МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Український державний морський технічний університет
імені адмірала Макарова

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ "НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ"

Рекомендовано Методичною радою УДМТУ

Миколаїв 2002

УДК 658.5.044.18

Зоріна І.А., Літвінова М.Б. Методичні вказівки для виконання контрольних завдань з теми "Невизначений інтеграл". Миколаїв: УДМТУ, 2002. – 40 с.

Кафедра вищої математики

Наведені методичні вказівки можуть бути використані студентами вечірньо-заочної форми навчання для виконання контрольних робіт з теми "Невизначений інтеграл", а також студентами денної форми навчання для індивідуальної роботи та контролю якості знань.

Рецензент д-р фіз.-мат. наук, професор В.К. Баженов

Розділ 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Основні поняття

Якщо маємо функцію $y = f(x)$, то її похідна $f'(x)$, як вже відомо, характеризує швидкість зміни цієї функції із зміною аргументу. Проте дуже часто доводиться розв'язувати обернену задачу: за заданою швидкістю перебігу деякого процесу встановлювати характер самого процесу. У такому випадку з математичної точки зору питання зводиться до знаходження функції за її похідною. Так, якщо в механіці для будь-якого моменту часу дано швидкість $v = v(t)$ і треба знайти залежність пройденого шляху від часу, то, знаючи, що швидкість є похідна функції $s = f(t)$, тобто $f'(t) = v(t)$, для розв'язання такої задачі треба знайти $f(t)$, маючи $f'(t)$.

Розглянемо ще таку геометричну задачу. Знайти рівняння кривої, в кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $2x$. Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = F(x)$ у будь-якій точці дорівнює $\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = 2x$. Ця задача також зводиться до знаходження функції $F(x)$, коли відомо $f(x) = F'(x)$.

Визначення. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для даної функції $f(x)$ на певному проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку підтверджується співвідношення $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ або $F'(x)=f(x)$.

Приклади

1. Функція $F(x)=x^3$ є первісна функції $f(x)=3x^2$, бо $(x^3)'=3x^2$. Але й функція $F(x)=x^3+2$ і, взагалі, функція $F(x)=x^3+C$ при будь-якому значенні сталої C буде первісною функцією для $f(x)=3x^2$, бо $\frac{d}{dx}(x^3+C)=3x^2$.

2. Функція $F(x)=-\cos x$ є первісна функції $f(x)=\sin x$, бо $(-\cos x)'=-(-\sin x)=\sin x$. Але й функція $F(x)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$ і, взагалі, функція $F(x)=-\cos x+C$ при будь-якому значенні сталої C буде первісною функцією для $f(x)=\sin x$, бо $\frac{d}{dx}(-\cos x+C)=\sin x$.

В обох прикладах функція $F(x)+C$ при довільній сталій C також є первісною для $f(x)$, якщо функція $F(x)$ є первісна функції $f(x)$. Це стосується не тільки окремих функцій, а й загального випадку. Справді, оскільки похідна від довільної сталої C дорівнює нулю, то $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)+0=f(x)$.

Отже, якщо $F(x)$ є первісна функції $f(x)$, то є безліч інших первісних функції $f(x)$ виду $F(x)+C$. Постає питання, чи не може мати функція $f(x)$ ще й інших первісних, крім згаданих вище. Відповідь дає наступна теорема:

якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, а $\Phi(x)$ – інша первісна цієї ж функції $f(x)$, то $\Phi(x)=F(x)+C$, де С – деяка стала.

Доведення. З умови теореми відомо, що $F'(x)=f(x)$ і $\Phi'(x)=f(x)$. Розглянемо нову функцію $G(x)=-F(x)+\Phi(x)$. Знайдемо її похідну: $G'(x)=(-F(x)+\Phi(x))'=-F'(x)+$ $+\Phi'(x)=-f(x)+f(x)=0$. На підставі наслідку з теореми Лагранжа $G(x)=C$, звідки $-F(x)+\Phi(x)=C$, тобто $\Phi(x)=F(x)+C$, що і треба було довести.

Визначення. *Невизначеним* інтегралом від даної функції $f(x)$ називається вся множина первісних даної функції $f(x)$ у найбільш загальному виразі $F(x)+C$.

Для невизначеного інтеграла вживають позначення $\int f(x)dx$.

Отже, маємо $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Вираз $f(x)dx$ називається *підінтегральним виразом*, функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, а x називається *змінною інтегрування*. Зауважимо, що під знаком інтегрування стоїть не похідна від $F(x)+C$, а диференціал: $d(F(x)+C)=(F(x)+C)'dx=f(x)dx$.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла, тобто перехід від диференціала деякої функції до самої функції, називають *інтегруванням*.

Приклади

1. $\int 3x^2dx=x^3+C$.

2. $\int(-\cos x)dx=\sin x+C$.

Якщо розглядати інтегрування і диференціювання в широкому розумінні як дії, можна сказати, що дія інтегрування є обернена дії диференціювання і, як більшість обернених дій, вона є многозначна.

Наведемо деякі формули, які водночас є основними властивостями невизначного інтегралу.

I. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$, справді, $d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) =$ $= (F(x)+C)'dx = (F'(x)+0)dx = f(x)dx$. Отже, диференціал від невизначеного інтегралу є підінтегральний вираз.

II. $\int dF(x) = F(x) + C$, справді, якщо $dF(x) = F'(x)dx =$ $= f(x)dx$, то $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$. Отже, інтеграл від диференціала будь-якої функції є та ж сама функція (з точністю до довільної сталої).

III. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, тобто інтеграл від алгебраїчної суми кількох доданків дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від окремих доданків з точністю до довільної сталої.

IV. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

V. $\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ – це формула *заміни змінної*, або *підстановки*. Якщо $u = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – функція, що має неперервну похідну, то ця формула дає можливість інтегрувати складні функції.

Наприклад

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^{x^2}d(x^2) = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C (u = x^2).$$

Щоб успішно застосовувати інтегральне числення при розв'язуванні багатьох задач, слід насамперед оволодіти технікою знаходження невизначених інтегралів від елементарних функцій.

Одним з основних моментів успішного оволодіння технікою інтегрування елементарних функцій є досконале знання *таблиці основних інтегралів*. Ця таблиця є певною сукупністю формул, які треба знати напам'ять. Нижче подаємо цю таблицю, причому справедливість кожної з формул перевіряється диференціюванням її правої частини (це випливає з означення інтеграла).

Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 \cdot du = C$.

2. $\int 1 \cdot du = \int du = u + C$.

3. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, де n – будь-яке дійсне число, крім $n = -1$.

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$, або $\int \dfrac{du}{u} = \ln|Cu| \quad (u \neq 0)$.

5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.

6. $\int e^u du = e^u + C$.

7. $\int \sin u du = -\cos u + C$.

8. $\int \cos u du = \sin u + C$.

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$, де $\cos u \neq 0$.

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$, де $\sin u \neq 0$.

11. $\int \mathrm{tg} u du = -\ln|\cos u| + C$.

12. $\int \mathrm{ctg} u du = \ln|\sin u| + C$.

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{u}{a} + C$.

14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.

15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + k}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 + k} \right| + C$.

16. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$.

Розглянемо основні способи невизначеного інтегрування, що полегшують зведення підінтегральної функції до такого вигляду, який дає змогу в багатьох випадках застосовувати безпосереднє інтегрування.

А. Розкладання на суму

Цей спосіб ґрунтується на III і IV властивостях невизначеного інтегралу.

Приклади

1. $$\int (x^2 - 3x)^2 \, dx = \int (x^4 - 6x^3 + 9x^2) dx = \int x^4 dx - 6 \int x^3 dx +$$

$$+9 \int x^2 dx = \frac{x^5}{5} + C_1 - 6 \cdot \left(\frac{x^4}{4} + C_2 \right) + 9 \cdot \left(\frac{x^3}{3} + C_3 \right) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} +$$

$$+3x^3 + (C_1 - 6\,C_2 + 9\,C_3) = \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{3}{2} x^4 + 3x^3 + C.$$

Зауважимо, що останню рівність ми маємо з огляду на те, що сума трьох довільних сталих є знов-таки довільна стала. В подальшому будемо зразу писати для суми інтегралів одну довільну сталу.

2. $$\int \frac{x^2 - 3\sqrt{x} + 4}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} - 3 \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$=\int\left(x-3x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{x}\right)dx=\int xdx-3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+4\int\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}-3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+$$

$$+4\ln|x|+C==\frac{1}{2}x^2-6\sqrt{x}+4\ln|x|+C.$$

3. $$\int\frac{x^3}{x+2}dx=\int\frac{x^3+8-8}{x+2}dx=\int\left(\frac{x^3+8}{x+2}-\frac{8}{x+2}\right)dx=$$

$$=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx-8\int\frac{dx}{x+2}=\int(x^2-2x+4)dx-$$

$$-8\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\int x^2dx-2\int xdx+4\int dx-8\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{x^3}{3}-$$

$$-2\frac{x^2}{2}+4x-8\ln|x+2|+C=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-8\ln|x+2|+C.$$

Б. Заміна змінної, або підстановка

Цей спосіб ґрунтується на властивості IV невизначеного інтеграла, там же його пояснено на прикладі. Розглянемо ще кілька прикладів:

1. $$\int(2x^2-7)^{\frac{3}{2}}\cdot 4xdx=\int(2x^2-7)^{\frac{3}{2}}d(2x^2-7)=\int u^{\frac{3}{2}}du=$$

$$=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}(2x^2-7)^{\frac{5}{2}}+C.$$

Більш наочний запис цього ж прикладу використовує окреме пояснення, яке наводиться між вертикальними лініями та розкриває зміст змінної u:

$$\int\left(2x^2-7\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 4x\,dx=\left|\begin{array}{l}2x^2-7=u\\ du=\left(2x^2-7\right)'dx\\ du=4x\,dx\end{array}\right|=\int u^{\frac{3}{2}}du=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+$$

$$+C=\frac{2}{5}\left(2x^2-7\right)^{\frac{5}{2}}+C.$$

Ці лінії показують, що ланцюжок рівностей нібито ненадовго переривається.

У подальшому будемо використовувати саме цю форму запису, бо на етапі оволодіння технікою інтегрування вона більш прозора і зрозуміла.

2. $$\int\sin\frac{x}{2}dx=\left|\begin{array}{l}\frac{x}{2}=u\\ du=\frac{1}{2}dx\\ dx=2du\end{array}\right|=\int\sin u\cdot 2du=2\int\sin u\cdot du=$$

$$=-2\cos u+C=-2\cos\frac{x}{2}+C.$$

Зрозуміло, що замість u можно використовувати будь-яку іншу букву.

3. $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{18+x^3}}=\left|\begin{array}{l}18+x^3=t\\ dt=3x^2dx\\ x^2dx=\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{3}dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{t}+C=\frac{2}{3}\sqrt{18+x^3}+C.$$

Окремий, дуже поширений випадок, коли чисельник підінтегрального дробу є похідна від знаменника.

4. $$\int \frac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x+17}dx = \begin{vmatrix} t = x^3-2x^2+x+17 \\ dt = \left(3x^2-4x+1\right)dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^3-2x^2+x+17\right| + C.$$

Інтеграли виду $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ і $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводяться до табличних способом підстановки $x+\frac{b}{2a}=t$. Але краще запам'ятовувати дію, яка приводить до цієї підстановки, а саме – виділення повного квадрату у знаменнику.

5. $$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4+1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u + C = \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

6. $$\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{(3x-2)dx}{x^2+6x+9+4} = \int \frac{3x-2}{(x+3)^2+2^2}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} x+3=t \\ x=t-3 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{3(t-3)-2}{t^2+2^2}dt = \int \frac{3t-11}{t^2+2^2}dt = \int \frac{3tdt}{t^2+4} - 11\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

$$= \begin{vmatrix} t^2+4=u \\ du=2tdt \\ tdt=\frac{1}{2}du \end{vmatrix} = 3\int \frac{\frac{1}{2}du}{u} - 11\int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{3}{2}\ln|u| - \frac{11}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$=\frac{3}{2}\ln(t^2+4)-\frac{11}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+6x+13)-$$
$$-\frac{11}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C.$$

7. $$\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{x^2-8x+13}}=\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2-8x+16-3}}dx=\int\frac{(2x+5)dx}{\sqrt{(x-4)^2-3}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x-4=t \\ x=t+4 \\ dx=dt \end{array}\right|=\int\frac{2(t+4)+5}{\sqrt{t^2-3}}dt=\int\frac{2t+13}{\sqrt{t^2-3}}dt=\int\frac{2tdt}{\sqrt{t^2-3}}+$$

$$+13\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3}}=\left|\begin{array}{l} t^2-3=u \\ du=2tdt \end{array}\right|=\int\frac{du}{\sqrt{u}}+$$

$$+13\ln\left|t+\sqrt{t^2-3}\right|=2\sqrt{u}+13\ln\left|x-4+\sqrt{(x-4)^2-3}\right|+C=$$

$$=2\sqrt{t^2-3}+13\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+13}\right|+C=2\sqrt{x^2-8x+13}+$$

$$+13\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+13}\right|+C.$$

В. Інтегрування частинами

Якщо *u* і *v* позначають дві будь-які диференційовані функції від *x*, то, як відомо, $d(uv)=udv+vdu$, або $udv=d(uv)-vdu$.

Інтегруючи обидві частини цієї тотожності, дістаємо:

$$\int udv=uv-\int vdu.$$

Це і є формула інтегрування частинами.

Приклади

1. $$\int x\sin x\cdot dx=\left|\begin{array}{l} u=x \\ dv=\sin x\cdot dx \\ du=dx \\ v=-\cos x \end{array}\right|=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\cdot dx=-x\cos x+\sin x+C\,.$$

2. $$\int\ln x dx=\left|\begin{array}{l} \ln x=u \\ dx=dv \\ du=\dfrac{dx}{x} \\ v=x \end{array}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=$$

$$=x\ln x-x+C\,.$$

Щоб вибір *u* і *dv* був вдалим, треба запам'ятати, що за *u* треба брати функцію, яка при диференціюванні спрощується, а за *v* – такий диференціал, щоб легко знаходити було первісну.

У деяких випадках формула інтегрування частинами є тільки допоміжною при знаходженні інтеграла, вона приводить до алгебраїчного лінійного рівняння відносно шуканого інтегралу.

3. $$\int e^x\cos 2x\cdot dx=\left|\begin{array}{l} \cos 2x=u \\ dv=e^x dx \\ du=-2\sin 2x\cdot dx \\ v=e^x \end{array}\right|=e^x\cos 2x-$$

$$-\int e^x(-2\sin 2x)dx=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\cdot dx=$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \sin 2x \\ dv = e^x dx \\ du = 2\cos 2x \cdot dx \\ v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos 2x + 2(e^x \sin 2x - \int e^x \cdot 2\cos 2x \cdot dx) =$$

$$= e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4\int e^x \cos 2x \cdot dx.$$

Якщо шуканий інтеграл замінимо буквою I, то маємо рівняння $I = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4I$, звідки $5I = e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x$, тобто

$$I = \frac{e^x \cos 2x + 2e^x \sin 2x}{5} + C.$$

Г. Інтегрування раціональних дробів

Алгебраїчний раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника нижчий, ніж степінь знаменника. Крім того, зауважимо, що сума двох або кількох правильних алгебраїчних дробів завжди буде правильним алгебраїчним дробом (не так, як в арифметиці).

Якщо даний дріб $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ неправильний, то з нього виділяють цілу частину (многочлен), ділячи чисельник на знаменник: $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$.

Як інтегрувати многочлен, ми вже знаємо. Тепер розглянемо інтегрування *правильних раціональних дробів.*

Виявляється, що всякий правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми деякого числа так званих *елементарних* (у розумінні "найпростіших") дробів.

З курсу вищої алгебри відомо, що розклад правильного алгебраїчного дробу на суму елементарних дробів є єдиним. Але метод розкладання не є єдиним. Найчастіше застосовується метод *невизначених коефіцієнтів.*

Застосування цього методу розглянемо на прикладах, але спочатку наведемо загальний вигляд елементарних дробів:

$\frac{A}{(x-a)^n}$, де A, a – дійсні числа, n – натуральне число;

$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, де M, N, p, q – дійсні числа; k – натуральне число, а $D=p^2-4q<0$, тобто розкласти на множники x^2+px+q не можна.

Приклади

1. Розкласти дріб $\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}$ на суму елементарних.

Спочатку визначимо, чи можна розкласти x^2+x+1 на лінійні множники. Для цього обчислимо $D=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$. Отже, розкласти знаменник на більш прості множники неможливо. $\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$. Тут A, B, C, D, E – невизначені коефіцієнти, які треба визначити. Зводячи до спільного знаменника, маємо:

$$\frac{A(x^2+x+1)^2+(Bx+C)(x-2)(x^2+x+1)+(Dx+E)(x-2)}{(x-2)(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{(x-2)(x^2+x+1)^2}\big[A(x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1)+(Bx^2-2Bx+$$

$$+Cx-2C)(x^2+x+1)+Dx^2+Ex-2Dx-2E\big]=$$

$$=\frac{1}{(x-2)(x^2+x+1)^2}\left[Ax^4+2Ax^3+3Ax^2+2Ax+A+Bx^4+Bx^3+\right.$$

$$+Bx^2-2Bx^3-2Bx^2-2Bx+Cx^3+Cx^2+Cx-2Cx^2-2Cx-2C+$$

$$\left.+Dx^2+Ex-2Dx-2E\right].$$

Наш даний дріб і останній рівні між собою і мають рівні знаменники. А звідси ясно, що і чисельники в них повинні бути рівними, тобто

$$2X^4-2X^3+7X^2+5=(A+B)X^4+(2A-B+C)X^3+$$

$$+(3A-B-C+D)X^2+(2A-2B-C+E-2D)x+(A-2C-2E)\,.$$

Але два поліноми рівні в тому випадку, коли в них рівні коефіцієнти при співпадаючих степенях змінної.

У нашому випадку маємо систему:

$$x^4:A+B=2\,;$$

$$x^3:2A-B+C=-2\,;$$

$$x^2:3A-B-C+D=7\,;$$

$$x^1:2A-2B-C-2D+E=0\,;$$

$$x^0:A-2C-2E=5\,;$$

$$A=1,\;B=1,\;C=-3,\;D=2,\;E=1\,.$$

Ця система із п’ятьох рівнянь з п’ятьма невідомими. Розв’язати її можна будь-яким способом.

Підставляючи знайдені числа, маємо остаточно:

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x-2)(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{x-3}{x^2+x+1}+\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

2. Розкласти дріб $\frac{1}{x^2-1}$ на суму елементарних дробів:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)}.$$

З тих же міркувань, що і в попередньому прикладі: $1=(A+B)x+(A-B)$. Отже,

$$\left.\begin{array}{l} x^1 : A+B=0 \\ x^0 : A-B=1 \end{array}\right\}; \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2}, \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Остаточно маємо:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Висновок. Розклад алгебраїчного правильного дробу на елементарні дає змогу інтегрувати кожний правильний алгебраїчний дріб, зводячи задачу до інтегрування лише елементарних дробів.

Розглянемо на прикладах інтегрування елементарних дробів.

Приклади

1. $\int\frac{3dx}{x+4}=3\int\frac{dx}{x+4}=\left|\begin{array}{l} x+4=t \\ dt=dx \end{array}\right|=3\int\frac{dt}{t}=3\ln|t|+C==3\ln|x+4|+C.$

2. $\int\frac{2dx}{(x-3)^3}=2\int\frac{d(x-3)}{(x-3)^3}=2\int a^{-3}da=2\frac{a^{-2}}{-2}+C=\frac{-1}{a^2}+C=$

$$=\frac{-1}{(x-3)^2}+C.$$

3. $$\int\frac{3x+4}{x^2+4x+13}dx=\int\frac{3x+4}{x^2+4x+4+9}dx=\int\frac{3x+4}{(x+2)^2+9}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x+2=t\\ x=t-2\\ dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{3(t-2)+4}{t^2+9}dt=\int\frac{3t-2}{t^2+9}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+9}-2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2+9)}{t^2+9}-2\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{t}{3}=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+9\right|-\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{3}+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+13)-\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+2}{3}+C.$$

В останньому прикладі ми застосували спочатку виділення повного квадрату у знаменнику, а вже потім – звичні методи інтегрування.

Д. Інтегрування деяких тригонометричних функцій

Якщо підінтегральна функція є раціональна функція від тригонометричних функцій, то такий інтеграл завжди можна звести до інтеграла виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, бо, як відомо з шкільного курсу тригонометрії, всі інші тригонометричні функції можна подати через функції $\sin x$ і $\cos x$. Далі, оскільки всі тригонометричні функції визначаються раціонально через тангенс половинного аргументу $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=z$, то маємо *універсальну тригонометричну підстановку:*

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=z,\ \sin x=\frac{2z}{1+z^2},\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}.$$

Приклад

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\left|\begin{array}{l}\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=z\\ z=2\,\mathrm{arctg}\,z\\ dx=\dfrac{2dz}{1+z^2}\\ \cos x=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2dz}{1+z^2}}{3+5\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}=2\int\frac{dz}{3+3z^2+5-5z^2}=$$

$$=2\int\frac{dz}{8-2z^2}=-\int\frac{dz}{z^2-4}=-\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}-2}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+2}\right|+C.$$

Проте, слід зауважити, що замість цієї підстановки $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=z$, на практиці здебільшого застосовують інші підстановки, за допомогою яких швидше можна знайти шукане. Розгляньмо деякі важливі окремі випадки.

1. $\int\sin^m x\cos^n x\cdot dx$, де m і n – цілі.

Якщо m – непарне, то застосовується підстановка $\cos x=t$. Якщо n – непарне, то $\sin x=t$. Якщо ж обидві показники парні, то застосовуємо формули тригонометрії для зниження степеню з переходом до подвійного аргументу: $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ і $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Приклади

1. $$\int\cos^3 x\sin^2 x\cdot dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t\\ dt=\cos x\cdot dx\\ \cos^2 x=1-t^2\end{array}\right|=\int(1-t^2)t^2dt=\int(t^2-t^4)dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C.$$

2. $$\int \sin^2 x\cos^4 x\cdot dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 2x}{4}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\int\frac{\sin^2 2x(1+\cos 2x)dx}{8}=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2x\cdot dx=\left|\begin{array}{l}\text{для другого}\\ \text{інтеграла}\\ \sin 2x=\mathrm{t}\\ dt=2\cos 2x\cdot dx\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int t^2\,\frac{1}{2}dt=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4x\cdot dx+\frac{1}{16}\int t^2 dt=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+$$

$$+\frac{1}{48}t^3+C=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{8}+C.$$

2. $\int\sin mx\cos nx\,dx$; $\int\sin mx\sin nx\,dx$; $\int\cos mx\cos nx\,dx$ – тут використовуються такі формули тригонометрії:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).$$

Приклад

$$\int \sin 5x \cos 3x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x \cdot dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x \cdot dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C\,.$$

Е. Інтегрування деяких ірраціональностей

Інтеграли типу $\int R\left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ зводяться до інтегралів від раціональної функції підстановкою: $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = z$. Справді, тут матимемо $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$, звідки $x = \frac{dz^n - b}{a - cz^n}$ і, отже, $dx = \frac{n(ad-bc)z^{n-1}}{(a-cz^n)^2}dz$.

Приклад

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{x^2} \text{ (припускаємо, що } 0 < x < 1\text{)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = z \quad (z > 1); \\ \frac{1+x}{1-x} = z^2; \quad x = \frac{-1+z^2}{1+z^2}; \quad dx = \frac{4zdz}{(1+z^2)^2} \end{array} \right| = \int \frac{4z^2dz}{(1-z^2)^2} =$$

$$= \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| - \frac{2z}{z^2-1} + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right| + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$ (інтеграл $\int \frac{4z^2dz}{(1-z^2)^2}$ обчислили за правилом інтегрування раціональних дробів).

Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt[n]{x^m}, \sqrt[p]{x^s}, \ldots)dx$ обчислюємо підстановкою $x = z^v$, де v – найменше спільне кратне для всіх показників коренів.

Приклад

$$\int \frac{1+\sqrt[6]{z^6}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \begin{vmatrix} x = z^6 \\ dx = 6z^5dz \end{vmatrix} = \int \frac{1+\sqrt[6]{z^6}}{1+\sqrt[3]{z^6}}\,6z^5dz = \int \frac{1+z}{1+z^2}\,6z^5dz =$$

$$= 6\int \left(z^4 + z^3 - z^2 - z + 1 + \frac{z-1}{1+z^2} \right) dz = 6\left(\frac{z^5}{5} + \frac{z^4}{4} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z + \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \right.$$

$$\left. -\operatorname{arctg} z \right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x}) - .$$

$$-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Інтегрування виразів виду $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ і $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ значно спрощується підстановкою $x = a\sin t$, $x = a\cos t$, $x = a\ \operatorname{tg}\ t$.

Приклад

$$\int \sqrt{9 - x^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = 3\cos t \\ dx = -3\sin t \cdot dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{9 - 9\cos^2 t} \cdot (-3)\sin t \cdot dt =$$

$$= -3\int \sqrt{9(1-\cos^2 t)}\sin t \cdot dt = -9\int \sin^2 t \cdot dt = -\frac{9}{2}\sin 2t - \frac{9}{2}t + C =$$

$$= \frac{9}{4}2\sin t\cos t - \frac{9}{2}t + C = \frac{9}{2}\sqrt{1-\cos^2 t} \cdot \cos t - \frac{9}{2}t + C =$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}\,\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} + C = \frac{9}{2}\frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2} \cdot \frac{x}{3} - \frac{9}{2}\arccos\frac{x}{3} + C.$$

Інтеграли біноміальних ірраціональностей – це інтеграли виду $\int x^m (a + bx^n)^p\,dx$, де *m, n, p* – раціональні числа, $a \neq 0, b \neq 0$. Вкажемо три випадки, в яких біноміальний інтеграл обчислюється в скінченому вигляді:

1. p – ціле число. В цьому разі розкладаємо другий множник за формулою бінома Ньютона і отримуємо інтеграл, що вже вміємо обчислювати

2. $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число. Інтегрування можливе при підстановці $a+bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p.

3. $\dfrac{m+1}{n}+p$ – ціле число. У цьому випадку використовуємо підстановку $ax^{-n}+b=t^s$, де s знов таки знаменник дробу p.

Приклади

1. $$\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}} = \int x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} m=\frac{1}{3}; n=\frac{1}{3}; p=-\frac{1}{2}; \\ \frac{m+1}{n} = 4 - \text{ціле}; \\ 1+\mathrm{x}^{\frac{1}{3}} = t^2; \sqrt[3]{x} = t^2-1; x=(t^2-1)^3; \\ dx = 6t(t^2-1)^2\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^2-1)(t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6t(t^2-1)^2\, dt = 6\int (t^2-1)^3\, dt =$$

$$= 6\int (t^6-3t^4+3t^2-1)dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{18}{5}t^5 + 6t^3 - 6t + C =$$

$$= \frac{6}{7}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^7} - \frac{18}{5}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^5} + 6\sqrt{(1+\sqrt[3]{x})^3} - 6\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l} m=-4,\, n=2,\, p=-\dfrac{1}{2},\, \dfrac{m+1}{n}+p=-2-\text{ціле}; \\ x^{-2}+1=t^{2};\, x=(t^{2}-1)^{-\frac{1}{2}}; \\ x^{2}=\dfrac{1}{t^{2}-1};\, dx=-t(t^{2}-1)^{-\frac{3}{2}}dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\left((t^{2}-1)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-4}\left(1+\frac{1}{t^{2}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}(-t)(t^{2}-1)^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=\int(t^{2}-1)^{2}\left(\frac{t^{2}}{t^{2}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}(-t)(t^{2}-1)^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=\int(1-t^{2})dt=t-\frac{t^{3}}{3}+C=\frac{\sqrt{1+x^{2}}}{x}-\frac{\sqrt{(1+x^{2})^{3}}}{3x^{3}}+C\,.$$

Всі розглянуті випадки дають змогу інтегрувати достатньо широкий клас функцій. В наступному розділі наведені типові інтеграли. Для легшого орієнтування зауважимо, що в кожному варіанті перші п'ять прикладів розраховані на застосування таблиці, розкладання на суму та методу підстановки. Шостий і сьомий приклади інтегруються частинами. З восьмого до десятого – треба підінтегральну функцію представити у вигляді суми елементарних дробів. Приклади з одинадцятого до тринадцятого – це інтегрування деяких тригонометричних функцій. Решта – інтеграли від ірраціональних виразів.

Розділ 2. ВАРІАНТИ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Обчислити невизначений інтеграл

Варіант 1

1. $\int\left(\frac{1}{x^3}-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x+5}\right)dx$. 2. $\int\frac{2x-1}{x+5}\,dx$. 3. $\int x\left(2x^2-5\right)^3 dx$.

4. $\int e^{-3x}\,dx$. 5. $\int\sqrt{4x-1}\,dx$. 6. $\int x^2\cos 2x\,dx$.

7. $\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx$. 8. $\int\frac{x^2\,dx}{1-x^3}$. 9. $\int\frac{2x-1}{x^2+2x+10}\,dx$.

10. $\int\frac{x^3}{x-2}\,dx$. 11. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$. 12. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$.

13. $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$. 14. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$. 15. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

16. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$. 17. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

Варіант 2

1. $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)dx$. 2. $\int\frac{3x-7}{6x+2}\,dx$. 3. $\int x^3\left(x^4-12\right)^8 dx$.

4. $\int\sqrt{12x-1}\,dx$. 5. $\int\cos\frac{x}{2}\,dx$. 6. $\int x^3\ln x\,dx$.

7. $\int x\cdot\cos x\cdot dx$. 8. $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$. 9. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

10. $\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx$. 11. $\int\sin^5 x\cos^5 x\cdot dx$. 12. $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$.

13. $\int \mathrm{tg}^5 x \; dx$. 14. $\int \frac{2x}{\sqrt{x+2}+1}\,dx$. 15. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

16. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$. 17. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

Варіант 3

1. $\int \frac{x^3-x^2-x+1}{x\sqrt{x}}dx$. 2. $\int \frac{2x-4}{x+1}\,dx$. 3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+7}}$.

4. $\int \frac{1+\cos x}{\sin x + x}\,dx$. 5. $\int \sin\frac{3x-1}{2}\,dx$. 6. $\int x e^{-x}dx$.

7. $\int x^2 \sin 2x \cdot dx$. 8. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

9. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$. 10. $\int \frac{x^4}{x^2-x}\,dx$. 11. $\int \frac{\sin^2 x\,dx}{1+\sin^2 x}$.

12. $\int \sin^3 2x \cos^2 2x \cdot dx$. 13. $\int \left(1+\sin\frac{x}{2}\right)^3 dx$. 14. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$.

15. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$. 16. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$. 17. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

Варіант 4

1. $\int \left(e^{-x}+e^x+\frac{1}{x^2}\right)dx$. 2. $\int \frac{2x}{x-3}dx$. 3. $\int \mathrm{tg}x\,dx$.

4. $\int \sqrt[3]{3x+2}\,dx$. 5. $\int \frac{1+\ln^3 x}{x}\,dx$. 6. $\int e^x \sin 2x \cdot dx$

7. $\int \ln x \cdot dx$. 8. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+2)}$. 9. $\int \frac{x^2\,dx}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$.

10. $\int \frac{x^5}{x^2-1}\, dx$. 11. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cos x}$. 12. $\int \sin^2 2x \cos^4 x \cdot dx$.

13. $\int \operatorname{ctg}^6 x \, dx$. 14. $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1-\sqrt[3]{x+5}}\, dx$. 15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$.

16. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$. 17. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

Варіант 5

1. $\int \left(\sin x - e^{-x} + \frac{1}{x^6} \right) dx$. 2. $\int \frac{3x-2}{x+1}\, dx$. 3. $\int \operatorname{ctgx} \, dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{6x-1}}$. 5. $\int x^2 \cos x^3 dx$. 6. $\int \operatorname{arcctg} x \, dx$.

7. $\int e^{2x} \cos x \cdot dx$. 8. $\int \frac{x^2+2}{x(x-1)^2} dx$. 9. $\int \frac{x^4+1}{x^2-5x+6} dx$.

10. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\, dx$. 11. $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$. 12. $\int \cos^2 x \sin^3 x \cdot dx$.

13. $\int (\sin x + \cos x)^3 dx$. 14. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\, dx$. 15. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $\int \frac{x^{10}\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 17. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$.

Варіант 6

1. $\int \left(\cos x + 2\sin x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$. 2. $\int \frac{12x}{3x+5} dx$. 3. $\int \frac{8+2x}{x^2+8x-1} dx$.

4. $\int \sqrt{3x-17}\, dx$. 5. $\int x^5 \operatorname{tg} x^6 dx$. 6. $\int \arccos x \cdot dx$.

7. $\int e^{-x} \sin x \cdot dx$. 8. $\int \frac{3+x}{9(x+1)(x-3)} dx$.

9. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$. 10. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

11. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$. 12. $\int \frac{\sin^2 x \cdot dx}{\sin x + 2\cos x}$. 13. $\int \cos 2x \cdot \cos^2 5x \cdot dx$.

14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$. 15. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$. 16. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

17. $\int \sqrt[3]{3x-x^3} \, dx$.

Варіант 7

1. $\int \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} \right) dx$. 2. $\int \frac{x}{3x+6}dx$. 3. $\int \sqrt[6]{(7x+5)^5}\, dx$.

4. $\int x \sin x^2 \, dx$. 5. $\int \frac{e^x \, dx}{e^x+3}$. 6. $\int xe^{-x} dx$.

7. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$. 8. $\int \frac{3x+2}{x^4+2x^2}dx$. 9. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

10. $\int \frac{x^5}{x^3-1}dx$. 11. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. 12. $\int \cos^6 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$.

13. $\int \sin 3x \cdot \cos^2 4x \cdot dx$. 14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$. 15. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{1-2\sqrt{x}}$.

16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. 17. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Варіант 8

1. $\int \frac{x^3+x^2\sqrt{x}-1}{x^4}dx$. 2. $\int \frac{3x}{x+7}dx$. 3. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$.

4. $\int \sqrt[7]{(2x-1)^3}\, dx$. 5. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+5)}$. 6. $\int e^x \sin 3x \, dx$.

7. $\int x^2 \ln x \cdot dx$. 8. $\int \frac{2x-1}{x^4-1} dx$. 9. $\int \frac{x^6}{x^2+1} dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$. 11. $\int \mathrm{tg}^6 x \cdot dx$.

12. $\int \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{3} \cdot dx$. 13. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\cdot \sin x}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (x-1)^4}}$. 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$. 16. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}$.

17. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

Варіант 9

1. $\int \left(x+\sqrt{x}\right)^3 dx$. 2. $\int \frac{e^x \, dx}{e^x+5}$. 3. $\int \sqrt{6x+5} \, dx$.

4. $\int \frac{1+\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$. 5. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+1} dx$. 6. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$.

7. $\int x e^x \, dx$. 8. $\int \frac{x^3+4x}{x^2-9} dx$. 9. $\int \frac{2x+4}{x^3-3x^2+2x} dx$.

10. $\int \frac{dx}{(x+1)x(1+x+x^2)}$. 11. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

12. $\int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot dx$. 13. $\int \sin x \cdot \sin(x+2) dx$. 14. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$. 16. $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}$. 17. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 \sqrt{x}}$.

Варіант 10

1. $\int \left(\frac{1}{x^3} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x+5}\right) dx$. 2. $\int \frac{3x-7}{6x+2} dx$. 3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+7}}$.

4. $\int\sqrt[3]{3x+2}\,dx$. 5. $\int x^2\cos x^3\,dx$. 6. $\int \arccos x\cdot dx$.

7. $\int x\cdot \mathrm{arctg}x\,dx$. 8. $\int\frac{2x-1}{x^4-1}dx$. 9. $\int\frac{2x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$.

10. $\int\frac{x^5}{x^2-1}dx$. 11. $\int\frac{dx}{1+2\cos x}$. 12. $\int\sin^2 x\cos^3 x\cdot dx$.

13. $\int\sin 3x\cdot\cos 4x\cdot\sin x\cdot dx$. 14. $\int\frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

15. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$. 16. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$. 17. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Варіант 11

1. $\int\left(\frac{1}{x^3}-\sqrt[4]{x}+\frac{1}{x+2}\right)dx$. 2. $\int\frac{2x-1}{x+5}dx$. 3. $x^3\left(x^4-12\right)^8 dx$.

4. $\int\sqrt{12x-1}\,dx$. 5. $\int\cos\frac{x}{2}dx$. 6. $\int xe^{-x}dx$.

7. $\int x^2(\sin 2x)dx$. 8. $\int\frac{x\ dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 9. $\int\frac{x^2\ dx}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$.

10. $\int\frac{x^5}{x^2-1}dx$. 11. $\int\frac{dx}{(1+\sin x)\cos x}$. 12. $\int\cos^2 x\cdot\sin^3 x\cdot dx$.

13. $\int(\sin x+\cos x)^3 dx$. 14. $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$. 15. $\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

16. $\int\frac{x^3\ dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 17. $\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$. 16. $\int\frac{x^3\ dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Варіант 12

1. $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)dx$. 2. $\int\frac{3x-7}{6x+2}dx$. 3. $\int\frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+7}}$.

4. $\int\frac{1+\cos x}{\sin x+x}dx$. 5. $\int\sin\frac{3x-1}{2}dx$. 6. $\int e^x\sin 2x dx$.

7. $\int \ln x \ dx$.

8. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+2)}$.

9. $\int \frac{x^4+1}{x^2-5x+6}dx$.

10. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

11. $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$.

12. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$.

13. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$.

14. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

16. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Варіант 13

1. $\int \frac{x^3-x^2-x+1}{x\sqrt{x}}\,dx$.

2. $\int \frac{2x-4}{x+1}dx$.

3. $\int \mathrm{tg}x \ dx$.

4. $\int \sqrt[3]{3x+2}\ dx$.

5. $\int \frac{1+\ln^3 x}{x}dx$.

6. $\int \mathrm{arcctg}x \ dx$.

7. $\int e^{2x}\cos x \ dx$.

8. $\int \frac{x^2+2}{x(x-1)^2}dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

10. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

11. $\int \sin 2x \cdot \cos^2 3x \cdot dx$.

12. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

13. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$.

14. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\ dx$.

15. $\int \frac{2x\ dx}{\sqrt{x+2}+1}$.

16. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

17. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

Варіант 14

1. $\int \left(e^{-x}+e^{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

2. $\int \frac{2x}{x-3}dx$.

3. $\int \mathrm{ctg}x \ dx$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{6x-1}}$.

5. $\int x^2\cos x^3 \ dx$.

6. $\int \arccos x \cdot dx$.

7. $\int e^{-x}\sin x \ dx$.

8. $\int \frac{(3+x)\ dx}{9(x+1)(x-3)}$.

9. $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+10}dx$.

10. $\int \frac{x^3}{x-2} dx$. 11. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$. 12. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

13. $\int \mathrm{tg}^5 x \ dx$. 14. $\int \frac{2x}{\sqrt{x+2}+1} dx$. 15. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx$.

16. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}$. 17. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx$.

Варіант 15

1. $\int \left(\sin x + e^{-x} + \frac{1}{x^6} \right) dx$. 2. $\int \frac{3x-2}{x+1} dx$. 3. $\int \frac{8+2x}{x^2+8x-1} dx$.

4. $\int \sqrt{3x-17} dx$. 5. $\int x^5 tgx^6 \ dx$. 6. $\int x^2 \cos 2x \ dx$.

7. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$. 8. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^3}$. 9. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

10. $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2} dx$. 11. $\int \sin^5 x \cos^5 x \, dx$. 12. $\int (\sin^3 2x \cdot \cos^2 2x) dx$.

13. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$. 14. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{x}}$. 15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$.

16. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}}$. 17. $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^6}}$.

Варіант 16

1. $\int \left(\cos x + 2\sin x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$. 2. $\int \frac{12x}{3x+5} dx$. 3. $\int x\left(2x^2-5\right)^3 dx$.

4. $\int e^{-3x} \ dx$. 5. $\int \sqrt{4x-1} dx$. 6. $\int x^3 \ln x \ dx$.

7. $\int x \cos x \, dx$. 8. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$. 9. $\int \frac{x \ dx}{(x-1)^2 \left(x^2+2x+2\right)}$.

10. $\int \frac{x^4}{x^2-x} dx$. 11. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} dx$. 12. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^4 x \cdot dx$.

13. $\int \operatorname{ctg}^6 x\ dx$.

14. $\int \frac{\sqrt{x+5}}{1-\sqrt[3]{x+5}}dx$.

15. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

17. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

Варіант 17

1. $\int \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} \right) dx$.

2. $\int \frac{x}{3x+6}dx$.

3. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$.

4. $\int \sqrt[7]{(2x-1)^3}\ dx$.

5. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x+5)}$.

6. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$.

7. $\int xe^x\ dx$.

8. $\int \frac{x^3+4x}{x^2-9}dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

10. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

11. $\int \sin 2x \cdot \cos^2 3x \cdot dx$.

12. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cos x}$.

13. $\int (\sin x+\cos x)^3\, dx$.

14. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$.

15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

16. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Варіант 18

1. $\int \frac{x^3+x^2\sqrt{x}-1}{x^4}dx$.

2. $\int \frac{3x}{x+7}dx$.

3. $\int \sqrt{6x+5}dx$.

4. $\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx$.

5. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+1}dx$.

6. $\int e^{2x}\cos x\ dx$.

7. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\ dx$.

8. $\int \frac{x^6}{x^2-1}dx$.

9. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2-3x+2)^2}$.

10. $\int \frac{x\ dx}{x^2+2x+2}$.

11. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)\cos x}$.

12. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$.

13. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$.

14. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$.

15. $\int\frac{\sqrt{x}\ \ dx}{1-2\sqrt{x}}$.

16. $\int\frac{x\ \ dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

17. $\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Варіант 19

1. $\int\left(x+\sqrt{x}\right)^3 dx$.

2. $\int\frac{e^x\ \ dx}{e^x+5}$.

3. $\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx$.

4. $\int\frac{x}{x^2+3}dx$.

5. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$.

6. $\int xe^{-x}\ \ dx$.

7. $\int x^2\sin 2x\ \ dx$.

8. $\int\frac{x\ \ dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

9. $\int\frac{x^4+1}{x^2-5x+6}dx$.

10. $\int\frac{x^2+5x-4}{x^4+5x^2+4}dx$.

11. $\int\frac{dx}{1+2\cos x}$.

12. $\int\cos^6 x\cdot\sin^3 x\cdot dx$.

13. $\int\sin 3x\cdot\cos^2 4x\cdot dx$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.

16. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

17. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

Варіант 20

1. $\int\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{x}}dx$.

2. $\int\frac{x+5}{2x+4}dx$.

3. $\int x^3\left(x^4-12\right)^8 dx$.

4. $\int\sqrt{12x-1}\ \ dx$.

5. $\int\cos\frac{x}{2}dx$.

6. $\int e^x\sin 2x\ \ dx$.

7. $\int\ln x\ \ dx$.

8. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)(x+2)}$.

9. $\int\frac{x\ \ dx}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}$.

10. $\int\frac{x^5}{x^3-1}dx$.

11. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

12. $\int\sin x\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot dx$.

13. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$. 14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$. 15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$.

16. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$. 17. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3\sqrt{x}}$.

Варіант 21

1. $\int\left(\frac{1}{x^3}-\sqrt[4]{x}+\frac{1}{x+2}\right)dx$. 2. $\int \frac{2x-1}{x+5}dx$. 3. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2+7}}$.

4. $\int \frac{1+\cos x}{\sin x+x}dx$. 5. $\int \sin\frac{3x-1}{2}dx$. 6. $\int xe^{-x}dx$.

7. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\ \ dx$. 8. $\int \frac{3x+2}{x^4+2x^2}dx$. 9. $\int \frac{x^6}{x^2+1}dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$. 11. $\int \mathrm{tg}^6 x\ dx$.

12. $\int \cos^2 x\cdot\sin^4 x\cdot dx$. 13. $\int \sin x\cdot\sin(x+2)\cdot dx$. 14. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

15. $\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 16. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$. 17. $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$.

Варіант 22

1. $\int\left(\frac{1}{x^4}-\frac{e^{2x}-1}{e^x}\right)dx$. 2. $\int \frac{3x-7}{6x+2}dx$. 3. $\int \sqrt[6]{(7x+5)^5}\ \ dx$.

4. $\int x\sin x^2\ \ dx$. 5. $\int \frac{e^x}{e^x+3}dx$. 6. $\int e^x\sin 3x\ \ dx$.

7. $\int x^2\ln x\ \ dx$. 8. $\int \frac{2x-1}{x^4-1}dx$. 9. $\int \frac{2x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$.

10. $\int \frac{dx}{(x+1)x(x^2+x+1)}$. 11. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

12. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$. 13. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$.

14. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$. 15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 16. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^3}} dx$.

17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx$.

Варіант 23

1. $\int \left(\frac{1}{x^5} - e^{-x} + 3\cos x \right) dx$. 2. $\int \frac{3x-5}{6x+2} dx$. 3. $\int \operatorname{tg} x \ dx$.

4. $\int \sqrt[3]{3x+2} \ dx$. 5. $\int \frac{1+\ln^3 x}{x} dx$. 6. $\int \arccos x \ dx$.

7. $\int e^{-x} \sin x \ dx$. 8. $\int \frac{3+x}{9(x+1)(x-3)} dx$. 9. $\int \frac{x^6}{x^2+1} dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}$. 11. $\int \operatorname{tg}^6 x \ dx$.

12. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x} dx$. 13. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \cdot dx$.

14. $\int \frac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}$. 15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 16. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$.

17. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} \ dx$.

Варіант 24

1. $\int \left(e^x - e^{-x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$. 2. $\int \frac{2x}{x-3} dx$. 3. $\int \frac{8+2x}{x^2+8x-1} dx$.

4. $\int (2x-17)^{16} \ dx$. 5. $\int x^5 \operatorname{tg} x^6 \, dx$. 6. $\int \arccos x \ dx$.

7. $\int e^x \cos 3x \ dx$. 8. $\int \frac{2x-1}{x^4-1} dx$. 9. $\int \frac{x^6}{x^2-1} dx$.

10. $\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$. 11. $\int \sin 2x \cdot \cos^2 3x \cdot dx$.

12. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} dx$. 13. $\int \mathrm{ctg}^2 x \; dx$. 14. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$.

15. $\int \frac{2x \; dx}{\sqrt{x+2}+1}$. 16. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[5]{x^2+2x}}$. 17. $\int \sqrt{x^3+x^4} \; dx$.

Варіант 25

1. $\int \left(\cos x + 2\cos x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$. 2. $\int \frac{12x}{3x+5} dx$. 3. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx$.

4. $\int \sqrt[7]{(2x-1)^3} dx$. 5. $\int \frac{dx}{x(\ln^2 x + 5)}$. 6. $\int e^{2x} \cos x \; dx$.

7. $\int x^2 \mathrm{arctg} x \; dx$. 8. $\int \frac{x^6}{x^2-1} dx$. 9. $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+10} dx$.

10. $\int \frac{x^3}{x-2} dx$. 11. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$. 12. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

13. $\int \mathrm{tg}^5 x \; dx$. 14. $\int \frac{2x}{\sqrt{x+2}+1} dx$. 15. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}$.

16. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}}$. 17. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А., Позняк Е.Г.* Основы математического анализа. – М.: Наука, 1982.
2. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989.
3. *Смирнов В.І.* Курс вищої математики. – К.: Державне видавництво технічної літератури УРСР, 1954. – Т. 1.
4. *Шестаков А.А., Малышева И.А., Полозков Д.П.* Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1987.
5. *Шиманський І.Є.* Математичний аналіз. – К.: Вища школа, 1972.

Ірина Анатоліївна ЗОРІНА
Марина Борисівна ЛІТВІНОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ
"НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ"

Редактор О.С. Кирилюк
Комп’ютерна правка Т.В. Митрохіна, А.Й. Тріщ
Комп’ютерна верстка Т.М. Чередніченко
Коректор Н.О. Шайкіна

Підписано до друку 27.09.2002. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 2,2. Обл.-вид. арк. 2,4. Тираж 200 прим. Вид. № 9.
Зам. № 263. Ціна договірна
Видавництво УДМТУ, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

ВИДАВНИЦТВО УКРА НСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО МОРСЬКОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Шановні панове!

Запрошуємо вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого дозволяють оперативно і якісно виконати замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника у повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригінал-макету, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублікатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати ***підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки,*** *– ми до ваших послуг.*

✉ Україна, 54002, м.Миколаїв, вул.Скороходова, 5,
видавництво УДМТУ
☎ 8(0512) 37-33-42; 39-81-46, 39-73-39, fax 8(0512) 39-73-26;
E-mail: publishing@usmtu.edu.ua