

ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ У НЕЙМОВІРНІСНИХ ЗАДАЧАХ

У теорії ймовірностей широко використовуються різноманітні математичні методи. Прикладів проникнення теорії ймовірностей в інші розділи математики небагато, вона неначе відокремлена від іншої математики напівнепроникною плівкою. Яскравим прикладом лишається метод Монте-Карло, який суттєво збагатив сучасну обчислювальну математику і проілюстрував тісний зв'язок між статистичною та геометричною ймовірностями. З 1982 року триває досить успішне використання конструктивних можливостей геометричної ймовірності в задачах лагранжевої та ермітової інтерполяції функцій, зокрема, фінітних функцій метода скінченних елементів.

Пошуки прикладів проникнення теорії ймовірностей у класичні розділи вищої та прикладної математики є досить цікавою задачею. Результати таких пошуків наведені в даній роботі. Стаття ілюструє нетрадиційний підхід до розв'язання класичних задач аналітичної геометрії. Природним узагальненням і розширенням поняття класичної ймовірності на нескінченну множину точок є геометрична ймовірність, що обчислюється як відношення мір (довжин, площ, об'ємів) в одно-, дво- і тривимірних випадках. Ймовірність влучити в будь-яку частину області пропорційна мірі цієї частини (довжині, площі, об'єму) і не залежить від її розташування і форми.

Наведено приклади використання геометричної ймовірності у якості засобу побудови рівнянь прямої на площині і у просторі, а також рівнянь площини. На основі ймовірнісної інтерпретації сконструйовано наступні моделі: рівняння прямої, що проходить через дві точки на площині і у просторі, рівняння прямої у відрізках, нормальне рівняння прямої, рівняння площини у відрізках, нормальне рівняння площини. Варто зауважити, що ймовірнісна інтерпретація здатна створити особливі умови для виникнення інших розділів математики. Дидактичними перевагами методу ймовірнісних інтерпретацій є наочність, зрозумілість, стислість та зручність.

Ключові слова: аналітична геометрія, рівняння прямих і площин, геометрична ймовірність, ймовірнісний зміст лінійних рівнянь в декартових координатах.

ХОМЧЕНКО А. Н.
Черноморский национальный университет имени Петра Могили, г. Николаев
Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО
Херсонский национальный технический университет

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ В НЕВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧАХ

В теории вероятностей широко используются разнообразные математические методы. Примеров проникновения теории вероятностей в другие разделы математики немного, она как будто отделена от другой математики полупроницаемой пленкой. Ярким примером остается метод Монте-Карло, который значительно обогатил современную вычислительную математику и проиллюстрировал тесную связь между статистической и геометрической вероятностями. С 1982 года продолжается достаточно успешное использование конструктивных возможностей геометрической вероятности в задачах лагранжевой и эрмитовой интерполяции функций, в частности, финитных функций метода конечных элементов.

Поиск примеров проникновения теории вероятностей в классические разделы высшей и прикладной математики является достаточно интересной задачей. Результаты таких поисков приведены в данной работе. Статья иллюстрирует нетрадиционный подход к решению классических задач аналитической геометрии. Естественным обобщением и расширением понятия классической вероятности на бесконечное множество точек является геометрическая вероятность, которая вычисляется как отношение мер (длин, площадей, объемов) в одно-, дву- и трехмерных случаях. Вероятность попасть в какую-либо часть области пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от её расположения и формы.

Приведены примеры использования геометрической вероятности в качестве способа построения уравнений прямой на плоскости и в пространстве, а также уравнений плоскостей. На основании вероятностной интерпретации сконструированы следующие модели: уравнение прямой, которая проходит через две точки на плоскости и в пространстве, уравнение прямой в отрезках, нормальное уравнение прямой, уравнение плоскости в отрезках, нормальное уравнение плоскости.

Следует отметить, что вероятностная интерпретация способна создать особые условия для возникновения других разделов математики. Дидактическими преимуществами метода вероятностных интерпретаций является наглядность, понятность, краткость и удобство.

Ключевые слова: аналитическая геометрия, уравнения прямых и плоскостей, геометрическая вероятность, вероятностный смысл линейных уравнений в декартовых координатах.

A. N. KHOMCHENKO
Petro Mohyla Black Sea National University
O.I. LITVINENKO, I.O. ASTIONENKO
Kherson National Technical University

PROBABILISTIC MODELS AND NONPROBABILISTIC PROBLEMS

Probability theory is widely used in various mathematical methods. There are few examples of penetration of probability theory into other sections of mathematics. It seems to be separated from the other mathematics by semi-impermeable film. The striking example is Monte-Carlo method which has significantly enriched the computational mathematics and illustrated the close relationship between statistical and geometric probabilities. Since 1982 the constructive possibilities of geometric probability in the problems of Lagrangian and Hermitian interpolation of functions, in particular, of finite functions of the finite element method, continue to be successfully used.

The search for examples of the penetration of probability theory into the classical sections of higher and applied mathematics is quite an interesting task. The results of such searches are given in this work. The article illustrates an non-traditional approach to solving the classical problems of analytical geometry. A natural generalization and extension of the concept of classical probability to an infinite set of points is a geometric probability, which is calculated as the ratio of measures (lengths, areas, volumes) in one-, two- and three-dimensional cases. The probability of hitting any part of the area is proportional to the extent of this part (length, area, volume) and does not depend on its location and shape.

Examples of the use of geometric probability as a means of constructing the equations of the straight line on the plane and in space, as well as the equations of the plane are given. On the basis of probabilistic interpretation, the following models have been constructed: the equation of the straight line passing through two points on the plane and in space, intercept form of the equation of a straight line, the normal equation of the line, the equation of the plane in the segments, the normal equation of the plane. It is worth noting that probabilistic interpretation can create special conditions for the emergence of other sections of mathematics. The didactic advantages of the probabilistic interpretation method are visibility, clarity, brevity, and convenience.

Keywords: analytical geometry, equations of straight lines and planes, geometrical probability, probabilistic content of linear equations in Cartesian coordinates.

Постановка проблеми

Кращим вступом до цієї статті буде цитата із статті [1] видатного спеціаліста з теорії ймовірностей академіка А. В. Скорохода: «Спеціалісти з теорії ймовірностей (або «ймовірністики») широко використовують у своїй роботі різноманітні математичні методи. Проте спеціалісти з інших математичних наук за незначними винятками не знайомі з азами теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей неначе відокремлена від іншої математики напівнепроникною плівкою – результати інших дисциплін легко проникають через цю плівку, а зворотного руху поки що не видно. Беручи до уваги, що живе існування науки – в людській свідомості, легко прийти до висновку, що ця плівка знаходиться також у свідомості, причому у свідомості «неймовірністиків».

Стаття А. В. Скорохода вже більше 20-ти років надихає зацікавлених читачів на пошуки прикладів проникнення теорії ймовірностей у класичні розділи вищої та прикладної математики. Деякі приклади наведені нижче. Сподіваємося, що ці приклади дадуть нові теми для роздумів та спостережень.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій

Щодо відсутності «зворотного руху» треба погодитися з А. В. Скороходом. Ситуація майже не змінилася. Прикладів проникнення теорії ймовірностей в інші розділи математики небагато. Яскравим прикладом лишається метод Монте-Карло [2-4], який суттєво збагатив сучасну обчислювальну математику і проілюстрував тісний зв'язок між статистичною (Мізес) та геометричною (Бюффон) ймовірностями. З 1982 р. [5-10] триває досить успішне використання конструктивних можливостей геометричної ймовірності [11] в задачах лагранжевої та ермітової інтерполяції функцій, зокрема, фінітних функцій метода скінченних елементів. Ця тема є дуже цікавою з багатьох точок зору. Це невичерпне джерело першокласного «освітнього матеріалу». Вона представляє собою унікальну комбінацію простоти і не тривіальності, яка задовольняє як смаки досвідчених професіоналів, так і ще недосвідчених аматорів.

Мета дослідження

Мета статті – показати приклади проникнення теорії ймовірностей в класичні задачі аналітичної геометрії. Варто зауважити, що ці приклади пройшли тест на «зрозумілість + стислість + зручність» серед студентів вищої школи.

Викладення основного матеріалу дослідження

Більшість математичних доведень починається зі слова «нехай». Ми не завжди помічаємо, що з появою слова «нехай» включається фактор випадковості і відкриваються нові можливості для конструювання ймовірнісних моделей. Нижче шляхом використання геометричної ймовірності отримано рівняння прямих ліній на площині і площин у тривимірному просторі.

1. Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$

Не порушуючи загальності розташуємо задані точки у першій чверті (рис. 1). Нехай точка $M(x, y)$ належить відрізку M_1M_2 .

Щоб отримати рівняння шуканої прямої, достатньо вкинути випадкову точку у відрізок M_1M_2 і знайти ймовірність попадання точки у відрізок M_1M . Позначимо через A випадкову подію: $A = \{\text{випадкова точка потрапила в } M_1M\}$. Ймовірність події A : $p(A) = \frac{\text{довжина } M_1M}{\text{довжина } M_1M_2}$. Цю ймовірність краще визначати через проекції на осі $0x$ та $0y$: $p(A) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, з іншого боку $p(A) = \frac{y_1-y}{y_1-y_2}$.

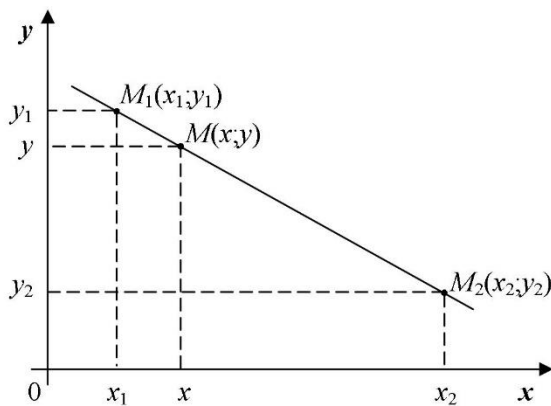


Рис. 1. Пряма, що проходить через M_1 і M_2

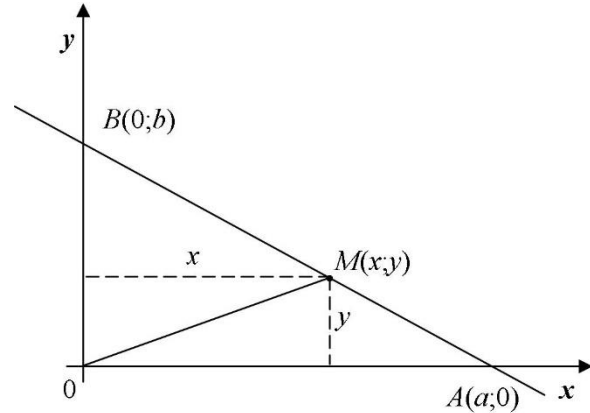


Рис. 2. Пряма у відрізках a і b

Лишається порівняти ймовірності:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1)$$

Неважко переконатися, що це пряма лінія і вона проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

Зауваження. Якщо дві точки M_1 і M_2 задано у просторі, ймовірнісна інтерпретація задачі зберігається, а рівняння прямої набуває вигляду:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (2)$$

2. Рівняння прямої у відрізках

Це рівняння, як відомо [12], має вигляд

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3)$$

і є дуже зручним для геометричної побудови прямої, що перетинає осі координат (рис. 2) у точках $(a, 0)$ та $(0, b)$. Покажемо, як отримати рівняння (3), скориставшись геометричною ймовірністю. Нагадаємо, що сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці. Саме такий зміст має рівняння (3). Нехай точка $M(x, y)$ лежить на прямій. Радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ поділяє трикутник OAB на два трикутники OMA і OMB . Будемо кидати випадкову точку у ΔOAB . Розглянемо випадкові події:

$A = \{\text{випадкова точка потрапила у } \Delta OMA\}$,

$B = \{\text{випадкова точка потрапила у } \Delta OMB\}$.

Відповідні ймовірності визначаємо геометрично:

$$p(A) = \frac{\text{площа } \Delta OMA}{\text{площа } \Delta OAB}, \quad p(B) = \frac{\text{площа } \Delta OMB}{\text{площа } \Delta OAB},$$

Зрозуміло, що $p(A) + p(B) = 1$.

Після підстановки $\frac{0,5ay}{0,5ab} + \frac{0,5bx}{0,5ab} = 1$ отримаємо рівняння (3).

Варто зауважити, що відносну площу випадкового трикутника визначати не обов'язково, достатньо мати відносну висоту трикутника.

3. Нормальне рівняння прямої на площині.

На рис. 3 проведено нормаль (перпендикуляр) до прямої. Через $p \geq 0$ позначено довжину відрізка ON , через $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ позначено кут між ON і Ox . Якщо числа p і α відомі, можна скласти нормальне рівняння прямої. Ймовірність попадання випадкової точки у ΔOMB тепер виглядає так $p(B) = \frac{x \cdot \cos \alpha}{p}$, ймовірність попадання випадкової точки у ΔOMA : $p(A) = \frac{y \cdot \sin \alpha}{p}$. Таким чином, $\frac{x \cdot \cos \alpha}{p} + \frac{y \cdot \sin \alpha}{p} = 1$. Зазвичай, нормальне рівняння прямої записують у вигляді:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (4)$$

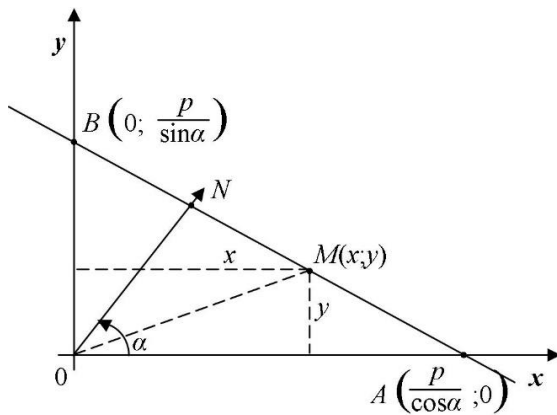


Рис. 3. «Нормальна» пряма

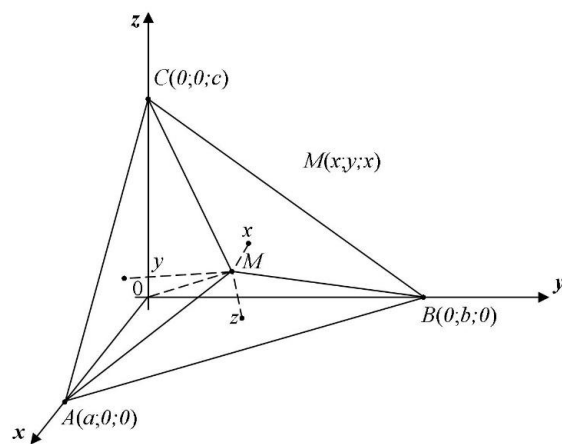


Рис. 4. Площина у відрізках

4. Рівняння площини у відрізках

На рис. 4 показано площину, яка відрізає від Ox відрізок a , від Oy – b , від Oz – c . Вибір поточної точки $M(x, y, z)$ на поверхні спричиняє появу трьох випадкових тетраедрів, які складають основний тетраедр $OABC$ і мають спільну вершину M . Зрозуміло, що рівняння площини у відрізках, як і рівняння прямої у відрізках, має чіткий ймовірнісний зміст. Ймовірність попадання випадкової точки у конкретний тетраедр можна визначати як відносний об'єм випадкового тетраедра. Але краще скористатися відносною висотою тетраедра. Позначимо через A, B, C наступні випадкові події:

$A = \{\text{випадкова точка потрапила у тетраедр } M0BC\},$

$B = \{\text{випадкова точка потрапила у тетраедр } M0AC\},$

$C = \{\text{випадкова точка потрапила у тетраедр } M0AB\}.$

Ми маємо повну групу випадкових подій з відповідними ймовірностями:

$$p(A) = \frac{x}{a}, \quad p(B) = \frac{y}{b}, \quad p(C) = \frac{z}{c}.$$

Сума цих ймовірностей, як відомо, дорівнює 1.

Таким чином, рівняння площини у відрізках має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (5)$$

5. Нормальне рівняння площини

Розглянемо фрагмент площини (рис. 4). Зазначимо, що площину можна визначити однозначно, якщо відома довжина нормалі p , а також α, β, γ , що утворює нормаль відповідно з Ox, Oy, Oz . Що стосується кутів, достатньо знати лише два із них. Третій визначають із тотожності:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Тепер ймовірності попадання у випадкові тетраедри мають вигляд:

$$p(A) = \frac{x \cos \alpha}{p}; \quad p(B) = \frac{y \cos \beta}{p}; \quad p(C) = \frac{z \cos \gamma}{p}.$$

Сума ймовірностей дорівнює 1. Таким чином, ми отримали нормальне рівняння площини, як 3D-аналог нормального рівняння прямої (4):

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (6)$$

Висновки

Приклади, що наведені у статті, прості для розуміння і можуть бути використані не тільки в роботі математичних гуртків. Запропоновані підходи мають переконати зацікавленого читача в тому, що аналітична геометрія не є ізольованим розділом для експериментування, а швидше типовим прикладом цікавого ймовірного феномену. Пошуки нових прикладів тривають.

Список використаної літератури

1. Скороход А. В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках. *У світі математики*. Том 3, Вип. 2. К. : ТВ і МС, 1997. С. 2–4.
2. Соболев І. М. Метод Монте-Карло. М. : Наука, 1985. 80 с.
3. Хомченко А. Н. Вероятностные схемы в дискретном анализе температурных полей. *Инженерно-физический журнал*, 1988. Т. 55, № 2. С. 323–324.
4. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир. 240 с.
5. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ. Ивано-Франковск: Ив.-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. 6 с. Деп. в ВИНТИ, № 1213.
6. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход. Ивано-Франковск: Ив.-Франк. ин-т нефти и газа, 1982. 7 с. Деп. в ВИНТИ, № 5167.
7. Хомченко А. Н., Козуб Н. А. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность. *Проблеми інформаційних технологій*. Вип. 5. Херсон: ХНТУ, 2009. С. 145–148.
8. Астіоненко І.О., Гучек П.Й., Литвиненко О.І., Тулученко Г.Я. Використання барицентричних координат при моделюванні серендипової поверхні. *Сучасні проблеми моделювання. Зб. наукових праць. МДПУ ім. Б.Хмельницького*. Вип. 4. Мелітополь: МДПУ, 2015. С. 3-8.
9. Астіоненко І.А., Литвиненко Е.І., Хомченко А.Н. Вероятностная природа кусочно-планарной аппроксимации. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. №5 (176) . Выпуск 34. Белгород: БелГУ, 2014. С. 142-149.
10. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.І., Астіоненко І.А. Геометрия серендиповых полиномов: обратные задачи. *Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-техн. збірник*. – Вип. 82. Київ: КНУБА, 2009. С. 58-63.
11. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М. : Наука, 1972. 192 с.
12. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика . К. : А.С.К., 2011. 648 с.

References

1. Skorokhod A. V. Osoblyvyi kharakter teorii ymovirnostei v matematychnykh naukakh. *U sviti matematyky*. Tom 3, Vyp. 2. K. : TV i MS, 1997. S. 2–4.
2. Sobol I. M. Metod Monte-Karlo. M. : Nauka, 1985. 80 s.
3. Homchenko A. N. Veroyatnostnyie shemyi v diskretnom analize temperaturnyih polei. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*, 1988. T. 55, # 2. S. 323–324.
4. Sekey G. Paradoxyi v teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike. M.: Mir. 240 s.
5. Homchenko A. N. Nekotoryie veroyatnostnyie aspektyi MKE. Ivano-Frankovsk: Iv.-Frank. in-t nefti i gaza, 1982. 6 s. Dep. v VINITI, # 1213.
6. Homchenko A. N. Metod konechnyih elementov: stohasticheskii podhod. Ivano-Frankovsk: Iv.-Frank. in-t nefti i gaza, 1982. 7 s. Dep. v VINITI, # 5167.
7. Homchenko A. N., Kozub N. A. Interpolyatsiya po Kunsu i geometricheskaya veroyatnost. *Problemi Informatsiynykh tehnologiy*. Vip. 5. Herson: HNTU, 2009. S. 145–148.
8. Astionenko I.O., Huchek P.I., Lytvynenko O.I., Tuluchenko H.Ia. Vykorystannia barysentrychnykh koordynat pry modeliuvanni serendypovoi poverkhni. *Suchasni problemy modeliuvannia. Zb. naukovykh prats. MDPU im. B.Khmelnyskoho*. Vyp. 4. Melitopol: MDPU, 2015. S. 3-8.
9. Astionenko I.A., Litvinenko E.I., Homchenko A.N. Veroyatnostnaya priroda kusochno-planarnoy approksimatsii. *Nauchnyie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika*. #5 (176) . Vyipusk 34. Belgorod: BelGU, 2014. S. 142-149.
10. Homchenko A.N., Litvinenko E.I., Astionenko I.A. Geometriya serendipovyih polinomov: obratnyie zadachi. *Prykladna heometrii ta inzhenerna hrafiika. Mizhvidomchyi nauково-tekhn. zbirnyk*. – Vyp. 82. Kyiv: KNUBA, 2009. S. 58-63.
11. Kendall M., Moran P. Geometricheskie veroyatnosti. M. : Nauka, 1972. 192 s.
12. Dubovyk V. P., Yuryk I. I. Vyshcha matematyka . K. : A.S.K., 2011. 648 s.

ХОМЧЕНКО Анатолій Никифорович – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського національного університету імені Петра Могили, м. Миколаїв,
e-mail: khan@chmnu.edu.ua

ЛИТВИНЕНКО Олена Іванівна – к.т.н., доцент кафедри вищої математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.
e-mail: mmkntu@gmail.com

АСТІОНЕНКО Ігор Олександрович - к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики та математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.
e-mail: astia@ukr.net