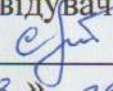


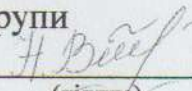
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
Навчально-науковий педагогічний інститут імені В.О. Сухомлинського

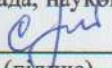
Кафедра методики викладання фізики та математики

«Допущений до захисту»
Завідувач кафедри
 Січко В.М.
«3» зрудня 2025 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»
зі спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

на тему:
**ЗАСТОСУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ
ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ЕФЕКТИВНОГО ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ У
ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ**

Виконала: студентка 6811 мз
групи
 **Кравченко Н. О.**
(підпис)

Керівник роботи:
кандидат фізико-математичних
наук, професор
(посада, науковий ступень, вчене звання)
 **Січко В. М.**
(підпис)

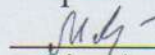
Миколаїв – 2025 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова
Навчально-науковий педагогічний інститут імені В.О. Сухомлинського

Кафедра методики викладання фізики та математики
 Спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика)
 Освітня програма Середня освіта: математика, інформатика

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Гарант освітньої програми

 Літвінова М.Б.
 (підпис)

«22» жовтень 2024 р.

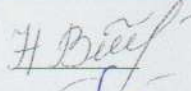
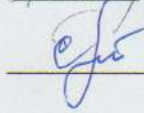
ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ СТУДЕНТКИ

Кравченко Ніни Олексіївни

1. Тема роботи: «Застосування інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного вивчення функцій у шкільному курсі математики»
2. Керівник роботи: Січко Віктор Михайлович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методики викладання фізики та математики
 затверджені наказом вищого навчального закладу від «26» 11 2025 року № 1383-УЧ
2. Строк подання студентом роботи: 15.11.2025 року
3. Вихідні дані до роботи:
 Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, Відомості Верховної ради України, Міністерство освіти і науки України, наукові розробки вітчизняних і зарубіжних вчених, матеріали наукових конференцій.
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки:
 Розділ 1. Теоретичні засади застосування ікт у процесі вивчення функцій у шкільному курсі математики.
 Розділ 2. Експериментальна апробація застосування ікт для ефективного вивчення функцій в шкільному курсі математики.
5. Перелік графічного матеріалу: робота містить 46 рисунків, розроблених Кравченко Н. О.
6. Консультанти розділів роботи: науковий керівник, к. ф.-м. н., професор Січко В. М., консультант, к. ф.-м. н., доцент Мельник О. В.
7. Дата видачі завдання: 15.09.2024 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН на 2024-25 навчальний рік

N з/п	Назва етапів кваліфікаційну роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Затвердження теми і керівника кваліфікаційної роботи	16.09.2024	
2.	Видача завдання	16.10.2024	
3.	Підбір літератури, узгодження структури робіт	28.10.2024	

4.	Вступ. Розділ 1. Теоретичні засади застосування ікт у процесі вивчення функцій у шкільному курсі математики	21.03.2025	
5.	Розділ 2. Експериментальна апробація застосування ікт для ефективного вивчення функцій в шкільному курсі математики	09.05.2025	
7.	Вступ, висновки, список використаних джерел	12.09.2025	
8.	Захист магістерської роботи: Доповідь матеріали до захисту: ❖ магістерська (електронний варіант); ❖ довідка з бібліотеки (перевірка на антиплагіат); ❖ магістерська (роздрукована, прошита робота); ❖ наукова стаття у фаховому збірнику (тези) у співавторстві із керівником (консультантом); ❖ реферат (короткий зміст магістерської роботи); ❖ відгук від керівника; ❖ рецензія (зовнішня, не нижче кандидата наук); ❖ презентація, доповідь (захист)	21.11.2025	
9.	Подача роботи в деканат	30.11.2025	
	Студентка		<u>Кравченко Ніна Олексіївна</u>
	Керівник роботи		<u>Січко Віктор Михайлович</u>

АНОТАЦІЯ

Кравченко І. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного вивчення функцій у шкільному курсі математики. Кваліфікаційна робота зі спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) освітньої програми «Середня освіта: математика, інформатика». Миколаїв: НУК ім. адм. Макарова, 2025. 81 с.

В кваліфікаційній роботі було здійснено науково-теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка ефективності застосування інформаційно-комунікаційних технологій для вивчення функцій у шкільному курсі математики.

Здійснено аналіз науково-методичної літератури та мережі Інтернет з методики вивчення функцій у шкільному курсі математики та досвіду застосування ІКТ в математиці.

Проведено науково-теоретичне дослідження дидактичних проблем вивчення поняття «функція» у шкільному курсі математики, а також обґрунтовано необхідність і потенціал інформаційно-комунікаційних технологій для подолання абстрактності та підвищення наочності матеріалу. У межах роботи систематизовано та узагальнено теоретичні засади застосування ІКТ у навчанні математики, зокрема динамічних математичних середовищ.

Також розглянуто дидактичні можливості ключових ІКТ-інструментів (GeoGebra, Desmos, WolframAlpha, Kahoot!/Wayground), їхню роль у візуалізації графіків та дослідженні властивостей функцій (парність, монотонність, періодичність, область визначення).

Обґрунтовано та розроблено методику ефективного вивчення функцій у старшій школі, яка передбачає інтегроване використання комплексу ІКТ-засобів на всіх етапах уроку – від мотиваційного до контрольної оцінювального, з акцентом на розвиток графічної та дослідницької компетентності.

Експериментально перевірено ефективність розробленої методики, яка включала анкетування учнів щодо рівня їхнього розуміння, зацікавленості та зручності використання ІКТ-інструментів. Доведено, що застосування ІКТ-засобів суттєво підвищує навчальну мотивацію та сприяє глибшому засвоєнню функціональних понять.

Розроблено практичні рекомендації для вчителів математики щодо послідовної та ефективної інтеграції GeoGebra, Desmos та інших інтерактивних платформ в освітній процес. Розроблені рекомендації сприятимуть підвищенню якості математичної освіти та формуванню функціональної грамотності старшокласників.

Ключові слова: функція, ІКТ, сучасне програмне забезпечення, онлайн-сервіс, візуалізація.

ABSTRACT

Kravchenko N. The Use of Information and Communication Technologies for Effective Learning of Functions in School Mathematics Courses. Qualification work in the specialty 014.04 Secondary Education (Mathematics) within the educational program «Secondary Education: Mathematics, Informatics». Mykolaiv: Admiral Makarov National University of Shipbuilding, 2025. 81 p.

The qualification paper provides a scientific and theoretical rationale, as well as an experimental verification, of the effectiveness of using information and communication technologies (ICT) in studying functions within school mathematics courses.

An analysis of scientific and methodological literature and online resources was conducted regarding the methodology of teaching functions in school mathematics and the experience of applying ICT in mathematics education.

A scientific and theoretical study of the didactic issues related to learning the concept of a «function» in school mathematics was carried out. The research substantiates the necessity and potential of ICT for overcoming the abstract nature

of this topic and enhancing the clarity of mathematical material. Within the framework of the study, the theoretical foundations for the use of ICT in mathematics education particularly dynamic mathematical environments were systematized and generalized.

The didactic potential of key ICT tools (GeoGebra, Desmos, WolframAlpha, and Kahoot!/Wayground) and their role in visualizing graphs and exploring the properties of functions (such as parity, monotonicity, periodicity, and domain) are also examined.

A methodology for the effective teaching and learning of functions in high school has been substantiated and developed. It involves the integrated use of a set of ICT tools at all stages of the lesson from motivation to assessment with an emphasis on developing students' graphic and research competencies.

The effectiveness of the proposed methodology was experimentally verified through student surveys measuring levels of understanding, engagement, and ease of using ICT tools. The results confirmed that the use of ICT significantly enhances learning motivation and promotes a deeper comprehension of functional concepts.

Practical recommendations have been developed for mathematics teachers on the systematic and effective integration of GeoGebra, Desmos, and other interactive platforms into the educational process. The proposed guidelines aim to improve the quality of mathematics education and foster the formation of functional literacy among high school students.

Keywords: function, ICT, modern software, online services, visualization.

ЗМІСТ

ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ІКТ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	12
1.1. Функція як ключове поняття в шкільному курсі математики	12
1.2. Інтеграція інформаційно-комунікаційних технологій у процес навчання математики	21
Висновки до розділу 1	37
РОЗДІЛ 2. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА АПРОБАЦІЯ ЗАСТОСУВАННЯ ІКТ ДЛЯ ЕФЕКТИВНОГО ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	38
2.1. Методичні рекомендації щодо використання ІКТ для вивчення функцій в старшій школі	38
2.2. Організація та проведення педагогічного експерименту	55
Висновки до розділу 2	64
ВИСНОВКИ	66
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	68
ДОДАТКИ	76

ВСТУП

Актуальність дослідження. Актуальність цього дослідження обумовлена потребою в оновленні сучасних методів викладання математики в загальноосвітніх закладах та підвищенні ефективності засвоєння учнями одного з основних понять шкільного курсу – поняття функції. Функція є ключовим елементом математичної підготовки, що допомагає зрозуміти закономірності навколишнього світу та знаходить застосування у фізиці, інформатиці, економіці та інших науках. Глибоке розуміння цього поняття сприяє розвитку логічного мислення, аналітичних навичок і формуванню наукового світогляду учнів.

Проте традиційні методи вивчення функцій часто залишаються абстрактними, вимагають значних затрат часу на побудову графіків і не забезпечують належного рівня візуалізації математичних залежностей. Це знижує пізнавальну активність, призводить до формального засвоєння матеріалу та втрати інтересу до предмета.

У контексті цифрової трансформації освіти все більше значення набуває використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ), які відкривають нові можливості для вивчення функцій. Застосування інтерактивних математичних середовищ (таких як GeoGebra, Desmos тощо) сприяє наочному представленню абстрактних понять, дослідженню властивостей функцій у динаміці, розвитку навичок самостійного аналізу й експериментування.

Аналіз останніх досліджень. Методику використання цифрових технологій у процесі змішаного навчання в закладах загальної середньої освіти розглядали М. Мар'єнко, А. Сухіх [29]. В дослідженнях М. Жалдак розроблено систему підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі [20].

Методичні рекомендації щодо використання у навчанні математики інформаційно-комунікаційних засобів створено В. Буряк, В. Соловйовим, В. Сергієнко [23], науково апробовано застосування інноваційних ІКТ в математиці, фізиці та інформатиці у середніх та вищих навчальних закладах в збірнику матеріалів Всеукраїнської науково-методичної конференції, редакторами якого були М. Жалдак, В. Бевз, Ю. Горошко та інші [24].

Зокрема, дослідження [40], О. Малихін, І. Ліпчевська [28], О. Норкіна [37], О. Семеніхіна [46], О. Богатєнкова [9] присвячені сфері використання ІКТ для навчання математики.

На сьогоднішній день не існує чітких методичних рекомендацій щодо використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) для вивчення функцій. Тому важливість цієї теми полягає в необхідності наукового обґрунтування та розробки практичних порад для ефективного використання ІКТ у навчальному процесі з математики в школах. Це відповідає сучасним вимогам цифрової освіти, що, в свою чергу, підвищує якість навчання та сприяє розвитку самостійності учнів у пізнанні.

Мета дослідження полягає в розробці методичних рекомендацій для використання ІКТ у вивченні функцій у шкільному курсі математики, а також в експериментальному тестуванні цих рекомендацій та аналізі їх ефективності.

Завдання дослідження:

1. Провести аналіз психолого-педагогічних аспектів вивчення функцій та використання ІКТ в сучасному освітньому процесі.
2. Охарактеризувати основні види ІКТ, які можуть бути корисними для вивчення функцій.
3. Розробити методичні рекомендації для вчителів щодо застосування інформаційно-комунікаційних технологій для вивчення функцій в шкільному курсі математики.
4. Апробувати розроблені методичні рекомендації.

Об'єкт дослідження – процес вивчення функцій у шкільному курсі математики.

Предмет дослідження – застосування інформаційно-комунікаційних технологій для підвищення ефективності вивчення функцій в шкільному курсі математики.

Методи дослідження: теоретичний аналіз, синтез, порівняння, педагогічний експеримент, спостереження, опитування.

Для досягнення мети та вирішення завдань дослідження використано такі **методи:** *теоретичні* – аналіз педагогічної, психологічної та методологічної літератури, навчальних програм та навчальних посібників; аналіз сучасних ІКТ, придатних для вивчення математики; *емпіричні* – педагогічний експеримент; *статистичні* – методи математичної статистики – для обробки отриманих експериментальних даних.

База дослідження: Бузький ліцей Сухоєланецької сільської ради Миколаївського району Миколаївської області.

Теоретична значущість полягає у систематизації та узагальненні дидактичних можливостей комплексного застосування ІКТ (GeoGebra, Desmos та ін.) для вивчення функцій. Дослідження уточнює та розширює теоретичні засади методики викладання математики через моделювання системи, що сприяє формуванню графічної та дослідницької компетентності учнів. Отримані результати поглиблюють знання про роль ІКТ як ефективного засобу візуалізації та індивідуалізації навчання.

Практична значущість полягає у розробці методичних матеріалів, що можуть бути використані вчителями математики, студентами педагогічних спеціальностей та авторами підручників.

Апробація результатів дослідження. Основні положення кваліфікаційної роботи доповідалися на Всеукраїнських конференціях різного рівня, зокрема: Актуальні проблеми соціально-гуманітарних наук: перспективи та виклики: матеріали VIII Всеукраїнської студентської науково-

практичної конференції. 4 квітня 2025 року. Миколаїв : НУК ім. адм. Макарова, 2025. 721 с. [1]

Матеріали кваліфікаційної роботи пройшли наукову апробацію під час семінарів кафедри та були оприлюднені у збірнику наукових праць: Фізика, математика, інформатика: досвід та інновації: зб. матеріалів наук.-метод. семінару кафедри методики викладання фізики і математики, Миколаїв, 12 травня 2025 р. Вип. 30. / редкол. : В. Січко (голова), М. Літвінова (голов. ред.), О. Богатєнкова (тех. ред.) Миколаїв : НУК імені адмірала Макарова, 2025. 91 с. Тема: «Теоретико-методичний аналіз психологічних вимог до сучасної навчальної літератури для ефективного вивчення функцій у шкільному курсі математики» [50].

Структура та обсяг кваліфікаційної роботи: складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (63 найменування, які займають 8 сторінок), 5 додатків на 25 сторінках. Повний обсяг роботи становить 94 сторінки, із них 67 сторінок основного тексту. Робота містить 56 рисунків, 7 діаграм.

РОЗДІЛ 1.

ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ІКТ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Функція як ключове поняття в шкільному курсі математики

Первинною математичною моделлю є функція, тому функції, їх властивості та графіки, як в явній, так і в неявній формі є стрижнем шкільного курсу математики [47, с. 9-10].

Якщо кожному значенню незалежної змінної x відповідає єдине значення залежної змінної y , то змінну y називають функцією від x [2, с. 121].

Поняття функції є одним з фундаментальних у сучасній математиці та її застосуваннях. Воно виступає мостом між різними розділами математики, такими як алгебра, геометрія, математичний аналіз, та є ключовим інструментом для опису залежностей і взаємозв'язків у навколишньому світі.

У шкільному курсі математики вивчення функції починається з найпростішого, інтуїтивного уявлення про залежність однієї величини від іншої. Наприклад, площа квадрата залежить від довжини його сторони, або вартість товару залежить від його кількості. У такому контексті функція розглядається як правило, що кожному значенню однієї змінної (незалежної змінної або аргументу) ставить у відповідність єдине значення іншої змінної (залежної змінної або функції).

Етапи формування поняття функції

Процес формування поняття функції у школярів можна умовно поділити на кілька етапів:

Пропедевтичний (початковий): На цьому етапі учні знайомляться з простими залежностями (наприклад, «більше на», «менше на», «більше в»), працюють з таблицями, діаграмами та формулами, не використовуючи термін "функція". Це закладає основу для розуміння ідеї відповідності.

Формальний (основний): Учні отримують чітке визначення функції, знайомляться з такими поняттями, як область визначення, область значень, графік функції.

На цьому етапі вивчаються різні способи задання функції:

Аналітичний – функцію задають за допомогою математичної формули, що забезпечує можливість обчислення відповідних значень, наприклад:

$$y = 2x + 1$$

Табличний – функцію подано у вигляді таблиці, де в першому рядку зазначено значення аргументу, а в другому – відповідні значення функції, обчислені за правилом $y = f(x)$.

Графічний – полягає у зображенні на координатній площині множини точок з координатами $(x; f(x))$, які ілюструють зв'язок між аргументом і значенням функції. Такий графік може бути представлений у вигляді кривої, прямої або дискретної множини точок.

Словесний – полягає в тому, що залежність між змінними описується словами, без використання формули.

Узагальнювальний (старша школа): Розглядаються більш складні функції (тригонометричні, логарифмічні, показникові), досліджуються їх властивості (монотонність, парність, періодичність) та методи їх перетворення.

Значення поняття функції в шкільному курсі важко переоцінити, адже воно:

- Формує математичне мислення. Навчає бачити залежності, аналізувати їх, будувати моделі та прогнозувати результати.
- Слугує основою для вивчення вищої математики. Без глибокого розуміння функції неможливе опанування таких розділів, як математичний аналіз (диференціальне та інтегральне числення), диференціальні рівняння тощо.

- Має міжпредметне значення. Функції є універсальним інструментом для моделювання процесів у фізиці, хімії, біології, економіці, інформатиці. Наприклад, залежність шляху від часу у фізиці, зміна концентрації речовини в хімії, динаміка росту популяції в біології.

- Розвиває навички розв'язання прикладних задач. Дозволяє учням застосовувати математичні знання для розв'язання реальних проблем.

Отже, поняття функції є не просто абстрактним математичним об'єктом, а потужним засобом пізнання та опису світу. Ефективне його засвоєння є запорукою успішного вивчення як математики, так і інших природничих та технічних дисциплін.

Психолого-педагогічні особливості засвоєння поняття функції учнями різного віку

Засвоєння поняття функції є складним і тривалим процесом, що залежить від вікових особливостей учнів, рівня їхнього абстрактного мислення та попередньої математичної підготовки. Педагогічна практика та психологічні дослідження виділяють кілька ключових етапів, кожен з яких характеризується своїми особливостями сприйняття та мислення.

Початкова школа та пропедевтичний етап (6-10 років)

На цьому етапі домінує наочно-образне мислення. Учні сприймають світ через конкретні образи та дії. Поняття функції як таке не вводиться, але формуються пропедевтичні уявлення через:

Робота з величинами: учні знайомляться із залежностями типу «довжина більша на 2 см», «вартість більша в 5 разів».

Таблиці та схеми: використання таблиць для фіксації залежностей між двома величинами (наприклад, кількість яблук та їх вартість) закладає основу для розуміння відповідності.

Ігрові вправи: різноманітні ігри на встановлення відповідності між об'єктами допомагають сформувати інтуїтивне уявлення про правило, що пов'язує елементи двох множин.

Середня школа (11–15 років)

Це ключовий етап для формування поняття функції. На початку цього періоду мислення учнів поступово переходить від наочно-образного до **абстрактно-логічного**.

Формальне поняття «функції» в 5-6 класах ще не вивчається, пропедевтично вводяться базові концепції залежності між змінними. Учні вчаться будувати таблиці значень змінних, аналізувати дані та створювати лінійні діаграми на їх основі. Ці навички закладають фундамент для подальшого розуміння функціональних відношень у 7 класі [7, с. 89-90].

У 7–8 класах відбувається перше формальне знайомство учнів із поняттям функції. На цьому етапі ключовим завданням є сформувати початкове уявлення про функціональну залежність, демонструючи її різноманітні способи задання.

Графічний спосіб, зокрема побудова графіків лінійної функції, прямої та оберненої пропорційності, має особливе значення: візуалізація допомагає подолати абстрактність математичних понять. Для школяра графік – це не лише лінія на координатній площині, а своєрідна «траєкторія» зміни залежної величини у відповідь на зміну аргументу.

Аналітичний спосіб (задання функції за допомогою формули) потребує розуміння чіткої залежності між змінними, що часто є складним для учнів. На цьому етапі типові психологічні труднощі пов'язані з плутаниною між поняттями аргументу та функції, нерозумінням області визначення та області значень. Тому педагогічне завдання полягає у постійному повторенні цих понять, їх візуалізації та використанні конкретних прикладів.

У старшій школі (16–17 років) абстрактно-логічне мислення учнів уже достатньо розвинене, що дає можливість переходити до глибшого та системнішого вивчення функцій.

Тут вивчаються властивості функцій – монотонність, парність, періодичність, нулі функцій, що вимагає сформованих умінь аналізу та синтезу. Значно розширюється і коло вивчених об'єктів: поряд із квадратичними функціями учні знайомляться з тригонометричними, показниковими та логарифмічними функціями. Це вимагає вміння узагальнювати та переносити набуті знання на нові класи математичних об'єктів. Водночас важливим компонентом стає прикладний аспект: розв'язування задач з фізики, економіки чи інформатики на основі функціональних залежностей допомагає учням усвідомити практичну цінність математики та підтримує мотивацію до її вивчення.

З дидактичної точки зору ефективне засвоєння поняття функції потребує дотримання принципу наступності: навчання варто починати з наочних і конкретних прикладів, поступово переходячи до абстрактних узагальнень. Важливо поєднувати словесний, графічний, табличний та аналітичний способи представлення функції, щоб охопити різні канали сприйняття інформації.

Використання засобів ІКТ відкриває нові можливості: комп'ютерні програми дозволяють динамічно будувати графіки, досліджувати їхні властивості, моделювати реальні процеси. Такий підхід особливо ефективний для учнів із візуальною домінантою сприйняття та сприяє більш глибокому розумінню й тривалому збереженню знань.

Аналіз традиційних методів і підходів до вивчення функцій

Традиційні методи вивчення функцій у шкільному курсі математики ґрунтуються на словесних, наочних та практичних прийомах, де основна роль відводиться вчителю, а учні засвоюють знання в «готовому» вигляді. Ці підходи ефективні для систематичного викладу матеріалу, але мають певні обмеження, що робить актуальним пошук нових, інноваційних методів, зокрема з використанням ІКТ.

Основні традиційні методи викладання можна класифікувати за характером логіки пізнання та за ступенем пізнавальної активності учнів. За характером логіки пізнання методи діляться на: аналітичний, синтетичний, індуктивний, дедуктивний, традитивний. За ступенем пізнавальної активності учнів: пояснювально-демонстраційний, репродуктивний, метод проблемного викладання, частково-пошуковий (евристичний), дослідницький.

Суть *аналітичного методу* в даному випадку полягає в розчленуванні поняття «функція» на складові (аргумент, значення, область визначення, область значень, способи задання) з окремим вивченням кожного елемента. Наприклад, під час вивчення теми «Функція»:

- спочатку вводиться поняття змінної величини;
- потім залежності між величинами;
- далі область визначення та область значень;
- і лише після цього – повне формальне означення функції.

До переваг даного методу можна віднести: чітке розуміння учнями кожного елемента; спрощене опанування складних абстракцій шляхом поетапного вивчення. Серед недоліків: ризик втрати цілісного уявлення на проміжних етапах; потреба системного підсумкового узагальнення.

Синтетичний метод полягає в об'єднанні окремих елементів в єдине цілісне поняття та формуванні зв'язків між ними. Наприклад, після вивчення змінних, залежностей та графіків учитель формує єдину схему: ***аргумент*** → ***правило відповідності*** → ***значення функції*** → ***графік*** → ***властивості***.

Цей метод формує системне бачення та допомагає узагальнити розрізнені знання. Проте без попереднього аналітичного опрацювання учні можуть сприймати матеріал поверхово.

Індуктивний метод передбачає рух від конкретних прикладів до загального означення.

Одним з елементарних прикладів є:

- учні досліджують таблицю зміни температури протягом доби;
- аналізують, як одне значення часу відповідає одному значенню температури;
- вчитель підводить до формулювання ознак функціональної залежності.

Індуктивний метод відповідає віковим особливостям учнів 7–8 класів, які мислять наочно-образно та викликає зацікавлення через реальні приклади.

Водночас процес виведення загального правила займає більше часу, а також є ризик некоректних узагальнень без корекції з боку вчителя.

Дедуктивний метод полягає в русі від загального означення до конкретних випадків.

Тут одразу можна надати означення функції як відображення; розглядати приклади лінійної, квадратичної та інших функцій; демонструвати властивості на основі теоретичних положень.

Метод передбачає швидке введення строгої математичної мови, тому добре працює зі старшокласниками, які вже мають сформоване абстрактне мислення. Слід зазначити, що для учнів середньої школи цей варіант може бути занадто абстрактний та «відірваний» від життя.

Нарешті *традуктивний метод* забезпечує перенесення знань з одного конкретного випадку на інший подібний, без переходу через узагальнення.

На прикладі:

- учні спочатку вивчають залежність відстані від часу при рівномірному русі (лінійна функція);
- потім застосовують аналогічні міркування до задачі залежності вартості товару від кількості;
- в обох випадках використовується один тип функції, хоча загального означення ще не дано.

До переваг можна віднести: метод допомагає учням бачити подібність різних ситуацій; є зручним для формування «інтуїтивного відчуття» поняття

функції. Недоліком можна вважати складність розуміння учнями меж застосовності аналогії без подальшого індуктивного або дедуктивного узагальнення.

Найефективніший підхід до вивчення функцій – комбінація методів. Психолого-педагогічно обґрунтованим є рух від наочних прикладів (індукція, традиція) до формалізованого означення та властивостей (аналіз, дедукція, синтез) із системним підсумковим узагальненням.

За ступенем пізнавальної активності учнів методи діляться на: пояснювально-демонстраційний метод, репродуктивний метод, метод проблемного викладання, частково-пошуковий (евристичний) метод, дослідницький метод.

Пояснювально-демонстраційний метод полягає в тому, що вчитель подає готові знання, ілюструючи їх прикладами, схемами, графіками.

Наприклад, учитель пояснює, що таке функція, демонструє кілька способів її задання (табличний, графічний, формульний), показує приклади на дошці.

До переваги можна віднести економію часу на пояснення складних понять та можливість чітко сформулювати означення та властивості, а до недоліків – пасивну позицію учнів, слабе залучення до пошуку знань та відсутність розвитку дослідницьких навичок.

Репродуктивний метод орієнтований на відтворення учнями зразків діяльності – виконання типових завдань на побудову графіків чи знаходження значень функції за заданою формулою.

Метод проблемного викладання створює ситуацію інтелектуального утруднення, наприклад, постановку питання: «Чи можна за одним графіком однозначно визначити функцію?» – і далі через пояснення вчителя та активність учнів розкривається теоретичне підґрунтя відповіді.

Частково-пошуковий (евристичний) метод передбачає керівництво вчителя у процесі самостійного пошуку учнями окремих елементів рішення, наприклад, знаходження властивостей функції через аналіз її графіка.

Дослідницький метод забезпечує найбільшу самостійність – учні самі висувають гіпотези, проводять дослідження залежностей (у тому числі з використанням цифрових інструментів), формують висновки та узагальнення.

Таким чином, ефективне формування поняття функції передбачає поєднання різних методів залежно від дидактичної мети, рівня підготовки учнів і бажаного рівня їхньої пізнавальної активності, що забезпечує як міцність засвоєння теоретичних знань, так і розвиток дослідницьких умінь.

Традиційні методи навчання функцій у шкільному курсі математики мають низку сильних сторін, які зумовлюють їх збереження в сучасному освітньому процесі. Передусім, вони забезпечують систематичність і послідовність подання матеріалу, що сприяє формуванню міцної теоретичної бази та логічного розуміння предмета. Такі підходи є ефективними для засвоєння базових знань, термінології та формування основних навичок роботи з функціями. Крім того, їхня організаційна простота дозволяє реалізовувати навчання без спеціального технічного оснащення, що робить їх універсальними для будь-якої шкільної аудиторії.

Водночас традиційні методи мають і певні обмеження. Переважно учень у такій моделі залишається пасивним слухачем, що знижує його пізнавальну активність і мотивацію. Побудова складних графіків на дошці чи в зошиті часто є трудомісткою та не дозволяє оперативно досліджувати зміну властивостей функції при варіюванні параметрів. Крім того, матеріал нерідко подається в абстрактному, відірваному від реальних життєвих ситуацій вигляді, що ускладнює усвідомлення практичного значення математичних понять. Ще одним недоліком є недостатня індивідуалізація навчання, коли

орієнтація на «середнього» учня не враховує різні темпи та особливості засвоєння матеріалу.

Отже, традиційні підходи залишаються важливою складовою навчання, однак їхні недоліки, особливо у сфері візуалізації та інтерактивності, вимагають доповнення сучасними інноваційними методами, серед яких ключову роль можуть відігравати інформаційно-комунікаційні технології, що відкривають нові можливості для активізації навчального процесу та підвищення мотивації учнів.

1.2. Інтеграція інформаційно-комунікаційних технологій у процес навчання математики

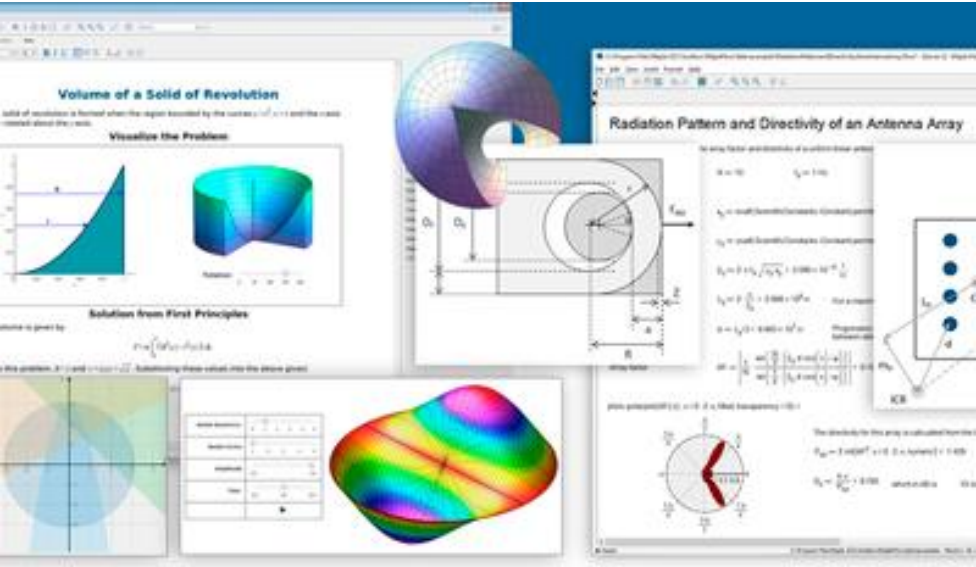
Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) у шкільній математичній освіті відіграють важливу роль у підвищенні ефективності навчального процесу, забезпеченні його інтерактивності та індивідуалізації. Їх використання сприяє формуванню в учнів не лише математичних знань і навичок, а й цифрової грамотності, вмінь працювати з сучасними інформаційними ресурсами. Класифікація ІКТ за функціональним призначенням та типом дозволяє систематизувати інструменти, що застосовуються в освітньому процесі, та обрати найбільш доцільні з них залежно від цілей уроку.

Першу групу складає *програмне забезпечення для навчання математики*, яке встановлюється на комп'ютер і призначене для виконання математичних операцій, візуалізації та моделювання.

Системи комп'ютерної алгебри (СКА), такі як Maple (рис. 1.1), Mathematica чи WolframAlpha (онлайн-сервіс), виконують символічні та числові обчислення, спрощують вирази, розв'язують рівняння, що дозволяє учням зосередитися на логічному аналізі задач, а не на рутинних обчисленнях.

Рисунок 1.1. Додаток Maple

Динамічні математичні середовища, як-от GeoGebra (рис. 1.2) та Desmos, об'єднують можливості алгебри, геометрії та аналізу, надаючи змогу створювати інтерактивні графіки та змінювати параметри моделей у режимі реального часу. Окремо варто згадати програми для побудови графіків, які є простішими у використанні та підходять для початкового етапу вивчення функцій, а також спеціалізовані тренажери, призначені для відпрацювання конкретних навичок, наприклад розв'язання



рівнянь чи дій з дробами.

Відкривай математику з GeoGebra

Розв'язуй рівняння, будуй графіки функцій, виконуй побудови, аналізуй дані, вивчай 3D-математику!

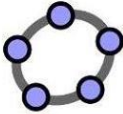
 Графічний Калькулятор GeoGebra	 GeoGebra Геометрія	 3D Графіка GeoGebra
 Ресурси	 GeoGebra Класична	 Завантаження

Рисунок 1.2. Додаток GeoGebra

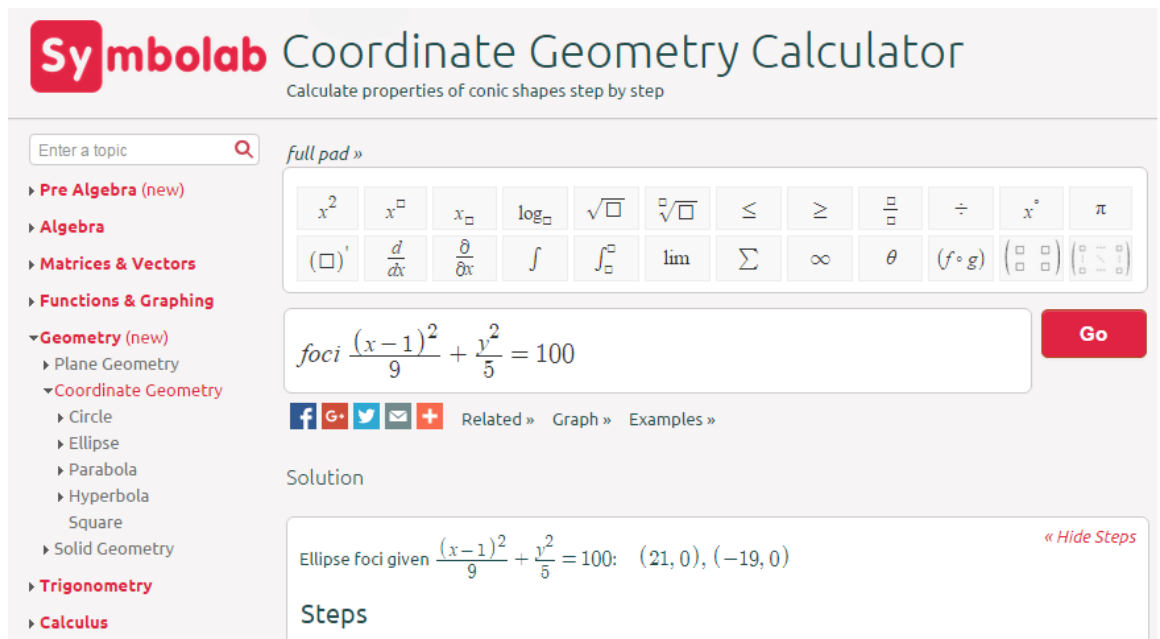


Рисунок 1.5. Онлайн-калькулятори Symbolab

До третьої групи належать *засоби візуалізації та демонстрації*, що забезпечують колективну взаємодію та покращують сприйняття навчального матеріалу.

Інтерактивні дошки поєднують функції традиційної дошки та комп'ютера, дозволяючи демонструвати графіки, відео та інтерактивні моделі з можливістю безпосередньої взаємодії.

Мультимедійні проектори та екрани створюють умови для зручного перегляду матеріалів усім класом, а планшети й смартфони відкривають можливості для індивідуальної роботи учнів з математичними додатками та онлайн-ресурсами, доповнюючи традиційні методи викладання.

Таким чином, класифікація ІКТ за функціональним призначенням дозволяє більш цілеспрямовано інтегрувати сучасні технології у процес навчання математики, поєднуючи можливості програмного забезпечення, онлайн-сервісів та засобів візуалізації. Це сприяє розвитку в учнів критичного мислення, математичної інтуїції та вміння застосовувати знання на практиці, готуючи їх до навчання та роботи в умовах цифрового суспільства.

Огляд сучасного програмного забезпечення та онлайн-сервісів для вивчення математики

У сучасній освіті програмне забезпечення та онлайн-сервіси дедалі частіше стають основою інноваційного навчального середовища, перетворюючи пасивне сприйняття знань на активну, дослідницьку та інтерактивну діяльність. Ці інструменти вже давно перестали бути лише допоміжними засобами для розв'язання окремих задач – тепер вони виступають повноцінними освітніми платформами, здатними забезпечити глибоке розуміння математичних концепцій, розвиток критичного мислення та формування навичок роботи з інформацією. Їх застосування дозволяє вчителю варіювати методи викладання, адаптувати матеріал під рівень та потреби кожного учня, а також урізноманітнити форми навчальної взаємодії.

Інструменти для візуалізації та динамічного моделювання займають особливе місце в математичній освіті, адже вони дають змогу перейти від абстрактних символів до наочного, динамічного відображення математичних об'єктів (Додаток 1).

Супровід навчальних матеріалів новими інформаційними технологіями дає змогу викликати інтерес до опанування дисциплін природничо-математичного циклу, активізувати навчально-пізнавальну, дослідницьку, проєктну діяльність здобувачів освіти, посилити самостійність в опануванні професійних компетенцій [36, с. 53]

GeoGebra

Міжнародний проєкт з відкритим кодом GeoGebra [56] – це вільно поширюване середовище з потужними функціональними можливостями, комп'ютерна програма для створення інтерактивних геометричних зображень та маніпуляції ними. Вона заснована на принципах динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри, що дозволяє поєднувати конструювання, моделювання, динамічне варіювання та експеримент, створювати точні графічні зображення, друковані документи та публікації в мережі Інтернет.

GeoGebra – педагогічна комп'ютерна програма, що містить у собі алгебру, геометрію, математичний аналіз і статистику. За допомогою даної платформи можна швидко будувати високоякісні геометричні зображення математичних об'єктів (графіки функцій, геометричні фігури, прямі, площини, формули тощо), зберігати їх у файлах графічних форматів (png; svg) або експортувати до буфера обміну та навіть поширювати в Інтернеті. Отримані креслення можна застосовувати для створення друкованих дидактичних матеріалів, мультимедійних презентацій навчального призначення тощо.

Маркус Хогенвартер написав цю програму мовою Java, тому вона працює не досить швидко, проте у великій кількості операційних систем. На даний момент перекладена на 39 мов і нині активно розробляється [11].

GeoGebra надає багато можливостей для роботи з функціями (побудова графіків, обчислення екстремумів, коренів, інтегралів тощо), виконувати дії з матрицями, керувати геометричними побудовами і т. д. За допомогою готових динамічних моделей можна ілюструвати основні поняття та доведення теорем.

Зарубіжні та вітчизняні вчені, які розробляли пакет навчальних та методичних матеріалів для користувачів, відзначають, що GeoGebra має потужний набір інструментів, за допомогою яких можна моделювати та розв'язувати різноманітні типи математичних задач, які стосуються вивчення математики у загальноосвітніх навчальних закладах. Основна ідея полягає в тому, що на основі візуального спостереження за змодельованою задачею, учні можуть самостійно висувати та узагальнювати гіпотези, здійснювати перевірку цих гіпотез та розробляти єдиний алгоритм для дослідження процесів [11, 25, 38].

Використовуючи GeoGebra на заняттях, можна помітити, що впровадження в освітній процес даного додатку прискорює процес навчання, дає можливість учням брати активну участь у ньому. Використання GeoGebra не слід обмежувати тільки при проведенні лекції, можна давати домашнє

завдання: побудова різних графіків функції і їх перетворень безпосередньо в програмі.

Наразі діє одна з найновіших версій вільно поширюваного середовища GeoGebra5.0 [56], що підкорює ринок динамічних програм. створенням і розробкою яких займалися наукові дослідники країн Співдружності Незалежних Держав.

Отже, середовище GeoGebra є універсальним інструментом для організації будь-якої форми навчання. Застосування функцій програми можливе на всіх етапах проведення уроку та під час виконання самостійної роботи учнями. Використання попередньо заготовлених сценаріїв побудови графічних зображень допоможуть у поясненні та розумінні учнями нової теми.

Desmos

Desmos [54] – це потужний безкоштовний онлайн-графічний калькулятор, який революціонізував спосіб вивчення та викладання математики. Створений у 2011 році, він швидко здобув популярність і сьогодні є одним із найпоширеніших інструментів для візуалізації математичних понять у школах і університетах усього світу. Його використовують не лише студенти та вчителі, а й дослідники, репетитори та навіть розробники освітніх матеріалів. Програма дозволяє легко будувати графіки, достатньо лише ввести математичний вираз. Вона підтримує широкий спектр математичних об'єктів: від простих лінійних функцій до складних тригонометричних, експоненціальних і логарифмічних залежностей, а також параметричних рівнянь, полярних координат і неявних формул. Крім того, користувачі можуть працювати зі статистичними даними, створювати діаграми розсіювання, будувати апроксимації та аналізувати залежності. Завдяки інтерактивним слайдерам студенти мають змогу змінювати коефіцієнти в рівняннях і в реальному часі бачити, як це впливає на форму графіка, що робить навчання динамічним і наочним.

Можливості графічного калькулятора Desmos дають змогу створити якісні інтерактивні дидактичні матеріали, візуальні інтерактивні моделі, які можна використовувати для наочного підкріплення лекційного матеріалу; розширити коло розв'язуваних задач та унаочнити процес їх розв'язування на практичних заняттях [16, с. 193-196.].

У процесі вивчення математики Desmos стає незамінним інструментом, зокрема під час дослідження функцій. Студенти можуть швидко будувати графіки, спостерігати їх властивості, аналізувати поведінку та визначати область значень, точки перетину з осями, екстремуми чи асимптоти. Вони мають можливість експериментально перевіряти гіпотези, змінювати параметри рівнянь, порівнювати функції та досліджувати відмінності в їхній поведінці. Такий підхід стимулює активну пізнавальну діяльність і допомагає глибше зрозуміти абстрактні математичні поняття.

Використання Desmos у навчанні має низку важливих переваг. Візуалізація робить абстрактні поняття доступними та зрозумілими, інтерактивність заохочує до експериментування й розвитку дослідницьких навичок, а миттєвий зворотний зв'язок допомагає студентам швидко виправляти помилки та перевіряти власні міркування. Крім того, платформа забезпечує можливості для індивідуалізації навчання, адже кожен учень може працювати у своєму темпі, досліджуючи приклади, які його цікавлять. Завдяки мобільності та доступності Desmos можна використовувати як на комп'ютері, так і на смартфоні чи планшеті, що відкриває шлях до навчання будь-де й будь-коли.

Практичні можливості Desmos особливо корисні для вчителів. Вони можуть демонструвати матеріал на інтерактивній дошці, створювати завдання, де учні самостійно досліджують властивості функцій, застосовувати графічні методи розв'язування рівнянь і нерівностей, перевіряти правильність розв'язків, а також працювати з готовими інтерактивними уроками у

спеціальному розділі Desmos Classroom. Завдяки цьому навчальний процес стає структурованішим і водночас більш творчим.

Функціонал Desmos виходить далеко за межі шкільної алгебри. Він є ефективним інструментом для вивчення трансформацій функцій, аналізу границь, похідних та інтегралів, побудови статистичних моделей і ймовірнісних розподілів. Для вивчення геометрії існує окремий модуль Desmos Geometry, який дає змогу будувати фігури, досліджувати їхні властивості та вивчати різноманітні перетворення. Таким чином, платформа охоплює практично всі ключові розділи шкільного і навіть університетського курсу математики.

Інтеграція Desmos у навчальний процес не замінює традиційні методи викладання, а вдало їх доповнює, роблячи математику більш доступною, захопливою та сучасною. Це інструмент, який допомагає учням і студентам не лише краще зрозуміти матеріал, а й розвивати критичне мислення, уміння моделювати, аналізувати та робити висновки, а головне – бачити практичність і красу математики в реальному житті.

GRAN 2D/3D

Українська програма GRAN 2D/3D [21] орієнтована на потреби шкільної програми й дозволяє будувати як двовимірні, так і тривимірні графіки, що є цінним інструментом для наочності на уроках (рис. 1.6).

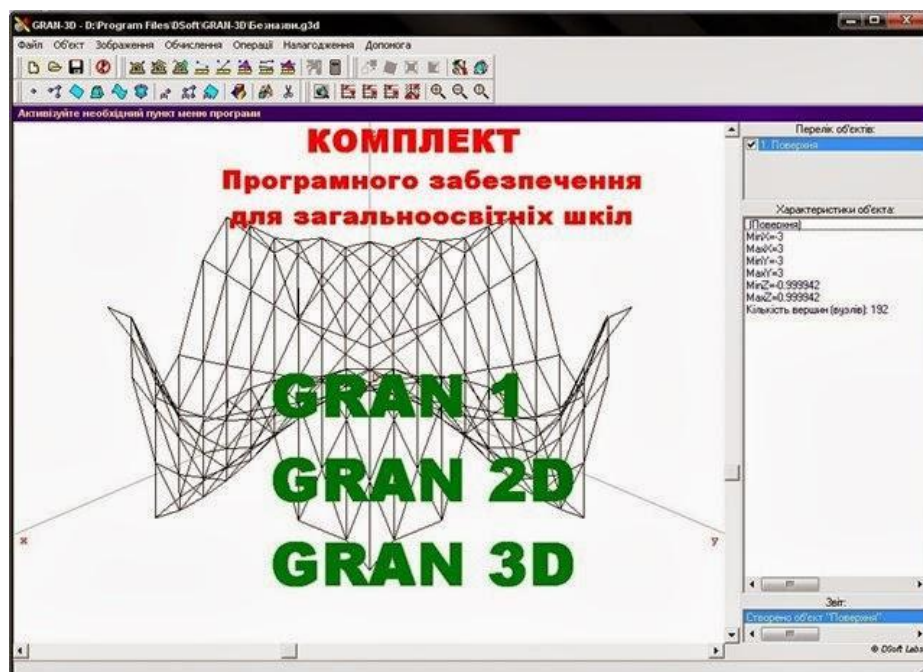


Рисунок 1.6. Програма GRAN 2D/3D

GRAN 2D/3D – це українська освітня програма для побудови та дослідження математичних графіків, розроблена спеціально для навчальних закладів України з метою забезпечення якісними математичними інструментами шкіл і вищих навчальних закладів. Програма підтримує побудову графіків функцій як у двовимірному, так і в тривимірному просторі, що робить її універсальним засобом для вивчення різних розділів математики. Вона дозволяє працювати з функціями однієї та двох змінних, будувати параметричні криві, виконувати графіку в полярних координатах, а також створювати анімації, що особливо зручно для наочного пояснення складних тем. Так, наприклад, при вивченні теми «Функції, їх властивості та графіки» зручно використати інструментальний програмний засіб GRAN-2D [36, с. 51].

Однією з ключових особливостей GRAN 2D/3D є повна локалізація українською мовою – як інтерфейсу, так і супровідної документації, що робить програму максимально доступною для школярів, студентів і викладачів. Ще однією важливою перевагою є можливість автономної роботи, що має велике значення для навчальних закладів із обмеженим або нестабільним доступом до мережі Інтернет.

У двовимірному режимі GRAN дає змогу будувати графіки елементарних функцій, досліджувати їхні властивості, знаходити точки перетину з осями, визначати екстремуми та інші характерні точки. Програма підтримує роботу з тригонометричними, експоненціальними, логарифмічними функціями та їх комбінаціями, що дозволяє охоплювати значний обсяг шкільного і вузівського матеріалу. Тривимірна візуалізація є особливо цінною при вивченні функцій двох змінних, поверхонь і векторних полів: студенти мають змогу обертати, масштабувати й досліджувати просторові об'єкти з різних ракурсів, що значно полегшує розуміння складних геометричних та аналітичних концепцій.

Використання GRAN 2D/3D має низку переваг для української освіти. Передусім це україномовність, адаптація до національних навчальних програм і відповідність вимогам Міністерства освіти і науки України. Крім того, як вітчизняний продукт, програма є більш економічно доступною для шкіл і університетів, що особливо важливо в умовах обмеженого фінансування освітньої сфери.

GRAN 2D/3D ефективно застосовується на різних етапах вивчення математики. У середній школі вона може використовуватися для демонстрації основних типів функцій, їхніх властивостей і трансформацій. У старших класах та у вищій школі – для більш глибоких досліджень, пов'язаних із похідними, інтегралами, диференціальними рівняннями та просторовою геометрією. Додатковою перевагою є підтримка створення презентацій і навчальних матеріалів, що дає змогу викладачам готувати інтерактивні уроки та використовувати GRAN як ефективний інструмент візуалізації на заняттях.

Порівняно з міжнародними аналогами, такими як Desmos чи GeoGebra, програма GRAN 2D/3D, можливо, поступається за кількістю користувачів або обсягом онлайн-ресурсів, однак має власні унікальні переваги: повна україномовність, адаптованість до вітчизняних навчальних програм та можливість автономної роботи без підключення до Інтернету. Саме ці

характеристики роблять її особливо цінною для українських навчальних закладів, де питання мовної підтримки, доступності й економічної доцільності мають вирішальне значення.

Освітні платформи та інтерактивні ресурси (Додаток 2) розширюють можливості навчання за рахунок доступу до різноманітного, структурованого та адаптивного контенту. *Khan Academy* пропонує тисячі відеоуроків, інтерактивних вправ та тестів, охоплюючи весь шкільний курс математики. Її контент доступний українською, що робить платформу зручною для використання як у школі, так і вдома. Український ресурс *Learning.ua* пропонує вправи, повністю узгоджені з програмою МОН України, що особливо важливо для цілеспрямованої підготовки до контрольних робіт. Платформа *Matific* використовує гейміфікацію, перетворюючи математичні завдання на ігрові ситуації, завдяки чому підвищується зацікавленість і зменшується психологічний бар'єр перед складними темами (рис. 1.7).



Рисунок 1.7. Математичні ігри на платформі *Matific*

Khan Academy

Khan Academy (українська версія) [58] є одним із найпопулярніших освітніх ресурсів у світі, що пропонує повні курси з математики у форматі коротких відеоуроків та інтерактивних вправ. Платформа особливо корисна під час вивчення функцій, адже допомагає пояснити базові поняття, як-от

область визначення та область значень, графіки функцій і властивості залежностей. Відеоролики дозволяють візуалізувати абстрактні концепції, а завдання з миттєвим зворотним зв'язком дають можливість учням самостійно розв'язувати задачі та отримувати підказки у процесі роботи. Завдяки великій кількості практичних вправ учні можуть закріпити матеріал і відпрацювати навички роботи з різними типами функцій.

Всеукраїнська школа онлайн

Всеукраїнська школа онлайн [12] – державний проєкт, який надає якісні відеоуроки та тести з усіх предметів шкільної програми, включно з математикою (рис. 1.8). Уроки з теми «Функції» створені українськими вчителями, повністю відповідають державним стандартам і адаптовані до потреб шкільної освіти. Це робить ВШО зручним і надійним ресурсом для учнів та педагогів, особливо в умовах дистанційного чи змішаного навчання.



Рисунок 1.8. Всеукраїнська школа онлайн

Результати дослідження показали, що більшість учителів (65,8%) використовують матеріали з ВШО у своїй освітній практиці, що демонструє високий рівень зацікавленості та готовності педагогів до впровадження цифрових ресурсів) [28].

Mathema.me та GIOS

Mathema.me та GIOS [60] – українські онлайн-школи, що пропонують структуровані курси з математики, орієнтовані на шкільну програму та підготовку до ЗНО/НМТ. Вони активно використовують інтерактивні відео та завдання, завдяки чому учні отримують можливість краще зрозуміти складні теми та практично застосувати знання.



Рисунок 1.9. GIOS

LearningApps

LearningApps [59] – сервіс для створення інтерактивних вправ у форматі кросвордів, вікторин, ігор чи співвіднесень. Учителі можуть як розробляти власні вправи для відпрацювання знань про функції, так і використовувати вже готові матеріали, створені іншими педагогами, що значно економить час та урізноманітнює навчальний процес.

Wayground (Quizizz) та Kahoot!

Wayground (Quizizz) та Kahoot! [61, 57] – сучасні платформи для проведення інтерактивних тестів та вікторин у формі гри. Вони дозволяють швидко перевірити рівень засвоєння матеріалу, зокрема з теми «Функції», та водночас підтримати високий рівень зацікавленості учнів. Завдяки елементам змагання та гейміфікації такі інструменти стають ефективним засобом активізації уваги й підвищення мотивації.

Системи для обчислень та розв’язання задач (Додаток 3) дозволяють учням отримувати як кінцевий результат, так і докладне покрокове пояснення, що особливо цінно для самостійного навчання. *WolframAlpha* забезпечує не лише обчислення, а й глибокий аналітичний підхід, подаючи довідкові матеріали та візуалізацію. *Microsoft Math Solver* орієнтований на доступність та простоту, дозволяючи швидко знаходити розв’язання та пояснення для завдань різного рівня складності. *Symbolab* спеціалізується на детальних

рішеннях з алгебри, тригонометрії та вищої математики, що робить його зручним інструментом для старшокласників та студентів.

WolframAlpha

WolframAlpha [62] – це потужний обчислювальний пошуковик, який використовує штучний інтелект та математичні алгоритми для розв’язання складних задач. Алгоритми програми дозволяють розв’язувати складні математичні вирази, включаючи диференціальні рівняння, інтеграли та матричні обчислення [9].

На відміну від звичайних пошукових систем, він не лише шукає інформацію, а й виконує обчислення, будує графіки та надає детальний аналіз. У навчанні математики, зокрема функцій, цей інструмент є незамінним, адже дозволяє отримати повний аналіз функцій (область визначення та значень, нулі, екстремуми, похідні, інтеграли, асимптоти, властивості парності й періодичності), а також візуалізувати їх графіки у дво- та тривимірному вигляді. Завдяки цьому учні можуть не лише перевіряти свої розрахунки, а й бачити цілісну картину поведінки функції. У платній версії WolframAlpha Pro доступні покрокові розв’язання, що особливо корисно для самостійного навчання, оскільки допомагає зрозуміти алгоритм розв’язання задач, а не просто отримати відповідь. Крім того, сервіс виконує як числові, так і символічні обчислення – від найпростіших до складних (наприклад, розкладання виразів чи розв’язування диференціальних рівнянь). У навчальному процесі WolframAlpha можна застосовувати на уроці для демонстрації властивостей функцій, у домашніх завданнях для самоперевірки та при дослідницькій діяльності, коли учні аналізують складні функції чи перевіряють власні гіпотези. Таким чином, цей сервіс не лише допомагає долати труднощі, пов’язані з абстрактністю математичних понять, а й формує глибше розуміння матеріалу, роблячи процес вивчення функцій більш ефективним і наочним.

Існують також інші корисні інструменти, що сприяють організації колективної роботи та створенню інтерактивного середовища в класі.

Інтерактивні дошки (*Promethean, SMART Board*) та онлайн-дошки (*Miro, рис. 1.10*) дозволяють у режимі реального часу спільно будувати графіки, креслити схеми та коментувати рішення.

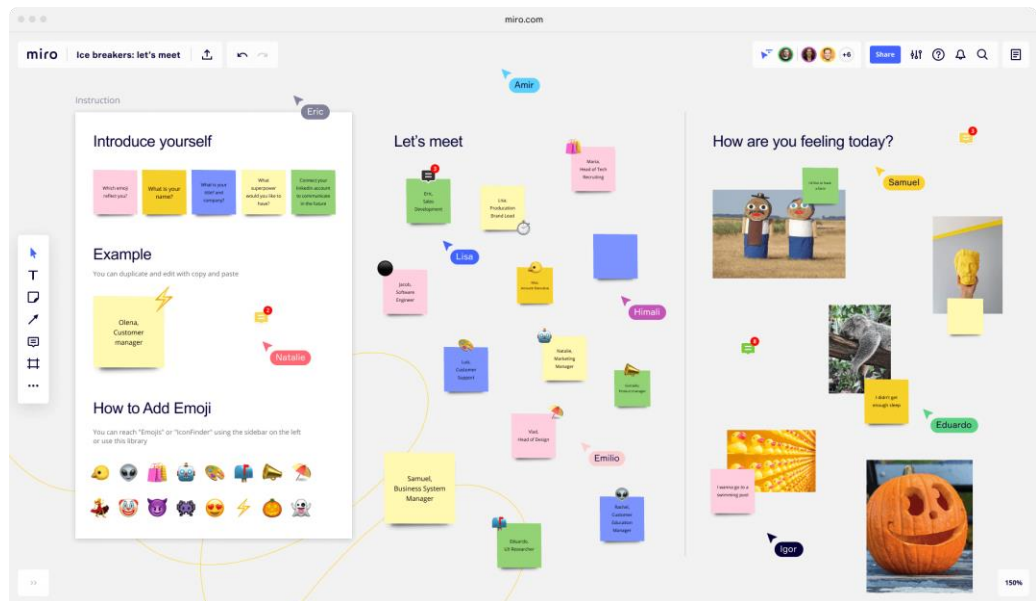


Рисунок 1.10. Онлайн-дошка Miro

Платформи для тестування, як, наприклад, *Kahoot!* чи *Wayground*, перетворюють перевірку знань на ігровий процес, що підвищує емоційну залученість та сприяє швидкому зворотному зв'язку.

Використання всіх вищеперелічених ІКТ на уроках математики, зокрема під час вивчення функцій, відкриває широкі можливості для підвищення якості навчального процесу. Такі інструменти забезпечують не лише автоматизацію обчислень і побудову графіків, а й створюють умови для глибокого аналізу властивостей функцій, візуалізації абстрактних понять, формування дослідницьких умінь і розвитку критичного мислення. Вони дозволяють учням перевіряти власні розв'язання, отримувати покрокові пояснення, моделювати різні математичні ситуації та знаходити зв'язок між теорією й практикою. Застосування ІКТ робить уроки більш наочними, інтерактивними та сучасними, підвищує мотивацію школярів і сприяє їхній

підготовці до використання математичних знань у реальних умовах життя та професійній діяльності.

Висновки до розділу 1

Відповідно до завдань дослідження в теоретичній частині роботи було проведено аналіз психолого-педагогічних аспектів вивчення функцій та використання ІКТ в сучасному освітньому процесі, охарактеризовано основні види ІКТ, які можуть бути корисними для вивчення функцій.

Розглянуто функцію, як ключове поняття в шкільному курсі математики, етапи її вивчення (пропедевтичний та формальний) та проблеми, які можуть бути пов'язані з ними.

Виділено та проаналізовано психолого-педагогічні особливості засвоєння поняття функції учнями різного віку. Встановлено, що засвоєння поняття функції відбувається нерівномірно в різні вікові періоди. З огляду на це підкреслено важливість принципу наступності та використання різних способів подання функцій – графічного, аналітичного, словесного й табличного.

Було приділено увагу традиційним методам роботи з функціями: аналітичному, синтетичному, індуктивному, дедуктивному і традуктивному, а також методам, що враховують рівень пізнавальної активності учнів. Виділено переваги та недоліки цих методів.

Також здійснено огляд технологічних засобів, що нині застосовуються у викладанні математики. Виокремлено три ключові групи: програмне забезпечення (зокрема системи комп'ютерної алгебри, динамічні математичні середовища, тренажери), онлайн-платформи та інструменти візуалізації – від інтерактивних дошок до мобільних пристроїв. Показано, що використання цих технологій дає можливість здійснювати інтерактивне моделювання, швидко досліджувати властивості функцій, підвищувати мотивацію учнів, організовувати самостійну роботу та диференціювати навчальний процес.

РОЗДІЛ 2.

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА АПРОБАЦІЯ ЗАСТОСУВАННЯ ІКТ ДЛЯ ЕФЕКТИВНОГО ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1. Методичні рекомендації щодо використання ІКТ для вивчення функцій в старшій школі

Функції в НУШ вивчають з 7 класу, коли запроваджується саме поняття функції, зокрема, лінійну та її графік. Поглиблене вивчення властивостей функцій, їх видів (квадратична, степенева, показникова, логарифмічна), перетворень графіків та застосування до розв'язання задач відбувається протягом 7-9 класів, а також у старшій школі.

Згідно навчальної програми з математики (рівень стандарту) для 10-11 класів загальноосвітніх шкіл, затвердженої Наказом Міністерства освіти і науки № 1407 від 23 жовтня 2017 року [63]:

В курсі 10 класу вивчаються наступні теми: «Функції, їхні властивості та графіки» (15 год.), «Тригонометричні функції» (18 год.), «Похідна та її застосування» (14 год.), що складає 100% від обов'язкових годин (47 год., в резерві – 7 год.), в 11 класі – «Показникова та логарифмічна функції» (16 год.), «Інтеграл та його застосування» (10 год.), що складає 72% від обов'язкових годин (26 год., в резерві – 18 год.).

Що демонструє, як у 10-11 класах учні поглиблюють знання про функції, вивчаючи їх окремі типи, а також їхні властивості (область визначення функції, область значень функції, парність/непарність, проміжки монотонності). Важливу увагу приділяють аналізу функцій за допомогою похідної для знаходження екстремумів, проміжків монотонності, а також для побудови графіків. Крім того, вивчаються тригонометричні функції, їхні властивості та графіки.

Ефективна інтеграція інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у вивчення функцій у старшій школі вимагає від учителя чіткого усвідомлення дидактичної доцільності на кожному етапі. Використання ІКТ має бути саме засобом, що дозволяє учням перейти від пасивного споглядання до активного дослідження абстрактних математичних понять.

При вивченні в 10-му класі властивостей функцій, зокрема парності, монотонності та періодичності, а також нових класів функцій (степеневих і тригонометричних), використання динамічних математичних середовищ є надзвичайно ефективним. А наразі, враховуючи масштабну цифровізацію освіти, застосування інтерактивних програм для полегшення вивчення складного математичного матеріалу та зацікавлення здобувачів, є необхідністю. Ці програми дозволяють наочно показати сутність кожної властивості: наприклад, симетрію графіка відносно осі ординат чи початку координат (для розуміння парності та непарності функцій), зростання чи спадання функцій на певних проміжках (монотонність), а також повторюваність графіків тригонометричних функцій (періодичність).

Можна виділити певні етапи вивчення функцій в старшій школі, до кожного з яких ми підготували певні рекомендації: формування базових понять про функцію, вивчення степеневих функцій, вивчення тригонометричних функцій, вивчення показникових та логарифмічних функцій, вивчення первісної функції та визначеного інтегралу.

1. Формування базових понять про функцію.

Учні при вивченні теми парності, непарності та монотонності функцій часто стикаються з труднощами, пов'язаними з абстрактністю понять і складністю уявлення графіків. Без наочного представлення їм важко зрозуміти, що означає парність або непарність функції, а також простежити, як зміни коефіцієнтів впливають на форму графіка і на інтервали зростання чи спадання. Додатково, учням буває важко зв'язати теоретичні визначення з практичним відображенням на графіку, що ускладнює усвідомлення

властивостей функцій. Використання інтерактивних середовищ, таких як GeoGebra та Desmos, дозволяє подолати ці труднощі: учні наочно спостерігають симетрію графіків, можуть самостійно змінювати параметри та бачити, як це впливає на монотонність, область визначення і значень функції. Такий підхід робить процес вивчення більш наочним і доступним, сприяє глибшому розумінню матеріалу та розвитку аналітичного мислення.

Рекомендується використовувати ці сервіси для демонстрації симетрії графіків (відносно осі OY – для парних і початку координат – для непарних), що дозволяє учням візуально зрозуміти суть парності/непарності (рис. 2.1 та рис. 2.2). Завдяки інтерактивній зміні параметрів за допомогою повзунків, учні можуть самостійно досліджувати вплив коефіцієнтів на монотонність та інтервали зростання/спадання.

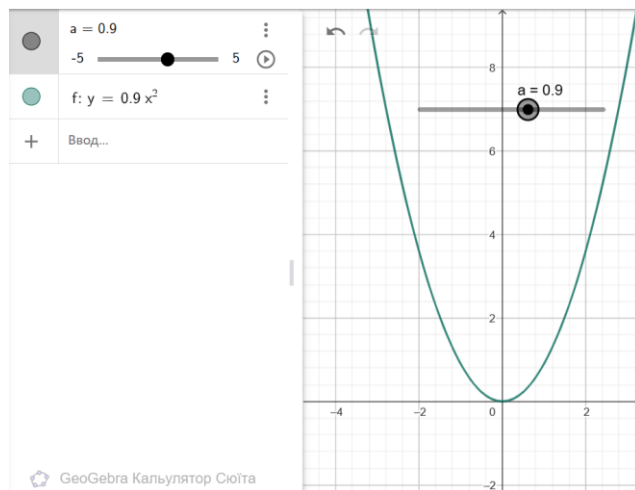


Рисунок 2.1. Демонстрація властивості парності функції $y = ax^2$ в GeoGebra

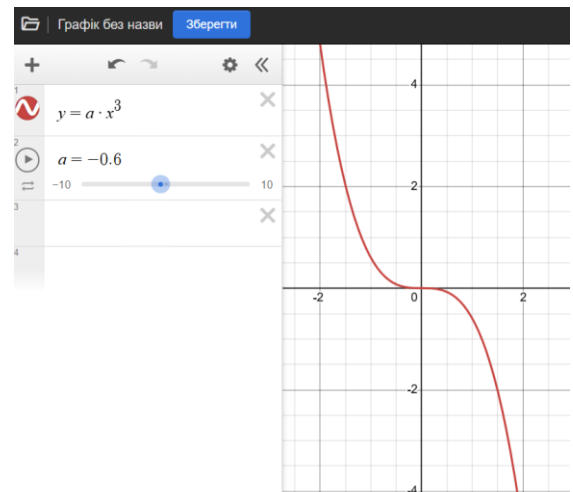


Рисунок 2.2. Демонстрація властивості непарності функції $y = ax^3$ в Desmos

2. Вивчення степеневих функцій.

На уроках алгебри динамічні середовища (наприклад, GeoGebra або Desmos) значно полегшують процес ознайомлення з властивостями функцій виду $y = x^n$ при різних значеннях показника степені n .

Учні можуть в реальному часі досліджувати, як змінюється графік залежно від парності або непарності показника, чи від'ємні значення степеня (рис. 2.3-2.6).

Це допомагає виявити загальні закономірності: симетрію графіків, поведінку на проміжках, наявність чи відсутність обмежень для області визначення та значень. Окремо можна проілюструвати функції з дробовим показником, показати їхній зв'язок із кореневими функціями та наочно порівняти властивості.

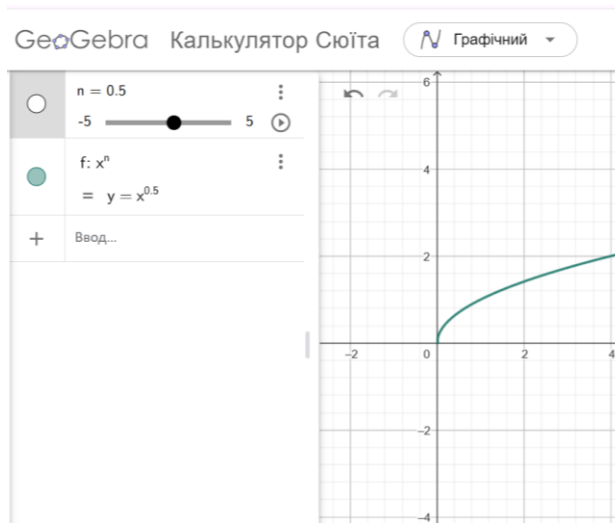


Рисунок 2.3. Графік функції $y = x^n$ ($n = 0,5$) в GeoGebra

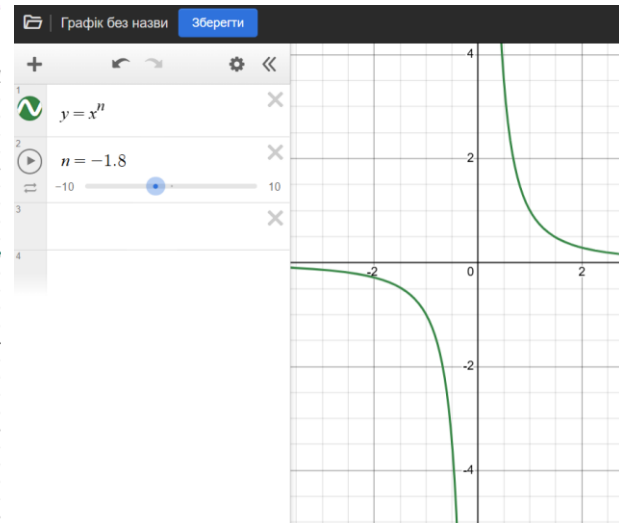


Рисунок 2.4. Графік функції $y = x^n$ ($n = -1,8$) в Desmos

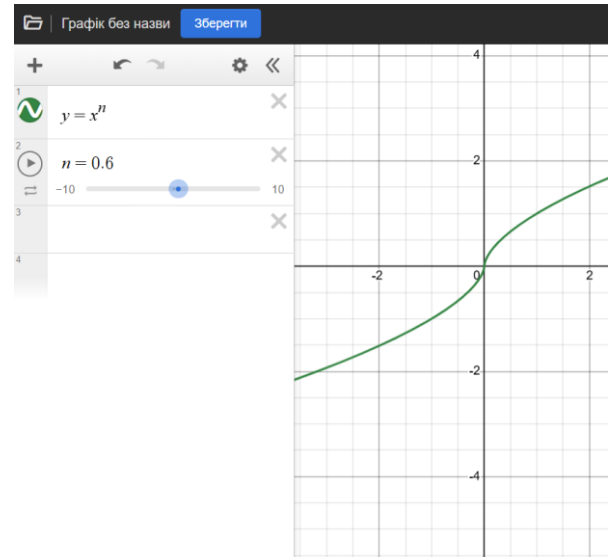
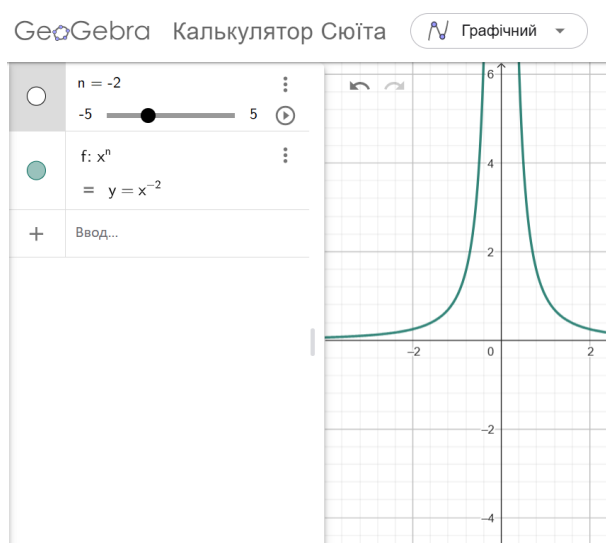


Рисунок 2.5. Графік функції $y = x^n$
($n = 0,5$) в GeoGebra

Рисунок 2.6. Графік функції $y = x^n$
($n = 0,5$) в Desmos

3. Тригонометричні функції.

При вивченні тригонометричних функцій учні часто стикаються з низкою труднощів, пов'язаних із високим рівнем абстрактності матеріалу. Їм важко уявити, як змінюються значення функцій залежно від аргументу, а також зрозуміти вплив різних параметрів – амплітуди, періоду чи фазового зсуву – на форму графіка.

Значну складність становить встановлення зв'язку між формулою функції та її графічним відображенням, а також порівняння властивостей різних функцій одночасно, наприклад $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ та $\cot x$.

Учні часто не можуть передбачити, як зміниться графік при зміні параметрів, а виконання комплексних завдань, що включають дослідження властивостей функцій та побудову графіків, ускладнюється через відсутність наочності. Крім того, через абстрактність теми втрачається частина уваги та мотивації, що ускладнює формування глибокого розуміння тригонометричних функцій та їхніх властивостей.

Динамічні математичні середовища, такі як GeoGebra, Desmos та інші графічні програми, мають особливу користь у вивченні тригонометричних функцій у 10 класі алгебри. Вони дозволяють учням не лише побачити графіки функцій $\sin \sin x, \cos \cos x, \tan \tan x, \cot \cot x$, а й активно взаємодіяти з ними: змінювати параметри (амплітуду, період, фазовий зсув), спостерігаючи, як це відображається на вигляді графіка (рис. 2.7 та рис. 2.8).

Учні можуть самостійно експериментувати, будуючи власні гіпотези та перевіряючи їх у режимі реального часу, що стимулює дослідницький інтерес і формує глибше розуміння властивостей тригонометричних функцій.

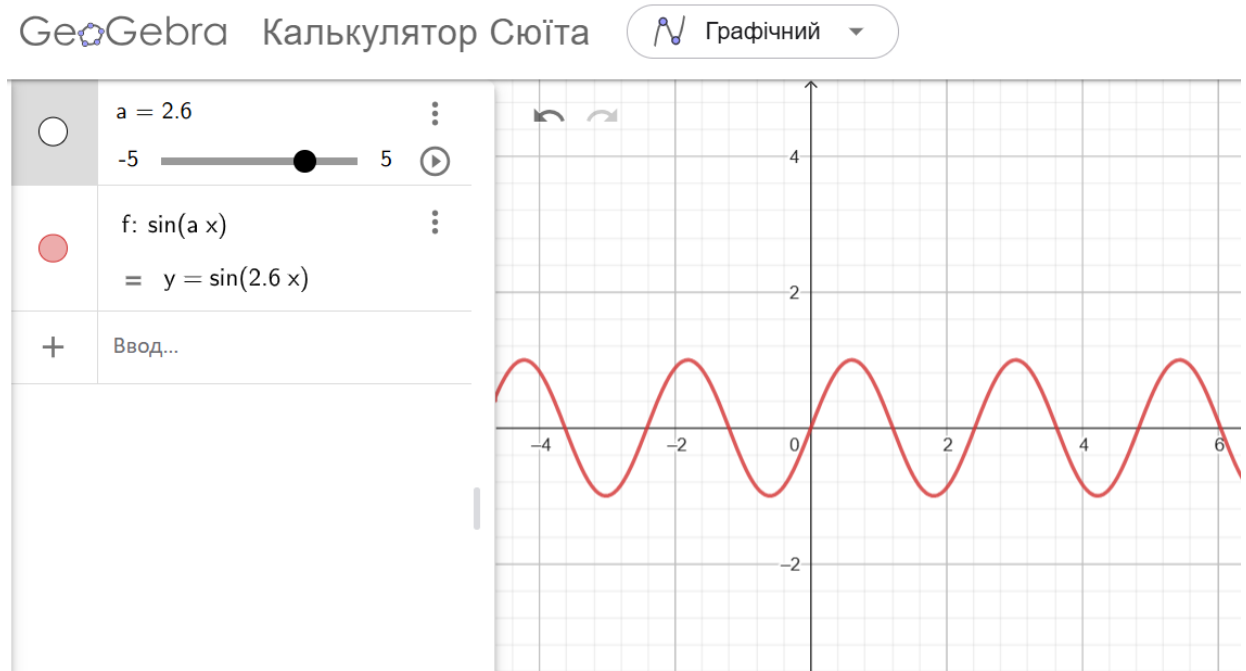


Рисунок 2.7. Графік функції $y = \sin ax$,
при значенні параметра $a = 2,6$ в GeoGebra

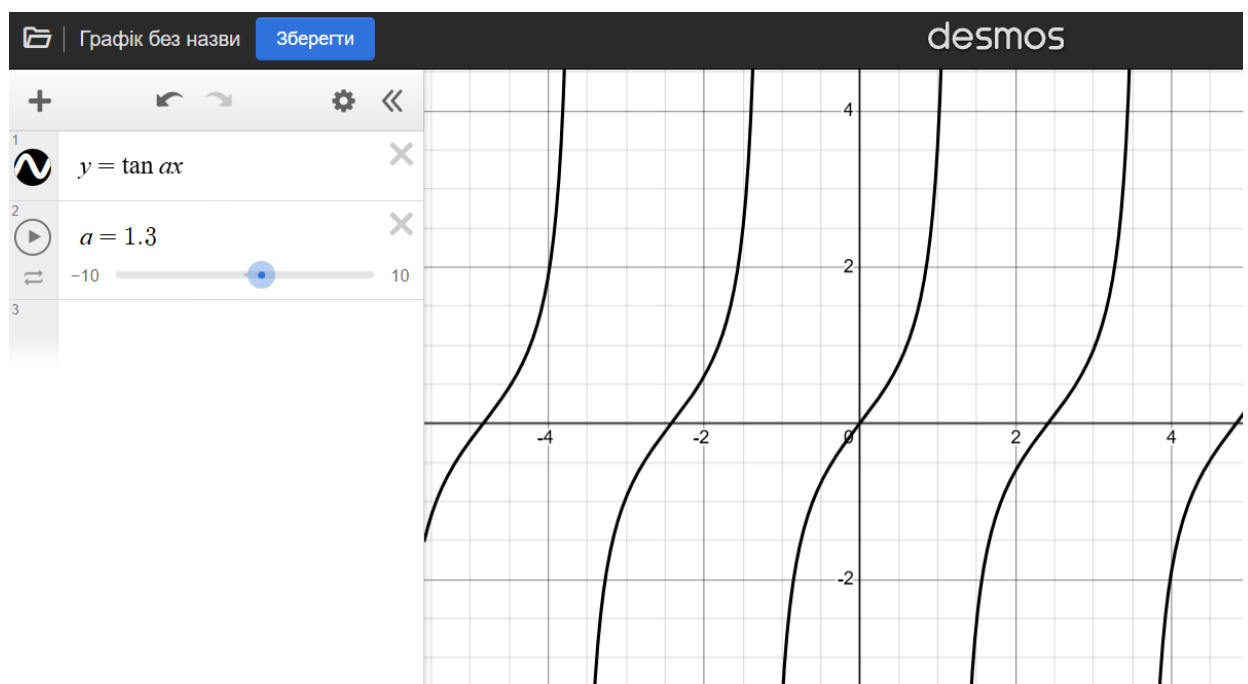


Рисунок 2.8. Графік функції $y = ax$,
при значенні параметра $a = 1,3$ в Desmos

В 11-му класі, при вивченні показникової, логарифмічної функцій та інтегрального числення, ІКТ допомагають зробити абстрактні теми наочними. Динамічні математичні середовища (GeoGebra, Desmos, WolframAlpha)

дозволяють учням в реальному часі досліджувати властивості показникових і логарифмічних функцій: бачити їхні графіки, аналізувати область визначення й значень, досліджувати вплив параметрів на форму кривої. Це допомагає швидко усвідомити особливості зростання показникової функції та повільного зростання логарифмічної, а також зрозуміти їхню взаємну оберненість. При вивченні інтегрального числення такі середовища дають змогу візуалізувати геометричний зміст визначеного інтеграла як площі під кривою, дослідити вплив зміни меж інтегрування, а також отримати числові й графічні ілюстрації до розрахунків.

4. Показникові та логарифмічні функції.

Використовуйте GeoGebra для демонстрації взаємно обернених функцій. Одночасне відображення графіків $y = a^x$ та $y = x$ наочно показує їхню симетрію відносно прямої $y = x$ та допомагає зрозуміти обмеження області визначення (для логарифма) й асимптотичну поведінку (рис. 2.9 та рис. 2.10).

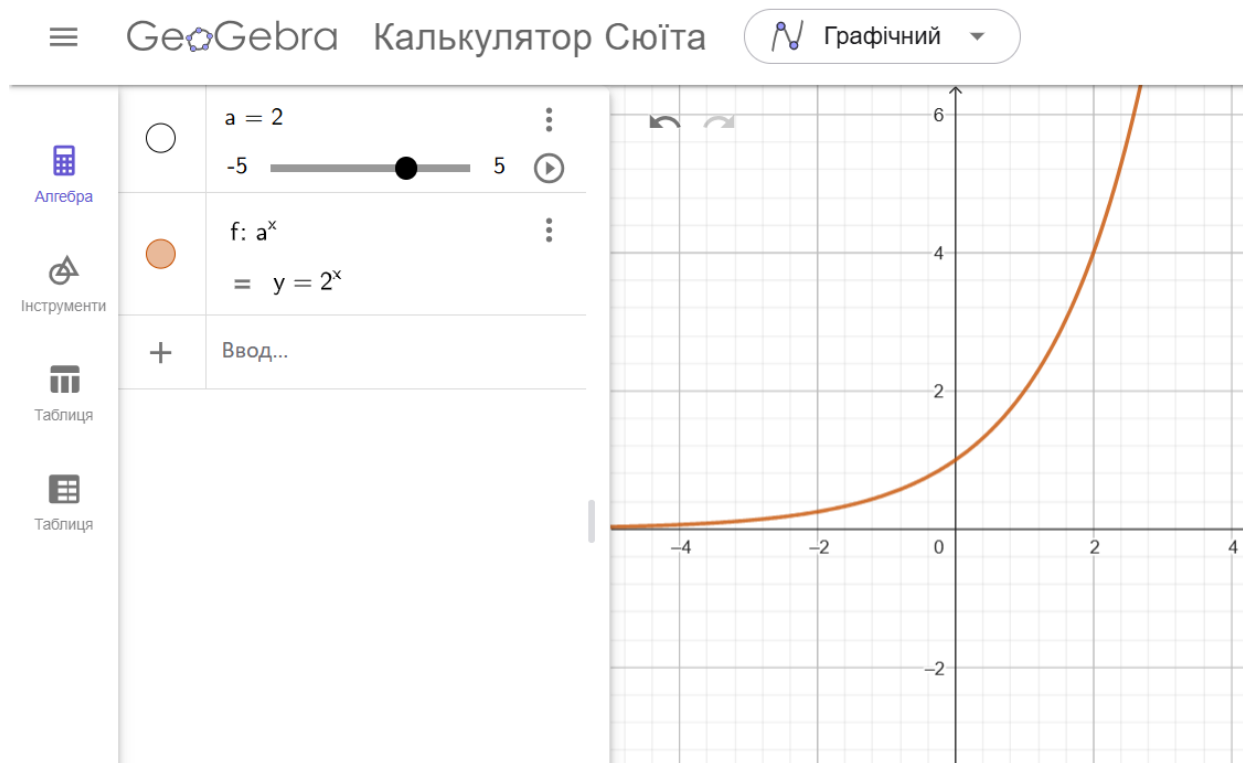


Рисунок 2.9. Графік функції $y = a^x$,
при значенні параметра $a = 2$ в GeoGebra

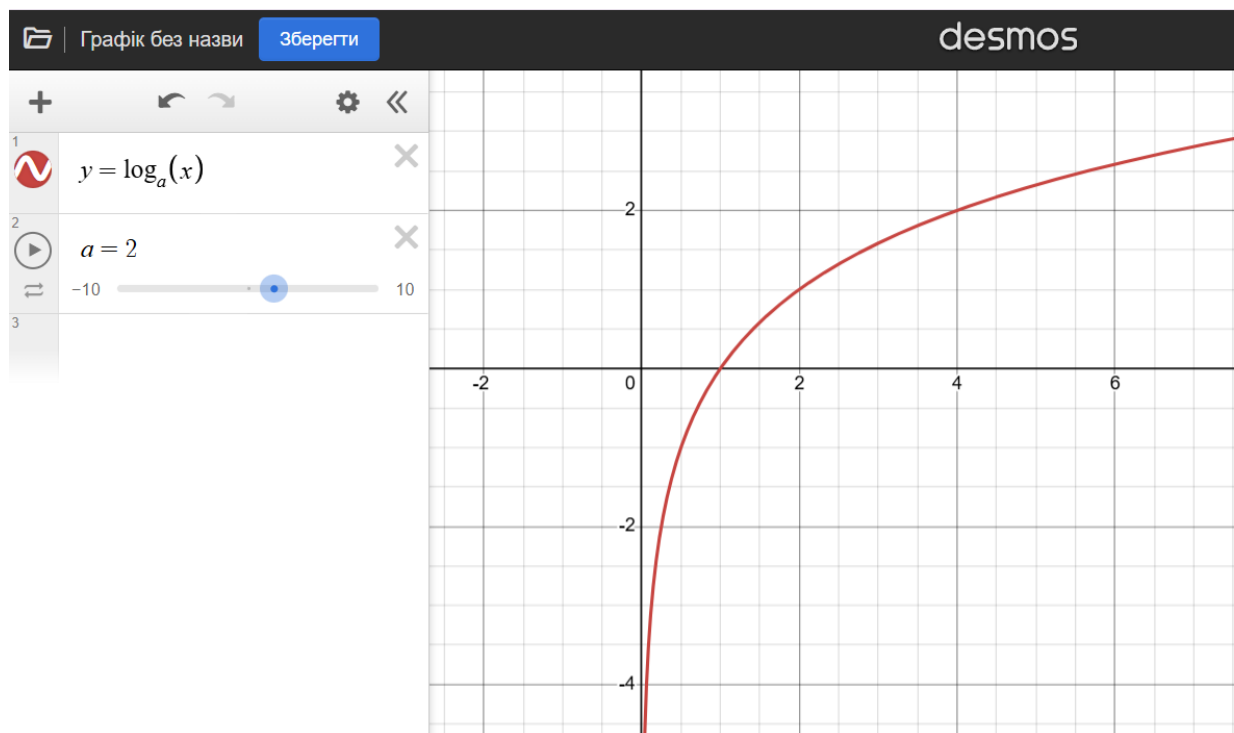


Рисунок 2.10. Графік функції $y = x$,
при значенні параметра $a = 2$ в Desmos

5. Первісна функція.

Здобувачам освіти часто буває складно зрозуміти, як саме пов'язана функція та її первісна, чому графік первісної змінюється саме так, як поводить себе вихідна функція, і навіщо взагалі потрібна стала C . Не менш заплутаним виглядає й уявлення про інтегрування як «зворотний» процес до диференціювання, а також геометричний зміст інтеграла, де важливо побачити не формули, а сам принцип накопичення площі.

Програмні засоби візуалізації суттєво спрощують ці моменти: вони дозволяють одразу побачити, як одна зміна на графіку тягне за собою іншу, як зсувається сімейство первісних, як поступово «наростає» площа під кривою. Завдяки цьому тема перестає бути суто абстрактною і стає зрозумілішою та легшою для сприйняття.

Для розуміння геометричного змісту константи C , використовуйте динамічні середовища для візуалізації сімейства первісних $(F(x) + C)$. Побудуйте кілька графіків, демонструючи, що вони є паралельними зсувами один одного (рис. 2.11).

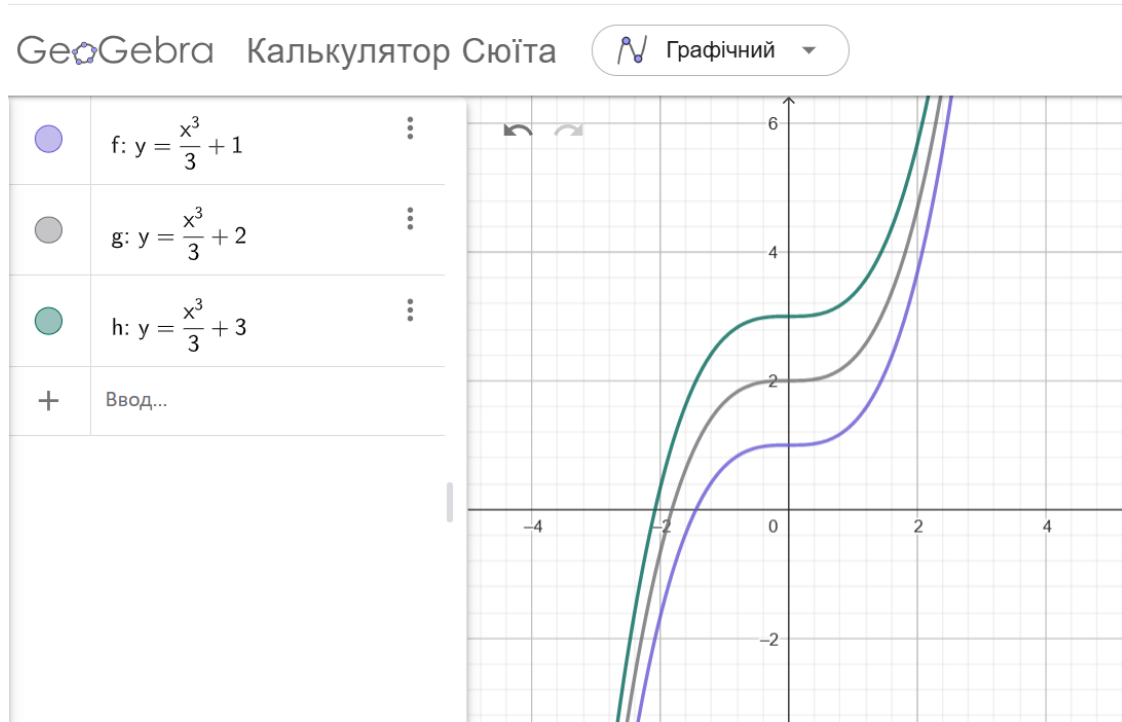


Рисунок 2.11. Побудова сімейства первісних $(F(x) + C)$ для функції $y = x^2$ ($C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 3$) в GeoGebra

6. Визначений інтеграл.

Це одна з найскладніших тем шкільної алгебри. Необхідно застосовувати GeoGebra (або інший програмний застосунок, який дозволяє ввести значення саме інтегралу) для динамічної візуалізації інтегральних сум (метод прямокутників), демонструючи, як сума площ прямокутників наближається до точного значення площі криволінійної трапеції при збільшенні їхньої кількості (рис. 2.13). Це ключовий прийом для пояснення формули Ньютона-Лейбніца. Окрім цього, важливо продемонструвати побудову самої криволінійної трапеції, яка утворюється графіком функції $y = f(x)$, віссю OX та вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 2.12).

Наприклад, у GeoGebra здобувачі освіти можуть наочно побачити, як ця фігура формується, та переконатися, що визначений інтеграл обчислює саме її площу.

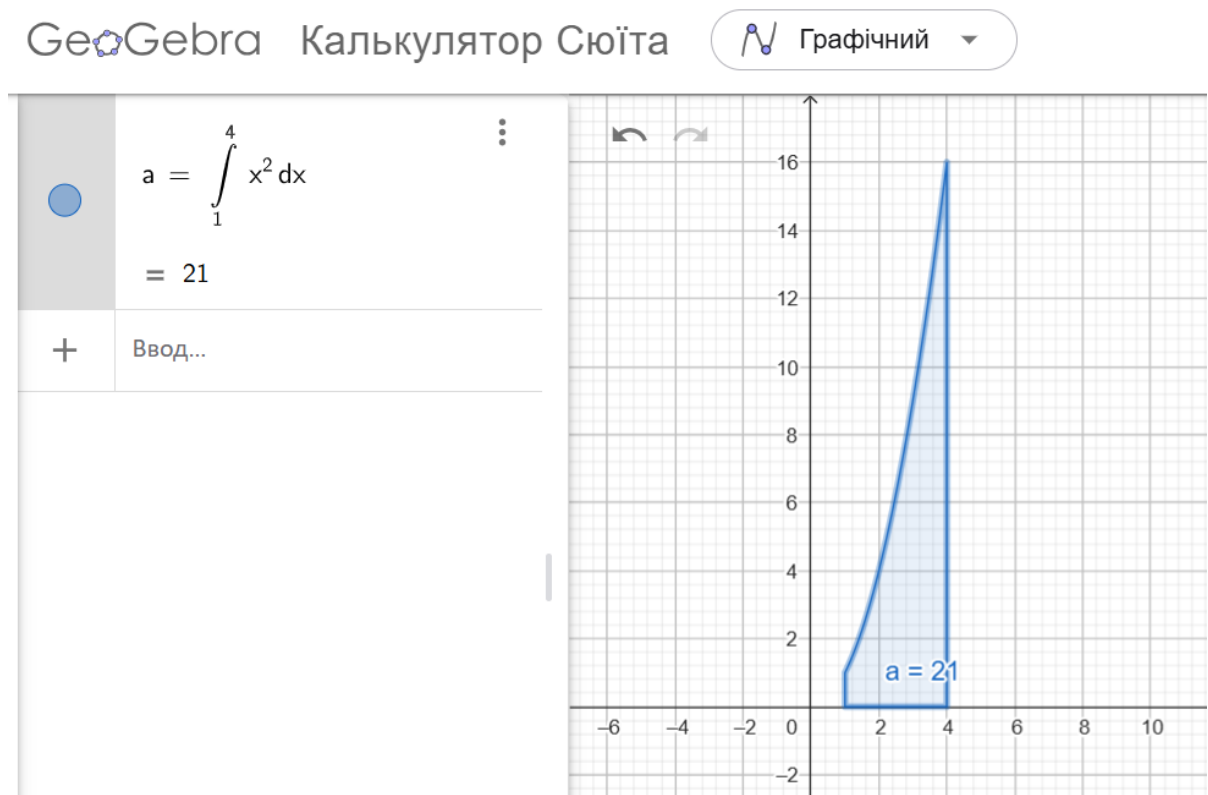


Рисунок 2.12. Побудова криволінійної трапеції в GeoGebra

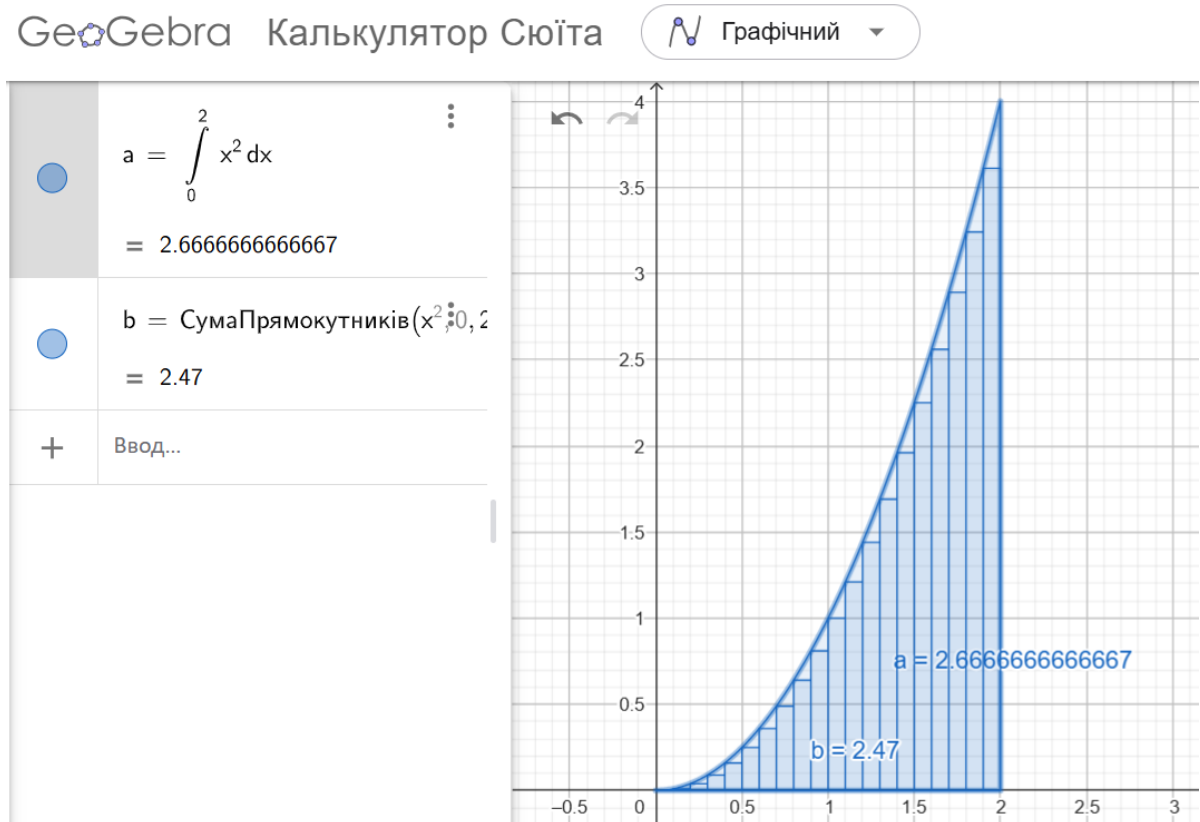


Рисунок 2.13. Демонстрація методу прямокутників в GeoGebra

Для самостійної та контрольної роботи в 10-11 класах рекомендовано залучати потужні обчислювальні сервіси та інтерактивні платформи.

1. Задля контролю знань зручно використовувати інтерактивні платформи Kahoot! або Wayground.

Ці інструменти дозволяють учителю організувати швидко та ефективно опитування у форматі гри, що особливо актуально на початку уроку для перевірки попередніх знань учнів. За допомогою коротких тестових завдань можна швидко визначити рівень розуміння графіків та основних властивостей функцій (парність, монотонність, періодичність, область визначення та значень).

Такий підхід створює атмосферу зацікавленості, мотивує до активної роботи та дозволяє миттєво отримати зворотний зв'язок як учням, так і вчителю.

2. Залучення WolframAlpha буде корисним для перевірки складних обчислень (зокрема інтегралів та похідних) і отримання повного аналізу властивостей складних функцій.

Цей сервіс надає учням можливість отримати не лише кінцевий результат, а й детальне пояснення з проміжними кроками, що особливо важливо для самостійного навчання.

Використання WolframAlpha дозволяє мінімізувати час на виконання рутинних обчислень і водночас сконцентрувати увагу на головному – аналізі властивостей функцій, інтерпретації результатів та розумінні логіки розв'язання задач. Це сприяє розвитку дослідницьких навичок, формує вміння перевіряти власні розрахунки та критично оцінювати отримані відповіді.

3. Важливо стимулювати учнів до моделювання реальних процесів (зростання популяції, фізичні закони). Це можна зробити за допомогою функцій у динамічних середовищах, на кшталт GeoGebra, використовуючи їх як інструмент для представлення результатів власних міні-досліджень.

Дотримання цих покрокових рекомендацій забезпечить не просто використання ІКТ на уроці, а їхню методично обґрунтовану інтеграцію, що значно підвищить ефективність вивчення функцій та сформує в учнів аналітичне мислення.

Приклад використання ІКТ в професійній діяльності наводимо у вигляді конспекту уроку.

Приклад конспекту уроку з алгебри 10 класу із використанням ІКТ

Тема: Степенева функція з натуральним і цілим показником

Тип уроку: Вивчення нового матеріалу

Мета уроку: Ознайомити учнів з поняттям степеневі функції та її властивостями для натурального та цілого показника; навчити будувати графіки степеневих функцій з різними показниками; формувати вміння

використовувати ІКТ для побудови графіків і дослідження функцій; розвивати логічне мислення та навички аналізу функцій.

Обладнання та ІКТ: Комп'ютери або планшети з доступом до Інтернету (для дистанційного навчання); проектор та інтерактивна дошка; програма GeoGebra; презентація PowerPoint з теоретичним матеріалом

Хід уроку

I. Організаційний момент (2-3 хв.)

1. Привітання, перевірка присутності.
2. Мотивація: коротке запитання «Де в житті ми зустрічаємо степеневі залежності?» (фізика, економіка, геометрія).
3. Повідомлення теми і мети уроку.

II. Актуалізація знань (5-7 хв.)

1. Повторення понять: функція, графік функції, значення змінної та аргументу.
2. Запитання до класу: «Що таке квадратична функція? Кубічна?»
3. Застосування ІКТ: Демонстрація на GeoGebra графіків $y = x^2$, $y = x^3$ для візуальної актуалізації (рис. 2.14, рис. 2.15).

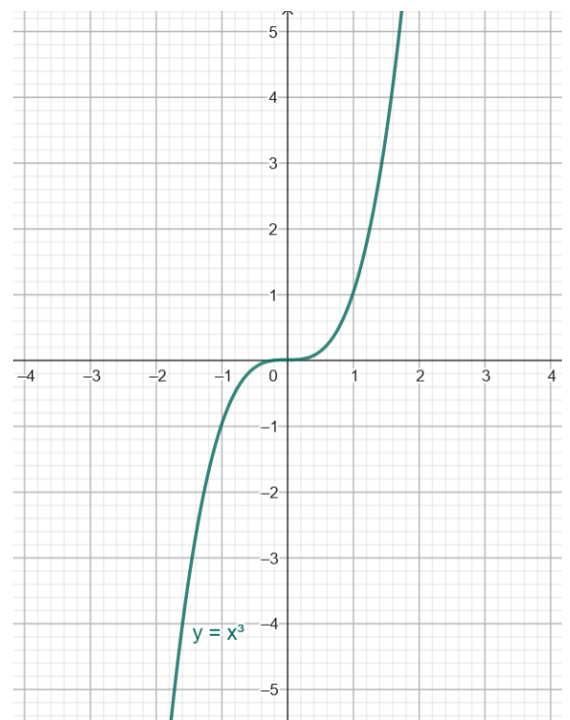
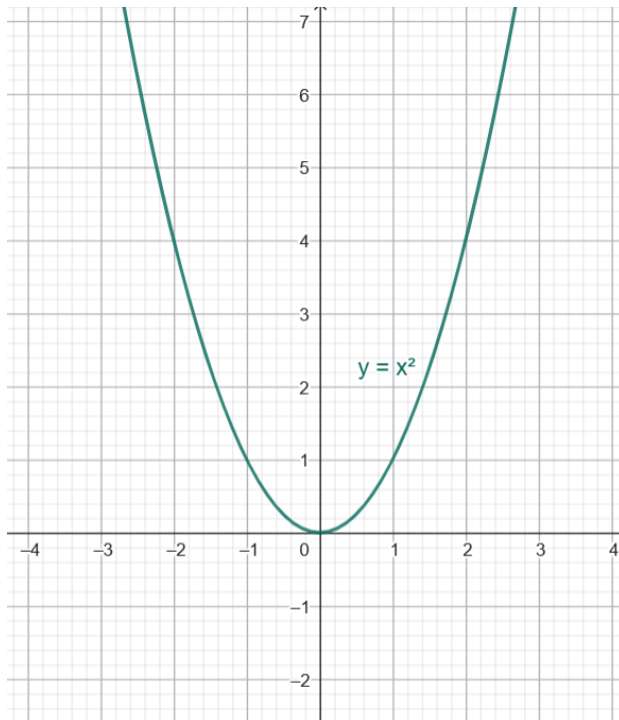


Рисунок 2.14 Графік функції $y = x^2$ Рисунок 2.15 Графік функції $y = x^3$

3. Вивчення нового матеріалу (20-25 хв.)

3.1. Визначення степеневі функції

$y = x^n$, де $n \in N$, – степеневі функція з натуральним показником. Оскільки вираз x^n , $n \in N$, має зміст при будь-якому x , то областю визначення степеневі функції з натуральним показником є множина R .

Перший випадок: $n = 2k$, $k \in N$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу. Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід’ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від’ємного числа.

- ↪ Сказане означає, що областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$.
Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.
- ↪ Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.
- ↪ Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є парною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.
- ↪ Отже, функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 2.16). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 2.17

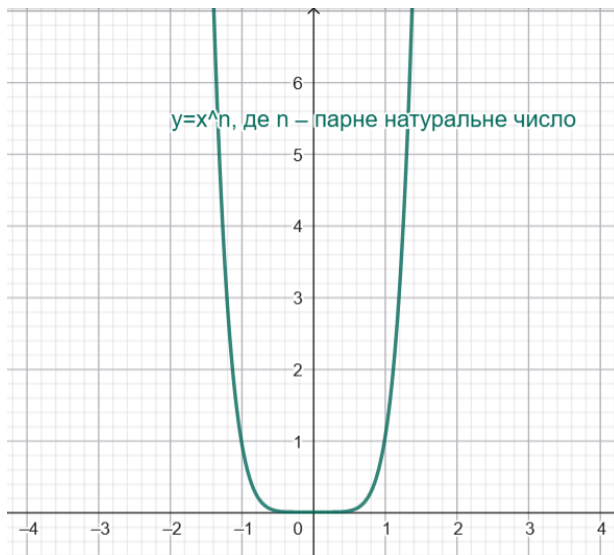


Рисунок 2.16. Графік функції
 $y = x^n$, де n – парне натуральне
 число

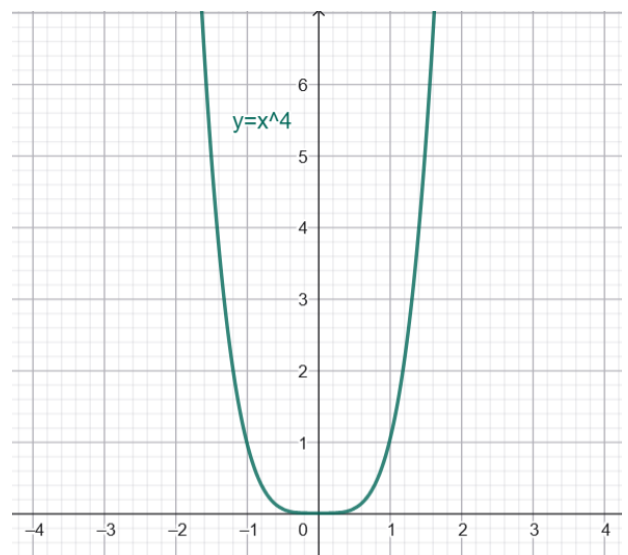


Рисунок. 2.17. Графік функції
 $y = x^4$

Другий випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ або $k = 0$.

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 7 класу.

- ↪ Сказане означає, що областю значень функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є множина $\mathbb{R}$.
 Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.
- ↪ Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.
- ↪ Функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.
- ↪ Отже, функція $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, є зростаючою.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n – непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 2.18).

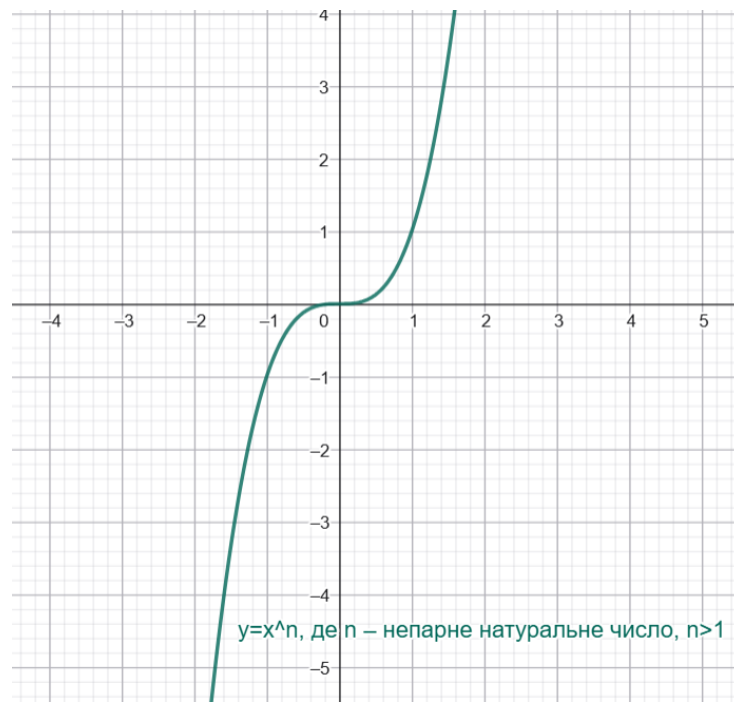


Рисунок. 2.18 Графік функції $y = x^n$,
де n – непарне натуральне число, $n > 1$

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають степеневою функцією із цілим показником.

Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять ні від'ємні числа, ні число 0.

- ⇒ Сказане означає, що областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, є множина $(0; +\infty)$.
- ⇒ Очевидно, що проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число.
- ⇒ Функція $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число, є парною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконуються рівності
$$(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}.$$

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 2.19).

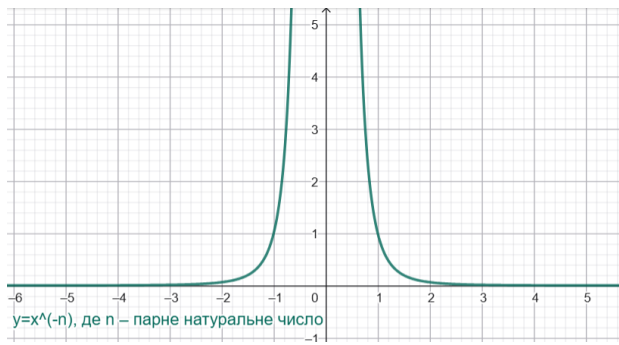


Рисунок 2.19. Графік функції
 $y = x^{-n}$, де n – парне натуральне
 число

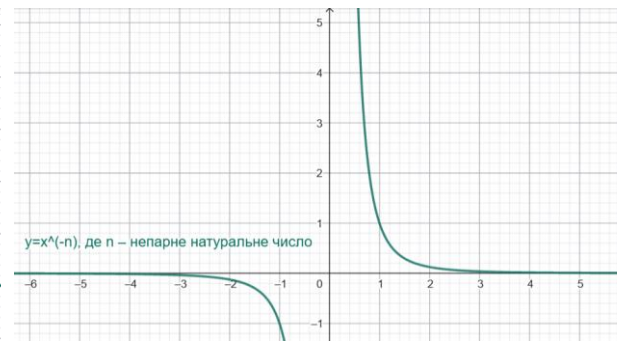


Рисунок 2.20. Графік функції
 $y = x^{-n}$, де n – непарне натуральне
 число

Другий випадок: $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$

Сказане означає, що областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число.

Функція $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконуються

$$\text{рівності } (-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}.$$

Отже, функція $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 2.20).

Примітка: Завдяки GeoGebra ці та інші властивості степеневі функції є можливість показати в «живому» вигляді, тобто в режимі реального часу змінювати значення параметра, рухаючи повзунок, тим самим демонструючи особливості графіка функції.

3.3. Графіки функцій

1. Демонстрація побудови графіків у GeoGebra для різних n .
2. Учні експериментують: змінюють n , спостерігають зміни графіка.

3. Розв'язують задачі з підручника графічним способом, застосовуючи GeoGebra.

4. Закріплення матеріалу (10-12 хв.)

Самостійне завдання: побудувати графіки $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^{-2}$ у GeoGebra, описати властивості.

5. Підсумок уроку (3–5 хв.)

1. Підсумовування основних властивостей степеневі функції.
2. Обговорення: «Що нового дізналися сьогодні?»
3. Домашнє завдання: виконати завдання з підручника, використовуючи GeoGebra.

6. Рефлексія (2 хв.)

1. Клас висловлює, що сподобалося найбільше: графіки, інтерактивні завдання чи приклади з життя.
2. Вчитель коротко оцінює активність та відповіді учнів.

2.2. Організація та проведення педагогічного експерименту

Організація педагогічного експерименту

Мета експерименту полягала у визначенні впливу систематичного застосування динамічних математичних середовищ (GeoGebra, Desmos), обчислювальних сервісів (WolframAlpha) та інтерактивних освітніх платформ (Kahoot!, Wayground, LearningApps) на якість засвоєння теми «Функції» у 10-11 класах.

Експеримент проводився протягом 2024-2025 навчального року у 10 класі Бузького ліцею Сухоеланецької сільської ради Миколаївського району Миколаївської області, де навчалося 17 учнів. Рівень знань у класі був неоднорідним: декілька учнів показували високі результати, менше половини мали середній рівень, решта – низький. Така вибірка дозволила перевірити ефективність впровадження ІКТ у навчання математики для різних категорій учнів.

Контрольна група для порівняння складалася з учнів 11 класу 2024 року того ж ліцею, які навчалися без систематичного впровадження ІКТ у вивчення алгебри. У класі було 14 учнів.

Рівень підготовки також був неоднорідним: декілька учнів стабільно демонстрували високі результати, приблизно половина мали середній рівень знань, а решта – низький, з помітними труднощами у виконанні завдань, що вимагали глибшого аналізу та узагальнення. Навчальний процес у цій групі переважно базувався на традиційних методах викладання з використанням дошки (інтерактивної – для дистанційного формату навчання) та пояснень учителя, що зменшувало можливість наочної візуалізації складних понять та активної взаємодії з матеріалом.

Для проведення педагогічного експерименту з активним використанням ІКТ у вивченні функцій у 10–11 класах необхідно було забезпечити таке **обладнання та програмні засоби:**

1. Комп'ютерне обладнання:

- мультимедійний комп'ютер учителя з підключенням до Інтернету;
- учнівські комп'ютери або ноутбуки (за можливості – 1 на кожного учня чи в парах/групах);
- інтерактивна дошка або мультимедійний проектор для демонстрації матеріалу;
- документ-камера (за потреби для показу розв'язання задач «на папері»).

2. Програмне забезпечення та онлайн-сервіси:

- GeoGebra – для побудови графіків, дослідження властивостей функцій, створення динамічних моделей;
- Desmos – для швидкої візуалізації функцій та роботи з параметрами через слайдери;
- WolframAlpha – для перевірки складних обчислень, аналізу властивостей функцій, отримання покрокових рішень;
- Kahoot!, Wayground, LearningApps – для організації інтерактивного контролю знань і самоперевірки;
- Всеукраїнська школа онлайн, Khan Academy, Mathema.me, GIOS – як додаткові ресурси для відео- та практичних завдань.

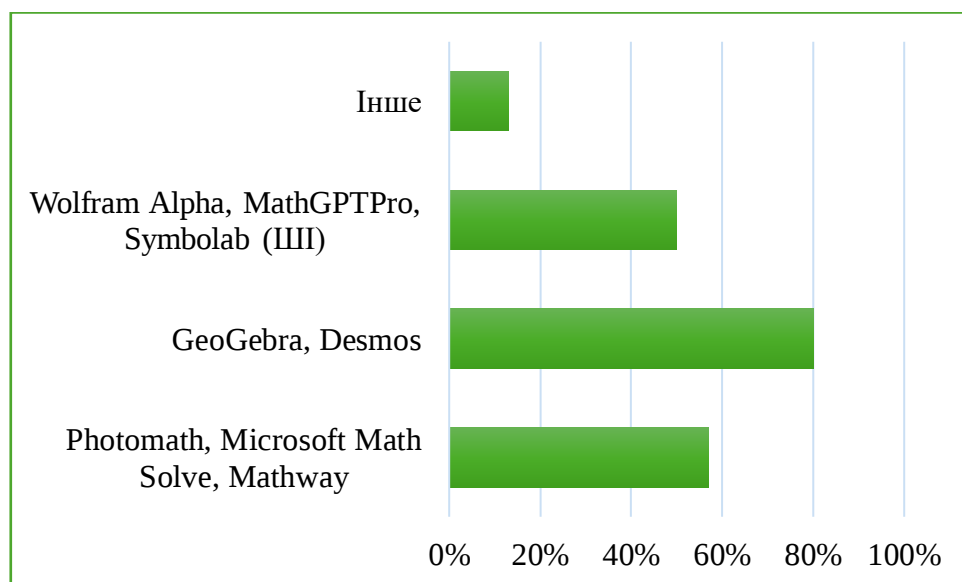
3. Технічні засоби доступу:

- підключення до швидкісного Інтернету (для роботи з онлайн-ресурсами);
- мультимедійна акустична система (для відеоуроків і демонстрацій);

- мобільні пристрої учнів (смартфони, планшети) для участі у вікторинах Kahoot!/ Wayground, виконання вправ у LearningApps.

На етапі формування методичних рекомендацій було досліджено можливості різноманітних математичних програм. Проте для інтерактивної демонстрації властивостей функцій та їхніх графіків фаворитами є програми GeoGebra та Desmos. Оскільки широкий спектр можливостей, безкоштовний доступ до них, цікавий та зручний інтерфейс виграють серед усіх інших. Дослідження було підтверджено думкою здобувачів освіти 10 класу, опитаних усно під час проведення експерименту (діаграма 1), а саме 80% з них вважають програми GeoGebra та Desmos ефективнішими та зручнішими за інші для роботи з функціями (з них 75% – обирають GeoGebra, 52% – Desmos, 36% – обирають обидва додатки; на це питання можна було обрати декілька варіантів відповіді).

Діаграма 1. Які програми здобувачі освіти вважають ефективнішими та зручнішими для роботи з функціями.



Хід експерименту:

На уроках алгебри в 10 класі відбувалося послідовне інтегрування ІКТ, приклад конспекту уроку знаходиться у додатку 4:

1. Формування базових понять відбувалося із застосуванням GeoGebra та Desmos для демонстрації властивостей функцій (парність, монотонність, періодичність). Учні мали змогу працювати з графіками у динамічному режимі, змінюючи параметри та самостійно досліджуючи вплив коефіцієнтів.
2. При вивченні степеневих та тригонометричних функцій учні працювали з візуалізацією графіків, експериментували зі зміною показників степені чи параметрів тригонометричних функцій. Це сприяло формуванню глибшого розуміння їхніх властивостей.
3. У процесі опрацювання теми «Похідна та її застосування» використовувалися WolframAlpha та GeoGebra для обчислення похідних, знаходження екстремумів та побудови дотичних. Учні отримували можливість зосередитись не лише на механічних обчисленнях, а й на інтерпретації результатів.
4. Для контролю знань застосовувалися Kahoot! і Wayground, що дозволило швидко перевіряти рівень засвоєння матеріалу та підтримувати мотивацію учнів.
5. На етапах закріплення та самостійної роботи учні виконували завдання у LearningApps, а також створювали власні міні-дослідження у GeoGebra, моделюючи реальні процеси (наприклад, зростання популяції чи фізичні закони).

Аналіз та інтерпретація результатів дослідження

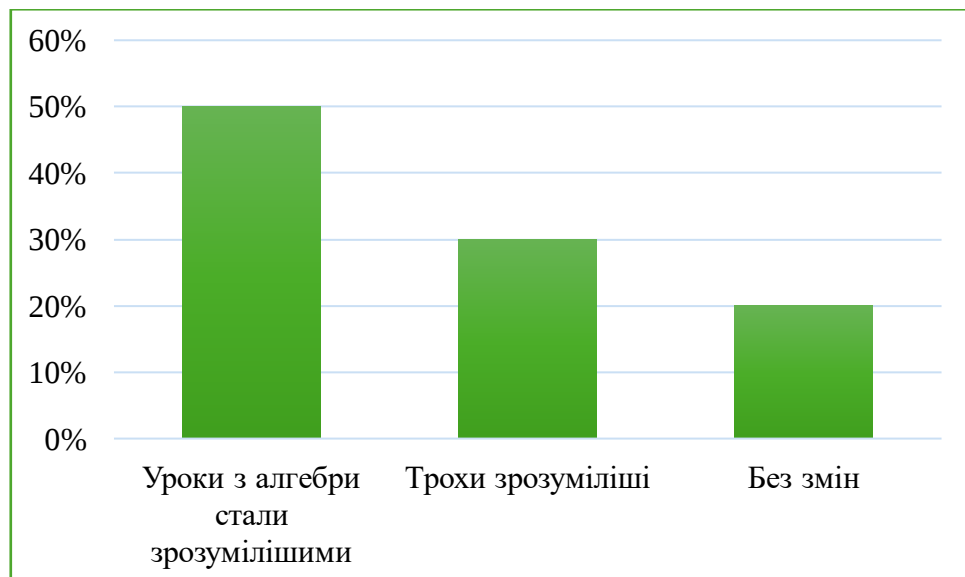
Порівняння результатів діагностичної контрольної роботи з алгебри у 2024 та 2025 роках свідчить про позитивний вплив експерименту з використання ІКТ для здобувачів освіти 2025 року навчання (81% мали результати «добре» та «відмінно»). Учні 2024 року мали гірші показники (59% мали результати «добре» та «відмінно»), особливо у складних темах – побудові та аналізі графіків функцій, інтегруванні. Усна діагностика виявила,

що їм бракувало візуальної опори й наочних асоціацій, які могли б допомогти пригадати та застосувати вивчене. Натомість у групі 2025 року, де протягом попереднього року активно застосовувалися динамічні математичні середовища та інтерактивні інструменти, результати виявилися кращими: учні продемонстрували більш упевнені навички аналізу функцій і краще справлялися з візуалізацією та застосуванням інтегралів. Це підтверджує, що використання ІКТ під час навчання сприяє глибшому розумінню та довготривалому засвоєнню матеріалу.

Паралельно експерименту проводилися анкетування та усні опитування (Додаток 4), де учні висловлювали своє ставлення до використання ІКТ. Більшість відзначала зручність, наочність і підвищений інтерес до математики.

Зокрема, одне з опитувань [34] показало, що для 50% учнів уроки з алгебри стали зрозумілішими завдяки використанню ІКТ, для 30% - трохи зрозуміліші, для 20% - без змін (діаграма 2).

Діаграма 2. Влив використання ІКТ на розуміння здобувачами освіти навального матеріал з математики



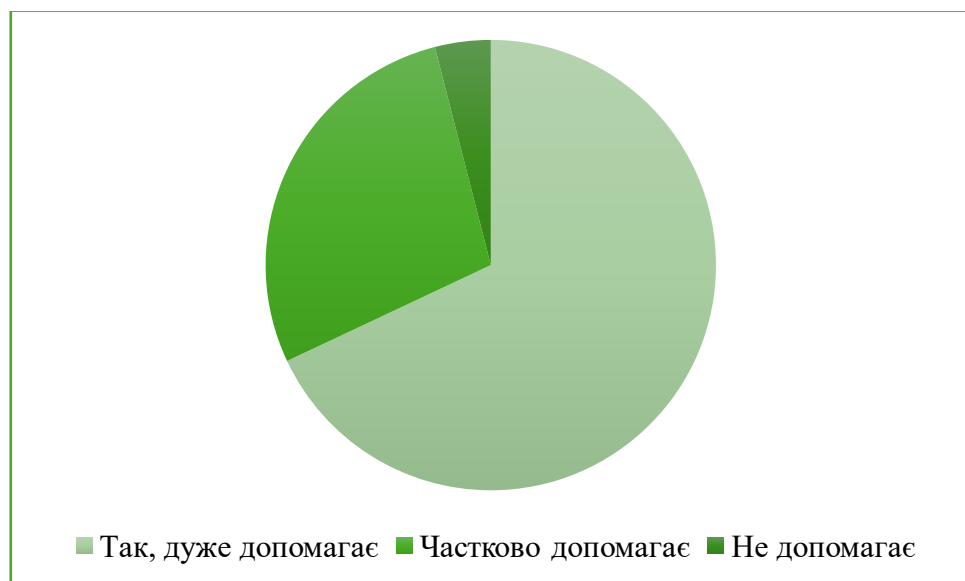
Найкориснішими інструментами для вивчення функцій здобувачі освіти вважають GeoGebra (80%), Desmos (65%), WolframAlpha (70%). Учасники могли обирати декілька варіантів відповідей. Під час усного опитування було

з'ясовано, що інтерфейс GeoGebra є більш різноманітним та інтуїтивно зручним для використання, ніж Desmos, хоча суть цих програм є майже однаковою.

* Ці дані були отримані вже на завершальному етапі експерименту і трохи різняться з тими, що були отримані в процесі роботи.

На питання «Чи допомагає використання ІКТ краще зрозуміти властивості функцій (парність, монотонність, періодичність, область визначення тощо)?» відповіді учасників мали такий розподіл: «Так, дуже допомагає» (68%), «Частково допомагає» (28%), «Не допомагає» (4%) (діаграма 3).

Діаграма 3. Чи допомагає використання ІКТ краще зрозуміти властивості функцій (парність, монотонність, періодичність, область визначення тощо)?



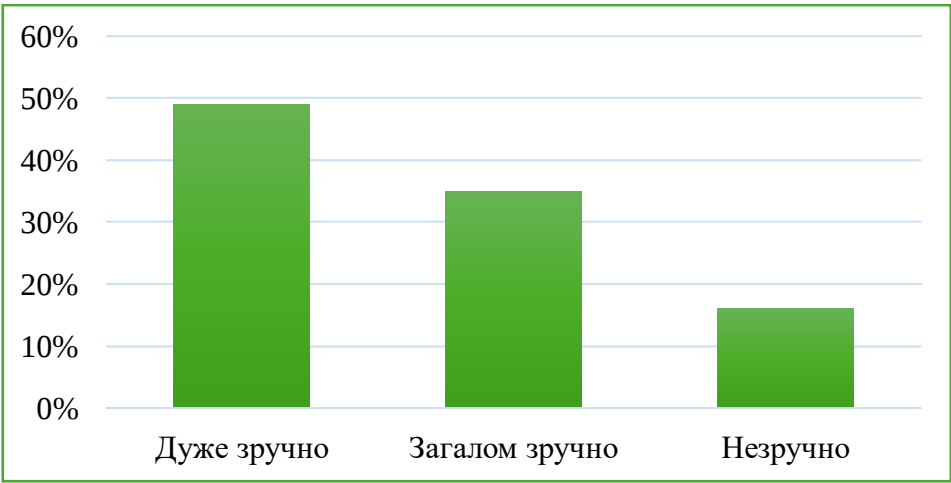
41% учнів вважають, що ІКТ значно підвищує інтерес до вивчення математики, 40% - обрали варіант «Так, але не завжди», у 19% – відношення до математики не змінилось (діаграма 4).

Діаграма 4. Чи підвищило ваш інтерес до вивчення математики використання ІКТ на уроках?



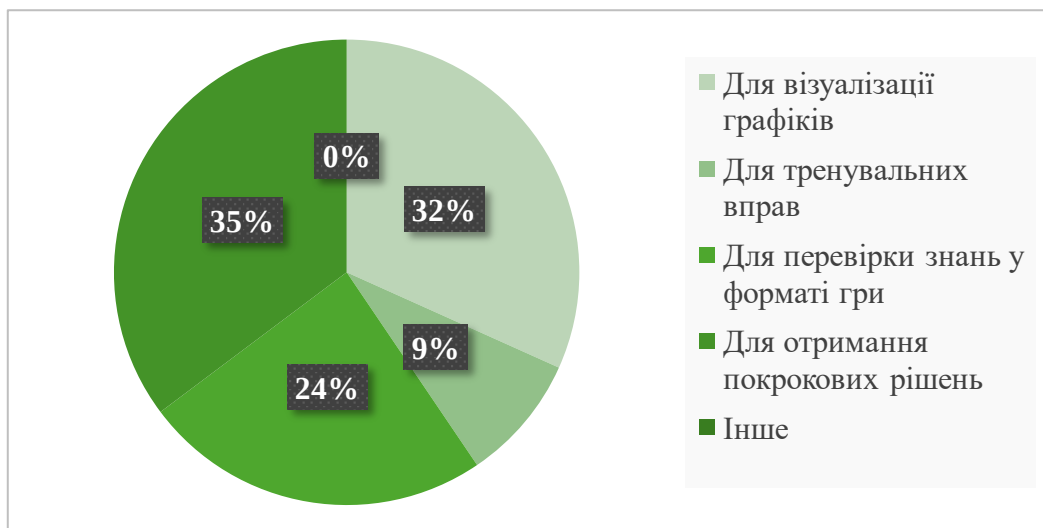
Відповіді на питання «Чи зручно вам виконувати практичні та самостійні завдання за допомогою ІКТ (онлайн-графіки, тести, інтерактивні вправи)?» склали: «Дуже зручно» (49%), «Загалом зручно» (35%), «Незручно» (16%) (діаграма 5).

Діаграма 5. Чи зручно вам виконувати практичні та самостійні завдання за допомогою ІКТ (онлайн-графіки, тести, інтерактивні вправи)?



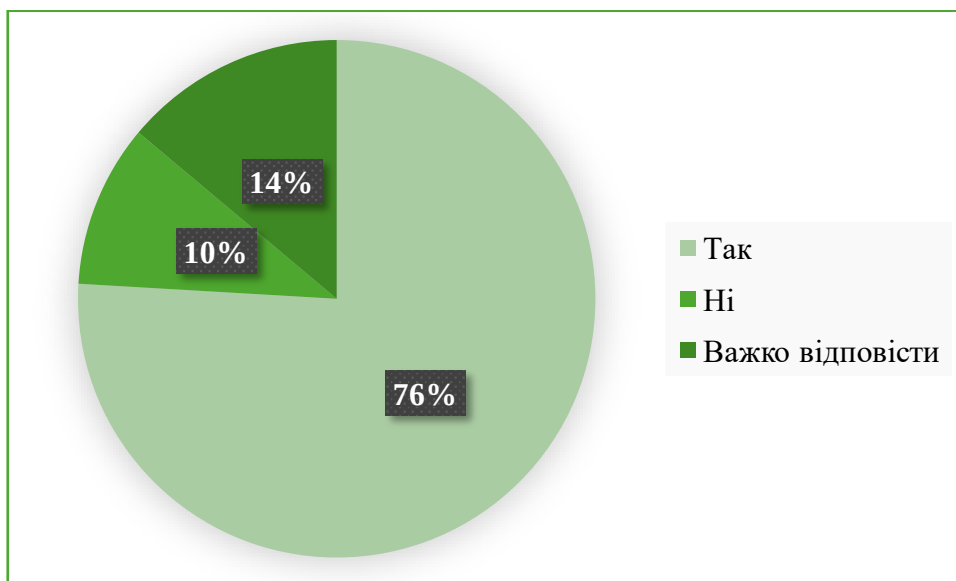
Для питання «У якій формі вам найбільше подобається використовувати ІКТ на уроках функцій?» здобувачі освіти могли обрати декілька відповідей. Для візуалізації графіків – 72%, Для тренувальних вправ – 20%, Для перевірки знань у форматі гри – 55%, Для отримання покрокових рішень – 80%, Інше (вказіть) – 0% (діаграма 6).

Діаграма 6. У якій формі вам найбільше подобається використовувати ІКТ на уроках функцій?



Більшість учнів, а саме 82% висловили бажання, щоб ІКТ застосовувалось частіше на уроках математики, 11% – вважають, що в цьому немає необхідності, 15% учнів було важко відповісти на це питання (діаграма 7).

Діаграма 7. Чи хотіли б ви, щоб ІКТ застосовувалися частіше на уроках математики?



Опитування доводить, що систематичне використання ІКТ під час вивчення функцій у старшій школі є ефективним та доцільним. Воно підвищує розумілість навчального матеріалу, сприяє формуванню навичок аналізу функцій, робить уроки цікавішими та мотивує учнів до активної роботи. Найбільш затребуваними є динамічні математичні середовища та сервіси, що дозволяють отримати покрокові рішення й наочно відобразити графіки.

Впровадження ІКТ особливо актуальне в умовах цифрового покоління, яке позитивно реагує на інтерактивність та візуалізацію.

Додатково варто підкреслити доцільність використання ІКТ у контексті дистанційного навчання та сучасного цифрового віку. В умовах, коли учні часто навчаються онлайн або в змішаному форматі, цифрові математичні середовища та інтерактивні платформи стають не просто допоміжним інструментом, а необхідною складовою освітнього процесу. Вони забезпечують доступність матеріалу незалежно від місця перебування учня, дозволяють отримувати миттєвий зворотний зв'язок, організовувати самоперевірку й контроль знань, а також підтримують індивідуалізацію навчання. Використання ІКТ відповідає потребам сучасних поколінь, які звикли до цифрових технологій у повсякденному житті, і робить навчання ближчим до їхнього інформаційного середовища, що підвищує інтерес і мотивацію до вивчення математики.

Висновки до розділу 2

Перед другим розділом кваліфікаційної роботи, зосередженої на експериментальній апробації дослідження, стояли наступні завдання:

1. Розробити методичні рекомендації для вчителів щодо застосування інформаційно-комунікаційних технологій для вивчення функцій в шкільному курсі математики.
2. Апробувати розроблені методичні рекомендації.

У цьому розділі було проаналізовано методичні аспекти використання інформаційно-комунікаційних технологій для вивчення функцій у старшій школі та визначено ключові завдання, які вирішуються за допомогою динамічних математичних середовищ. Виділено основні етапи вивчення функцій: формування базових понять, вивчення степеневих, тригонометричних, показникових та логарифмічних функцій, первісної функції та визначеного інтеграла.

Проаналізовано роль ІКТ у демонстрації властивостей функцій: симетрії графіків, парності/непарності, монотонності, періодичності та взаємної оберненості функцій. Виділено, що інтерактивні середовища дозволяють учням наочно спостерігати вплив параметрів на форму графіка, порівнювати графіки різних функцій та експериментувати з їхніми властивостями в реальному часі.

Зроблено демонстрацію можливостей GeoGebra та Desmos: побудовано відповідні графіки степеневих, тригонометричних, показникових та логарифмічних функцій, а також сімейство первісних, що дозволяє учням порівнювати їх поведінку та властивості. Наочно показано геометричний зміст інтеграла та метод прямокутників для наближеного обчислення площі.

Виділено практичні переваги інтеграції ІКТ: підвищення наочності, стимулювання дослідницької активності, розвиток аналітичного мислення, можливість самостійного моделювання та порівняння функцій, оперативний

зворотний зв'язок через інтерактивні платформи (Kahoot!, Wayground) та зменшення часу на рутинні обчислення завдяки WolframAlpha.

Описано хід експериментальної апробації методичних рекомендацій із застосування ІКТ для вивчення функцій у старшій школі. Описано проведення опитування серед учнів, що дало змогу оцінити, наскільки ефективно вони засвоюють поняття функцій і їхніх властивостей. Проаналізовано отримані дані та зроблено висновки щодо ефективності використання інтерактивних математичних середовищ.

Виділено статистичні підсумки експерименту, побудовано діаграми, що показують рівень засвоєння матеріалу та особливості відповідей учнів на різні типи завдань. Проведений аналіз підтвердив, що використання ІКТ не лише підвищує зацікавленість і активність учнів, а й сприяє глибшому розумінню абстрактних математичних понять. Загалом, експериментальна апробація засвідчила, що інтеграція сучасних цифрових інструментів у навчальний процес є доцільною та методично обґрунтованою.

ВИСНОВКИ

Кваліфікаційна робота присвячена розв'язанню актуальної науково-методичної проблеми – удосконаленню процесу вивчення теми «Функції» у старшій школі шляхом інтеграції інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у навчальний процес. Мету дослідження вважаємо досягнутою, усі поставлені завдання виконаними.

У процесі аналізу психолого-педагогічної, науково-методичної та спеціальної літератури з'ясовано, що традиційна методика вивчення функцій часто характеризується абстрактністю, складністю сприйняття та недостатнім рівнем візуалізації, що знижує пізнавальну активність учнів. Обґрунтовано доцільність використання ІКТ як інструменту для подолання зазначених труднощів. Систематизовано дидактичний потенціал сучасних цифрових ресурсів – GeoGebra, Desmos, WolframAlpha, а також інтерактивних освітніх платформ LearningApps, Quizizz, Kahoot!, що сприяють формуванню дослідницьких, аналітичних і графічних умінь учнів.

Розроблено й теоретично обґрунтовано методику застосування ІКТ у процесі вивчення функцій. Вона передбачає інтеграцію цифрових інструментів на всіх етапах навчання: від мотиваційного до контрольної оцінювального. Методика базується на принципах наочності, інтерактивності, доступності та індивідуалізації, передбачає активне використання динамічної візуалізації, побудови та аналізу графіків функцій за допомогою GeoGebra і Desmos, а також організацію елементів дослідницької діяльності учнів.

У ході педагогічного експерименту підтверджено ефективність запропонованої методики. Застосування ІКТ у навчанні функцій сприяло істотному підвищенню рівня розуміння теоретичного матеріалу, покращенню навичок побудови та аналізу графіків, розвитку математичної грамотності. Результати контрольних зрізів і анкетування свідчать про зростання

навчальної мотивації, підвищення інтересу до предмета та активізацію пізнавальної діяльності учнів.

На основі отриманих результатів розроблено практичні рекомендації для вчителів математики щодо використання ІКТ у процесі вивчення функцій. Ці рекомендації можуть бути використані при підготовці уроків, факультативних занять та створенні інтерактивних навчальних матеріалів.

Отже, проведене дослідження підтвердило, що інтеграція інформаційно-комунікаційних технологій у процес вивчення функцій є ефективним засобом підвищення якості математичної освіти. Використання цифрових ресурсів забезпечує високий рівень наочності, створює умови для розвитку критичного та аналітичного мислення, активізує пізнавальну діяльність учнів і сприяє формуванню стійкої навчальної мотивації. Застосування ІКТ у викладанні математики відповідає сучасним тенденціям цифровізації освіти та відкриває нові перспективи для інноваційного оновлення методики навчання в умовах Нової української школи.

Перспективним напрямом подальших науково-методичних досліджень є вивчення потенціалу математичних програм, що функціонують на основі штучного інтелекту, у процесі навчання функцій, оскільки сучасна освіта потребує постійного оновлення відповідно до темпів технологічного розвитку. Вивчення переваг і недоліків використання таких програм у порівнянні з традиційними комп'ютерними засобами навчання математики є важливим. Порівняльне вивчення результативності застосування інтелектуальних систем і класичних програмних середовищ (GeoGebra, Desmos тощо) сприятиме глибшому розумінню можливостей сучасних цифрових технологій у підвищенні якості математичної освіти.

Також доцільним вважаємо поширення розробленої методики застосування ІКТ на інші розділи шкільного курсу математики, що потребують наочності та динамічного моделювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ:

1. Актуальні проблеми соціально-гуманітарних наук: перспективи та виклики: матеріали VIII Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції. 4 квітня 2025 року. Миколаїв : НУК ім. адм. Макарова, 2025. 721 с.
2. Алгебра : підруч. для 7 класу закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Д. В. Васильєва, Н. Г. Владімірова. К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. 272 с. : іл.
3. Алгебра 11 клас: підручник для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень/ А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір, Х.: Гімназія, 2011. 431 с.: іл.
4. Алгебра і початки аналізу: (проф. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер, Оксана Єргіна. Київ: Генеза, 2019. 416 с.: іл.
5. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл.: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х.: Гімназія, 2019. 304 с.: іл.
6. Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Х.: Гімназія, 2019. 352 с.: іл.
7. Бібікова І.В., Вертипорох Т.О., Турка Т.В. Методика вивчення функцій в шкільному курсі математики. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2024. Вип. 14. с. 89-96
8. Богатєнкова О. Є. Використання програми GeoGebra у викладанні математики: інтерактивність та педагогічні переваги. SWorldJournal. 2024. Випуск № 25 (Болгарія, IndexCopernicus, GoogleScholar) с. 14-16 DOI:

<https://doi.org/10.30888/2663-5712.2024-25-00-013> (дата звернення: 20.10.2024 р.)

9. Богатєнкова О. Є. ОБІЗНАНІСТЬ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ ЩОДО МАТЕМАТИЧНИХ ПРОГРАМ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ: АНАЛІЗ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ВПРОВАДЖЕННЯ ШІ В ОСВІТНІЙ ПРОЦЕС. (2025). *Modern Information Technologies and Innovation Methodologies of Education in Professional Training Methodology Theory Experience Problems*, 76, 9-18. <https://doi.org/10.31652/2412-1142-2025-76-9-18> (дата звернення: 20.10.2024 р.)

10. Букач А. Сайти Google як платформа для організації дистанційного навчання. URL: <https://sites.google.com/site/edugservis/google-sites> (дата звернення: 15.11.2024 р.)

11. Вікіпедія / вільна енциклопедія URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/GeoGebra> (дата звернення: 05.12.2024 р.)

12. Всеукраїнська школа онлайн. URL: <https://lms.e-school.net.ua/> (дата звернення: 05.12.2024 р.)

13. Горошко Ю. В. Використання комп'ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики / Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання/ Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Випуск (4) 11 Серія № 2. 2006. С. 56-62. (8 с.)

14. Горошко Ю. В. Розв'язування задач з параметрами за допомогою програми «GRAN-1». / Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. // Математика в школі. Випуск № 7–8 (84). 2008. С. 25-28.

15. Дереза І. С. Використання графічного калькулятора Desmos у навчанні диференціальної геометрії майбутніх вчителів математики / І. С. Дереза // Тези доповідей IV Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології в освіті, науці і техніці» (ІТОНТ-2018) (Черкаси, 17-18 травня 2018 р.). Черкаси, 2018. С. 193-196.

16. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії: посібник для вчителів / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2000. 168 с.
17. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: посібник для вчителів / Жалдак М. І. Видання 2-е, перероблене та доповнене. К.: РННЦ «ДІНІТ», 2003. 324 с.
18. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером: посібник для вчителів / Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. 255 с.
19. Жалдак М. І. Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі / М. І. Жалдак // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 2, Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : Збірник наукових праць / М-во освіти і науки України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. К. : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. Вип. 11 (18). С. 3-16.
20. Жалдак М.І., Костюченко А.О., Вітюк О.В. Gran2D. Версія 2.0. 2012. URL: <https://ktoi.fi.npu.edu.ua/zavantazhyty/category/2-gran2d> (дата звернення: 12.01.2025 р.)
21. Заболотна, Д., & Богатєнкова, О. (2025). АНАЛІЗ ДОЦІЛЬНОСТІ ІНТЕГРАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНИХ РЕСУРСІВ У ПРОЦЕС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ. Наукові записки. Серія: Педагогічні науки, (219), 152-158. <https://doi.org/10.36550/2415-7988-2025-1-219-152-158> (дата звернення: 20.10.2024 р.)
22. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; науковий редактор академік АПН України,

д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. Кривий Ріг : Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. 324 с.

23. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-метод. конф. молодих науковців, 17-18 лют. 2011 р. Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2011. 440 с.

24. Інструменти geogebra 5.0 та їх використання для розв'язування геометричних задач твердого тіла / Інформаційні технології і засоби навчання/ Том 44, № 6 / Семеніхіна Олена Вікторівна, Друшляк Марина Геннадіївна, 2014, 232 с. (124-133 с.)

25. Кулій Д. Розробка факультативного курсу для старшокласників «Математичні основи комп'ютерної графіки»: дипломна робота. Чернівці: ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2021. 86 с. URL: https://archer.chnu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/3926/Кулій_Д.pdf?sequence=1&isAllowed=y (дата звернення: 08.11.2024 р.)

26. Кушнірук А. С., Сушкова О. А. Застосування програмних засобів GRAN1 та GRAN-2D на уроках алгебри. Математика. 2017. № 6. С. 53–61

27. Литвинова С. Сухіх А. Мельник О. ВИКОРИСТАННЯ ПЛАТФОРМИ «ВСЕУКРАЇНСЬКА ШКОЛА ОНЛАЙН» В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ: РЕЗУЛЬТАТИ ВСЕУКРАЇНСЬКОГО ОПИТУВАННЯ. Information Technologies and Learning Tools 104(6):31-52. 2024. DOI:[10.33407/itlt.v104i6.5658](https://doi.org/10.33407/itlt.v104i6.5658) (дата звернення: 03.11.2024 р.)

28. Малихін О., Ліпчевська І. Формування вмінь візуалізації навчальної інформації майбутніх учителів початкової школи: методи діагностики: методичний посібник. Київ: «Видавництво Людмила», 2023. 72 с.

29. Мар'єнко, М. В., & Сухіх, А. С. (2022). МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ПРОЦЕСІ ЗМІШАНОГО НАВЧАННЯ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ. *Вісник*

<https://doi.org/10.37472/v.naes.2022.4111> (дата звернення: 03.11.2024 р.)

30. Математика для вступників до вузів. Навч. Посібник/ Упоряд.: Бондаренко М. Ф., Дікарев В. А., Мельников О. Ф., Семенець В. В., Шкляр Л. Й. Харків: «Компанія СМІТ», 2002. 1120 с.

31. Математичні основи інформатики. НАУКОЗАВР. URL: <https://naukozavr.info/informatuka/matematychni-osnovy-informatyky/> (дата звернення: 24.12.2024 р.)

32. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 8 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2016. 384 с.

33. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підручник для 9 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2017. 416 с.

34. Н. Кравченко. Анкета для учнів 10 класу. URL: https://docs.google.com/forms/d/1oetKDReIVE33emcEZqw4rwr9TQmt5TQ-vAQmkNN_znY/preview

35. Навчальні програми для 6-9 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: Затв. Наказом No 804 Міністерства освіти і науки України від 07.06.2017). URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas> (дата звернення: 16.03.2025 р.)

36. НАРИХНЮК, Н. Ю., ЛЕЙБИК, Л. І., & КОПІНЧУК, Н. Ю. (2023). ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ GRAN1, GRAN-2D, 3D CALCULATOR – GEOGEBRA З МЕТОЮ ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ ЗНАНЬ З ДИСЦИПЛІН ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОГО

37. Норкіна О. В. Досвід дослідження актуальних проблем викладання математики у сучасній школі: матеріали обласної науково-практичної Інтернет-конференції. Черкаси : Вид-во ОПОПП, 2014. 185 с.

38. Питання удосконалення змісту і методики викладання природничо-математичних дисциплін у середній і вищій школі: науково-методичний журнал / за ред. проф. Р. В. Дінжоса. Випуск 29. Миколаїв: МНУ імені В. О. Сухомлинського, 2023. 86 с.

39. Про основні засади розвитку інформаційного суспільства в Україні на 2007–2015 роки: Закон України // Відомості Верховної Ради України (ВВР). 2007. № 12. С. 102. URL: <http://zakon1.rada.gov.ua/laws/show/537-16> (дата звернення: 07.10.2024 р.)

40. Проблеми та інновації в природничо-математичній, технологічній і професійній освіті: збірник матеріалів XV-ї Міжнародної науково-практичної онлайн-інтернет конференції присвяченій 95-й річниці з Дня народження академіка Національної академії педагогічних наук С. У. Гончаренка, м. Кропивницький, 20 – 24 червня 2023 року / Відп. ред. М. І. Садовий. Кропивницький: РВВ ІЦДУ ім. В. Винниченка, 2023. 136 с.

41. Раков С. А. Формування математичних компетентностей учителя математики на основі дослідницького підходу в навчанні з використанням інформаційних технологій: дис. доктора пед. наук : 13.00.02 / Раков Сергій Анатолійович. К., 2005. 381 с.

42. Ракута В. М. GeoGebra для початківців: навчальний посібник / Ракута В. М. Чернігів: ЧОППО ім. К. Д. Ушинського, 2011. 49 с.

43. Ракута В. М. Бібліотека комп'ютерних моделей, як необхідна складова сучасного навчального середовища / Ракута В. М. // *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*. Випуск 98. Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2011. С. 246–249.

44. Ракута В. М. Динамічна математична система GeoGebra, як інноваційний інструмент для вивчення математики/ ІТЛТ, том. 30 № 4, 2012.
45. Ракута В. М. Програми для роботи з функціями та графіками / Ракута В. М. // *Комп'ютер у школі та сім'ї*. Випуск № 7 (87). 2010. С. 29–33.
46. Семеніхіна О. В. Інструментарій програми Geogebra 5.0 і його використання для розв'язування задач стереометрії / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2014. Т. 44, вип. 6. С. 124-133. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ITZN_2014_44_6_14 (дата звернення: 02.02.2025 р.)
47. Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Курилко О.Б., Цань В.Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина III «Функції в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2022. 224 с.
48. ТАРГОШ, О. (2023). ПІДГОТОВКА ТА ВИКОРИСТАННЯ ВІДЕОМАТЕРІАЛІВ У СТАРШІЙ ШКОЛІ НА ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ. *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького*.
 Серія: «Педагогічні науки», (2), 68–72. <https://doi.org/10.31651/2524-2660-2023-2-68-72> (дата звернення: 06.01.2025 р.)
49. Уроки математики з комп'ютером. Посібник для вчителів і студентів / За ред. М. І. Жалдака. Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008. 272 с.
50. Фізика, математика, інформатика: досвід та інновації: зб. матеріалів наук.-метод. семінару кафедри методики викладання фізики і математики, Миколаїв, 12 травня 2025 р. Вип. 30. / редкол. : В. Січко (голова), М. Літвінова (голов. ред.), О. Богатенкова (тех. ред.) Миколаїв : НУК імені адмірала Макарова, 2025. 91 с.
51. Франчук Н. П. GRAN-3D. URL: <https://ktoi.fi.npu.edu.ua/gran-3d> (дата звернення: 05.09.2025 р.)

52. Шулікін Д. STEM-освіта. Навчання для майбутнього в Україні, 2015. URL: <http://iteach.com.ua/news/mass-media/?pid=2621/> (дата звернення: 20.11.2024 р.)
53. Як підняти математичну освіту й чому це важливо зараз та після війни. URL: <https://zn.ua/ukr/science/vijna-z-rosijeju-chomu-ukrajini-potribna-matematika.html> (дата звернення: 14.12.2024 р.)
54. Desmos. URL: <https://www.desmos.com/?lang=uk> (дата звернення: 07.09.2025 р.)
55. Formula. Maths, Science & ICT/ Візуалізація на уроках математики – ефективний інструмент навчання/ URL: <https://formula.education/2023/11/28/vizualizacziya-na-urokah-matematyky-efektyvnyj-instrument-navchannya/> (дата звернення: 13.08.2025 р.)
56. GeoGebra5.0 URL: <https://www.geogebra.org/>
57. Kahoot! URL: <https://kahoot.com/>
58. Khan Academy (українська версія). URL: <https://uk.khanacademy.org/>
59. LearningApps. URL: <https://learningapps.org/>
60. Mathema.me та GIOS. URL: <https://mathema.me/>
61. Wayground. URL: <https://wayground.com/admin>
62. WolframAlpha. URL: <https://www.wolframalpha.com/>
63. Освіта.ua URL: <https://osvita.ua/school/program/program-10-11/58878/> (дата звернення: 11.10.2024 р.)

ДОДАТКИ

Додаток А

Інструменти для візуалізації та динамічного моделювання

Покликання:

Офіційна сторінка GeoGebra:

<https://web.archive.org/web/20120905233546/http://www.geogebra.org/cms/>

Навчальні посібники з використання GeoGebra:

<https://web.archive.org/web/20110127005553/http://math4allages.wordpress.com/geogebra/>

Канал GeoGebra: <https://www.youtube.com/user/GeoGebraChannel>

Інститути GeoGebra в Україні:

<https://sites.google.com/site/geogebravukraieni/instituti-geogebra-v-ukraieni>

Панель інструментів GeoGebra надає користувачу такі можливості:

- Основні інструменти (Переміщення об'єктів; побудова точки, повзунка, перетину, апроксимації прямою; знаходження екстремумів та коренів)
- Редагування (Обрання та видалення об'єктів, їх показ та приховання; переміщення полотна; копіювання стилю)
- Медіа (Вставка зображення, тексту)
- Вимірювання (Кут; відстань або довжина; площа; кут заданої величини; нахил прямої)
- Перетворення (Симетрія відносно прямої або точки; паралельне перенесення; поворот навколо точки; інверсія; гомотетія відносно точки)
- Побудови (Середня точка або центр; перпендикулярна пряма; серединний перпендикуляр; паралельна пряма; бісектриса кута; дотична; локус)
- Лінії (Відрізок; пряма; промінь; вектор; поляра або діаметр; ламана)

- Кола (Коло за центром та точкою на колі/ коло: центр та радіус/ коло за трьома точками; циркуль; півколо; дуга/ дуга за центром та двома точками; сектор/ сектор за трьома точками)
- Многокутники (Многокутник; правильний/ векторний/ жорсткий многокутник)
- Конічні перерізи (Еліпс; парабола; гіпербола; коніка за п'ятьма точками)
- Інші (Перо; фігура від руки; відношення; кнопка; прапорець; поле введення)
- Таблиця.

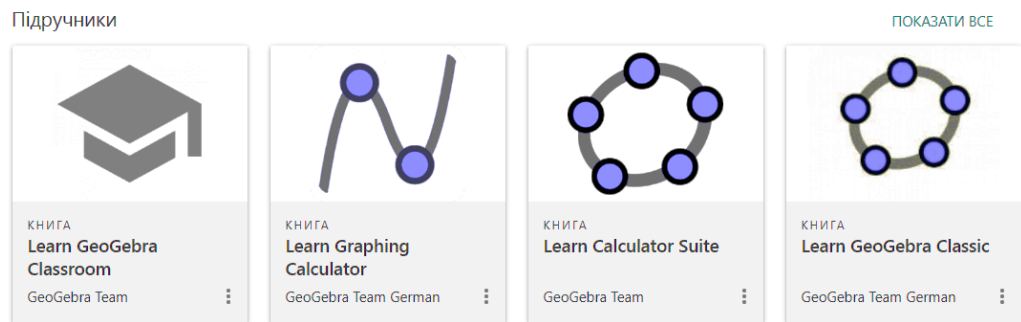


Рисунок Д. 1.1 (Підручники)

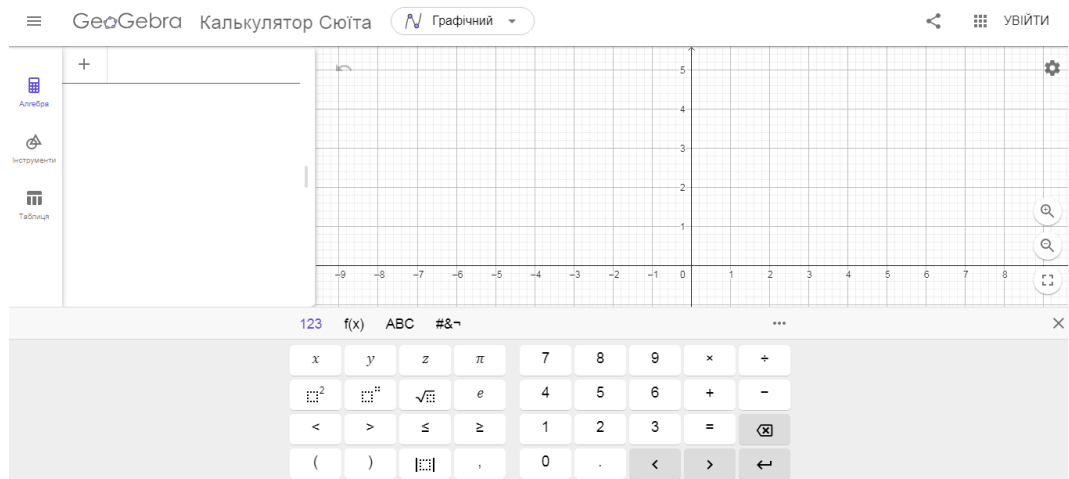


Рисунок Д. 1.2 (Калькулятор Сюїта)

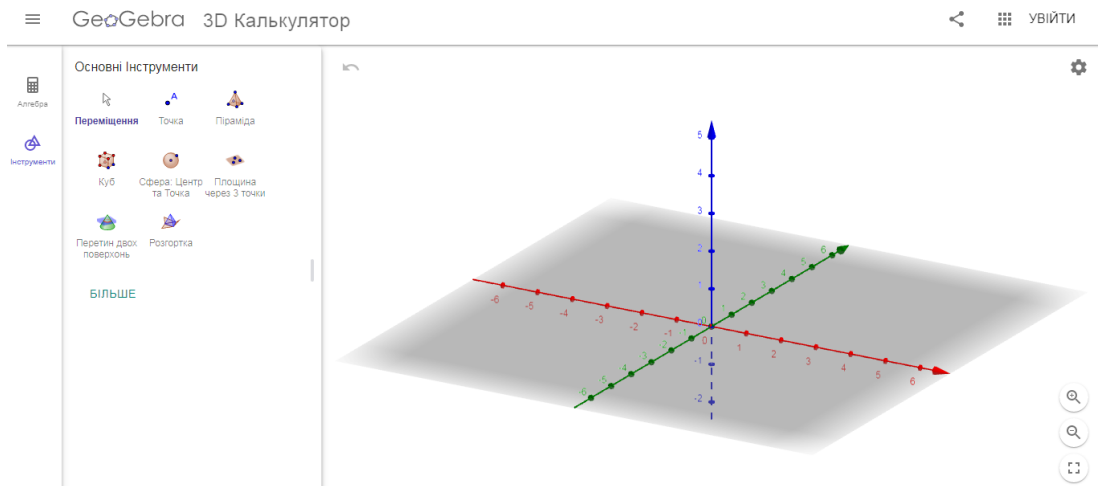


Рисунок Д. 1.3 (3D калькулятор)

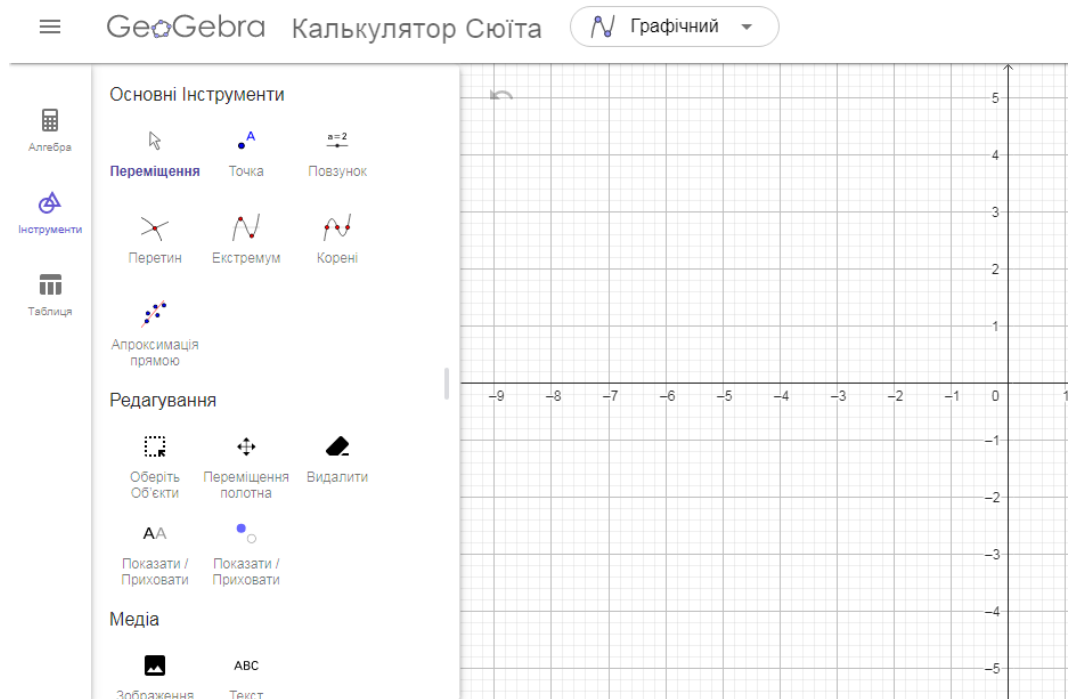


Рисунок Д. 1.4 (Основні інструменти)

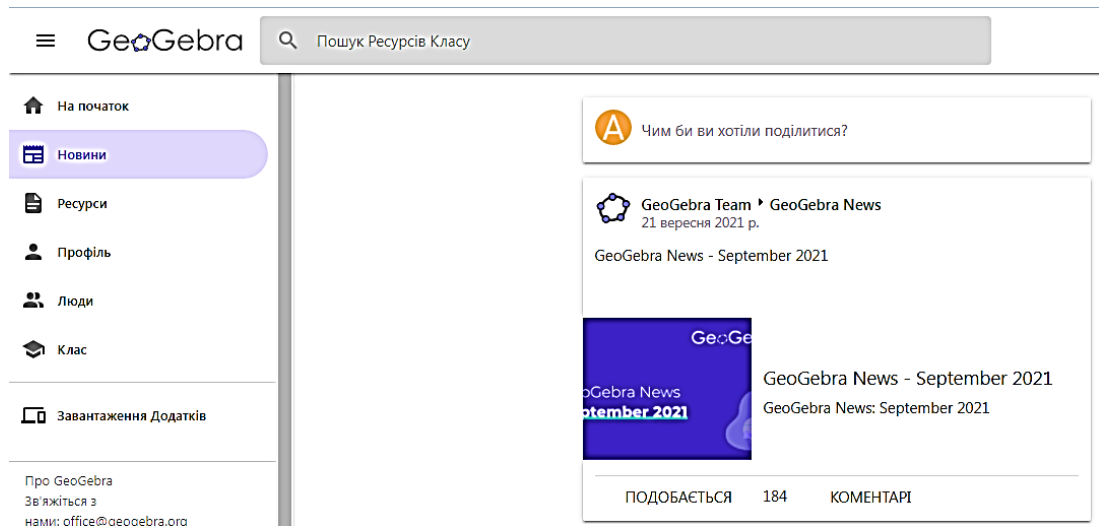


Рисунок Д. 1.5 (Новини)

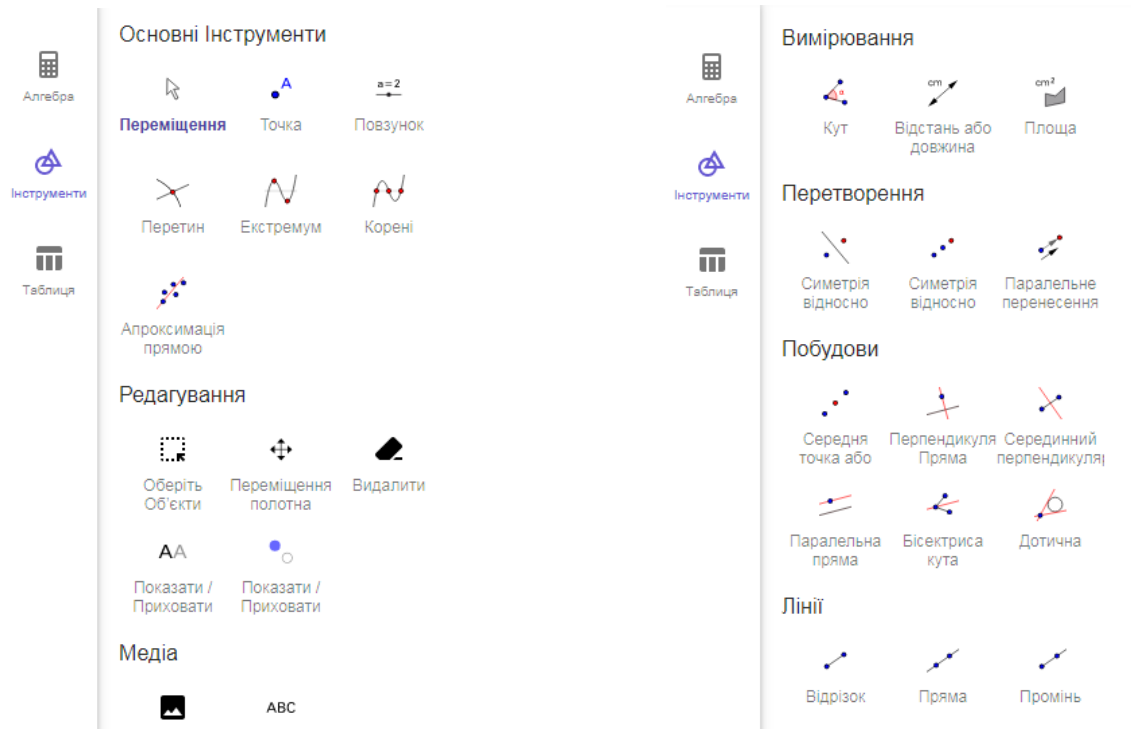
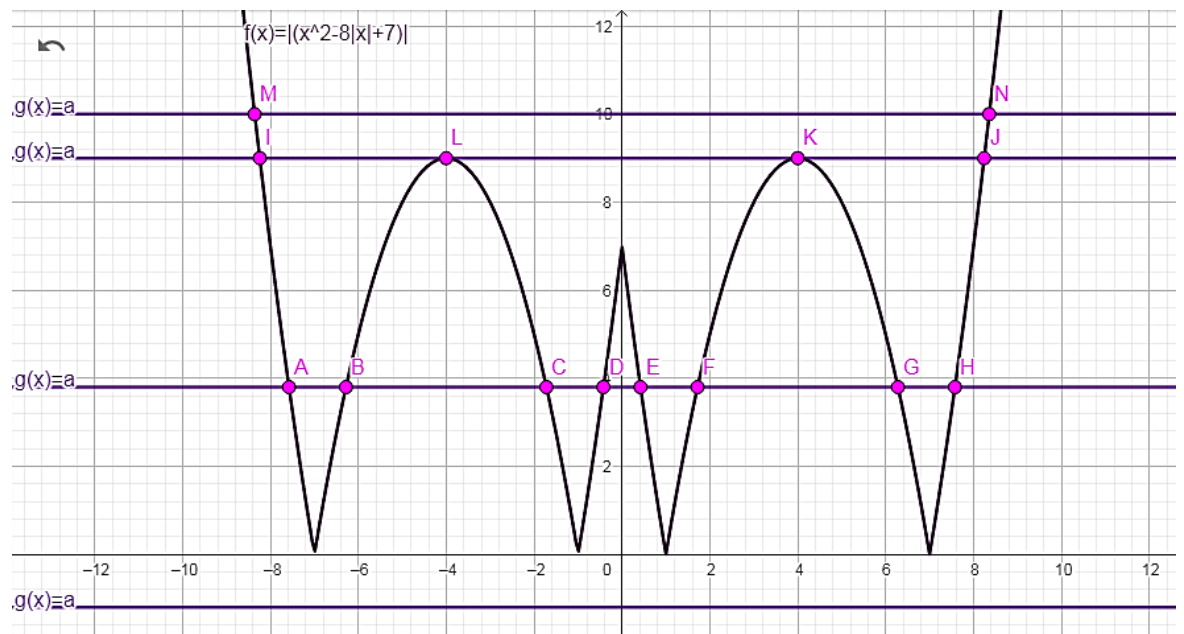


Рисунок Д. 1.6 (Основні інструменти, редагування, медіа)

Рисунок Д. 1.7. (Вимірювання, перетворення, побудови, лінії)

Можливі побудови в GeoGebra:

Рисунок Д. 1.8. Побудова функції $f(x) = |x^2 - 8|x| + 7|$

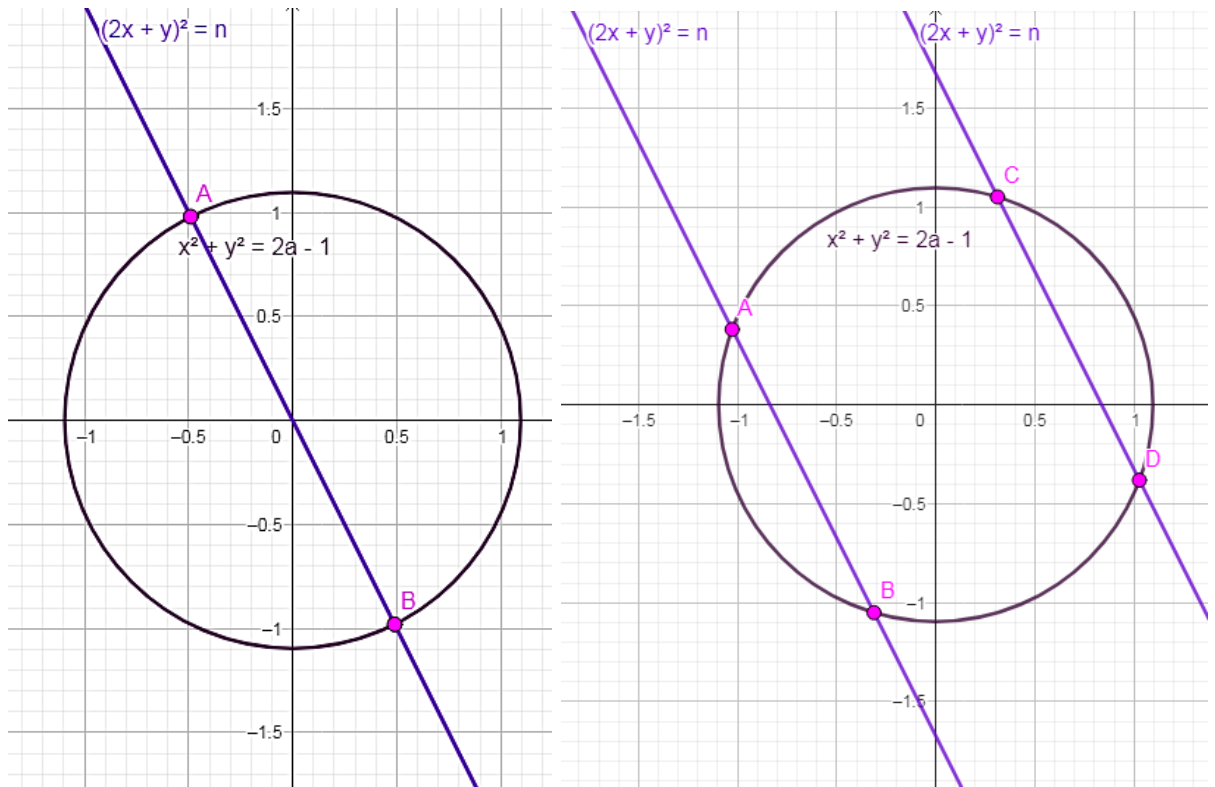


Рисунок Д. 1.9. – Д. 1.10. Розв'язання системи рівнянь $\{x^2 + y^2 = 2a - 1$
 $(2x + y)^2 = n$ графічним способом

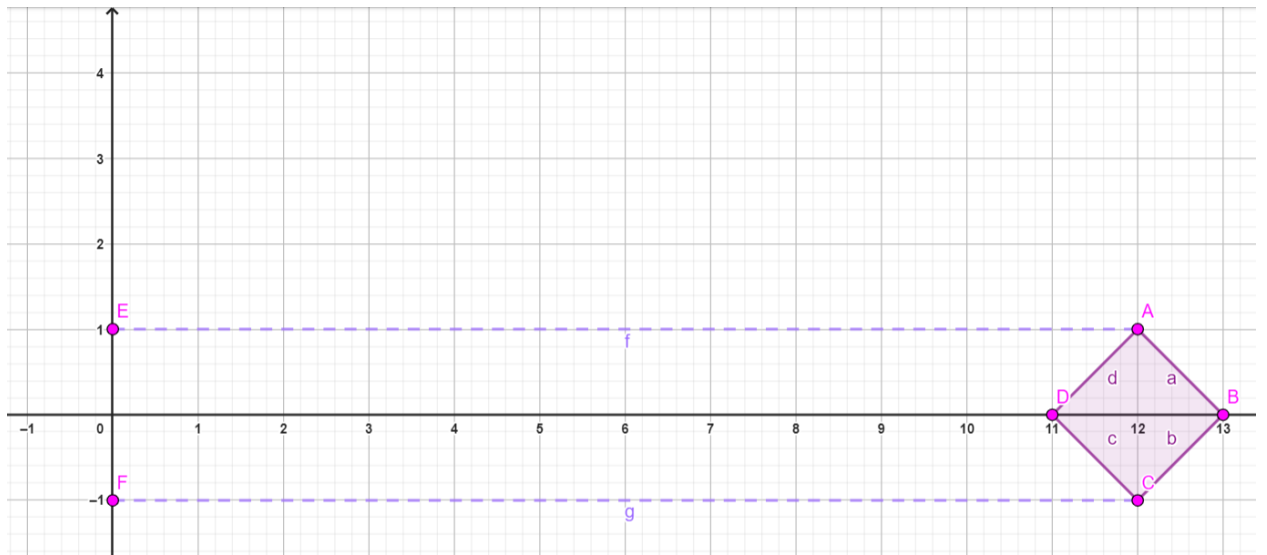


Рисунок Д. 1.11. Побудова графіка функції $|y| = 1 - |x - 12|$

Desmos Graphing Calculator URL: <https://www.desmos.com/calculator>

Керівництво користувача Desmos. URL: https://desmos.s3.amazonaws.com/Desmos_User_Guide.pdf

Основні можливості Desmos:

1. Побудова графіків функцій:

Користувач вводить функцію в лівий стовпчик, а Desmos автоматично будує її графік у правій частині.

2. Створення анімацій:

Можна створювати анімовані зображення шляхом прив'язки об'єктів до функцій із параметрами.

3. Динамічна наочність:

Сервіс дозволяє створювати інтерактивні та динамічні навчальні матеріали.

4. Використання як звичайного графічного калькулятора:

Desmos може виконувати всі функції стандартних графічних калькуляторів.

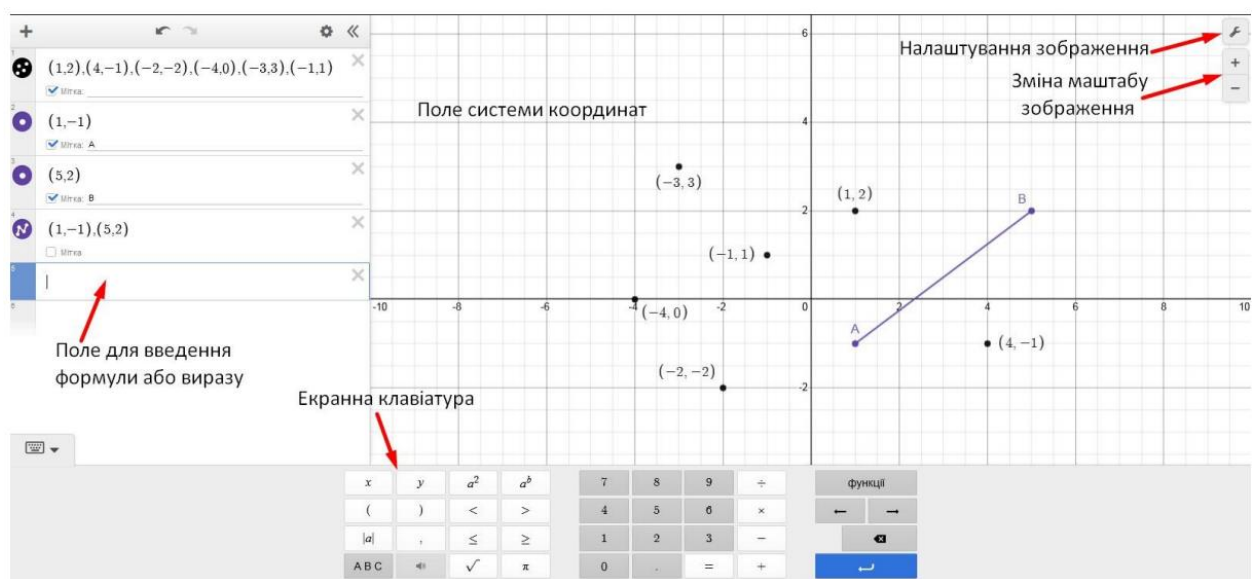


Рисунок Д. 1.12. Робоче поле Desmos

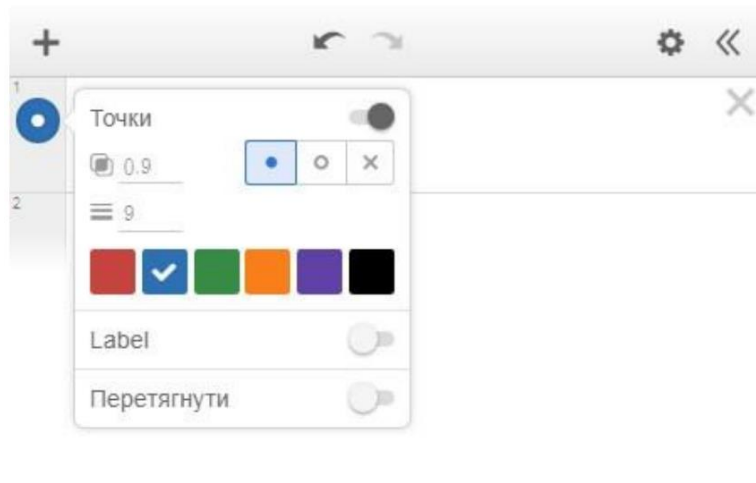


Рисунок Д. 1.13. Меню стилів, кольорів та перетягувань для точки

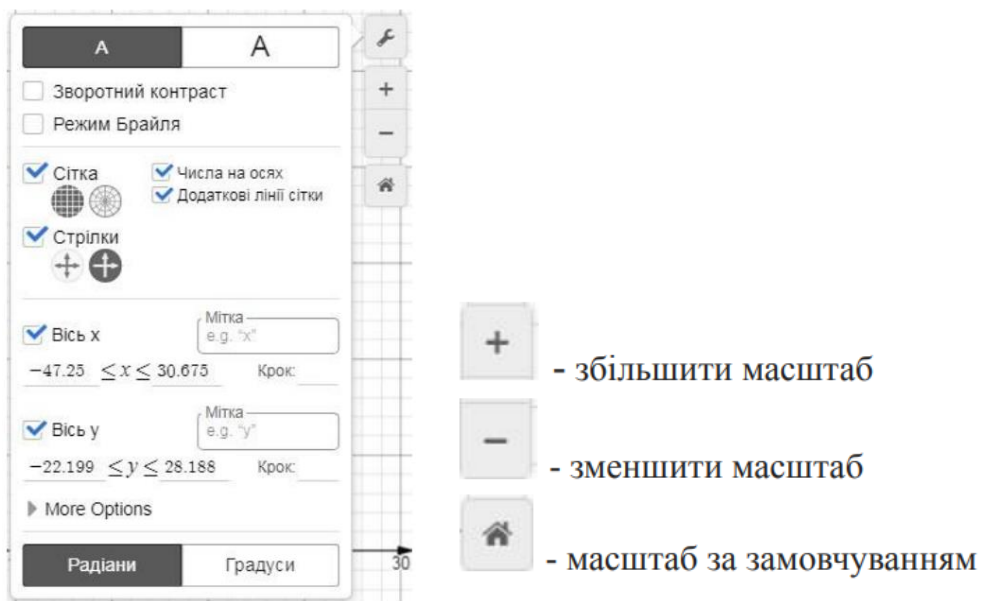


Рисунок Д. 1.14. Налаштування зображення

Можливі побудови:

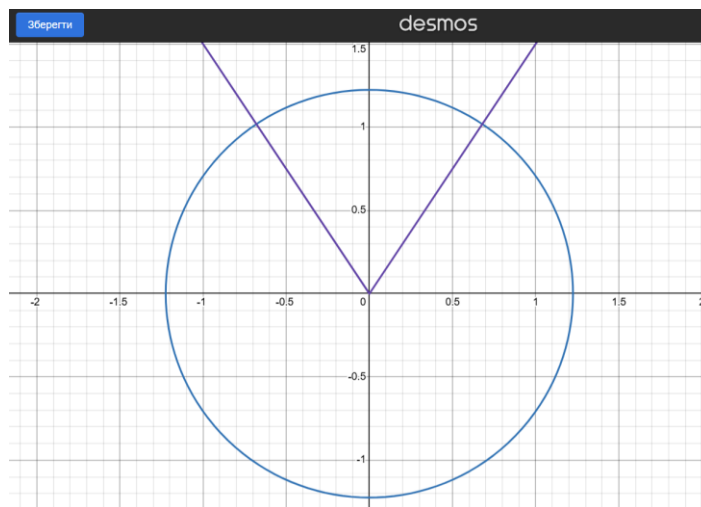


Рисунок Д. 1.15. Побудова графіка системи рівнянь $\{x^2 + y^2 = a \quad y = |ax|\}$

GRAN 2D/3D (необхідно завантажити на комп'ютер) URL:

<https://ktoi.fi.npu.edu.ua/zavantazhyty>

Основні можливості GRAN 2D:

1. Побудова графіків функцій, рівнянь і нерівностей у двовимірному просторі.
2. Дослідження властивостей функцій: нулі, екстремуми, точки перетину, проміжки монотонності, парність/непарність, періодичність.
3. Обчислення значень функцій у заданих точках.
4. Виконання операцій з графіками (масштабування, зсув, симетрія).
5. Робота з параметричними та неявними функціями.
6. Ілюстрація методів інтегрування, похідних, наближених обчислень.
7. Побудова діаграм, гістограм, ілюстрацій до задач з алгебри, геометрії та фізики.

Основні можливості GRAN 3D:

1. Побудова графіків функцій двох змінних у тривимірному просторі.
2. Візуалізація поверхонь і кривих у просторі.
3. Перегляд графіків з різних ракурсів, обертання, масштабування.
4. Побудова рівнянь та нерівностей у просторі.
5. Аналіз властивостей функцій двох змінних: області визначення, області значень, екстремуми.
6. Створення просторових моделей для задач з алгебри, аналітичної геометрії, фізики.
7. Можливість інтерактивного дослідження та підготовки ілюстрацій для навчальних матеріалів.

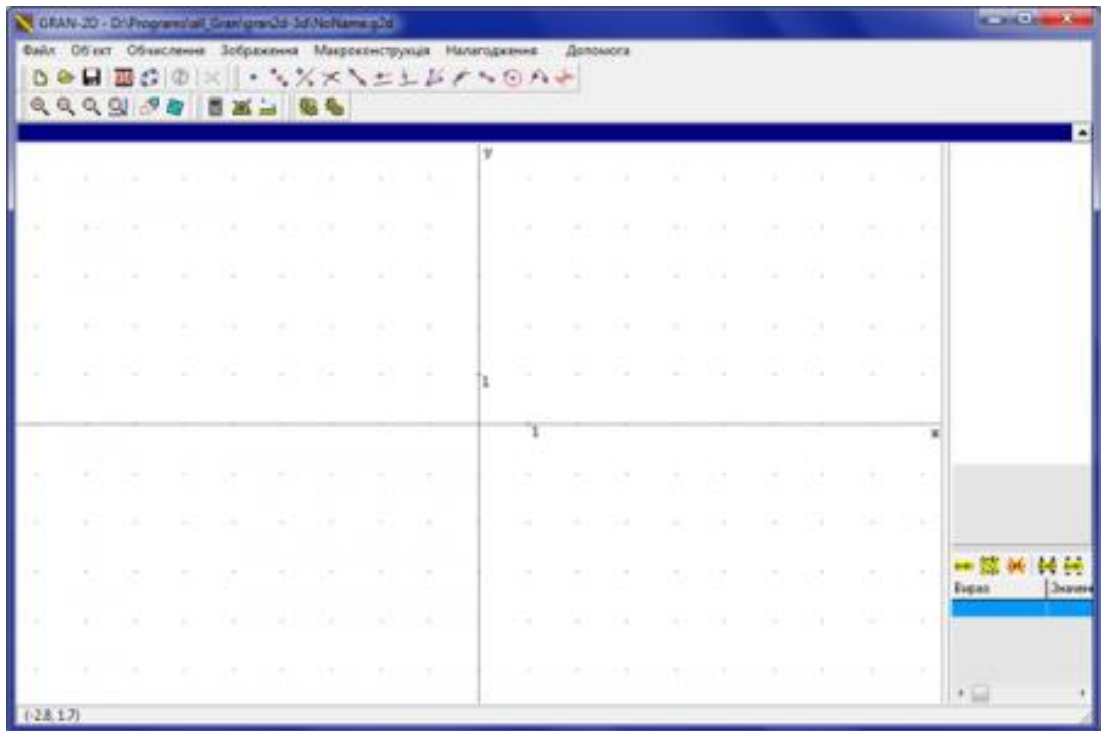


Рисунок Д. 1.16. Інтерфейс GRAN 2D

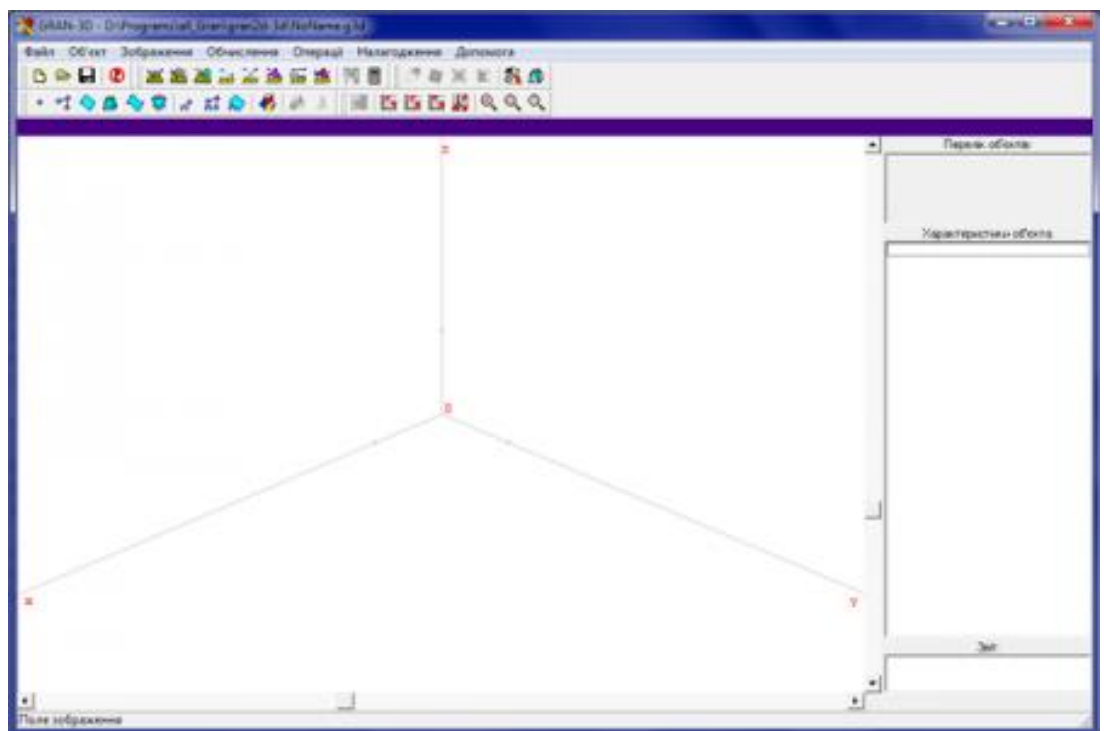


Рисунок Д. 1.17. Інтерфейс GRAN 3D

Освітні платформи та інтерактивні ресурси

Khan Academy URL: <https://uk.khanacademy.org/>

Основні можливості платформи:

Велика база курсів – математика (від початкової школи до університету), фізика, хімія, біологія, економіка, інформатика, історія, мистецтво та інші предмети.

Відеоуроки – короткі пояснення складних тем у доступній формі.

Інтерактивні завдання – вправи для закріплення знань із миттєвим зворотним зв'язком.

Персоналізоване навчання – система адаптується під рівень користувача, пропонує завдання відповідної складності.

Гейміфікація – за прогрес нараховуються бали та «значки».

Багатомовність – доступна англійською та перекладена багатьма мовами (є українська версія, але вона ще неповна).

Інструменти для викладачів – можливість створювати «класи», відслідковувати прогрес студентів, призначати завдання.

Доступність – працює через вебсайт та мобільний застосунок.

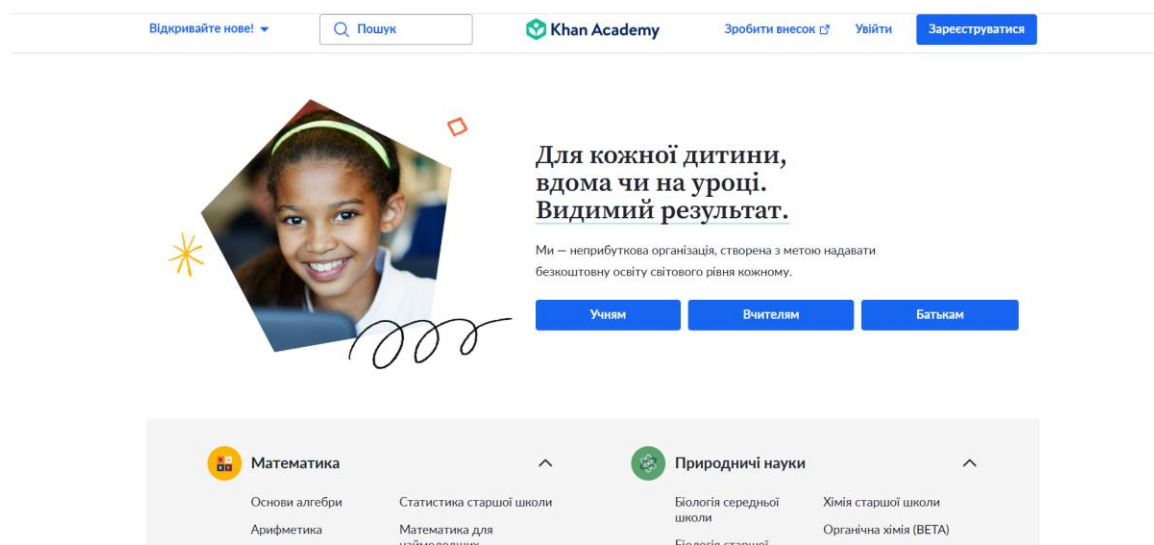


Рисунок Д. 2.1. Інтерфейс Khan Academy

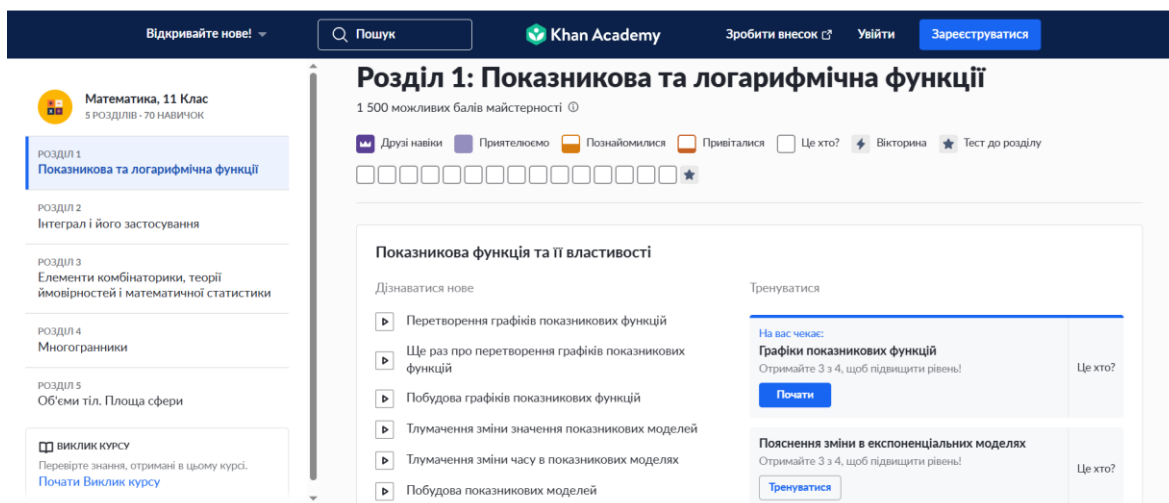


Рисунок Д. 2.2. Матеріали з математики для 11 класу в Khan Academy

LearningApps URL: <https://learningapps.org/>

Можливості LearningApps:

1. Створення інтерактивних навчальних модулів (додатків) з текстом, зображеннями, відео, аудіо.
2. Більше 20 шаблонів задач: множинний вибір, підстановки, ланцюжки, пазли, хрестослівниці, класифікації тощо.
3. Можливість редагувати вже існуючі модулі (копіювати та змінювати) для власних потреб.
4. Публікування модулів, доступ через посилання, вбудовування в сайти або LMS через HTML-код або QR-код.
5. Безкоштовний доступ, перегляд модулів не потребує реєстрації.
6. Для збереження модулів і доступу до функцій викладача (класи, відслідковування прогресу) потрібна реєстрація.
7. Інтеграція з платформами як Moodle – можливість використовувати модулі LearningApps у системах управління навчанням.
8. Категоризація за предметами та рівнями, пошук готових додатків для різних тем.

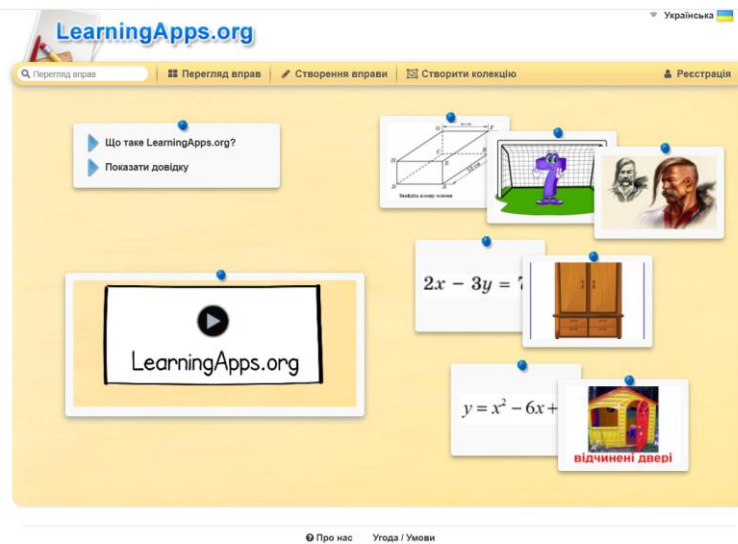


Рисунок Д. 2.3. Інтерфейс LearningApps

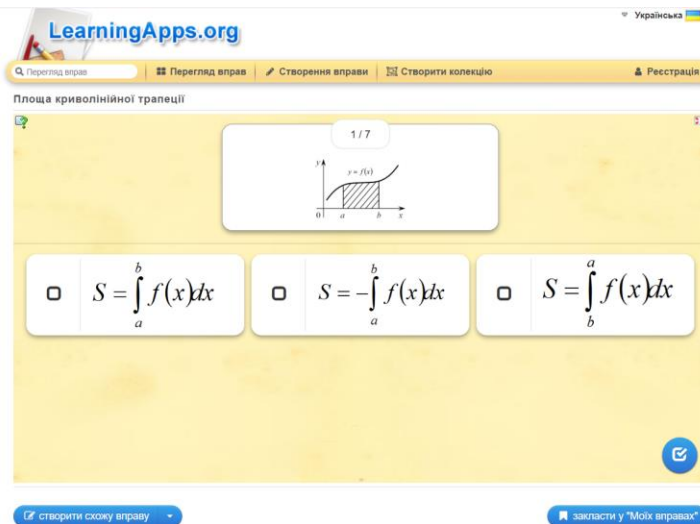


Рисунок Д. 2.4. Вправа на знаходження площі криволінійної трапеції в LearningApps

Wayground URL: <https://wayground.com/admin>

Основні можливості:

1. Створення інтерактивних вікторин, тестів, завдань (quizzes, lessons, interactive videos, passages, flashcards).
2. Різні типи питань: множинний вибір, правда/неправда, заповнення пропусків, опитування (polls), відкриті відповіді, аудіо / відео відповіді та ін.
3. Формат живого режиму («live»), коли всі учні відповідають одночасно під керівництвом учителя, і режим студент- paced, коли учень проходить завдання самостійно в зручний час.

4. Асинхронні завдання / домашка без точного часу або з дедлайнами – для роботи поза класом.
5. Наявність великої бібліотеки готових ресурсів (quizzes, lessons), можливість імпорту готових тестів та змінювати їх під свої потреби.
6. Звіти та аналітика: перегляд результатів по класу, по учню, аналіз слабких місць, експорт звітів.

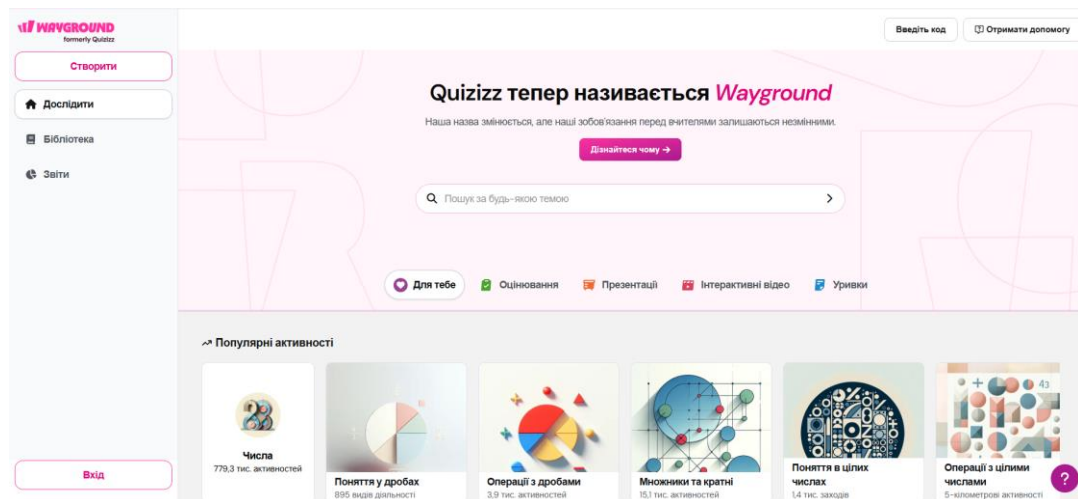


Рисунок Д. 2.5. Інтерфейс Wayground

Kahoot! URL:

https://kahoot.com/?utm_name=controller_app&utm_source=controller&utm_campaign=controller_app&utm_medium=link

Основні можливості:

1. Створення інтерактивних вікторин (quizzes) із різними типами питань: множинний вибір, правда/неправда, відкриті відповіді, пазли (puzzles) тощо.
2. Додавання мультимедійного контенту: зображення, відео (наприклад YouTube), аудіо.
3. Проведення ігор «живцем» (live) у класі або через відеоконференцію; або асинхронні завдання, які учні виконують самостійно (student-paced).
4. Використання шаблонів і банку запитань для швидкого створення контенту.

5. Аналітика та звіти: відслідковування результатів учнів, оцінка прогалин, порівняння класу.

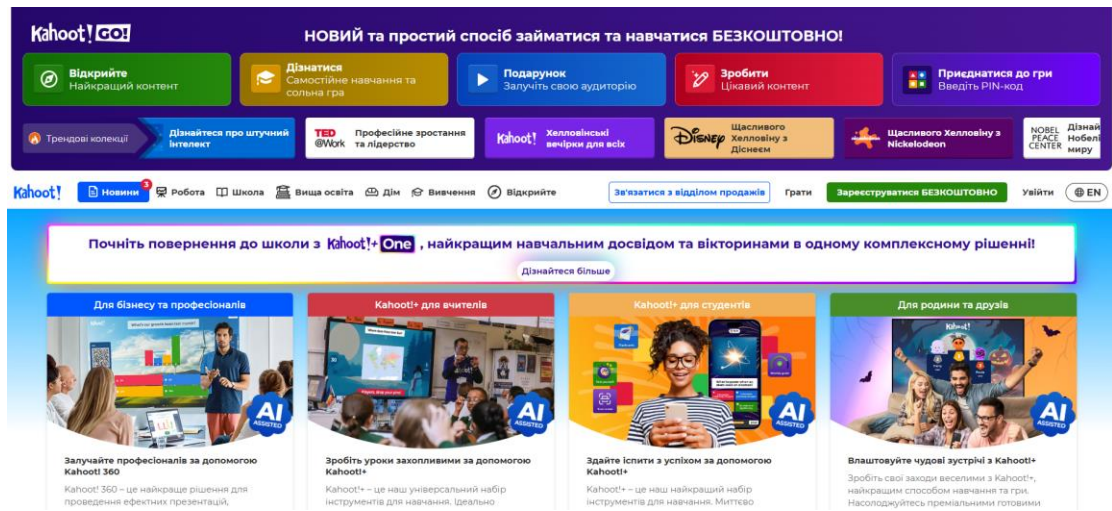


Рисунок Д. 2.6. Інтерфейс Kahoot!

Системи для обчислень та розв'язання задач

WolframAlpha URL: <https://www.wolframalpha.com/>

1. Основні можливості:
2. Розрахунки й обчислення (алгебра, обчислення, статистика, фізика тощо).
3. Обробка природної мови (можливість вводити запитання у звичайній формі, не тільки математичним формулюванням).
4. Побудова графіків, діаграм, візуалізація результатів (2D / 3D).
5. Перетворення одиниць вимірювання, конвертація, робота з величинами.
6. Велика база даних фактів і коефіцієнтів (з різних галузей: наука, географія, економіка, історія, музика тощо).
7. Поступове розкриття розв'язків для математичних задач.

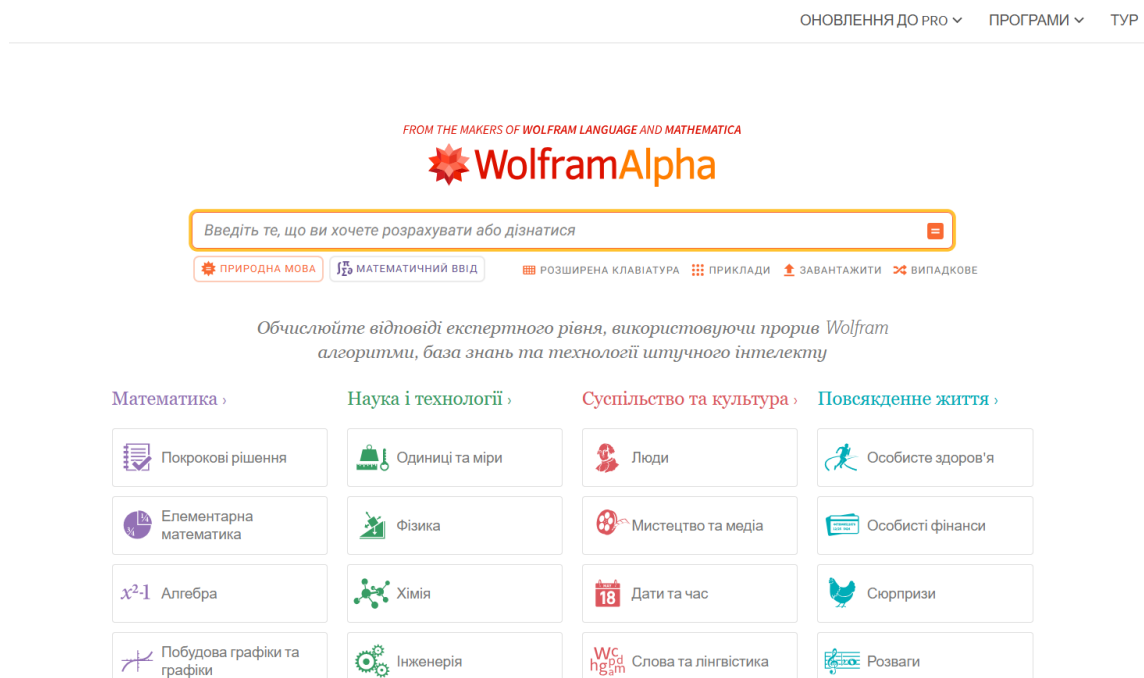


Рисунок Д. 3.1. Інтерфейс WolframAlpha

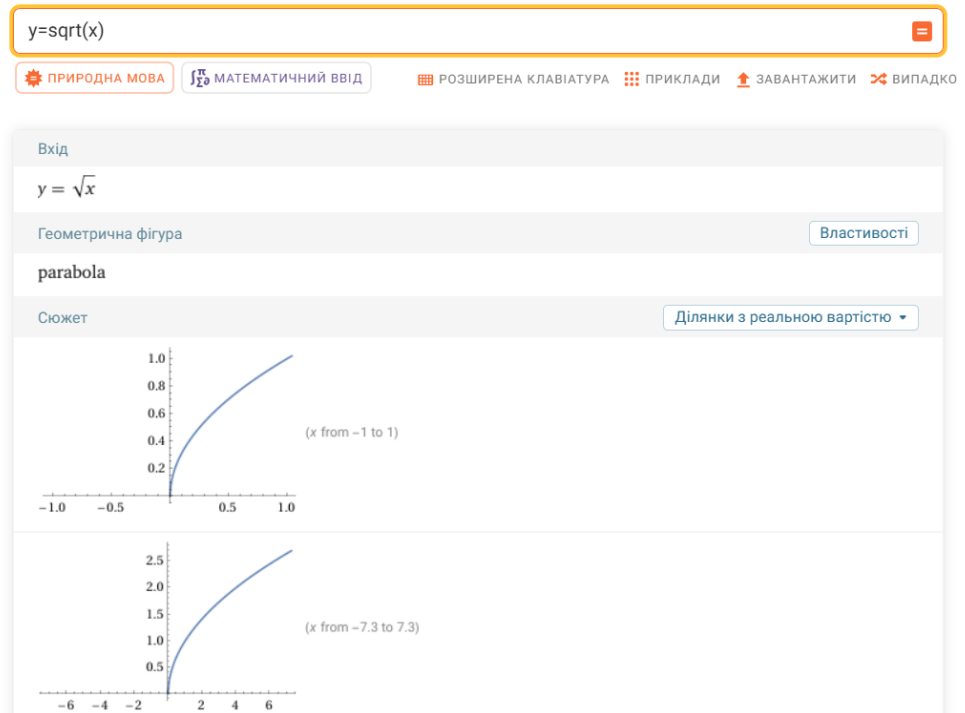
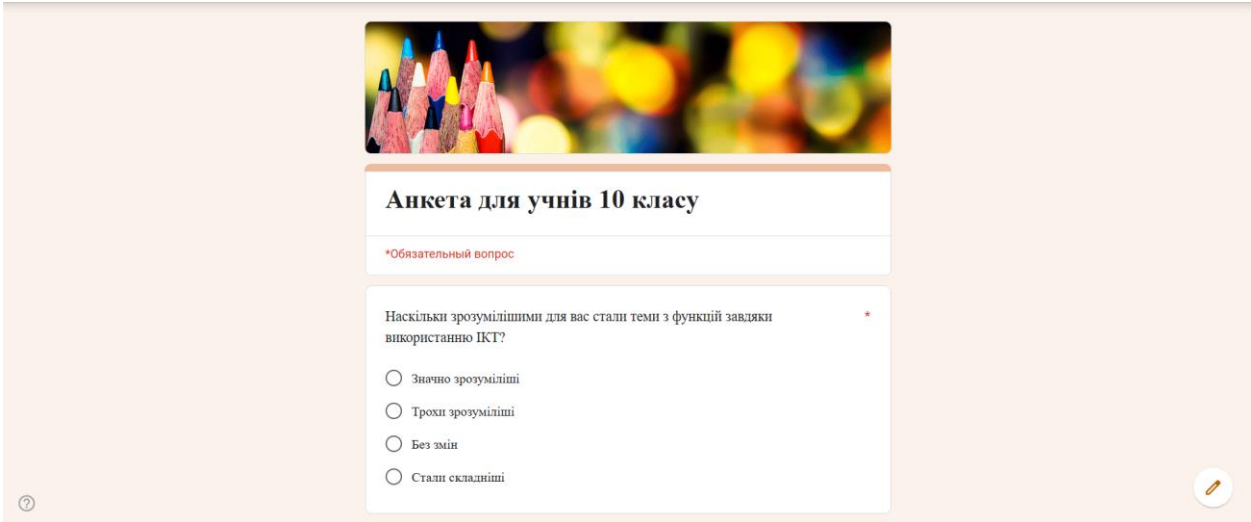


Рисунок Д. 3.2. Побудова графіка функції $y = \sqrt{x}$ в WolframAlpha

Приклад анкети для учнів 10 класу

Покликання: https://docs.google.com/forms/d/1oetKDReIVE33emcEZqw4rwr9TQmt5TQ-vAQmkNN_znY/preview



Анкета для учнів 10 класу

*Обязательный вопрос

Наскільки зрозумілішими для вас стали теми з функцій завдяки використанню ІКТ? *

- ☐ Значно зрозуміліші
- ☐ Трохи зрозуміліші
- ☐ Без змін
- ☐ Стали складніші

1. Наскільки зрозумілішими для вас стали теми з функцій завдяки використанню ІКТ?

- Значно зрозуміліші
- Трохи зрозуміліші
- Без змін
- Стали складніші

2. Які саме інструменти були для вас найбільш корисними у вивченні функцій? (Можна обрати кілька варіантів)

- GeoGebra
- Desmos
- WolframAlpha
- Kahoot! / Wayground
- LearningApps

- Інші (вказіть)

3. Чи допомагає використання ІКТ краще зрозуміти властивості функцій (парність, монотонність, періодичність, область визначення тощо)?

- Так, дуже допомагає
- Частково допомагає
- Не допомагає

4. Чи підвищується ваша зацікавленість у вивченні математики, коли використовуються інтерактивні засоби навчання?

- Так, значно
- Так, але не завжди
- Ні, залишилось без змін

5. Чи зручно вам виконувати практичні та самостійні завдання за допомогою ІКТ (онлайн-графіки, тести, інтерактивні вправи)?

- Дуже зручно
- Загалом зручно
- Незручно

6. Як ви вважаєте, чи допомагає застосування ІКТ підготуватися до контрольних робіт та іспитів (ЗНО/НМТ)?

- Так, однозначно
- Частково
- Ні

7. У якій формі вам найбільше подобається використовувати ІКТ на уроках функцій?

- Для візуалізації графіків

- Для тренувальних вправ
- Для перевірки знань у форматі гри
- Для отримання покрокових рішень
- Інше (вказіть)

8. Що, на вашу думку, потрібно вдосконалити у використанні ІКТ на уроках математики? (відкрите запитання)

9. Чи хотіли б ви, щоб ІКТ застосовувалися частіше на уроках математики?

- Так
- Ні
- Важко відповісти