

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**С. Б. ПРИХОДЬКО, Л. М. МАКАРОВА,
К. С. ПУГАЧЕНКО**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ЗАВДАННЯ
до виконання лабораторних робіт з дисципліни
"Обробка експериментальних даних на комп'ютері"**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв • НУК • 2018

УДК 004.4(076)

П 77

Автори: С. Б. Приходько, д-р техн. наук, професор;
Л. М. Макарова, канд. техн. наук;
К. С. Пугаченко, канд. техн. наук

Рецензент І. І. Коваленко, д-р техн. наук, професор

Приходько С. Б.

П 77 Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт з дисципліни "Обробка експериментальних даних на комп'ютері" / С. Б. Приходько, Л. М. Макарова, К. С. Пугаченко. – Миколаїв : НУК, 2018. – 76 с.

Методичні вказівки призначені для студентів четвертого курсу спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення" і 122 "Комп'ютерні науки", які вивчають дисципліну "Обробка експериментальних даних на комп'ютері". Також можуть бути корисними магістрам, аспірантам і усім тим, кому потрібно провести первинну обробку та здійснити вибір аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних, знайти оцінки кореляційної функції, спектральної щільності і параметрів моделі стаціонарного випадкового процесу.

УДК 004.4(076)

© Приходько С. Б., Макарова Л. М.,
Пугаченко К. С., 2018

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

ПЕРЕДМОВА

У Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова (НУК) дисципліна "Обробка експериментальних даних на комп'ютері" вивчається студентами спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення" і 122 "Комп'ютерні науки" у восьмому семестрі. Вона відноситься до циклу дисциплін вільного вибору студентів при підготовці бакалаврів.

Ці методичні вказівки мають допомогти студентам четвертого курсу зазначених спеціальностей у підготовці та виконанні лабораторних робіт з дисципліни "Обробка експериментальних даних на комп'ютері". Вони містять завдання для лабораторних робіт, стислий виклад теоретичних відомостей, етапи виконання робіт та контрольні запитання. В порівнянні з [13] ці методичні вказівки перероблено та доповнено деякими новими теоретичними відомостями.

При виконанні кожної лабораторної роботи рекомендується:

- засвоїти теоретичні відомості;
- розібратися з завданням та етапами виконання роботи;
- виконати запропоновані завдання та оформити звіт з роботи;
- перевірити повноту розуміння теми за допомогою контрольних запитань, розташованих у кінці кожної роботи.

Лабораторну роботу необхідно виконувати відповідно за наведеними етапами виконання роботи. Звіт про лабораторну роботу оформлюється кожним студентом індивідуально. Звіт повинен містити: назву і мету роботи; завдання (постановку задачі); методику й алгоритм розв'язання задачі; текст програми (у разі якщо використовується оригінальна програма); результати роботи; аналіз результатів та висновки. Текст програми бажано розміщувати у додатку.

ВСТУП

Процес збору і обробки даних при проведенні фізичного експерименту можна умовно поділити на три етапи:

- збір даних;
- аналіз даних;
- подання даних.

Для кожного етапу використовуються спеціальні апаратні і програмні засоби, які, як правило, називають підсистемами, а систему, до якої вони входять – системою збору і обробки даних. Зазначимо, що на відповідному етапі може використовуватися одна або декілька таких підсистем.

На першому етапі зазвичай відбувається так зване кондиціювання (нормалізація) аналогових сигналів (посилення, фільтрація, комутація і т.п.) та їх подальше перетворення. Всі операції на цьому етапі, як правило, здійснюються за допомогою підсистем кондиціювання (нормалізації) і перетворення. Основною задачею підсистеми кондиціювання є доведення параметрів сигналу, які отримують від первинних перетворювачів, до значень, які є прийнятними для використання підсистемою перетворення даних. У свою чергу, остання виконує безпосереднє аналого-цифрове перетворення аналогових сигналів і, в деяких випадках, тимчасове зберігання отриманих даних.

На другому етапі виконується первинний аналіз (обробка) даних і, в деяких випадках, управління процесом проведення експерименту. Усі дії на цьому етапі здійснюються за допомогою підсистем аналізу (обробки) даних і управління проведенням експерименту. Первинний аналіз даних здійснюється за алгоритмами, які є особливими для кожного оригінального експерименту. Тут, як правило, використовують методи цифрової фільтрації, швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) та (або) інші статистичні методи. При такому первинному аналізі (обробці) даних досить часто застосовують спеціалізовані цифрові сигнальні процесори DSP (Digital Signal Processor). Зазначимо, що при проведенні будь-якого експерименту потрібно контролювати можливу появу грубих помилок у даних. Це стосується і різноманітних систем (наприклад, навігаційних), на вхід яких надходить аналогова інформація, потім перетворюється і передається по лінії зв'язку для подальшого аналізу. Ось чому саме первинній обробці експериментальних даних присвячена лабораторна робота №1. Крім того, саме інформація про наявність грубих помилок у даних потрібна для підсистеми управління проведенням експерименту.

На третьому етапі здійснюється представлення отриманих результатів у вигляді графіків, діаграм або таблиць. На цьому етапі відбувається як оперативна візуалізація, так і документування отриманих результатів. Це робиться за допомогою підсистем візуалізації і документування. Як правило, для обробки даних з наступною візуалізацією і документуванням результатів використовується різноманітне програмне забезпечення, наприклад, LabView, MatLab, Scilab, Systat, WinStat, Statistica, Statgraphics, Stadia, Excel. Зокрема, Scilab (<http://www.scilab.org>) є програмним пакетом для наукових обчислень, що вільно розповсюджується. Він є певною альтернативою комерційним пакетам MatLab/Simulink та MATRIXx/SystemBuild.

Лабораторна робота № 1

Первинна обробка експериментальних даних

Мета роботи: набути практичні навички первинної обробки експериментальних даних з використанням комп'ютера.

Завдання: виконати первинну обробку експериментальних даних, які наведені у файлі. (Примітка: файл зі значеннями випадкової величини в залежності від варіанта видає викладач).

Загальні теоретичні відомості

У разі прямих вимірів первинну обробку експериментальних даних виконують у наступному порядку:

1) Визначають вибіркове середнє $\bar{x}$ (точкову оцінку математичного сподівання) n результатів спостережень x_i ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2) Визначають вибірккову дисперсію S_x^2 (незміщену точкову оцінку дисперсії) та точкову оцінку середнього квадратичного відхилення $\hat{\sigma}_x$:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 ;$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{S_x^2}.$$

3) Визначають оцінку середнього квадратичного відхилення результату виміру:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{n}}.$$

4) Перевіряють нормальність закону розподілу результатів спостережень.

5) Для заданого значення довірчої ймовірності знаходять довірчу похибку результату виміру та довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення.

6) Визначають наявність грубих помилок і промахів та, якщо останні знайдені, відповідні результати відкидають і повторюють обчислення.

У випадку непрямих вимірів шукане значення випадкової величини, яка вимірюється, обчислюється за результатами прямих вимірів величин, зв'язаних з шуканою визначеною функціональною залежністю.

Окремий результат у випадку багаторазового прямого виміру фізичної величини через наявність випадкових похибок представляє собою випадкову величину.

Нагадаємо деякі відомості з теорії ймовірностей. Під випадковою величиною розуміють величину, яка у результаті досліду з випадковим результатом приймає те або інше значення. Оскільки закономірностей у появі цих значень немає, аналіз таких величин може виконуватися тільки методами теорії ймовірностей і математичної статистики. Для харак-

теристики випадкової величини необхідно знати сукупність значень цієї величини, а також ймовірності, з якими ці значення можуть з'явитися.

Випадкова величина називається дискретною, якщо множина її можливих значень кінцева або лічильна. Неперервні (недискретні) випадкові величини характеризуються тим, що множина їх можливих значень не лічильна.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке правило, яке дозволяє знаходити ймовірності можливих подій, зв'язаних з випадковою величиною.

Найбільш загальною формою закону розподілу випадкової величини є функція розподілу, яка представляє собою ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше, ніж задане x :

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Якщо функція розподілу $F(x)$ випадкової величини X при будь-якому x неперервна і, крім того, має похідну $F'(x)$ будь-де, крім, можливо, окремих точок, то випадкова величина є неперервною.

Щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X називається похідна функції розподілу:

$$f(x) = F'(x).$$

Найбільш розповсюдженим для неперервних випадкових величин є нормальний розподіл (розподіл Гауса) з щільністю ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

де m_x – математичне сподівання випадкової величини X .

Нормально розподілені випадкові величини часто зустрічаються на практиці при проведенні вимірів. Так, випадкові похибки багатократних вимірів як правило розподілені за нормальним законом, навіть коли закони розподілу ймовірностей складових відрізняються від нормального.

Крім того, історично склалося так, що багато статистичних критеріїв, методів і оцінок розроблені тільки для випадку нормального початкового розподілу. Тому при первинній обробці експериментальних даних перевіряють нормальність закону розподілу результатів спостережень.

У разі великої вибірки значень випадкової величини (коли $n > 30$) перевірку нормальності закону розподілу результатів спостережень у тому числі виконують за критерієм Пірсона (критерієм χ^2). Відповідно за цим критерієм спочатку обчислюють значення χ^2

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(n_j - n p_j)^2}{n p_j},$$

де m – кількість підінтервалів (часток, кліток), на які розбивається інтервал $[x_{\min}, x_{\max}]$; $x_{\min}$ і $x_{\max}$ – відповідно мінімальне і максимальне значення випадкової величини X ; n_j – абсолютна частота в j -му підінтервалі (кількість значень випадкової величини, які попадають у j -ий підінтервал); p_j – ймовірність того, що значення випадкової величини X попадають у j -ий підінтервал.

Кількість підінтервалів (кліток), на які розбивається інтервал $[x_{\min}, x_{\max}]$, може бути визначена за наступними формулами: $m = \log_2 n + 1 = 3,3 \lg n + 1$ (формула Старджеса) або $m = 5 \lg n$ (формула Брукса і Карузера).

Ймовірність того, що значення випадкової величини X попадають у j -ий підінтервал, може бути визначена як

$$p_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx,$$

де x_{j-1} і x_j – ліва і права границі j -го підінтервалу.

Після цього в залежності від рівня значимості α та кількості ступенів вільності ν за таблицею верхніх $100\alpha\%$ -вих точок розподілу χ^2 (таблиця А1 у додатку А) знаходять значення $\chi_{кр}^2$. Якщо $\chi^2 \leq \chi_{кр}^2$, то з ймовірністю $1 - \alpha$ можна прийняти гіпотезу про те, що закон розподілу результатів спостережень є нормальним, якщо $\chi^2 > \chi_{кр}^2$ – цю гіпотезу потрібно відкинути.

Кількість ступенів вільності визначається як

$$\nu = m - k - 1,$$

де k – кількість параметрів, від яких залежить закон розподілу. Для нормального розподілу $k = 2$.

У разі малої вибірки значень випадкової величини (коли $n < 30$) перевірку нормальності закону розподілу результатів спостережень необхідно виконувати за іншими критеріями, наприклад, за критерієм Колмогорова-Смирнова.

У разі, якщо із заданою довірчою ймовірністю закон розподілу результатів спостережень можна вважати нормальним, для цього ж значення ймовірності знаходять довірчу похибку результату виміру та довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення.

Завдяки випадковому характеру похибки $\Delta \hat{\theta}$ оцінки $\hat{\theta}$ параметра θ для конкретизації точності наближеної рівності $\hat{\theta} \approx \theta$

необхідно мати ймовірність p_δ того, що $|\Delta \hat{\theta}|$ перейде деяку границю $\Delta > 0$:

$$P(|\Delta \hat{\theta}| \leq \Delta) = p_\delta.$$

Інтервал від $\hat{\theta} - \Delta$ до $\hat{\theta} + \Delta$, в якому з ймовірністю p_δ знаходиться справжнє значення θ , називається довірчим інтервалом, а його границі – довірчими границями, ймовірність p_δ – довірчою ймовірністю.

Величина $\alpha = 1 - p_\delta$ в загальному випадку називається рівнем значимості. Під рівнем значимості якої-небудь статистичної гіпотези розуміють найбільшу ймовірність α , з якою ця гіпотеза може дати помилковий результат.

Для нормальної генеральної сукупності $(1 - \alpha)\%$ -вий довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання визначається як

$$\left[\bar{x} - t_{n-1} S_x / \sqrt{n}, \bar{x} + t_{n-1} S_x / \sqrt{n} \right],$$

де t_{n-1} – квантиль t -розподілу Стюдента, визначається за таблицею верхніх $100\alpha\%$ -вих точок t -розподілу Стюдента (таблиця Б1 у додатку Б) в залежності від рівня значимості $\alpha/2$ та кількості ступенів вільності ν , $\nu = n - 1$.

Величину $t_{n-1} S_x / \sqrt{n}$ розглядають як довірчу похибку результату виміру. Вона зменшується зі збільшенням n .

Приклад 1.1. Знайти 95%-вий довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання нормальної сукупності із 10 значень випадкової величини, якщо $\bar{x} = 52$ і $S_x^2 = 96$.

За таблицею Б1 у додатку Б для рівня значимості $\alpha/2 = (1 - 0,95)/2 = 0,025$ і кількості ступенів вільності $v = 10 - 1 = 9$ визначають квантиль t -розподілу Стюдента $t_9(0,025) = 2,26$. Тоді 95%-вий довірчий інтервал точкової оцінки математичного сподівання визначається як $\left[52 - 2,26 \cdot 9,80/\sqrt{10}, 52 + 2,26 \cdot 9,80/\sqrt{10}\right]$, або остаточно $[45; 59]$.

Для нормальної генеральної сукупності $(1 - \alpha)$ %-вий довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення визначають як

$$\left[S_x \sqrt{n/\chi_{\alpha/2}^2}, S_x \sqrt{n/\chi_{1-\alpha/2}^2} \right].$$

Значення $\chi_{\alpha/2}^2$ і $\chi_{1-\alpha/2}^2$ визначають в залежності від α та v за таблицею верхніх $100\alpha\%$ -вих точок розподілу χ^2 (таблиця А1 у додатку А). Кількість ступенів вільності v визначається як $v = n - 1$.

Приклад 1.2. Знайти 95%-вий довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення нормальної сукупності із 11 значень випадкової величини, якщо $S_x = 0,130$.

За таблицею А1 у додатку А для кількості ступенів вільності $v = 11 - 1 = 10$ та рівнів значимості $\alpha/2 = (1 - 0,95)/2 = 0,025$ і $1 - \alpha/2 = 1 - (1 - 0,95)/2 = 0,975$ знаходять значення $\chi_{10}^2(0,025) = 20,48$ і $\chi_{10}^2(0,975) = 3,25$. Тоді 95%-вий довірчий інтервал точкової оцінки середнього квадратичного відхилення визначають як $\left[0,13 \sqrt{11/20,48}, 0,13 \sqrt{11/3,25}\right]$ або $[0,095; 0,239]$.

Для нормальної генеральної сукупності результат дослідів z^* є грубою помилкою, якщо значення z^* виходить за границі інтервалу цензурування вибірки

$$[\bar{z} - \Delta_z, \bar{z} + \Delta_z], \quad (1.1)$$

$$\text{де } \Delta_z = \begin{cases} 4,0S_z, & 50 < N \leq 100; \\ 4,5S_z, & 100 < N \leq 1000; \\ 5,0S_z, & 1000 < N \leq 10000. \end{cases}$$

Кращий результат отримують у разі пошуку Δ_z за Граббом (Grubb):

$$\Delta_z = S_z \frac{N-1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{t_{\alpha/(2N), N-2}^2}{N-2 + t_{\alpha/(2N), N-2}^2}}, \quad (1.2)$$

де $t_{\alpha/(2N), N-2}$ – квантиль t -розподілу Стюдента з $N-2$ степенями свободи та $\alpha/(2N)$ рівнем значимості.

Але всі зазначені методи визначення границь цензурування вибірки розраховані на гаусівський розподіл даних.

У разі, якщо генеральна сукупність не є нормальною, значення Δ_x може бути обчислено як

$$\Delta_x = [1,55 + 0,8\sqrt{\varepsilon - 1} \lg(n/10)] S_x, \quad (1.3)$$

де ε – ексцес, $\varepsilon = \mu_4(x)/\sigma_x^4$; $\mu_4(x)$ – центральний статистичний момент четвертого порядку випадкової величини X .

Оцінка центрального статистичного моменту четвертого порядку може бути знайдена за формулою

$$\hat{\mu}_4(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4.$$

Але формула (1.3) та подібні їй не враховують можливість асиметрію закону розподілу негаусівських даних. У [15] запропоновано статистичний метод визначення грубих помилок в емпіричних даних на основі нормалізуючих перетворень, суть якого полягає у наступному. Спочатку значення негаусівської випадкової величини x перетворюють у такі, що мають нормальний розподіл, за бієктивним перетворенням:

$$z = \psi(x). \quad (1.4)$$

Далі за значенням вибіркового середнього $\bar{x}$ випадкової величини x обчислюємо

$$\bar{z}_{\bar{x}} = \psi(\bar{x}).$$

Потім для нормалізованих даних знаходимо значення Δ_z за (1.2) та визначаємо границі інтервалу (1.1):

$$[\bar{z}_{\bar{x}} - \Delta_z, \bar{z}_{\bar{x}} + \Delta_z]. \quad (1.5)$$

І, нарешті, визначаємо границі цензурування вибірки значень випадкової величини x шляхом перетворення границь інтервалу (1.5), використовуючи перетворення, зворотне до (1.4) $x = \psi^{-1}(z)$:

$$[\psi^{-1}(\bar{z}_{\bar{x}} - \Delta_z), \psi^{-1}(\bar{z}_{\bar{x}} + \Delta_z)]. \quad (1.6)$$

За (1.6) можна визначати границі цензурування вибірки значень негаусівської випадкової величини x . Всі значення x , які виходять за інтервал (1.6), вважаються аномальними або грубими помилками.

У загальному випадку у якості перетворення (1.4) ми рекомендуємо використовувати перетворення Джонсона, яке буде розглянуто в теоретичних відомостях до лабораторної роботи № 2. Також в певних випадках можна використовувати інші нормалізуючі перетворення, наприклад, перетворення Бокса-Кокса (Box-Cox).

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Визначення вибіркового середнього $\bar{x}$ (точкової оцінки математичного сподівання) n результатів спостережень x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

2) Визначення вибіркової дисперсії S_x^2 (незміщеної точкової оцінки дисперсії), точкової оцінки середнього квадратичного відхилення $\hat{\sigma}_x$ та оцінки середнього квадратичного відхилення результату виміру.

3) Побудова гістограми за вибіркою значень випадкової величини X . Побудова нормального закону розподілу експериментальних даних (функції щільності ймовірності) на гістограмі.

4) Перевірка нормальності закону розподілу значень випадкової величини X .

5) Знаходження довірчої похибки результату виміру та довірчого інтервалу для середнього квадратичного відхилення випадкової величини X у разі, якщо закон розподілу результатів спостережень вважається нормальним.

6) Визначення наявності грубих помилок і промахів (якщо останні знайдені, відповідні результати відкидають і повторюють обчислення).

Контрольні питання

- 1) Навіщо виконують первинну обробку експериментальних даних у разі прямих вимірів?
- 2) Назвіть послідовність виконання первинної обробки експериментальних даних.
- 3) Що таке випадкова величина?
- 4) Що таке функція розподілу випадкової величини?
- 5) Що таке щільність ймовірності неперервної випадкової величини?
- 6) Від яких параметрів залежить нормальний розподіл (розподіл Гауса)?
- 7) Як визначити вибірку дисперсію (незміщену точкову оцінку дисперсії) та точкову оцінку середнього квадратичного відхилення випадкової величини?
- 8) Для чого перевіряють гіпотезу відносно нормальності закону розподілу ймовірностей?
- 9) Поясніть критерій χ_2 (критерій Пірсона).
- 10) Яку вибірку вважають малою (великою)?
- 11) За яким критерієм можна перевірити гіпотезу відносно нормальності закону розподілу ймовірностей у разі великої (малої) вибірки?
- 12) Що таке довірчий інтервал, довірна ймовірність, рівень значимості?
- 13) Як визначають для нормальної генеральної сукупності α %-ві довірчі границі точкової оцінки математичного сподівання?
- 14) Як визначають для нормальної генеральної сукупності α %-ві довірчі границі точкової оцінки середнього квадратичного відхилення?
- 15) Як перевіряють наявність грубих похибок у разі, коли закон розподілу є нормальним?

16) Що таке інтервал цензурування вибірки?

17) Як можна перевірити наявність грубих похибок у разі, коли закон розподілу не є нормальним?

18) Що роблять у разі, якщо у виборці знайдені грубі похибки (промахи)?

Лабораторна робота № 2

Вибір аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних

Мета роботи: набути практичні навички підбору аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних, перевірки адекватності підбору і обчислення вибірових оцінок параметрів розподілу з використанням комп'ютера.

Завдання: отримати аналітичну модель розподілу експериментальних даних, які наведені у файлі. (Примітка: файл зі значеннями випадкової величини в залежності від варіанта видає викладач).

Загальні теоретичні відомості

Підбор аналітичної моделі закону розподілу є засобом узагальненого представлення експериментальних даних у тих випадках, коли відсутнє теоретичне обґрунтування закону розподілу випадкової величини або функції.

Для опису експериментальних даних аналітичну модель закону розподілу підбирають зазвичай або із сімей розподілів Джонсона, або із класів розподілів Пірсона. Ми рекомендуємо застосовувати розподіли Джонсона. Їх перевага полягає у тому, що вони приводять після певних перетворень до нормально розподіленої випадкової величини. А історично склалося так, що велика кількість статистичних критеріїв,

методів і оцінок розроблені в основному тільки для випадку нормального початкового розподілу.

Сім'ї розподілів Джонсона отримані шляхом перетворення нормованої нормально розподіленої випадкової величини z . В загальному випадку перетворення має вигляд [2]

$$z = \gamma + \eta q(x, \varphi, \lambda); \quad \eta > 0; \\ -\infty < \gamma < \infty; \quad \lambda > 0; \quad -\infty < \varphi < \infty, \quad (2.1)$$

де q – довільна функція; $\gamma, \eta, \lambda, \varphi$ – параметри розподілу Джонсона. Слід відзначити, що γ і η – це параметри форми, λ – це параметр масштабу, параметр φ характеризує зсув розподілу у напрямку осі абсцис.

Джонсон запропонував три різні сім'ї функцій q :

$$1) \quad q(x, \varphi, \lambda) = \ln \left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right), \quad x > \varphi \quad (\text{сім'я } S_L);$$

$$2) \quad q(x, \varphi, \lambda) = \ln \left(\frac{x - \varphi}{\lambda + \varphi - x} \right), \quad \varphi < x < \varphi + \lambda \quad (\text{сім'я } S_B);$$

$$3) \quad q(x, \varphi, \lambda) = \text{Arsh} \left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right), \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (\text{сім'я } S_U),$$

$$\text{де } \text{Arsh} \left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right) = \ln \left[\frac{x - \varphi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x - \varphi}{\lambda} \right)^2 + 1} \right].$$

Для сім'ї S_L функція щільності ймовірності задається як

$$f_L(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(x - \varphi)} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\gamma - \eta \ln \lambda}{\eta} + \ln(x - \varphi) \right]^2 \right\},$$

де $x > \varphi; \quad \eta > 0; \quad -\infty < \gamma < \infty; \quad \lambda > 0; \quad -\infty < \varphi < \infty.$

Ця функція щільності ймовірності зростає від φ до точки максимуму і потім більш повільно спадає у разі спрямування x у нескінченність ($x \rightarrow \infty$). Функція щільності ймовірності для сім'ї S_L завжди унімодальна, асиметрія завжди додатна, а ексцес більший за 3 (значення ексцесу нормального розподілу).

Для сім'ї S_B функція щільності ймовірності задається формулою

$$f_B(x) = \frac{\eta\lambda}{\sqrt{2\pi}(x-\varphi)(\lambda+\varphi-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta \ln\left(\frac{x-\varphi}{\lambda+\varphi-x}\right)\right]^2\right\},$$

де $\varphi < x < \varphi + \lambda$; $\eta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \varphi < \infty$.

Функції щільності ймовірності сім'ї S_B можуть бути як унімодальними, так і бімодальними. Необхідні та достатні умови для бімодальності полягають у тому, що

$$\eta < 1/\sqrt{2}, \quad |\gamma| < \eta^{-1}\sqrt{1-2\eta^2} - 2\eta \operatorname{arth}\sqrt{1-2\eta^2}.$$

Для сім'ї S_U функція щільності ймовірності визначається як

$$f_U(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi\{(x-\varphi)^2 + \lambda^2\}}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma + \eta \ln\left(\frac{x-\varphi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x-\varphi}{\lambda}\right)^2 + 1}\right)\right]^2\right\},$$

де $-\infty < x < \infty$; $\eta > 0$; $-\infty < \gamma < \infty$; $\lambda > 0$; $-\infty < \varphi < \infty$.

Графіки функції щільності ймовірності сім'ї S_U мають високий порядок стику з віссю абсцис на кінцях інтервалу зміни

аргументу, є унімодальними і їх моди лежать між медіаною та нулем. Тим самим ці розподіли мають додатну або від'ємну асиметрію в залежності від того, від'ємна або додатна величина параметра γ .

Сім'ї розподілів Джонсона відрізняються багатостатністю форм, і у площині асиметрії у квадраті A^2 та ексцесу ϵ займають значні області. На рисунку 2.1 представлена діаграма Джонсона (області комбінацій A^2 і ϵ для різних розподілів Джонсона). Ця діаграма дозволяє підібрати сім'ю розподілів Джонсона за значеннями оцінок A^2 та ϵ вибіркового розподілу.

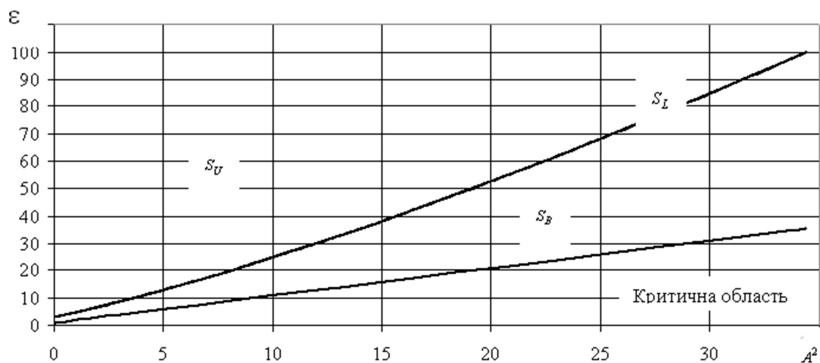


Рис. 2.1. Комбінації A^2 і ϵ для різних розподілів Джонсона [16]

Якщо комбінація A^2 і ϵ знаходиться біля лінії S_L , то вибіркового розподілу можна апроксимувати розподілом із сім'ї S_L (логарифмічно нормальним розподілом). Розподіл зі значеннями A^2 і ϵ , які лежать вище лінії S_L , апроксимуються розподілом із сім'ї S_U , а які лежать нижче лінії S_L (до лінії критичної області) – розподілом із сім'ї S_B . Якщо комбінація A^2 і ϵ попадає в критичну область, то вибіркового розподілу не можна апроксимувати розподілом із сімей Джонсона.

Лінія верхньої границі критичної області задається залежністю

$$\varepsilon = A^2 + 1.$$

Лінію S_L в межах $A^2 \in [0, 27]$ можна апроксимувати наступною функцією [17]:

$$\varepsilon(A^2) = 7,2315 \cdot 10^{-6} A^8 - 6,9860 \cdot 10^{-4} A^6 + \\ + 4,5460 \cdot 10^{-2} A^4 + 1,7979 A^2 + 2,9891.$$

Практично завжди при підборі аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних асиметрія A та ексцес ε не бувають відомі. У цьому випадку вибір сім'ї розподілів Джонсона здійснюється за оцінками асиметрії A та ексцесу ε , які знаходяться за гістограмою. Після вибору необхідної сім'ї розподілів Джонсона обчислюють його параметри, і виконують перевірку адекватності обраної моделі експериментальним даним за критерієм згоди, наприклад, критерієм Пірсона (χ^2 – критерієм).

Параметри функції щільності ймовірності γ, η, λ та ϕ для обраної сім'ї розподілів Джонсона в загальному випадку можна знайти шляхом рішення наступної задачі математичного програмування:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{j=1}^m [y(x_j) - f(x_j, \theta)]^2 \right\}, \quad (2.2)$$

де θ – вектор невідомих параметрів, $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \phi\}$; x_j – значення випадкової величини x в середині j -го підінтервалу; $y(x_j)$ – значення ординати гістограми при значенні x_j ;

$f(x_j, \theta)$ – вираз функції щільності ймовірності при значенні x_j ; m – кількість підінтервалів гістограми. Зазначимо, що при використанні формули (2.2), у якості значення $y(x_j)$ потрібно брати відношення відносної частоти в j -му підінтервалі до довжини j -го підінтервалу Δx .

Параметри функції щільності ймовірності γ, η, λ та φ для обраної сім'ї розподілів Джонсона також можна знайти із рішення системи рівнянь, яка складена з рівностей відповідних аналітичних виразів для статистичних моментів $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ та їх оцінок, обчислених за вибірковими даними гістограми.

Відповідні оцінки статистичних моментів $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ знаходяться за гістограмою за наступними формулами:

$$\hat{\alpha}_1(x) = \bar{x} = \sum_{j=1}^m y(x_j) \Delta x x_j;$$

$$\hat{\mu}_k(x) = \sum_{j=1}^m y(x_j) \Delta x [x_j - \bar{x}]^k, \quad k = 2, 3, 4.$$

Для сім'ї розподілів S_L статистичні моменти $\alpha_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ можна представити у вигляді наступних виразів:

$$\alpha_1(x) = \varphi + \lambda \omega \rho;$$

$$\mu_2(x) = \lambda^2 \omega^2 \rho^2 (\omega^2 - 1);$$

$$\mu_3(x) = \lambda^3 \omega^3 \rho^3 (\omega^6 - 3\omega^2 + 2);$$

$$\mu_4(x) = \lambda^4 \omega^4 \rho^4 (\omega^2 - 1) (\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3),$$

де $\omega = \exp(0,5/\eta^2)$; $\rho = \exp(-\gamma/\eta)$.

Тоді параметри функції щільності ймовірності γ , η , λ та φ для сім'ї S_L розподілів Джонсона можна знайти із рішення наступної системи рівнянь:

$$\varphi + \lambda \omega \rho = \hat{\alpha}_1(x);$$

$$\lambda^2 \omega^2 \rho^2 (\omega^2 - 1) = \hat{\mu}_2(x);$$

$$\lambda^3 \omega^3 \rho^3 (\omega^6 - 3\omega^2 + 2) = \hat{\mu}_3(x);$$

$$\lambda^4 \omega^4 \rho^4 (\omega^2 - 1) (\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3) = \hat{\mu}_4(x).$$

Ця система рівнянь є системою нелінійних алгебраїчних рівнянь. Для її рішення рекомендується використовувати чисельний метод Ньютона.

Найпростішу процедуру підгонки параметрів для сім'ї розподілів S_L запропонував Уіксел і вона полягає у наступному.

Спочатку знаходять $t = (\omega^2 - 1)^{0,5}$ як додатній корінь рівняння

$$t^3 + 3t - A = 0.$$

Після чого параметр зсуву φ визначається за формулою

$$\varphi = \alpha_1(x) - \frac{\sqrt{\mu_2(x)}}{t}.$$

Параметр η визначається значенням ω , а саме

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2 \ln \omega}}.$$

Вираз $\gamma - \eta \ln \lambda$ розглядається як єдиний параметр і обчислюється після логарифмування добутку $\lambda\rho$.

Для сім'ї розподілів S_U статистичні моменти $\alpha_1(y)$, $\mu_2(y)$, $\mu_3(y)$ і $\mu_4(y)$ можна представити у вигляді наступних виразів:

$$\alpha_1(y) = -\omega sh\Omega;$$

$$\mu_2(y) = \frac{1}{2}(\omega^2 - 1)(\omega^2 ch2\Omega + 1);$$

$$\mu_3(y) = -\frac{1}{4}\omega^2(\omega^2 - 1)^2\{\omega^2(\omega^2 + 2)sh3\Omega + 3sh\Omega\}; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \mu_4(y) = \frac{1}{8}(\omega^2 - 1)^2\{\omega^4(\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3)ch4\Omega + \\ + 4\omega^4(\omega^2 + 2)ch2\Omega + 3(2\omega^2 + 1)\}, \end{aligned}$$

де $y = (x - \varphi)/\lambda$; $\omega = \exp(0,5/\eta^2)$; $\Omega = \gamma/\eta$;

$sh\Omega = 0,5(e^\Omega - e^{-\Omega})$; $ch\Omega = 0,5(e^\Omega + e^{-\Omega})$.

Врахувавши, що $y = (x - \varphi)/\lambda$, знайдемо зв'язок між статистичними моментами для випадкової величини y у (2.3) та величини x :

$$\alpha_1(y) = \frac{\alpha_1(x) - \varphi}{\lambda};$$

$$\mu_2(y) = \frac{1}{\lambda^2}[\alpha_2(x) - \alpha_1^2(x)];$$

$$\mu_3(y) = \frac{1}{\lambda^3}[\alpha_3(x) - 3\alpha_2(x)\alpha_1(x) + 2\alpha_1^3(x)]; \quad (2.4)$$

$$\mu_4(y) = \frac{1}{\lambda^4} [\alpha_4(x) - 4\alpha_3(x)\alpha_1(x) + 6\alpha_2(x)\alpha_1^2(x) - 3\alpha_1^4(x)],$$

де $\alpha_2(x)$, $\alpha_3(x)$ і $\alpha_4(x)$ – початкові статистичні моменти відповідно 2-го, 3-го та 4-го порядку випадкової величини x . Їх оцінки знаходяться за гістограмою як

$$\hat{\alpha}_k(x) = \sum_{j=1}^m y(x_j) \Delta x x_j^k.$$

Тоді параметри функції щільності ймовірності γ , η , λ та φ для сім'ї S_U розподілів Джонсона можна знайти таким чином. Із рішення системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{2} (\omega^2 - 1) \left(\omega^2 \frac{e^{2\Omega} + e^{-2\Omega}}{2} + 1 \right) &= \alpha_2(x) - \alpha_1^2(x); \\ -\frac{\lambda^3}{8} \omega^2 (\omega^2 - 1)^2 \left\{ \omega^2 (\omega^2 + 2) (e^{3\Omega} - e^{-3\Omega}) + 3(e^{\Omega} - e^{-\Omega}) \right\} &= \\ &= \alpha_3(x) - 3\alpha_2(x)\alpha_1(x) + 2\alpha_1^3(x); \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^4}{8} (\omega^2 - 1)^2 \left\{ \omega^4 (\omega^8 + 2\omega^6 + 3\omega^4 - 3) \frac{e^{4\Omega} + e^{-4\Omega}}{2} + \right. \\ \left. + 4\omega^4 (\omega^2 + 2) \frac{e^{2\Omega} + e^{-2\Omega}}{2} + 3(2\omega^2 + 1) \right\} &= \\ &= \alpha_4(x) - 4\alpha_3(x)\alpha_1(x) + 6\alpha_2(x)\alpha_1^2(x) - 3\alpha_1^4(x) \end{aligned}$$

визначають параметри λ , ω та Ω . Рішення системи (2.5) може бути знайдено методом Ньютона. Далі визначають параметри η і γ як

$$\eta = \sqrt{0,5/\ln \omega}; \quad \omega > 0; \quad \gamma = \Omega \eta.$$

І останній параметр φ знаходять із рішення першого рівняння системи (2.4)

$$\varphi = \lambda \omega sh \Omega + \alpha_1(x).$$

Для сім'ї розподілів S_B вирази для статистичних моментів отримати досить складно у прийнятній формі. Тому для підбору параметрів розподілу в деяких випадках простіше використовувати інші величини, такі як, наприклад, квантілі [2].

Оцінки параметрів перетворення Джонсона можуть бути визначені за методом максимальної правдоподібності

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} l(\theta),$$

де $l(\theta)$ – логарифмічна функція правдоподібності. Для перетворення Джонсона сім'ї S_U , логарифмічну функцію правдоподібності можна записати як [16]

$$l(\theta) = n \ln \eta - \frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln \left[(x_i - \varphi)^2 + \lambda^2 \right] - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\gamma + \eta \operatorname{Arsh} \left(\frac{x_i - \varphi}{\lambda} \right) \right]^2.$$

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Побудова гістограми за вибіркою значень випадкової величини x .

2) Знаходження оцінки центру вибіркового розподілу або оцінки математичного сподівання випадкової величини x за гістограмою.

3) Обчислення оцінок центральних статистичних моментів $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$ за гістограмою.

4) Обчислення оцінок асиметрії A та ексцесу ε за оцінками моментів $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ і $\mu_4(x)$.

5) Вибір сім'ї розподілів Джонсона за оцінками A^2 і ε .

6) Знаходження параметрів функції щільності ймовірності γ , η , λ та ϕ для обраної сім'ї розподілів Джонсона.

7) Перевірка адекватності знайденої аналітичної моделі вибіркового розподілу експериментальних даних за критерієм згоди.

8) Побудова обраної аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних (функції щільності ймовірності) на гістограмі.

Контрольні питання

1) Навіщо здійснюють підбір аналітичної моделі розподілу експериментальних даних?

2) Які розподіли зазвичай використовують для опису експериментальних даних?

3) У чому перевага розподілів Джонсона?

4) Як знайти оцінку центру вибіркового розподілу або оцінку математичного сподівання випадкової величини x за гістограмою?

5) Як знайти оцінки центральних статистичних моментів випадкової величини x за гістограмою?

6) Як обрати сім'ю розподілів Джонсона?

7) Які параметри необхідні для підбору розподілу Джонсона?

8) Як знайти параметри функції щільності ймовірності для обраної сім'ї розподілів Джонсона в загальному випадку?

9) Як можна знайти параметри розподілу Джонсона?

10) Як перевірити адекватність знайденої аналітичної моделі вибірковому розподілу експериментальних даних?

Лабораторна робота № 3

Оцінювання кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу

Мета роботи: набути практичні навички оцінювання кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу з використанням комп'ютера.

Завдання: побудувати оцінки кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу за експериментальними даними, які наведені у файлі. (Примітка: файл з експериментальними даними – значеннями ординат випадкового процесу в залежності від варіанта видає викладач).

Загальні теоретичні відомості

Випадковим процесом називають випадкову функцію, аргументом якої є час.

Кореляційною (або автокореляційною) функцією випадкового процесу $X(t)$ називають не випадкову функцію двох аргументів $K_X(t, t')$, яка при кожній парі значень аргументів t і t' дорівнює кореляційному моменту відповідних перерізів випадкового процесу:

$$K_X(t, t') = M\{[X(t) - m_X(t)][X(t') - m_X(t')]\}.$$

Спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ називають границю відношення дисперсії, яка припадає на даний інтервал частот до довжини цього інтервалу, коли остання прямує до нуля.

Стаціонарним у вузькому розумінні випадковим процесом називають такий випадковий процес $X(t)$, для якого n -вимірний диференціальний закон розподілу $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ залежить при будь-якому n тільки від інтервалів часу між моментами часу $t_1, t_2, \dots, t_n$, наприклад, залежить тільки від $t_2 - t_1, t_3 - t_1, \dots, t_n - t_1$.

Випадковий процес називається стаціонарним у широкому розумінні, якщо його математичне сподівання не залежить від часу t , а кореляційна функція є функцією тільки різниці моментів часу, наприклад, $\tau = t_2 - t_1$.

Окрім властивості стаціонарності при аналізі випадкових процесів зазвичай використовується припущення про ергодичність стаціонарних процесів. Ергодичність, як і стаціонарність, може визначатися по відношенню до різних ймовірнісних характеристик – математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції. Стаціонарний процес називається ергодичним по відношенню до математичного сподівання, якщо середнє за множиною реалізацій дорівнює середньому за часом

$$M\{X_t\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Аналогічно визначається ергодичність по відношенню до дисперсії, кореляційної функції та інших характеристик.

Властивість ергодичності дозволяє при аналізі випадкових процесів знаходити оцінки їх імовірнісних характеристик

за однією реалізацією, замінюючи усереднення за множиною реалізацій усередненням за часом за однією реалізацією. Так, оцінки математичного сподівання, дисперсії, кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу визначаються за наступними формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i;$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 ;$$

$$\hat{K}_X(\tau) = \hat{K}_X(\Delta t \cdot j) = \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} (x_i - \bar{x})(x_{i+j} - \bar{x});$$

$$j = 0, 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

де Δt – крок дискретизації за часом.

Спектральна щільність $S_X(\omega)$ і кореляційна функція $K_X(\tau)$ зв'язані перетворенням Фур'є. У дійсній формі цей зв'язок такий

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad (3.2)$$

$$K_X(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

У комплексній формі цей зв'язок має наступний вигляд:

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_X(\tau) d\tau; \quad (3.3)$$

$$K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_X(\omega) d\omega.$$

Оцінка спектральної щільності за експериментальними даними може бути отримана двома шляхами.

По-перше, для цього можна скористатися оцінкою $\hat{K}_X(\tau)$ кореляційної функції $K_X(\tau)$ і відповідно за формулою (3.3) отримати оцінку спектральної щільності

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} e^{-i\omega\tau} K_X(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

де $\pm \tau_m$ – границі інтервалу визначення $\hat{K}_X(\tau)$, які відповідають умові $\hat{K}_X(\pm \tau_m) \approx 0$.

Розрахунок незгладженої оцінки спектральної щільності відповідно з (3.2) і (3.4) ведуть за формулою

$$\begin{aligned} \hat{S}_X(\omega_k) = \\ = \frac{\Delta t}{\pi} \left[2 \sum_{j=1}^{m-1} \hat{K}_X(j\Delta t) \cos\left(\frac{jk\pi}{m}\right) + \hat{K}_X(0) + \hat{K}_X(\tau_m) \cos(k\pi) \right], \end{aligned}$$

де $k = 1, 2, \dots, m; j = 0, 1, \dots, m; m = \tau_m / \Delta t; \omega_k = \pi k / (\Delta t m)$.

Тут значення оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ визначаються за формулою (3.1) при $N = m$.

Оцінка $\hat{S}_X(\omega)$ за формулою (3.4) є незгладженою оцінкою спектральної щільності. Вона є незміщеною, але неслухною тому, що дисперсія цієї оцінки не прямує до нуля зі збільшенням до нескінченності часу T реалізації $x(t)$, за якою була визначена оцінка $\hat{K}_X(\tau)$. Зазначимо: точність цієї оцінки $\hat{S}_X(\omega)$ зменшується з наближенням до границь інтервалу визначення $\hat{K}_X(\tau)$ і в деяких випадках стає неприйнятною тому, що неврахування ординат кореляційної функції $K_X(\tau)$ при $|\tau| > \tau_m$ може суттєво спотворити ординати спектральної щільності при малих значеннях частоти ω .

Таким же неефективним є і безпосереднє використання перетворення Фур'є до реалізації $x(t)$ для отримання оцінки спектральної щільності $\hat{S}_X(\omega)$.

Враховуючи те, що спектральна щільність є усередненим значенням квадрату модуля амплітуди розкладання випадкової функції у ряд Фур'є, то у якості оцінки спектральної щільності природнім є прийняти вираз, який називають періодограмою:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2, \quad (3.5)$$

де T – довжина реалізації $x(t)$.

Неслушність оцінки (3.5) спектральної щільності $S_X(\omega)$ пов'язана з тим, що тут оцінюється не числовий параметр, який характеризує $S_X(\omega)$, а виконується оцінка всього ходу цієї

функції, або виконується непараметрична оцінка $S_X(\omega)$. Через те, що число ординат спектральної щільності $S_X(\omega)$, які оцінюються, є нескінченним, то дисперсія оцінки кожної ординати не спадає зі збільшенням T . Тому (3.5) не може бути прийнята як оцінка спектральної щільності.

Якщо ми будемо шукати не оцінку ординат спектральної щільності $S_X(\omega)$, а оцінку інтегралу від цієї спектральної щільності, взятого в границях від ω_1 до ω_2 або (що те ж саме) різницю спектральних щільностей $S_X(\omega_2) - S_X(\omega_1)$, то її оцінка

$$S_X(\omega_2) - S_X(\omega_1) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2 \right\} d\omega$$

буде асимптотично незміщеною і слушною.

Таким чином, через неслушність оцінки $\hat{S}_X(\omega)$ формула (3.5) не дозволяє навіть при дуже великих довжинах реалізації T отримати надійне значення спектральної щільності в даній точці ω , тобто надійно визначити тонку структуру функції $S_X(\omega)$. І навпаки, якщо ми будемо шукати усереднені значення цієї функції, то зі збільшенням інтервалу усереднення (ω_1, ω_2) при тій же довжині реалізації ми будемо отримувати все більш ефективні оцінки. Але якщо ми будемо використовувати отримані усереднені оцінки для характеристики спектральної щільності $S_X(\omega)$, то ми отримаємо систематичну похибку. Інакше, отримуючи слушну оцінку шляхом вказаного вище усереднення за частотами, ми порушуємо незміщеність оцінки.

Для подолання виникаючих таким чином труднощів застосовують різні способи, які базуються на раціональному усередненні ординат спектральної щільності.

Один з таких способів полягає у наступному. Інтервал часу $(0, T)$ поділяють на m інтервалів довжиною T_0 і для кожного з цих інтервалів, застосувавши (3.5), отримують m оцінок спектральної щільності

$$\hat{S}_j(\omega) = \frac{1}{2\pi T_0} \left| \int_{(j-1)T_0}^{jT_0} e^{i\omega t} x(t) dt \right|^2, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

середнє арифметичне яких при достатньо великих T_0 і m можна прийняти за оцінку $S_X(\omega)$. Тобто

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \hat{S}_j(\omega). \quad (3.6)$$

Оцінку, яка є практично еквівалентною (3.6), можна отримати з (3.4), якщо ввести у підінтегральний вираз відповідну вагову функцію:

$$\hat{S}_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-T_0}^{T_0} e^{-i\omega\tau} \lambda_\kappa(\tau) \hat{K}_X(\tau) d\tau,$$

де $\lambda_\kappa(\tau)$ – вагова (згладжуваюча) парна функція, яка називається кореляційним вікном. Ця вагова функція обертається у нуль при $|\tau| > T_0$. Інтервал T_0 називають шириною вікна.

Введення у формулу перетворення Фур'є додаткової вагової функції, відмінної від нуля тільки на кінцевому (симетричному) інтервалі зміни аргументу, приблизно є еквівалентним переходу від неслухної оцінки (3.5) до слухної оцінки (3.6).

При цьому загальні міркування стосовно вибору інтервалу T_0 залишаються такими: інтервал T_0 повинен бути достатньо великим для того, щоб оцінка $\hat{S}_X(\omega)$ була незміщеною, і достатньо малим, щоб $m = T/T_0$ було настільки великим числом, щоб оцінка була ефективною.

Нажаль, загальних теоретичних рекомендацій стосовно вибору значення T_0 отримати не вдається тому, що оптимальне значення T_0 залежить не тільки від шуканої спектральної щільності $S_X(\omega)$, але і від конкретної задачі, яка при цьому вирішується. Тому можна зробити тільки загальні практичні вказівки стосовно вибору T_0 : вибрав вид вагової функції $\lambda_\kappa(\tau)$ виконують розрахунок $\hat{S}_X(\omega)$ при різних T_0 . Врахувавши те, що мале значення T_0 відповідає більшому числу m у формулі (3.6), то оцінка, яка при цьому отримується, буде найбільш ефективною. Але через мале значення T_0 оцінка буде мати найбільшу зміщеність. Зі збільшенням T_0 ефективність оцінки буде падати, а систематична похибка буде зменшуватися. На графіках $\hat{S}_X(\omega)$ це буде відображатися таким чином: при малих T_0 графік $\hat{S}_X(\omega)$ буде мати вигляд плавної кривої, на якій усі характерні для даної спектральної щільності пики будуть згладжені; зі зростанням T_0 тонка структура спектральної щільності буде поступово проявлятися, а при подальшому рості T_0 графік $\hat{S}_X(\omega)$ починає нагадувати реалізацію випадкового процесу, поведінка якого не відображає характер $S_X(\omega)$, а є наслідком неслушної оцінки. Якщо загальна довжина T реалізації випадкового процесу достатньо велика, то, якщо поступати вказаним вище чином, зазвичай вдається підібрати "оптимальне" значення T_0 . Якщо T мале, то, природно, ніяким вибором T_0 не можна отримати достатньо добру оцін-

ку спектральної щільності і необхідно збільшувати довжину реалізації (кількість експериментальних даних).

Кращою оцінкою спектральної щільності, яка отримується на основі оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ кореляційної функції $K_X(\tau)$ із застосуванням кореляційних вікон $\lambda_\kappa(\tau)$, є згладжена оцінка

$$\hat{S}_X(\omega_k) = \frac{\Delta t}{\pi} \left[2 \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_\kappa(j\Delta t) \hat{K}_X(j\Delta t) \cos\left(\frac{jk\pi}{m}\right) + \lambda_\kappa(0) \hat{K}_X(0) \right],$$

де $k = 1, 2, \dots, m$; $j = 0, 1, \dots, m$; $m = T_0/\Delta t$. Тут значення оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ визначаються за формулою (3.1) при $N = m$.

Наведемо кореляційні вікна, що найбільш використовуються.

1) Трикутне вікно (вікно Бартлета)

$$\lambda_\kappa(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_0}, & |\tau| \leq T_0; \\ 0, & |\tau| > T_0. \end{cases}$$

2) Вікно Хемінга

$$\lambda_\kappa(\tau) = \begin{cases} \left(0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi\tau}{T_0} \right), & |\tau| \leq T_0; \\ 0, & |\tau| > T_0. \end{cases}$$

Зазначимо, що ці вікна використовуються при знаходженні оцінок тих спектральних щільностей, які мають унімодальну форму.

Формулу (3.7) можна перетворити таким чином, щоб під знак інтегралу входила не оцінка кореляційної функції,

а періодограма $I(\omega)$. Для цього у (3.7) потрібно замінити вагову функцію $\lambda_K(\tau)$ її перетворенням Фур'є $w(\omega)$

$$\lambda_K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 \tau} w(\omega_1) d\omega_1,$$

а замість $\hat{K}_X(\tau)$ підставити її вираз через реалізацію випадкового процесу $x(t)$. Тоді оцінку $\hat{S}_X(\omega)$ можна записати як

$$\hat{S}_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\omega) I(\omega - \omega_1) d\omega_1 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\omega - \omega_1) I(\omega_1) d\omega_1. \quad (3.8)$$

Функцію $w(\omega)$ у (3.8) називають спектральним вікном. Найбільше використовуються такі спектральні вікна:

1) трикутне вікно (вікно Бартлета)

$$w(\omega) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin^2 0,5\omega T_0}{\omega^2 T_0};$$

2) вікно Хемінга

$$w(\omega) = \frac{0,54}{2\pi} \frac{\sin \omega T_0}{\omega} - \frac{0,46}{2\pi} \frac{\omega \sin \omega T_0}{\omega^2 - \left(\frac{\pi}{T_0}\right)^2}.$$

Наостанок зазначимо, що класичні методи спектрального аналізу, які ми розглянули, придатні практично до усіх класів сигналів за припущенням про стаціонарність. Недоліком цих методів спектрального аналізу є спотворення у спектральних

складових за боковими пелюстками завдяки зважуванню даних за допомогою вікна. Для збільшення точності оцінок та спектральної роздільної здатності використовують параметричні методи: методи авторегресійного спектрального оцінювання (наприклад, такі як метод Юла-Уалкера, метод Берга) та методи на основі стохастичних диференціальних рівнянь.

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Визначення точкових оцінок математичного сподівання і дисперсії випадкового процесу ($\bar{x}$ і $\hat{\sigma}_x^2$).

2) Знаходження оцінки $\hat{K}_X(\tau)$ кореляційної функції $K_X(\tau)$ випадкового процесу та побудова графіка цієї оцінки.

3) Визначення ширин T_0 кореляційних вікон Бартлета та Хемінга.

4) Знаходження згладжених оцінок $\hat{S}_X(\omega)$ спектральної щільності $S_X(\omega)$ із застосуванням вікон Бартлета і Хемінга та побудова графіків цих оцінок.

Контрольні питання

- 1) Що таке випадковий процес?
- 2) Які припущення використовують при аналізі випадкових процесів?
- 3) Дайте визначення стаціонарного випадкового процесу у широкому та вузькому розумінні.
- 4) Поясніть властивість ергодичності.
- 5) Що таке кореляційна функція?
- 6) Що таке спектральна щільність?

7) Назвіть методи оцінювання кореляційної функції та спектральної щільності.

8) Навіщо використовують кореляційні вікна?

9) Що таке ширина кореляційного вікна?

10) Назвіть відомі кореляційні вікна.

11) Які вікна використовуються при знаходженні оцінок тих спектральних щільностей, які мають унімодальну форму?

12) Яку функцію називають спектральним вікном?

Лабораторна робота № 4

Оцінювання параметрів моделі стаціонарного випадкового процесу

Мета роботи: набути практичні навички оцінювання параметрів моделі стаціонарного випадкового процесу з використанням комп'ютера.

Завдання: за експериментальними даними, які наведені у файлі, знайти точкові оцінки параметрів наступного стохастичного диференціального рівняння (СДР)

$$\ddot{y} + b_1 \dot{y} + b_2 |\dot{y}| \dot{y} + c_1 y + c_3 y^3 = n(t), \quad (4.1)$$

яке описує випадковий процес $Y(t)$. Тут $n(t)$ білий шум з коефіцієнтом інтенсивності N_0 . Задані наступні експериментальні дані: значення ординат випадкових процесів $y(t)$ і $\dot{y}(t)$. Потрібно визначити точкові оцінки наступних невідомих параметрів СДР (4.1):

- а) b_1 і c_1 при відомому значенні N_0 та $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$;
- б) b_1 , b_2 , c_1 , і c_3 при відомому значенні N_0 ;
- в) b_1 , b_2 , c_1 , c_3 і N_0 .

Примітка: файл з експериментальними даними в залежності від варіанта, а також значення N_0 для задач а) або б),

видає викладач. Крім того викладач приймає рішення про те, яку із задач виконує студент: а), б), в) або усі.

Загальні теоретичні відомості

Невідомі параметри за своїм характером можуть бути різними: постійними або випадковими величинами, а також випадковими процесами. Різниця між ними полягає у тому, що постійні параметри зберігають своє значення в різних дослідах (вимірах); випадкові величини зберігають своє значення у даному вимірі і можуть приймати різні значення у різних спостереженнях; випадкові процеси змінюються у часі при конкретному спостереженні. Оскільки значення постійного параметра заздалегідь невідоме, то його можна трактувати як поодинокий випадок параметра у вигляді випадкової величини. Крім того нагадаємо, що за визначенням значення випадкового процесу у будь-який момент часу є випадковою величиною. Тому тут ми будемо розглядати методи оцінки параметрів θ , які представляють собою випадкову величину.

Оцінку параметрів моделі за спостереженнями поведінки об'єкту при заданій структурі моделі називають ідентифікацією у вузькому розумінні або параметричною ідентифікацією.

Першими і найпростішими моделями, до яких було застосовано процедуру ідентифікації, були детерміновані регулярні функції, які зв'язують входи та виходи моделі об'єкта. З цим пов'язаний перший підхід теорії ідентифікації, який з'явився в математичному аналізі у вигляді теорії наближення функцій багаточленами і веде свій початок від праць П.Л.Чебишева.

Для ідентифікації стохастичних систем були застосовані методи математичної статистики, що поклало початок теорії оцінювання. Основною задачею цієї теорії є оцінка параметрів стохастичних систем в оточенні випадкових впливів. Основною моделлю, яка описує поведінку динамічного об'єкта при

дії на нього випадкових впливів, є СДР. Нагадаємо, що СДР – це диференційне рівняння, до складу якого входить білий шум. Білий шум – це стаціонарний нормальний випадковий процес з нульовим математичним сподіванням і кореляційною функцією, яка дорівнює дельта-функції.

Отримати оцінку фактично означає організувати таку функцію результатів спостереження $g_{\xi}(\xi_0^k)$, значення якої можна було би прийняти за оптимальну оцінку $\hat{\theta} = g_{\xi}(\xi_0^k)$ справжнього значення параметра θ . Окремий результат спостереження ξ_0^k є часові відліки в $k + 1$ точках конкретної реалізації випадкового спостереження $\xi(t)$, $t \in [0, T]$. Різні спостереження ξ_0^k , як і ординати функції від них, будуть представляти собою випадкові величини. Тому не можна знайти оцінку, яка приймала б значення, наближені до θ , для усіх можливих спостережень. Потрібно обмежитися такою процедурою оцінювання, яка дає добрі результати "у середньому" при багатократному її повторенні. В залежності від критерію оптимальності оцінки та інших факторів можливі різні підходи до формування функції $f_{\xi}(\xi_0^k)$: ті, які базуються на байєсовській та небайєсовській методологіях.

Підходи, які базуються на байєсовській методології. При байєсовському підході критерій оптимальності пов'язують з так званою функцією втрат $c(\theta, g_{\xi_{\xi}}(\xi_0^k))$, яка характеризує втрати через відхилення оцінки від справжнього значення параметра θ . Її вид вибирають на основі практичних міркувань та простоти рішення задачі. Цей вибір не є особливо обмеженим.

Оскільки конкретне значення $c(\theta, g_\xi(\xi_0^k))$ залежить від результатів спостереження і є випадковим, то якості вимірювача характеризують деякими середніми значеннями. У результаті усереднення $c(\theta, g_\xi)$ з функцією правдоподібності $f(\xi_0^k | \theta)$ отримуємо так званий умовний ризик

$$r(\theta, g_\xi) = \int_{(\xi_0^k)} c(\theta, g_\xi(\xi_0^k)) f(\xi_0^k | \theta) d\xi_0^k.$$

Тут інтеграл є $(k + 1)$ – кратним.

Природно, що більш кращими є алгоритми $g_\xi(\xi_0^k)$, які приводять до менших значень $r(\theta, g_\xi)$. Якщо деякий алгоритм $g_\xi(\xi_0^k)$ мінімізує умовний ризик при усіх значеннях θ , то таке рішення є оптимальним. Але в загальному випадку рішення, яке мінімізує умовний ризик, буде різним при різних θ . Тоді вибір оптимального рішення виконується на основі байєсовського підходу – мінімізації середнього ризику (умовного ризику, осередненого з апіорною щільністю ймовірності параметра)

$$\begin{aligned} R(g_\xi) &= \int_{(\theta)} r(\theta, g_\xi) f_{pr}(\theta) d\theta = \\ &= \int_{(\theta)} \int_{(\xi_0^k)} c(\theta, f(\xi_0^k)) f(\xi_0^k | \theta) d\xi_0^k d\theta. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Відповідно відомій теоремі множення ймовірностей маємо

$$f(\theta, \xi_0^k) = f(\xi_0^k) f(\theta | \xi_0^k) = f_{pr}(\theta) f(\xi_0^k | \theta). \quad (4.3)$$

З урахуванням (4.3) вираз (4.2) можна записати інакше:

$$R(g_\xi) = \int_{(\xi_0^k)} R(g_\xi | \xi_0^k) f(\xi_0^k) d\xi_0^k, \quad (4.4)$$

де $R(g_\xi | \xi_0^k)$ – апостеріорне математичне сподівання функції втрат, яке називають апостеріорним ризиком

$$R(g_\xi | \xi_0^k) = \int_{(\theta)} c(\theta, g_\xi) f(\theta | \xi_0^k) d\theta. \quad (4.5)$$

Рішення $\hat{\theta} = g_\xi(\xi_0^k)$, яке мінімізує середній ризик (4.2), називається оптимальним байєсовським рішенням відносно апіорного розподілу $f_{pr}(\theta)$, а якість оптимальної оцінки визначається мінімальним значенням середнього (байєсовського) ризику.

Інтеграл (4.4) мінімізується, якщо мінімізувати підінтегральний вираз при кожному значенні змінної інтегрування ξ_0^k . Це можна зробити в силу того, що оцінка $\hat{\theta} = g_\xi(\xi_0^k)$ визначається для кожного спостереження ξ_0^k . Таким чином, оцінка $\hat{\theta}$ повинна мінімізувати $R(g_\xi | \xi_0^k) f(\xi_0^k)$. Оскільки $f(\xi_0^k) > 0$, то цій співмножник можна опустити. В результаті отримуємо, що мінімум середнього ризику $R(g_\xi)$ досягається при тому ж значенні g_ξ , що і мінімум апостеріорного ризику (4.5):

$$\int_{(\theta)} c(\theta, \hat{\theta}) f(\theta | \xi_0^k) d\theta = \min_{\hat{\theta}}. \quad (4.6)$$

Це твердження є справедливим і до дискретного параметра θ . При цьому інтеграл в (4.6) замінюється сумою.

Отже, байєсовські правила оцінки можна знаходити, застосовуючи апостеріорний ризик, який визначається обраною функцією втрат і апостеріорним розподілом параметра.

Для знаходження байєсовської оцінки потрібно задати функцію втрат. В багатьох практичних випадках можна припускати, що втрати залежать тільки від похибки оцінки

$$\delta_{\theta} = \delta_{\theta}(\xi_0^k) = \hat{\theta} - \theta, \quad c(\theta, \hat{\theta}) = c(\delta_{\theta}).$$

Три типові функції втрат (квадратична, проста і модульна) мають відповідно вигляд

$$c(\delta_{\theta}) = \delta_{\theta}^2, \quad c(\delta_{\theta}) = 1 - \Delta(\delta_{\theta}), \quad c(\delta_{\theta}) = |\delta_{\theta}|. \quad (4.7)$$

Підставляючи ці вирази в (4.6) і знаходячи мінімум апостеріорного ризику, приходимо до наступних результатів. Байєсовська оцінка у разі квадратичної функції втрат є оптимальною за критерієм мінімуму середнього квадрату похибки і представляє собою математичне сподівання апостеріорної щільності ймовірності

$$\hat{\theta}_{\kappa\theta} = \int_{(\theta)} \theta f(\theta | \xi_0^k) d\theta.$$

При цьому мінімальне значення апостеріорного ризику (4.5) є апостеріорною дисперсією

$$R(\hat{\theta}_{\kappa\theta} | \xi_0^k) = D_{ps} = \int_{(\theta)} (\theta - \hat{\theta}_{\kappa\theta})^2 f(\theta | \xi_0^k) d\theta.$$

Байєсовська оцінка у разі простої функції втрат є оптимальною за критерієм максимуму апостеріорної щільності ймо-

вірності, тобто співпадає з положенням абсолютного максимуму апостеріорної щільності ймовірності. Якщо абсолютний максимум досягає у допустимій області зміни параметра θ та апостеріорна щільність ймовірності $f(\theta|\xi_0^k)$ є диференційованою за θ , то оцінку можна знаходити із рішення рівняння $\partial f(\theta|\xi_0^k)/\partial\theta|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$. Оскільки логарифм є монотонно зростаючою функцією аргументу, то зазвичай вирішують рівняння

$$\partial \ln f(\theta|\xi_0^k)/\partial\theta|_{\theta=\hat{\theta}} = 0. \quad (4.8)$$

Апостеріорна щільність ймовірності може бути записана як

$$f_{ps}(\theta) = f(\theta|\xi_0^k) = k f_{pr}(\theta) f(\xi_0^k|\theta), \quad (4.9)$$

$$k = \left[\int f_{pr}(\theta) f(\xi_0^k|\theta) d\theta \right]^{-1}.$$

Зазначимо, що умовна щільність ймовірності $f(\xi_0^k|\theta)$ називається функцією правдоподібності. При фіксованому значенні ξ_0^k вона показує, наскільки одне можливе значення параметра θ "більш правдоподібне", ніж інше.

Формула (4.9) фактично є математичним записом відомої теореми Байєса, яка дає правило формування апостеріорного знання із апіорних відомостей і результатів експерименту.

Формула (4.9) дозволяє розділити в рівнянні (4.8) інформацію спостереження і апіорні відомості:

$$\partial \ln f(\xi_0^k|\theta)/\partial\theta|_{\theta=\hat{\theta}} + \partial \ln f_{pr}(\theta)/\partial\theta|_{\theta=\hat{\theta}} = 0.$$

У багатьох випадках (наприклад, при широкому рівномірному апіорному розподілі параметра) виконується наближена рівність

$$\partial \ln f_{pr}(\theta) / \partial \theta \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

і оцінка за максимумом апостеріорної щільності ймовірності співпадає з небайєсовською оцінкою за максимумом функції правдоподібності:

$$\partial \ln f(\xi_0^k | \theta) / \partial \theta \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0.$$

Оцінки постійних параметрів за методом максимальної правдоподібності мають добрі властивості – вони асимптотично (при $k \rightarrow \infty$) слушні, ефективні і нормально розподілені. Тому цей метод знайшов широке практичне застосування.

Задачу визначення оцінки вектора θ параметрів СДР за методом максимальної правдоподібності можна записати як задачу математичного програмування:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} M \{ \ln f_{pr}(\theta, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, t) \}, \quad (4.10)$$

де $M\{ \}$ – операція математичного сподівання.

Приклад 4.1. Стаціонарний випадковий процес $\mathbf{Y}(t)$ з компонентами $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ описується СДР (4.1). Значення N_0 відоме, а $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$. За методом максимальної правдоподібності отримати формули для визначення оцінок $\hat{b}_1$ і $\hat{c}_1$ параметрів b_1 і c_1 СДР (4.1).

Для визначення оцінок $\hat{b}_1$ і $\hat{c}_1$ за (4.10) потрібно знайти апіорну щільність ймовірності $f_{pr}(\theta, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$. У нашому прикладі вектор $\theta = \{\hat{b}_1, \hat{c}_1\}$, $\mathbf{Y}(t) = \{y(t), \dot{y}(t)\}$, $\mathbf{X}(t) = \{n(t)\}$,

а щільність ймовірності не залежить від часу тому, що випадковий процес $\mathbf{Y}(t)$ є стаціонарним. Щільність ймовірності $f_{pr}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}, \mathbf{X})$ може бути знайдена з рішення рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова, яке будується на основі СДР. У нашому випадку щільність ймовірності визначається як

$$f_{pr}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}) = C \cdot \exp\left(-\frac{b_1}{N_0} \dot{y}^2 - \frac{b_1}{N_0} c_1 y^2\right), \quad (4.11)$$

де постійна C знаходиться з умови нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{pr}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}) dy d\dot{y} = 1. \quad (4.12)$$

Після інтегрування щільності ймовірності (4.11) з умови (4.12) отримуємо

$$C = \frac{b_1 \sqrt{c_1}}{\pi N_0}. \quad (4.13)$$

Підставляючи щільності ймовірності (4.11) з урахуванням (4.13) в (4.9) і виконуючи операцію математичного сподівання, переходимо до наступної задачі параметричної ідентифікації

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \left(\ln \frac{b_1 \sqrt{c_1}}{\pi N_0} - \frac{b_1}{N_0} \alpha_{2_2} - \frac{b_1 c_1}{N_0} \alpha_{2_1} \right), \quad (4.14)$$

де α_{2_1} і α_{2_2} – відповідно початкові статистичні моменти 2-го порядку $y(t)$ і $\dot{y}(t)$.

У результаті рішення задачі (4.14) шляхом нескладних перетворень отримуємо наступні співвідношення:

$$b_1 = \frac{N_0}{2\alpha_{2_2}}, \quad c_1 = \frac{\alpha_{2_2}}{\alpha_{2_1}}. \quad (4.15)$$

При вирішенні практичних задач дуже часто використовуються оцінки за мінімумом середнього квадрату похибки і за максимумом апостеріорної щільності ймовірності або максимумом функції правдоподібності. Хоча ці оцінки в загальному випадку різні, але в асимптотиці (при $k \rightarrow \infty$ або $t \rightarrow \infty$) байєсовські оцінки і оцінки максимальної правдоподібності асимптотично еквівалентні. При цьому функцію правдоподібності часто можна апроксимувати нормальною щільністю ймовірності.

При оцінці векторного параметра $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l\}$ аналогом квадратичної функції втрат (4.7) є квадратична форма

$$c(\theta, \hat{\theta}) = (\hat{\theta} - \theta)^T \Omega (\hat{\theta} - \theta) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \Omega_{ij} (\hat{\theta}_i - \theta_i) (\hat{\theta}_j - \theta_j),$$

де $\Omega - l \times l$ додатна напіввизначена матриця з елементами Ω_{ij} , які виконують роль вагових коефіцієнтів.

Мінімізація апостеріорного ризику

$$R(\hat{\theta} | \xi_0^k) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \Omega_{ij} \int_{(\theta)} (\hat{\theta}_i - \theta_i) (\hat{\theta}_j - \theta_j) f(\theta | \xi_0^k) d\theta$$

шляхом рішення системи рівнянь

$$\partial R(\hat{\theta} | \xi_0^k) / \partial \hat{\theta}_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

приводить до системи

$$\sum_{j=1}^l \Omega_{ij} \int_{(\theta)} (\hat{\theta}_j - \theta_j) f(\theta | \xi_0^k) d\theta = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

або у векторній формі

$$\Omega \int_{(\theta)} (\hat{\theta} - \theta) f(\theta | \xi_0^k) d\theta = 0.$$

Рішенням цих рівнянь є вектор

$$\hat{\theta}_{\kappa\theta} = \hat{\theta} = \int_{(\theta)} \theta f(\theta | \xi_0^k) d\theta$$

з компонентами

$$\hat{\theta}_{i\kappa\theta} = \hat{\theta}_i = \int_{(\theta)} \theta_i f(\theta | \xi_0^k) d\theta.$$

Таким чином, при квадратичній функції втрат байєсовська оцінка векторного параметра зводиться, як і при оцінці скалярного параметра, до знаходження математичного сподівання апостеріорного розподілу $f(\theta | \xi_0^k)$.

Зазначимо, що байєсовські методи оцінки можна застосовувати лише тоді, коли відома апіорна щільність ймовірності розподілу параметра. Ця щільність ймовірності може бути визначена, особливо для стохастичних систем, лише в поодиноких випадках. Якщо вона не відома, то байєсовські методи використовувати не можна і потрібно застосовувати небайєсовські методи оцінки, для яких знання апіорного розподілу не потрібне.

Небайєсовські методи оцінки. До небайєсовських методів, окрім згаданого вище методу максимальної правдоподібності, відносяться мінімаксний метод та різні варіанти методу моментів, які не потребують знання апіорної щільності ймовірності. За мінімаксним методом мінімізують умовний ризик для самого несприятливого випадку, а саме знаходять мінімаксне рішення g_m із умови

$$\min_g \max_{\theta} r(\theta, g) = \max_{\theta} r(\theta, g_m).$$

Величина $\max_{\theta} r(\theta, g_m)$ називається мінімаксним ризиком.

Мінімаксний критерій дає оптимальне рішення лише для найгіршої (відносно θ) ситуації. Слід також зазначити, що для використання мінімаксного методу потрібно мати умовну щільність ймовірності $f(\xi_0^k | \theta)$. Крім того, непоширене застосування цього критерію пояснюється і тим, що знаходження мінімаксного рішення пов'язано з великими труднощами. Дещо полегшує положення результат Вальда, який встановлює відповідність між мінімаксними і байєсовськими рішеннями. З'ясовується, що мінімаксне рішення g_m при деяких слабких обмеженнях є байєсовським відносно найменш сприятливого апіорного розподілу $\tilde{f}_{pr}(\theta)$, який максимізує байєсовський ризик. При цьому мінімаксний ризик дорівнює байєсовському ризику для $\tilde{f}_{pr}(\theta)$, а функція ризику $r(\theta, g_m)$ мінімаксного рішення g_m не залежить від значення параметра θ . Звідси, випливає, що якщо байєсовський ризик для деякого апіорного розподілу $f_{pr}(\theta)$ стає незалежним від θ , то цей розподіл найменш сприятливий, а байєсовське

рішення g_m – мінімаксне. Цей факт допомагає при пошуку найменш сприятного апріорного розподілу та мінімаксних рішень.

Мінімаксний критерій часто використовується в робастних (стійких) методах оцінювання, які малочутливі до відхилень апріорних даних та іншим відхиленням від прийнятої моделі.

Для оцінки невідомих параметрів застосовують метод моментів (класичний метод моментів). При цьому можливі два випадки його застосування. У першому випадку, якщо відома щільність ймовірності $f(\xi; \theta_1, \dots, \theta_l)$ та за результатами спостережень знайдені оцінки статистичних моментів $\hat{\alpha}_k(\theta_1, \dots, \theta_l)$, то невідомі параметри $\theta_1, \dots, \theta_l$ визначаються з наступних l алгебраїчних рівнянь:

$$\int_{(\xi)} \xi^k f(\xi; \theta_1, \dots, \theta_l) d\xi = \hat{\alpha}_k(\theta_1, \dots, \theta_l), \quad k = 1, \dots, l.$$

Цей варіант класичного методу моментів відноситься до небайєсовських методів оцінки. Його обмежене застосування пояснюється труднощами при знаходженні щільності ймовірності $f(\xi; \theta_1, \dots, \theta_l)$.

У другому випадку, якщо відома щільність ймовірності $f_{pr}(\theta, Y)$ та за результатами спостережень знайдені оцінки статистичних моментів $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(Y)$, то невідомі параметри $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_l\}$ визначаються з l алгебраїчних рівнянь

$$\int_{(Y)} Y f_{pr}(\theta, Y) dY = \hat{\alpha}(Y),$$

які після взяття інтегралу можна записати у наступному вигляді:

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{a}}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{b}(\hat{\mathbf{a}}). \quad (4.16)$$

Цей варіант класичного методу моментів вже відноситься до байєсовських методів оцінки. Його обмежене застосування пояснюється труднощами при знаходженні апіорної щільності ймовірності $f_{pr}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})$.

Систему моментних рівнянь (4.16) можна побудувати на основі іншого підходу, який не потребує знання щільності ймовірності $f_{pr}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y})$. Суть цього підходу полягає у використанні для побудови моментних рівнянь формули Іто з наступним застосуванням операції математичного сподівання.

Нехай задано СДР Іто

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}, t)dt + \mathbf{G}(\mathbf{Y}, t)d\mathbf{W}(t), \quad (4.17)$$

де $d\mathbf{W}(t)$ – векторний процес Вінера.

Для довільної двічі диференційованої функції $\mathbf{Y}(t)$ формула Іто визначається як

$$\begin{aligned} dh(\mathbf{Y}) = & \left\{ \sum_{i=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y})f_i(\mathbf{Y}, t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h''_{y_i y_j}(\mathbf{Y}) [\mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) \mathbf{G}^T(\mathbf{Y}, t)]_{ij} \right\} dt + \\ & + \sum_{i,j=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y}) g_{ij}(\mathbf{Y}, t) dW_j(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Застосовуючи до (4.18) операцію математичного сподівання, маємо

$$\begin{aligned} \frac{dM\{h(\mathbf{Y})\}}{dt} = M \left\{ \sum_{i=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y}) f_i(\mathbf{Y}, t) \right\} + \\ + \frac{1}{2} M \left\{ \sum_{i,j=1}^n h''_{y_i y_j}(\mathbf{Y}) [\mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) \mathbf{G}^T(\mathbf{Y}, t)]_{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Формула (4.19) може бути застосована для отримання системи рівнянь для статистичних моментів k -го порядку, якщо полагати функцію $h(\mathbf{Y})$ відповідно рівною $y_i^2(t)$, $y_i(t)y_j(t)$, $y_i^3(t)$, $y_i^2(t)y_j(t)$, $y_i(t)y_j^2(t)$, $y_i^4(t)$, ..., $y_j^k(t)$.

Застосовуючи операцію математичного сподівання до СДР (4.17) та формулу (4.19) до відповідних функцій $h(\mathbf{Y})$, система рівнянь для статистичних моментів може бути записана як

$$\dot{\alpha}(t) = \mathbf{F}(\alpha, \theta) - \mathbf{b}(\alpha). \quad (4.20)$$

Якщо покласти $\dot{\alpha}(t) = 0$ в (4.20), отримуємо (4.16).

Параметри СДР (1) визначаються з рішення системи рівнянь для статистичних моментів (4.16). При чому, якщо число невідомих параметрів СДР менше кількості рівнянь для статистичних моментів, то із (4.16) потрібно вибрати l рівнянь.

Приклад 4.2. Нехай, як і в прикладі 4.1, заданий стаціонарний випадковий процес $\mathbf{Y}(t)$ з компонентами $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ описується СДР (4.1). Значення N_0 відоме, а $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$. За методом моментів отримати формули для визначення оцінок $\hat{b}_1$ і $\hat{c}_1$ параметрів b_1 і c_1 СДР (4.1).

Врахувавши, що $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$, перетворимо рівняння (4.1) в наступну систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2; \\ \dot{y}_2 = -b_1 y_2 - c_1 y_1 + n(t). \end{cases} \quad (4.21)$$

Застосовуючи операцію математичного сподівання до рівнянь (4.21) та формулу (4.19) до функцій $y_1^2(t)$, $y_2^2(t)$ і $y_1(t)y_2(t)$, система рівнянь (4.20) може бути записана як

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{1_1} &= \alpha_{1_2}; \\ \dot{\alpha}_{1_2} &= -b_1 \alpha_{1_2} - c_1 \alpha_{1_1}; \\ \dot{\alpha}_{2_1} &= 2\alpha_{1_1 1_2}; \\ \dot{\alpha}_{2_2} &= 2(-b_1 \alpha_{2_2} - c_1 \alpha_{1_1 1_2}) + N_0; \\ \dot{\alpha}_{1_1 1_2} &= \alpha_{2_2} - b_1 \alpha_{1_1 1_2} - c_1 \alpha_{2_1}, \end{aligned}$$

де α_{1_1} і α_{1_2} – відповідно початкові статистичні моменти 1-го порядку для y_1 і y_2 ; α_{2_1} і α_{2_2} – відповідно початкові статистичні моменти 2-го порядку для y_1 і y_2 ; $\alpha_{1_1 1_2}$ – змішаний початковий статистичний момент для y_1 і y_2 .

Якщо покласти $\dot{\alpha}(t) = 0$ в (4), отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} 2\alpha_{2_2} b_1 &= N_0; \\ \alpha_{2_1} c_1 &= \alpha_{2_2}. \end{aligned}$$

Із рішення цієї системи дуже легко отримати формули (4.15) для визначення оцінок $\hat{b}_1$ і $\hat{c}_1$ параметрів b_1 і c_1 .

Метод моментів дає оптимальні оцінки лише у тому випадку коли кількість моментних рівнянь n співпадає з числом невідомих параметрів m . У разі якщо n більше за m , то виникає проблема вибору моментних рівнянь для визначення оцінок параметрів. Дещо полегшує положення підхід, який було запропоновано у роботі [12]. В цій роботі у випадку лінійної системи (4.16) для вибору моментних рівнянь запропоновано використовувати критерій мінімуму числа обумовленості матриці відповідної системи рівнянь.

Приклад 4.3. Нехай, як і в прикладі 4.2, заданий стаціонарний випадковий процес $Y(t)$ з компонентами $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ описується СДР (4.1). Значення N_0 відоме, а $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$. За методом моментів необхідно отримати систему моментних рівнянь для визначення точкових оцінок наступних параметрів СДР (4.1):

- 1) b_1, b_2, c_1 і c_3 при відомому значенні N_0 ;
- 2) b_1, b_2, c_1, c_3 і N_0 .

Для (4.1) в [10, 11] отримана система з чотирнадцяти лінійних рівнянь для статистичних моментів, шість з яких можуть використовуватися для визначення невідомих параметрів СДР (4.1):

$$\alpha_{2_2} b_1 + \alpha_{3_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_{1_2}} c_1 + \alpha_{3_{1_2}} c_3 - 0,5 N_0 = 0; \quad (4.22)$$

$$\alpha_{1_{1_2}} b_1 + \alpha_{1_{2_{|2|}}} b_2 + \alpha_{2_1} c_1 + \alpha_{4_1} c_3 = \alpha_{2_2}; \quad (4.23)$$

$$\alpha_{4_2} b_1 + \alpha_{5_{|2|}} b_2 + \alpha_{1_{3_2}} c_1 + \alpha_{3_{3_2}} c_3 - 1,5 \alpha_{2_2} N_0 = 0; \quad (4.24)$$

$$\alpha_{3_{1_2}} b_1 + \alpha_{3_{2_{|2|}}} b_2 + \alpha_{4_1} c_1 + \alpha_{6_1} c_3 = 3 \alpha_{2_{2_2}}; \quad (4.25)$$

$$\alpha_{1_{1_2}} b_1 + \alpha_{1_{4_{|2|}}} b_2 + \alpha_{2_{2_2}} c_1 + \alpha_{4_{2_2}} c_3 - \alpha_{1_{1_2}} N_0 = \alpha_{4_2} / 3; \quad (4.26)$$

$$\alpha_{2_1 2_2} b_1 + \alpha_{2_1 3_{|2|}} b_2 + \alpha_{3_{|1|} 2} c_1 + \alpha_{5_{|1|} 2} c_3 - 0,5 \alpha_{2_1} N_0 = \alpha_{1_1 3_2}, \quad (4.27)$$

$$\text{де } \alpha_{k_i} = \langle y_i^k \rangle; \alpha_{k_i l_j} = \langle y_i^k y_j^l \rangle; \alpha_{k_{|2|}} = \langle y_2^{k-1} | y_2 | \rangle;$$

$$\alpha_{k_{|1|} l_{|2|}} = \langle y_1^k y_2^{l-1} | y_2 | \rangle.$$

У [12] за критерієм мінімуму числа обумовленості матриці системи моментних рівнянь запропоновано використовувати для визначення точкових оцінок параметрів b_1, b_2, c_1 і c_3 систему рівнянь (4.24)–(4.27), а для параметрів b_1, b_2, c_1, c_3 і N_0 систему рівнянь (4.22)–(4.25), (4.27).

Радикальним підходом до вирішення проблеми вибору моментних рівнянь для визначення оцінок невідомих параметрів, у тому числі і СДР, є узагальнений метод моментів (УММ). Хоча у порівнянні з методом моментів УММ значно більш складний у практичній реалізації для складних стохастичних систем.

Для пояснення суті цього методу перетворимо (4.16) в систему

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad (4.28)$$

яку, як показано в [10, 11], можна застосовувати у якості моментних умов в УММ.

У загальному випадку, коли кількість рівнянь для статистичних моментів більша за кількість невідомих параметрів, неможливо підібрати параметри, які оцінюються, так, щоб усі рівняння (4.28) були тотожно рівними нулю. Але можливо вибрати параметри, які оцінюються, таким чином, щоб отримати значення лівих частин цих рівнянь (4.28) як можна ближче до нуля, тобто знайти $\boldsymbol{\theta}$ як

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}). \quad (4.29)$$

Як показав Hansen, в результаті рішення задачі (4.29) отримуються слушні, але неефективні оцінки вектора θ . Для наближення оцінок θ до ефективних може бути застосований УММ, суть якого зводиться до рішення наступної задачі:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \{ \mathbf{m}(\theta, \alpha) \}^T \Omega(\theta, \alpha) \{ \mathbf{m}(\theta, \alpha) \}, \quad (4.30)$$

де $\Omega(\theta, \alpha)$ – $m \times m$ додатна напіввизначена матриця.

Зараз вектор $\mathbf{m}(\theta, \alpha)$ для оцінювання параметрів СДУ за УММ будується на основі відомої щільності ймовірності (або умовної щільності ймовірності) як функції θ і $\mathbf{Y}$. Нажаль, ці щільності ймовірності можна побудувати для обмеженого числа СДР.

У якості альтернативного підходу для побудови моментних умов в [10, 11] запропоновано використовувати формулу Іто. Враховуючи (4.19), введемо наступний $m \times 1$ вектор $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \theta)$, компоненти якого визначаються як

$$\begin{aligned} z_l(\mathbf{Y}, \theta) = & \sum_{i=1}^n h'_{y_i}(\mathbf{Y}) f_i(\mathbf{Y}, t) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h''_{y_i y_j}(\mathbf{Y}) [\mathbf{G}(\mathbf{Y}, t) \mathbf{G}^T(\mathbf{Y}, t)]_{ij}. \end{aligned}$$

Тоді вектор $\mathbf{m}(\theta, \alpha)$ можна визначити як

$$\mathbf{m}(\theta, \alpha) = M \{ \mathbf{z}(\mathbf{Y}, \theta) \}.$$

Матриця Ω є матрицею ваги та визначається як $\Omega = \mathbf{W}_D^{-1}$.

Зазначимо, виникає проблема стрімкого ускладнення рішення задачі (4.30) при збільшенні компонентів СДР. Так,

вже для СДР 2-го порядку, компоненти якого розподілені не за нормальним законом, та при використанні статистичних моментів до 4-го порядку вектор $\mathbf{m}(\theta, \alpha)$ складається з 14 компонентів, а матриця $\Omega(\theta, \alpha)$ має 196 елементів. Для вирішення цієї проблеми в [14] пропонується будувати нормалізоване СДР на основі нормалізуючого перетворення за початковим СДР. Далі на основі нормалізованого СДР знаходити вектор моментних умов і вагову матрицю. Вказаний підхід дозволяє зменшити розміри вектора моментних умов і вагової матриці. Так, при оцінюванні параметрів СДР 2-го порядку (4.1) вектор моментних умов вже складається з 5 компонентів, а вагова матриця має лише 25 елементів. При цьому точність оцінок параметрів СДР із застосуванням нормалізуючих перетворень зменшується незначно.

Етапи виконання роботи

Виконання лабораторної роботи включає в себе наступні етапи.

1) Обчислення у моменти часу t_i точкових оцінок початкових статистичних моментів випадкових процесів $y(t)$ і $\dot{y}(t)$ та визначення для цих моментів часу точкових оцінок наступних невідомих параметрів СДР (4.1):

а) b_1 і c_1 при відомому значенні N_0 та $b_2 = 0$ і $c_3 = 0$ за формулами (4.15);

б) b_1, b_2, c_1 і c_3 при відомому значенні N_0 із рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.24)–(4.27);

в) b_1, b_2, c_1, c_3 і N_0 із рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (4.22)–(4.25), (4.27).

2) Побудова графіків залежностей знайдених оцінок невідомих параметрів СДР (4.1) від часу.

3) Обчислення у моменти часу t_i точкових оцінок дисперсій знайдених оцінок невідомих параметрів СДР (4.1) та побудова графіків залежностей оцінок цих дисперсій від часу.

Контрольні питання

- 1) Якими за своїм характером можуть бути невідомі параметри?
- 2) Що називають параметричною ідентифікацією?
- 3) Назвіть основну математичну модель, яка описує поведінку динамічного об'єкта при дії на нього випадкових впливів.
- 4) Що таке стохастичне диференціальне рівняння?
- 5) Що таке білий шум?
- 6) Що таке функція втрат?
- 7) Назвіть типові функції втрат.
- 8) Коли можна використовувати байєсовські методи оцінювання?
- 9) Коли використовують небайєсовські методи оцінювання?
- 10) Що таке функція правдоподібності, мінімаксий ризик?
- 11) Що показує функція правдоподібності?
- 12) Як виконується оцінювання параметрів стохастичних диференціальних рівнянь методом максимальної правдоподібності, методом моментів, узагальненим методом моментів? Назвіть переваги та недоліки вказаних методів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вероятностные методы в вычислительной технике : учеб. пособие для вузов по спец. ЭВМ [Текст] / А. В. Крайников и др.; под ред. А. Н. Лебедева и Е. А. Чернявского. – М. : Высш. шк., 1986. – 312 с.
2. **Кендалл, М.** Теория распределений [Текст] / М. Кендалл, А. Стюарт // пер. с англ. / под ред. А. Н. Колмогорова. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 588 с.
3. **Лебедев, А. Н.** Вероятностные методы в инженерных задачах: справочник [Текст] / А. Н. Лебедев и др. – СПб. : Энергоатомиздат. Санкт-Петербургское отделение, 2000. – 333 с.
4. **Макс, Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: в 2 т.; пер. с франц. [Текст] / Ж. Макс. – М. : Мир, 1983. – Т. 1. – 312 с.
5. **Плескунин, В. И.** Теоретические основы организации и анализа выборочных данных в эксперименте [Текст] / В. И. Плескунин, Е. Д. Воронина; под ред. засл. деят. науки и техники РСФСР, д.т.н., проф. А. В. Башарина. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – 232 с.
6. **Полард, Дж.** Справочник по вычислительным методам статистики [Текст] / Дж. Полард; пер. с англ. В. С. Занаворова; под ред. и с предисл. Е. М. Четыркина. – М. : Финансы и статистика, 1982. – 344 с.

7. **Приходько, С. Б.** Параметрическая идентификация стохастической дифференциальной системы [Текст] / С. Б. Приходько // 36. наук. пр. УДМТУ. – Миколаїв : УДМТУ. – 1998. – № 9 (357). – С. 70–74.

8. **Приходько, С. Б.** Параметрическая идентификация стохастической дифференциальной системы второго порядка с нелинейным восстановлением [Текст] / С. Б. Приходько // 36. наук. пр. УДМТУ. – Миколаїв : УДМТУ. – 2001. – № 2 (374). – С.159–167.

9. **Приходько, С. Б.** Параметрическая идентификация нелинейной стохастической дифференциальной системы второго порядка при случайном воздействии с ненулевым временем корреляции [Текст] / С. Б. Приходько // 36. наук. пр. УДМТУ. – Миколаїв : УДМТУ. – 2002. – № 2 (380). – С.173–180.

10. **Приходько, С. Б.** Параметрическая идентификация стохастических дифференциальных систем по статистическим моментам выходных сигналов [Текст] / С. Б. Приходько // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація. Випуск 48 / Редкол. : Кунцевич В. М. (голова), Башков Є. О. (заступник голови) та ін. – Донецьк, 2002. – С. 289–297.

11. **Приходько, С. Б.** Выбор моментных условий для параметрической идентификации стохастических дифференциальных систем обобщенным методом моментов [Текст] / С. Б. Приходько // Труды II международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'03. Москва, 29–31 января 2003 г. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. – М. : Институт проблем управления им. В. А.Трапезникова РАН, 2003. – С.1292–1301.

12. **Приходько, С. Б.** Выбор моментных уравнений для параметрической идентификации стохастических дифференциальных систем методом моментов [Текст] / С. Б. Приходько // Вестник СевГТУ, Вып. 63: Автоматизация процессов

и управление : сб. науч. тр. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 2005. – С.119–127.

13. **Приходько, С. Б.** Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни "Обробка експериментальних даних на ЕОМ" [Текст] / С. Б. Приходько. – Миколаїв: НУК, 2005. – 52 с.

14. **Приходько, С. Б.** Оценка параметров нелинейных стохастических дифференциальных уравнений на основе нормализирующих преобразований / С. Б. Приходько // Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2012. – № 1015. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління", вип. 19. – С. 276–282.

15. **Prykhodko, S. B.** Statistical anomaly detection techniques based on normalizing transformations for non-Gaussian data [Text] / S. B. Prykhodko // Computational Intelligence (Results, Problems and Perspectives): Proceedings of the International Conference, May 12-15, 2015, Kyiv-Cherkasy, Ukraine / Taras Shevchenko National University of Kyiv and [etc]; Vitaliy Ye. Snytyuk (Editor). – Cherkasy : editor Jyly Chabanenko, 2015. – p.286-287. – ISBN 978-966-493-975-8.

16. **Приходько, С. Б.** Моделювання гаусівських випадкових величин із використанням перетворення Джонсона із сім'ї SU [Текст] / С. Б. Приходько // Інформатика та математичні методи в моделюванні. – 2015. – т.5, №.1. – С. 92–97.

17. **Приходько, С. Б.** Аналитическая зависимость для выбора распределения Джонсона семейства SL [Текст] / С. Б. Приходько, Л. Н. Макарова // Вестник ХНТУ. – Херсон: ХНТУ, 2012. – № 2 (45). – С. 101–104.

18. **Свешников, А. А.** Прикладные методы теории случайных функций [Текст] / А. А. Свешников. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 463 с.

19. Статистические методы для ЭВМ [Текст] / Под ред. К. Энслейна, Э. Релстона, Г. С. Уилфа: Пер. с англ./ Под ред. М. Б. Малютова. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 464 с.

20. Цифровая обработка сигналов: опыт использования персональных ЭВМ [Текст] / А. А. Иванько, В. И. Гордиенко, В. М. Соловьев, Я. А. Иванько. – К. : Техника, 1991. – 160 с.

ДОДАТОК А

Верхні 100α%-ві точки розподілу χ^2

У таблиці А1 наведені верхні 100α %-ві точки розподілу χ^2 , тобто такі значення x , що $P(\chi_v^2 > x) = \alpha$.

Таблиця А1

v	α							
	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,005
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,0439	0,0316	0,0398	0,0239	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,0201	0,0506	0,103	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	36,42	39,36	42,98	45,56

Продовж. табл. А1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
25	10,52	11,52	13,12	14,61	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	124,3	129,6	135,8	140,2

Нижні $100\alpha\%$ -ві точки розподілу χ^2 дорівнюють верхнім $100(1 - \alpha)\%$ -вим точкам.

Звернемо увагу на те, що якщо випадкова величина X має розподіл χ^2 з ν ступенями вільності і ν достатньо велике (скажемо, більше 30), то розподіл величини $Z = \sqrt{2X} - \sqrt{2\nu - 1}$ є наближено нормальним з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією. Це дає змогу застосовувати таблиці нормального розподілу і попередню формулу для знаходження значення x для достатньо великих ν .

ДОДАТОК Б

Верхні 100α%-ві точки *t*-розподілу Стюдента

У таблиці Б1 наведені верхні 100α %-ві точки *t*-розподілу Стюдента, тобто такі значення x , що $P(t_v > x) = \alpha$.

Таблиця Б1

ν	α				
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
1	2	3	4	5	6
1	63,66	31,82	12,71	6,31	3,08
2	9,92	6,96	4,30	2,92	1,89
3	5,84	4,54	3,18	2,35	1,64
4	4,60	3,75	2,78	2,13	1,53
5	4,03	3,36	2,57	2,01	1,48
6	3,71	3,14	2,45	1,94	1,44
7	3,50	3,00	2,36	1,90	1,42
8	3,36	2,90	2,31	1,86	1,40
9	3,25	2,82	2,26	1,83	1,38
10	3,17	2,76	2,23	1,81	1,37
11	3,11	2,72	2,20	1,80	1,36
12	3,06	2,68	2,18	1,78	1,36
13	3,01	2,65	2,16	1,77	1,35
14	2,98	2,62	2,14	1,76	1,34
15	2,95	2,60	2,13	1,75	1,34
16	2,92	2,58	2,12	1,75	1,34
17	2,90	2,57	2,11	1,74	1,33
18	2,88	2,55	2,10	1,73	1,33
19	2,86	2,54	2,09	1,73	1,33
20	2,84	2,53	2,09	1,72	1,32
21	2,83	2,52	2,08	1,72	1,32
22	2,82	2,51	2,07	1,72	1,32
23	2,81	2,50	2,07	1,71	1,32
24	2,80	2,49	2,06	1,71	1,32
25	2,79	2,48	2,06	1,71	1,32

Продовж. табл. БІ

1	2	3	4	5	6
26	2,78	2,48	2,06	1,71	1,32
27	2,77	2,48	2,05	1,70	1,31
28	2,76	2,47	2,05	1,70	1,31
29	2,76	2,47	2,04	1,70	1,31
30	2,75	2,46	2,04	1,70	1,31
40	2,70	2,46	2,02	1,68	1,30
50	2,68	2,42	2,01	1,67	1,30
60	2,66	2,40	2,00	1,67	1,30
80	2,64	2,39	1,99	1,66	1,29
100	2,63	2,37	1,98	1,66	1,29
200	2,60	2,36	1,97	1,65	1,29
500	2,59	2,34	1,96	1,65	1,28
∞	2,576	2,326	1,960	1,645	1,282

Для отримання нижніх $100\alpha\%$ -вих точок t -розподілу Стюдента необхідно змінити знак у верхній $100\alpha\%$ -вій точці.

ЗМІСТ

Передмова	3
Вступ	5
Лабораторна робота № 1. Первинна обробка експериментальних даних	7
Лабораторна робота № 2. Вибір аналітичної моделі закону розподілу експериментальних даних	19
Лабораторна робота № 3. Оцінювання кореляційної функції та спектральної щільності стаціонарного випадкового процесу	31
Лабораторна робота № 4. Оцінювання параметрів моделі стаціонарного випадкового процесу	43
Список літератури	64
Додаток А	68
Додаток Б	70

Навчальне видання

ПРИХОДЬКО Сергій Борисович
МАКАРОВА Лідія Миколаївна
ПУГАЧЕНКО Катерина Сергіївна

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ТА ЗАВДАННЯ**
до виконання лабораторних робіт з дисципліни
"Обробка експериментальних даних на комп'ютері"

Комп'ютерне складання та верстання *В. В. Москаленко*
Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 4,3. Тираж 100 прим. Вид № 43. Зам. № 50.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.