

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПЕРВОМАЙСЬКА ФІЛІЯ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
імені адмірала Макарова

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

М.Л. ГОРДІЄНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

**Методичні вказівки
до виконання практичних робіт**

**Первомайськ
2020**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ПЕРВОМАЙСЬКА ФІЛІЯ
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
імені адмірала Макарова

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

М.Л. ГОРДІЄНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Методичні вказівки
до виконання практичних робіт

Первомайськ
2020

УДК 517.3
ББК 22.16

*Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Первомайської філії
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
(Протокол № _____ від ____ р.)*

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних дисциплін

М.Л. Гордієнко

Вища математика: Інтегральне числення функцій однієї змінної:
методичні вказівки до виконання практичних робіт / Укладач: М.Л. Гордієнко.
–Первомайськ: ПФ НУК, 2020. –49 с.

Методичні вказівки до виконання практичних робіт відповідають робочій програмі дисципліни «Вища математика». Методичні вказівки розроблено до змістового модуля «Інтегральне числення функцій однієї змінної». Подано основні теоретичні відомості, зразки детального розв’язування основних типових задач з повним аналізом розв’язку, завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів з вказівками і відповідями, питання для самоперевірки.

Для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання спеціальностей 131 Прикладна механіка, 142 Енергетичне машинобудування, 144 Теплоенергетика.

УДК 517.3
ББК 22.16

Рецензент:

© М.Л. Гордієнко
© Первомайська філія
Національного університету
кораблебудування, 2020
© Національний університет
кораблебудування, 2020

ВСТУП

Методичні вказівки створено з метою:

- допомогти студентам опанувати необхідні теоретичні знання та вміння застосовувати основні поняття, властивості і методи обчислення невизначених інтегралів;
- сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач фізики, механіки, геометрії та задач фахових спеціальностей;
- виробити вміння самостійно розв'язувати задачі та використовувати літературу за даним розділом;
- навчити застосовувати теоретичні знання на практиці;
- навчити самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне та аналітичне мислення;
- виробити навички вибору ефективного методу розв'язання задач.

Методичні вказівки включають 6 практичних робіт змістового модуля «Інтегральне числення функцій однієї змінної». Усі практичні роботи мають однакову структуру: стисло викладено основні теоретичні відомості, зразки розв'язування основних типів задач, завдання для самостійної роботи, питання для самоперевірки.

Самостійне розв'язання задач, яке формує основу математичного мислення, передбачає активну роботу з теоретичним матеріалом, використанням конспекту лекцій, посібників та підручників. Деякі з них подано у списку рекомендованої літератури.

**ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА.
МЕТОД БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ**

Основні теоретичні відомості

Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* для заданої функції $f(x)$, якщо для всіх x з області визначення $f(x)$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x), \text{ або } dF = f(x)dx.$$

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то *будь-яка інша первісна* для $f(x)$ має вигляд $\Phi(x) = F(x) + C$, де C – довільна стала.

Сукупність всіх первісних $F(x) + C$ ($C = \text{const}$) для заданої функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають символом

$$\int f(x)dx,$$

де $\int$ – знак невизначеного інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція.

Якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Операцію знаходження первісної або невизначеного інтеграла від функції $f(x)$ називають *інтегруванням* функції $f(x)$.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл – це сім'я кривих (інтегральних кривих), кожна з яких утворюється шляхом зсуву однієї з кривих паралельно самій собі вгору або вниз вздовж осі Oy .

Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$
2. $d \int f(x) dx = f(x) dx, \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$
3. $\int [af(x) + b\varphi(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int \varphi(x) dx \quad (a, b - \text{const}).$
4. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$

де a і b сталі ($a \neq 0$).

Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C$, $b = 0$.

Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(x+b) dx = F(x+b) + C$

Таблиця невизначених інтегралів

Нехай u – незалежна змінна або неперервно диференційована функція, тоді справедливі формули ($C = \text{const}$):

$$1. \int 0 dx = C;$$

$$2. \int du = u + C;$$

$$3. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$4. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$5. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$$

$$6. \int e^u du = e^u + C;$$

$$7. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$8. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$9. \int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C;$$

$$10. \int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C;$$

$$11. \int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\operatorname{ctg} u + C;$$

$$12. \int \frac{1}{\cos^2 u} du = \operatorname{tg} u + C;$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C \\ -\arccos \frac{u}{a} + C \end{cases};$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases};$$

$$15. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C;$$

$$16. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

Для перевірки правильності інтегрування необхідно обчислити похідну від отриманого результату, яка повинна дорівнювати підінтегральній функції:

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

Безпосереднє інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей і таблиці інтегралів називається безпосереднім інтегруванням.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{2 - \sqrt[3]{x} - 2x + 3x^2 + x^2 3^x}{x^2} dx.$$

Розв'язання. Використовуючи властивості (1), (2) і формулу (3) таблиці, одержимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{2 - \sqrt[3]{x} - 2x + 3x^2 + x^2 3^x}{x^2} dx &= 2 \int x^{-2} dx - \int x^{-\frac{1}{3}} dx - 2 \int \frac{dx}{x} + 3 \int dx + \int 3^x dx = \\ &= 2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - 2 \ln|x| + 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C = -\frac{2}{x} + \frac{3}{2x^{2/3}} - 2 \ln|x| + 3x + \frac{3^x}{\ln 3} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{16 + 4x^2}.$$

Розв'язання. Використовуючи властивість (1) і формулу (14) таблиці, одержимо:

$$\int \frac{dx}{16 + 4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{2^2 + x^2} = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 5}}.$$

Розв'язання. Використовуючи властивість (1) і формулу (15) таблиці, одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{5}{2}} \right| + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв'язання. Використовуючи властивості (1) (3) і формулу (12) таблиці, одержимо:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли:

1.1. $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx;$

1.2. $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x} dx;$

1.3. $\int \sqrt{1 - \cos 2x} dx;$

1.4. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^3 dx;$

1.5. $\int \left(2e^x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx;$

1.6. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx;$

1.7. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx;$

1.8. $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$

1.9. $\int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2}{x^2} dx;$

1.10. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx;$

1.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}};$

1.12. $\int (4x + 3)^{17} dx;$

1.13. $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx;$

1.14. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx;$

1.15. $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx;$

1.16. $\int (9 + 7x^2)^5 dx;$

1.17. $\int \sqrt{1-x} dx;$

1.18. $\int \frac{x^2}{(4x^3 + 9)^4} dx;$

1.19. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx;$

1.20. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$

$$1.21. \int (2x^4 + 5x - 3) dx;$$

$$1.22. \int (4x - 1) \sqrt[3]{x} dx;$$

$$1.23. \int \frac{(\sqrt{x} + 5)^2}{x} dx;$$

$$1.24. \int \cos \frac{x}{4} dx;$$

$$1.25. \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{2}{3} x};$$

$$1.26. \int 9^{-x} dx;$$

$$1.27. \int \frac{dx}{\cos^2 (2 - x)};$$

$$1.28. \int \frac{dx}{2 + 3x^2};$$

$$1.29. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 4x^2}};$$

$$1.30. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 10x^2}};$$

$$1.31. \int \frac{dx}{x + 2};$$

$$1.32. \int \frac{1}{2 - 9x} dx;$$

$$1.33. \int \frac{x^3}{5x^4 + 1} dx;$$

$$1.34. \int \operatorname{tg} x dx;$$

$$1.35. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$$

$$1.36. \int \frac{dx}{1 + \cos x};$$

$$1.37. \int \frac{4 - x}{2 + \sqrt{x}} dx;$$

$$1.38. \int \frac{dx}{x^2 (x^2 + 1)};$$

$$1.39. \int \sin^2 5x dx;$$

$$1.40. \int \frac{(\sin^3 x + \cos^3 x) dx}{\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x}.$$

Відповіді

$$1.1. \sin x + C;$$

$$1.2. -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C;$$

$$1.3. -\sqrt{2} \cos x + C;$$

$$1.4. \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{9}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + \frac{18}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + \frac{x^2}{2} + C;$$

$$1.5. 2e^x + \operatorname{arctg} x + C;$$

$$1.6. \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} x + C;$$

$$1.7. \frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C;$$

$$1.8. 3\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x + C;$$

$$1.9. 4\ln|x| - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C;$$

$$1.10. x + \cos x + C;$$

$$1.11. 3\arcsin \frac{x}{3} + C;$$

$$\begin{aligned}
& \text{1.12. } \frac{(4x+3)^{18}}{72} + C; & \text{1.13. } \frac{\ln^5 x}{5} + C; & \text{1.14. } \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C; & \text{1.15. } \frac{-\operatorname{ctg}^2 x}{2} + C; \\
& \text{1.16. } \frac{1}{84}(9+7x^2)^6 + C; & \text{1.17. } -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} + C; & & \text{1.18. } -\frac{1}{36} \frac{1}{(4x^3+9)^3} + C; \\
& \text{1.19. } -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x} + C; & \text{1.20. } \sqrt{1+x^2} + C; & \text{1.21. } \frac{2}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C; \\
& \text{1.22. } \frac{12}{7}x^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C; & \text{1.23. } x + 20\sqrt{x} + 25\ln|x| + C; & \text{1.24. } 4\sin\frac{x}{4} + C; \\
& \text{1.25. } -\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{2}{3}x + C; & \text{1.26. } -\frac{9^{-x}}{\ln 9} + C; & \text{1.27. } -\operatorname{tg}(2-x) + C; \\
& \text{1.28. } \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\cdot x}{\sqrt{2}} + C; & \text{1.29. } \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}\right| + C; & \text{1.30. } \frac{1}{\sqrt{10}}\arcsin\sqrt{10}\cdot x + C; \\
& \text{1.31. } \ln|x+2| + C; & \text{1.32. } -\frac{1}{9}\ln|2-9x| + C; & \text{1.33. } \frac{1}{20}\ln|5x^4+1| + C; \\
& \text{1.34. } -\ln|\cos x| + C; & \text{1.35. } \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C \left\{ \begin{array}{l} \text{вказівка: } \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \end{array} \right\}; \\
& \text{1.36. } \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C \left\{ \begin{array}{l} \text{вказівка: } 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \end{array} \right\}; \\
& \text{1.37. } 2x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C \left\{ \begin{array}{l} \text{вказівка: } 4-x = (2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x}) \end{array} \right\}; \\
& \text{1.38. } -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg}x + C \left\{ \begin{array}{l} \text{вказівка: } \frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)} \end{array} \right\}; \\
& \text{1.39. } \frac{1}{2}x - \frac{1}{20}\sin 10x + C \left\{ \begin{array}{l} \text{вказівка: } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \end{array} \right\}; \\
& \text{1.40. } \sin x - \cos x + C \left\{ \begin{array}{l} \text{вказівка: } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати означення первісної функції.
2. Сформулювати означення невизначеного інтеграла.
3. Написати основні властивості невизначеного інтеграла.
4. Написати таблицю інтегралів.
5. Дати визначення операції інтегрування.
6. Як перевірити результат інтегрування?
7. Пояснити геометричний зміст невизначеного інтеграла.

МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

Основні теоретичні відомості

Метод заміни змінної. Нехай інтеграл $\int f(x)dx$ не є табличним. Введемо підстановку $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, що має обернену функцію. Отримаємо формулу заміни змінної інтегрування:

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

Після обчислення інтеграла в правій частині формули необхідно повернутися до змінної x , виразивши t через x із формули $x = \varphi(t)$.

У багатьох випадках використовують формулу:

$$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right\} = \int f(t)dt,$$

тобто, якщо під інтегралом одночасно присутні функція $\varphi(x)$ та її диференціал $d\varphi = \varphi'(x)dx$, то використовується підстанова $t = \varphi(x)$, яка спрощує підінтегральний вираз.

Якщо під знаком інтеграла є вираз

$$\frac{1}{x}dx \left(\frac{1}{x}dx = d(\ln x) = \varphi'(x)dx = d\varphi(x) \right),$$

то потрібно робити підстановку $\ln x = t$.

Аналогічно:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x) \quad \text{підстанова } t = \operatorname{tg} x;$$

$$dx = \frac{1}{a}d(ax + b) \quad \text{підстанова } t = ax + b;$$

$$\sin x dx = -d(\cos x) \quad \text{підстанова } t = \cos x;$$

$$x^2 dx = \frac{1}{3}d(x^3) \quad \text{підстанова } t = x^3;$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) \quad \text{підстанова } t = \arcsin x;$$

$$\sin 2x dx = -d(\cos^2 x + a) \quad \text{підстановка } t = \cos^2 x + a.$$

Інтегрування частинами. Якщо на множині $\{X\}$ функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із похідними, то має місце *формула інтегрування частинами*:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Розглянемо три групи інтегралів, для обчислення яких застосовується формула інтегрування частинами. Нехай $P_n(x)$ – многочлен степеня n , а множником під інтегралом є *одна* з функцій, поданих у фігурних дужках. Рекомендований вибір u і dv наведений у дужках після знака рівності.

1. Інтеграли виду

$$\int P_n(x) \{a^{bx}; \cos bx; \sin bx\} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = P_n(x); du = P'_n(x) \cdot dx \\ dv = \{...\} dx; v = \int \{...\} dx \end{array} \right\}.$$

Однократне застосування формули інтегрування частинами дозволяє знизити на одиницю степінь многочлена під інтегралом, n -кратне застосування формули інтегрування частинами зводить дані інтеграли до табличних.

2. Інтеграли виду

$$\int P_n(x) \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x; \arccos x; \\ \log_a^k x; \operatorname{arctg} x; \operatorname{arccotg} x \end{array} \right\} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \{...\}; du = \{...\}' dx \\ dv = P_n(x) dx; v = \int P_n(x) dx \end{array} \right\}.$$

3. Інтеграли виду

$$I = \int e^{ax} \{\sin bx; \cos bx\} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax}; du = ae^{ax} dx \\ dv = \{...\} dx; v = \int \{...\} dx \end{array} \right\}.$$

Це так звані “циклічні” інтеграли. Після двократного інтегрування частинами у правій частині рівності одержимо початковий інтеграл I з деяким коефіцієнтом. Із отриманого лінійного рівняння треба знайти I .

Зразки розв’язання типових завдань

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt[5]{(2-3x)^4} dx$.

Розв’язання. Підінтегральна функція є степеневою функцією з основою $2-3x$, тому зробимо підстановку $t = 2-3x$, тоді $dt = -3dx$. Одержимо:

$$\int \sqrt[5]{(2-3x)^4} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2-3x \\ dt = -3dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int t^{4/5} dt = -\frac{5}{27} t^{9/5} + C = -\frac{5}{27} (2-3x)^{9/5} + C.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $x = a \sin t$, тоді $dx = a \cos t dt$. Одержимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right\} = a \int \frac{\cos t}{[a^2(1 - \sin^2 t)]^{\frac{3}{2}}} dt = a \int \frac{\cos t}{[a^2 \cos^2 t]^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{табличний} \\ \text{інтеграл} \end{array} \right\} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int (2x^4 + 3)^{19} x^3 dx$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $t = 2x^4 + 3$, тоді $dt = 8x^3 dx$. Одержимо:

$$\int (2x^4 + 3)^{19} x^3 dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x^4 + 3 \\ dt = 8x^3 dx \end{array} \right\} = \frac{1}{8} \int t^{19} dt = \frac{1}{8} \frac{t^{20}}{20} + C = \frac{1}{160} (2x^4 + 3)^{20} + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int e^{3\sin^2 x} \sin 2x dx$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $t = 3\sin^2 x$.

Тоді $dt = 3 \cdot 2 \sin x \cos x dx = 3 \sin 2x dx$. Одержимо:

$$\int e^{3\sin^2 x} \sin 2x dx = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{3\sin^2 x} + C.$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin^2 3x}}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $t = \arcsin 3x$, тоді $dt = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$.

Одержимо:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin^2 3x}}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \arcsin 3x \\ dt = \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int t^{2/3} dt = \frac{t^{5/3}}{5} + C = \frac{1}{5} \arcsin^{5/3} 3x + C.$$

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int (x^2 + 5x + 1)e^{2x} dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл знайдемо методом інтегрування частинами.

Нехай $u = x^2 + 5x + 1$, $dv = e^{2x} dx$. Тоді $du = (2x + 5)dx$, $v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Підставивши ці вирази у формулу $\int u dv = uv - \int v du$, одержимо:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 5x + 1)e^{2x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 5x + 1; \quad du = (2x + 5)dx \\ dv = e^{2x} dx; \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x + 5)e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x + 5; \quad du = 2dx \\ dv = e^{2x} dx; \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(2x + 5)e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 2 \int e^{2x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 5x + 1)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x + 5)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x^2 + 4x - 1)e^{2x} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int x^2 \cos x dx$.

Розв'язання. Тут формулу інтегрування частинами використовуємо двічі:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \cos x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \sin x dx; \\ du = dx; \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2 \left(x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx \right) = \\ &= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти невизначений інтеграл $\int e^{ax} \cos bxdx$.

Розв'язання. Застосувавши формулу інтегрування частинами двічі, отримаємо вихідний інтеграл.

$$I = \int e^{ax} \cos bxdx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax}; \quad du = ae^{ax} dx \\ dv = \cos bxdx; \quad v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right\} = \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{ax}; \quad du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin bxdx; \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right\} = \frac{e^{ax}}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \left[-\frac{e^{ax}}{b} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx \right].$$

У правій частині одержали початковий інтеграл. Таким чином, отримали рівняння з невідомим $\int e^{ax} \cos bxdx$.

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 2.1. Знайти невизначені інтеграли методом підстановки:

$$2.1.1. \int \frac{x^5}{\sqrt{7-x^6}} dx;$$

$$2.1.2. \int \frac{\cos x}{1+2 \sin x} dx;$$

$$2.1.3. \int \frac{dx}{(x^2+1) \arctg^2 x};$$

$$2.1.4. \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx;$$

$$2.1.5. \int \sqrt[3]{x^3-8x^2} dx;$$

$$2.1.6. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx;$$

$$2.1.7. \int \frac{1-2 \sin x}{\cos^2 x} dx;$$

$$2.1.8. \int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x} dx;$$

$$2.1.9. \int e^{x^3} \cdot x^2 dx;$$

$$2.1.10. \int \sqrt{2-\cos 4x} \sin 4x dx;$$

$$2.1.11. \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx;$$

$$2.1.12. \int \frac{\ln x - 1}{x \sqrt{\ln x}} dx;$$

$$2.1.13. \int \frac{x^3}{5x^4+1} dx;$$

$$2.1.14. \int e^{-\arccos x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$2.1.15. \int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x};$$

$$2.1.16. \int \frac{x^2 dx}{4+x^6};$$

$$2.1.17. \int \frac{x^3}{\sqrt{x^8-1}} dx;$$

$$2.1.18. \int \frac{(5x-2)dx}{x^2+4};$$

$$2.1.19. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}} dx;$$

$$2.1.20. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Відповіді

$$2.1.1. -\frac{1}{3}\sqrt{7-x^6}+C; \quad 2.1.2. \frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|+C; \quad 2.1.3. -\frac{1}{\operatorname{arctg} x}+C;$$

$$2.1.4. \frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sin x|+C; \quad 2.1.5. \frac{\sqrt[3]{(x^3-8)^4}}{4}+C; \quad 2.1.6. \frac{2\sqrt{(1+\ln x)^3}}{3}+C;$$

$$2.1.7. \frac{\sin x-2}{\cos x}+C; \quad 2.1.8. \ln|\sin x|-\operatorname{ctg} x+C; \quad 2.1.9. \frac{1}{3}e^{x^3}+C;$$

$$2.1.10. \frac{1}{6}(2-\cos 4x)\sqrt{2-\cos 4x}+C; \quad 2.1.11. \frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} x)^3}+C;$$

$$2.1.12. \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}-2\sqrt{\ln x}+C; \quad 2.1.13. \frac{3^{x^3}}{3\ln 3}+C; \quad 2.1.14. e^{-\arccos x}+C;$$

$$2.1.15. \frac{1}{3\cos^3 x}+C; \quad 2.1.16. \frac{1}{6}\operatorname{arctg} \frac{x^3}{2}+C; \quad 2.1.17. \frac{1}{4}\ln|x^4+\sqrt{x^8-1}|+C;$$

$$2.1.18. 2,5\ln(x^2+4)-\operatorname{arctg} \frac{x}{2}+C; \quad 2.1.19. -\arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C; \quad 2.1.20. \arcsin(e^x)+C.$$

Завдання 2.2. Знайти невизначені інтеграли, інтегруючи частинами:

$$2.2.1. \int x e^{-2x} dx;$$

$$2.2.2. \int (4x+3) \cdot \cos x dx;$$

$$2.2.3. \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$$

$$2.2.4. \int \arcsin 3x dx;$$

$$2.2.5. \int e^{\sqrt{x}} dx;$$

$$2.2.6. \int \frac{x}{\sin^2 4x} dx;$$

$$2.2.7. \int x^2 \sin x dx;$$

$$2.2.8. \int x^2 e^{5x} dx;$$

$$2.2.9. \int e^{2x} \cos x dx;$$

$$2.2.10. \int x \ln x dx;$$

$$2.2.11. \int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx;$$

$$2.2.12. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx;$$

$$2.2.13. \int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx; \quad 2.2.14. \int (x+1)e^x dx;$$

$$2.2.15. \int \ln(x^2 + 1) dx; \quad 2.2.16. \int (\ln x)^2 dx;$$

$$2.2.17. \int x \ln^2 x dx; \quad 2.2.18. \int e^{2x} \cos 3x dx;$$

$$2.2.19. \int \sqrt{x} \ln x dx; \quad 2.2.20. \int x^5 e^{x^2} dx.$$

Відповіді

$$2.2.1. -\frac{1}{2} e^{-2x} \left(x + \frac{1}{2} \right) + C; \quad 2.2.2. (4x+3) \sin x + 4 \cos x + C; \quad 2.2.3. \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C;$$

$$2.2.4. x \cdot \arcsin 3x + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C; \quad 2.2.5. 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C; \quad 2.2.6. \frac{1}{4} x \cdot \operatorname{ctg} 4x + \frac{1}{16} \ln |\sin 4x| + C;$$

$$2.2.7. -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C; \quad 2.2.8. \frac{e^{5x}}{5} \left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right) + C;$$

$$2.2.9. \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C; \quad 2.2.10. \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C; \quad 2.2.11. 4\sqrt{2+x} - 2\sqrt{2-x} \arcsin \frac{x}{2} + C;$$

$$2.2.12. -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C; \quad 2.2.13. (x+1)^2 \sin x + 2(x+1) \cos x + C; \quad 2.2.14. x e^x + C;$$

$$2.2.15. x \ln(x^2 + 1) - 2x + \operatorname{arctg} x + C; \quad 2.2.16. x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C;$$

$$2.2.17. \frac{1}{2} x^2 \ln^2 |x| - \frac{1}{2} x^2 \ln |x| + \frac{1}{4} x^2 + C; \quad 2.2.18. \frac{e^{2x}}{13} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C;$$

$$2.2.19. \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln |x| - \frac{2}{3} \right) + C; \quad 2.2.20. \frac{1}{2} e^{x^2} (x^4 - 2x^2 + 2) + C.$$

Питання для самоперевірки

1. Напишіть формулу заміни змінної для невизначеного інтеграла.
2. Якщо $\varphi'(x) dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, яку підстановку слід зробити? Тобто, чому дорівнює $\varphi(x)$?
3. Знайти диференціал лівої і правої частини рівності: $x^2 = 3z - 1$.
4. Напишіть формулу інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.
5. Напишіть інтеграли, для обчислення яких застосовується формула інтегрування частинами.
6. Напишіть інтеграли, для обчислення яких застосовується формула інтегрування частинами.
7. Чому дорівнюють u та v в інтегралі $\int (x+1)e^x dx$?

ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДРОБІВ

Основні теоретичні відомості

Дробово-раціональною функцією $R(x)$ називається функція виду:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n} \quad (a_0, b_0 \neq 0),$$

де m і n – цілі додатні числа.

Дріб $R(x)$ називається *правильним* дробом, якщо найвищий показник степеня чисельника менший від відповідного степеня знаменника, тобто $n > m$. Дріб $R(x)$ називається *правильним* дробом, якщо $m \geq n$.

Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена і правильного дробу, поділивши чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів.

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)}.$$

Найпростішими (елементарними) раціональними дробами I, II, III і IV типів називають дробови виду:

$$\text{I. } \frac{A}{x+a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x+a)^k}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

де A, B, a, p, q – сталі; k – ціле, $k \geq 2$; $p^2/4 - q < 0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

Інтегрування елементарних дробів

$$\text{I. } \int \frac{A}{x+a} dx = \left\{ \begin{matrix} t = x+a \\ dt = dx \end{matrix} \right\} = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t| + C = A \ln|x+a| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \int \frac{A}{(x+a)^k} dx &= \left\{ \begin{matrix} t = x+a \\ dt = dx \end{matrix} \right\} = A \int t^{-k} dt = A \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= \frac{A}{(1-k)(x+a)^{k-1}} + C; \end{aligned}$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{1}{2}(x^2+px+q)' = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx; \quad x = t - p/2 \end{matrix} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{A\left(t - \frac{p}{2}\right) + B}{\left(t - \frac{p}{2}\right)^2 + p\left(t - \frac{p}{2}\right) + q} dt = A \int \frac{tdt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} + \\
&\quad + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln \left| t^2 + q - \frac{p^2}{4} \right| + \\
&\quad + \frac{(B - Ap/2)}{\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{q - p^2/4}} + C = \\
&= \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{(B - Ap/2)}{\sqrt{(q - p^2/4)}} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{\sqrt{(q - p^2/4)}} + C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV.} \quad &\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x^2 + px + q)' = x + \frac{p}{2} \\ dt = dx; \quad x = t - p/2 \end{array} \right\} = \\
&= A \int \frac{tdt}{\left[t^2 + \left(q - p^2/4\right)\right]^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{\left[t^2 + \left(q - p^2/4\right)\right]^k}.
\end{aligned}$$

Введемо позначення $s^2 = q - p^2/4$ й обчислимо інтеграли, що розташовані у правій частині.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{tdt}{(t^2 + s^2)^k} = \left\{ \begin{array}{l} z = t^2 + s^2 \\ dz = 2tdt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^k} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-k)z^{k-1}} + C_1 = \\
&= \frac{1}{2(1-k)(t^2 + q - p^2/4)^{k-1}} + C_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^k} = \frac{1}{s^2} \int \frac{s^2 dt}{(t^2 + s^2)^k} = \frac{1}{s^2} \int \frac{(t^2 + s^2) - t^2}{(t^2 + s^2)^k} dt = \\
&= \frac{1}{s^2} \left[\int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + s^2)^k} \right] = \frac{1}{s^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \int \frac{td(t^2 + s^2)}{(t^2 + s^2)^k} \right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} u = t; \quad du = dt \\ dv = \frac{d(t^2 + s^2)}{(t^2 + s^2)^k}; \quad v = \int (t^2 + s^2)^{-k} d(t^2 + s^2) = \frac{1}{(1-k)(t^2 + s^2)^{k-1}} \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{s^2} \left[I_{k-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{(1-k)(t^2 + s^2)^{k-1}} - \frac{1}{(1-k)} \int \frac{dt}{(t^2 + s^2)^{k-1}} \right) \right] + C_2 = \\
&= \frac{1}{s^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2(1-k)} \right) I_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2 + s^2)^{k-1}} \right] + C_2.
\end{aligned}$$

Інтеграл I_k ми виразили через більш простий інтеграл I_{k-1} , показник степеня знаменника якого на одиницю менший ніж у I_k . Продовжуючи цей процес, ми дійдемо до табличного інтеграла

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + s^2} = \frac{1}{s} \operatorname{arctg} \frac{t}{s} + C.$$

Отже, усі прості дроби інтегруються в елементарних функціях.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{3}{x-5} dx$.

Розв'язання. Маємо найпростіший дріб I виду.

$$\int \frac{3}{x-5} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x-5 \\ dt = dx \end{array} \right\} = 3 \int \frac{dt}{t} = 3 \ln|t| + C = 3 \ln|x-5| + C.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x-7}{x-5} dx$.

Розв'язання. Маємо неправильний дріб. Вилучимо спочатку цілу частину.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-7}{x-5} dx &= \int \frac{x-5-2}{x-5} dx = \int \left(\frac{x-5}{x-5} - \frac{2}{x-5} \right) dx = \\
&= \int \left(1 - \frac{2}{x-5} \right) dx = \int dx - \int \frac{2}{x-5} dx = x - 2 \int \frac{dx}{x-5} = x - 2 \ln|x-5| + C.
\end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{1}{(x+8)^4} dx$.

Розв'язання. Маємо найпростіший дріб II виду.

$$\int \frac{1}{(x+8)^4} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x+8 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int t^{-4} dt = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3(x+8)^3} + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x}{x^2 - 16x + 15} dx$.

Розв'язання. Маємо найпростіший дріб III виду.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 6x + 15} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{виділимо повний квадрат у знаменнику} \\ x^2 - 6x + 15 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9 + 15 \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{x}{(x-3)^2 + 6} dx = \left\{ \begin{array}{l} x-3=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{t+3}{t^2+6} dt = \int \left(\frac{t}{t^2+6} + \frac{3}{t^2+6} \right) dt = \\ &= \int \frac{t}{t^2+6} dt + 3 \int \frac{1}{t^2+6} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+6} dt + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |t^2+6| + \frac{3}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{2} \ln |(x-3)^2+6| + \frac{3}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{1}{(x^2+9)^3} dx$.

Розв'язання. Маємо найпростіший дріб IV виду.

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{1}{(x^2+3^2)^3} dx = \left| \begin{array}{l} k=3 \\ s=3 \end{array} \right| = \frac{1}{3^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2(1-3)} \right) \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^2} - \frac{x}{2(1-3)(x^2+9)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{3^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2(1-3)} \right) \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^2} - \frac{x}{2(1-3)(x^2+9)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^2} + \frac{x}{4(x^2+9)^2} \right] = \frac{1}{36} \left[3 \int \frac{dx}{(x^2+3^2)^2} + \frac{x}{(x^2+9)^2} \right] = \left| \begin{array}{l} k=2 \\ s=3 \end{array} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{36} \left[3 \cdot \frac{1}{9} \left[\left(1 + \frac{1}{2(1-2)} \right) \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} - \frac{x}{2(1-2)(x^2 + 9)} \right] + \frac{x}{(x^2 + 9)^2} \right] = \\
&= \frac{1}{36} \left[\frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} + \frac{x}{2(x^2 + 9)} \right] + \frac{x}{(x^2 + 9)^2} \right] = \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{x}{(x^2 + 9)^2} + \frac{1}{36 \cdot 6} \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} + \frac{1}{36 \cdot 6} \cdot \frac{x}{(x^2 + 9)} = \\
&= \frac{1}{36} \frac{x}{(x^2 + 9)^2} + \frac{1}{216} \cdot \frac{x}{(x^2 + 9)} + \frac{1}{216} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = \\
&= \frac{1}{36} \frac{x}{(x^2 + 9)^2} + \frac{1}{216} \frac{x}{(x^2 + 9)} + \frac{1}{648} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.
\end{aligned}$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 3. Знайти невизначені інтеграли:

3.1. $\int \frac{4dx}{x+5};$

3.2. $\int \frac{3}{4x+1} dx;$

3.3. $\int \frac{3}{(x-2)^4} dx;$

3.4. $\int \frac{7}{(x-2)^3} dx;$

3.5. $\int \frac{1}{x^2 + 4x - 5} dx;$

3.6. $\int \frac{1}{2x^2 - 4x + 5} dx;$

3.7. $\int \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx;$

3.8. $\int \frac{x}{x^4 + 6x^2 + 13} dx;$

4.9. $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx;$

4.10. $\int \frac{x}{2x^2 - 3x - 2} dx;$

3.11. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5};$

3.12. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3};$

3.13. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13};$

3.14. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 29};$

$$3.15. \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 18};$$

$$3.16. \int \frac{dx}{x^2 + x + 1};$$

$$3.17. \int \frac{5x + 3}{x^2 + 10x + 29} dx;$$

$$3.18. \int \frac{x + 1}{5x^2 + 2x + 1} dx;$$

$$3.19. \int \frac{3x - 11}{x^2 + 8x + 18} dx;$$

$$3.20. \int \frac{x - 3}{x^2 - 9x + 23} dx.$$

Відповіді

$$3.1. 4\ln|x+5| + C; \quad 3.2. \frac{3}{4}\ln|4x+1| + C; \quad 3.3. -\frac{1}{(x-2)^3} + C; \quad 3.4. -\frac{7}{2(x-2)^2} + C;$$

$$3.5. \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C; \quad 3.6. \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C; \quad 3.7. -\frac{1}{2(x^2-4)} + C; \quad 3.8. \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{2} + C;$$

$$3.9. \ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}} + C; \quad 3.10. \frac{1}{5}\ln((x-2)^2\sqrt{2x+1}) + C; \quad 3.11. \operatorname{arctg}(x+2) + C;$$

$$3.12. \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C; \quad 3.13. \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C; \quad 3.14. 0,2\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5} + C;$$

$$3.15. \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3} + C; \quad 3.16. 0,5\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$3.17. 2,5\ln(x^2+10x+29) - 11\operatorname{arctg}\frac{x+5}{2} + C; \quad 3.18. 0,1\ln(5x^2+2x+1) + 0,4\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{2} + C;$$

$$3.19. 1,5\ln(x^2+8x+18) - \frac{23}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{\sqrt{2}} + C; \quad 3.20. 0,5\ln(x^2-9x+23) - \frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{11}} + C.$$

Питання для самоперевірки

1. Дати означення дробово-раціональної функції.
2. Що таке правильний раціональний дріб?
3. Що таке неправильний раціональний дріб?
4. Як неправильний раціональний дріб подати у вигляді суми многочлена і правильного дробу?
5. Які дробі називають найпростішими (елементарними)?
6. Як інтегруються елементарні дробі I, II, III, IV типів?

ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ РОЗКЛАДАННЯ ПРАВИЛЬНОГО РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ НА ЕМЕНТАРНІ

Основні теоретичні відомості

Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші

Розглянемо раціональну функцію $R(x)$:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n} \quad (a_0, b_0 \neq 0),$$

де m і n – цілі додатні числа.

ТЕОРЕМА (основна теорема алгебри).

Будь-яке рівняння типу

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (a_0 \neq 0)$$

має рівно n коренів (дійсних або комплексних).

Розкладемо многочлен $P_n(x)$ із дійсними коефіцієнтами на лінійні та квадратичні множники:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_r)^{m_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{k_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{k_j}$$

$$(m_1 + \dots + m_r) + 2(k_1 + \dots + k_j) = n \quad (p_i^2/4 - q_i < 0, \quad i = \overline{1, j}).$$

Перші r множників у розкладі відповідають дійсним кореням $x_1, \dots, x_r$ многочлена, решта j множників – парам комплексно-спряжених коренів. Показники степенів $m_1, \dots, m_r, k_1, \dots, k_j$ є кратностями відповідних коренів. Для простих коренів вони дорівнюють одиниці.

ТЕОРЕМА (про розклад правильного раціонального дробу на найпростіші).

Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна розкласти на суму простих дробів I-IV типів. У цьому розкладанні кожному дійсному кореню x_i кратності m_i ($i = \overline{1, r}$) многочлена $P_n(x)$ відповідає сума m_i дробів I, II типів:

$$\frac{A_1}{x - x_i} + \frac{A_2}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{m_i}}{(x - x_i)^{m_i}}$$

Кожній парі комплексно-спряжених коренів кратності k_i відповідає сума k_i простих дробів III, IV типів:

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{k_i}x + C_{k_i}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{k_i}}$$

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Нехай потрібно обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції $\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx$. Якщо дріб неправильний, то його можна представити у вигляді суми деякого многочлена і правильного дробу. Правильний дріб можна подати у вигляді суми найпростіших дробів. Будемо вважати, що дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ правильний.

Можливі наступні випадки.

Перший випадок. Корені знаменника дійсні і різні, тобто:

$$P_n(x) = (x-a) \cdot (x-b) \cdot \dots \cdot (x-d).$$

У цьому випадку дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна розкласти на найпростіші дробки I типу:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d},$$

де $A, B, \dots, D$ називають невизначеними коефіцієнтами.

Для обчислення коефіцієнтів $A, B, \dots, D$ необхідно звести до спільного знаменника дробки, що стоять у правій частині розкладання, і потім прирівняти чисельник дробу, що утворився, до чисельника вихідного дробу $Q_m(x)$. Далі можна прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності. Таким чином отримуємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів $A, B, \dots, D$. Цей метод знаходження коефіцієнтів називається *методом невизначених коефіцієнтів*.

Отримати необхідну для визначення всіх коефіцієнтів кількість рівнянь також можна, задаючи x конкретні числові значення.

Після того, як коефіцієнти знайдені, повертаються до інтеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} dx &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} dx = \\ &= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \dots + D \ln|x-d| + C. \end{aligned}$$

Другий випадок. Корені знаменника дійсні. Причому деякі з них кратні (рівні), тобто:

$$P_n(x) = (x-a) \cdot (x-b)^k \cdot \dots \cdot (x-d)^l.$$

У цьому випадку дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна розкласти на найпростіші дроби I і II типів.

Наприклад:

$$\frac{Q_m(x)}{(x-3)(x+2)^3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3},$$

де A, B, C, D називають невизначені коефіцієнти.

Після знаходження невизначених коефіцієнтів повертаються до інтеграла

$$\int \frac{Q_m(x)}{(x-3)(x+2)^3} dx = \int \frac{A}{x-3} dx + \int \frac{B}{x+2} dx + \int \frac{C}{(x+2)^2} dx + \int \frac{D}{(x+2)^3} dx.$$

Третій випадок. Серед коренів знаменника є комплексні (які не повторюються):

$$P_n(x) = (x-a) \cdot (x-b)^k \cdot (x^2 + px + q) \cdot (x^2 + lx + s).$$

У цьому випадку дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна розкласти на найпростіші дроби I, II, III типів.

Наприклад:

$$\frac{Q_m(x)}{(x-3)(x-5)^2(x^2+x+10)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-5} + \frac{C}{(x-5)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+10},$$

де A, B, C, M, N називають невизначені коефіцієнти.

Після знаходження невизначених коефіцієнтів обчислюємо відповідні інтеграли.

Четвертий випадок. Серед коренів знаменника є комплексні кратні. У цьому випадку дріб $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ можна розкласти на найпростіші дроби I, II, III і IV типів.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 1. Подати дріб у вигляді суми многочлена і правильного дробу

$$\frac{x^4 - x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

Розв'язання. Маємо неправильний дріб, оскільки степінь чисельника (чотири) більший від степеня знаменника (два). Виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 - x^2 + 3x + 4 & x^2 + x + 1 \\ \hline x^4 + x^3 + x^2 & x^2 - x - 1 \\ \hline -x^3 - 2x^2 + 3x & \\ \hline -x^3 - x^2 - x & \\ \hline -x^2 + 4x + 4 & \\ \hline -x^2 - x - 1 & \\ \hline 5x + 5. & \end{array}$$

Отже можна подати дріб у вигляді суми многочлена і правильного дробу:

$$\frac{x^4 - x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 1} = x^2 - x - 1 + \frac{5x + 5}{x^2 + x + 1}.$$

Приклад 2. Розкласти на елементарні дроби функцію

$$\frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Розв'язання. Многочлен у знаменнику дробу має один простий дійсний корінь $x = 1$ і один двократний $x = -2$, тому розклад має вигляд:

$$\frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Для обчислення коефіцієнтів A, B, C зведемо до спільного знаменника дробу у правій частині розкладання і прирівняємо чисельник дробу, що утворився, до чисельника вихідного дробу:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)}{(x-1)(x+2)^2}, \\ A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) &= 3x^2 + 9x - 3. \end{aligned}$$

Якщо задати $x=1, x=-2, x=0$, то отримаємо систему для визначення коефіцієнтів A, B, C :

$$\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=-2 \\ x_3=0 \end{matrix} \begin{cases} 9A=9; \\ -3C=-9; \\ 4A-2B-C=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1; \\ B=2; \\ C=3. \end{cases}$$

Розклад на елементарні дробі:

$$\frac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{(3x^2+3x+2)dx}{x(x+1)(x+2)}.$$

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дробі:

$$\frac{3x^2+3x+2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x+2)}.$$

Прирівняємо чисельники останнього й початкового дробів:

$$A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1) = 3x^2 + 3x + 2.$$

Систему рівнянь для визначення коефіцієнтів можна одержати двома способами.

1-й спосіб. Розкриємо дужки і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності:

$$(A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A \equiv 3x^2 + 3x + 2$$

$$\begin{matrix} x^2: & A+B+C=3, \\ x: & (3A+2B+C)=3, \\ x^0: & 2A=2. \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-2, \\ C=4. \end{cases}$$

2-й спосіб. Підставимо в тотожність замість x значення, що дорівнюють кореням знаменника: $x_1=0, x_2=-1, x_3=-2$.

$$\begin{matrix} x_1=0; \\ x_2=-1; \\ x_3=-2; \end{matrix} \begin{cases} 2A=2, \\ -B=2, \\ 2C=8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-2, \\ C=4. \end{cases}$$

У даному випадку нам не довелося розв'язувати спільну систему трьох рівнянь, оскільки до кожного рівняння увійшов лише один невідомий коефіцієнт. Надалі користуватимемося лише другим способом.

Після знаходження невизначених коефіцієнтів повертаються до інтеграла

$$\int \frac{(3x^2 + 3x + 2)dx}{x(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + 4 \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x| - 2\ln|x+1| + 4\ln|x+2| + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{(3x^2 + 9x - 3)dx}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція розкладена на елементарні дробі у прикладі 2:

$$\frac{3x^2 + 9x - 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2}.$$

$$\int \frac{(3x^2 + 9x - 3)dx}{(x-1)(x+2)^2} = \int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} + 3 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln|x-1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{x+2} + C.$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл

$$I = \int \frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дробі:

$$\frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

$$A(x-1)(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x-1)^2 \equiv 4x^3 - 4x^2 - 7x + 1.$$

Задаючи $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 2$, отримаємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3B = -6, \\ -A + B + D = 1, \\ -2A + B - 4C + 4D = 0, \\ 7A + 7B + 2C + D = 3. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = -2, \\ -A + D = 3, \\ -A - 2C + 2D = 1, \\ 7A + 2C + D = 17. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B = -2, \\ C = 3, \\ D = 4. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3 - 4x^2 - 7x + 1}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx &= \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1} = \\ &= \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + \int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1}.\end{aligned}$$

Обчислимо останній інтеграл:

$$\begin{aligned}\int \frac{(3x+4)dx}{x^2 + x + 1} &= \left\{ \begin{array}{l} t = x + 1/2 \\ dt = dx \end{array} \right\} = \int \frac{3(t-1/2) + 4}{(t-1/2)^2 + (t-1/2) + 1} dt = \\ &= 3 \int \frac{tdt}{t^2 + 3/4} + \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = 3 \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \\ &= 3 \ln |x^2 + x + 1| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

$$\text{Одержимо: } I = \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + 3 \ln|x^2 + x + 1| + \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 4. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$4.1. \int \frac{1}{x(x^2 + 1)} dx;$$

$$4.2. \int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx;$$

$$4.3. \int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx;$$

$$4.4. \int \frac{1}{1+x^3} dx;$$

$$4.5. \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx;$$

$$4.6. \int \frac{5x^2 - 12}{(x^2 - 6x + 13)^2} dx;$$

$$4.7. \int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx;$$

$$4.8. \int \frac{x^2 - x}{(x+1)^9} dx;$$

$$4.9. \int \frac{1}{x^4 - 4x^2 + 3} dx;$$

$$4.10. \int \frac{1}{(x^4 - 1)^2} dx;$$

$$4.11. \int \frac{x^3 dx}{x^2 - x - 2};$$

$$4.12. \int \frac{x^3 + 4x}{x^2 + x - 6} dx;$$

$$4.13. \int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx;$$

$$4.14. \int \frac{dx}{x^3-8};$$

$$4.15. \int \frac{2x+3}{x^2-7x+12} dx;$$

$$4.16. \int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)} dx;$$

$$4.17. \int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx;$$

$$4.18. \int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x} dx;$$

$$4.19. \int \frac{x^3-2}{x^2-5x+4} dx;$$

$$4.20. \int \frac{3x^2+4x-1}{x^2+2x-3} dx.$$

Відповіді

$$4.1. \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C;$$

$$4.2. \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2+2x+2) - 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C;$$

$$4.3. \ln \frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C;$$

$$4.4. \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$4.5. \frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{2} \ln(x^2+2) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C;$$

$$4.6. \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C;$$

$$4.7. \frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} x + C;$$

$$4.8. -\frac{1}{6(x+1)^6} + \frac{3}{7(x+1)^7} - \frac{1}{4(x+1)^8} + C;$$

$$4.9. \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C;$$

$$4.10. \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C;$$

$$4.11. \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{8}{3} \ln|x-2| + C; \quad 4.12. \frac{x^2}{2} - x + \frac{39}{5} \ln|x+3| + \frac{16}{5} \ln|x-2| + C;$$

$$4.13. 3 \ln \frac{C(x-1)}{x+2} - \frac{2}{x+2};$$

$$4.14. \frac{1}{24} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$4.15. \ln \frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9} + C;$$

$$4.16. -\frac{5}{6} \ln|x| + \frac{11}{15} \ln|x+3| + \frac{11}{10} \ln|x-2| + C;$$

$$4.17. 5x + 2 \ln|x| + 3 \ln|x-2| + 4 \ln|x+2| + C;$$

$$4.18. \frac{3}{20} \ln|x| - \frac{27}{4} \ln|x-4| + \frac{38}{5} \ln|x-5| + C;$$

$$4.19. \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{62}{3} \ln|x-4| + C;$$

$$4.20. 3x + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{7}{2} \ln|x+3| + C.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати основну теорему алгебри.
2. Сформулювати теорему про розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.
3. Пояснити суть методу невизначених коефіцієнтів.

ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Основні теоретичні відомості

Якщо у раціональному дробі деякі доданки в чисельнику або в знаменнику замінити коренями від раціональних функцій (в тому числі і від многочленів), то одержана функція буде *ірраціональною*.

Інтеграл від деяких ірраціональних функцій за допомогою заміни змінної вдасться звести до інтегралів від раціональних функцій. Розглянемо найбільш типові випадки.

1. Розглянемо інтеграл виду

$$\int f\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right) dx = \int f\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx,$$

де f – раціональна функція аргументів; m_i, n_i ($i = \overline{1, k}$) – цілі додатні числа.

Підінтегральну функцію можна раціоналізувати за допомогою підстановки $x = t^n$, де $n = \text{НСК}(n_1, \dots, n_k)$ – найменше спільне кратне показників коренів (найменше число, яке ділиться на кожен з показників коренів).

2. Розглянемо інтеграл виду

$$\int f\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}}\right) dx = \int f\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx,$$

де f – раціональна функція аргументів; a, b – сталі; m_i, n_i ($i = \overline{1, k}$) – цілі додатні числа.

Підінтегральну функцію можна раціоналізувати за допомогою підстановки $ax + b = t^n$, де $n = \text{НСК}(n_1, \dots, n_k)$ – найменше спільне кратне показників коренів (найменше число, яке ділиться на кожен з показників коренів).

3. Інтеграл виду

$$\int f\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) dx = \int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$$

раціоналізуються за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$,

де $n = \text{НСК}(n_1, \dots, n_k)$ – найменше спільне кратне показників коренів.

4. Обчислення інтегралів виду:

$$\text{а) } \int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = \int f\left(x, (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right) dx,$$

$$\text{б) } \int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx = \int f\left(x, (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right) dx,$$

$$\text{в) } \int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx = \int f\left(x, (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\right) dx:$$

а) підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки

$$x = a \sin t \text{ (або } x = a \cos t), \text{ тоді } dx = a \cos t dt,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t;$$

б) підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки

$$x = a \operatorname{tg} t \text{ (або } x = a \operatorname{ctg} t), \text{ тоді } dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt,$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t};$$

в) застосуємо підстановку

$$x = \frac{a}{\cos t} \text{ (або } x = \frac{a}{\sin t}), \text{ тоді } dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt,$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = a \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = a \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = a \operatorname{tg} t.$$

5. Обчислення інтегралів виду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

Метод обчислення цього інтеграла аналогічний методу обчислення інтеграла від найпростішого дробу III типу. Але спочатку потрібно винести коефіцієнт при x^2 за знак кореня і за знак інтеграла.

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}.$

Розв'язання. У підінтегральному виразі маємо корені другого і четвертого степеня. Найменше спільне кратне чисел 2 і 4 дорівнює 4, тому робимо підстановку $x = t^4$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right\} = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 + t} = 4 \int \frac{t^2}{t+1} dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{одержали неправильний дріб: можна} \\ \text{виділити цілу частину, а можна} \\ \text{провести такі перетворення} \end{array} \right\} = \\ &= 4 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1} dt = 4 \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= 4 \left[\int t dt - \int dt + \int \frac{dt}{t+1} \right] = 4 \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right] + C = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{повернемось до змінної } x: \\ \text{так як } x = t^4, \text{ то } t = x^{\frac{1}{4}} \end{array} \right\} = \\ &= 4 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} - x^{\frac{1}{4}} + \ln \left| x^{\frac{1}{4}} + 1 \right| \right) + C = 4 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \sqrt[4]{x} + \ln \left| \sqrt[4]{x} + 1 \right| \right) + C. \end{aligned}$$

Приклад 2.1. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$

Розв'язання. У підінтегральному виразі маємо корені другого і третього степеня. Найменше спільне кратне чисел 2 і 3 дорівнює 6, тому робимо підстановку $1+x = t^6$:

$$\int \frac{x + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1+x = t^6, \quad x = t^6 - 1 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{(t^6 - 1) + t^3}{t^2} \cdot 6t^5 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \int (t^6 - 1 + t^3) \cdot t^3 dt = 6 \int (t^9 + t^6 - t^3) dt = 6 \cdot \left[\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right] + C = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{повернемося до змінної } x: \\ 1+x=t^6, \quad t=(1+x)^{\frac{1}{6}} \end{array} \right\} = \\
&= 6 \cdot \left[\frac{(1+x)^{\frac{10}{6}}}{10} + \frac{(1+x)^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{(1+x)^{\frac{4}{6}}}{4} \right] + C = 6 \cdot \left[\frac{(1+x)^{\frac{5}{3}}}{10} + \frac{(1+x)^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}}{4} \right] + C = \\
&= 6 \cdot \left[\frac{\sqrt[3]{(1+x)^5}}{10} + \frac{\sqrt[6]{(1+x)^7}}{7} - \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}}{4} \right] + C.
\end{aligned}$$

Приклад 2.2. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(\sqrt{2x+1}-1)dx}{(\sqrt[3]{2x+1}+1)\sqrt{2x+1}}$.

$$\begin{aligned}
\text{Розв'язання. } I &= \int \frac{(\sqrt{2x+1}-1)dx}{(\sqrt[3]{2x+1}+1)\sqrt{2x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1=t^6 \\ 2dx=6t^5 dt \end{array} \right\} = \\
&= \int \frac{(t^3-1)3t^5}{(t^2+1)t^3} dt = 3 \int \frac{t^5-t^2}{t^2+1} dt.
\end{aligned}$$

Підінтегральний раціональний дріб неправильний, оскільки старший степінь чисельника більший ніж старший степінь знаменника. Подамо неправильний дріб у вигляді суми цілої частини (многочлена) й правильного дробу. Для цього поділимо многочлен у чисельнику на многочлен у знаменнику:

$$\begin{array}{r}
\underline{-t^5 - t^2} \quad \left| \begin{array}{l} t^2 + 1 \\ t^3 - t - 1 \end{array} \right. \\
\underline{-t^3 - t^2} \\
\underline{-t^3 - t} \\
\underline{-t^2 + t} \\
\underline{-t^2 - 1} \\
t + 1.
\end{array}$$

Підінтегральний дріб запишемо у вигляді:

$$\frac{t^5 - t^2}{t^2 + 1} = t^3 - t - 1 + \frac{t + 1}{t^2 + 1}.$$

Інтегруючи цей вираз і повертаючись до змінної x , одержимо:

$$\begin{aligned} I &= 3 \int \left(t^3 - t - 1 + \frac{t + 1}{t^2 + 1} \right) dt = 3 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + 1} + \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right) = \\ &= 3 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \ln |t^2 + 1| + \operatorname{arctg} t \right) + C = 3 \left(\frac{1}{4} (2x + 1)^{2/3} - \frac{1}{2} (2x + 1)^{1/3} - \right. \\ &\quad \left. - (2x + 1)^{1/6} + \frac{1}{2} \ln |\sqrt[3]{2x + 1} + 1| + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{2x + 1} \right) + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки $\frac{1-x}{1+x} = t^2$.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} &= \left\{ \frac{1-x}{1+x} = t^2; \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = -\frac{4t dt}{(1+t^2)^2} \right\} = \\ &= \int t^2 \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2} \right) dt = \\ &= -4 \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + 1)(1 - t^2)} = 2 \int \frac{(t^2 - 1) + (t^2 + 1)}{(t^2 + 1)(t^2 - 1)} dt = 2 \int \frac{dt}{1 + t^2} - 2 \int \frac{dt}{1 - t^2} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.1. Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{9 - x^2} dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки з вип. 4а:

$$\int \sqrt{9-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} a=3, \quad x=3\sin t \\ dx=3\cos t dt \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\cos t \end{array} \right\} =$$

$$= \int 3\cos t \cdot 3\cos t dt = 9 \int \cos^2 t dt = 9 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{9}{2} \int (1+\cos 2t) dt = \frac{9}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right] + C =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Повернемо́сь до змінної } x. \\ \text{Знайдемо } t: \quad \sin t = \frac{x}{3}, \quad t = \arcsin \frac{x}{3}. \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sin(2t) = \sin t \cdot \cos t = \sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t} = \\ = \sin\left(\arcsin \frac{x}{3}\right) \cdot \sqrt{1-\left(\sin\left(\arcsin \frac{x}{3}\right)\right)^2} = \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{9}{2} \left[\arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \right] + C.$$

Приклад 4.2. Знайти інтеграл $\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки з вип. 4б:

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \left\{ \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2+1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\cos t} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg}^2 t \cdot \frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t}{\operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t} dt = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t \cdot \cos t} dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t \cdot \cos t} dt =$$

$$= \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \left\{ \begin{array}{l} \sin t = z \\ \cos t dt = dz \end{array} \right\} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{\sin t} + C =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Повернемося до змінної } x: \\ x = \operatorname{tg} t, \quad t = \operatorname{arctg} x \end{array} \right\} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arctg} x)} + C.$$

Приклад 5.1. Знайти інтеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 6}}$.

Розв'язання. Винесемо коефіцієнт 2 за знак кореня і інтеграла:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 6}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4x + 4 - 4 + 3 = \\ = (x + 2)^2 - 1 \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x dx}{\sqrt{(x + 2)^2 - 1}} = \left\{ \begin{array}{l} x + 2 = t, \quad x = t - 2 \\ dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t - 2}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt - 2 \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \right] = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Перший інтеграл обчислюємо за} \\ \text{допомогою підстановки } t^2 - 1 = z^2, \\ \text{а другий інтеграл-табличний} \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t^2 - 1 = z^2 \\ 2t dt = 2z dz \\ t dt = z dz \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int \frac{z dz}{z} - 2 \ln |t + \sqrt{t^2 - 1}| \right) + C = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Повернемося до змінної } x \\ z = (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad t = x + 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - 2 \ln |x + 2 + \sqrt{(x + 2)^2 - 1}| \right) + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(x + 2)^2 - 1} - 2 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| \right) + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - 2 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| \right) + C. \end{aligned}$$

Приклад 5.2. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x - 1}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x - 1}} = \left\{ t = \frac{1}{x}, \quad x = \frac{1}{t}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right\} =$

$$= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - \frac{1}{t} - 1}} = - \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} - 1}} = - \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{1-t-t^2}{t^2}}} =$$

$$= - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{-(t^2+t-1)}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{-\left(t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1\right)}} =$$

$$= - \int \frac{dt}{\sqrt{-\left(\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= - \arcsin \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = - \arcsin \frac{2t + 1}{\sqrt{5}} + C = - \arcsin \frac{2 \cdot \frac{1}{x} + 1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= - \arcsin \frac{2 + x}{\sqrt{5}x} + C.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли від ірраціональних функцій:

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx;$

5.2. $\int \frac{1}{(x+3)^{\frac{3}{2}} + (x+3)^{\frac{1}{2}}} dx;$

5.3. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx;$

5.4. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-10x+29}} dx;$

5.5. $\int \frac{1}{\sqrt{(16-x^2)^3}} dx;$

5.6. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx;$

5.7. $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}} dx;$

5.8. $\int \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \frac{dx}{x};$

$$5.9. \int \frac{1}{\sqrt{5+13x+8x^2}} dx;$$

$$5.10. \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+5x+3}} dx;$$

$$5.11. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+9}} dx;$$

$$5.12. \int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx;$$

$$5.13. \int \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}} dx;$$

$$5.14. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx;$$

$$5.15. \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$5.16. \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1} dx;$$

$$5.17. \int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3} dx;$$

$$5.18. \int \frac{1}{\sqrt{11+9x-7x^2}} dx;$$

$$5.19. \int \frac{x+8}{\sqrt{3x^2+x+9}} dx;$$

$$5.20. \int \frac{5x-3}{\sqrt{1-13x-5x^2}} dx.$$

Відповіді

$$5.1. \frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{x^3} - \ln \left(\sqrt[4]{x^3} + 1 \right) \right] + C \quad (\text{підстановка } x=t^4);$$

$$5.2. 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+3} + C \quad (\text{підстановка } x+3=t^2);$$

$$5.3. \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \quad \left(\begin{aligned} \sqrt{1-2x-x^2} &= \sqrt{-(x^2+2x-1)} = \sqrt{-(x^2+2x+1-1-1)} = \\ &= \sqrt{-[(x+1)^2-2]} = \sqrt{2-(x+1)^2} \end{aligned} \right);$$

$$5.4. \sqrt{x^2-10x+29} + 3 \ln \left| x-5 + \sqrt{x^2-10x+29} \right| + C; \quad 6.5. \frac{1}{16} \cdot \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} + C;$$

$$5.6. \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln \left| \sqrt[6]{x} - 1 \right| + C;$$

$$5.7. \sqrt{t} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{t} + 3\sqrt[6]{t} + 3 \ln \left| \sqrt[6]{t} - 1 \right| + C \Big|_{t=2x-1}; \quad 5.8. \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C;$$

$$5.9. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{13}{16} + \sqrt{x^2 + \frac{13}{8}x + \frac{5}{8}} \right| + C;$$

$$5.10. \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+5x+3} - \frac{5}{4\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{5}{4} + \sqrt{x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}} \right| + C; \quad 5.11. -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C;$$

$$5.12. \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C; \quad 5.13. -\frac{1}{\sqrt{15}} \ln \left| \frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3} \right| + C;$$

$$5.14. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C; \quad 5.15. 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-8\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+$$

$$+48\sqrt[12]{x}+3\ln|\sqrt[12]{x}+1|+\frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x}-\sqrt[12]{x}+2)-\frac{171}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}}+C;$$

$$5.16. \left. \frac{3}{7}\sqrt[6]{t^7}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{t^5}+\sqrt{t}-3\sqrt[6]{t}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{t}+C \right|_{t=2x-3};$$

$$5.17. (5-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-6\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C; \quad 5.18. \sqrt{\frac{1}{7}}\arcsin\frac{14x-9}{\sqrt{389}}+C;$$

$$5.19. \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+x+9}+\frac{47}{6\sqrt{3}}\ln\left|x+\frac{1}{6}+\sqrt{x^2+\frac{1}{3}x+3}\right|+C;$$

$$5.20. -\sqrt{1-13x-5x^2}-\frac{19}{2\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x+13}{\sqrt{189}}+C.$$

Питання для самоперевірки

1. Яку функцію називають ірраціональною?
2. Що називають найменшим спільним кратним?
3. Підінтегральний вираз містить корені вигляду $\sqrt[6]{x}$, $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[3]{x^2}$. З допомогою якої підстановки можна раціоналізувати підінтегральний вираз?
4. З допомогою якої підстановки можна раціоналізувати підінтегральний вираз в інтегралі $\int f(x, \sqrt{16+x^2})dx$?
5. З допомогою якої підстановки можна раціоналізувати підінтегральний вираз в інтегралі $\int f(x, \sqrt{9-x^2})dx$?
6. З допомогою якої підстановки можна раціоналізувати підінтегральний вираз в інтегралі $\int f(x, \sqrt{x^2-3})dx$?
7. З допомогою якої підстановки можна раціоналізувати підінтегральний вираз в інтегралі $\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3} dx$?
8. Як раціоналізувати підінтегральний вираз в інтегралі вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$?

ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Основні теоретичні відомості

1. Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R – раціональна функція аргументів, зводяться до інтегралів від раціональних функцій змінної t за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, яка називається *універсальною тригонометричною підстановкою*.

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \text{ знайдемо } x \text{ і } dx: \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тому будемо використовувати підстановку:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Універсальну тригонометричну підстановку доцільно застосовувати для обчислення інтегралів виду:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}, \int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}, \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}.$$

Універсальна підстановка часто приводить до громіздких обчислень. Розглянемо декілька випадків, у яких можна раціоналізувати підінтегральну функцію, використовуючи інші підстановки.

$$2. \quad \int R(\sin x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int R(t) dt.$$

$$3. \quad \int R(\cos x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int R(t) dt.$$

$$4. \quad \int R(\operatorname{tg} x) dx = \left\{ \operatorname{tg} x = t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$5. \quad \int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} = \\ = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$6. \quad \int \sin^{2m} x \cos^{2n+1} x dx = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x \cos x dx = \\ = \int \sin^{2m} x (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^{2m} (1-t^2)^n dt.$$

$$7. \quad \int \cos^{2m} x \sin^{2n+1} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = -\int t^{2m} (1-t^2)^n dt.$$

$$8. \quad \int \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x dx = \{\sin x = t \text{ або } \cos x = t\} = \pm \int t^{2m+1} (1-t^2)^n dt.$$

$$9. \quad \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right\}.$$

10. Інтеграли виду

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$$

беруться за допомогою множення чисельника на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ і наступного почленного ділення чисельника на знаменник.

$$11. \quad \text{Інтеграли } \int \sin ax \cos b x dx, \int \cos ax \cos b x dx, \int \sin ax \sin b x dx$$

обчислюються за допомогою формул:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x],$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x],$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Зразки розв'язання типових завдань

Приклад 1. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(2 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 3} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} z = t + 1 \\ dz = dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{dz}{z^2 + 2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{2(1+t^2)^3 dt}{(1+t^2)^8 t^3} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(t^{-3} + \frac{2}{t} + t \right) dt = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = \\ &= \frac{1}{8} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 4 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x}.$

Розв'язання.

$$\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t+1| + C = \ln|\sin x + 1| + C.$$

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}{1 + \operatorname{tg} x} dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}{1 + \operatorname{tg} x} dx &= \left\{ \operatorname{tg} x = t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int \frac{(1-t^2)^2}{1+t} \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \int \frac{(1-t)^2 (1+t)^2 dt}{(1+t)(1+t^2)} = \int \frac{(1-2t+t^2)(1+t) dt}{1+t^2} = \int \left(1 - \frac{2t}{t^2+1} \right) (t+1) dt = \\ &= \int \left(t+1 - 2 \frac{(t^2+1) + (t-1)}{t^2+1} \right) dt = \int \left(t-1 - \frac{2t}{t^2+1} + 2 \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \frac{t^2}{2} - t - \ln|t^2+1| + 2 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - \ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| + 2x + C. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}; \end{array} \right\} = \\ \int \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)} \frac{dt}{(1+t^2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + (1/\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2} t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C. \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - \cos^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{3 \sin^2 x - \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(3 \operatorname{tg}^2 x - 1) \cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{3t^2 - 1} =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - t^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + t}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - t} \right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x} \right| + C.$$

Приклад 7. Знайти невизначений інтеграл $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^3 x dx &= \int \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right\} = \\ &= -\int t^4 (1 - t^2) dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \right) + C = \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \end{aligned}$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right] dx = \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \left(3x + 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C. \end{aligned}$$

Приклад 9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \\ &= \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{dt}{1 - t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| - \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \sin 3x \cos 5x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(-2x) + \sin 8x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 8x \right) + C = \frac{1}{16} (4 \cos 2x - \cos 8x) + C. \end{aligned}$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних функцій:

6.1. $\int \sin^3 x dx$;

6.2. $\int \cos^5 x dx$;

6.3. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;

6.4. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$;

6.5. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$;

6.6. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;

6.7. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$;

6.8. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$;

6.9. $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$;

6.10. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$;

6.11. $\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$;

6.12. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$;

6.13. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$;

6.14. $\int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + \cos x}$;

6.15. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x}$;

6.16. $\int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}$;

$$6.17. \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$$

$$6.18. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$$

$$6.19. \int \sin 5x \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$6.20. \int \sin \frac{3}{4} x \cos \frac{x}{4} dx.$$

Відповіді

$$6.1. -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C; \quad 6.2. \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C; \quad 6.3. \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C;$$

$$6.4. \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C; \quad 6.5. \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C; \quad 6.6. \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C;$$

$$6.7. \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C; \quad 6.8. \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{2} x + C; \quad 6.9. x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C;$$

$$6.10. \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C; \quad 6.11. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C; \quad 6.12. \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C;$$

$$6.13. -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + C; \quad 6.14. \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right) + C; \quad 6.15. \frac{1}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2 \operatorname{tg} x + \sqrt{7}} \right| + C;$$

$$6.16. \frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C; \quad 6.17. -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{ctg} 2x) + C; \quad 6.18. \operatorname{arctg} (\operatorname{tg}^2 x) + C;$$

$$6.19. -\frac{1}{11} \sin \frac{11}{2} x + \frac{1}{9} \sin \frac{9}{2} x + C; \quad 6.20. -\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

Питання для самоперевірки

1. Яку підстановку називають універсальною тригонометричною підстановкою?
2. Для інтегралів якого виду можна застосувати універсальну тригонометричну підстановку?
3. Яку підстановку треба використати при обчисленні інтеграла $\int \operatorname{tg}^5 x dx$?
4. Яку підстановку треба використати при обчисленні інтеграла $\int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + \cos x}$?

ЛІТЕРАТУРА

1. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (І курс І семестр) / В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова, І. В. Алексєєва, О. О. Диховичний. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 104 с.
2. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л. Б. Федорова. — К: НТУУ «КПІ», 2013. — 252 с.
3. Овчинников П.П.Вища математика: Підруч. для студ.: У 2 ч. Ч. 1. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. - 2-ге вид., стер. - К.: Техніка, 2000. — 592 с.
4. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. — К.: А.С.К., 2004.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика. Кн. 2.Диференціальне та інтегральне числення функційоднієї змінної. Ряди.- К.:Либідь, 1994. — 352 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
Практичне заняття №1 <i>ПОНЯТТЯ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ ТА НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. МЕТОД БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ</i>	4
Практичне заняття № 2 <i>МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ.....</i>	10
Практичне заняття № 3 <i>ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. ІНТЕГРУВАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДРОБІВ</i>	17
Практичне заняття № 4 <i>ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. РОЗКЛАДАННЯ ПРАВИЛЬНОГО РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ НА ЕЛЕМЕНТАРНІ</i>	23
Практичне заняття № 5 <i>ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ</i>	31
Практичне заняття № 6 <i>ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ</i>	41
ЛІТЕРАТУРА.....	48

Навчальне видання

ГОРДІЄНКО Марина Леонідівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

**Методичні вказівки
до виконання практичних робіт**

Первомайська філія
Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова
55200, Україна, Миколаївська обл., м. Первомайськ, вул. Одеська, 107
тел. 8(05161) 4-30-63, 4-24-54
E-mail: admin@ppi.net.ua

Підписано до друку
прим. Ціна договірна.

. Формат 60×84/16. Папір офсетний. Ум. друк. арк. 3. Тираж 50