена до горизонтальної прямої лінії під кутом 15° , вісь y' утворює з горизонтальною лінією кут 30° , вісь z' розташована вертикально. Кут між осями x' і y' дорівнює 135° .

13.3. Стандартні аксонометричні проекції

На підставі викладеного вище матеріалу можна зробити висновок, що побудова довільної аксонометричної проекції викликає певні труднощі. По-перше, потрібно визначати напрями аксонометричних осей, для чого необхідно виконувати деякі розрахунки. По-друге, необхідно знаходити коефіцієнти спотворення по цих осях. Для цього також потрібно робити розрахунки, результатом яких, можна впевнено стверджувати, будуть різні за величиною дробові значення коефіцієнтів спотворення. Усе це суттєво ускладнює і без того непростий процес побудови аксонометричних проекцій.

Чинною в Україні системою стандартизації оформлення графічної конструкторської документації передбачені певні заходи з уніфікації та спрощення виконання аксонометричних проекцій. За ГОСТ 2.317–69 рекомендовано використовувати два види прямокутних аксонометричних проекцій (ізометричну і диметричну) та три види косокутних аксонометричних проекцій (фронтальну ізометричну, горизонтальну ізометричну і фронтальну диметричну). Ці аксонометричні проекції називаються стандартними, вони відрізняються простотою побудови та є достатньо наочними. При їх виконанні передбачається, що напрям погляду на зображувану деталь відбувається зліва-зверху.

13.3.1. Прямокутна ізометрія

Розглянемо побудову прямокутної ізометрії на прикладі деякої умовної деталі, ортогональне трикартинне креслення якої наведено на рис. 13.5.

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

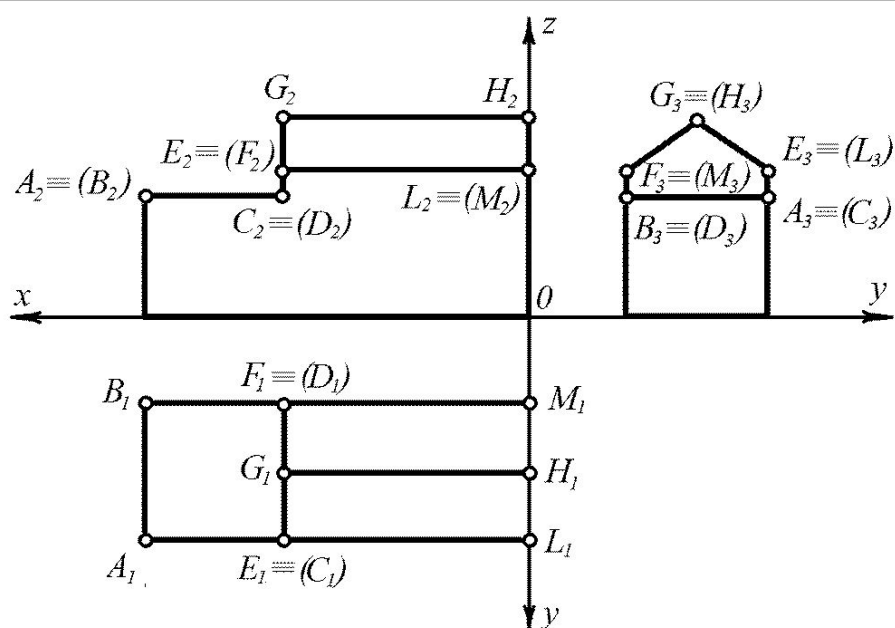


Рис. 13.5

Спочатку будують аксонометричні осі проекцій, кут між якими дорівнює 120° .

Аксонометрію починають будувати з проєкціювання на аксонометричну площину опорних (характерних) точок деталі $A, B, C, \dots$. Кожну із цих точок будують за її координатною ламаною, ланками якої є координати x, y, z конкретної точки, взяті з урахуванням натуральних коефіцієнтів спотворення ($u = v = w = 0,82$). Опорні точки в аксонометричній площині показані на рис. 13.6,а. З'єднавши їх у певному порядку і побудувавши решту елементів деталі, отримаємо її аксонометричну проєкцію (див. рис. 13.6,б), на якій літерами позначені тільки видимі точки.

Слід зазначити, що у залежності від взаємного розташування ортогональної системи координат і аксонометричної площини проєкцій Π' при прямокутному проєкціюванні можна отримати три види прямокутних аксонометричних проєкцій: ізометрію, диметрію та триметрію, які розрізняються не тільки видами аксонометричних осей проєкцій, а й значеннями коефіцієнтів спотворення за ними.

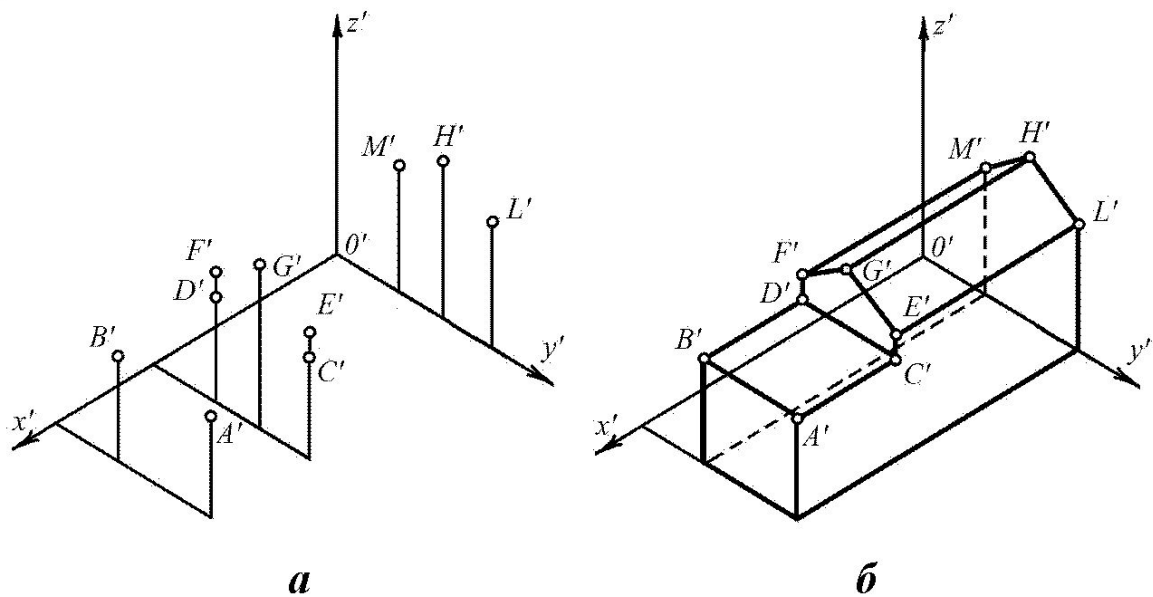


Рис. 13.6

На рис. 13.7,*а* зображена сфера у прямокутній ізометричній проекції, діаметр якої дорівнює одиниці вимірювання. Розташуємо цю сферу всередині куба, ребра якого також дорівнюють одиниці за напрямом аксонометричних осей (рис. 13.7,*б*). Спроекціюємо сферу на грані куба. Такий вид проєкціювання називається третьоквдантним (американським). Як бачимо, проєкції сфери на грані куба менші за розміром (спотворені), тобто відрізок координатної осі довжиною 1 мм у прямокутній ізометрії відобразиться відрізком аксонометричної осі довжиною 0,82 мм. Співвідношення $1 / 0,82 = 1,22$ разу визначає коефіцієнт масштабування на який необхідно збільшити сферу без порушення пропорційності її елементів (рис. 13.7,*в*).

Число 1,22 називають коефіцієнтом приведення, а отримані таким чином збільшені коефіцієнти спотворення $U = 1$, $V = 1$, $W = 1$ – *приведеними коефіцієнтами спотворення*. Тепер проєкції сфери у вигляді еліпсів вписуються у грані куба (рис. 13.7,*г*). Велика вісь еліпса складає 1,22 діаметра d проєкційного кола сфери (екватор, фронтальний меридіан, профільний меридіан), а мала вісь еліпса – 0,71 діаметра. Розта-

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

шуємо сферу у звичному нам (європейському) першоквADRантному вигляді проектування. На рис. 13.8,*а* наведені співвідношення для визначення довжини відрізків великої $[AB]$ і малої $[CD]$ осей еліпсів. Величина відрізків $[1, 2]$ і $[3, 4]$ дорівнює діаметру проекційного кола сфери, а у загальному випадку – діаметру циліндра або отвору на фігурі.

В аксонометричних проекціях, як і в ортогональних, для визначення внутрішніх форм деталі (порожнин, отворів тощо) використовуються умовні вирізи, які виконуються січними площинами рівня. У тих місцях, де січні площини перетинають матеріал деталі, застосовується штриховка, яка зображується сукупністю тонких паралельних ліній.

Напря́м ліній штриховки залежить від розташування січних площин, які можуть бути паралельними горизонтальній, фронтальній або профільній площині проекцій ортогональної системи координат. У прямокутній ізометрії слід дотримуватися наведеного на рис. 13.8,*б* правила штриховки.

При зображенні аксонометричних проекцій для спрощення побудови дозволяється еліпси замінювати овалами, які окреслені дугами кіл. Способи побудови овалів ретельно розглянуті у довідниковій літературі.

Розглянемо спосіб побудови овалу за двома його осями $[AB]$ і $[CD]$ (рис. 13.9,*а*). Побудова овалу проводиться дугами кіл із центрів O_1, O_2, O_3 та O_4 .

Для визначення центрів O_1 і O_2 відкладають на малій осі відрізок $OE = OA$, тобто довжину великої піввсі. Різницю півосей CE відкладають від точки C на прямій AC , яка з'єднує кінці цих осей. Далі з середини відрізка AE_1 будують перпендикуляр, перетин якого з даними осями визначає центри O_1 і O_2 . Два інших центри O_3 та O_4 визначаються як точки, що є симетричними до O_1 і O_2 . Дуги $KA K_1$ та NBN_1 проводяться з центрів O_1 і O_3 радіусом O_1A , дуги KCN та K_1DN_1 – із центрів O_2 і O_4 радіусом O_2C .

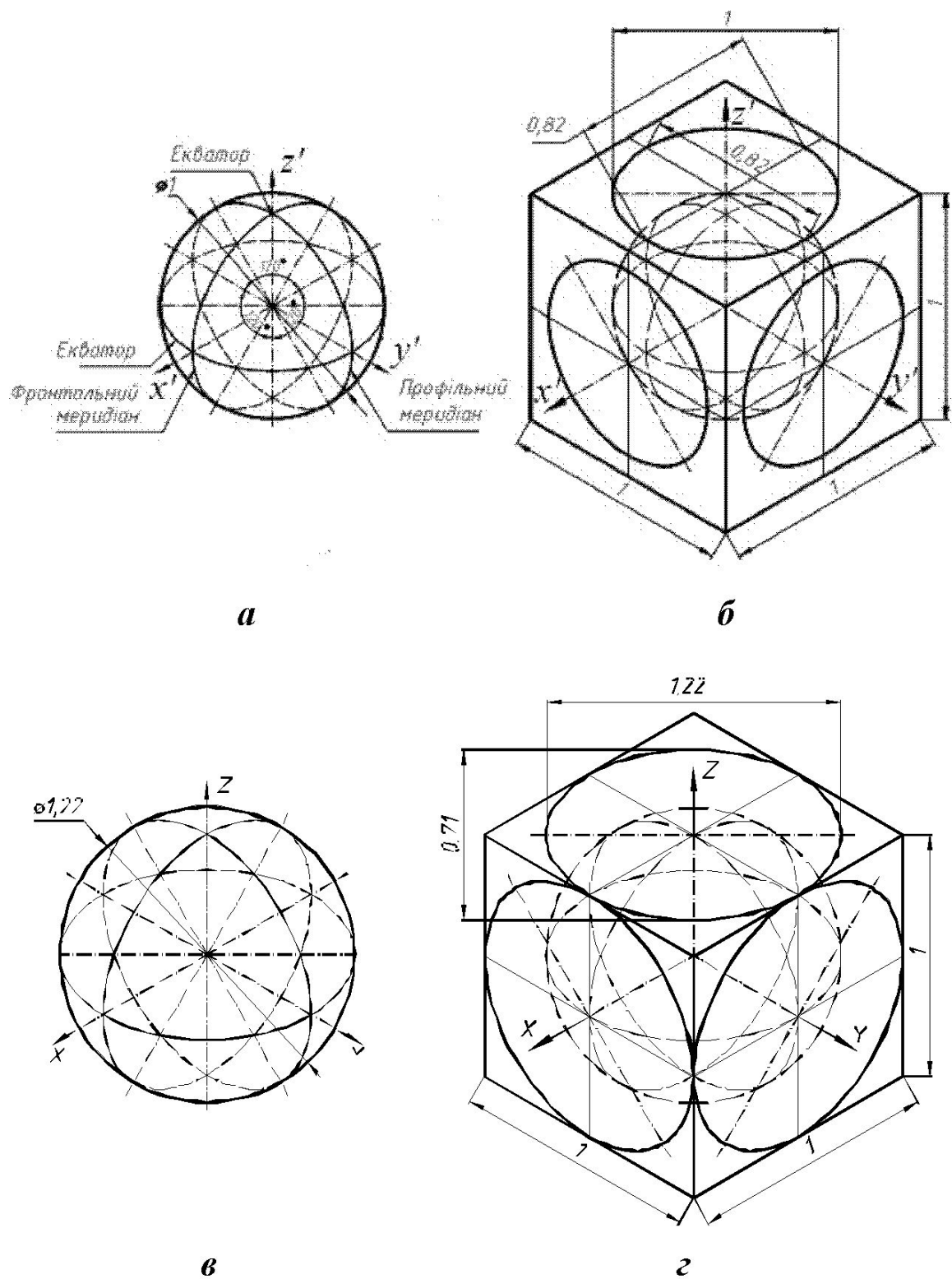


Рис. 13.7

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

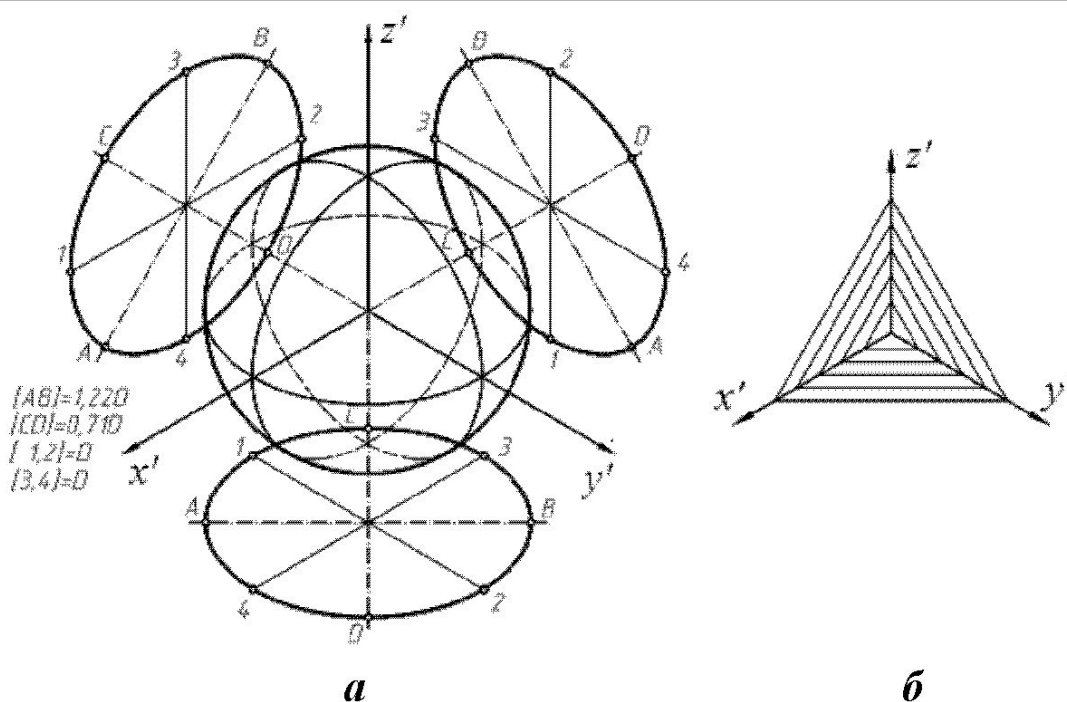


Рис. 13.8

Приклад побудови овала у прямокутній ізометрії наведено на рис. 13.9, **б**. На аксонометричних осях x' і y' від точки O відкладають відрізки, які дорівнюють радіусу зображуваного кола. Через точки A , B , C і D проводять прямі, що утворюють ромб. Його сторони дорівнюють діаметру зображуваного кола. Точки O_1 і O_2 є центрами великих дуг R_1 . Точки O_3 і O_4 , розташовані на перетині діагоналі ромба з прямими O_2A та O_2B , є центрами малих дуг R_2 .

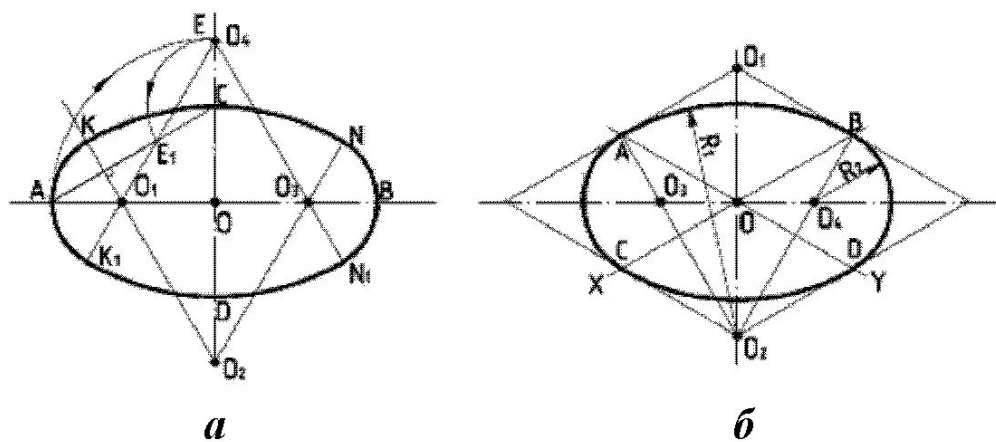


Рис. 13.9

На рис. 13.10 наведено приклад зображення технічної деталі з колами у горизонтальній площині проєкцій Π_1 у прямокутній ізометрії.

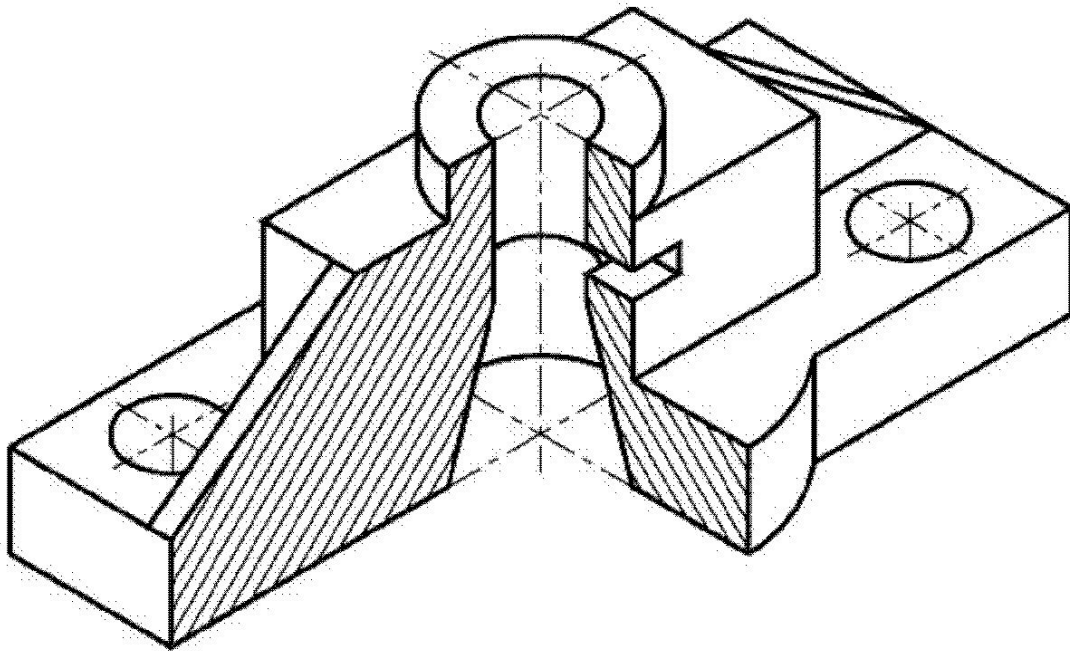


Рис. 13.10

13.3.2. Прямокутна диметрія

Згідно з ГОСТ 2.317–69 в інженерній графіці застосовують прямокутну диметрію, в якій вісь $O'z'$ розташовують вертикально, кут між горизонтальною лінією і віссю $O'x'$ дорівнює $7^\circ 10'$, а між горизонтальною лінією і віссю $O'y'$ – $41^\circ 25'$.

На рис. 13.11, *a* зображена прямокутна диметрична проєкція сфери, діаметр якої дорівнює одиниці вимірювання. Розташуємо цю сферу всередині куба, ребра якого також дорівнюють одиниці за напрямком аксонометричних осей $O'x'$ і $O'z'$, а за напрямком осі $O'y'$ ребро в прямокутній диметрії буде ви-

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

глядати вдвічі меншим (рис. 13.11,б). Спроекціюємо сферу на грані куба. Як бачимо, проекції сфери на грані куба менші за розміром (спотворені), тобто відрізок координатної осі довжиною 1 мм у прямокутній диметрії відобразиться відрізком довжиною 0,94 мм за напрямом осей $0'x'$ і $0'z'$, і відрізком довжиною 0,47 мм за напрямом вісі $0'y'$. Співвідношення $1/0,94 = 1,06$ разу визначає коефіцієнт масштабування на який слід збільшити сферу (рис. 13.11,в). Тепер проекції сфери у вигляді еліпсів вписуються у грані куба (рис. 13.11,г). Велика вісь еліпсів складає 1,06 діаметра d проекційного кола сфери (екватор, фронтальний меридіан, профільний меридіан), а мала – 0,95 діаметра на фронтальну площину проекцій і 0,35 діаметра на горизонтальну і профільну площини. Розташуємо сферу у звичному нам (європейському) першоквADRANTному вигляді проекціювання. На рис. 13.11,д наведені співвідношення для визначення довжини відрізків великої $[AB]$ і малої $[CD]$ осей еліпса на фронтальну площину проекцій та малої осі – $[EF]$ еліпсів на горизонтальній та профільній площинах. Величина відрізків $[1, 2]$ і $[3, 4]$ дорівнює діаметру проекційного кола сфери (у загальному випадку діаметру циліндра або отвора на фігурі), а відрізка $[5, 6]$ – половині діаметра проекційного кола сфери.

У прямокутній диметрії слід дотримуватись наведеного на рис. 13.11,е правила штриховки. Штрихові лінії спочатку проводять перпендикулярно до аксонометричної осі $0'y'$, а надалі їх проводять через одну лінію до осі $0'y'$ удвічі меншу на відстань.

Приклад зображення технічної деталі у прямокутній диметрії наведено на рис. 13.12.

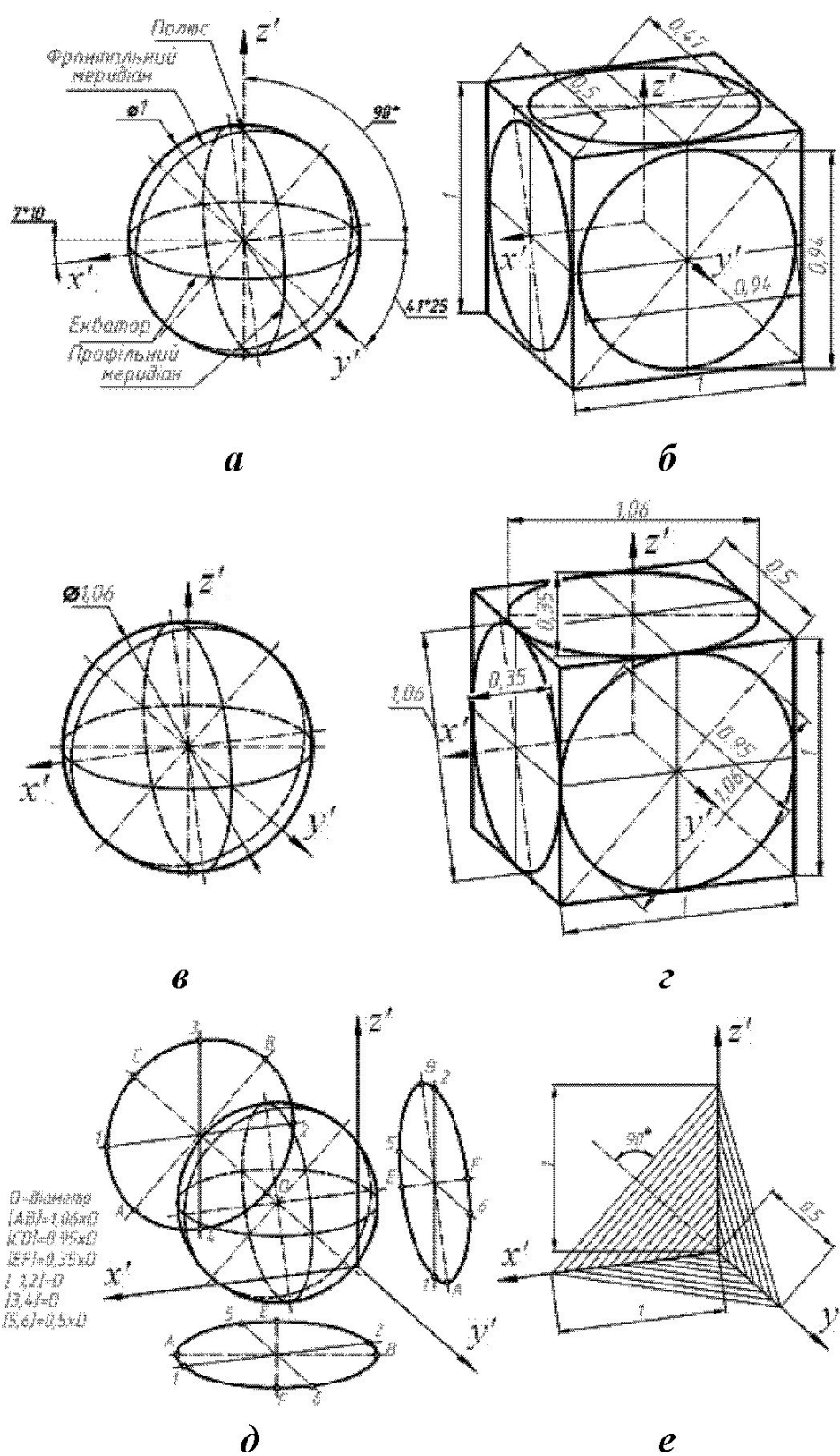


Рис. 13.11

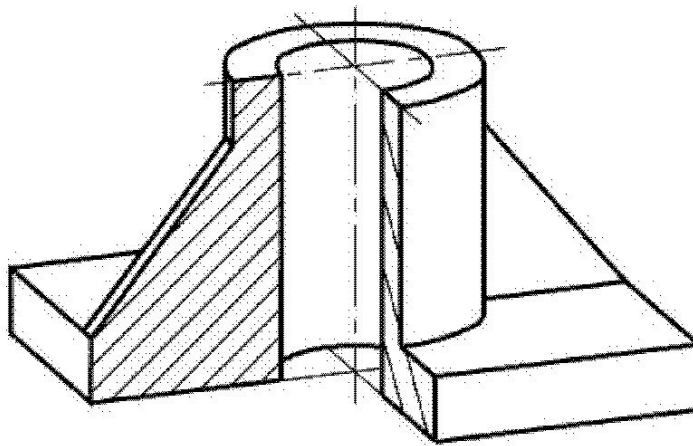


Рис. 13.12

13.3.3. Косокутна фронтальна диметрія

Цей вид аксонометричної проекції отримується у тому випадку, коли аксонометрична площина проєкцій Π' розташовується паралельно фронтальній площині проєкцій Π_2 ортогональної системи координат і застосовується косокутне проєкціювання.

Косокутну фронтальну диметрію також називають "*кавальєрною проєкцією*" або "*кавальєрною перспективою*".

Основний варіант розташування аксонометричних осей у цьому виді аксонометрії припускає, що можна так підібрати напрям проєкціювання s , щоб коефіцієнт спотворення v вздовж аксонометричної осі $O'y'$ був удвічі менший за коефіцієнти u і w , тобто $u = w = 1$, $v = 0,5$.

Тоді кут нахилу осі $O'y'$ до лінії горизонту складатиме 45° (рис. 13.13). Таку проєкцію іноді називають "*кабінетною проєкцією*".

Крім цього, ГОСТ 2.317–69 також передбачає виконання косокутної фронтальної диметрії при розташуванні аксонометричної осі $O'y'$ під кутами 30° і 60° до горизонтальної лінії (рис. 13.14).

Косокутна фронтальна диметрія дозволяє зберігати неспотвореними всі плоскі фігури, у тому числі й кола, площини розташування яких паралельні фронтальній площині проєкцій Π_2 (рис. 13.15, *а, б*).

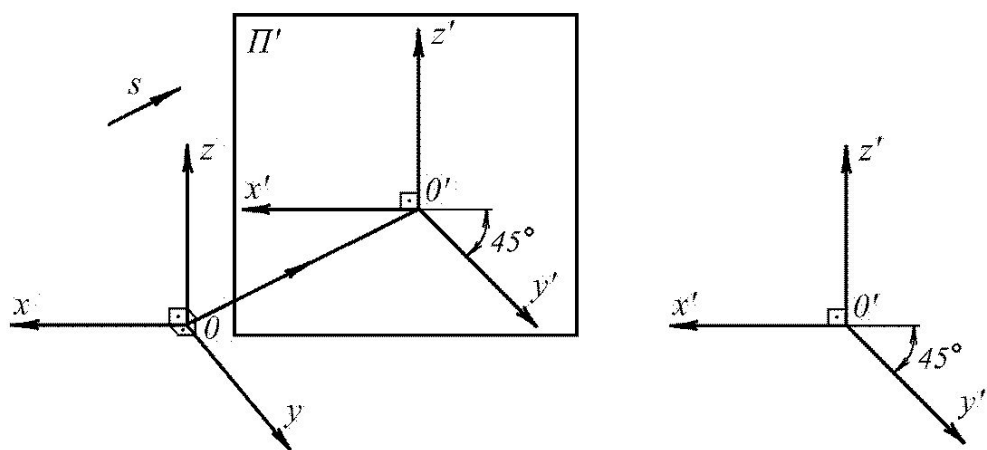


Рис. 13.13

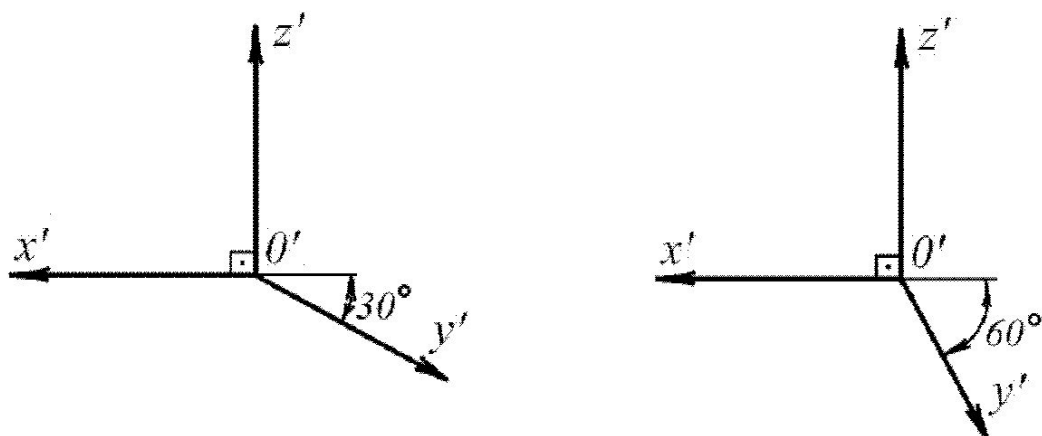


Рис. 13.14

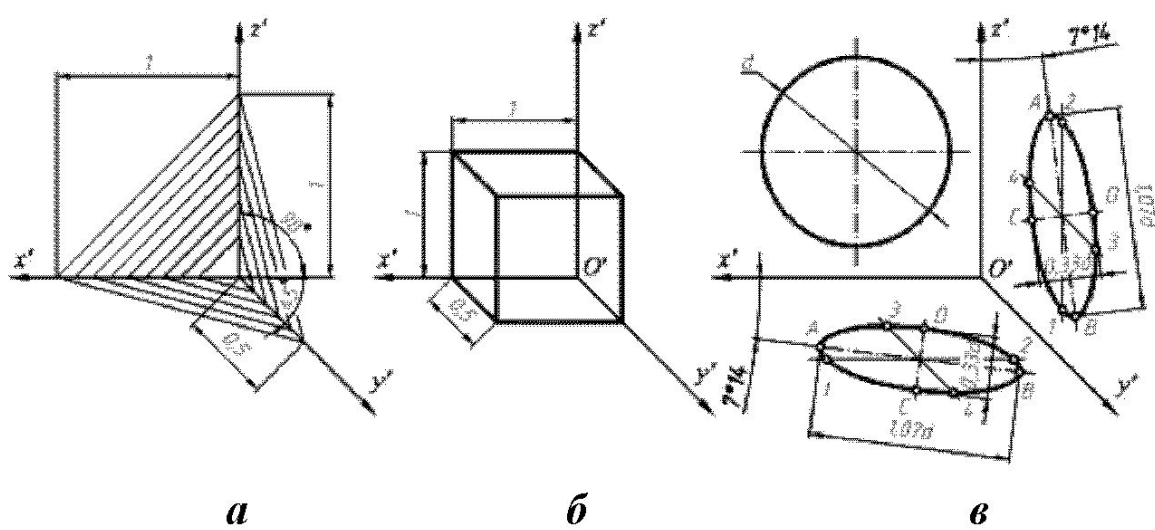


Рис. 13.15

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Щодо інших площин проекцій, то при косокутному фронтальному проєкціюванні фігури, які в них розташовуються, проєкціюються зі спотворенням. На рис. 13.15,*в* показано напрям виконання штриховки розрізів і вирізів.

Для порівняння, на рис. 13.16 показано однакову технічну деталь, зображену у прямокутній ізометрії (див. рис. 13.16,*а*) та у косокутній фронтальній диметрії (див. рис. 13.16,*б*).

Зіставлення цих двох аксонометричних проєкцій для даної технічної деталі свідчить про переваги косокутної диметрії. Її можна побудувати значно швидше, оскільки немає необхідності креслити еліпси.

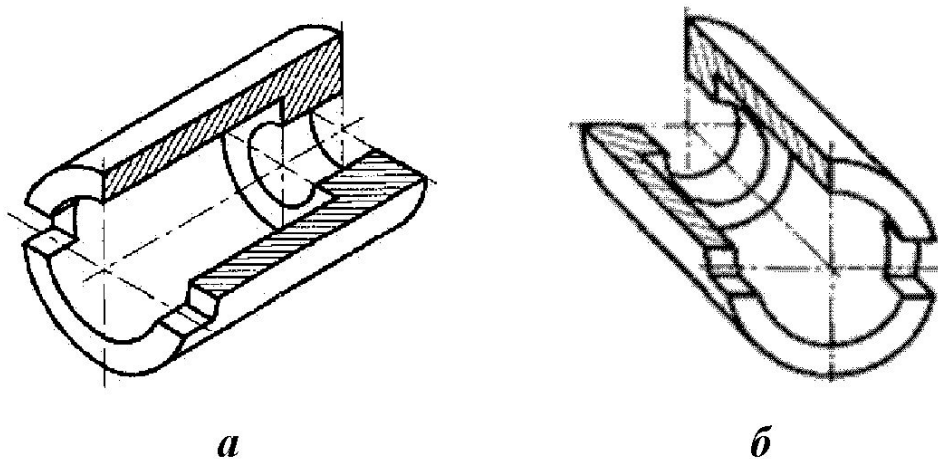


Рис. 13.16

13.3.4. Косокутна фронтальна ізометрія

У цьому виді аксонометричної проєкції коефіцієнти спотворення за аксонометричними осями $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ дорівнюють одиниці ($u = w = v = 1$), тобто фронтальна проєкція виконується без спотворення за осями x , y , z (рис. 13.17,*а*).

Розташування осей координат косокутної ізометричної проєкції є таким самим, як і для косокутної фронтальної диметрії (див. рис. 13.13 і рис. 13.14), тому й положення її не змінюється.

Кола, які лежать у площинах, паралельних фронтальній площині проєкцій Π_2 , проєкціюються на аксонометричну

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

площину у кола, а кола, що лежать у площинах, паралельних горизонтальній та профільній площинам – в еліпси, великі осі яких нахилені під кутом $20^{\circ}30'$ відповідно до осей $0'x'$ і $0'y'$. Великі осі цих еліпсів дорівнюють $1,3d$, а малі – $0,54d$ (рис. 13.17, **б**). На рис. 13.17, **в** також показано виконання штриховки розрізів і вирізів.

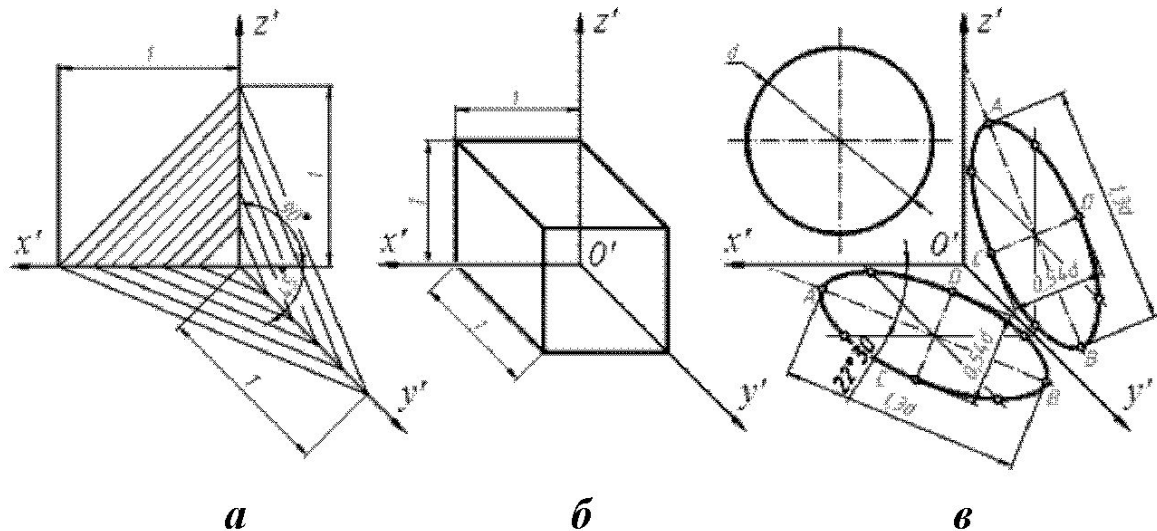


Рис. 13.17

Косокутну фронтальну ізометрію доцільно застосовувати у тому випадку, коли зображувана деталь у напрямку осі $0'y'$ має малі розміри (рис. 13.18).

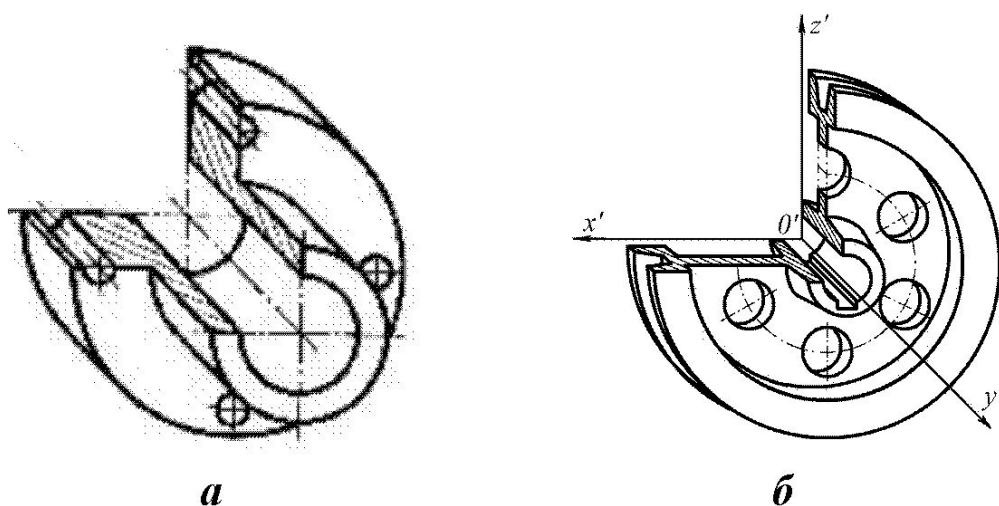


Рис. 13.18

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Застосування для подібних деталей косокутної фронтальної диметрії призведе до зменшення їх розміру вздовж осі $O'y'$ вдвічі, що може бути причиною втрати наочності зображення.

13.3.5. Косокутна горизонтальна ізометрія

Косокутну горизонтальну аксонометричну ізометрію отримують у тому випадку, коли аксонометрична площина проєкцій Π' розташовується паралельно площині проєкцій Π_1 ортогональної системи координат. Іноді косокутну горизонтальну ізометрію ще називають "зенітною" аксонометричною проєкцією.

Напрямок аксонометричних осей для виконання цього виду аксонометрії наведено на рис. 13.19. Коефіцієнти спотворення по цих осях дорівнюють одиниці ($u = w = v = 1$) (рис. 13.20, *a*).

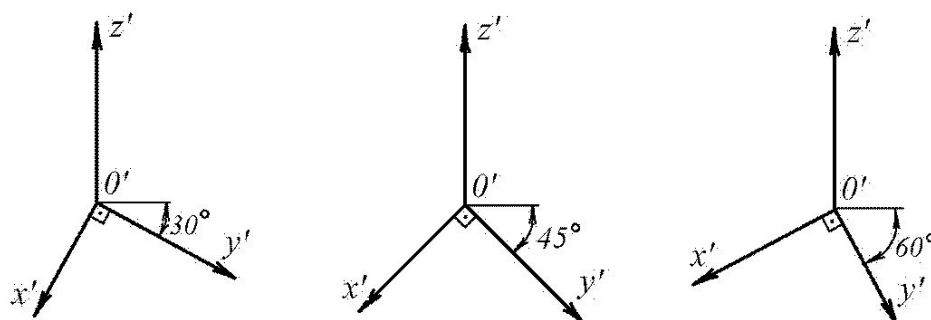


Рис. 13.19

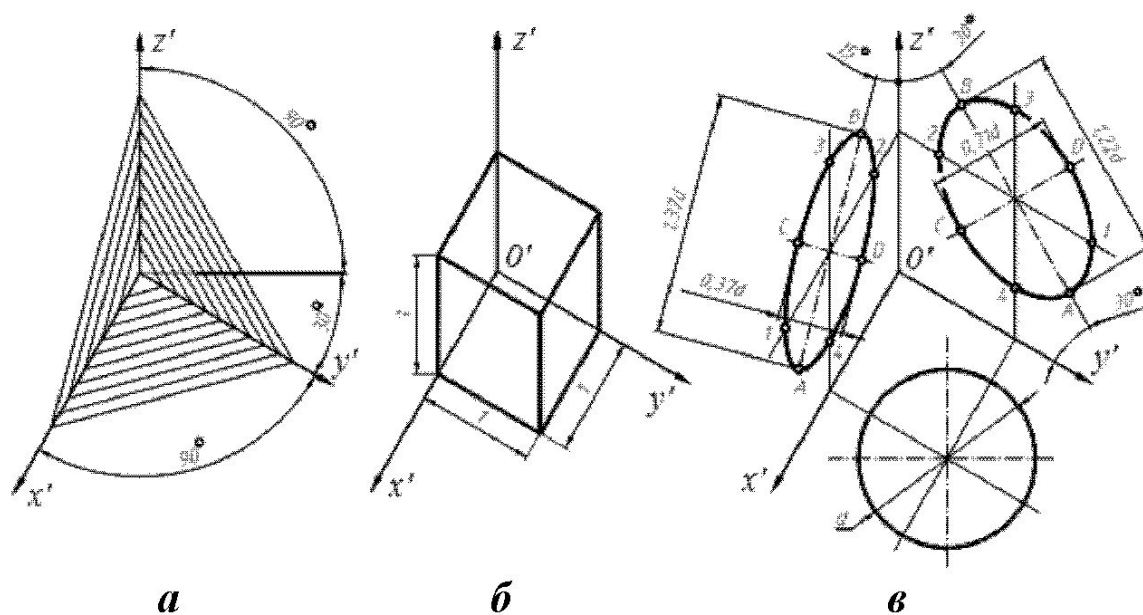


Рис. 13.20

Кола, розташовані у площинах, паралельних горизонтальній площині проєкцій Π_1 , проєкціюються у натуральну величину, тобто без спотворення, а кола, розташовані у площинах, паралельних площинам Π_2 і Π_3 – в еліпси. Велика вісь еліпса для кола, паралельного площині проєкцій Π_2 , нахилена до вертикального напрямку під кутом 15° , а еліпса, паралельного площині проєкцій Π_3 – під кутом 30° . Величини великих і малих осей еліпсів, паралельних площинам проєкцій, наведено на рис. 13.20,б. На рис. 13.20,в показано напрями виконання штриховки розрізів і вирізів.

Як видно, у косокутній горизонтальній ізометрії всі плоскі фігури (у тому числі й кола), паралельні площині проєкцій Π_1 , зберігаються неспотвореними.

На рис. 13.21 наведено приклади зображення технічних деталей у косокутній горизонтальній ізометрії.

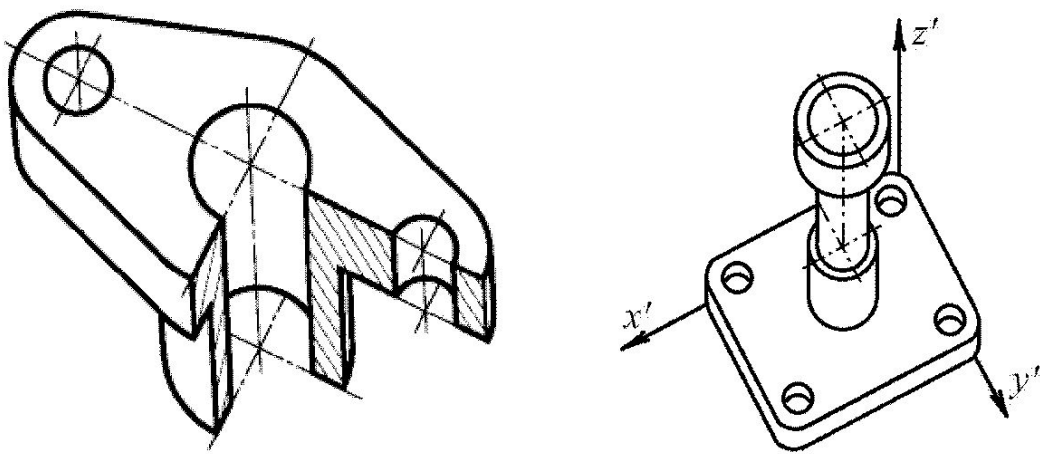


Рис. 13.21

13.4. Аксонометричні проєкції плоских фігур

Для побудови точки в аксонометрії будують координатну ламану лінію з урахуванням коефіцієнтів спотворення по осях x , y , z у залежності від виду аксонометрії (рис. 13.22).

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

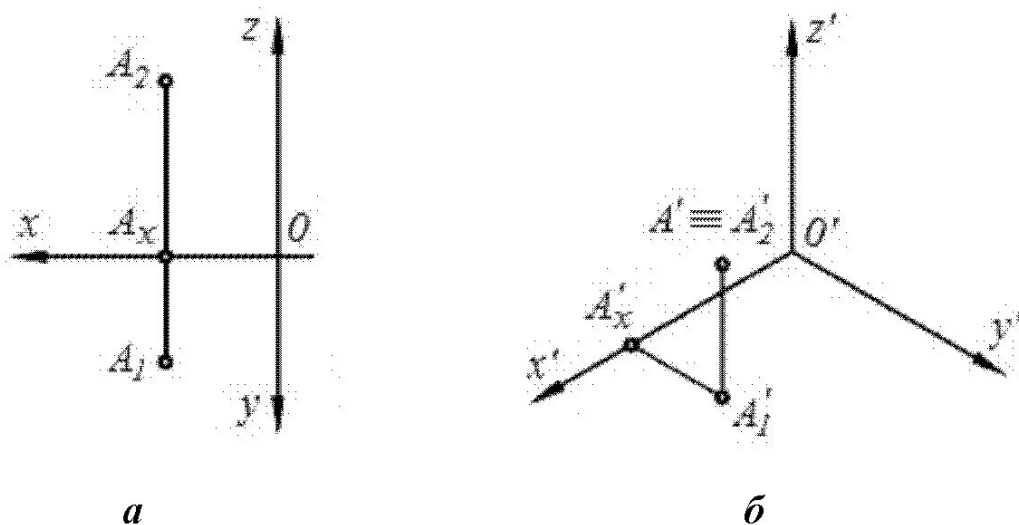


Рис. 13.22

Розглянемо побудову аксонометрії точки, прямої і плоскої фігури в прямокутній ізометрії.

В ізометрії коефіцієнти спотворення по осях x , y , z рівні і дорівнюють одиниці.

Відрізок OA_x (див. рис. 13.22, *а*) відкладаємо від точки O' по осі x' аксонометричної системи координат (див. рис. 13.22, *б*). Через одержану точку A'_x проводимо пряму, паралельну y' , на якій відкладаємо відрізок, рівний відрізку A_xA_1 . Одержимо точку A'_1 , з якої проводимо пряму, паралельну z' . На цій прямій відкладаємо відрізок $A'_1A'_2$, рівний відрізку A_xA_2 . Одержана точка A' є ізометричною проекцією точки A . При цьому, відкладені аксонометричні відрізки складають аксонометричну координатну площину.

Виконуючи розглянуті побудови для кожної точки аксонометричної фігури, можна побудувати модель цієї фігури в аксонометричних проекціях. На рис. 13.23 показана побудова прямокутної ізометрії для відрізка AB , а на рис. 13.24 – побудова прямокутної ізометрії плоскої фігури ABC .

Розглянемо побудову прямокутної ізометрії плоскої фігури, яка лежить у площині проєкцій (або у площині рівня).

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

Оскільки плоскі фігури мають два виміри, тому для їх побудови в аксонометрії використовують дві осі, які вибирають у залежності від того, якій із площин проекцій паралельна задана фігура.

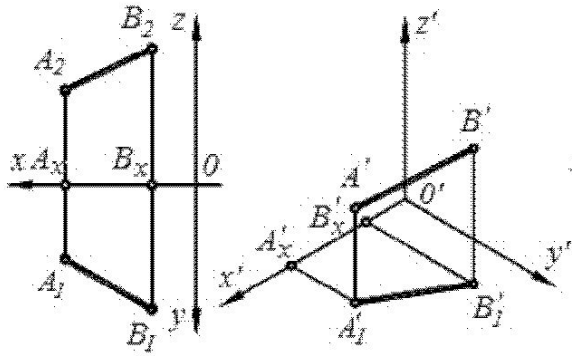


Рис. 13.23

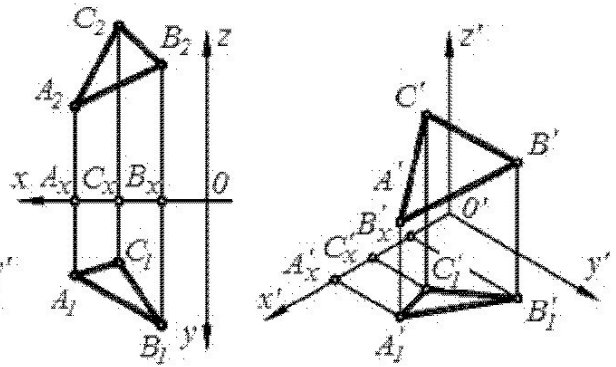


Рис. 13.24

На рис. 13.25 зображено правильний шестикутник, який розташований: паралельно горизонтальній площині; паралельно фронтальній площині проекцій; паралельно профільній площині проекцій.

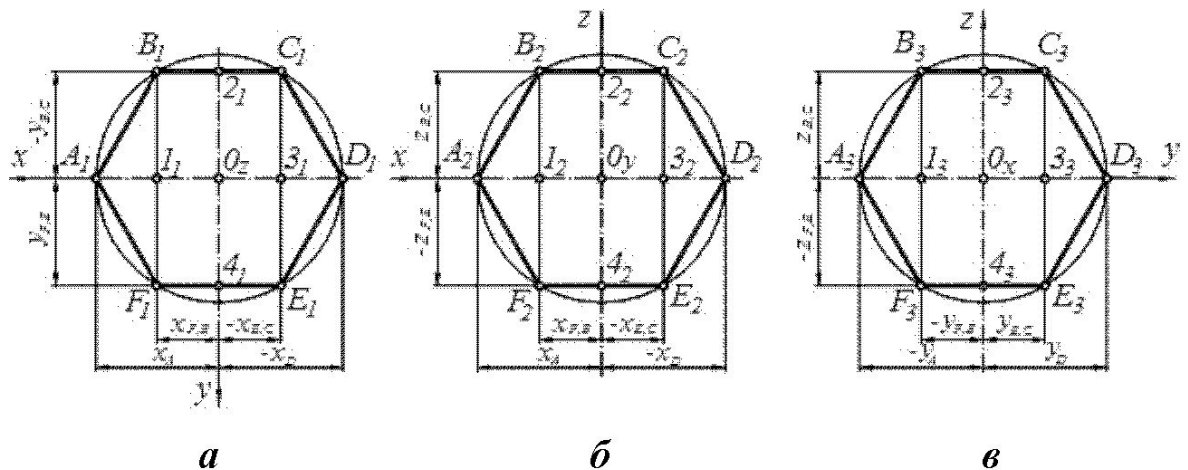


Рис. 13.25

Побудова кожної точки в аксонометричній проекції у загальному випадку здійснюється за описом рис. 13.22. При

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

цьому скористаємося відомим положенням: аксонометричні проєкції паралельних прямих паралельні між собою. Через допоміжні точки $1, 2, 3, 4$, які знаходяться на аксонометричних осях, проводимо прямі, паралельні відповідним аксонометричним осям, (рис. 13.26,*а*) і на їхньому перетині позначимо точки B', C', E', F' . Точки A', D' також знаходимо на відповідних аксонометричних осях. З'єднавши всі аксонометричні проєкції точок, одержимо аксонометричну проєкцію фігури (див. рис. 13.26,*б*).

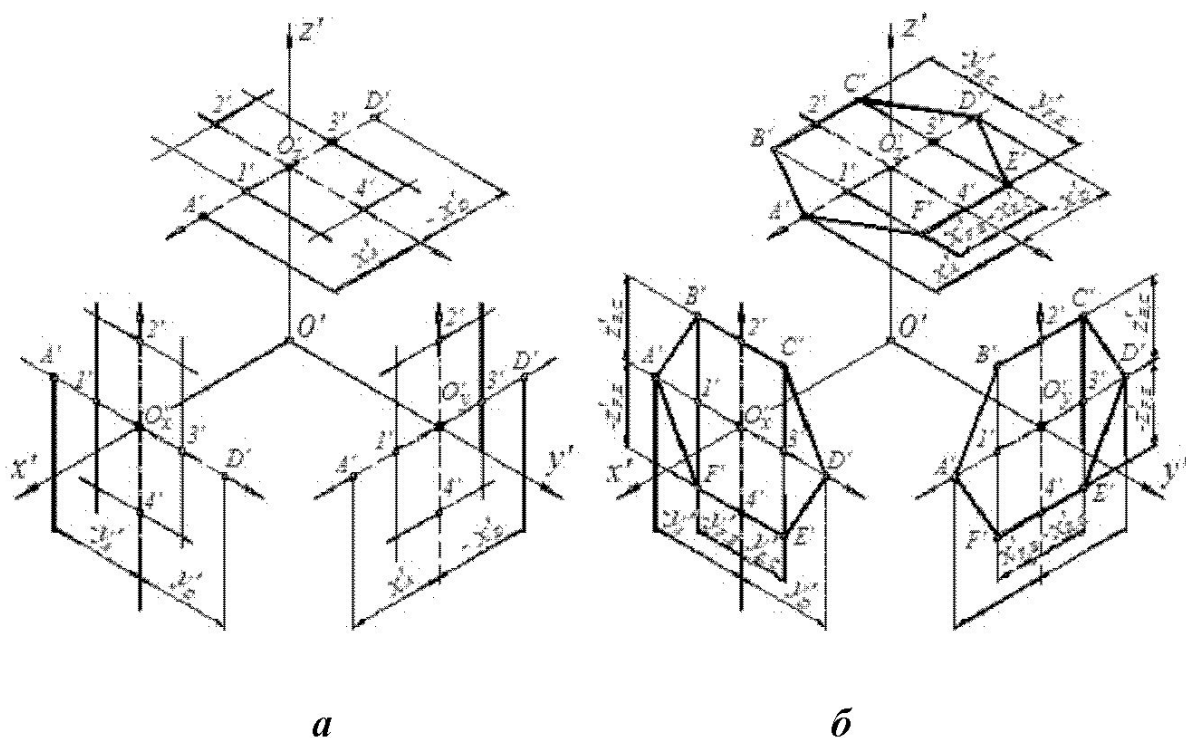


Рис. 13.26

Аксонометрію довільного кола можна побудувати як сукупність аксонометричних проєкцій певного числа його точок. Для побудови прямокутної ізометрії кола (рис. 13.27,*а*), яке лежить у координатній площині (або в площині рівня), спочатку необхідно побудувати аксонометрію його центра (точки O_x, O_y, O_z , див. рис. 13.22), провести через отриману

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

точку прямої, паралельні відповідним двом аксонометричним осям (відрізок: $[1, 2] = d$ (діаметр кола у площині), та $[3, 4] = d$). Далі будуємо малу вісь еліпса (відрізок $[CD] = 0,71 d$, штрихпунктирна лінія), що розташується паралельно аксонометричній осі, відсутній у даній площині, а також велику вісь (відрізок $[AB] = 1,22 d$), яка буде перпендикулярна до неї (див. рис. 13.27,б). За одержаними вісьма точками за допомогою лекала викреслюється шуканий еліпс (див. рис. 13.27,в).

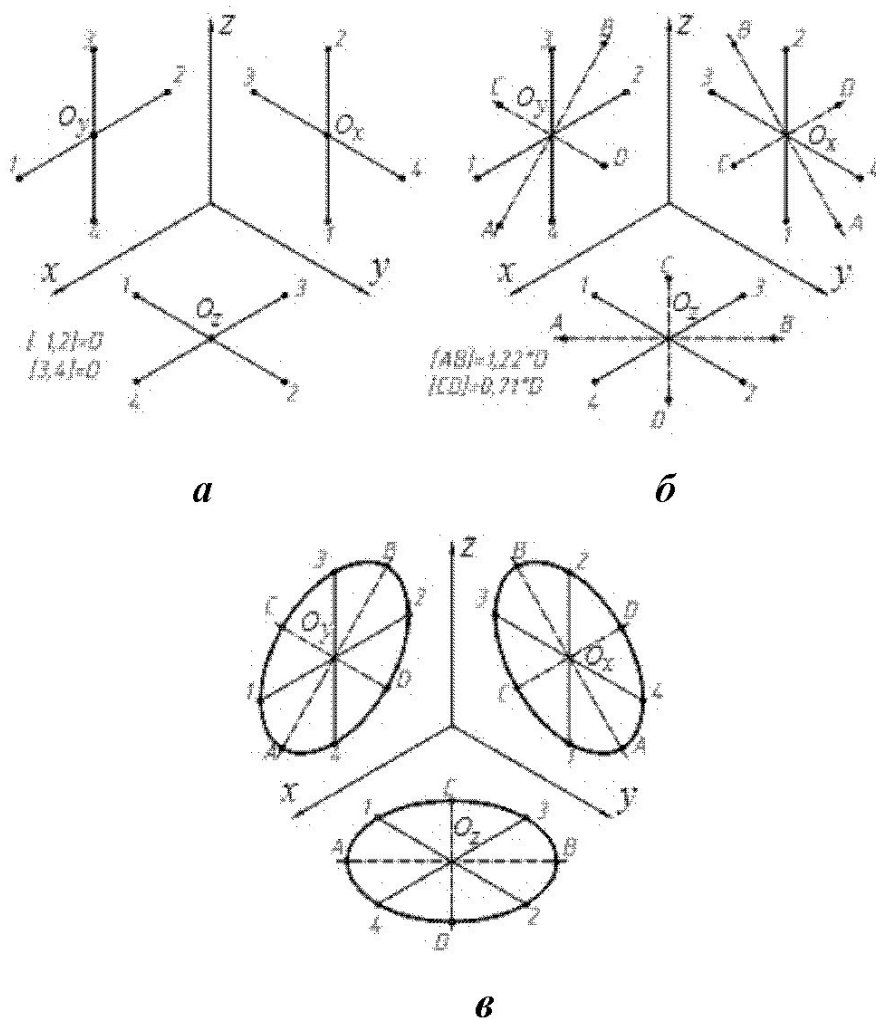


Рис. 13.27

Розглянемо побудову прямокутної диметрії плоскої фігури, яка лежить у площині проєкцій (або у площині рівня).

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Нагадаємо, що це аксонометрична проекція з однаковими показниками спотворення за двома осями – x і z .

На рис. 13.28 зображено квадрат, розташований: **а** – паралельно горизонтальній площині проекцій; **б** – паралельно фронтальній площині проекцій; **в** – паралельно профільній площині проекцій. Разом узяті квадрати являють собою проекцію куба на ортогональні площини проекцій. У прямокутній диметрії цей куб зображено на рис. 13.11, з якого видно, що довжина грані за напрямком осі y вдвічі менша.

Скористаємося ще раз уже відомим положенням: аксонометричні проекції паралельних прямих паралельні між собою.

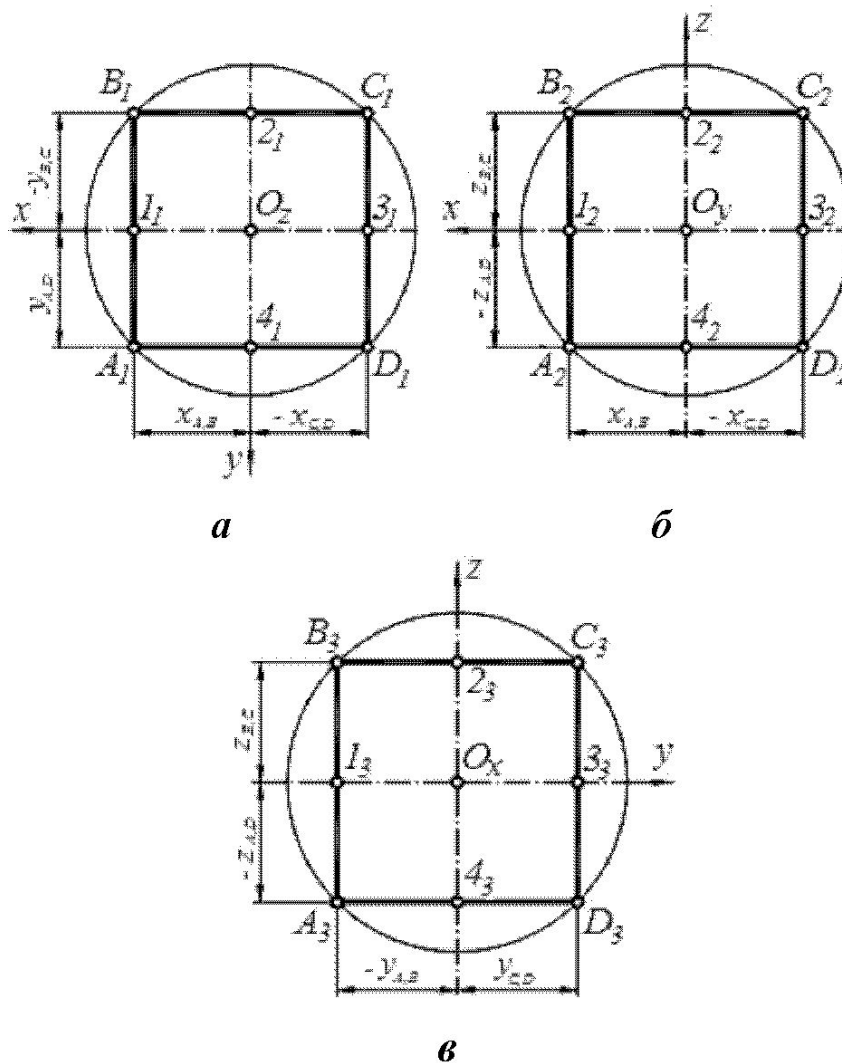


Рис. 13.28

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

Через допоміжні точки $1, 2, 3, 4$, які знаходяться на аксонометричних осях, проводимо прямі, паралельні відповідним аксонометричним осям (рис. 13.29, *а*), і на їхньому перетині позначимо точки B', C', E', F' . Точки A', D' також знаходимо на відповідних аксонометричних осях. З'єднавши всі аксонометричні проекції точок, одержимо аксонометричну проекцію фігури (див. рис. 13.29, *б*).

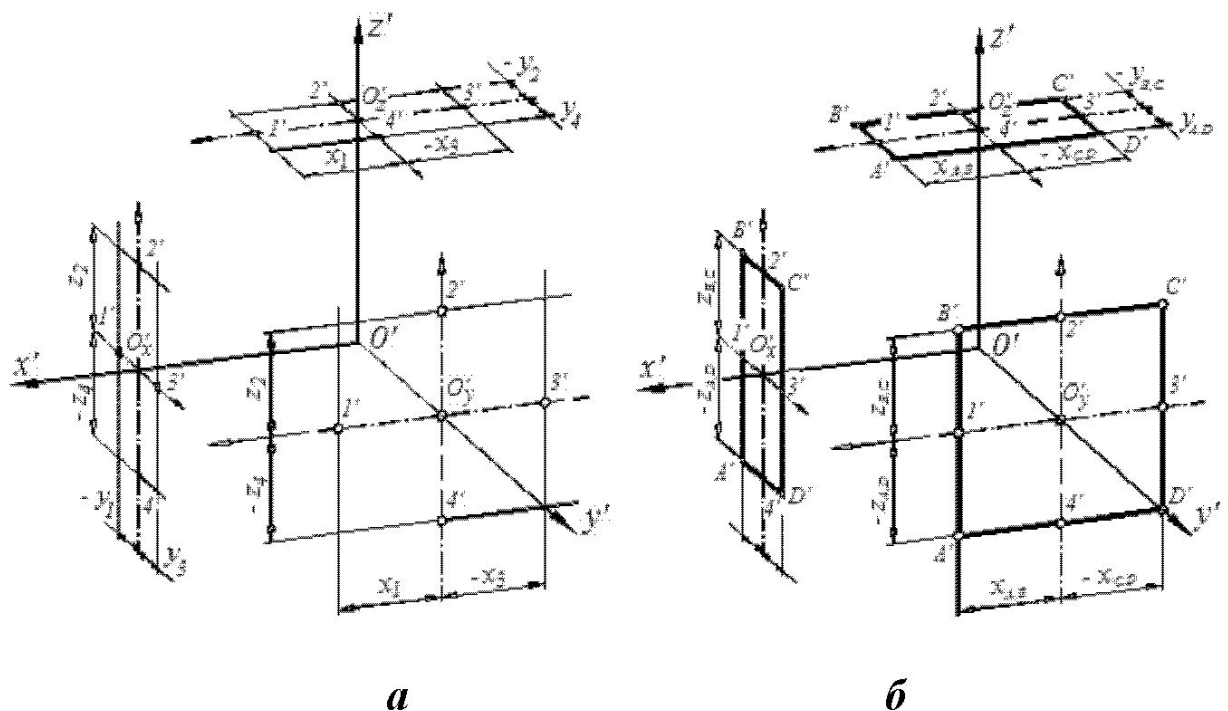


Рис. 13.29

Для побудови прямокутної диметрії кола (рис. 13.30, *а*), яке лежить у координатній площині (або у площині рівня), спочатку необхідно побудувати аксонометрію його центра (точки O_x, O_y, O_z , див. рис. 13.22), провести через отриману точку прямі, паралельні відповідним двом аксонометричним осям (відрізки: $[1, 2] = d$; $[3, 4] = d$; $[5, 6] = 0,5 d$).

Далі будуюмо малу вісь еліпса (відрізок $[CD] = 0,95 d$ (штрихпунктирна лінія) або $[EF] = 0,35 d$), що розташується паралельно аксонометричній осі, відсутній у даній площині, а також велику вісь (відрізок $[AB] = 1,06 d$), яка буде перпенди-

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

кулярна до неї (див. рис. 13.30,*б*). За одержаними вісьма точками по лекалу викреслюється шуканий еліпс (див. рис. 13.30,*в*).

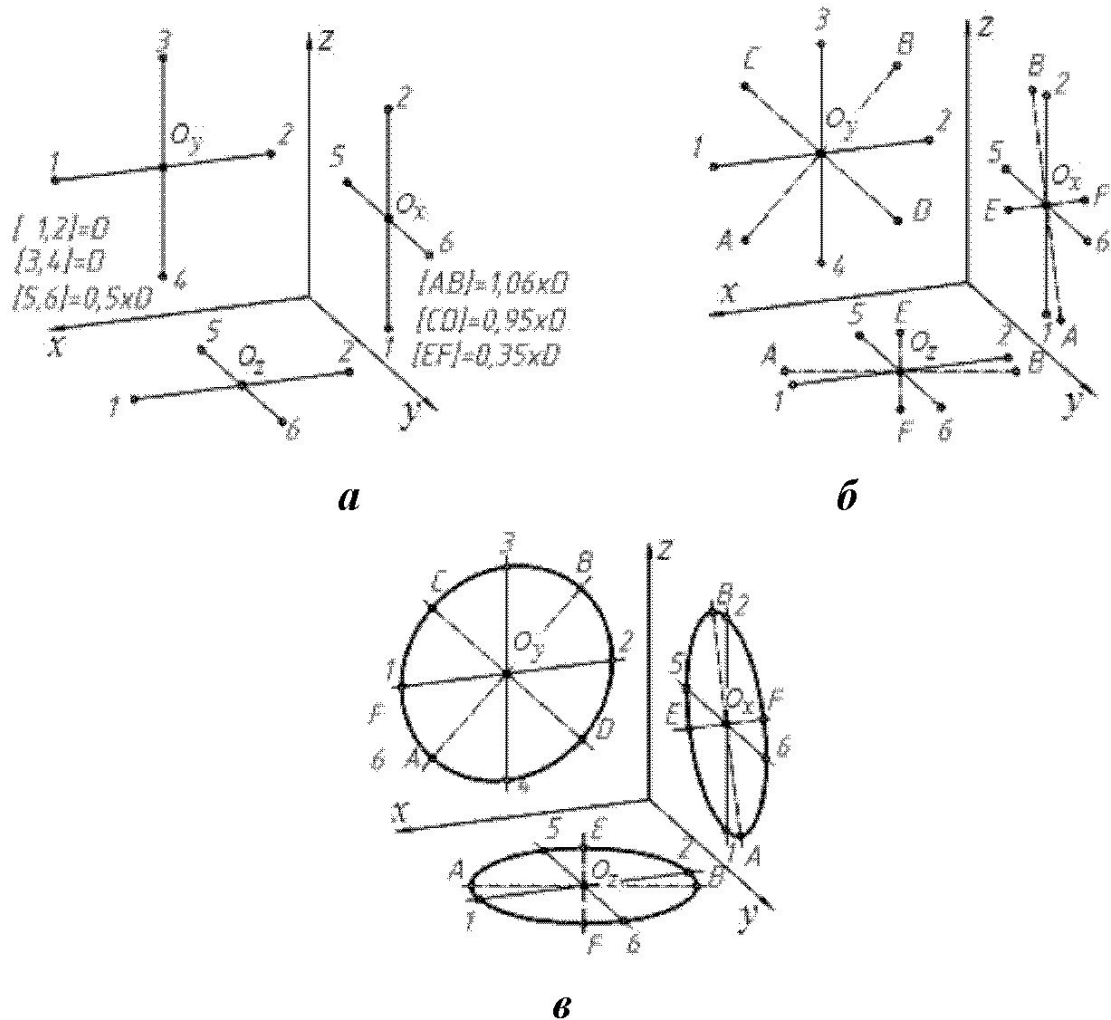


Рис. 13.30

13.5. Приклади побудови ізометричних проєкцій простих фігур

Побудова прямокутної ізометрії піраміди

Для наведеної на рис. 13.31 піраміди осі координат проводимо так, щоб вони збігалися з її осями симетрії, причому початок координат O буде знаходитися в центрі основи піраміди α .

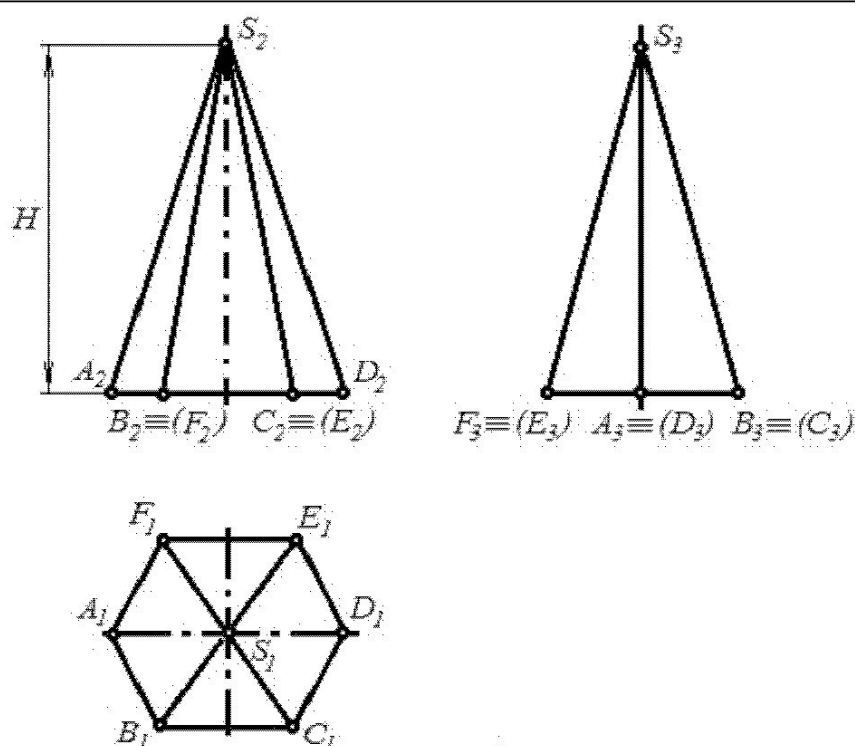


Рис. 13.31

Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови основи піраміди (рис. 13.32,*а*). Основа піраміди – плоска фігура, яка будується згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 13.26). З проєкційного креслення визначаємо необхідні координати точок та розташування вершини піраміди S (див. рис. 13.32,*б*).

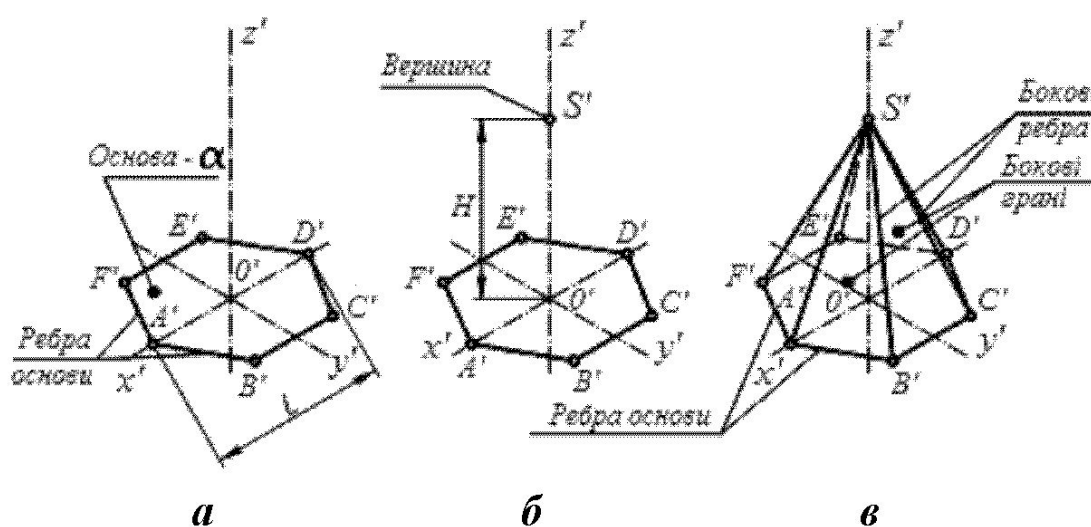


Рис. 13.32

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Відрізками сполучаємо вершину піраміди з точками в основі, утворюючи бокові ребра та бокові грані (див. рис. 13.32,в).

Побудова прямокутної ізометрії призми

Для наведеної на рис. 13.33 призми осі координат проводимо так, щоб вони збігалися з її осями симетрії, причому початок координат O буде знаходитися у центрі нижньої основи призми α .

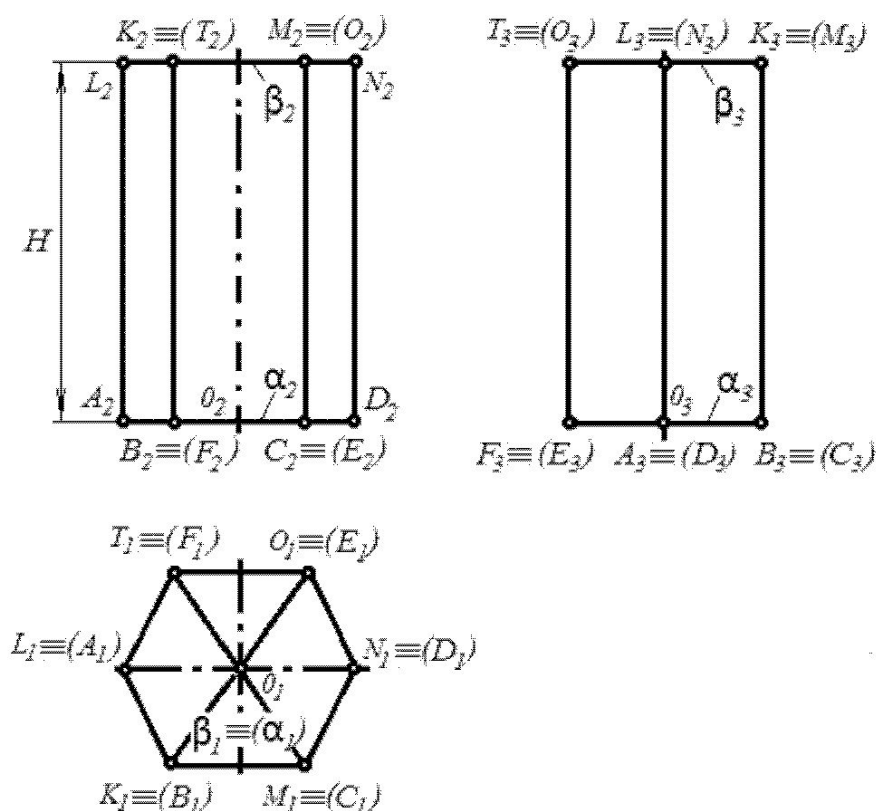


Рис. 13.33

Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови основи призми (рис. 13.34,а). Верхня та нижня основи призми – плоска фігура, яка будується згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 13.26). З проекційного креслення визначаємо необхідні координати точок та розташування верхньої основи призми β (рис. 13.34,б). Відрізками сполучаємо точки на верхній та нижній основах, утворюючи бокові ребра та бокові грані γ (рис. 13.34,в).

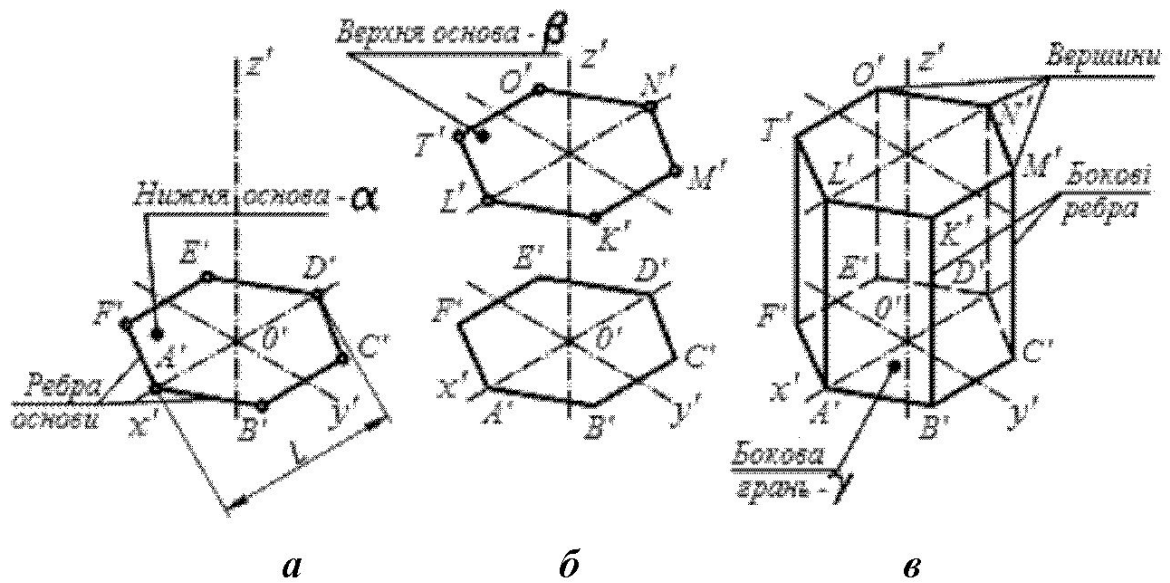


Рис. 13.34

Побудова прямокутної ізометрії конуса

Для прямого кругового конуса (рис. 13.35) осі координат проводимо так, щоб вони збігалися з центром кола в основі, причому початок координат O буде знаходитися у центрі кола.

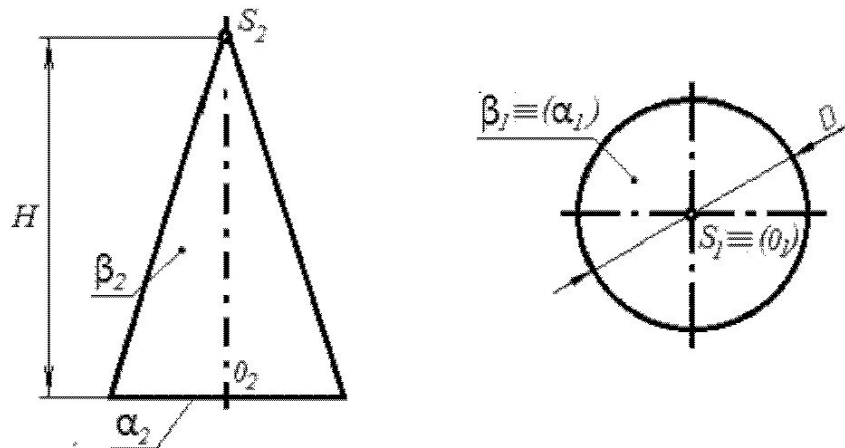


Рис. 13.35

Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови основи конуса (рис. 13.36, *a*). Основа конуса – коло, яке будується в ізометрії згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 13.27). З проєкційного креслення визначаємо розташування верши-

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

ни S (рис. 13.36,б). Сполучаємо вершину конуса відрізками твірних, дотичних до еліптичної кривої (див. рис. 13.36,в).

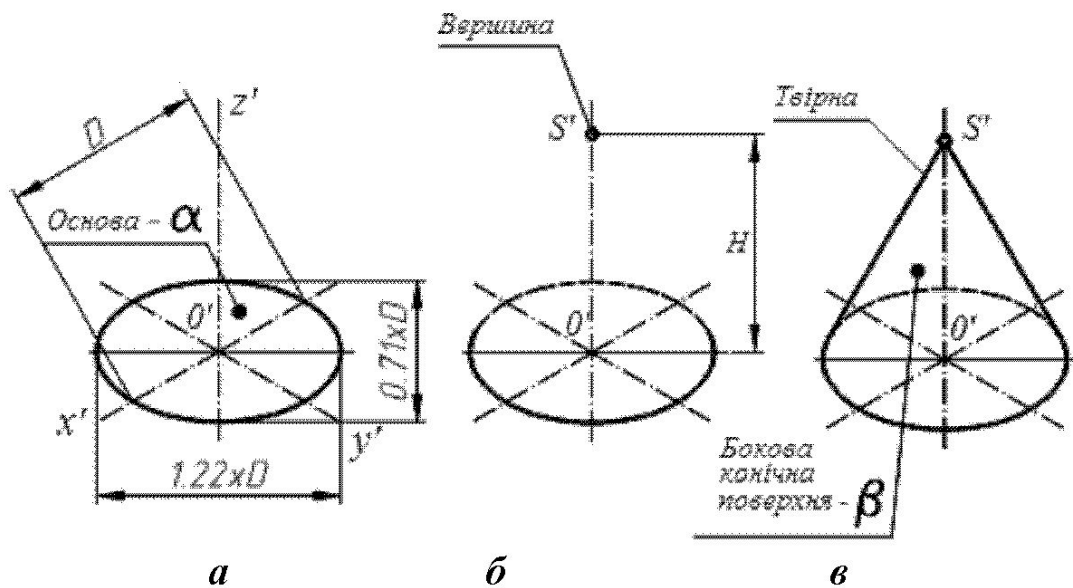


Рис. 13.36

Побудова прямокутної ізометрії циліндра

Для прямого циліндра (рис. 13.37) осі координат проводимо так, щоб вони збігалися із центром кола в основі, причому початок координат O буде знаходитися у центрі кола. Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови нижньої основи циліндра β (рис. 13.38,а). Основа циліндра – коло, яке будується в ізометрії згідно з описом зробленим раніше (див. рис. 13.30). З проекційного креслення визначаємо розташування верхньої основи циліндра α (рис. 13.38,б). Сполучаємо верхню та нижню основи відрізками твірних, дотичних до еліптичних кривих (рис. 13.38,в).

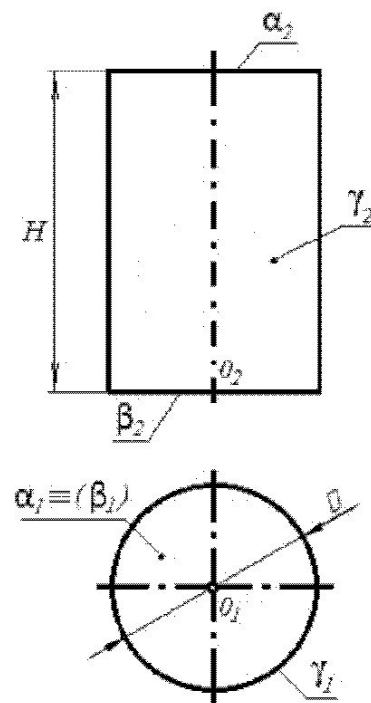


Рис. 13.37

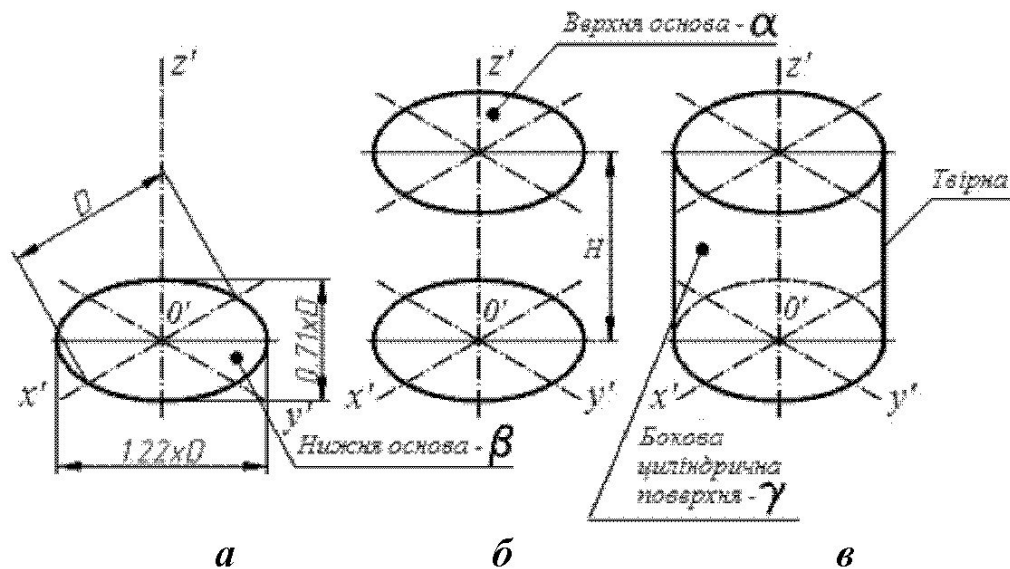


Рис. 13.38

Побудова прямокутної ізометрії сфери

Для побудови прямокутної ізометрії сфери (рис. 13.39, а)

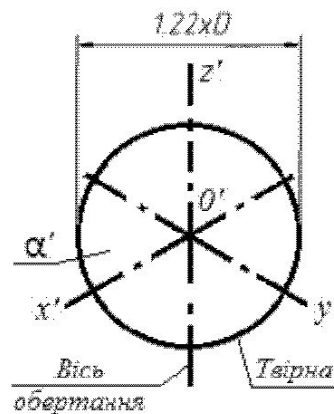
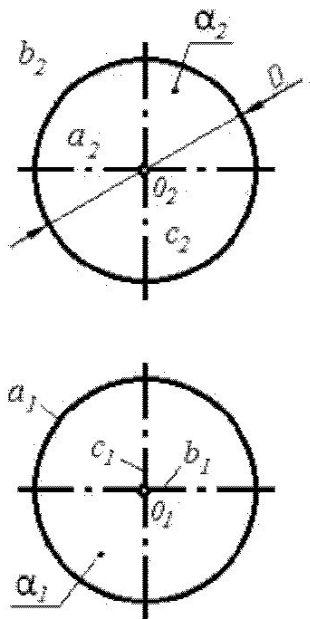


Рис. 13.39

спочатку необхідно побудувати аксонометрію її центра O . Осі координат сфери перетинаються в її центрі. Спочатку викреслюємо ізометричні осі та приведений діаметр сфери $d_{\Pi} = 1,22d$ (див. рис. 13.39, б). За необхідності виконання зрізаних площин в ізометрії кола, яке лежить у координатній площині

(або у площині рівня), будується в ізометрії згідно з описом зробленим раніше (див. рис. 13.27).

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Вигляд півсфери зрізаної горизонтальною, фронтальною, профільною площинами наведено на рис. 13.40, *а–в*. На рис. 13.40, *г* зображена сфера з вирізом у першому октанті простору.

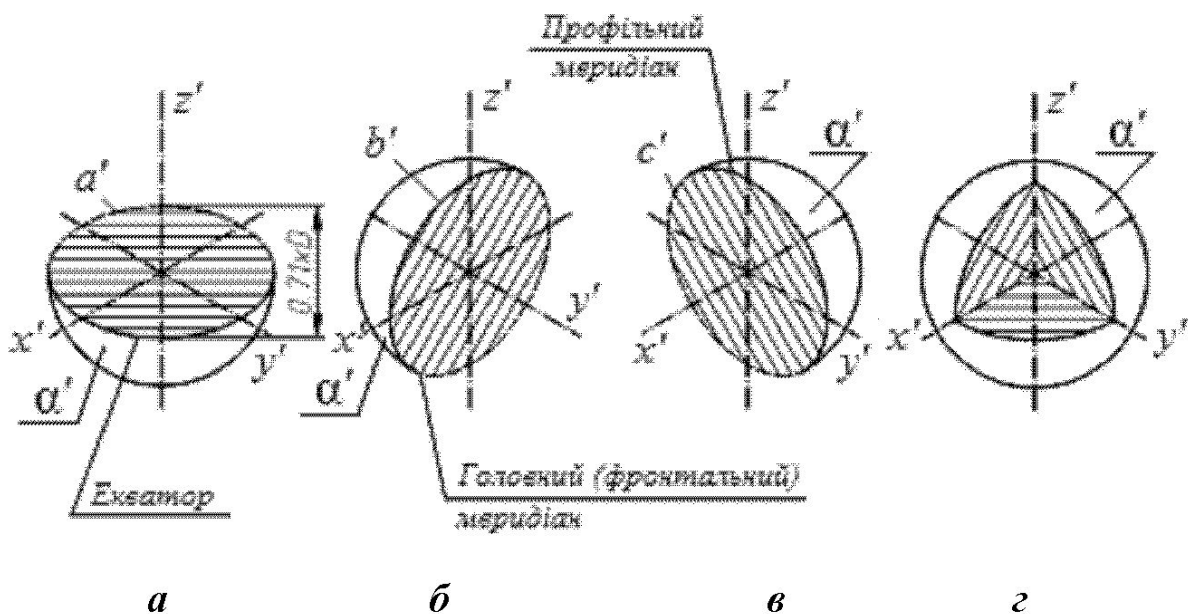


Рис. 13.40

13.6. Приклади побудови ізометричних проєкцій складних фігур

Розглянемо декілька прикладів, на основі яких стане зрозумілим принцип креслення складних фігур з вирізами у прямокутній ізометрії.

Приклад 1. Побудова ізометрії сфери з вирізом.

Побудова прямокутної ізометрії циліндра β та сфери α була розглянута вище (див. рис. 13.37–13.40).

Розглянемо поетапну побудову вирізу на півсфері гранною поверхнею γ . Для побудови аксонометричного зображення достатньо двох проєкцій півсфери, зображеної на рис. 13.41, *а*.

На висоті z від центра півсфери будуюмо осі у площині зрізу гранною поверхнею γ_1 .

Знаходимо вісім опорних точок (див. рис. 13.27) для побудови ізометричної проекції кола горизонтального зрізу радіусом $R1$ (рис. 13.41, б).

На відстані x від центра півсфери будуюмо осі в площині зрізу гранною поверхнею γ'_2 .

Знаходимо вісім опорних точок для побудови ізометричної проекції кола профільного зрізу радіусом $R2$.

Позначаємо опорні точки $1'$ та $2'$ у перетині еліпсів у площинах γ'_1 та γ'_2 , а також опорні точки $3'$ та $4'$ на екваторі сфери (рис. 13.41, в).

Усуваємо зайві лінії на ізометричній проекції півсфери (рис. 13.41, г).

Доцільно перевірити ізометричні проекції точок координатним способом (див. рис. 13.22). Наприклад, для побудови точки в ізометрії необхідно із проекційного креслення (див. рис. 13.41, а) визначити відстані до точки I по осях x , y , z та послідовно відкласти їх на ізометричному зображенні (див. рис. 13.41, г).

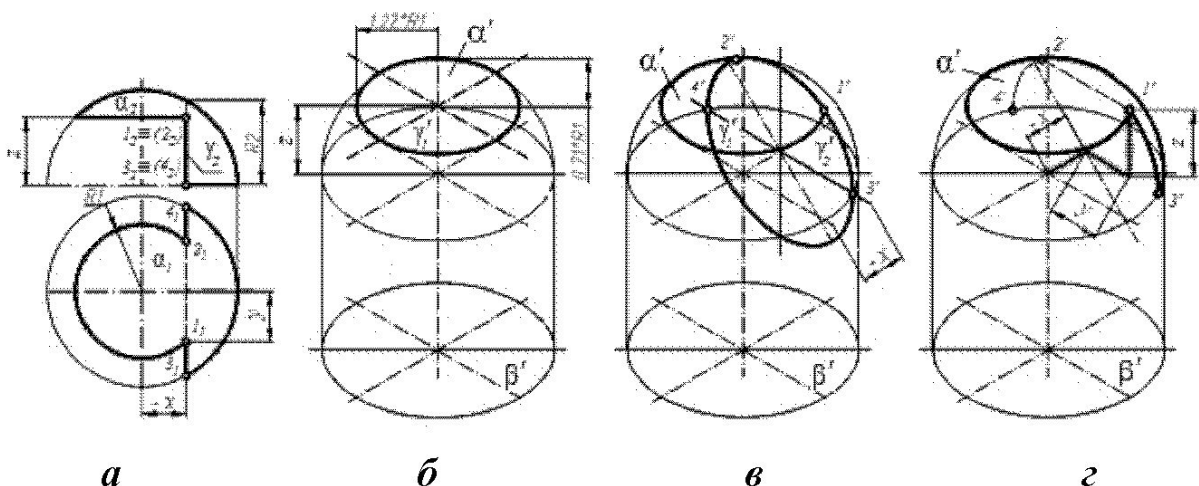


Рис. 13.41

13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

Приклад 2. Побудова ізометрії циліндра з вирізом.

Розглянемо поетапну побудову вирізу на циліндрі гранною поверхнею γ . Для побудови аксонометричного зображення достатньо двох проекцій циліндра, представленого на рис. 13.42, *а*.

На відстані $(-x, +y, +z)$ та $(-x, -y, +z)$ від центра циліндра знаходимо аксонометричні проекції точок $5'$ та $6'$, що належать лінії перетину площин γ'_2 та γ'_3 (рис. 13.42, *б*).

Аналогічним проекційним способом знаходимо ізометричні проекції точок 7–15 (рис. 13.42, *в*). Усуваємо допоміжні та зайві лінії на ізометричній проекції циліндра (рис. 13.42, *г*).

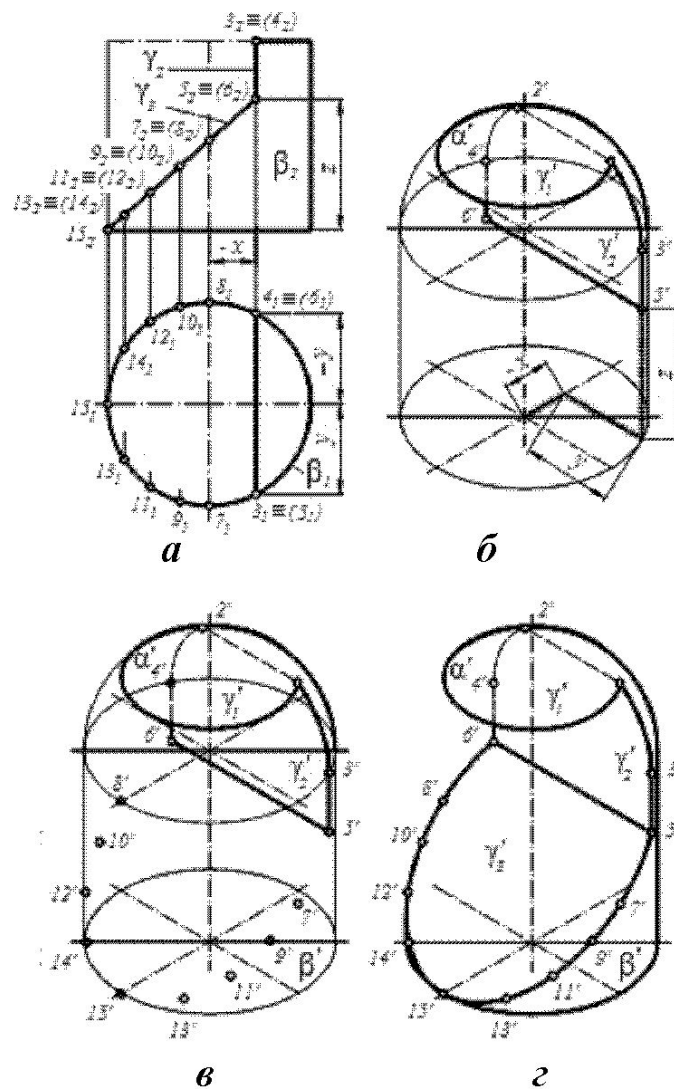


Рис. 13.42

14. ТІНІ

14.1. Світлотінь та способи нанесення її на кресленні

Рисування в основному зводиться до уміння зображувати на площині аркуша паперу об'ємно-просторові предмети та передавати їх форму.

У природі форма предмету виявляється за допомогою світла. Якщо предмет помістити у зовсім темне середовище, то він не буде сприйматися як форма. Промінь світла, що падає на предмет, виявляє його форму.

Кожна форма обмежується площинами (гранями) або кривими поверхнями, що знаходяться у різних світлових умовах. Одні поверхні отримують перпендикулярні промені світла, другі – ковзні, а треті не отримують променів світла і висвітлюються тільки відбитими променями.

Задача того, хто виконує рисунок – знайти поверхні, що обмежують форму предмета, визначити їх світлотіні (щоб на папері олівцем нанести відповідний тон), а також поступовий або різкий перехід однієї поверхні в іншу, суміжну.

Світлотінь – розподіл світла на поверхні предмета. Вона надає предмету, який зображується, об'ємність (опуклість).

Розрізняють наступні елементи світлотіні: світло, напівтінь, власна тінь та падаюча тінь. Крім того, на висвітленій частині поверхні є відблиск, а на затіненій частині – рефлекс.

14. ТІНІ

Рефлекс – світло, відбите від оточуючих предметів. Рефлекс завжди буває темніше за поверхню світла та напівтіні.

Тінь на невисвітленій частині поверхні предмету називається *власною*, а відбита одним предметом на інший предмет або площину – *падаючою*.

Форма власної тіні предмета залежить від його форми та положення відносно джерела світла. На силу тіні виливає рефлекс.

Форма падаючої тіні залежить від контуру предмета та виду джерела світла. На рис. 14.1 наведено процес отримання падаючої тіні: *а* – від штучного (факельного) джерела світла; *б* – від природного (сонячного) джерела.

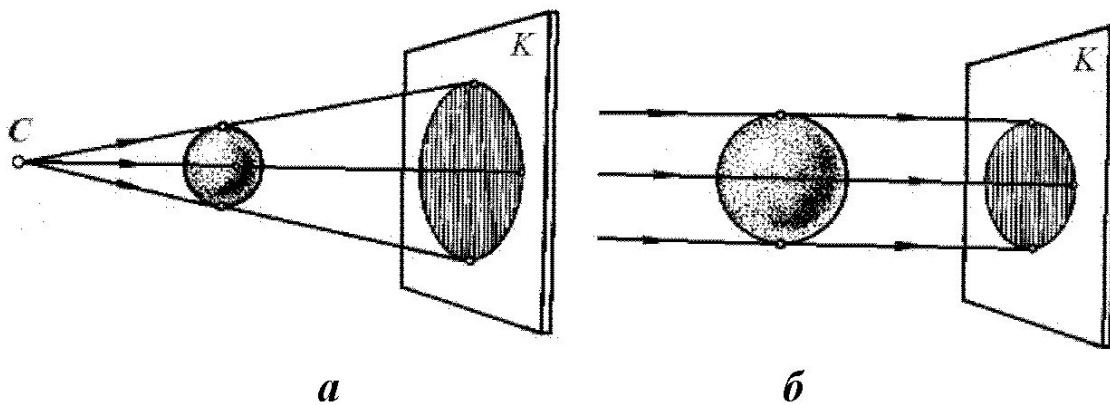


Рис. 14.1

Основні характеристики падаючої тіні:

- контур падаючої тіні не переривається, за винятком тих випадків, коли її перетинає освітлена поверхня;
- контур падаючої тіні змінюється з кожною зміною форми того предмета, на який вона падає;
- падаюча тінь поєднує об'єкт із поверхнею на якій він знаходиться;
- падаючі тіні показують відстань між об'єктом та поверхнею, на яку падає тінь;
- тінь виявляє форму поверхні, на яку вона падає.

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

У практиці технічного рисування світлотінь наносять, головним чином, для рельєфу форми предмета, тому падаючі тіні, як правило, не показують. Рисунки без падаючих тіней можна назвати умовними, але й технічне рисування має прикладне значення у техніці. Отже, у рисуванні, як і в кресленні, можна застосовувати умовності – спрощені зображення.

У дійсності не буває такої тіні, куди б зовсім не проникали відбиті світлові промені. Рефлекс, або висвітлення власної тіні, виникає в результаті відбивання променів світла. Виразність рефлексу залежить від характеру поверхні та ступеня освітленості предмета. На предметах, що мають матову поверхню, рефлекси мало помітні, а на блискучих поверхнях чітко видні. У технічних кресленнях при нанесенні світлотіні рекомендується затінені частини висвітлювати, а освітлені – затемнювати. Освітлена частина поверхні предмета називається *світлом*, яскравість її неоднакова.

Світло, яке відбито від гладкої блискучої поверхні, утворює на ній виблискуючі світлі плями – *відблиски* (найбільш освітлені місця на поверхні). Яскравість і положення відблиску залежить від напрямку променів світла, виду поверхні та характеру її обробки.

Півтіні (помірно освітлені місця) розташовані на поверхні, яка освітлена ковзаним світлом, від межі власної тіні у напрямку джерела світла.

Виявлення форми предмета за допомогою світлотіні безпосередньо пов'язано з використанням тонування різної сили.

Тон (грец. "tonos") – напруження, фізична характеристика світла. Цим терміном характеризують кількість та якість світла на поверхні предмета у залежності від джерела світла та забарвлення як самого предмета, так і світла.

Змінення світлосили окремих частин поверхні предмета залежить від їх положення у просторі відносно джерела світла.

14. ТІНІ

Витримати рисунок у тоні – означає передати на ньому колірну гамму (характер колірних співвідношень у живописі) – від темного тону через відтінки сірого до світлого, зведені в гармонію тональних співвідношень. Найсвітлішим тоном на рисунку буде білий аркуш паперу, а найтемнішим – лінія, проведена графітом олівця з повним натисканням.

При нанесенні світлотіні на зображеннях предметів багатогранної форми напрям штриховки має підкреслювати положення площин (граней) у просторі, а при нанесенні на зображеннях предметів циліндричної, конічної та сферичної форм – криволінійну форму цих предметів.

З метою передачі фактури, тобто якості поверхні матеріалу (шорсткості, матовості, бархатистості, глянсуватості та ін.), на технічному рисунку наносять світлотіні. Розрізняють декілька способів їх нанесення.

1. *Паралельна штриховка.* Її наносять по формі зображуваного предмета. Цим способом передають чисто оброблені поверхні різних матеріалів, особливо металевих. Рельєф форми позначають не частою штриховкою, а поступовим потовщенням штрихів від півтіней до власної тіні та від власної тіні до рефлексів.

2. *Штриховка сіткою* – шрафірування (нім. "schraffieren" – штрихувати). Застосовується, в основному, для зображення штрихами на плані нерівностей місцевості.

3. *Точкова штриховка.* Використовують для технічних рисунків необроблених деталей (литих, кованих та ін.), а також неметалевих (м'яких, пористих, сипучих та ін.). Загальний тон і його градація досягаються за допомогою точок, розташованих на відповідних інтервалах. Цей спосіб потребує великих витрат часу та не дає чітких зображень.

Щоб спростити роботу, на затінені поверхні наносять штриховку. Сильно затінені поверхні штрихують частіше та

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

більш товстими лініями, ніж менш затінені (напівтіньові). Освітлені поверхні штрихувати не рекомендується.

Густота штрихування (відстань між сусідніми штрихами та їх інтенсивність) залежить від насиченості тону. Перехід від лінії відблиску до межі власної тіні показують за допомогою згущення ліній штрихування. Попередньо необхідно встановити положення лінії відблиску, межі власної тіні та рефлексу.

Залежно від положення поверхні предмета обирають напрям ліній штрихування. Вертикальні поверхні слід штрихувати у вертикальному напрямку, горизонтальні – у горизонтальному, тобто паралельно аксонометричним осям, нахилені – у нахиленому, а криволінійні поверхні, як правило, у напрямку, що збігається з напрямком твірних поверхні.

14.2. Поверхні багатогранників

Явища освітленості краще за все спостерігати на прикладі розташованих поруч моделей куба та циліндра. Аналізуючи ці моделі зі сторони світлотіні, легко помітити, що характер їх освітленості відрізняється. Перехід від світла до тіні на гранях куба різкий та визначений, тоді як перехід освітленої поверхні циліндра у тіньову – м'який та поступовий. На рис. 14.2 показано розподіл світла та тіні на поверхні куба.

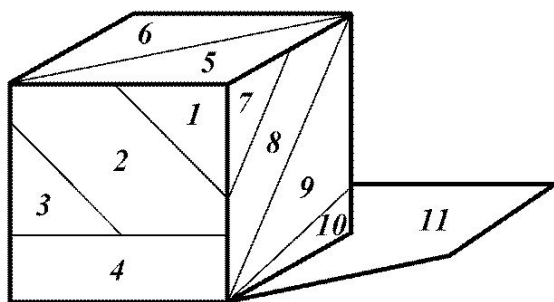


Рис. 14.2

Ліва вертикальна грань (на рисунку не видна) – вся у світлі. Передня, верхня і права грані умовно розподілені на десять

14. ТІНІ

зон. Падаюча тінь позначена зоною *11*. Найсвітлішим місцем на передній грані здається зона *1*. Насправді зони *1–3* освітлені однаково, але у силу контрасту, з розташованою поруч власною тінню на правій грані куба зона *1* здається світлішою, ніж зона *3*. У зоні *4* освітлення знову посилюється. Це рефлекс у світлі, отриманий предметом від поверхні, на якій він стоїть.

Видима горизонтальна грань куба освітлена рівномірно, але внаслідок того, що зона *5* межує із самим сильним світлом, здається темнішою у порівнянні з зоною *6*.

У власній тіні зони *7* та *8* найтемніші. Не слід остерігатися зробити їх ще більш темними. Така помилка цілком прийнятна, тому що підсилює рельєфність куба. У зоні *9* і особливо *10* можна спостерігати яскраво виражений рефлекс. Зона *10* пом'якшує перехід від власної тіні до падаючої. Варіанти нанесення світлотіні на поверхні куба шрафіруванням або штриховкою для прямокутної ізометрії наведені на рис. 14.3, *а–в*, а для прямокутної диметрії – на рис. 14.3, *г–е*. Падаючі тіні до уваги не взяті.

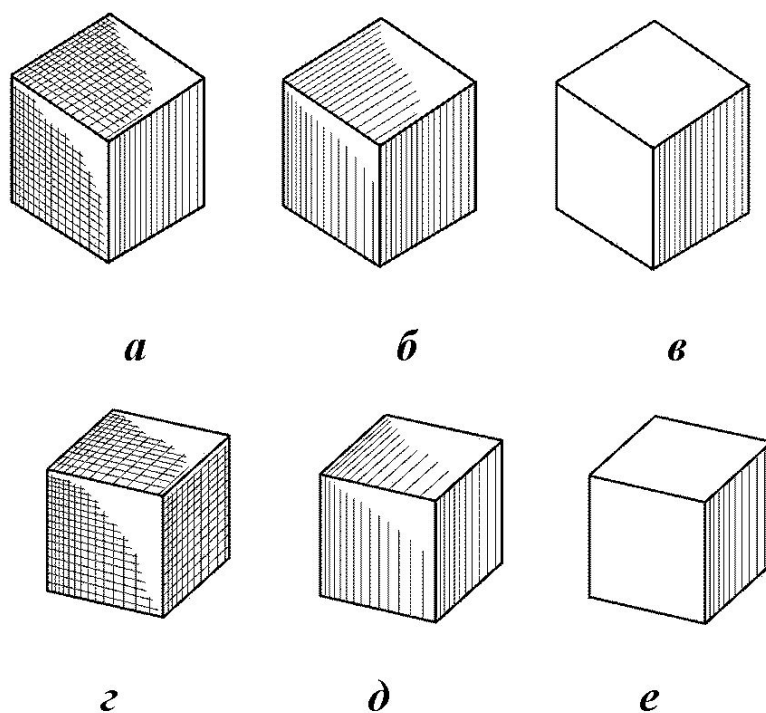


Рис. 14.3

Для спрощення лінії штриховки розташовані паралельно ребрам куба у відповідності з формами цього багатогранника. Подальші спрощення дозволяють перейти до прийому, який показано на рис. 14.3, *в, е*, де всі освітлені поверхні білі.

При нанесенні світлотіні на зображення плоских поверхонь необхідно більш затемнювати найближчу до спостерігача частину грані у порівнянні з віддаленою (тіньові поверхні при віддаленні стають світлішими, а освітлені темнішими). На цьому базується принцип обробки форми зображення предмета.

На рис. 14.4 наведено варіанти нанесення світлотіні на поверхню піраміди при різних напрямках ліній штриховки: паралельно ребрам, що йдуть від вершини (*а–в*), паралельно медіанам трикутних граней (*г*), паралельно ребрам основи (*д*) і шрафіруванням (*е*).

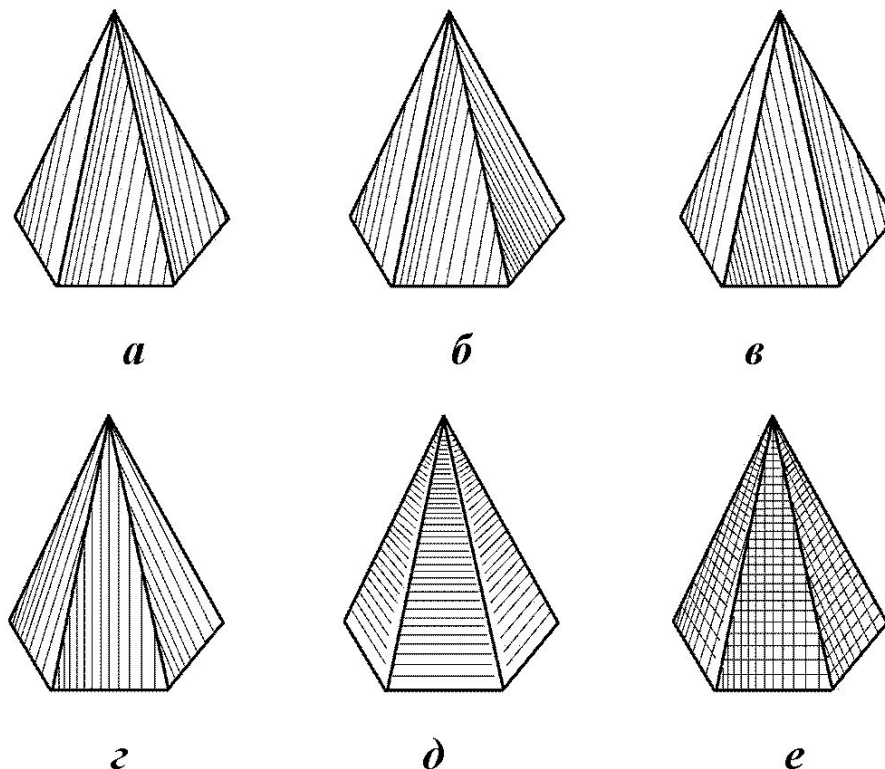


Рис. 14.4.

14. ТІНІ

На рис. 14.5 наведено шість варіантів розташування зрізаної піраміди вздовж аксонометричних осей прямокутної ізометрії та розподіл світлотіні на її поверхні.

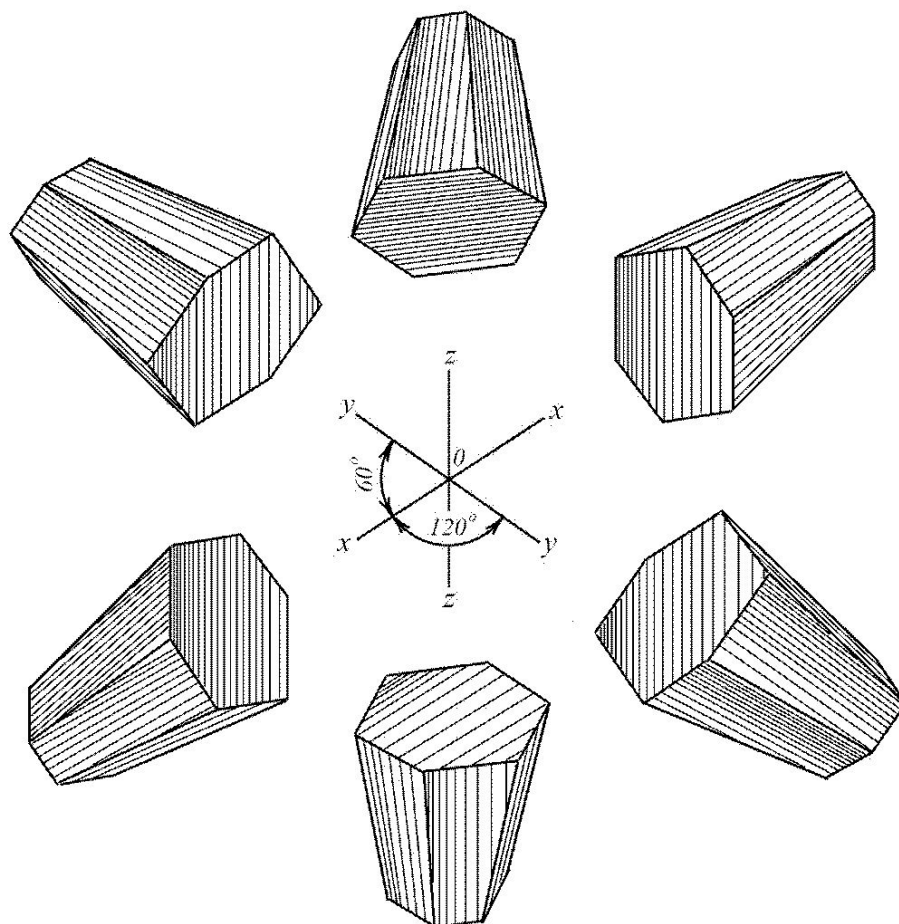


Рис. 14.5

При виконанні штриховки або шрафіруванні необхідно приділяти основну увагу не кількості нанесення штрихів, а їх вдалому розташуванню та правильному нахилу.

14.3. Циліндричні поверхні

Точне зображення елементів світлотіні на поверхнях тіл обертання визначають рідко, тому їх градацію рекомендується виконувати умовно.

Якщо розглядати циліндр, який стоїть на горизонтальній площині, то можна побачити по-різному освітлені частини його поверхні (рис. 14.6).

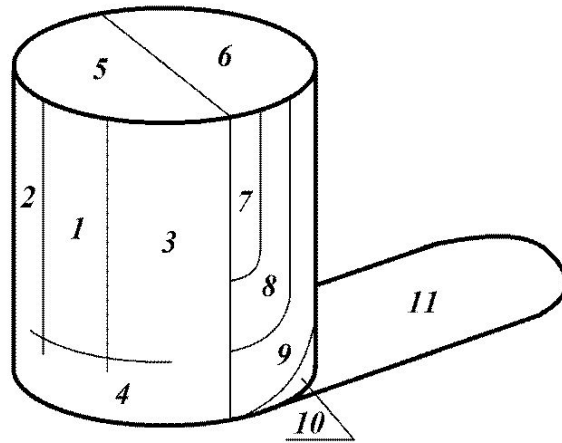


Рис. 14.6

Найяскравіше світло в зоні 1. Зони 2 і 3 освітлені слабше, тому що промені падають на них під більш гострим кутом. Але вся світлова сторона з напівтонами у нижній зоні 4 отримує рефлекс від площини, на якій стоїть циліндр. Це явище вигадане, той, хто креслить, має його враховувати (див. зони 5 і 6). Найтемніше місце – зона 7. Не слід остерігатися зробити її ще більш темною. За напрямком вниз та по правому краю підсилюється рефлекс (зони 8–10). У практиці технічного креслення на падаючу тінь (зона 11) у розрахунок незважають.

На поверхнях обертання найбільш світлі та темні місця дещо відсунуті від краю. Не застосовуючи рефлекси у світлі та півтіні верхньої основи, зовнішню поверхню циліндра можна умовно поділити на шість зон (рис. 14.7). Зона II є відблиском. Зону V покривають частішою штриховкою. Зони I, III та IV є півтонами – поступовий перехід від світла до тіні. Зона VI закінчується рефлексом.

Переходи від світла до півтіні та від півтіні до тіні на кресленнях тіл обертання необхідно робити як можна непомітніше.

14. ТІНІ

На рис. 14.7 наведено шість варіантів розташування порожнистого циліндра вздовж аксонометричних осей у прямокутній ізометрії та розподіл елементів світлотіні на поверхні. Зовнішні та внутрішні поверхні показаних розташувань циліндра умовно розподілені на шість рівних зон (відблиск, півтони, власна тінь та рефлекс).

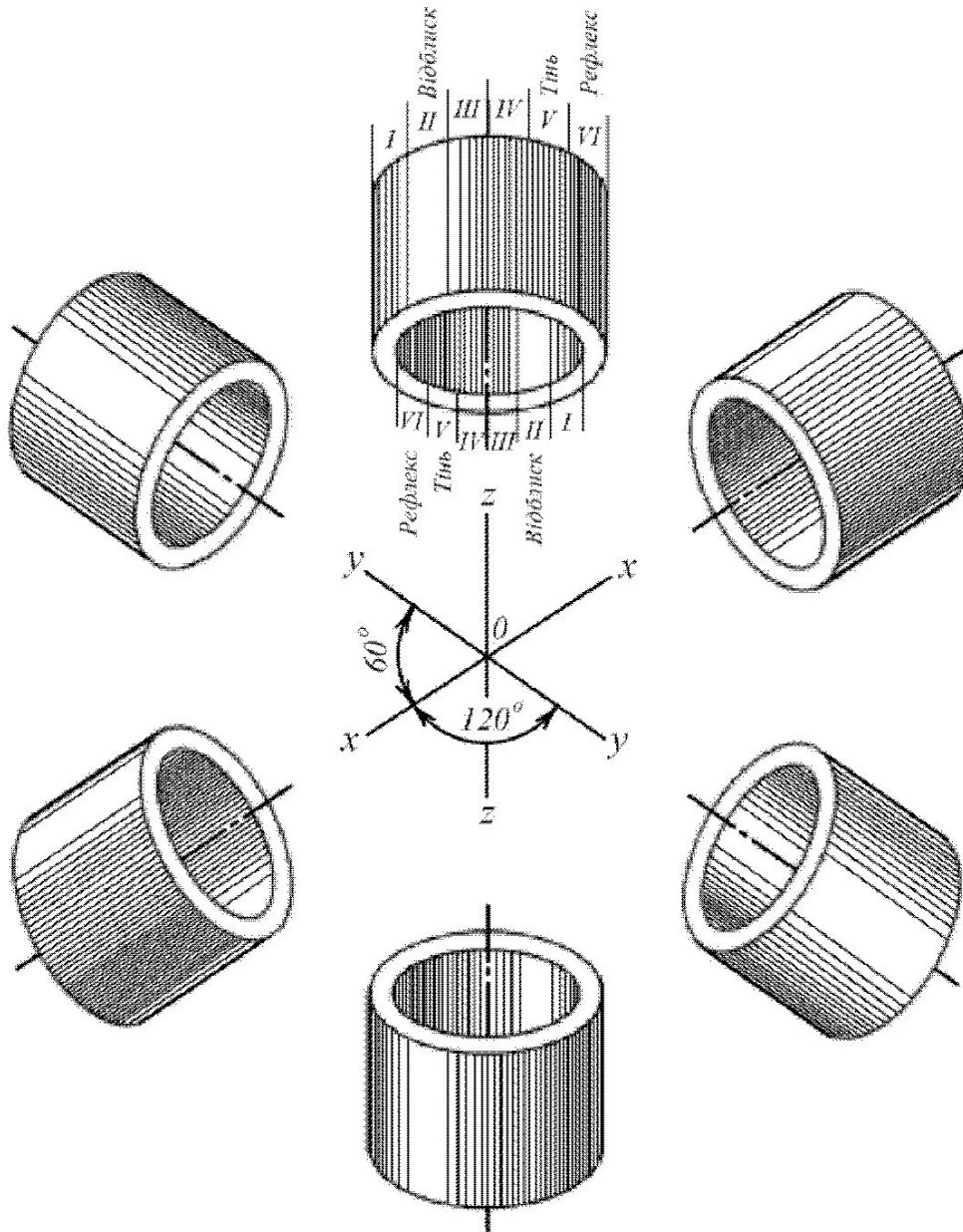


Рис. 14.7

На рисунках видно, що затінені площини основ циліндрів штрихують лініями, паралельними відповідним осям координат.

14.4. Конічні поверхні

Якщо розглядати конічну поверхню в натурі за умови, що світло падає зверху ліворуч, можна помітити такі ж зони різної освітленості, як і на циліндричній поверхні.

На рис. 14.8 наведено шість варіантів розташування порожнистого конуса вздовж аксонометричних осей у прямокутній ізометрії та показано розподіл елементів світлотіні на внутрішній і зовнішній поверхнях. Лінії штриховки при цьому проводять по твірних конуса у напрямку від основи до його вершини. Оскільки твірні конуса збігаються в одній точці – вершині, то всі елементи світлотіні (відблиски, півтони, власна тінь та рефлекс) перетворюються на гострі трикутники з однією спільною вершиною. Тому при обробці форми конуса необхідно стежити за нанесенням світлотіні та одночасно за поступовим стисканням форми. Відстані між лініями штриховки змінюються (по дузі кола основи) з потовщенням ліній при переході від освітленої до затіненої частини поверхні. На невеликій частині поверхні конуса, розташованій напроти найбільш освітленої, трохи збільшують відстані між лініями штриховки внаслідок рефлексу.

Такий розподіл елементів світлотіні є прийнятним у тому випадку, коли висота повного конуса H не менша двох радіусів R його основи $H \geq 2R$. За малої висоти конуса ($H < 0,5R$) краще залишати висвітленою трохи більше половини його поверхні.

Нанесення тону на зображення рекомендується виконувати від більш темного до більш світлого. Переходи від тіні до світла мають бути непомітними. Необхідно звіряти тональ-

14. ТІНІ

ний взаємозв'язок, порівнюючи отриманий тон із крайніми тонами (світлим і темним).

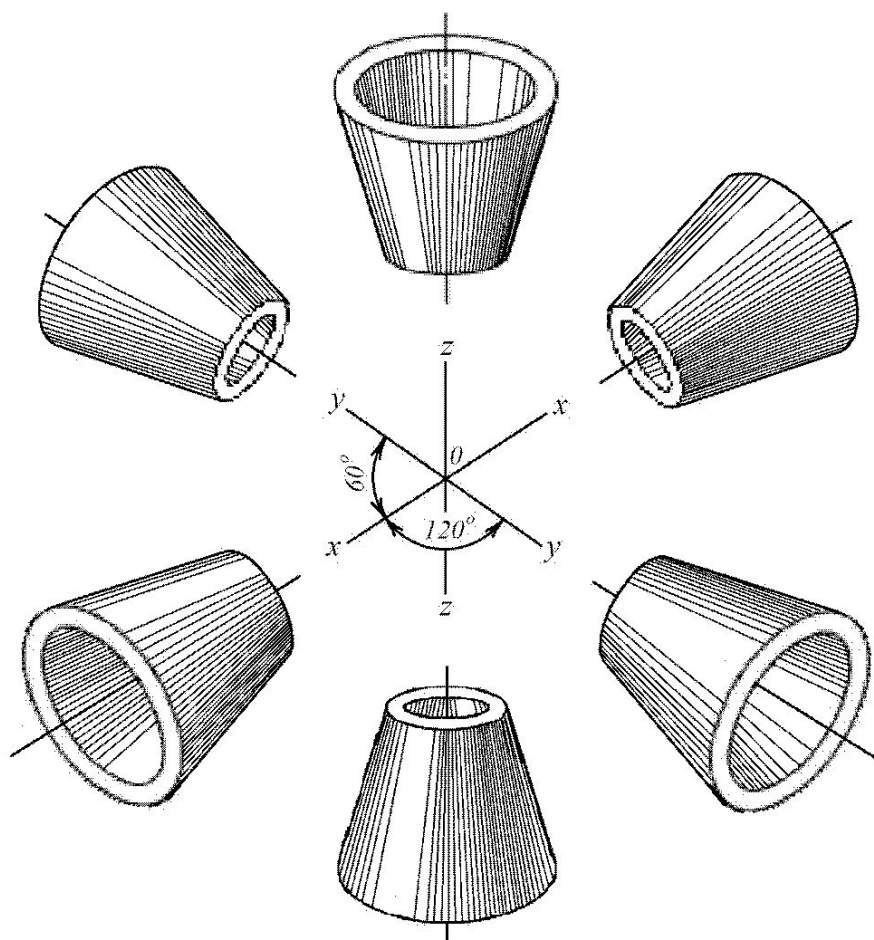


Рис. 14.8

14.5. Поверхня кулі

Розглядаючи кулю в натурі, можна помітити в її освітленості деякі особливості: блік, в якому відображається джерело світла (рис. 14.9, *a*); два рефлекси у тіньовій частині – один зверху праворуч (повітряний рефлекс), а другий знизу, відбитий від площини, на якій розташована куля; контур власної тіні, який має форму кола (еліпса) та отримується, якщо кулю

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

перетнути площиною, яка проходить через його центр та перпендикулярна до променів світла.

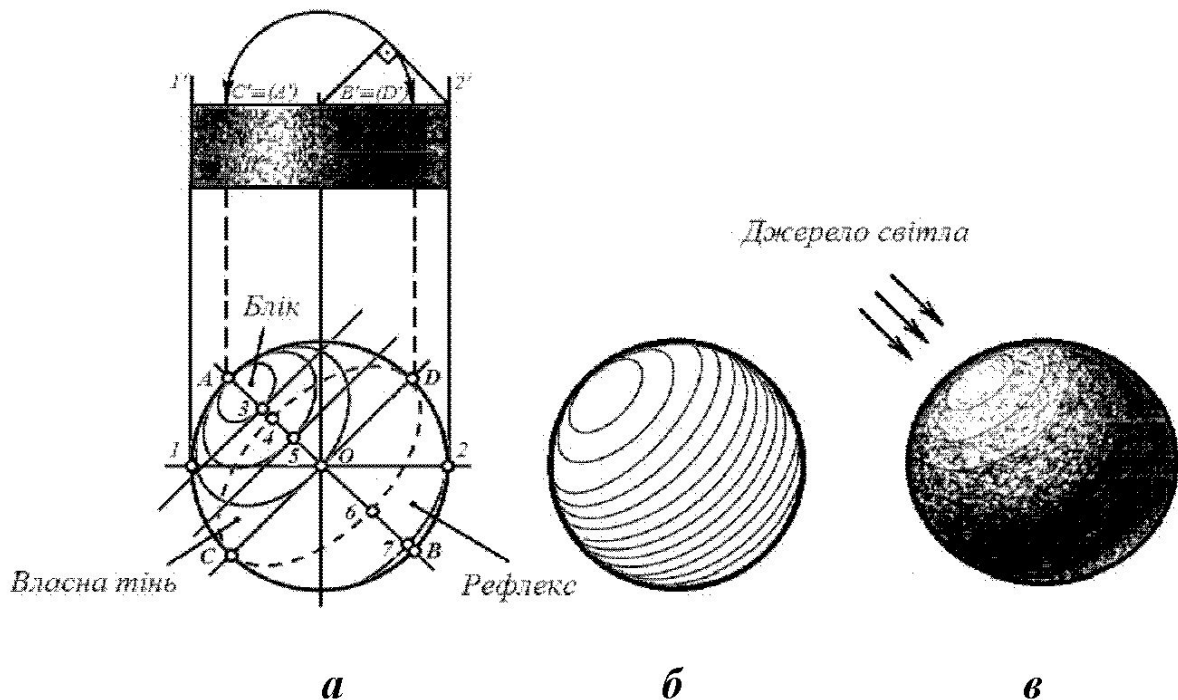


Рис. 14.9. Розподіл світлотіні на поверхні кулі:
а – схема світлотіньової обробки; *б, в* – варіанти
нанесення світлотіні

Виконати штриховку кулі достатньо складно: для цього потрібно зробити допоміжні побудови та витратити багато часу. Розподіл елементів світлотіні показано на рис. 14.9,*б*. Допоміжні побудови полягають у наступному.

В обрисі кола (кулі) проводять два взаємно перпендикулярних діаметри, нахилені до горизонтальної лінії під кутом 45° . Верхню половину діаметра AB поділяють на вісім рівних частин, а нижню – на три. Через точки розподілу проводять прямі, паралельні діаметру CD . Після цього будують п'ять еліпсів. Розміри малих осей цих еліпсів визначаються відстанями між точками A і 3 , A і 5 , A і O , 4 і 6 , O і 7 . Розміри великих осей двох найменших еліпсів приймають у співвідношенні 2:1, а інші еліпси будують (від руки) так, щоб вони були вписані в контур кола – в обрис кулі. У результаті отримують шість зон

14. ТІНІ

розподілу елементів світлотіні. Три з них (блік, рефлекс та власна тінь) показані відповідними надписами на рис. 14.9,*а*. Світлотіньовий ефект на поверхні отримують паралелями кулі, які поступово наближуються одна до одної і потовщуються до затіненої частини (рис. 14.9,*в*). Необхідно уважно слідкувати за світлотіньовими переходами при остаточній обробці форми кулі. Рефлексу в нижній частині кулі треба досягати не ластиком, а поступовим затемненням суміжної частинки.

У практиці рисування використовують різні способи нанесення світлотіні на поверхні кулі: способом штриховки і точковим способом.

14.6. Тіні на комплексному кресленні

Перед тим як починати будувати тіні в аксонометрії та перспективі, необхідно засвоїти основи побудови тіней в ортогональних проекціях. При побудові тіні в ортогональних проекціях, коли джерелом світла є сонце, треба пам'ятати такі особливості:

1. Напрямок променів світла зазвичай приймають паралельним діагоналі куба, грані якого паралельні площині проєкцій. Завдяки цьому проєкції променів світла l_1 і l_2 утворюють з осями проєкцій кути 45° (рис. 14.10).

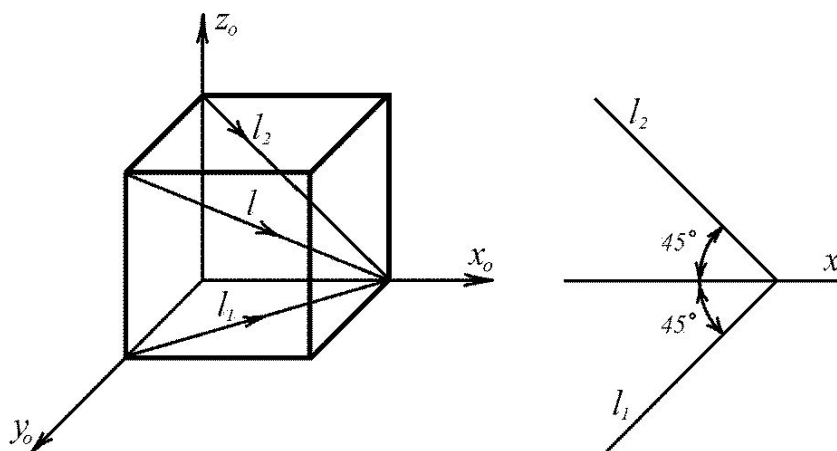


Рис. 14.10

2. Тінь від точки на поверхню є точкою перетину із цією поверхнею променя світла, проведеного через цю точку.

3. Тінь від прямої на поверхню являє собою лінію перетину променів площини (сукупність променів світла, що проходять через пряму) з поверхнею.

4. Тінь від вертикальних прямих на горизонтальну площину, паралельна горизонтальній проекції променів світла (пряма AB на рис. 14.11). Тінь від прямих, перпендикулярних до площини Π_2 , на фронтальну площину – паралельна фронтальній проекції променя світла (пряма CD на рис. 14.11).

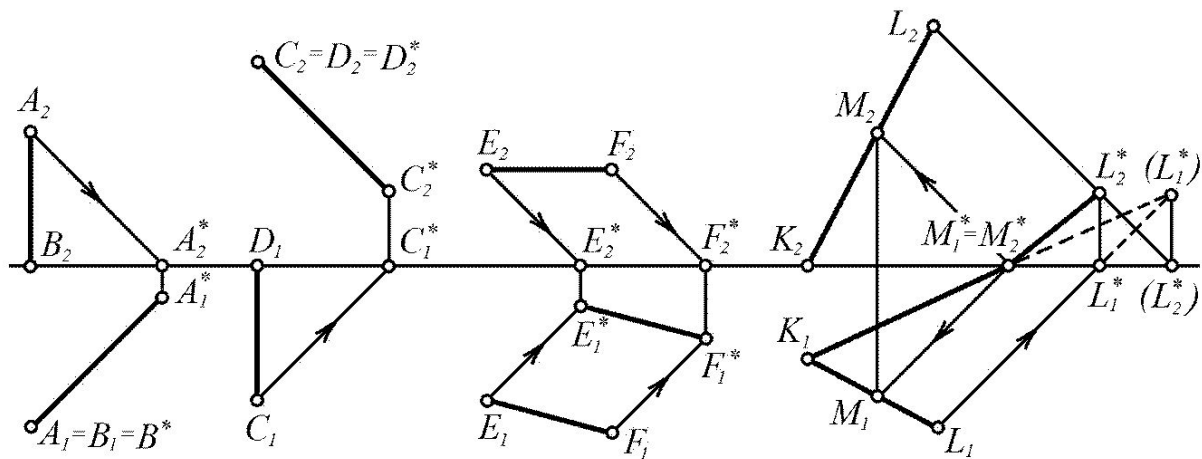


Рис. 14.11

5. Якщо відрізок прямої розташований паралельно будь-якій площині, то тінь від нього на цю площину дорівнює відрізку і паралельна йому (відрізок EP на рис. 14.11). На цьому ж кресленні показана тінь від прямої загального положення KL . Довжина тіні відрізка залежить від напрямку променів світла і положення відрізка відносно площини, на яку падає тінь.

14. ТІНІ

6. Коли плоска фігура паралельна будь-якій площині, то тінь від неї на цю площину розташована подібно самій плоскій фігурі та дорівнює їй за величиною.

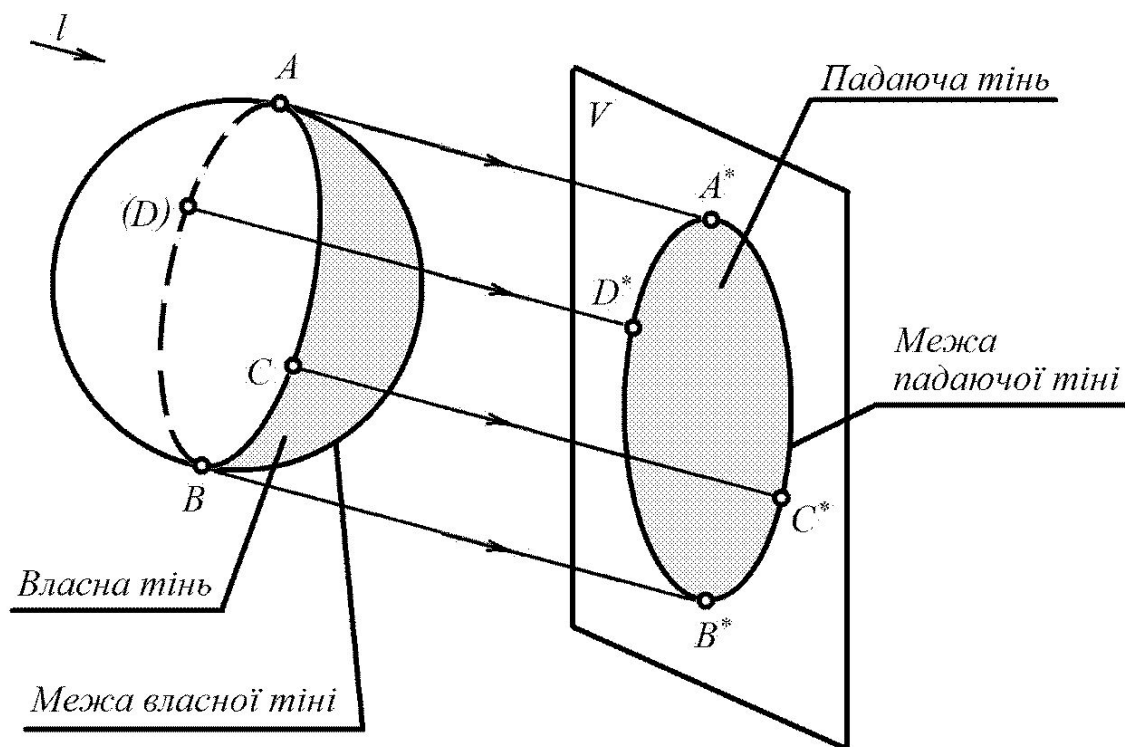


Рис. 14.12

7. Межа падаючої тіні є тінню від межі власної тіні тієї ж фігури, тому за межею падаючої тіні можна визначити межу власної тіні, і навпаки (рис. 14.12).

8. При побудові падаючих тіней від одного тіла на інші можна користуватися способом зворотного променя: якщо на площинах Π_1 і Π_2 або будь-якій іншій перетинаються падаючі тіні від двох прямих, то через точку їх перетину необхідно провести промінь світла у напрямку джерела світла до перетину з відповідними прямими. Перша точка у напрямку зворотного променя буде падаючою тінню від другої точки (рис. 14.13).

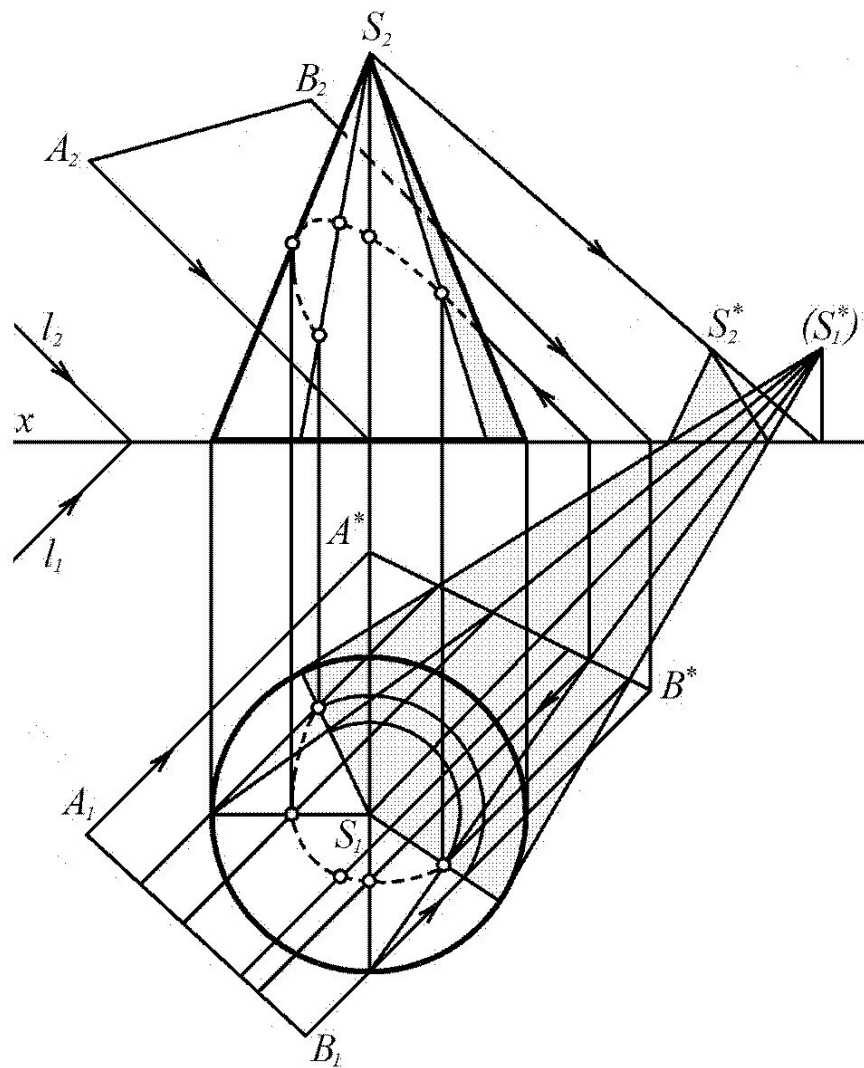


Рис. 14.13

14.7. Тіні в аксонометрії та перспективі

Перед тим як розпочати побудову тіней в аксонометрії задають напрям променів світла та їх вторинні проекції. Гарний результат буде отримано, коли головний фасад освітлений, а боковий фасад розташовується у власній тіні будівлі. При цьому напрям вторинних проекцій променів не повинен збігатися з напрямом однієї з аксонометричних осей.

14. ТІНІ

Можна розташувати промені світла паралельно площині аксонометричних проекцій (їх вторинні проекції горизонтальні відносно рамки креслення). Нахил променів горизонтальної площини треба обрати у межах від 40° до 60° .

Побудову тіней, що спадають від виступних частин будівлі на стіну або дах, можна будувати способом зворотного променя або допоміжних перетинів. У другому випадку необхідно відповідний промінь заключити у вертикальну площину. Вона може бути задана променем і його вторинною проекцією. Після цього будується лінія перетину у допоміжній площині з цією площиною (поверхнею), на якій будується тінь. Перетин цієї лінії з променем світла визначає шукану точку.

Розташування тіней від прямих на площини підлягає тим самим закономірностям, що і в ортогональних проекціях.

Приклад виконання побудов тіней для аксонометричної проекції будівель наведено на рис. 14.14, а тіні в перспективі подано на рис. 14.15.

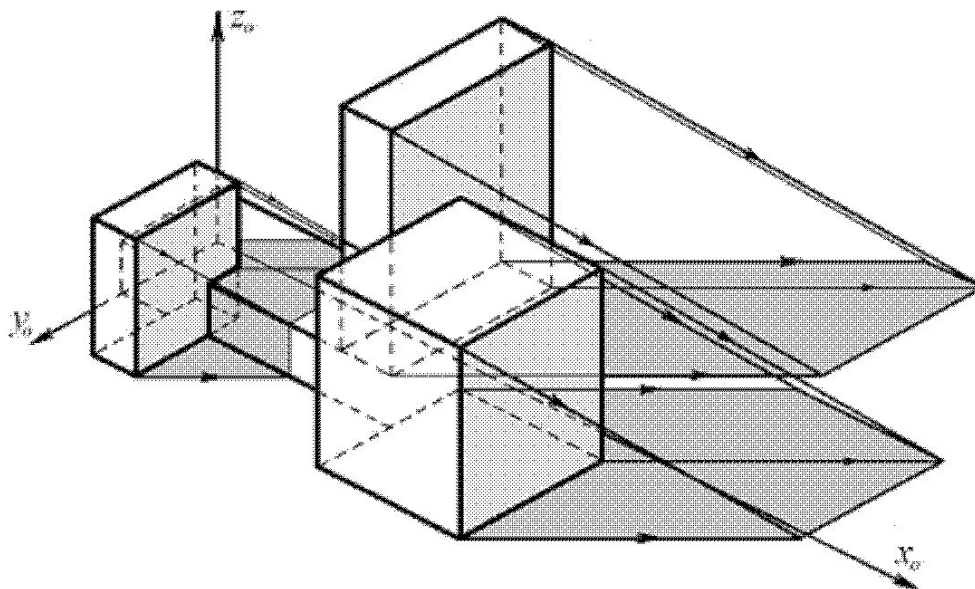


Рис. 14.14

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Антонов, Е. К.** Комплексный чертеж в судостроении: [Текст] учебное пособие / Е. К. Антонов. – Николаев : НКИ. – Ч. 1, 1988 г., 86 с.; Ч. 2, 1989 г., 84 с.
2. **Борисенко, В. Д.** Аксонометричні проєкції : [Текст] навч. посібник / В. Д. Борисенко, О. Г. Бідніченко. – Миколаїв : НУК, 2009. – 56 с.
3. **Борисенко, В. Д.** Основи нарисної геометрії : [Текст] підручник / В. Д. Борисенко, О. Г. Бідніченко. – Миколаїв : НУК, 2014. – 328 с.
4. **Бубенников, А. В.** Начертательная геометрия [Текст] / А. В. Бубенников. – М. : Высшая школа, 1985. – 288 с.
5. **Виницкий, И. Г.** Начертательная геометрия [Текст] : учебн. пособие / И. Г. Виницкий. – М. : Высшая школа, 1975.
6. **Кириченко, А. Ф.** Теоретичні основи інженерної графіки [Текст] : підручник для вищих технічних навчальних закладів / А. Ф. Кириченко – К. : Видавничий дім "Професіонал", 2004. – 496 с.
7. **Климухин, А. Г.** Тени и перспектива [Текст] / А. Г. Климухин. – М. : Стройиздат, 1967.
8. **Климухин, А. Г.** Начертательная геометрия [Текст] / А. Г. Климухин. – М. : Стройиздат, 1978.

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

9. **Михайленко, В. Є.** Інженерна та комп'ютерна графіка [Текст] : підручник / В. Є. Михайленко, В. М. Найдиш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан; за ред. В. Є. Михайленка. – 3-тє вид., перероб. – К. : Видавничий дім "Слово", 2011. – 352 с.

10. **Михайленко, В. Є.** Нарисна геометрія [Текст] : навч. посібник / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстифеев, С. М. Ковальов, О. В. Кащенко; за ред. В. Є. Михайленка. – 3-тє вид., перероб. – К. : Видавничий Дім "Слово", 2013. – 304 с.

11. **Посвянский, А. Д.** Краткий курс начертательной геометрии [Текст] / А. Д. Посвянский. – М. : Высшая школа, 1974. – 191 с.

12. **Ратничин, В. М.** Перспектива [Текст] / В. М. Ратничин. – Киев : Вища школа, 1982. – 232 с.

13. **Слободян, С. О.** Основи перспективи, аксонометричних проєкцій і теорії тіней [Текст]: навчальний посібник / С. О. Слободян. – Миколаїв : НУК, 2013. – 132 с.

14. **Фролов, С. А.** Начертательная геометрия [Текст] / С. А. Фролов. – М. : Машиностроение, 1978. – 239 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ	6
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І МЕТОДИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ ...	8
1.1. Предмет і задачі нарисної геометрії	8
1.2. Метод проєкцій	9
1.3. Центральні проєкції	10
1.4. Паралельні проєкції	11
1.5. Зворотність креслення. Комплексне креслення	12
1.6. Ортогональна система трьох площин проєкцій	14
2. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ТОЧКИ	17
2.1. Загальні положення	17
2.2. Проекції точки на дві площини проєкцій. Епюр точки	18
2.3. Проекції точки на три площини проєкцій	19
2.4. Побудова комплексного креслення точки за її координатами	20
2.5. Побудова проєкції точки, якої не вистачає, за двома відомими її проєкціями	22
2.6. Взаємне розташування двох точок	23
3. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПРЯМОЇ	25
3.1. Основні положення проєкціювання прямої	25
3.2. Прямі загального положення	25
3.3. Прямі лінії окремого положення	28

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

3.4. Взаємне розташування двох прямих	31
3.5. Визначення видимості геометричних образів	33
3.6. Взаємні положення точки та прямої	35
3.7. Проекції прямого кута	37
4. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ПЛОЩИНИ	39
4.1. Способи задання площини на комплексному кресленні	39
4.2. Площини окремого положення	41
4.3. Прямі і точки, що належать площині	44
4.4. Головні лінії площини	47
4.5. Прямі, паралельні та перпендикулярні до площин	50
4.6. Перетин прямої з площиною	54
4.7. Взаємно паралельні площини	58
4.8. Взаємно перпендикулярні площини	60
4.9. Площини, що перетинаються	61
5. ПЕРЕТВОРЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО КРЕСЛЕННЯ	65
5.1. Основні задачі перетворення	65
5.2. Спосіб заміни площин проекцій	68
5.3. Приклади застосування способів перетворення проекцій до розв'язування задач	82
6. КРИВІ ЛІНІЇ	92
6.1. Способи утворення кривих ліній	92
6.2. Класифікація кривих ліній	93
6.3. Криві другого порядку	95
6.4. Просторові криві лінії	99
7. БАГАТОГРАННИКИ	103
7.1. Піраміди	103
7.2. Призми	106
7.3. Перетин багатогранника площиною	110
7.4. Перетин багатогранника з прямою лінією	113
7.5. Взаємний перетин багатогранників	115
8. ПОВЕРХНІ	120
8.1. Поняття й визначення поверхні	120
8.2. Задання поверхні на комплексному кресленні	122

ЗМІСТ

8.3. Поверхні обертання загального вигляду	127
8.4. Поверхні обертання другого порядку	130
8.5. Поверхні обертання четвертого порядку	133
8.6. Лінійчасті поверхні обертання	136
8.7. Лінійчасті поверхні з однією напрямною	138
8.8. Лінійчасті поверхні з двома напрямними і площиною паралелізму	142
8.9. Гвинтові поверхні	148
8.10. Незакономірні поверхні	151
9. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ І ПРЯМИМИ ЛІНІЯМИ	158
9.1. Перетин поверхні з проєкціовальною площиною	158
9.2. Перетин поверхонь з площиною загального положення ...	162
9.3. Перетин поверхонь з прямою лінією	166
9.4. Побудова точок перетину поверхонь з прямою лінією із застосуванням січної площини загального положення	170
10. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ	173
10.1. Загальні підходи до побудови лінії перетину двох поверхонь	173
10.2. Перетин поверхонь, одна з яких проєкціовальна	175
10.3. Спосіб допоміжних січних площин-посередників	181
10.4. Спосіб допоміжних січних сфер-посередників	186
10.5. Окремий випадок взаємного перетину поверхонь обертання другого порядку	192
10.6. Перетин кривих поверхонь з багатогранниками	196
10.7. Приклади побудови ліній перетину двох поверхонь	199
11. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ	203
11.1. Загальні поняття про розгортання поверхонь	203
11.2. Розгортки пірамідальних поверхонь	204
11.3. Розгортки призматичних поверхонь	206
11.4. Розгортки конічних поверхонь	209
11.5. Розгортки циліндричних поверхонь	212
11.6. Умовні розгортки поверхонь	215

ОСНОВИ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ...

12. ПЕРСПЕКТИВА	220
12.1. Основні поняття та визначення	220
12.2. Перспектива точки	224
12.3. Перспектива прямої лінії	226
12.4. Гранична точка прямої. Лінія горизонту	228
12.5. Побудова перспективи точки за її ортогональними проекціями	229
12.6. Перспектива пучка паралельних прямих. Точка сходу ...	231
12.7. Побудова перспектив	237
12.8. Розподіл відрізка прямої на рівні та пропорційні частини .	239
12.9. Побудова перспективи паралельних прямих при недосяжній точці сходу	241
12.10. Перспективний масштаб. Дистанційна точка	244
12.11. Побудова перспектив кривих ліній. Перспектива кола ...	247
12.12. Побудова перспективи кута заданої величини	249
12.13. Перспектива площини	250
12.14. Побудова перспективи за заданими ортогональними проекціями. Метод архітекторів	252
12.15. Вибір точки і кута зору	255
13. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ	257
13.1. Загальні відомості, визначення, класифікація	257
13.2. Види аксонометричних проекцій	262
13.3. Стандартні аксонометричні проекції	264
13.4. Аксонометричні проекції плоских фігур	278
13.5. Приклади побудови ізометричних проекцій простих фігур	285
13.6. Приклади побудови ізометричних проекцій складних фігур	291
14. ТІНІ	294
14.1. Світлотінь та способи нанесення її на кресленні	294
14.2. Поверхні багатогранників	298
14.3. Циліндричні поверхні	301
14.4. Конічні поверхні	304

ЗМІСТ

14.5. Поверхня кулі	305
14.6. Тіні на комплексному кресленні.....	307
14.7. Тіні в аксонометрії та перспективі.....	310
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	313