МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

**Ж. Ю. БУРУНИНА, С. С. КОВАЛЬ,
М. В. УШКАЦ, Н. А. ШАПОВАЛ, К. Д. ЕВФИМКО**

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ. МЕХАНИКА

Учебное пособие

Под редакцией А. А. Мочалова

Рекомендовано Ученым советом НУК

ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА
2020

УДК 531(075.8)
К93

Авторы:
Ж. Ю. Бурунина, кандидат технических наук, доцент;
С. С. Коваль, кандидат физико-математических наук, доцент;
М. В. Ушкац, доктор физико-математических наук, профессор НУК;
Н. А. Шаповал, кандидат технических наук, доцент;
К. Д. Евфимко, старший преподаватель

Рецензенты:
В. А. Поздеев, доктор физико-математических наук, профессор;
Д. Н. Самойленко, кандидат физико-математических наук, доцент;
Н. А. Романчук, кандидат педагогических наук, доцент

Рекомендовано Ученым советом НУК им. адмирала Макарова
в качестве учебного пособия
(протокол № 2 от 25.01.2019 г.)

К93 **Курс** лекций по физике. Механика : учебное пособие / Ж. Ю. Бурунина, С. С. Коваль, М. В. Ушкац, Н. А. Шаповал, К. Д. Евфимко ; под ред. А. А. Мочалова. – Николаев : НУК, 2020. – 152 с.

ISBN 978-966-321-379-8

Пособие содержит базовые теоретические сведения для самостоятельной работы студентов при изучении раздела «Механика» общего курса физики.
Пособие предназначено для иностранных студентов технических специальностей.

УДК 531(075.8)

ISBN 978-966-321-379-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хорошее употребление времени
делает время еще более драгоценным.
Жан-Жак Руссо

В последнее время, в результате введения новых дисциплин в учебные программы технических специальностей, количество аудиторных часов на изучение курса физики было существенно сокращено, однако программа самого курса все равно остается достаточно объемной. Сложившаяся ситуация требует новых подходов к преподаванию физики и новых учебников, в частности, для иностранных студентов. Студенты из других стран, как правило, не владеют украинским языком в мере, достаточной для того, чтобы учиться по уже существующим пособиям. Имеющиеся учебники по физике, в большинстве своем, очень подробны и объемны, что может создавать некоторые трудности для самостоятельной работы иностранных студентов.

Поэтому и возникла необходимость, вместе с новым сокращенным курсом механики на украинском языке, иметь и схожее пособие для иностранных студентов, которое соответствовало бы базовому объему преподавания, а более подробные учебники могли бы, в свою очередь, использоваться уже для углубленного изучения физики в процессе самостоятельной работы.

Данное учебное пособие «Механика» охватывает в сокращенном изложении практически все ключевые аспекты и понятия классической механики, как части курса физики, изучаемого студентами различных технических специальностей Национального университета кораблестроения имени адмирала Макарова. В пособии подробно рассмотрены кинематика и динамика материальной точки и твердого тела, а также законы сохранения. При этом, используемый математический аппарат был максимально сокращен, а основное внимание уделено физическому смыслу соответствующих понятий, явлений и законов. Все это позволяет при ограниченном объеме времени, отведенном на изучение механики, в достаточной мере овладеть знаниями и навыками, необходимыми для дальнейшего изучения физики и смежных дисциплин.

Механическое движение – изменение взаимного расположения тел или их частей с течением времени.

Механика –наука о механическом движении, взаимодействии и равновесии тел.

Механику подразделяют на классическую, релятивистскую и квантовую.

Классическая механика основывается на законах Ньютона, в ней изучается движение *макроскопических* тел ($l >> 1$Å) со скоростями намного меньшими скорости света в вакууме ($v << 3 \cdot 108$ м/с).

Механика, как правило, делится на три раздела: кинематику, динамику, статику.

Кинематика изучает и описывает математически движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обусловливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия. Поэтому законы статики отдельно от законов динамики в данном пособии не рассматриваются.

Основная задача механики состоит в определении положения тела в любой момент времени при известных воздействиях на тело и заданных начальных условиях.

1. КИНЕМАТИКА

1.1. Модели в механике. Система отсчета. Кинематическое описание движения

Кинематика как раздел механики изучает математические свойства механического движения тел, устанавливает связь между пространственными характеристиками движения и временем без учета взаимодействия между телами и инертности тел.

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные *физические модели.* Простейшей моделью является *материальная точка* – тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Это абстрактное понятие, введение которого упрощает решение многих практических задач. Такая абстрактная модель реального тела позволяет отвлечься от второстепенных деталей механического движения. Конкретные тела в одних задачах можно считать материальными точками, а в других задачах такое допущение неприемлемо. Например, при изучении движения Луны по орбите вокруг Земли, можно считать эти тела материальными точками. В том случае, если рассматривается вращение этих небесных тел вокруг собственных осей, то нельзя принимать их за материальные точки.

Произвольную систему тел или макроскопическое тело можно мысленно разбить на малые, взаимодействующие между собой, части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения данной системы тел сводится к изучению *системы материальных точек.* В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению системы материальных точек.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Для описания движения, а также каких-либо других физических явлений, необходима *система отсчета*, которая объединяет пространственную систему координат и способ отсчета времени (часы). В классической механике для описания движения используют время, единое для всей системы отсчета. В этой системе часы, расположенные в разных точках пространства, должны показывать одинаковое время. Такие часы называют синхронизированными.

Для характеристики пространства, в котором происходит движение материальной точки, с системой отсчета связывают пространственную систему координат. Пространственная система координат состоит из трех координатных осей, которые привязаны к одной точке – началу отсчета. Движение материальной точки будет описано полностью, если для конкретной системы отсчета известны ее координаты в любой момент времени. Наиболее часто используется правая прямоугольная декартова система координат. Положение материальной точки *M* в пространстве в определенный момент времени в данной системе координат определяется радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат *O* в данную точку (рис. 1.1). Проекции радиус-вектора на координатные оси *Ox*, *Oy*, *Oz* равны координатам *x, y*, *z* точки *M*

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты), которые задают масштаб длины и направление координатных осей.

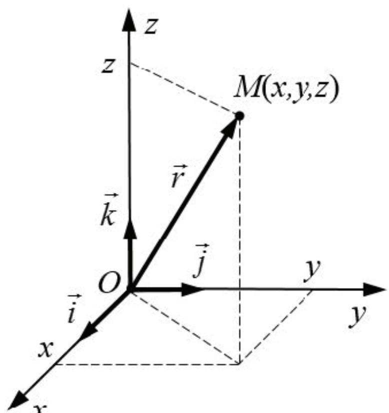


Рис. 1.1

Таким образом, положение материальной точки задается тремя числами (координатами) $M = M(x, y, z)$.

В процессе движения материальной точки ее координаты изменяются со временем. В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

эквивалентными одному векторному уравнению

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ . \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1), (1.2) называются *кинематическими уравнениями движения материальной точки.*

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется *числом степеней свободы.* Если материальная точка свободно движется в пространстве, то, она обладает тремя степенями свободы (координаты x, y и z); если она движется на некоторой плоскости, то двумя степенями свободы, если вдоль некоторой линии, то одной степенью свободы.

Исключая параметр t в уравнениях (1.1), (1.2), получим уравнение траектории движения материальной точки. *Траектория движения* материальной точки – это линия, описываемая движущейся точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть *прямолинейным* или *криволинейным*.

Форма траектории зависит от выбора системы отсчета. Криволинейную траекторию характеризует *кривизна*, которая может изменяться от одной точки траектории к другой. Центром кривизны траектории в данной точке называется центр касательной к ней окружности, радиус которой равен обратному значению кривизны.

Расстояние между двумя точками, пройденное вдоль траектории движения, называется *путь* s – это скалярная функция времени $s = s(t)$. Пройденный материальной точкой путь зависит от времени и может только увеличиваться в процессе движения независимо от его направления.

1.2. Основные виды движения твердых тел

Под воздействием друг на друга тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Для упрощения, в механике вводится еще одна физическая модель – абсолютно твердое тело. *Абсолютно твердым телом* называется тело, которое ни при каких условиях не деформируется и при любых условиях расстояние между любыми двумя точками (или, точнее, между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

Какое-либо сложное движение абсолютно твердого тела всегда можно представить, как два простых вида движения – поступательного и вращательного. *Поступательным движением* называют такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две произвольные точки этого тела, остается параллельной своему первоначальному положению, т.е. ее ориентация в пространстве в ходе движения не изменяется. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории. Следовательно, зная характеристики движения одной точки, можно определить и характеристики движения всех других его точек. *Вращательным движением* абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения*.

Движение твердого тела называют *плоским*, если все участки траекторий движения его точек остаются в параллельных или совпадающих плоскостях.

Движения, которые повторяются или приближенно повторяются через одинаковые промежутки времени, называются *колебательными* или *колебаниями*.

1.3. Вектор перемещения. Скорость

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рис. 1.2). Пусть в начальный момент времени t материальная точка находилась в положении A, которое определяется радиусом-вектором $\vec{r}_1$, и в течении промежутка времени Δt прошла путь Δs, переместившись в положение B, радиус-вектор которого $\vec{r}_2$. Вектор $\Delta\vec{r}$, проведенный из начального положения точки в ее конечное положение, называется *линейным перемещением*. Перемещение характеризует изменение положения точки за промежуток времени Δt. Его можно выразить через изменение радиуса-вектора точки

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

или через соответствующее изменение ее координат

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k},$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

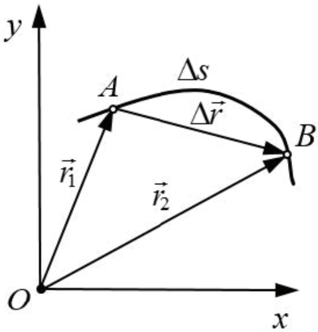


Рис. 1.2

В общем случае модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$ между двумя точками не совпадает с длиной пройденного пути Δs (длиной дуги траектории между этими точками): $|\Delta\vec{r}| \leq \Delta s$. В частности, при движении точки по окружности, вектор перемещения за один полный оборот будет равен нулю, а пройденный точкой путь – длине окружности. Только при бесконечно малом перемещении модуль $|d\vec{r}| = ds$, и в случае прямолинейного движения в неизменном направлении $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$ (вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения равен пройденному пути).

Кроме перемещения одной из основных характеристик движения является *скорость*, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени. При движении материальной точки ее положение на траектории определяется радиус-вектором $\vec{r}(t)$. За промежуток времени Δt, радиус-вектор $\vec{r}(t+\Delta t)$ получит приращение $\Delta\vec{r}$, которое равно вектору перемещения.

Векторная величина

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

называется средней линейной скоростью движения за промежуток времени Δt. Направление вектора средней скорости $\langle\vec{v}\rangle$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$.

Вектор $\langle\vec{v}\rangle$ не всегда достаточно адекватно описывает характер движения, потому что его модуль и направление зависят от длительности самого промежутка времени Δt.

При неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется *мгновенной линейной скоростью*, т. е.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.3)$$

Другими словами, мгновенной линейной скоростью (или просто скоростью) называется вектор $\vec{v}$, равный первой производной радиус-вектора материальной точки по времени. Этот вектор *всегда направлен по касательной к траектории* в направлении движения.

В общем случае скорость является функцией времени $\vec{v}=\vec{v}(t)$. Векторное уравнение (1.3) в виде $d\vec{r}=\vec{v}(t)dt$ используется для определения перемещения точки за произвольный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\int\limits_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} d\vec{r} = \vec{r}_2(t_2)-\vec{r}_1(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{v}(t)dt \qquad (1.4)$$

и средней скорости за данный промежуток времени

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t_1}^{t_2}\vec{r}(t)dt. \qquad (1.5)$$

Выражением (1.4) задается кинематическое уравнение движения (1.2)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\vec{v}(t)dt. \qquad (1.6)$$

В декартовых координатах вектор $\vec{v}$ можно выразить через проекции на координатные оси

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

где

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \; v_y = \frac{dy}{dt}, \; v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Согласно соотношениям векторной алгебры модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{1.7}$$

Для определения модуля скорости можно воспользоваться уравнением (1.3) в скалярной форме $v = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$, учитывая, что по мере уменьшения Δt путь Δs все больше будет приближаться к $|\Delta\vec{r}|$ и при этом $|d\vec{r}| = ds$. Если известна зависимость пройденного пути от времени $s = s(t)$, то модуль скорости равен первой производной пройденного пути по времени

$$v = |\vec{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. Поэтому на практике часто пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ – средним модулем скорости неравномерного движения, которая равна отношению пройденного телом пути ко времени

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

В кинематике принято выражать средние значения всех величин как усредненные по времени. Это касается и средней скорости (1.5) и среднего модуля скорости. В частности, если в течении времени t_1 скорость движения была v_1, а в течении времени t_2 она была v_2, то средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Равномерным движением называется такое движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени проходит одинаковые отрезки пути. При этом скорость ее движения будет постоянной.

В международной системе единиц (СИ) за единицу скорости принят метр в секунду (м/с) – скорость равномерного движения, при котором точка проходит путь длиной один метр за одну секунду.

1.4. Ускорение и его составляющие

В общем случае материальная точка движется неравномерно, т.е. ее скорость изменяется по величине и по направлению. В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является *ускорение.*

Пусть при движении точки по траектории в течении времени Δt ее скорость изменилась от $\vec{v}_1$ в точке A до $\vec{v}_2$ в точке B (рис. 1.3, a) и изменение ее скорости равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

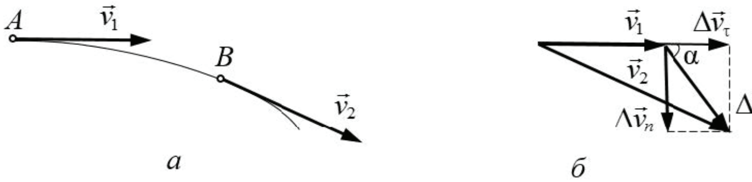


Рис. 1.3

Средним линейным ускорением $\langle\vec{a}\rangle$ неравномерного движения материальной точки в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению приращения вектора линейной скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Мгновенное линейное ускорение $\vec{a}$ (или ускорение) материальной точки в момент времени t определяется пределом, к которому стремится среднее ускорение $\langle\vec{a}\rangle$ при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\langle\vec{a}\rangle = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{1.9}$$

или с учетом формулы (1.4)

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,. \qquad (1.10)$$

Таким образом, линейное ускорение $\vec{a}$ есть векторная величина, равная первой производной линейной скорости по времени или второй производной радиус-вектора по времени.

В общем случае, ускорение само может быть функцией времени $\vec{a} = \vec{a}(t)$ и уравнение (1.9) $d\vec{v} = \vec{a}(t)dt$ позволяет определить изменение скорости за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{\vec{v}(t_1)}^{\vec{v}(t_2)} d\vec{v} = \vec{v}_2(t_2) - \vec{v}_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt \qquad (1.11)$$

и найти среднее ускорение (1.8)

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt\,. \qquad (1.12)$$

В проекциях на координатные оси вектор ускорения:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,,$$

где

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,,\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\,,\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}\,.$$

Рассмотрим общий случай переменного движения. Для этого построим вектор приращения скорости $\Delta\vec{v}$, перенеся параллельно вектор $\vec{v}_2$ из точки *B* в точку *A* (рис. 1.3, *б*). Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на две взаимно-перпендикулярные составляющие: $\Delta\vec{v}_\tau$ – вдоль вектора $\vec{v}_1$ (тангенциальная или касательная составляющая), и $\Delta\vec{v}_n$ – нормальная (или центростремительная) составляющая, направленная по нормали к вектору $\vec{v}_1$, т. е. $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$. Поделив это уравнение на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}\,.$$

Таким образом, ускорение имеет две составляющих, одну из которых $\vec{a}_\tau = \dfrac{d\vec{v}_\tau}{dt}$ называют *тангенциальным* (или касательным) ускорением, а другую $\vec{a}_n = \dfrac{d\vec{v}_n}{dt}$ – *нормальным* (или центростремительным) ускорением. *Полное ускорение* равно их векторной сумме

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.13}$$

Тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю. Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории в данной точке и численно равен проекции вектора полного ускорения на направление скорости $\vec{v}$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \tag{1.14}$$

Найдем модуль нормального ускорения $a_n = \dfrac{dv_n}{dt}$ и его направление в простейшем случае криволинейного движения – равномерном вращении точки по окружности радиуса R. При этом модуль скорости остается постоянным, а изменяется только ее направление. Пусть за малый промежуток времени Δt материальная точка переместилась из положения A траектории в положение B и произошло изменение скорости по направлению $\Delta\vec{v}_n = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 1.4). Учитывая, что модуль скорости не изменился, опустим индексы модулей $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Из подобия треугольника AOB и треугольника, образованного векторами $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\Delta\vec{v}_n$, имеем

$$\frac{\Delta v_n}{AB} = \frac{v}{R} \text{ или } \Delta v_n = \frac{v}{R}\Delta s,$$

где длина дуги $\Delta s \approx AB$ при малом Δt. Поделим последнее уравнение на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_m}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ или } \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{ds}{dt}.$$

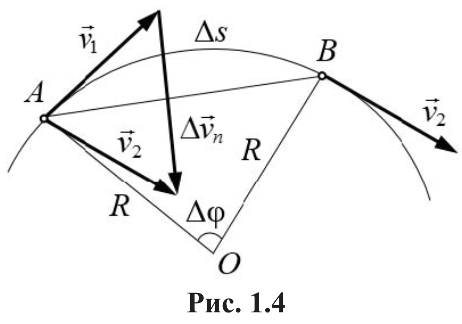


Рис. 1.4

Откуда находим модуль нормального ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (1.15)$$

При равномерном вращении модуль нормального ускорения – постоянная величина. Так как при $\Delta t \to 0$ угол $\Delta\varphi \to 0$ и $\angle ABO \to \frac{\pi}{2}$, то вектор $\vec{a}_n$ в предельном переходе перпендикулярный вектору скорости $\vec{v}$ в любой точке окружности, т. е. направлен по радиусу к центру окружности и во время движения непрерывно изменяет направление.

Отметим, что формула (1.15) справедлива также и для общего случая переменного движения по произвольной криволинейной траектории, когда вектор $\vec{a}_n$ изменяется как по модулю, так и по направлению. В этом случае v и R – это мгновенные значения модуля скорости и радиуса кривизны траектории в данной точке.

Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению. Вектор $\vec{a}_n$ направлен вдоль радиуса кривизны траектории к мгновенному центру кривизны (рис. 1.5), а его модуль выражается формулой (1.15).

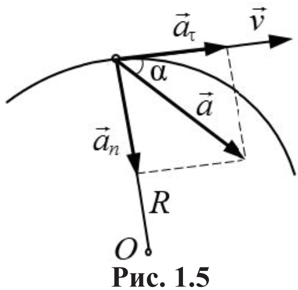


Рис. 1.5

Полное ускорение переменного движения в какой-либо момент времени равно векторной сумме (1.13). Поскольку вектора $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно-перпендикулярны (см. рис. 1.5), то модуль вектора $\vec{a}$ и его направление относительно вектора скорости определяют по формулам:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}; \ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}, \qquad (1.16)$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{v}$.

Равнопеременным называется движение, при котором за любые равные промежутки времени скорость изменяется на одинаковую величину. При таком движении ускорение постоянно и равно среднему ускорению. Основные уравнения кинематики (1.9), (1.11) и (1.4) для равнопеременного движения имеют вид

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \text{const}\,;\ \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0)\,; \qquad (1.17)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{a}\,\frac{(t - t_0)^2}{2}\,, \qquad (1.18)$$

где t_0 – начальный момент времени.

Если скорость равнопеременного движения со временем увеличивается, то движение называется *равноускоренным*, а если уменьшается – *равнозамедленным*. Ускорение считается положительным, если направление тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$ совпадает с направлением скорости $\vec{v}(t)$, и отрицательным – при противоположных направлениях векторов $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$.

При равнопеременном прямолинейном движении нормальное ускорение равно нулю и полное ускорение не меняет направление. Тогда уравнения (1.17), (1.18) в скалярной форме имеют вид:

$$a = \text{const};\ v(t) = v(t_0) + a(t - t_0)\,;$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = s = v(t_0)(t - t_0) + a\,\frac{(t - t_0)^2}{2}\,,$$

где равнозамедленному движению соответствует $a > 0$, а равнозамедленному – $a < 0$.

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения, движение можно классифицировать следующим образом:

1) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение;

2) $a_\tau = a = \text{const}$, $a_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное движение. При таком виде движения

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\,.$$

Если в начальный момент времени $t_1 = 0$, а начальная скорость $v_1 = v_0$, то, обозначив $t_2 = t$ и $v_2 = v$, получим $a = (v - v_0)/t$, откуда

$$v = v_0 + at.$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента времени t, найдем, что длина пути, пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \left(v_0 + at\right) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

3) $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением;

4) $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$. При $a_\tau = 0$ скорость по модулю не изменяется, а изменяется по направлению. Из формулы $a_n = v^2/R$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, это равномерное движение по окружности;

5) $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение;

6) $a_\tau = \text{const}$, $a_n \neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение;

7) $a_\tau = f(t)$, $a_n \neq 0$ – криволинейное движение с переменным ускорением.

Единицей ускорения в СИ является метр на секунду в квадрате (м/с^2) – ускорение равнопеременного движения, при котором скорость ежесекундно изменяется на 1 м/с.

Векторы перемещения, скорости и ускорения являются основными кинематическими характеристиками поступательного движения.

1.5. Прямая и обратная задачи кинематики

Задача кинематики бывает прямой и обратной. В прямой задается закон движения $\vec{r}(t)$, из которого требуется получить все кинематические характеристики движения материальной точки: $\vec{v}(t)$, $v(t)$, $\vec{a}(t)$, $a(t)$, a_τ, a_n, R. Эта задача легко решается простым дифференцированием с помощью формул (1.4) – (1.17). В обратной задаче кинематики задается ускорение материальной точки $\vec{a}$, ее начальная скорость $\vec{v}_0$ и положение $\vec{r}_0$ в начальный момент времени $t = t_0$. Требуется определить скорость $\vec{v}$, ее положение $\vec{r}$ и пройденный путь к произвольному моменту времени t.

Обратная задача гораздо сложнее прямой. Это связано не только с тем, что для ее решения необходимо владеть навыками интегрирования (интегрировать всегда сложней, чем вычислять производную), но, в основном, с тем, что заданное ускорение $\vec{a}$ зависит, как правило, не только от времени t, но и от координат и скорости движущейся точки. В результате решение подобной задачи сводится, как правило, к решению дифференциальных уравнений. В простейшем случае, когда заданное ускорение $\vec{a}$ зависит лишь от времени, решение обратной задачи упрощается.

Пусть известна одна из кинематических характеристик движения как функция времени (например, $\vec{a} = \vec{a}(t)$). Необходимо определить остальные кинематические величины: скорость $\vec{v} = \vec{v}(t)$ и кинематическое уравнение движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В этом случае однозначное решение задачи может быть найдено только при наличии дополнительной информации: должны быть известны кинематические величины $\vec{v}_0$ и $\vec{r}_0$ в некоторый момент времени t_0, условно принятый за начальный. Набор значений $\vec{v}_0$ и $\vec{r}_0$ называют *начальными условиями* задачи. Тогда с помощью (1.9) будем иметь

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt\ .$$

Интегрируя в пределах от t_0 до t, получим

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \rightarrow \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt\ ,$$

т. е.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt\ . \qquad (1.19).$$

Кинематическое уравнение движения найдем на основании (1.4) с учетом (1.19)

$$\vec{r} = \vec{v}dt \rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right) dt\ ,$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0 \left(t - t_0 \right) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right) dt\ .$$

Таким образом, в кинематике встречаются два типа задач: прямая и обратная. Прямая задача имеет однозначное решение. Обратная задача для однозначности решения требует знания начальных условий.

1.6. Кинематика вращательного движения

Рассмотрим кинематические характеристики частного случая криволинейного движения по плоской кривой – движения материальной точки по окружности вокруг неподвижной оси.

Пусть материальная точка M движется по окружности радиуса R, центр которой лежит в точке O_1 на координатной оси Oz декартовой системы координат $Oxyz$ (рис. 1.6). Тогда плоскость окружности, по которой вращается точка, будет параллельна координатной плоскости Oxy и положение точки M в пространстве будет определяться радиусом-вектором

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}\ .$$

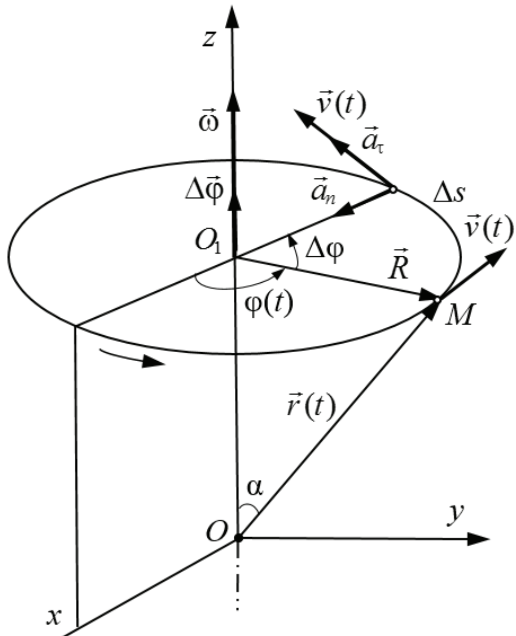


Рис. 1.6

Перемещение точки по окружности к моменту времени t характеризуется углом $\varphi(t)$ поворота вектора $\vec{R}$, проведенного из центра окружности O к точке M.

Для кинематического описания вращательного движения используют *вектор углового перемещения* $\Delta\vec{\varphi}$ за промежуток времени Δt. Модуль этого вектора равен углу поворота за данный промежуток времени $\left|\Delta\vec{\varphi}\right| = \Delta\varphi$. Его направление связывают с осью вращения и направлением вращения точки вокруг оси *правилом правого винта* (или буравчика): вектор $\Delta\vec{\varphi}$ направлен вдоль оси в сторону поступательного движения винта (или любого другого предмета с правой резьбой) при вращении в том же направлении, что и у рассматриваемого тела (см. рис. 1.6). Таким образом, вектор углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ вместе с вектором $\vec{R}$ и вектором линейной скорости $\vec{v}(t)$ образуют правую тройку взаимно-перпендикулярных векторов.

Направление векторов $\vec{R}$ и $\vec{v}(t)$ определяется самой природой этих физических величин, такие вектора называются *полярными*. Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются *псевдовекторами* или *аксиальными* (осевыми) векторами. Такие векторы не имеют определенных точек приложения, они могут откладываться из любой точки оси вращения.

При вращении вектор углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ изменяется (например, растет угол поворота $\Delta\varphi$) и зависит от прошедшего времени Δt и вращательное движение характеризуют *вектором угловой скорости* $\vec{\omega}$. Он определяется пределом, к которому стремится отношение вектора углового перемещения $\Delta\vec{\varphi}$ к промежутку времени Δt, за который совершено это перемещение, при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} . \tag{1.20}$$

Другими словами, угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота по времени. Вектор $\vec{\omega}$, как и вектор углового перемещения, тоже осевой, направленный вдоль оси вращения по правилу правого винта (рис. 1.7). Модуль угловой скорости равен первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} .$$

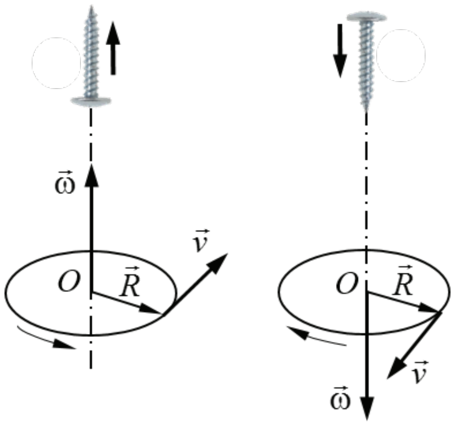


Рис. 1.7

Угловая скорость может изменяться со временем и элементарное угловое перемещение $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}(t)dt$. В этом случае конечное угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi}$ за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ определяется выражением

$$\int\limits_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} d\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\omega}(t)dt .$$

Установим связь между угловой скоростью $\vec{\omega}$ и линейной скоростью $\vec{v}(t)$ материальной точки. При угловом перемещении $\Delta\vec{\varphi}$ за промежуток времени Δt точка проходит длину дуги окружности $\Delta s = R\Delta\varphi$ (см. рис. 1.6). Поделив это равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, имеем соотношение между модулями v и ω:

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}$$

или

$$v = \omega R. \tag{1.21}$$

Так как $R = r\sin\alpha$, где r – модуль радиус-вектора $\vec{r}$ материальной точки; α – угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$, то модуль линейной скорости

$$v = \omega r\sin\alpha,$$

а вектор $\vec{v}$ выражается векторным произведением

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}].$$

При вращении по окружности нормальное ускорение (1.15) можно выразить с учетом (1.21) можно выразить через угловую скорость

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R,$$

или в векторной форме

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R},$$

где знак минус показывает, что векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{R}$ имеют противоположные направления.

Равномерным вращением называется движение, при котором за равные промежутки времени происходит поворот на один и тот же самый угол. При равномерном вращении угловая скорость постоянна $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ и угол поворота пропорционален времени вращения.

Равномерное вращение можно характеризовать *периодом* T – временем, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то $\omega = 2\pi/T$, откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Число полных оборотов, совершаемых в единицу времени при равномерном вращении, называется *частотой* вращения:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

откуда

$$\omega = 2\pi n.$$

За единицу угловой скорости в СИ принят радиан на секунду (*рад*/*с* или c^{-1}) – угловая скорость равномерного вращения, при котором каждую секунду точка делает поворот на один радиан.

В общем случае *неравномерного вращения* угловая скорость $\vec{\omega}$ может изменяться как по модулю, так и по направлению (если ось вращения изменяет ориентацию). Такое вращательное движение характеризуется *угловым ускорением*. Если за малый промежуток времени Δt вектор $\vec{\omega}$ изменится на $\Delta\vec{\omega}$, то угловое ускорение определяется пределом, к которому стремится отношение $\Delta\vec{\omega}/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Таким образом, угловое ускорение есть векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени или второй производной угла поворота по времени.

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости $d\vec{\omega}$. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рис. 1.8, *а*), при замедленном – противонаправлен ему (рис. 1.8, *б*).

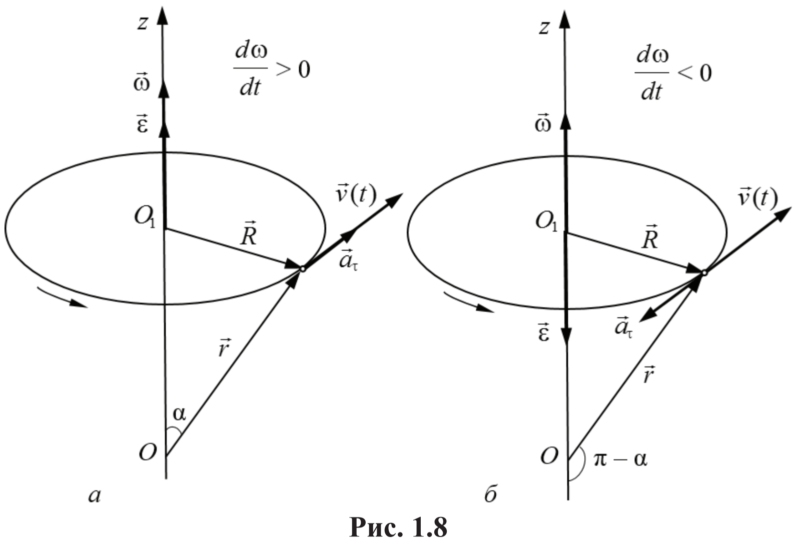


Рис. 1.8

Определим соотношение между угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ и линейным тангенциальным ускорением $\vec{a}_\tau$ некоторой точки вращающегося тела. Используя формулы (1.14) и (1.21), получим связь между модулями a_τ и ε:

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt}R = \varepsilon R\,,$$

где R – радиус окружности по которой вращается точка (ее расстояние от оси вращения).

Выразим радиус через модуль радиуса-вектора $\vec{r}$ материальной точки, проведенного из начала координат O: $R = r\sin\alpha$. Тогда

$$a_\tau = \varepsilon r\sin\alpha = \varepsilon r\sin(\pi - \alpha),$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{\varepsilon}$ в случае ускоренного движения по окружности (см. рис. 1.8, *а*); $(\pi - \alpha)$ – угол между ними при замедленном вращении (рис. 1.8, *б*).

В векторном виде связь между $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{a}_\tau$ имеет вид

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\varepsilon}\vec{r}\right].$$

Таким образом, связь между линейными (длина пути s, пройденного точкой по дуге окружности радиуса R, линейная скорость v, тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n) и угловыми величинами (угол поворота φ, угловая скорость ω, угловое ускорение ε) выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi,\ v = R\omega,\ a_\tau = \varepsilon R,\ a_n = \omega^2 R.$$

В общем случае неравномерного вращения элементарное (бесконечно малое) приращение угловой скорости $d\vec{\omega} = \vec{\varepsilon}(t)dt$, а за конечный промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ изменение угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$ определяется выражением

$$\int\limits_{\omega(t_0)}^{\omega(t)} d\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) - \vec{\omega}(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{\varepsilon}(t)dt\,. \qquad (1.22)$$

Равнопеременным вращением называется вращательное движение, при котором за равные промежутки времени угловая скорость изменяется на одинаковую величину. При равнопеременном вращении в одном направлении угловое ускорение постоянно $\vec{\varepsilon} = \mathrm{const}$ и модули угловой скорости и угла поворота в данный момент времени t выражаются формулами:

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \varepsilon(t - t_0);$$

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{\varepsilon(t - t_0)^2}{2},$$

где t_0 – начальный момент времени; при ускоренном вращении $\varepsilon > 0$, а замедленном $\varepsilon < 0$.

Угловое ускорение в СИ измеряется в радианах на секунду в квадрате (рад/с^2 или с$^{-2}$).

Основные уравнения кинематики вращательного и поступательного движения материальной точки подобны (табл.1.1). Заменив в уравнениях (1.4) и (1.15) перемещение, скорость и ускорение на соответствующие угловые величины, можно получить (1.20) и (1.22).

Таблица 1

Аналогия между основными уравнениями кинематики вращательного и поступательного движения материальной точки

Поступательное движение	**Вращательное движение**
Равномерное движение	
$v = \text{const}, \quad a = 0,$ $s = vt.$	$\omega = \text{const}, \quad \varepsilon = 0,$ $\varphi = \omega t.$
Равнопеременное движение	
$a = \text{const}$ $a = \frac{v - v_0}{t}, \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s},$ $v = v_0 + at,$ $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$	$\varepsilon = \text{const}$ $\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}, \quad \varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi},$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$ $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$
Неравнопеременное движение	
$v = v(t), \quad v = \frac{ds}{dt},$ $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$	$v = v(t), \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt},$ $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$

Контрольные вопросы

1. Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?

2. Что такое система отсчета?

3. Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?

4. Какое движение называется поступательным? Вращательным?

5. Дать определения векторов средней скорости и среднего ускорения, мгновенной скорости и мгновенного ускорения. Каковы их направления?

6. Что характеризует тангенциальная составляющая ускорения? Нормальная составляющая ускорения? Каковы их модули?

7. Возможны ли движения, при которых отсутствует нормальное ускорение? Тангенциальное ускорение? Приведите примеры.

8. Что называется угловой скоростью? Угловым ускорением? Как определяются их направления?

9. Какова связь между линейными и угловыми величинами?

Задания для самоконтроля

1.1. *Механическая система – это совокупность ...*

a) тел, деформациями которых можно пренебречь;
b) тел, выделенных для рассмотрения;
c) объектов, в отношении которых рассматривается движение, и времени;
d) материальных объектов, которые не взаимодействуют с окружающими телами.

1.2. *Система отсчета – это:*

a) система координат, часы и наблюдатель;
b) тело, относительно которого рассматривается движение;
c) совокупность координатных осей;
d) совокупность тел, в отношении которых рассматривается движение, и часы.

1.3. *Материальная точка – это*:

a) тело, деформациями которого можно пренебречь;
b) малая часть реального тела;
c) тело, массой которого можно пренебречь;
d) тело, размерами которого можно пренебречь.

1.4. Указать все правильные ответы.
В модели абсолютно твердого тела пренебрегают его ...

a) деформациями;
b) размерами;
c) взаимодействием с другими телами;
d) массой.

1.5. Указать все правильные ответы.
При поступательном движении ...

a) тело движется по прямой;
b) любая прямая, связанная с телом перемещается параллельно самой себе;
c) все точки тела движутся по прямым линиям, параллельным друг другу;
d) тело движется равномерно.

1.6. *Вращение тела – это такое движение, при котором все его точки движутся ...*

a) по окружностям;
b) по окружностям одинакового радиуса;
c) вокруг одной оси;
d) вокруг оси, необязательно одной для всех точек.

1.7. *Траектория – это:*

a) расстояние между двумя положениями материальной точки, измеренное вдоль линии ее движения;
b) линия, которую описывает материальная точка в процессе движения;
c) вектор, проведенный от начальной точки движения до конечной;
d) вектор, проведенный из начала координат к материальной точке.

1.8. *Путь – это:*

a) расстояние между двумя положениями материальной точки, измеренное вдоль траектории ее движения;

b) линия, которую описывает некоторая материальная точка в процессе движения;

c) вектор, проведенный от начальной точки движения до конечной;

d) вектор, проведенный из начала координат к материальной точке.

1.9. *Перемещение – это:*

a) вектор, проведенный от начальной точки движения к конечной;

b) расстояние между двумя точками, измеренное вдоль траектории движения;

c) линия, которую описывает некоторая материальная точка в процессе движения;

d) вектор, проведенный из начала координат к материальной точке.

1.10. Указать все правильные ответы.

Мгновенная скорость материальной точки – это:

a) производная от пути по времени;

b) отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени;

c) производная от радиус-вектора точки по времени;

d) вектор, равный отношению вектора перемещения к промежутку времени.

1.11. Указать все правильные ответы.

Ускорение – это:

a) это производная от скорости точки по времени;

b) это вторая производная от пути по времени;

c) в каждой точке траектории имеет такое же направление, как и вектор скорости в той же точке;

d) направлено вдоль траектории движения материальной точки.

1.12. *Средняя скорость находится ...*

a) как отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени;

b) как производная от радиус-вектора точки по времени;

c) как производная от пути по времени;

d) как вектор, равный отношению вектора перемещения к промежутку времени.

1.13. *Равномерное прямолинейное движение – это:*

a) прямолинейное движение с постоянной скоростью;

b) движение вдоль прямой с постоянным ускорением;

c) поступательное движение с постоянным ускорением;

d) движение вдоль прямой.

1.14. *Выберите правильное соотношение между путем* dS *и перемещением* $d\vec{r}$:

a) $dS \geq d\vec{r}$; *b)* $dS \geq |d\vec{r}|$; *c)* $dS = |d\vec{r}|$; *d)* $dS = d\vec{r}$.

1.15. Указать все правильные ответы.

Уравнения кинематики прямолинейного равноускоренного движения выглядят следующим образом:

a) $x = v_0 t + at$; *b)* $E = m\dfrac{v^2}{2}$; *c)* $S = v_0 t + a\dfrac{t^2}{2}$; *d)* $E = mgh$;

e) $p = mv$; *f)* $a_n = \dfrac{v^2}{R}$; *g)* $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; *h)* $v = v_0 + at$.

1.16. *Что называется тангенциальным ускорением?*

a) составляющая полного ускорения, характеризующая изменение вектора скорости по величине;

b) скорость изменения вектора скорости;

c) составляющая полного ускорения, перпендикулярная вектору скорости;

d) составляющая полного ускорения, характеризующая изменение вектора скорости по направлению;

e) скорость изменения радиус-вектора.

1.17. *Как ориентирован вектор тангенциального ускорения?*

a) по касательной к траектории движения в этой точке;

b) вдоль прямой, проходящей под углом 45° к вектору скорости;

c) по радиусу кривизны траектории к центру кривизны;
d) перпендикулярно вектору полного ускорения;
e) параллельно вектору полного ускорения.

1.18. *Вектор угловой скорости направлен ...*
a) вдоль оси вращения;
b) перпендикулярно оси вращения, в направлении от нее;
c) в направлении вращения;
d) перпендикулярно оси вращения в направлении к ней.

1.19. *Равномерное вращательное движение – это вращение ...*
a) с постоянным угловым ускорением;
b) вокруг неподвижной оси;
c) с постоянной угловой скоростью;
d) с нулевым нормальным ускорением.

1.20. *Частота вращения ...*
a) обратно пропорциональна периоду;
b) прямо пропорциональна периоду;
c) равна 2π радиан, деленных на период;
d) равна 2π радиан, умноженных на период.

1.21. *Частота вращения* ν *связана с угловой частотой* ω *следующим соотношением:*
a) $\omega = 2\pi/\nu$; *b)* $\omega = \nu/2\pi$ *c)* $\omega = 1/\nu$ *d)* $\omega = 2\pi\nu$

1.22. Указать все правильные ответы.
Угловое ускорение – это:
a) вторая производная от радиус-вектора по времени;
b) производная от угловой скорости по времени;
c) отношение момента сил, действующих на тело, к его моменту инерции;
d) производная радиус-вектора по времени.

1.23. *Линейная скорость движения точки равна ...*
a) векторному произведению ее угловой скорости на радиус-вектор этой точки, проведенный из точки, лежащей на оси вращения;
b) скалярному произведению ее угловой скорости на радиус-вектор этой точки, проведенный из точки, лежащей на оси вращения;

c) отношении его угловой скорости до радиус-вектора этой точки, проведенного из точки, лежащей на оси вращения;

d) произведению угловой скорости на частоту вращения.

1.24. *Тангенциальное* a_τ *и угловое ускорение* ε *материальной точки связаны через ее радиус вращения* R *следующим соотношением:*

a) $a_\tau = \varepsilon / R$; b) $a_\tau = \varepsilon R$; c) $\varepsilon = a_\tau / R^2$; d) $a_\tau = R/\varepsilon$

1.25. Указать все правильные ответы.

Уравнения кинематики вращательного равноускоренного движения вокруг фиксированной оси выглядят следующим образом:

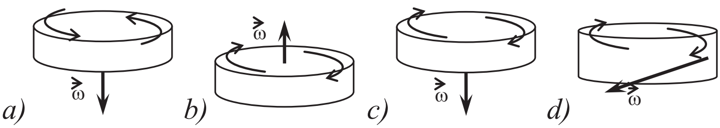
a) $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \beta \frac{t^2}{2}$; *b)* $a_n = \frac{v^2}{R}$; *c)* $a_\tau = \beta R$; *d)* $a_\tau = \beta / R$

e) $\omega = \omega_0 + \beta t$; *f)* $a_n = v^2 R$; *g)* $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; *h)* $\vec{M} = J\vec{\beta}$.

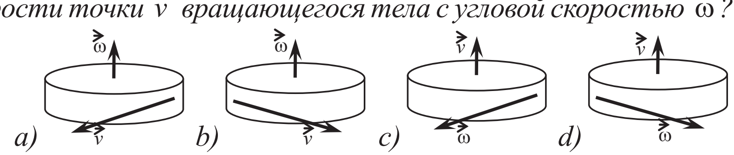
1.26. *По какой формуле определяется вектор средней линейной скорости?*

a) $\frac{d\vec{v}}{dt}$; *b)* $\frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n}{n}$; *c)* $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$; *d)* $\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

1.27. *На каком рисунке правильно указанный вектор угловой скорости тела при заданном направлении вращения?*



1.28. *На каком рисунке правильно указанный вектор линейной скорости точки* $\vec{v}$ *вращающегося тела с угловой скоростью* $\vec{\omega}$*?*



1.29. *При каком движении* $a_n = 0$ *і* $a_\tau = 0$*?*

a) по окружности с v = const;

b) прямолинейном равнозамедленном;

c) прямолинейном равноускоренном;

d) прямолинейном равномерном.

1.30. *При каком движении* $a_\tau = 0$, $a_n = const$?

a) равномерном по окружности;

b) при криволинейном равноускоренном;

c) при криволинейном;

d) прямолинейном равнопеременном;

e) прямолинейном равномерном.

1.31. *В некоторый момент времени скорость и ускорение материальной точки направлены так, как показано на рисунке зад. 1.28. Какие из нижеприведенных утверждений могут быть верными?*

a) движение прямолинейное, ускоренное;

b) движение прямолинейное, равномерное;

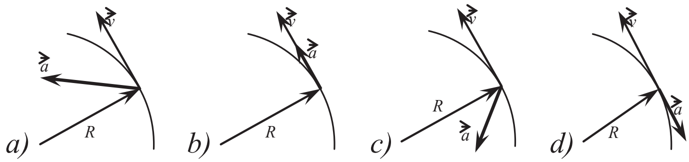
c) движение прямолинейное, замедленное;

d) движение криволинейное, ускоренное;

e) движение криволинейное, равномерное;

f) движение криволинейное, замедленное.

1.32. *На каком рисунке направление вектора полного линейного ускорения соответствует замедленному движению по траектории?*



1.33. *Какие из представленных движений являются равномерными?*

a) $\vec{a}_n = 4$ м/с^2, $\vec{a}_\tau = 4$ м/с^2; *b)* $\vec{a}_n = 3 \cdot t$ м/с^2, $\vec{a}_\tau = 1$ м/с^2;

c) $\vec{a}_n = 3$ м/с^2, $\vec{a}_\tau = 0$ м/с^2; *d)* $\vec{a}_n = 0$ м/с^2, $\vec{a}_\tau = 2$ м/с^2.

1.34. *Выберите правильное выражение для записи зависимости скорости тела от времени. Зависимость пройденного пути от времени задается уравнением* $S(t) = 4 + 2t^3 + 3t^4$.

a) $v(t) = 4 + 6t^2 + 12t^3$; *b)* $v(t) = 6t^2 + 8t^3$;

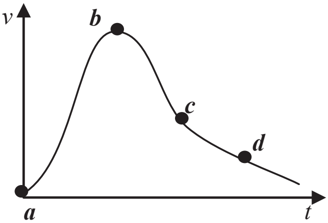
c) $v(t) = 4t^2 + 4t^3$; *d)* $v(t) = 6t^2 + 12t^3$; *e)* $v(t) = 12t^2$.

1.35. *Выберите правильное выражение для зависимости углового ускорения тела от времени. Зависимость угла от времени задается уравнением* $\phi(t) = 2 + 0{,}5t + 3t^3$:

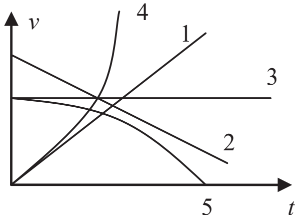
a) $\varepsilon(t) = 2 + t + 9t^2$; *b)* $\varepsilon(t) = 0{,}5 + 3t^2$;

c) $\varepsilon(t) = 2t + 9t^2$; *d)* $\varepsilon(t) = t + t^2$; *e)* $\varepsilon(t) = 12t$.

1.36. *Укажите точку на графике, в который тангенциальное ускорение равно нулю.*



1.37. *Материальная точка движется по прямой согласно уравнению* $x = 5 + 2t^2$. *Зависимость скорости точки от времени на графике изображается линией.*

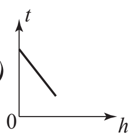


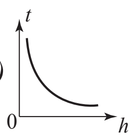
a) 2; *b)* 3; *c)* 1; *d)* 5; *e)* 4.

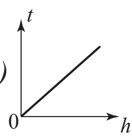
1.38. *Прямолинейное движение материальной точки описывается уравнением* $S = 15 - 3t + 2t^2$. *Скорость точки через 3 с после начала движения равна:*

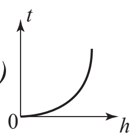
a) 2 м/с; *b)* 4 м/с; *c)* 9 м/с; *d)* 15 м/с; *e)* 18 м/с.

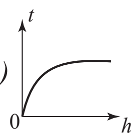
1.39. *Какой из следующих графиков отображает зависимость времени свободного падения тела от высоты падения?*

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

1.40. *Два тела свободно падают с высоты $h_1 = 180$ м и $h_2 = 20$ м. Во сколько раз скорость первого тела в момент падения на Землю отличается от скорости другого?*

a) в 9 раз; *b)* в 3 раза; *c)* в 1/9 раз;
d) в 1/3 раз; *e)* не отличаются.

1.41. *Движение тела описывается кинематическими уравнениями: $y = t^2$ и $x = t^2$. При этом уравнение траектории:*

a) $t^2 = 0$; *b)* $t^2 = const$; *c)* $y = x$; *d)* $x + y = 2t^2$.

1.42. *За 4 часа Земля вращается на ...*

a) 45°; *b)* 60°; *c)* 30°; *d)* 20°.

1.43. *Радиус Земли равен 6400 км. При этом, угловая скорость ее движения составляет ...*

a) 267 км/год; *b)* 15 м/с; *c)* $7 \cdot 10^{-5}$ рад/с; *d)* 10^{-5} рад/с.

1.44. *Найдите неверную формулу связи угловых и линейных характеристик движения:*

a) $S = \Delta\varphi \cdot R$; *b)* $v = \omega \cdot R$; *c)* $a \; = \varepsilon \cdot R$; *d)* $a_\tau = \varepsilon \cdot R$.

1.45. *Какое из выражений для полного линейного ускорения является неточным?*

a) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$; *b)* $|\vec{a}| = \dfrac{d^2 S}{dt^2}$;

c) $|\vec{a}| = \sqrt{\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{d^2 y}{dt^2} + \dfrac{d^2 z}{dt^2}}$; *d)* $\vec{a} = \dfrac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Основные понятия динамики

В разделе кинематика было рассмотрено движение тел в пространстве, не вдаваясь в причины его возникновения. Таким образом вопрос, в результате каких взаимодействий возникло движение, в этом разделе механики не поднимался. *Динамика* изучает механическое движение тел в связи с теми взаимодействиями, которые обусловливают тот или иной характер движения.

В основе динамики лежат три закона, сформулированные Ньютоном в 1687 году. Законы Ньютона являются эмпирическими, т.е., получены в результате обобщения результатов большого количества опытных данных. В эти законы входят несколько общих физических понятий, с которых и нужно начинать изучение самой динамики.

Масса – скалярная физическая величина, одна из основных характеристик материи, которая определяет ее инерционные и гравитационные свойства.

Единица измерения массы – килограмм (кг) (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Приставки для образования десятичных и дольных единиц массы

1 мкг (один микрограмм)	10^{-9} кг
1 мг (один миллиграмм)	10^{-6} кг
1г (один грамм)	10^{-3} кг
1т (одна тонна)	10^{3} кг

Фундаментальные свойства массы в классической механике:

– масса материальной точки не зависит от состояния движения точки, являясь ее неизменной характеристикой;

– масса является аддитивной величиной, масса систем тел равна алгебраической сумме масс всех материальных точек, входящих в состав этой системы;

– масса замкнутой системы остаётся неизменной при любых процессах, происходящих в этой системе (закон сохранения массы).

С понятием массы неразрывно связано и понятие *плотности* тел. Локальной плотностью тела ρ в данной точке *M* называется отношение массы *dm* малого элемента тела, включающего точку *M*, к величине объема *dV* объема этого элемента:

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

Средней плотностью неоднородного тела <ρ> называется отношение всей его массы к объему:

$$\langle \rho \rangle = \frac{m}{V}.$$

Тело называется *однородным*, если во всех точках его объема значение локальной плотности равно среднему.

Масса неоднородного тела

$$m = \int_V \rho(x, y, z)\, dV.$$

Воздействие тел друг на друга описывается понятием *сила*. Сила – векторная физическая величина, которая является мерой механического действия на тело со стороны других тел или полей, в результате чего тело приобретает ускорение или изменяет форму и размеры.

Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при ударе, трении, давлении одного на другое и т. д.), так и между удаленными телами.

Взаимодействие между удаленными телами осуществляется с помощью связанных с ними гравитационных и электромагнитных полей.

Пользуясь понятием силы, в механике обычно говорят про движение и деформацию данного тела под действием приложенных к нему сил. При этом, обычно, каждой силе всегда соответствует какое-то определенное тело или поле, которое действует с этой силой.

Сила $\vec{F}$ полностью задана, если указан ее модуль *F*, направление в пространстве и точка приложения.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*. *Центральными* называются силы, которые везде направлены вдоль прямых, которые проходят через одну и ту же неподвижную точку – *центр сил*, и зависят только от расстояния до центра сил.

Поле, которое действует на материальную точку с силой $\vec{F}$, называется стационарным полем, если оно не изменяется с течением времени.

Одновременное действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию одной силы, которую называют *равнодействующей* или *результирующей*. Результирующая сила определяется как геометрическая сумма действующих сил.

Единица измерения силы – ньютон (Н): 1 Н – сила, которая действуя на тело массой 1 кг, вызывает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы.

Когда рассматривают не одно тело в целом, а механическую систему, важно отделять силы, действующие внутри системы, от тех, которые действуют на систему со стороны внешних тел (т.е., тех, которые не входят в рассматриваемую систему). Силы, которые действую на систему со стороны внешних тел, называют *внешними силами*. Соответственно, *внутренними силами* называются силы взаимодействия между телами входящими в состав данной системы.

Механическая система называется *замкнутой* или *изолированной* системой, если она не взаимодействует с внешними телами (на нее не действуют внешние силы).

Тело называется *свободным*, если на его положение и движение в пространстве не введено никаких ограничений. Тело называется *связанным*, если на его возможные положения и движения наложены определенные ограничения, которые в механике называют связями. Связанное тело можно рассматривать как свободное, заменив действие на него тел, которые определяют связи, соответствующими силами. Эти силы называются *реакциями связи*, а остальные силы, действующими на тело – *активными силами*.

Одним из ключевых понятий динамики материальной точки является *импульс*. Векторная физическая величина $\vec{p}$, которая равна произведению массы m материальной точки на ее скорость $\vec{\upsilon}$, и имеет направление скорости, называется импульсом или количеством движения данной материальной точки

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}\,.$$

Импульсом системы материальных точек называется вектор $\vec{p}$, равный геометрической сумме импульсов всех материальных точек системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{\upsilon}_i \, . \qquad (2.1)$$

Импульс системы равен произведению массы всей системы на скорость ее центра инерции.

2.2. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона: материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью*. Поэтому первый закон Ньютона называют также законом инерции. Первый закон Ньютона постулирует существование *инерциальных систем отсчета* – таких, где материальная точка не подверженная действию других тел, движется равномерно и прямолинейно.

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения, который отвечает на вопрос, каким образом изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Линейное ускорение $\vec{a}$, которое приобретает материальная точка, пропорционально действующей на нее результирующей силе $\vec{F}$ (т.е., сумме векторов сил), совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

или

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \, . \qquad (2.2)$$

В более общей формулировке второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: ***скорость изменения со***

временем импульса материальной точки равно действующей на нее силе.

Векторная величина $\vec{F}dt$ называется *элементарным импульсом силы* $\vec{F}$ за бесконечно малый интервал времени dt ее действия. Импульс силы за интервал времени $\Delta t = t_2 - t_1$ определяется интегралом $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$. В соответствии со вторым законом Ньютона изменение импульса материальной точки равно импульсу действующей на нее силы:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt;$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt.$$

Основной закон динамики материальной точки выражает *принцип причинности* в классической механики: однозначную связь между изменением со временем состояния движения и положения материальной точки и действующей не нее силой. Это позволяет, зная начальное состояние материальной точки, описать ее состояние в произвольный момент времени.

Огромное значение в механике имеет *принцип независимости действия сил*: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из них сообщает ей ускорение согласно второму закону Ньютона, таким образом, как будто других сил не было. Согласно этому принципу, силы и ускорения можно разложить на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения многих задач.

Ускорение при криволинейном движении можно представить в виде суммы двух составляющих – нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального $\vec{a}_\tau$ ускорений. В соответствии с этим, и силу, действующую на тело, можно разложить на нормальную $\vec{F}_n$ и тангенциальную $\vec{F}_\tau$ составляющие (рис. 2.1).

Нормальное и тангенциальное ускорения материальной точки определяются соответствующими составляющими силы:

$$\vec{a}_\tau = \frac{\vec{F}_\tau}{m}; \qquad a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F_\tau}{m}; \qquad F_\tau = m\frac{d\upsilon}{dt}.$$

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}; \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \frac{F_n}{m}; \qquad F_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

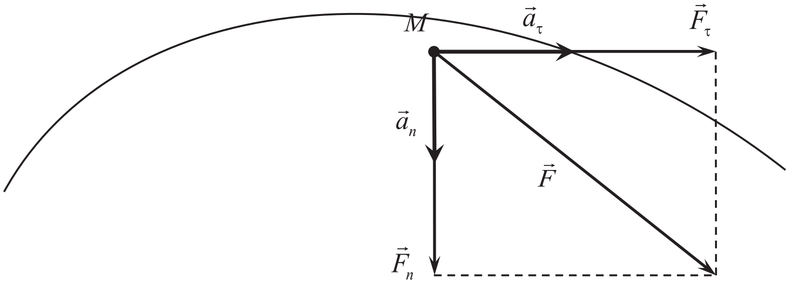


Рис. 2.1

Нормальная составляющая силы обусловливает изменение скорости по направлению, не изменяя ее величины (модуля). Тангенциальная составляющая изменяет скорость по величие (модулю) и не изменяет ее направления. Отсюда вытекает важное следствие: если сила, действующая на тело, в каждый момент времени оказывается перпендикулярной к скорости тела, скорость, изменяясь по направлению, остается постоянной по величине. При условии, что сила, кроме того, остается постоянной по величине, нормальное ускорение также будет неизменно по величине, и тело будет двигаться по траектории постоянной кривизны (т. е., по окружности).

Всякое действие материальных точек (тел) одна на другую имеет характер *взаимодействия*. Согласно ***третьему закону Ньютона***, силы, с которыми действуют одна на другую материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис. 2.2).

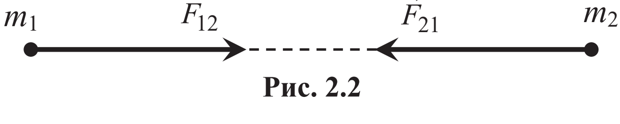


Рис. 2.2

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}; \ \left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|.$$

Данные силы приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

2.3. Закон сохранения импульса. Центр масс

Третий закон Ньютона позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной системы материальных точек, поскольку позволяет свести любое взаимодействие к силам парного взаимодействия между материальными точками.

В частности, производная в (2.2) от импульса механической системы, как суммы импульсов (2.1) всех ее частей будет определяться суммой всех сил (как внешних, так и внутренних), действующих на все эти части. Однако, сумма всех внутренних (т.е., парных) сил, согласно третьему закону Ньютона, всегда будет равна нулю, а значит, и изменение импульса системы со временем (та самая производная) полностью определяется суммой только внешних сил. Другими словами, импульс любой механической системы может изменяться со временем только под действием внешних сил, а внутренние силы (сами по себе, конечно, изменяя импульсы отдельных частей системы) не в состоянии изменить суммарный импульс всей системы.

Таким образом, непосредственным следствием третьего закона Ньютона является *закон сохранения импульса*: импульс замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени.

$$\vec{p}_{замк} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i = const . \qquad (2.3)$$

Важно, что закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (поведение которых подчиняются законам квантовой механики) и для тел, скорость которых приближается к скорости света (релятивистских тел). Этот закон носит по-настоящему универсальный характер, т.е. закон сохранения импульса – фундаментальный закон природы.

В механике Ньютона, благодаря допущению о независимости массы от скорости, импульс системы может быть выражен через скорость ее определенной точки – *центра масс*. Центром масс (или центром инерции) системы материальных точек является некоторая точка C, координаты которой характеризуют распределение массы данной системы. Положение центра масс (радиус-вектор этой точки в некоторой системе отсчета) определяется следующим образом:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{2.4}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки системы; N – количество материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – масса всей системы.

В соответствии с (2.1) и (2.4), импульс всей системы будет импульсом этой точки – центра масс – когда ее масса равна массе системы

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}_C}{dt} = m\vec{\upsilon}_C .$$

Закон движения центра масс: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему:

$$m \frac{d\vec{\upsilon}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i .$$

Из закона сохранения импульса (2.3) следует, что центр масс замкнутой системы или движется прямолинейно и равномерно или остается неподвижным.

2.4. Силы в механике

1). ***Сила тяжести*** (гравитационные силы).

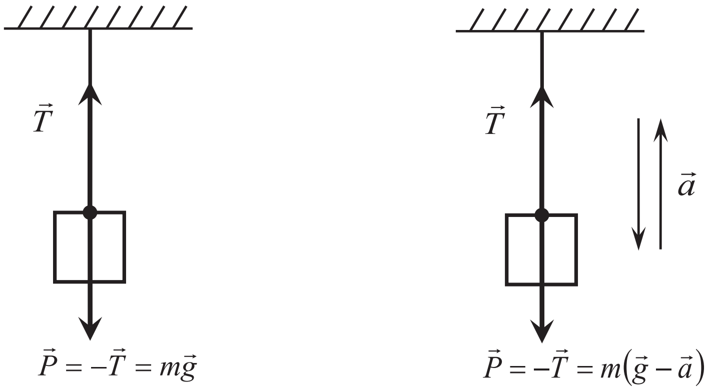
В системе отсчета связанной с Землей, на любое тело массой m действует притягивающая к Земле сила

$$\vec{F} = m\vec{g} ,$$

которую называют силой тяжести. Под действием силы тяжести все тела падают с одинаковым ускорением $g = 9{,}81$ м/с^2, которое называется *ускорением свободного падения*.

Весом тела $\vec{P}$ называется сила, с которой тело, вследствие притяжения к Земле, действует на опору или натягивает подвес (не путать с силами, действующими на само тело, например, со стороны опоры или подвеса).

В земных условиях сила тяжести действует на тело всегда, а вес тела (сила, с которой оно действует на другие тела) проявляется только тогда, когда на тело кроме силы тяжести действуют и другие силы (например, реакция опоры $\vec{N}$ или подвеса $\vec{T}$, рис. 2.3).



а *б*

Рис. 2.3

Вес тела по величине равен силе тяжести только в тех случаях, когда ускорение тела относительно Земли отсутствует (во втором законе Ньютона реакция опоры или подвеса полностью компенсирует силу тяжести, а, при этом, реакция должна быть равна по величине и весу тела, согласно третьему закону Ньютона, см. рис. 2.3, *а*).

Иначе, если ускорение не равно нулю, то и сумма силы тяжести с реакцией опоры (подвеса) отличается от нуля:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

или

$$\vec{T} = m\vec{a} - m\vec{g} \,,$$

а тогда и вес отличается от силы тяжести

$$\vec{P} = -\vec{T} = m(\vec{g} - \vec{a}) \,, \tag{2.5}$$

где $\vec{a}$ – ускорение тела вместе с опорой относительно Земли.

Проецируя векторное выражение (2.5) на направление силы тяжести, получаем величину веса тела:

$$P = m(g \pm a) \,. \tag{2.6}$$

В скалярном выражении (2.6) знак "+" соответствует ускорению направленному вверх, а знак "–" соответствует направленному вниз ускорению. Таким образом, можно сделать вывод, что по модулю вес тела может быть как больше, так и меньше, чем сила тяжести.

Если тело свободно движется в поле сил тяжести ($\vec{a} = \vec{g}$), вес тела равен нулю – тело будет невесомым. ***Невесомость*** – это состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести.

2). ***Силы упругости.***

Силы упругости возникают в результате взаимодействия тел, которое сопровождается их деформацией. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется *упругой*. Упругие деформации наблюдаются в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый, определенный для каждого тела, предел (предел упругости).

Упругая сила пропорциональна сдвигу частицы из положения равновесия и направлена в сторону положения равновесия:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \,, \tag{2.7}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, который характеризует сдвиг частицы из положения равновесия, k – коэффициент упругости.

Примером такой силы (2.7) является сила упругой деформации пружины при ее растяжении или сжатии:

$$F = -kx,$$

где k – жесткость пружины, x – абсолютная упругая деформация (знак минус указывает на то, что проекция силы противоположна деформации).

3). ***Силы трения.***

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется внешним; трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) носит название внутреннего трения.

Силу трения, возникающую при движении твердого тела относительно жидкой или газообразной среды, следует отнести к категории сил внутреннего трения, поскольку, в этом случае, слои среды, непосредственно соприкасающиеся с телом, вовлекаются им в движение с той же скоростью, какую имеет тело, и на движение тела оказывает влияние трение между этими и внешними, по отношению к ним, слоям среды.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например, смазки между ними, называется сухим. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется вязким.

Применительно к сухому трению различают трение скольжения и трение качения.

Сила трения скольжения возникает при скольжении данного тела по поверхности другого:

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей; N – сила нормального давления, которая прижимает трущиеся поверхности одна к одной.

Сила трения скольжения направлена по касательной к трущимся поверхностям, в сторону противоположную движению данного тела относительно другого.

2.5. Преобразования Галилея

Преобразованиями Галилея называются преобразования координат и времени, применяемые в классической механике при переходе от одной инерциальной системы отсчета K к другой K', которая движется относительно K поступательно с постоянной скоростью $\vec{u}_0$, т.е., математические выражения, которые связывают координаты и время (x, y, z, t) некоторого события в системе K с координатами и временем (x', y', z', t') этого же события в системе K'.

Преобразования Галилея основываются на аксиомах об абсолютности промежутков времени и расстояний в пространстве (т.е., абсолютности длин пространственных и временных отрезков). Первая аксиома утверждает, что ход времени (соответственно промежуток времени между какими-либо двумя событиями) одинаков во всех инерциальных системах отсчета. Согласно второй аксиоме, размеры тела не зависят от скорости его движения относительно системы отсчета.

Предположим, событие заключается в том, что интересующее нас тело в какой-то момент времени (в классической механике единственный момент времени для всех систем, $t = t'$) находится в точке M. Его положение в инерциальной системе координат K однозначно задается радиус-вектором $\vec{r}$ (x, y, z), а в системе координат K' – радиус-вектором $\vec{r}\,'$ (x', y', z'), соответственно. Пусть положение начала координат системы K' относительно начала системы координат системы K в этот момент времени задается радиус-вектором $\vec{r}_0$. Тогда положение тела в точке M можно выразить следующим образом (рис. 2.4):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,' .$$

Продифференцируем левую и правую часть этого выражения по времени:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$

или

$$\vec{v} = \vec{u}_0 + \vec{v}\,' , \qquad (2.8)$$

где $\vec{v}$ – линейная скорость тела в системе отсчета K, а $\vec{v}'$ – скорость тела в системе отсчета K'.

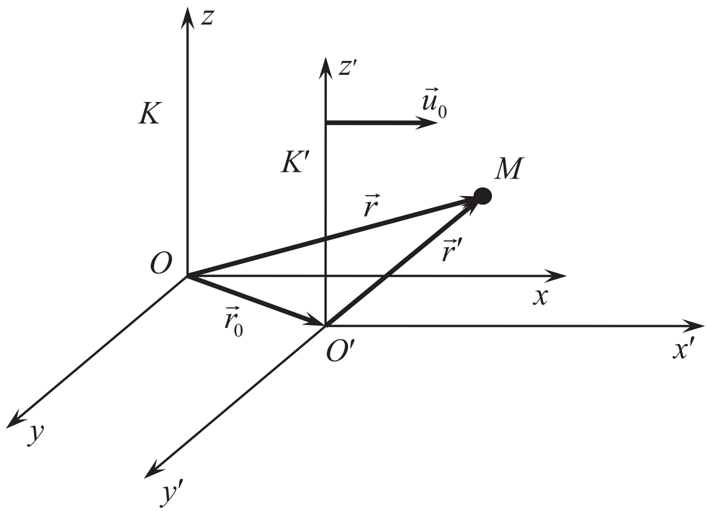


Рис. 2.4

Выражение (2.8) называется ***классическим законом сложения скоростей.*** Если принять, что система отсчета K неподвижна, его можно сформулировать следующим образом: скорость тела в неподвижной системе координат можно выразить как геометрическую (векторную) сумму скорости подвижной системы координат относительно неподвижной и скорости тела в этой подвижной системе.

Продифференцируем левую и правую часть выражения (2.8) по времени:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

или учитывая, что $\vec{u}_0 = \text{const}$,

$$\vec{a} = \vec{a}' . \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) непосредственно означает, что *ускорение тела не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой*. Такие физические величины называются инвариантными относительно данного преобразования.

Соответственно, уравнения, выражающие законы Ньютона, инвариантны относительно преобразований Галилея.

Таким образом, в классической механике справедлив механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): ***законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.*** Это значит, что в разных инерциальных системах отсчета все механические процессы при одних и тех же условиях протекают одинаково. Следовательно, с помощью любых механических экспериментов, проведенных в инерциальной системе, невозможно установить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно (относительно какой-либо другой инерциальной системы отсчета).

Другими словами, механический принцип относительности свидетельствует о том, что все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны (по крайней мере, в отношении любых механических явлений).

2.6. Движение тела переменной массы (реактивное движение)

В ньютоновской механике масса тела может изменяться только в результате отделения от тела (или присоединения к нему) частиц вещества. Примером такого тела является ракета. В процессе полета масса ракеты постепенно уменьшается, т. к. газообразные продукты сгорания топлива в двигателе ракеты выбрасываются через его сопло в направлении, противоположном движению самой ракеты.

Выведем уравнение движения подобного тела переменной массы. Если в момент времени t масса ракеты m, а ее скорость v, то по истечении времени dt ее масса уменьшится на dm и станет равной $m - dm$, а скорость станет равной $v + dv$. Изменение импульса системы за отрезок времени dt:

$$dp = \left[\left(m - dm\right)\left(v + dv\right) + dm\left(u + v\right)\right] - mv\ ,$$

где u – скорость истечения газов относительно ракеты.

Тогда (с учетом того, что $dm{\cdot}dv$ – величина высшего порядка малости по сравнению с остальными)

$$dp = mdv + udm\ .$$

Если на систему действуют внешние силы, $dp = Fdt$, поэтому

$$Fdt = mdv + udm$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = F - u\frac{dm}{dt}.$$

Второе слагаемое в правой части этого выражения называют *реактивной силой*

$$F_p = u\frac{dm}{dt}.$$

В результате, мы получили уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\frac{dv}{dt} = F - F_p. \tag{2.10}$$

2.7. Гравитационное поле

Наряду с электрическим взаимодействием чрезвычайно важную роль в природе играет гравитационное взаимодействие. Это взаимодействие присуще всем телам, независимо от того, являются они электрически заряженными или нейтральными, и определяется только массами тел. Гравитационное взаимодействие заключается в том, что все тела притягиваются друг к другу, причем сила этого взаимодействия пропорциональна произведению масс тел.

Если тела можно рассматривать как материальные точки, то сила гравитационного взаимодействия оказывается обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Обозначим массы тел через m_1 и m_2 и расстояние между ними через r, тогда гравитационную силу, с которой они притягивают друг друга, можно выразить следующим образом:

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.11}$$

где G – универсальный коэффициент пропорциональности, не зависящий от природы взаимодействующих тел; знак минус указывает на то, что сила F является всегда силой притяжения.

Формула (2.11) выражает ***закон тяготения Ньютона.***

Величина G называется ***гравитационной постоянной.*** Очевидно, G представляет собой силу, с которой притягиваются друг к другу две материальные точки с массами в один килограмм, находящиеся на расстоянии один метр.

Гравитационная постоянная имеет следующее значение:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Чрезвычайно малая величина G показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае очень больших масс. По этой причине гравитационное взаимодействие не играет никакой роли в механике атомов и молекул. С ростом массы роль гравитационного взаимодействия возрастает, и движение таких тел, как Луна, Земля, другие планеты и спутники, полностью определяется гравитационными силами.

Контрольные вопросы

1. Какая система отсчета называется инерциальной? Почему система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна?
2. Что такое сила? Как ее можно охарактеризовать?
3. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему?
4. Сформулировав три закона Ньютона, покажите, какова взаимосвязь между этими законами.
5. В чем заключается принцип независимости действия сил?
6. Какова физическая сущность трения? В чем отличие сухого трения от жидкого? Какие виды внешнего (сухого) трения Вы знаете?
7. Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми? Является ли Вселенная замкнутой системой? Почему?

8. В чем заключается закон сохранения импульса? В каких системах он выполняется? Почему он является фундаментальным законом природы?

9. Каким свойством пространства обусловливается справедливость закона сохранения импульса?

10. Что называется центром масс системы материальных точек? Как движется центр масс замкнутой системы?

Задания для самоконтроля

2.1. *Динамика – это раздел физики, изучающий ...*

a) изменения состояния тел в пространстве и времени;

b) причины, вызывающие движение тел и обусловливающие их равновесие;

c) движения тел с учетом причин его возникновения;

d) свойства системы взаимодействующих тел.

2.2. *Первый закон Ньютона можно сформулировать следующим образом:*

a) во всех инерциальных системах отсчета все механические явления протекают одинаково при одинаковых начальных условиях;

b) силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению;

c) скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на него;

d) всякое тело в отсутствии взаимодействия покоится или движется равномерно и прямолинейно.

2.3. *Инерциальной называется система отсчета ...*

a) в которой выполняется первый закон Ньютона;

b) в которой все механические явления протекают одинаково при одинаковых начальных условиях;

c) в которой выполняется второй закон Ньютона;

d) которая движется равномерно и прямолинейно.

2.4. *Классический принцип относительности можно сформулировать следующим образом:*

a) всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока взаимодействие с другими телами не заставит его изменить это состояние;

b) силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению;

c) во всех инерциальных системах отсчета все механические явления протекают одинаково при одинаковых начальных условиях;

d) скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на него.

2.5. Указать все правильные ответы.

Масса тела является характеристикой его …

a) динамических свойств;

b) кинематических свойств;

c) гравитационного взаимодействия;

d) взаимодействия с другими телами при их столкновениях.

2.6. *Плотность вещества – это:*

a) масса единичного объема вещества;

b) мера инертности тела;

c) произведение массы тела на его объем;

d) его способность сохранять форму в условиях внешних воздействий.

2.7. *Импульс тела – это:*

a) произведение массы тела на его скорость;

b) произведение массы тела на квадрат его скорости, поделить на два;

c) отношение силы, действующей на тело к его массе;

d) кинетическая энергия движения тела.

2.8. *Второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом:*

a) скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на него;

b) во всех инерциальных системах отсчета все механические явления протекают одинаково при одинаковых начальных условиях;

c) всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока взаимодействие с другими телами не заставит его изменить это состояние;

d) силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.

2.9. *Уравнение движения тела в нерелятивистской механике выглядит так:*

a) $E = \dfrac{mv^2}{2}$; *b)* $\vec{P} = m\vec{v}$; *c)* $v = ds/dt$; *d)* $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

2.10. *Третий закон Ньютона можно сформулировать следующим образом:*

a) силы, с которыми действуют друг на друга взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению;

b) скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на него;

c) во всех инерциальных системах отсчета все механические явления протекают одинаково при одинаковых начальных условиях;

d) всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока взаимодействие с другими телами не заставит его изменить это состояние.

2.11. *Как направлена сила, действующая на тело, движущееся равномерно по окружности?*

a) к центру окружности;

b) вдоль скорости;

c) против скорости;

d) от центра окружности;

e) равна нулю.

2.12. *Какая из векторных физических величин всегда совпадает по направлению с вектором скорости?*

a) импульс; *b)* перемещение; *c)* ускорение;

d) сила; *e)* момент силы.

2.13. *Какая из векторных физических величин всегда совпадает по направлению с вектором ускорения в классической механике?*

a) импульс; *b)* скорость; *c)* сила;
d) перемещение; *e)* момент силы.

2.14. *Система отсчета, связанная с лифтом, является инерциальной, если лифт ...*

a) поднимается равномерно вверх;
b) поднимается замедленно вверх;
c) поднимается ускоренно вверх;
d) свободно падает;
e) опускается ускоренно вниз.

2.15. *Принцип эквивалентности утверждает, что ...*

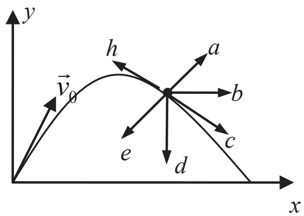
a) силы инерции эквивалентны силам гравитации;
b) $m_{ин} = m_{гр}$;
c) вес тела равен нулю;
d) $m = \text{const}$;
e) силы инерции компенсируют силы гравитации.

2.16. *Второй закон Ньютона в дифференциальной форме ...*

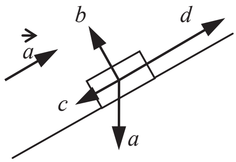
a) $\vec{F} = m\vec{a}$; *b)* $F = mg$; *c)* $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$;

d) $\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$; *e)* $F = -kx$.

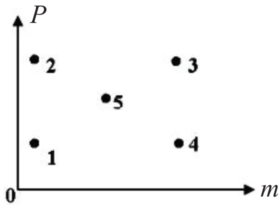
2.17. *На рисунке представлена траектория движения камня, брошенного под углом к горизонту. Как направлено ускорение камня в точке, если сопротивлением воздуха пренебречь?*



2.18. *Автомобиль движется ускоренно вверх по наклонной дороге (см. рис.). Какой из векторов на рисунке соответствует реакции опоры дороги?*



2.19. *Какой из нижеуказанных точек на диаграмме зависимости импульса тела от времени соответствует минимальная скорость?*



a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 4; *e)* 5.

2.20. *Какой из следующих величин соответствует выражение* $\frac{V^2}{a}\sqrt{\frac{m}{W_{кін}}}$ *?*

a) скорости; *b)* ускорение; *c)* длине;
d) времени; *e)* массе.

2.21. *Какая формула точно выражает изменение импульса материальной точки за время* Δt *под действием силы* $\vec{F}$ *?*

a) $\Delta p = F \cdot \Delta t$; *b)* $\Delta \vec{p} = \frac{\vec{F}}{\Delta t}$; *c)* $\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} F dt$; *d)* $\Delta \vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$.

2.22. *Тело находится на чаше пружинных весов в неподвижном лифте. Какими станут показания весов, если лифт будет двигаться вниз с ускорением a, равным ускорению свободного падения g?*

a) указатель установится на ноль;
b) увеличатся;
c) не изменятся;
d) уменьшатся;
e) увеличатся или не изменятся.

2.23. *Два тела брошены вертикально вверх с поверхности Земли. Какое из нижеприведенных утверждений о начальных скоростях правильно, если максимальная высота подъема второго тела в 16 раз больше первого?*

a) скорость второго тела в 16 раз больше;

b) скорость второго тела в 16 раз меньше;

c) скорость второго тела в 4 раза больше;

d) скорость второго тела в 4 раза меньше;

e) скорости тел одинаковы.

2.24. *Брусок движется по наклонной плоскости с углом наклона* $\alpha = 30°$. *Коэффициент трения бруска о плоскость* $\mu = 0{,}2$. (g = 10 м/с^2) *Ускорение бруска равно:*

a) 3,3 м/с^2; *b)* 3 м/с^2; *c)* 6,7 м/с^2; *d)* 8 м/с^2; *e)* 1,73 м/с^2.

2.25. *Тело массой 1000 кг движется по кругу с радиусом 75 м со скоростью 15 м/с. Сила, действующая на тело, равна:*

a) 300 Н; *b)* 3000 Н; *c)* 500 Н; *d)* 5000 Н; *e)* 2750 Н.

2.26. *Шарик массою 100 г упала на горизонтальную площадку, имея в момент удара скорость 10 м/с. Импульс шарика равен:*

a) 1 кг · м/с^2; *b)* 9,8 кг · м/с^2; *c)* 0,1 кг · м/с^2;

d) 19,8 кг · м/с^2; *e)* 10 кг · м/с^2.

2.27. *На тело массой 2 кг действуют две силы:* F_1 = 30*Н* *и* F_2 = 40*Н*. *Найти общее ускорение тела, если силы действуют под углом* $\pi/2$.

a) 25 м/с^2; *b)* 50 м/с^2; *c)* 2,5 м/с^2; *d)* 40 м/с^2; *e)* 5 м/с^2.

2.28. Указать все правильные ответы.

Существуют следующие типы фундаментальных взаимодействий:

a) гравитационное;

b) электрическое;

c) магнитное;

d) электромагнитное;

e) квантовое;

f) сильное;

g) слабое.

2.29. *Силы трения покоя и скольжения обусловлены ... взаимодействием между молекулами.*

a) гравитационным;
b) электромагнитным;
c) тепловым;
d) механическим.

2.30. Сила гравитационного взаимодействия описывается следующим соотношением:

a) $\vec{F} = \gamma \dfrac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r^2}$; *b)* $F = mg$;

c) $\vec{F} = -\gamma \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$; *d)* $\vec{F} = \gamma \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

2.31. *Сила тяжести – это сила ...*

a) гравитационного взаимодействия между телом и Землей;
b) с которой тело действует на опору или подвес;
c) с которой опора или подвес действует на тело;
d) гравитационного взаимодействия двух тел.

2.32. *Сила тяжести связана с массой тела и параметрами гравитационного взаимодействия следующим соотношением:*

a) $F_m = mg$; *b)* $F_m = \gamma m$; *c)* $F_m = mgh$; *d)* $F_m = \gamma \dfrac{m}{R}$.

2.33. *Вес тела – это сила ...*

a) с которой тело действует на опору или подвес;
b) гравитационного взаимодействия между телом и Землей;
c) с которой опора или подвес действует на тело;
d) с которой взаимодействуют два тела.

2.34. Указать все правильные ответы.
Вес тела, неподвижного относительно Земли, и сила тяжести ...

a) приложены к одному телу и уравновешивают друг друга;
b) приложены к разным телам;
c) одинаковые по величине и направлению;
d) отличаются направлением.

2.35. *Какое из выражений соответствует вектору силы тяжести?*

a) $m\vec{a}$; *b)* mg; *c)* $m\vec{g}$; *d)* $-mgh$; *e)* $-k\vec{x}$.

2.36. *На каком расстоянии от поверхности Земли сила гравитационного притяжения, действующая на тело, в 2 раза меньше, чем у поверхности Земли?*

a) 0,41 *R*; *b)* *R*; *c)* 2 *R*; *d)* 2,5 *R*; *e)* 10 *R*.

2.37. *Ускорение свободного падения для тел, находящихся над землей на высоте* $h << R$ *выразится формулой:*

a) $g = g_0 \cdot \frac{h}{R}$; *b)* $g = \frac{g_0}{(1+h)^2}$; *c)* $g = \frac{g_0}{\left(1+\frac{2h}{R}\right)^2}$;

d) $g \approx \frac{g_0}{1+\frac{2h}{R}}$; *e)* $g = \frac{g_0 R}{R+h}$.

2.38. Указать все правильные ответы.
Различают следующие внешние силы трения:

a) вязкое трение;
b) силы сопротивления среды;
c) силы трения скольжения;
d) силы трения качения.

2.39. *Сила трения покоя на горизонтальной плоскости равна ...*

a) проекции приложенной силы *F* на плоскость;
b) силе реакции опоры *N*;
c) силе реакции опоры, умноженной на коэффициент трения;
d) нулю.

2.40. *Коэффициент трения скольжения – это отношение ...*

a) максимальной силы трения покоя к силе реакции опоры;
b) силы трения скольжения проекции приложенной силы на плоскость скольжения;
c) силы трения покоя к силе реакции опоры;
d) силы трения покоя к приложенной силе.

2.41. *Коэффициент трения* μ ...

a) зависит от вещества из которого изготовлено тело и может принимать любое значение;

b) есть величина постоянная, зависящая только от угла наклонной плоскости;

c) это фундаментальная константа;

d) зависит от вещества из которого изготовлено тело и не превышает 1;

е*)* равен 1.

2.42. *Гравитационная постоянная равна 6, 67·10*$^{-11}$ *(Н·м*^{2}*)/кг*^{2}*. Сила притяжения между двумя телами массой 3 кг, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга, равна …*

a) 2,22·10^{-11} Н; *b)* 2·10^{-10} Н; *c)* 4·10^{-10} Н; *d)* 6·10^{-10} Н.

2.43. *Сила тяжести, действующая со стороны Земли на автомобиль массой 1т, что стоит на ее поверхности, равна …*

a) 0 Н; *b)* 10^2 Н; *c)* 10^4 Н; *d)* 10^3 Н.

2.44. *Акробат на мотоцикле описывает «мертвую петлю» радиусом 4 м. Наименьшая его скорость в верхней точке петли составит:*

a) 6,3 м/с; *b)* 4,9 м/с; *c)* 10 м/с; *d)* 2,5 м/с; *e)* 0 м/с.

2.45. *С каким ускорением надо опускать тело возле поверхности Земли, чтобы оно находилось в состоянии невесомости?*

a) 6,3 м/с; *b)* 4,9 м/с; *c)* 10,2 м/с; *d)* 9,8 м/с; *e)* 0 м/с.

2.46. *Искусственный спутник Земли имеет круговую орбиту высотой 220 км. Радиус Земли 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности 9,8 м/с*^{2} *Земли. Скорость вращения спутника составит (приблизительно):*

a) 7,8 км/с; *b)* 8,3 км/с; *c)* 6,5 км/с; *d)* 7,3 км/с; *e)* 8,5 км/с.

2.47. *Скорость вращения искусственного спутника Земли по круговой орбите на высоте 2R составит (приблизительно):*

a) 7,8 км/с; *b)* 5,2 км/с; *c)* 4,6 км/с; *d)* 4,0 км/с; *e)* 3,8 км/с.

2.48. *Искусственный спутник Земли имеет круговую орбиту высотой 220 км. Период его вращения составит (приблизительно):*

a) 3,0 ч; *b)* 2,5 ч; *c)* 2,2 ч; *d)* 1,5 ч; *e)* 1,0 ч.

2.49. *Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора по геостационарной орбите (неподвижен относительно Земли). На какой высоте находится спутник (тыс. км)?*

a) 4,5; *b)* 14; *c)* 18; *d)* 20; *e)* 36.

2.50. *При какой продолжительности суток на Земле вес тела на экваторе был бы равен нулю? Радиус Земли 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли 9,8 м/с:*

a) 10 ч; *b)* 2,5 ч; *c)* 2,2 ч; *d)* 0,5 ч; *e)* 1,0 ч.

2.51. *Радиус Марса 3400 км, ускорение свободного падения на поверхности 3,6 м/с^2. Первая космическая скорость для Марса составит (приблизительно):*

a) 2,8 км/с; *b)* 3,5 км/с; *c)* 4,5 км/с; *d)* 5,0 км/с; *e)* 6,5 км/с.

2.52. *Радиус Луны 1760 км, ускорение свободного падения на поверхности 1,7 м/с^2. Первая космическая скорость для Луны составит (приблизительно):*

a) 2,8 км/с; *b)* 3,1 км/с; *c)* 0,7 км/с; *d)* 1,7 км/с; *e)* 4,3 км/с.

2.53. *Бегун массой 70 кг развивает на старте силу тяги 1000 Н. При этом на него действует сила трения ...*

a) 1000 Н; *b)* 0 Н; *c)* 700 Н; *d)* 70 Н; *e)* 140 Н.

2.54. *На человека массой 80 кг, который стоит на наклонной дороге с углом 30°, действует сила трения ...*

a) 0 Н; *b)* $\sqrt{800}$ Н; *c)* 400 Н; *d)* 80 Н; *e)* 40 Н.

2.55. Указать все правильные ответы.
Деформация твердого тела всегда сопровождается изменением ...

a) положения его элементов друг относительно друга;
b) его формы;
c) его объема;
d) положения его элементов в пространстве.

2.56. *Деформация твердого тела может отсутствовать при изменении ...*

a) положения его элементов друг относительно друга;
b) его формы;

c) положения его элементов в пространстве;

d) его объема.

2.57. *Формула, описывающая закон Гука, выглядит следующим образом*:

a) $F = ma$; *b)* $F = k\Delta x$; *c)* $F = k\dfrac{\Delta x^2}{2}$

d) $F = mgh$; *e)* $F = \mu N$.

2.58. *Относительное изменение длины тела – это:*

a) изменение длины одного тела относительно другого;

b) просто изменение длины тела;

c) отношение длины деформированного тела к его длине в недеформированном состоянии;

d) отношение абсолютного изменения длины к длине недеформированного тела.

2.59. *Нормальное напряжение – это:*

a) отношение силы, действующей на тело, к площади параллельной ей поверхности по которой распределена эта сила;

b) отношение силы, действующей на тело, к площади перпендикулярной ей поверхности по которой распределена эта сила;

c) напряжение, при котором наступает разрушение тела;

d) сила, приложенная перпендикулярно к поверхности тела.

2.60. Нормальное напряжение измеряется в …

a) ньютонах, Н;

b) ньютон-метрах квадратных, Н· м^2;

c) метрах квадратных на ньютон, м^2/Н;

d) ньютонах на метр квадратный, Н/м^2.

2.61. *Тангенциальное напряжение – это …*

a) отношение силы, действующей на тело, к площади параллельной ей поверхности по которой распределена эта сила;

b) отношение силы, действующей на тело, к площади перпендикулярной ей поверхности по которой распределена эта сила;

c) сила, которая сообщает телу тангенциальное ускорение;
d) сила, приложенная вдоль поверхности тела.

2.62. *Тангенциальное напряжение измеряется в ...*
a) ньютонах на метр квадратный, Н/м^2;
b) ньютонах, Н;
c) ньютонах, умноженных на метр квадратный, Н·м^2;
d) метрах квадратных на ньютон, м^2/Н;

2.63. *Модуль Юнга – это коэффициент пропорциональности между ...*
a) тангенциальным напряжением и тангенсом угла деформации сдвига тела;
b) приложенной силой и деформацией тела;
c) приложенной силой и напряжением;
d) нормальным напряжением и относительной деформацией тела.

2.64. *Модуль Юнга измеряется в ...*
a) Паскалях на метр квадратный, Па/м^2;
b) ньютонах, Н;
c) ньютон-метрах квадратных, Н·м^2;
d) Паскалях, Па.

2.65. Указать все правильные ответы.
Модуль Юнга зависит от ...
a) приложенной силы;
b) формы тела;
c) объема тела;
d) природы тела;
e) параметров состояния тела (температура, давление).

2.66. *Характеристикой деформации сдвига является …*
a) относительная деформация;
b) тангенциальное напряжение;
c) модуль сдвига;
d) тангенс угла сдвига.

2.67. *Модуль сдвига – это коэффициент пропорциональности между ...*

a) нормальным напряжением и относительной деформацией тела;

b) тангенциальным напряжением и тангенсом угла сдвига;

c) приложенной силой и тангенсом угла сдвига;

d) приложенной силой и тангенциальным напряжением.

2.68. Указать все правильные ответы.
Модуль сдвига зависит от ...

a) приложенной силы;

b) формы тела;

c) объема тела;

d) природы тела;

e) параметров состояния тела (температура, давление).

2.69. *Какое из следующих выражений соответствует единице измерения коэффициента жесткости, выраженная через основные единицы СИ?*

a) кг · с^2; *b)* $\frac{кг}{с^2}$; *c)* $\frac{с^2}{кг}$; *d)* кг · с; *e)* $\frac{с \cdot м}{кг}$.

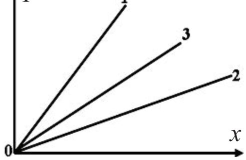
2.70. *Под действием силы 10 Н пружина жесткостью 200 Н/м сократится на ...*

a) 10 см; *b)* 20 см; *c)* 5 см; *d)* 2 см.

2.71. *При подвешивании груза проволока удлинилась на 8 см. Каким будет при подвешивании того же груза удлинение проволоки из того же материала, но в 2 раза меньшей длины и в 2 раза меньше радиуса поперечного сечения?*

a) 16 см; *b)* 8 см; *c)* 2 см; *d)* 4 см; *e)* 1 см.

2.72. *На рисунке приведен график зависимости силы упругости от абсолютного удлинения для трех пружин разной жесткости. В каком из нижеприведенных соотношений находятся между собой жесткости этих пружин?*



a) $k_1>k_2>k_3$; *b)* $k_1<k_2<k_3$; *c)* $k_1>k_3>k_2$;
d) $k_1<k_3<k_2$; *e)* $k_1=k_2=k_3$.

2.73. Указать все правильные ответы.
Кривая деформации ...

a) показывает зависимость напряжения от деформации твердого тела;
b) показывает зависимость деформации от времени нагрузки;
c) всегда описывается законом Гука;
d) может описываться законом Гука на некотором участке.

2.74. Указать все правильные ответы.
При упругой деформации ...

a) на кривой деформации наблюдается гистерезис;
b) на кривой деформации не наблюдается гистерезиса;
c) после снятия напряжения деформация возвращается к нулевому значению;
d) после снятия напряжения деформация не возвращается к нулевому значению;
e) зависимость деформации от напряжения воспроизводится при повторных измерениях;
f) зависимость деформации от напряжения не отображается при повторных измерениях.

2.75. *Коэффициент Пуассона определяется ...*

a) отношением поперечной и продольной деформации;
b) зависимости между нормальным напряжением и относительной деформацией;
c) отношением нормальной и оползневой напряжениями;
d) зависимости между нормальной и деформацией сдвига.

3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Момент инерции

Как уже было отмечено ранее (см. п. 1.2), вращательным называют движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на некоторой прямой – оси вращения.

При вращательном движении линейные скорости и ускорения различных точек тела отличаются, но все тело, в целом, можно характеризовать одной угловой скоростью ω и одним угловым ускорением ε (см. п. 1.6)

Соответственно, при вращении важна не просто масса всего тела в целом, а то, как именно эта масса распределена по отношению к конкретной оси вращения (именно потому, что различные участки тела, каждый со своей массой, имеют различные линейные ускорения, а значит и динамика движения каждого подчиняется своим законам Ньютона).

Для того, чтобы получить общие законы вращения целого тела (а не его отдельных частей, как материальных точек) в механике используется понятие *момента инерции тела*. По своей сути, момент инерции есть мерой инертности тела при попытках его вращения вокруг некоторой оси и является своеобразным аналогом массы для вращательного движения. Чем больше момент инерции тела, тем труднее изменить его угловую скорость вращения (т.е. сообщить угловое ускорение). Важно понимать, что скалярная величина – момент инерции имеет смысл и конкретное числовое значение только при заданном положении оси вращения. Бессмысленно говорить просто о «моменте инерции» без указания на конкретную ось.

Самым простым образом определяется *момент инерции материальной точки* – произведение массы этой точки на квадрат расстояния до оси:

$$J = m \cdot R^2 \cdot$$

Момент инерции любого тела относительно некоторой оси всегда есть суммой моментов инерции всех его

частей относительно этой же оси. Например, момент инерции твердого тела как совокупности жестко связанных материальных точек:

$$J = \sum_{i=1}^{N} J_i = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \ . \tag{3.1}$$

В более общем случае, когда масса тела m распределена в пространстве непрерывно, конечная сумма в (3.1) превращается в интеграл по всей массе или по всему объему тела при некоторой заданной функции плотности $\rho(x, y, z)$:

$$J = \int_m dJ = \int_m R^2 dm = \int_V R^2 \rho\left(x, y, z\right) dV \, . \tag{3.2}$$

Величина R в этом случае есть функция расстояния точки с координатами (x, y, z) от заданной оси.

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой h и радиусом R относительно его геометрической оси (рис. 3.1). Разобьем цилиндр на отдельные концентрические элементы (полые цилиндры или кольца) бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним – $r + dr$. Момент инерции каждого такого элемента $dJ = r^2 dm$ (так как $dr << r$, то считаем, что расстояние всех точек элемента от оси одинаково и равно просто r), где dm – масса всего элемента, а его объем $2\pi rh \cdot dr$. Если ρ – плотность материала цилиндра, то $dm = \rho \cdot 2\pi rh \cdot dr$ и $dJ = 2\pi h\rho r^3 dr$. Тогда, согласно (3.2), момент инерции всего сплошного цилиндра

$$J = \int_m dJ = \int_0^R 2\pi h\rho r^3 dr = \frac{1}{2}\pi h R^4 \rho \, ,$$

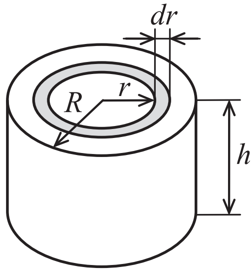


Рис. 3.1

но, так как $\pi R^2 h$ – объем самого цилиндра, а $m = \pi R^2 h\rho$ – его масса, соответственно, то искомый момент инерции:

$$J = \frac{1}{2} mR^2 .$$

Значения момента инерции некоторых других тел правильной геометрической формы относительно оси, которая проходит через центр их масс, приводятся в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Момент инерции некоторых тел

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$\frac{1}{2} mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12} ml^2$
Тонкий диск радиусом R	Совпадает с диаметром диска	$\frac{1}{4} mR^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5} mR^2$

Единица размерности момента инерции – [кг·м^2].

Важно помнить, что момент инерции всегда определяется относительно конкретной оси в пространстве. В частности, приведенные в табл. 3.1 моменты инерции тел правильной геометрической формы будут иметь абсолютно другие значения относительно других осей.

3.2. Изменение момента инерции тела при переносе оси

Если для какого-либо тела известен его момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, то легко может быть найден и момент инерции относительно любой другой параллельной оси. Такой «новый» момент инерции в точности определяется ***теоремой Штейнера***: момент инерции тела относительно любой пространственной оси равен моменту инерции этого же тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Математически, теорема Штейнера может быть записана следующим образом:

$$J_z = J_C + md^2 , \tag{3.3}$$

где J_z – искомый момент инерции относительно оси z; J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (рис. 3.2); m – масса тела; d – расстояние между осями.

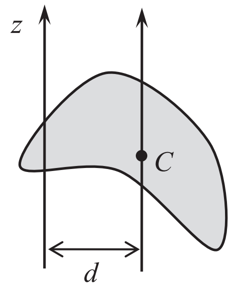


Рис. 3.2

Например, с помощью теоремы Штейнера (3.3) найдем момент инерции однородного цилиндра (диска) относительно оси z, проходящей через одну из его образующих (т. е., $d = R$):

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 .$$

Подобным же образом, теорема Штейнера (3.3) позволяет найти момент инерции тонкого однородного стержня (см. табл. 3.1) относительно оси z, проходящей через его конец ($d = l/2$):

$$J_z = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2 .$$

3.3. Момент силы

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно некоторой точки* O называется физическая величина $\vec{M}$, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O в точку A приложения силы, на саму силу $\vec{F}$ (рис. 3.3):

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] . \tag{3.4}$$

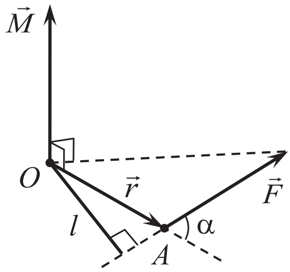


Рис. 3.3

Момент силы относительно точки – псевдовектор, его направление определяется правилом правого винта (совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ (см. рис. 3.3).

Величина (модуль) момента силы $\vec{M}$:

$$M = Fr\sin\alpha = Fl\,,$$

где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$; $l = r\sin\alpha$ – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой *O* – *плечо силы*.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно некоторой пространственной оси z* называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы $\vec{F}$ относительно любой точки данной оси *z* (рис. 3.4).

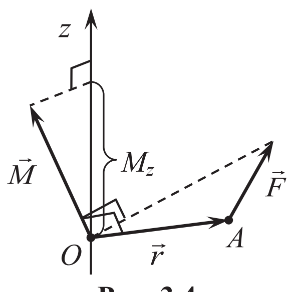


Рис. 3.4

Значение момента M_z не зависит от выбора точки на оси *z*: действительно, хоть величина момента $\vec{M}$ и зависит от выбора точки *O*, но проекция M_z этого вектора всегда будет одна и та же для всех точек оси.

В случае, если ось z совпадает с направлением вектора $\vec{M}$, то M_z будет просто равен модулю $\vec{M}$.

3.4. Момент импульса

Если материальная точка имеет импульс $\vec{p}$, то для этого вектора можно ввести понятие момента, аналогичное моменту силы (см. п. 3.3). *Моментом импульса* $\vec{p}$ *материальной точки* A *относительно некоторой точки* O пространства называется физическая величина $\vec{L}$ равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ точки A относительно точки O на вектор импульса $\vec{p}$ (рис. 3.5):

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \cdot \tag{3.5}$$

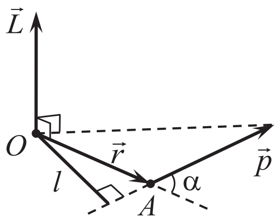


Рис. 3.5

Как и $\vec{M}$, величина $\vec{L}$ момента импульса относительно точки пространства является псевдовектором: его направление, согласно (3.5), определяется правилом правого винта (совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$ (см. рис. 3.5).

Модуль вектора момента импульса $\vec{L}$:

$$L = rp \sin\alpha = mvr \sin\alpha = mvl \,,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, l – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O.

Момент импульса механической системы (тела) относительно некоторой точки O пространства определяется как геометрическая сумма моментов импульсов всех ее материальных точек (частей тела) относительно той же точки O:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i. \tag{3.6}$$

Проекцию L_z на определенную ось z момента импульса $\vec{L}$ относительно точки O этой оси называют *моментом импульса относительно оси z*. Как и в случае момента силы M_z относительно оси (см. п. 3.3 и рис. 3.4) скалярная величина L_z не зависит от выбора точки O на оси (не смотря на то, что сам вектор $\vec{L}$, конечно же, зависит от выбора точки O, его проекция L_z остается одинаковой для всех точек оси).

Физический смысл величины L_z хорошо иллюстрирует следующий пример: рассмотрим некоторое твердое тело (как систему большого числа N жестко связанных между собой материальных точек с массами m_i), вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси z (см. рис. 3.6). Момент L_z импульса такого тела относительно оси его вращения есть проекция на ось z момента $\vec{L}$ импульса тела относительно любой точки оси (в соответствии с определением), но, согласно (3.6), вектор $\vec{L}$ является суммой моментов импульса $\vec{L}_i$ всех частей тела m_i. Значит величина L_z (проекция суммы векторов $\vec{L}_i$) может быть найдена как сумма проекций L_{iz} этих векторов:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz},$$

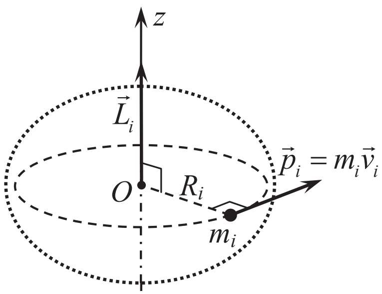


Рис. 3.6

причем, каждый L_{iz} из них не зависит от выбора точки на оси z. Выбрав для каждой части тела (материальной точки m_i) в качестве точки O центр описываемой при вращении окружности, мы получим каждый вектор $\vec{L}_i$ направленным вдоль оси (см. рис. 3.6), что позволяет очень просто определить его проекцию как модуль $\vec{L}_i$:

$$L_{iz} = L_i = m_i v_i R_i,$$

где R_i – плечо или расстояние i-й точки до оси и оно же – радиус описываемой при вращении окружности.

Таким образом,

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i v_i R_i.$$

Заменяя, в соответствии с (1.21), различную для разных точек линейную скорость v_i на общую для всего тела угловую скорость $\omega(v_i = \omega R_i)$ и вынося ω за скобки (за знак суммы), получаем:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega R_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \right) \omega,$$

или, используя введенное ранее (см. п. 3.1) понятие момента инерции J в (3.1),

$$L_z = J_z \omega. \tag{3.7}$$

Именно выражение (3.7) и раскрывает физический смысл не только момента импульса L_z, но и понятия момента инерции тела J_z. С одной стороны, широко использующийся в динамике поступательного движения вектор импульса $\vec{p}$ действительно хорошо характеризует именно поступательное движение (несет информацию о его направлении и «количестве» – $p = mv$). Однако в случае вращательного движения использование импульса может оказаться неадекватным: если тело вращается, например, вокруг оси, проходящей через центр масс C, то его импульс будет нулевым (согласно определению центра масс, см. п. 2.3) абсолютно независимо от скорости вращения, что делает величину импульса неприменимой в качестве количественной характеристики вращательного движения.

С другой стороны, рассмотренное понятие момента импульса L_z относительно оси вращения z может служить хорошей альтернативой импульсу, именно в качестве количества вращательного движения: информация о направлении вращения задается самой осью z, а «количество» вращения $L_z = J_z\omega$ в (3.7) непосредственно связано со скоростью самого вращения ω. Т. е., L_z служит своеобразным аналогом $\vec{p}$ для вращения, где линейная скорость v (скорость поступательного движения) просто заменяется на угловую скорость вращения ω. Причем, в этом же смысле, момент инерции J_z тела относительно оси вращения служит аналогом массы m тела (т.е., инерции поступательного движения) при переходе к законам вращательного движения.

3.5. Закон динамики вращательного движения

Общая форма II закона Ньютона (2.2) для материальной точки (см. п. 2.2) связывает производную вектора ее импульса $\vec{p}$ по времени (т.е. скорость изменения импульса) с действующими на точку силами (результирующей силой $\vec{F}$). Вращательное движение тела характеризуется уже не импульсом, а его моментом (см. п. 3.4), поэтому, найдем производную вектора момента импульса $\vec{L}$ одной материальной точки (части тела) относительно некоторой точки O пространства:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \left[\vec{v} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$

Первое слагаемое в последней сумме всегда равно нулю (как векторное произведение сонаправленных векторов, угол между которыми равен нулю), а второе слагаемое, по определению (3.4) (см. п. 3.3), представляет собой момент $\vec{M}$ результирующей $\vec{F}$ всех сил, действующих на материальную точку, относительно той же точки O., т.е. II закон Ньютона для материальной точки трансформируется в следующее выражение:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ . \tag{3.8}$$

Найдем производную момента импульса $\vec{L}$ всего тела (или любой механической системы) относительно точки O как производную суммы (3.6) моментов импульса $\vec{L}_i$ всех его частей (материальных точек) относительно O, а, значит, сумму производных, каждая из которых выражается в (3.8):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i.$$

Нужно отметить, что каждый $\vec{M}_i$ в последней сумме представляет собой суммарный момент всех сил (как внутренних, так и внешних), действующих на отдельную i-тую часть (материальную) точку тела (системы), а сама сумма есть результирующий момент всех сил действующих на все части, т. е., на всю систему в целом. В соответствии с III законом Ньютона (см. п. 2.2), сумма всех внутренних сил в системе всегда равна нулю, и суммарный момент всех внутренних сил тоже равен нулю. Это значит, что отличный от нуля вклад в результирующий момент (т. е. момент вообще всех действующих на систему сил) могут давать только внешние силы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}, \tag{3.9}$$

где $\vec{M}_{\text{внеш}}$ – суммарный момент всех внешних сил, действующих на систему.

Уравнение (3.9) математически выражает ***основной закон динамики вращательного движения***: производная по времени от момента импульса любой механической системы относительно произвольной точки *O* пространства равна суммарному моменту всех действующих на систему внешних сил относительно той же точки *O*.

По сути этот закон является обобщением II закона Ньютона, справедливым, как для отдельных материальных точек, так и целых механических систем, независимо от характера их движения (поступательного, вращательного или смешанного). Помимо его дифференциальной формы (3.9) (где момент $\vec{M}_{\text{внеш}}$ всех внешних сил связан с дифференциалами, т. е., элементарными приращениями, времени и момента импульса), можно получить и интегральную его форму:

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{внеш}\, dt, \tag{3.10}$$

где $\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$ – изменение момента импульса любой системы относительно некоторой точки *O* пространства за время $\Delta t = t_2 - t_1$ под действием суммарного момента всех внешних сил $\vec{M}_{\text{внеш}}$ относительно этой точки *O*.

На практике, чаще всего используются еще два следствия (частных случая) основного закона динамики вращательного движения:

1. В некоторой системе отсчета, для твердого тела, которое может вращаться вокруг неподвижной оси z (т. е. его части жестко связаны между собой и с осью вращения некоторыми внутренними силами), все действующие на тело силы, в любом случае, являются внешними. Произвольно выбрав O точку на оси вращения z и проектируя векторное уравнение (3.9) на эту ось, получаем

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Учитывая, что согласно (3.7) $L_z = J_z\omega$, и момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси должен оставаться неизменным (его можно вынести за производную, а производная угловой скорости ω есть угловое ускорение ε), получим ***аналог II закона Ньютона для вращения***:

$$M_z = J_z\varepsilon\,. \tag{3.11}$$

Действительно, вместо суммы сил здесь присутствует сумма моментов M_z всех действующих на тело сил относительно оси вращения z, вместо массы m – момент инерции J_z относительно той же оси, а вместо линейного ускорения – угловое ε. В отличие от векторного закона Ньютона (2.2), выражение (3.11) является скалярным, т. е. выражает закон динамики вращения сразу в проекциях на ось z этого вращения (направления псевдовекторов моментов сил и углового ускорения уже заданы самой осью z).

Соответственно, величина углового ускорения тела полностью определяется суммарным моментом действующих на тело сил:

$$\varepsilon = \frac{M_z}{J_z}\,.$$

Если суммарный момент относительно оси вращения отсутствует, то тело будет либо покоиться, либо вращаться вокруг этой оси равномерно ($\varepsilon = 0$). Под действием ненулевого момента сил тело, вращающееся вокруг оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (направление вектора угловой скорости совпадает с направлением оси), в зависимости от величины момента сил будет вращаться либо ускоренно ($M_z > 0$; $\varepsilon > 0$, рис. 3.7 *а*), либо замедленно ($M_z < 0$; $\varepsilon < 0$, см. рис. 3.7 *б*).

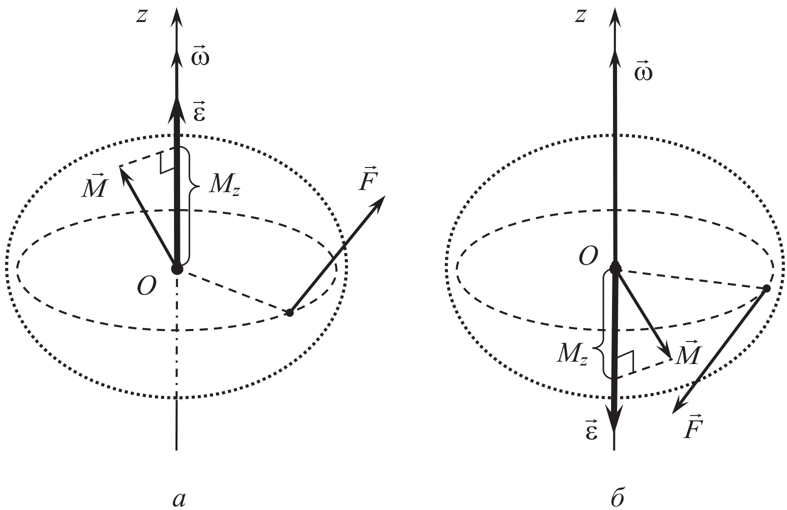


Рис. 3.7

В свою очередь, зная угловое ускорение, можно найти изменение угловой скорости тела за любое время, а затем и угол, на который оно повернется, т.е. предсказать положение тела при вращении в любой момент времени.

2. Основной закон динамики вращательного движения и, в частности, его математическое выражение (3.9) непосредственно означают, что момент импульса $\vec{L}$ всей механической системы относительно любой точки O может изменяться (его производная по времени будет отлична от нуля) только под действием ненулевого момента $\vec{M}_{\text{внеш}}$ всех внешних сил относительно этой точки O.

Отсюда следует ***закон сохранения момента импульса***: момент импульса замкнутой механической системы (на которую не действуют внешние силы или их момент равен нулю, $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$) не изменяется со временем,

$$\vec{L}_{\text{замк}} = \text{const}\,. \tag{3.12}$$

Важно понимать, что речь здесь идет именно о суммарном моменте импульса (3.6) всей механической системы: под действием внутренних сил взаимодействия (их моментов) моменты импульсов отдельных частей системы, конечно же, могут изменяться, но момент импульса всей системы в целом может изменяться под действием моментов внешних (и только внешних) сил.

Подобно тому, как закон динамики вращения является обобщением II закона Ньютона, закон сохранения момента импульса является, по сути, обобщением закона сохранения импульса, т.е. закон сохранения импульса можно рассматривать всего лишь как частный случай (применимый только для поступательного движения) более общего закона сохранения момента импульса, который применим для любого механического движения вообще.

Аналогию между базовыми понятиями и законами динамики для поступательного и вращательного движений наглядно демонстрирует табл. 3.2.

Таблица 3.2. Основные понятия и законы поступательного и вращательного движений

Понятия и законы	Поступательное	Вращательное
Мера инертности тела	масса: $m = \sum m_i$,	момент инерции: $J = \sum J_i = \sum m_i R_i^2$
Количество движения	импульс: $\vec{p} = m\vec{v}$	момент импульса относительно точки: $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ момент импульса относительно оси вращения: $L_z = J_z \omega$
Мера воздействия на тела	сила: $\vec{F}$	момент силы относительно точки: $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ момент силы относительно оси: M_z
Основной закон динамики	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ или $\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внеш}}$ или $\sum M_z = J_z \varepsilon$

3.6. Собственный момент импульса

Согласно уравнения (3.10), момент импульса $\vec{L}$ системы изменяется только под действием суммарного момента $\vec{M}$ всех внешних сил; именно этот вектор $\vec{M}$ определяет поведение вектора $\vec{L}$. Теперь рассмотрим некоторые наиболее существенные свойства этих величин и те важные выводы, которые из них вытекают.

Вычислим суммарный момент внешних сил. Как и момент каждой силы, суммарный момент сил зависит от выбора точки, относительно которой его определяют.

Пусть $\vec{M}$ – суммарный момент сил относительно точки O, а $\vec{M}'$ – относительно точки O', радиус-вектор которой $\vec{r}_0$.

Найдем связь между $\vec{M}$ и $\vec{M}'$. Радиус-векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_i'$ точки приложения силы $\vec{F}$ связаны соотношением (рис. 3.8)

$$r_i = r_i' + r_0 .$$

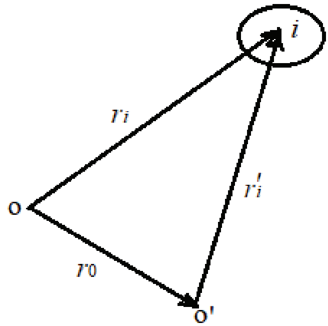


Рис. 3.8

Поэтому выражение для $\vec{M}$ можно записать в таком виде:

$$M = \sum [r_i, F_i] = \sum [r_i', F_i] + \sum [r_0, F_i]$$

или

$$M = M' + [r_0, F], \tag{3.13}$$

где $F = \sum F_i$ – результирующая всех внешних сил.

Из формулы (3.13) видно, что если $F = 0$, то суммарный момент внешних сил не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Таков, в частности, случай, когда к системе приложена *пара сил.*

Интересной и важной особенностью в этом отношении обладает *С-система* – это система отсчета, жестко связанная с центром масс системы частиц и перемещающаяся поступательно по отношению к инерциальным системам.

Так как в общем случае *C*-система является неинерциальной, то результирующая всех внешних сил должна включать в себя кроме внешних сил взаимодействия $\vec{F}_{вз}$ и силы инерции $\vec{F}_{инер}$. С другой стороны, в *C-системе* система частиц как целое покоится, а это значит, что

$$F = F_{вз} + F_{инер} = 0.$$

Принимая во внимание выражение (3.4), получаем следующий важный вывод:

в C-системе суммарный момент всех внешних сил, включая силы инерции, не зависит от выбора точки O.

И другой важный вывод:

в C-системе суммарный момент сил инерции относительно центра инерции всегда равен нулю.

В самом деле, сила инерции, действующая на каждую частицу системы, $F_i = -m_i a_0$, где a_0 – ускорение *C-системы*. Поэтому суммарный момент всех этих сил относительно центра инерции *C*

$$M_C^{инер} = \sum [r_i, -m_i a_0] = -\left[\left(\sum m_i r_i, a_0\right)\right].$$

Исходя из определения радиус-вектора центра масс $\sum m_i r_i = m r_C$, а т. к. в нашем случае $F = \sum F_i$, то и $M_C^{инер} = 0$.

Введем понятие *собственного момента импульса* системы частиц. Как и момент сил, момент импульса системы зависит от выбора точки *O*, относительно которой его определяют. При переносе этой точки на расстояние r_0 новые радиус-векторы частиц определяются через старые формулой $r_i = r_i' + r_0$. Поэтому момент импульса системы относительно точки *O* можно представить так:

$$L = \sum \left[r_i, p_i\right] = \sum \left[r_i', p_i\right] + \sum \left[r_0, p_i\right],$$

или

$$L = L' + \sum \left[r_0, p_i\right], \qquad (3.14)$$

где L' – момент импульса системы относительно точки *O’*;

$p = \sum p_i$ – полный импульс системы.

Из формулы (3.14) следует, что если полный импульс системы $p = 0$, то ее момент импульса не зависит от выбора точки O. А этим как раз и отличается C-система, в которой система частиц как целое покоится.

Отсюда можно сделать еще один важный вывод:

в C-системе момент импульса системы частиц не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют.

Этот момент будем называть *собственным моментом импульса системы* и обозначать L_C.

Установим связь между L и L_C. Пусть L – момент импульса системы частиц относительно точки O К-системы отсчета. Так как собственный момент импульса в C-системе не зависит от выбора точки O', возьмем точку совпадающей в данный момент с точкой O К-системы. Тогда радиус-векторы каждой частицы в обеих системах отсчета будут одинаковы в этот момент $r_i' = r_i$, скорости же частиц связаны формулой

$$\upsilon_i = \upsilon_i' + \upsilon_C, \tag{3.15}$$

где υ_C – скорость C-системы относительно К-системы.

Поэтому можно записать:

$$L = \sum m_i \left[r_i, \upsilon_i\right] = \sum m_i [r_i, \upsilon_i'] + \sum m_i [r_i, \upsilon_C]. \tag{3.16}$$

Первая сумма в правой части этого равенства – собственный момент импульса L_C. Вторую сумму представим, как

$$\sum m_i \left[r_i, \upsilon_C\right] = m \cdot [r_C, \upsilon_C] = [r_C, p_C],$$

где $m = \sum m_i$ – масса всей системы; r_C – радиус-вектор ее центра масс в К-системе; p_C – суммарный импульс системы.

В результате получим

$$L = L_C + [r_C, p_C]. \tag{3.17}$$

Момент импульса системы частиц складывается из ее собственного момента импульса L_C и момента $[r_C, p_C]$, обусловленного движением системы частиц как целого.

Возьмем, например, однородный шар, скатывающийся по наклонной плоскости. Его момент импульса относительно некоторой точки этой плоскости складывается из момента импульса, связанного с движением центра масс шара и собственного момента импульса, обусловленного вращением шара вокруг собственной оси.

Из формулы (3.17) в частности, следует, что если центр инерции системы покоится (импульс системы $p = 0$), то ее момент импульса L – это собственный момент импульса. Такой случай уже рассматривался выше.

В другом крайнем случае, когда $L_C = 0$, момент импульса системы относительно некоторой точки определяется только моментом, связанным с движением системы как целого, т.е. вторым слагаемым (3.17).

Так, например, ведет себя момент импульса любого твердого тела, совершающего *поступательное движение*.

Рассмотрим уравнение моментов в *C*-системе. Ранее было отмечено, что уравнение (3.8) справедливо в любой системе отсчета. Значит, оно справедливо и в *C*-системе. Поэтому сразу можно записать:

$$\frac{dL_C}{dt} = M_C \, ,$$

где M_C – суммарный момент внешних сил в *C*-системе.

Так как *C*-система в общем случае неинерциальная, то в M_C входит помимо моментов внешних сил взаимодействия и момент сил инерции. С другой стороны, в начале этого параграфа было показано, что момент сил в *C*-системе не зависит от выбора точки, относительно которой его определяют. Обычно в качестве такой точки берут точку *C* – центр масс системы.

Целесообразность выбора именно этой точки в том, что относительно нее суммарный момент сил инерции равен нулю, поэтому следует учитывать только суммарный момент внешних сил взаимодействия $M_{вз}$. Итак,

$$\frac{dL_C}{dt} = M_{вз}, \tag{3.18}$$

т. е. производная по времени от собственного момента импульса системы равна суммарному моменту всех внешних сил взаимодействия относительно центра инерции данной системы.

В частности, если $M_{вз} = 0$, то $L_C = \text{const}$, т.е. *собственный момент импульса* системы сохраняется.

В проекциях на ось Z, проходящую через центр инерции системы, уравнение (3.19) имеет вид

$$\frac{dL_{Cz}}{dt} = M_{\text{вз}_z}, \qquad (3.19)$$

где $M_{\text{вз}_z}$ – суммарный момент внешних сил взаимодействия относительно неподвижной в С-*системе* оси z, проходящей через центр масс.

И здесь, если $M_{\text{вз}_z} = 0$, то $L_\text{C} = \text{const}$.

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции тела?
2. Какова роль момента инерции во вращательном движении?
3. Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?
4. Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? Относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
5. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
6. Что такое момент импульса материальной точки? Твердого тела? Как определяется направление момента импульса?
7. В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.
8. Каким свойством симметрии пространства обусловливается справедливость закона сохранения момента импульса?
9. Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

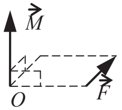
Задания для самоконтроля

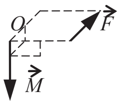
3.1. *Уравнения динамики вращательного движения относительно неподвижной оси описывается следующей формулой:*

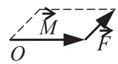
a) $\sum \vec{F} = m\vec{a}$; *b)* $a_n = \dfrac{v^2}{R}$; *c)* $\vec{F} = m\vec{g}$;

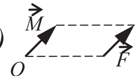
d) $\sum \vec{M} = J\vec{\beta}$; *e)* $a_\tau = \beta R$.

3.2. *На каком рисунке правильно указанно направление момента силы относительно точки O?*

a) 

; *b)* 

; *c)* 

; *d)* 

.

3.3. *Какая формула не выражает основной закон динамики вращательного движения твердого тела?*

a) $\sum \vec{M}_i = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$; *b)* $M_z = J_z \varepsilon$;

c) $\vec{L} = \dfrac{d}{dt}\left(\sum \vec{M}_i\right)$; *d)* $M_z = J_z \dfrac{d\omega}{dt}$.

3.4. *Какая формула точно выражает основной закон динамики вращательного движения твердого тела?*

a) $\sum \vec{M}_i = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$; *b)* $\sum \vec{M}_i = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$;

c) $\vec{L} = \dfrac{d}{dt}\left(\sum \vec{M}_i\right)$; *d)* $M_z = J_z \dfrac{d\varepsilon}{dt}$.

3.5. *Момент силы относительно оси вращения – это:*

a) векторное произведение силы на радиус-вектор точки ее приложения;

b) скалярная величина, аналог силы в уравнении динамики вращательного движения;

c) производная от силы по времени;

d) сила, деленная на радиус вращения.

3.6. *Момент силы относительно точки определяется выражением:*

a) $\vec{M} = \left[\vec{R}, \vec{F}\right]$; *b)* $\vec{M} = J\vec{\beta}$; *c)* $M = \dfrac{v^2}{R}$; *d)* $M_z = \beta R$.

3.7. *Свободные оси – это:*

a) оси вращения, которые не закреплены;

b) оси вращения, совпадающие по направлению с осями координат;

c) оси, в точках крепления которых при вращении силы не действуют;

d) оси вращения перпендикулярны друг другу и вектору приложенной силы.

3.8. *Аналогом массы в уравнении динамики вращательного движения является:*

a) момент инерции;

b) крутящий момент;

c) угловой момент;

d) момент движения;

e) момент массы.

3.9. Указать все правильные ответы.

Момент инерции абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси вращения зависит от:

a) ориентации осей координат по отношению к этой оси;

b) углового ускорения;

c) распределения массы по объему тела;

d) момента приложенной силы.

3.10. *Момент инерции материальной точки относительно фиксированной оси вращения определяется следующим выражением:*

a) $\int R^2 dm$; *b)* $\int mR^2 dR$; *c)* $m \cdot R^2$; *d)* $M_z = \beta R$.

3.11. *Чтобы найти момент инерции твердого тела относительно фиксированной оси вращения необходимо:*

a) умножить массу тела на расстояние от оси вращения до центра масс;

b) умножить массу тела на квадрат расстояния от оси вращения до центра масс;

c) разбить тело на малые части, перемножить их массы и расстояния до оси вращения и сложить эти величины;

d) разбить тело на малые части, посчитать их моменты инерции и сложить их.

3.12. *Момент инерции однородного диска радиуса R и массы m относительно его оси вращения определяется следующим выражением:*

a) mR^2; *b)* $\frac{1}{2}mR^2$; *c)* $\frac{2}{5}mR^2$; *d)* $\frac{1}{3}mR^2$.

3.13. *Момент инерции стержня длиной l и массой m относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню, определяется следующим выражением:*

a) ml^2; *b)* $\frac{1}{2}ml^2$; *c)* $\frac{ml^2}{12}$; *d)* $\frac{1}{3}ml^2$.

3.14. *Момент инерции тонкостенного цилиндра радиуса R и массы m относительно оси симметрии, проходящей вдоль его оси, определяется следующим выражением:*

a) mR^2; *b)* $\frac{1}{2}mR^2$; *c)* $\frac{2}{5}mR^2$; *d)* $\frac{1}{3}mR^2$.

3.15. *Теорему Штейнера можно сформулировать следующим образом:*

a) момент силы, приложенной к телу, равен производной по времени с произведением момента инерции на угловое ускорение;
b) момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси параллельной данной, проходящей через центр масс тела, сложенной с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями;
c) момент силы равен произведению силы на плечо силы;
d) путем преобразования системы координат можно получить тензор момента инерции диагонального вида.

3.16. *Гироскоп – это:*

a) прибор для определения скорости движущегося объекта;
b) массивное тело, движущееся с большой скоростью вокруг оси, относительно которой оно имеет максимальный момент инерции;
c) прибор для определения ориентации объекта, который движется;
d) массивное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг своей оси симметрии.

3.17. *Гироскопы используют для ...*

a) создание гирокомпасов;
b) измерения ускорений;
c) измерения скоростей;
d) измерения сил.

3.18. *Прецессия гироскопа – это:*

a) медленное вращение оси гироскопа вокруг другой оси;
b) характеристика его механических свойств;
c) стремление гироскопа сохранить ориентацию своей оси вращения;
d) характеристика его динамических свойств.

3.19. *При разгоне велосипедиста массой 60 кг сила трения между колесом радиуса 30 см и дорогой составляет 600 Н. При этом, момент силы, действующей на колесо велосипеда равен:*

a) 2000 Н/м; *b)* 30 Н/м; *c)* 180 Н·м; *d)* 10 Н·м.

3.20. *Момент силы, действующей на колесо радиусом 20 см недвижной тележки массой 100 кг равен:*

a) 20 Н·м; *b)* 5 Н·м; *c)* 200 Н·м; *d)* 0 Н·м.

3.21. *Момент инерции автомобиля массой 1000 кг при движении со скоростью 36 км/ч по прямолинейному участку дороги равен:*

a) не определен; *b)* 1000 кг; *c)* 104 кг; *d)* 980 Н.

3.22. *Под действием момента силы 100 Н·м, стержень массой 20 кг с моментом инерции 20 кг·м^2 приобретет угловое ускорение:*

a) 100 Н/м^2; *b)* 50 м/с^2; *c)* 2000 рад/с; *d)* 5 рад/с^2.

3.23. *Момент инерции тела, движущегося с угловым ускорением 2 рад/с^2 под действием момента силы 4 Н·м, равен:*

a) 8 Н м/с^2; *b)* 2 кг·м; *c)* 0,5 Н м; *d)* 1,0 Н/м.

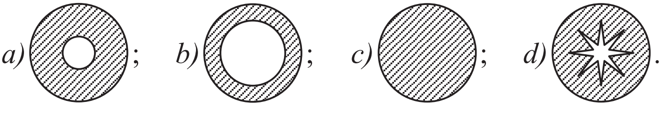
3.24. *Момент силы, действующей на стержень радиусом 50 см со стороны груза массой 10 кг, подвешенного на намотанной нити на стержень равен:*

a) 200 Н/м; *b)* 5 кг·м; *c)* 2,5 кг·м; *d)* 50 Н·м.

3.25. *Момент инерции стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр, имеет величину 5 кг·м^2. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец, равен:*

a) 10 кг·м; *b)* 2,5 кг·м; *c)* 20 кг·м; *d)* 1,25 кг·м.

3.26. *У какого из цилиндрических тел одинаковой массы и диаметра момент инерции относительно геометрической оси самый большой (сечения тел изображены на рисунках)?*

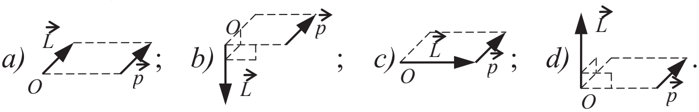


3.27. *Как связано угловое ускорение тела, вращающееся вокруг неподвижной оси z, с действующими на это тело силами?*

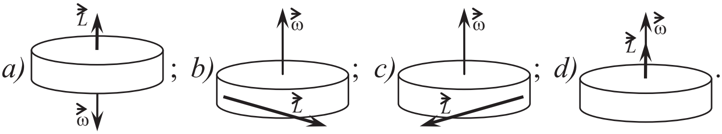
a) $\sum \vec{F} = m\vec{\varepsilon}$; *b)* $\sum \vec{M} = m\vec{\varepsilon}$;

c) $\sum M_z = J_z \varepsilon$; *d)* $\sum \vec{M} = J\dfrac{d\vec{\varepsilon}}{dt}$.

3.28. *На каком рисунке правильно указанное направление момента импульса* $\vec{p}$ *относительно точки O?*



3.29. *На каком рисунке правильно указано направление момента импульса цилиндра относительно центра (*$\vec{\omega}$ *– угловая скорость его вращения)?*



3.30. *Какая формула точно определяет изменение угловой скорости вращения тела вокруг оси z за время под действием переменной силы? Момент этой силы относительно некоторой точки оси z равен* $\vec{M}$.

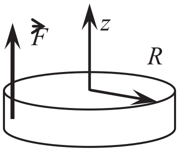
a) $\Delta\omega = M_z \Delta t$; *b)* $\Delta\omega = \dfrac{M_z \Delta t}{J_z}$;

c) $\Delta\omega = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$; *d)* $\Delta\omega = \frac{1}{J_z} \int\limits_{t_1}^{t_2} M_z dt$.

3.31. *Однородный цилиндр радиусом R и массой m вращается вокруг своей геометрической оси, которая остается неподвижной, так что скорость точек на образующей цилиндра равна v. Как выражается величина* ***импульса*** *цилиндра?*

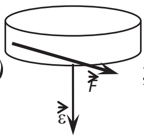
a) $p = mv$; *b)* $\frac{mv^2}{2}$; *c)* $p = 0$; *d)* $p = mvR$.

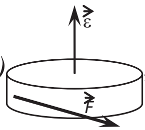
3.32. *Чему равен момент вертикальной силы* $\vec{F}$ *относительно вертикальной оси z (см. рис.)?*

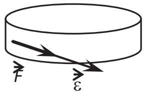


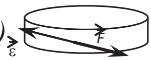
a) $\mathrm{M_z} = 0$; *b)* $\mathrm{M_z} = \mathrm{F \cdot R}$; *c)* $M_z = \vec{F} \cdot \vec{R}$; *d)* $M_z = \left[\vec{F} \times \vec{R}\right]$.

3.33. *К ободу диска, который может вращаться относительно геометрической оси, приложенна касательная сила* $\vec{F}$. *Как будет направлено угловое ускорение диска?*

a) 

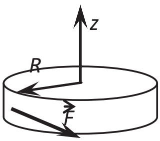
; *b)* 

; *c)* 

; *d)* 

.

3.34. *Чему равен момент горизонтальной касательной силы* $\vec{F}$ *относительно вертикальной оси z (см. рис.)?*

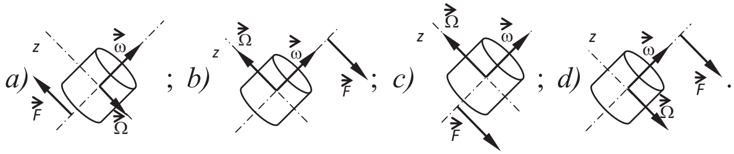


a) $\mathrm{M_z} = 0$; *b)* $\mathrm{M_z} = \mathrm{F \cdot R}$; *c)* $M_z = \vec{F} \cdot \vec{R}$; *d)* $M_z = \left[\vec{F} \times \vec{R}\right]$.

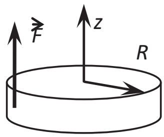
3.35. *Как найти работу переменной силы при угловом перемещении тела* $\Delta\vec{\varphi}$*?*

a) $A = \int\limits_{\Delta\vec{\varphi}} \vec{F} d\vec{\varphi}$; *b)* $A = \frac{\vec{M}}{\Delta\vec{\varphi}}$; *c)* $A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{\varphi}$; *d)* $A = \int\limits_{\Delta\vec{\varphi}} \vec{M} d\vec{\varphi}$.

3.36. *На рисунках гироскоп вращается с угловой скоростью* $\vec{\omega}$ *вокруг оси, которая, в свою очередь, может вращаться вокруг оси z. На каком из рисунков правильно указан вектор* $\vec{\Omega}$ *угловой скорости прецессии гироскопа под действием силы* $\vec{F}$, *приложенной к оси вращения?*

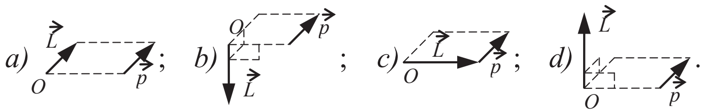


3.37. *Чему равен момент вертикальной силы* $\vec{F}$ *относительно вертикальной оси z (см. рис.)?*



a) $M_z = 0$; *b)* $M_z = F \cdot R$; *c)* $M_z = \vec{F} \cdot \vec{R}$; *d)* $M_z = \left[\vec{F} \times \vec{R}\right]$.

3.38. *На каком рисунке правильно указанно направление момента импульса* $\vec{p}$ *относительно точки O?*



3.39. *Какому из следующих выражений соответствует единице измерения момента силы, выраженная через основные единицы СИ?*

a) $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$; *b)* $\frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$; *c)* $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}$; *d)* $\frac{\text{кг}^2 \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$; *e)* $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$.

3.40. *Какой из следующих величин соответствует выражение* $\frac{2 \cdot M \cdot \varphi}{\omega^2}$*?*

a) угловой скорости;
b) угловому ускорению;
c) моменту силы;
d) моменту инерции;
e) массе.

3.41. *Какой из следующих величин соответствует выражение* $\sqrt{\omega_0^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot \varphi}$*?*

a) угловой скорости;
b) угловому ускорению;
c) моменту силы;
d) моменту инерции;
e) массе.

3.42. *Какой из следующих величин соответствует выражение* $\frac{r \cdot m \cdot \varphi}{J}$*?*

a) угловой скорости;
b) угловому ускорению;
c) моменту силы;
d) моменту инерции;
e) массе.

3.43. *Какой из следующих величин соответствует выражение* $\frac{r \cdot m \cdot V}{\omega}$*?*

a) угловой скорости;
b) угловому ускорению;
c) моменту силы;
d) моменту инерции;
e) массе.

3.44. *Какой из следующих величин соответствует выражение* $\frac{J \cdot \omega}{r}$*?*

a) скорости;
b) ускорению;
c) моменту импульса;
d) импульсу;
e) массе.

3.45. *Какой из следующих величин соответствует выражение* $\frac{dL}{dt}$*?*

a) угловой скорости;
b) угловому ускорению;

c) моменту силы;

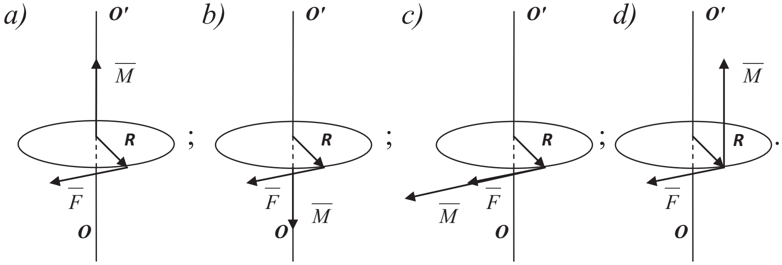
d) моменту инерции;

e) массе.

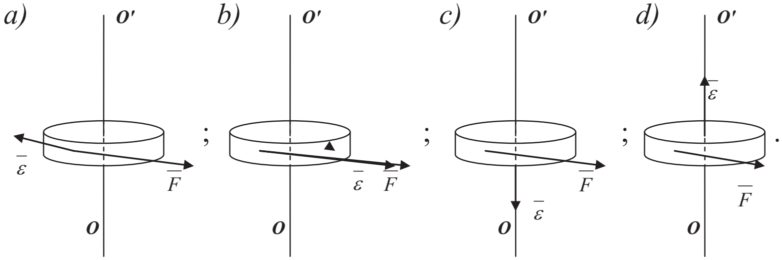
3.46. *Как определяется угловая скорость тела при равноускоренном движении?*

a) $\dfrac{\varepsilon t^2}{2}$; *b)* $w_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$; *c)* $w_0 + \varepsilon t$; *d)* $\dfrac{d\phi}{dt}$.

3.47. *На каком из рисунков правильно указано направление момента силы F относительно оси OO'?*



3.48. *К ободу диска приложена касательная сила. Какое направление имеет угловое ускорение, если диск вращается вокруг оси OO'?*



4. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ В МЕХАНИКЕ

4.1. Понятие энергии в современной физике

Одним из фундаментальных понятий современных человеческих знаний о вселенной является *энергия*. Выдающийся физик и нобелевский лауреат Ричард Фейнман в своих лекциях писал, что «закон сохранения энергии утверждает существование определённой величины, называемой энергией, которая не меняется ни при каких превращениях, происходящих в природе. Это, по существу, математический принцип, утверждающий, что существует некоторая численная величина, которая не изменяется ни при каких обстоятельствах. Это отнюдь не описание механизма явления или чего-то конкретного, простонапросто отмечается то странное обстоятельство, что можно подсчитать какое-то число и затем спокойно следить, как природа будет выкидывать любые свои трюки, а потом опять подсчитать это число, – и оно останется прежним».

Строгое научное толкование понятия энергии развивалось постепенно, по мере углубления знаний о тех или иных формах движения и взаимодействия материи. С каждой такой формой связывают свой вид энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную. На опыте непосредственно наблюдаются различные превращения одних видов энергии в другие, и многие из этих превращений человечество даже научилось использовать в разных устройствах.

В начале XX в. Эйнштейн предложил самую общую на сегодня интерпретацию понятия энергии: одно из базовых уравнений общей теории относительности,

$$E = mc^2,$$

непосредственно указывает на то, что любой материальный объект, любая форма материи представляет собой вполне определенное количество того или иного вида энергии. Соответственно, справедливо и обратное утверждение: любая порция энергии (любого вида) материальна – она проявляет конкретные инертные и гравитационные свойства, т.е. имеет массу.

Конечно, человеческие знания продолжают развиваться. Сегодня в космологии, например, появилась гипотеза о существовании так называемой «темной энергии», которую ввели в математическую модель расширяющейся Вселенной с целью объяснить наблюдаемое ускорение этого расширения – гипотеза, справедливость которой все еще ожидает своего строгого подтверждения (или, возможно, опровержения) в будущих исследованиях.

С другой стороны, истоки научного понимания энергии берут начало еще в работах непосредственных последователей Ньютона, при попытках описать законы самой простой и доступной на опыте формы движения материи – механического движения. Именно попытки перехода от векторных законов динамики к универсальным алгебраическим уравнениям для некоторых скалярных величин, имеющих свойство сохраняться при механическом взаимодействии тел, привели к появлению понятия механической энергии и, как следствие, к созданию нового «скалярного» или «энергетического» подхода к решению механических задач.

В рамках этого подхода тела при взаимодействии не просто ускоряют или замедляют движение друг друга, а *обмениваются энергией* – совершают друг над другом *механическую работу*. Именно определение работы и лежит в основе энергетического подхода, вообще, и понятия энергии (не только механической, но и других видов), в частности.

4.2. Работа силы. Мощность

Рассмотрим поступательное движение тела (материальной точки) под действием сил по некоторой траектории из точки 1 в точку 2 пространства (рис. 4.1). Пусть из всех действующих сил (форма траектории может быть довольно сложной кривой из-за того, что сумма сил может сложным образом изменяться) нас интересует только одна сила $\vec{F}$. Так как, в общем случае, эта сила $\vec{F}$ может изменяться по мере изменения положения тела (при его движении по траектории), рассмотрим сначала только элементарный отрезок траектории (элементарное перемещение $d\vec{r}$ на рис. 4.1, при котором сила не успевает заметно измениться и остается одной и той же – $\vec{F}$).

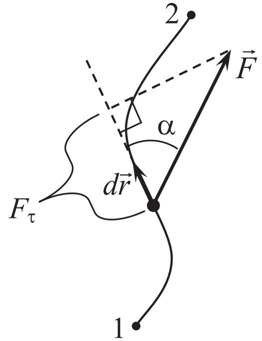


Рис. 4.1

Элементарной работой dA силы $\vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right)$ на элементарном перемещении $d\vec{r}\left(dx, dy, dz\right)$ называют скалярное произведение векторов силы и перемещения:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F \cdot ds \cdot \cos\alpha = F_\tau \cdot ds \,. \quad (4.1)$$

Физический смысл работы как скалярного произведения (4.1) заключается в следующем: перемещение тела $d\vec{r}$ обусловлено, конечно же, всеми действующими на него силами, но интересующая нас сила $\vec{F}$, сама по себе, на фоне остальных, либо ускоряет тело на этом перемещении (т.е. увеличивает некую энергию его движения по траектории, когда угол α острый и работа положительна), либо замедляет («отбирает» энергию движения вдоль $d\vec{r}$, когда угол α тупой – совершает отрицательную работу). Причем, положительную или отрицательную работу в действительности совершает только тангенциальная составляющая силы (ее проекция $F_\tau = F\cos\alpha$ на направление совершаемого перемещения, которая может иметь, как положительный, так и отрицательный знак). Нормальная составляющая любой действующей на тело силы не ускоряет и не замедляет движение по траектории (не совершает никакой работы) – она может влиять только на кривизну траектории в окрестностях рассматриваемого участка $d\vec{r}$.

Важным свойством работы как скалярного произведения является ее *аддитивность*: работа любой геометрической (т.е. векторной) суммы сил на некотором перемещении всегда равна скалярной сумме работ на этом же перемещении каждой силы по отдельности, а работа силы на любой сумме перемещений равна сумме ее работ на каждом перемещении в отдельности.

В частности, это свойство позволяет найти *работу силы* $\vec{F}$ *на конечном перемещении* тела $\Delta\vec{r}$ как сумму элементарных работ (4.1), т.е. интеграл:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} . \qquad (4.2)$$

Работу измеряют в ***джоулях***: 1 джоуль (Дж) – работа, совершаемая силой 1 Н на перемещении 1 м (1 Дж = 1 Н·м).

Работу, производимую силой в единицу времени, называют ***мощностью*** N данной силы. Если за время Δt сила произвела работу A_{12}, то ее средняя за это время мощность,

$$\langle N \rangle = \frac{A_{12}}{\Delta t} .$$

Мгновенная мощность силы,

$$N = \frac{dA}{dt} ,$$

с учетом (4.1) может быть выражена через величину самой силы $\vec{F}$:

$$N = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

или

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} . \qquad (4.3)$$

Единица мощности – ***ватт*** (Вт): 1 Вт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа в 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

4.3. Работа и мощность при вращении

Ускоряя или замедляя вращение некоторого тела силы (или моменты этих сил) тоже совершают над телом положительную или отрицательную работу.

Элементарной работой dA момента $\vec{M}$ некоторой силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки *O* оси *z* при элементарном повороте $d\vec{\varphi}$ тела вокруг этой оси (на элементарном угловом перемещении) называют скалярное произведение векторов момента и углового перемещения:

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = M_z \cdot d\varphi, \tag{4.4}$$

где M_z – момент той же силы относительно оси вращения *z*.

Соответственно, *работа момента силы* $\vec{M}$ *по конечному повороту* тела:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{M} d\vec{\varphi}. \tag{4.5}$$

Скорость,

$$N = \frac{dA}{dt},$$

с которой некоторый момент силы совершает работу, называют его мощностью (подобно мощности силы, см. п. 4.2).

С учетом (4.4), мгновенную мощность, развиваемую некоторым моментом сил $\vec{M}$ над вращающимся вокруг оси *z* с угловой скоростью $\vec{\omega}$ телом, можно выразить через величину самого момента:

$$N = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = M_z \cdot \omega, \tag{4.6}$$

4.4. Кинетическая энергия

Как уже отмечалось в п. 4.1, первое строгое определение одного из видов энергии – механической энергии, появилось на основе понятия механической работы. Действительно, у покоящегося (в какой-то системе) тела отсутствует механическое движение, а, значит, отсутствует и энергия механического движения. Только если на него начнут действовать другие тела – будут совершать над ним некоторую работу, у него появится ускорение и растущая скорость, т.е. появится механическое движение и энергия этого движения.

Найдем суммарную работу, которую должны совершить все действующие на тело силы, чтобы привести его в данной системе из состояния 1 – покоя (скорость равна нулю) в состояние 2 – поступательного движения (с некоторой ненулевой линейной скоростью $\vec{v}$):

$$A_{12}=\int_1^2\left(\sum\vec{F}\right)d\vec{r}.$$

Здесь, элементарная работа под интегралом совершается именно всеми действующими силами, а сумма всех этих сил и сообщает телу линейное ускорение согласно II закону Ньютона (2.2):

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

То есть, элементарная работа всех действующих на тело сил на перемещении $d\vec{r}$ в течение промежутка времени dt, за который скорость тела $\vec{v}$ успевает измениться на величину $d\vec{v}$,

$$dA=\left(\sum\vec{F}\right)d\vec{r}=m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r}=m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v}=m\vec{v}d\vec{v},$$

зависит не столько от времени, сколько от скорости $\vec{v}$ и ее изменения $d\vec{v}$ (меньшие по величине силы будут просто дольше совершать эту работу – дольше изменять скорость).

В результате, суммарная работа (интеграл элементарных) сводится к интегралу по переменной $\vec{v}$:

$$A_{12}=\int_1^2 dA=\int_0^{\vec{v}} m\vec{v}d\vec{v}=\frac{m\left(\vec{v}\right)^2}{2}=\frac{mv^2}{2}.$$

Именно эту работу всех сил по приведению тела из состояния покоя в состояние поступательного движения и назвали ***кинетической энергией поступательного движения*** тела:

$$E_{\text{К}}^{\text{пост}}=\frac{mv^2}{2}=\frac{p^2}{2m}. \qquad (4.7)$$

Для случая вращательного движения, работа моментов всех сил по приведению тела из состояния покоя в состояние вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси z аналогично может быть найдена с использованием основного закона динамики вращательного движения в форме (3.10):

$$A_{12}=\int_1^2\left(\sum M_z\right)d\varphi=\int_1^2 J_z\varepsilon d\varphi=\int_1^2 J_z\frac{d\omega}{dt}d\varphi=\int_0^{\vec{v}} m\omega d\omega=\frac{J_z\omega^2}{2}.$$

В свою очередь, эта работа выражает ***кинетическую энергию вращательного движения***:

$$E_{\text{К}}^{\text{вращ}} = \frac{J_z \omega^2}{2} = \frac{L_z^2}{2J_z}. \qquad (4.8)$$

В случае, когда тело совершает сложное движение (например, катящийся по поверхности шар совершает вращение вокруг оси проходящей через центр масс, в то время как центр масс вместе с осью движется поступательно), кинетическая энергия есть суммой энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_{\text{К}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (4.9)$$

Для остановки тела, имеющего кинетическую энергию, необходимо, чтобы другие тела совершили над ним соответствующую отрицательную работу. При этом само тело за счет запаса своей кинетической энергии совершит положительную работу над такими «тормозящими» его телами, т.е. увеличит их энергию (в виде тепловой или такой же кинетической). В этом и заключается суть понятия энергии: тела, взаимодействуя между собой, обмениваются различными формами энергии – совершают друг над другом работу.

Если рассматривается не одно отдельное тело, а некая механическая система, то вводят понятие кинетической энергии системы как суммы кинетических энергий всех ее частей:

$$E_{\text{К}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{J_i \omega_i^2}{2} \right). \qquad (4.10)$$

В частности, выражение (4.10) предоставляет возможность альтернативного вывода выражения (4.8) для кинетической энергии вращения тела как системы отдельных материальных точек (у каждой материальной точки есть энергия только поступательного движения):

$$E_{\text{К}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Заменяя линейную скорость каждой точки на общую для всего тела угловую скорость ($v_i = \omega R_i$), получим

$$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega^2 R_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2,$$

что в точности совпадает с выражением (4.8), если взять во внимание выражение (3.1) для момента инерции тела как системы материальных точек ($J = \sum m_i R_i^2$).

Так как кинетическая энергия любого вида движения определяется через понятие работы, то и единица ее измерения совпадает с единицей работы: $1\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = 1\,\text{Н} \cdot \text{м} = 1\,\text{Дж}$.

4.5. Потенциальная энергия

Опыт наблюдения за различными силами взаимодействия в природе показал, что некоторые из них обладают важным свойством: их работа по перемещению тел в пространстве (т. е. интеграл (4.2) по соответствующей траектории) на самом деле не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положений тела.

Примером таких сил может служить хорошо известная сила тяжести. Благодаря тому, что она в любых положениях тела одинакова и направлена вертикально, при определении работы силы тяжести с помощью интеграла (4.2) удобнее каждое элементарное перемещение $d\vec{r}$ в подынтегральном скалярном произведении проектировать именно на вертикаль (направление силы), т. е. перейти к приращению высоты $ds\cos\alpha = -dh$ (знак «–» указывает на то, что при положительном приращении высоты угол α между силой и перемещением является тупым, и наоборот, рис. 4.2):

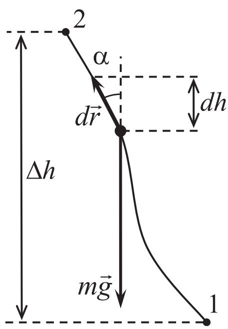


Рис. 4.2

$$A_{12} = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = \int_1^2 mg \cdot ds \cdot \cos\alpha = -mg\int_{h_1}^{h_2} dh = -mg\Delta h\,. \qquad (4.11)$$

Очевидно, что работа силы тяжести абсолютно не зависит от траектории, а зависит только от изменения высоты поднятия тела: при поднятии вверх ($\Delta h > 0$) работа силы тяжести отрицательна; при опускании вниз ($\Delta h < 0$) – положительна.

Похожим образом ведут себя и силы упругости, кулоновские силы: их работа, конечно, не определяется вертикальным перемещением, как у силы тяжести, но тоже не зависит от формы траектории.

Все подобные силы, работа которых зависит только от начального и конечного положений тела (начальной и конечной точек в пространстве независимо от траектории перехода между этими точками), называют *консервативными* или *потенциальными*.

Соответственно, все остальные силы, не обладающие вышеприведенным свойством, относят к *неконсервативным* или *непотенциальным*. В свою очередь, неконсервативные силы разделяют на *гироскопические* (которые вообще никогда не совершают работы потому, что всегда направлены перпендикулярно перемещению тела) и *диссипативные* (работа которых непосредственно зависит от формы траектории: более подробно физическая природа этих сил будет обсуждаться в п. 4.6).

Независимость работы потенциальных сил от формы траектории позволяет значительно упростить и унифицировать процедуру вычисления этой работы. Действительно, зависимость работы A_{12} только от начального и конечного положений (т.е. от координат двух точек пространства: 1 и 2) позволяет ввести некоторую пространственную функцию (скалярное поле) $E_{\text{П}}\left(x, y, z\right)$ и находить работу как разницу значений этой функции в точках 1 и 2:

$$A_{12} = E_{\text{П}}\left(x_1, y_1, z_1\right) - E_{\text{П}}\left(x_2, y_2, z_2\right) = -\Delta E_{\text{П}}, \qquad (4.12)$$

т.е. как изменение этой функции $\Delta E_{\text{П}}$ (с обратным знаком) при переходе между точками.

Стоит всего один раз получить общее выражение этой функции $E_{\text{П}}\left(x, y, z\right)$ для интересующей нас потенциальной силы (например, через работу в (4.12), интегрируя (4.2) по любой удобной траектории) и в дальнейшем работа данной силы по перемещению тела между любыми нужными точками пространства очень просто может быть найдена из (4.12) путем подстановки координат этих точек.

Использование этой функции оказалось настолько удобным, что она получила свое собственное название: $E_П(x, y, z)$ называют ***потенциальной энергией*** данного тела в поле действия данной потенциальной силы.

Как уже отмечалось, выражение для этой функции получают с помощью определения работы в (4.12). Так как это уравнение выражает непосредственно не само значение потенциальной энергии $E_П$, а только ее изменение $\Delta E_П$, то сначала определяются с выбором *нулевого уровня потенциальной энергии*: произвольным образом (например, удобным при решении конкретной физической задачи) выбирают точку пространства $O(x_0, y_0, z_0)$, где значение потенциальной энергии тела принимают равным нулю. Тогда, ***потенциальная энергия тела в любой другой точке определяется как работа данной потенциальной силы на перемещении тела из данной точки на нулевой уровень*** (в уравнении (4.12) $E_{П1} = E_П$, $E_{П2} = 0$ и $A_{12} = E_{П1} - E_{П2} = E_П$-).

Например, в поле силы тяжести, выбрав ноль потенциальной энергии на поверхности земли, уравнение (4.11) позволяет определить потенциальную энергию ($E_П = A_{21} = - A_{12}$) тела массой m на любой высоте h над землей (над нулевым уровнем):

$$E_П = mgh, \tag{4.13}$$

где для положений тела ниже нулевого уровня потенциальной энергии h отсчитывается в сторону отрицательных значений.

Подобным же образом, можно аналитически определить функцию потенциальной энергии и для других потенциальных (консервативных) сил.

Как и у других форм энергии (например, кинетической энергии, которая тоже определяется через понятие работы), единица измерения потенциальной энергии – 1 Дж.

4.6. Закон сохранения механической энергии

Выше уже были рассмотрены законы сохранения импульса (см. п. 2.3) и момента импульса (см. п. 3.5). В самом широком понимании, законы сохранения – это фундаментальные законы природы, заключающиеся в том, что для изолированной физической системы может быть введена физическая величина, являющаяся функцией параметров системы, которая сохраняется с течением времени.

В классической механике законы сохранения выводятся из однородности функции Лагранжа системы, которая не меняется со временем сама по себе и не изменяется при переносе или повороте системы в пространстве. Это означает, что при рассмотрении некой замкнутой в лаборатории системы будут получены одни и те же результаты, вне зависимости от места и времени проведения эксперимента.

Введем понятие симметрии физической системы как некоторого свойства, которое сохраняется после проведения преобразований координат и времени. В 1918 г. Эмми Нетер доказала теорему, согласно которой каждой непрерывной симметрии физической системы соответствует некоторый закон сохранения. Наличие этой теоремы позволяет проводить анализ физической системы на основе имеющихся данных о симметрии, которой эта система обладает. Из нее следует, что инвариантность уравнений движения тела относительно сдвигов в пространстве непосредственно приводит к закону сохранения импульса, а инвариантность относительно вращений – к закону сохранения момента импульса. Согласно этой же теореме, симметрия уравнений движения тела по отношению к изменению направления времени должна приводить к закону сохранения энергии.

Все силы, действующие на тело (механическую систему) и совершающие суммарную работу A_{12} (с положительным или отрицательным знаком), изменяют (увеличивают или уменьшают, соответственно) кинетическую энергию на величину $\Delta E_К = A_{12}$. В этой работе A_{12} подсчитаем отдельно работу $A_{12}^{пот}$ всех действующих на тело (на систему и внутри системы) потенциальных сил и работу $A_{12}^{дис}$ всех диссипативных сил (гироскопические силы вообще не совершают работу):

$$\Delta E_К = A_{12} = A_{12}^{пот} + A_{12}^{дис}.$$

С другой стороны, работа всех потенциальных сил выражается через изменение потенциальной энергии ($A_{12}^{пот} = -\Delta E_П$, см. п. 4.5):

$$\Delta E_К = -\Delta E_П + A_{12}^{дис},$$

или

$$\Delta E_К + \Delta E_П = A_{12}^{дис}. \qquad (4.14)$$

Введем понятие *полной механической энергии* тела (механической системы) как суммы его кинетической и потенциальной энергий:

$$E = E_К + E_П. \qquad (4.15)$$

При любых изменениях состояния тела или системы с течением времени полная механическая энергия (4.15) этого тела или системы может изменяться ($\Delta E = \Delta E_К + \Delta E_П$), но, согласно (4.14), *только под действием диссипативных сил*:

$$\Delta E = A_{12}^{дис}. \qquad (4.16)$$

Этот закон (4.16) раскрывает саму физическую суть диссипативных сил: эти силы (работа которых непосредственно зависит от формы траектории) всегда связаны с преобразованиями механической энергии в другие виды энергии или, наоборот, – других видов энергии в механическую.

В частности, одна из диссипативных сил, которая почти всегда действует на движущиеся тела, – сила трения – совершает, как правило, отрицательную работу (уменьшает механическую энергию тела), тем большую по величине, чем длиннее траектория. Например, тело, скользящее по инерции вдоль горизонтальной плоскости (а, значит, без изменения потенциальной энергии в поле силы тяжести) с некоторым начальным запасом кинетической энергии, рано или поздно остановится под действием сил трения. Куда девается механическая энергия такого тела? Опыт показывает, что силы трения нагревают трущиеся тела, т.е., превращают механическую энергию в совершенно другую форму энергии – тепловую или внутреннюю (микроскопическую).

Существуют диссипативные силы, которые осуществляют и обратную трансформацию энергии (тепловой, электрической, химической и т.д.) в механическую, – силы, с которыми самые различные двигатели или живые организмы совершают положительную механическую работу над телами, увеличивая их механическую энергию. К примеру, человек, бросая камень, сообщает ему механическую энергию диссипативными силами своих мышц за счет энергии сложных химических реакций, проходящих на клеточном уровне.

С другой стороны, выражение (4.16) непосредственно означает также, что если над телом не совершается работа диссипативных сил ($A_{12}^{дис} = 0$), то и механическая энергия такого тела изменяться не будет ($\Delta E = 0$). А это уже, в свою очередь, составляет саму суть ***закона сохранения механической энергии***: полная механическая энергия любой *консервативной механической системы* (среди внутренних сил в системе и внешних сил, действующих на систему, отсутствуют диссипативные) остается неизменной со временем,

$$E^{конс} = E_К + E_П = \text{const}. \qquad (4.17)$$

Этот закон позволяет решить множество механических задач, не прибегая к математически более сложным, векторным законам динамики. Например, увеличение скорости свободно катящегося с какой-то горки тела можно легко объяснить и описать как увеличение кинетической энергии (поступательного и вращательного движений) за счет уменьшения потенциальной энергии (4.13) в поле силы тяжести при спуске, при условии, что диссипативными силами сопротивления и трения качения можно пренебречь (сила трения покоя, которая не позволяет телу проскальзывать и заставляет его именно катиться, работы не совершает). Даже для такого упрощенного случая, когда отсутствуют диссипативные силы, решение задачи с помощью законов динамики поступательного и вращательного движений может оказаться очень сложным (особенно, если горка имеет сложную форму, и движение тела не будет равноускоренным).

Следует особо отметить, что рассмотренный закон сохранения механической энергии (т. е., по сути, сохранения только суммы двух видов энергии: кинетической и потенциальной) является всего лишь частным случаем наблюдаемого в природе более общего закона сохранения энергии независимо от ее формы. Как уже отмечалось выше, изменение механической энергии диссипативными силами вовсе не означает изменения энергии вообще (в ее более общем понимании): энергия меняет свои формы (в частности, диссипативные силы ответственны за превращения механической энергии в другие формы, и наоборот), но ее количество всегда остается неизменным.

4.7. Законы сохранения при упругом и неупругом ударах

Удар – это столкновение двух или более тел, при котором их взаимодействие длится очень короткое время.

Центральный удар – это удар, при котором тела движутся по прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно упругий удар является столкновением двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию.

При упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии.

Пусть у нас есть два шара массами m_1 и m_2. Обозначим их скорости до удара через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а после удара – $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$, соответственно. Для центрального удара векторный закон сохранения импульса можно непосредственно спроектировать на прямую, проходящую через центры масс шаров. Обозначив проекции векторов $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ на эту ось как v_1, v_2, v_1', v_2', запишем законы сохранения импульса (в проекциях) и энергии:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2';$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}.$$

Откуда

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

и

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое тело.

При таком ударе выполняется только закон сохранения импульса (и момента импульса): часть механической энергии при деформации превращается в тепло.

Из закона сохранения импульса, с учетом того, что $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}$,

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v},$$

получаем:

$$\vec{v} = \frac{m\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

При $m_1 = m_2$,

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}.$$

Уменьшение кинетической энергии при неупругом ударе, т. е., количество выделившейся теплоты:

$$Q = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{\left(m_1 + m_2\right)v^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(v_1 - v_2\right)^2.$$

Если же ударяемое тело было первоначально неподвижно, то:

$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

и

$$Q = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Контрольные вопросы

1. В чем различие между понятиями энергии и работы?
2. Как найти работу переменной силы?

3. Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?

4. Что такое мощность? Вывести ее формулу.

5. Дайте определения и выведите формулы для известных вам видов механической энергии.

6. Какова связь между силой и потенциальной энергией?

7. Почему изменение потенциальной энергии обусловлено только работой консервативных сил?

8. В чем заключается закон сохранения механической энергии? Для каких систем он выполняется?

9. Необходимо ли условие замкнутости системы для выполнения закона сохранения механической энергии?

10. В чем физическая сущность закона сохранения и превращения энергии? Почему он является фундаментальным законом природы?

11. Каким свойством времени обусловливается справедливость закона сохранения механической энергии?

12. Что такое потенциальная яма? Потенциальный барьер?

13. Какие заключения о характере движения тел можно сделать из анализа потенциальных кривых?

14. Как охарактеризовать положения устойчивого и неустойчивого равновесия? В чем их различие?

15. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого?

16. Как определить скорости тел после центрального абсолютно упругого удара? Следствием каких законов являются эти выражения?

Задания для самоконтроля

4.1. *Механическая система называется замкнутой если:*

a) в ней действуют только внутренние силы;

b) на ее элементы не действуют никакие силы;

c) на нее действуют только внешние силы;

d) в ней действуют только внутренние консервативные силы.

4.2. *Интегралы движения – это:*

a) интегралы от координат и импульсов по времени движения;

b) зависимости координат и скоростей от времени;

c) интегралы от энергии, импульса и момента импульса по времени движения;

d) функции координат и скоростей, которые сохраняются со временем.

4.3. Указать все правильные ответы.
Наибольший интерес в классической механике представляют следующие интегралы движения:

a) энергия;

b) путь;

c) перемещение;

d) скорость;

e) ускорение;

f) импульс;

g) момент импульса.

4.4. *В основе закона сохранения энергии лежит свойство:*

a) однородности пространства;

b) изотропности пространства;

c) однородности времени;

d) постоянства скорости света.

4.5. *В основе закона сохранения импульса лежит свойство…*

a) однородности времени;

b) изотропности пространства;

c) постоянства скорости света;

d) однородности пространства;

4.6. *В основе закона сохранения момента импульса лежит свойство*:

a) изотропности пространства;

b) однородности пространства;

c) однородности времени;

d) постоянства скорости света.

4.7. *Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса выполняются:*

a) независимо от скоростей движения и инерциальности системы отсчета;

b) только при нерелятивистских скоростях движения;

c) только при нерелятивистских скоростях движения в инерциальных системах отсчета;

d) только в инерциальных системах отсчета.

4.8. Указать все правильные ответы.
Значение законов сохранения заключается в том, что …

a) они задают уравнения, решая которые можно описать движение тела;

b) они ограничивают область допустимых значений динамических переменных;

c) их использование позволяет облегчить решение некоторых задач;

d) они позволяют найти, как изменяются координаты и скорости тел, не решая уравнений движения.

4.9. Указать все правильные ответы.
Относительно консервативных сил можно утверждать, что:

a) они не зависят от координат тел, на которые действуют;

b) законы сохранения энергии, импульса и момента импульса выполняются только в случае действия в замкнутой системе консервативных сил;

c) они создают поле, каждой точке которого можно сопоставить потенциальную энергию тела;

d) они не зависят от скоростей движения тел, на которые они действуют.

4.10. *Кинетическая энергия вращающегося тела в классической механике определяется следующим соотношением:*

a) $T = J\omega^2/2$; *b)* $T = mV^2/2$; *c)* $T = mgh$; *d)* $T = mV^2/R$.

4.11. Указать все правильные ответы.
Относительно потенциальной энергии тела можно утверждать, что:

a) она равна силе, действующей на тело в этой точке пространства;

b) она не зависит от его координат;

c) ее изменение, при перемещении из одной точки пространства в другую, равно работе консервативных сил, которая выполняется над телом;

d) она не зависит от скорости его движения.

4.12. Указать все правильные ответы.
Механическая энергия включает:

a) кинетическую энергию;

b) потенциальную энергию взаимодействия тел;

c) энергию упругой деформации;

d) энергию деформации.

4.13. *Какая формула точно определяет работу переменной силы $\vec{F}$ по перемещению $\Delta\vec{r}$ материальной точки по траектории S?*

$$a)\ A=\int_{\Delta\vec{r}}\vec{F}d\vec{r}\ ;\quad b)\ A=\frac{d\vec{F}}{d\vec{r}}\ ;\quad c)\ A=FS\ ;\quad d)\ A=\int_{t_1}^{t_2}Fdt\ .$$

4.14. *Какую работу согласно законам классической механики необходимо выполнить всем силам для того, чтобы тело массой m привести из состояния покоя в состояние движения со скоростью v?*

$$a)\ m\vec{v}\ ;\qquad b)\ \frac{mv^2}{2}\ ;\qquad c)\ mgh;\qquad d)\ \vec{F}\vec{v}\ .$$

4.15. *Как определить мгновенную мощность силы действующей на тело, движущееся со скоростью v?*

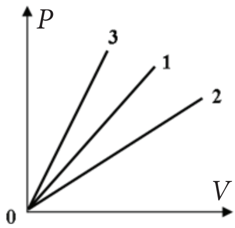
$$a)\ N=\int Fdt\ ;\quad b)\ N=\frac{\vec{F}}{\vec{v}}\ ;\quad c)\ N=\vec{F}\cdot\vec{v};\quad d)\ N=\frac{dF}{dt}\ .$$

4.16. *Какому из следующих выражений соответствует единица мощности, выраженная через основные единицы СИ?*

$$a)\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2};\ b)\ \frac{\text{кг}^2\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3};\ c)\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3};\ d)\ \frac{\text{кг}^2\cdot\text{м}}{\text{с}^3};\ e)\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\ .$$

4.17. *В каком из нижеприведенных соотношений находятся кинетические энергии трех тел различной массы в момент времени, когда их скорости одинаковы?*

a) $W_3 > W_2 > W_1$; *b)* $W_3 < W_2 < W_1$; *c)* $W_3 > W_1 > W_2$;
d) $W_3 < W_1 < W_2$; *e)* $W_3 = W_2 = W_1$.



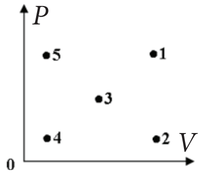
4.18. *Какому из следующих выражений соответствует единица измерения работы, которая выражена через основные единицы СИ?*

a) $\frac{кг \cdot м^2}{с^2}$; *b)* $\frac{кг^2 \cdot м^2}{с^2}$; *c)* $\frac{кг \cdot м^2}{с^3}$; *d)* $\frac{кг^2 \cdot м}{с^2}$; *e)* $\frac{кг \cdot м}{с^2}$.

4.19. *Какому из следующих выражений соответствует единица измерения энергии, выраженная через основные единицы СИ?*

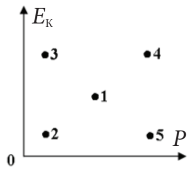
a) $\frac{кг \cdot м^2}{с^2}$; *b)* $\frac{кг^2 \cdot м^2}{с^2}$; *c)* $\frac{кг \cdot м^2}{с^3}$; *d)* $\frac{кг^2 \cdot м}{с^2}$; *e)* $\frac{кг \cdot м}{с^2}$.

4.20. *Какой из следующих точек на диаграмме зависимости импульса тела от его скорости, соответствует точка с минимальной кинетической энергией?*



a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 4; *e)* 5.

4.21. *Какой из следующих точек на диаграмме зависимости кинетической энергии от импульса тела, соответствует тело с наименьшей массой?*



a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 4; *e)* 5.

4.22. *Механическая работа, совершаемая при перемещении тела, в общем случае определяется как:*

a) интеграл вдоль пути движения от скалярного произведения силы на элементарное перемещение тела;

b) произведение силы на величину пути, пройденного телом;

c) разница потенциальных энергий тела в начальной и конечной точках движения;

d) разница механических энергий тела в начальной и конечной точках движения.

4.23. *В системе СИ робота измеряется в:*

a) килограммах на метр, кг/м;

b) ньютонах, Н;

c) джоулях, Дж;

d) ваттах, Вт.

4.24. Указать все правильные ответы.

Относительно сохранения механической энергии справедливо следующее утверждение:

a) механическая энергия замкнутой системы остается постоянной;

b) механическая энергия замкнутой консервативной системы остается постоянной;

c) механическая энергия тела остается постоянной при взаимодействиях;

d) механическая энергия тела не изменяется под действием консервативных сил.

4.25. *Состояние равновесия тела это состояние:*

a) с нулевыми потенциальной и кинетической энергиями;

b) когда тело находится в покое;

c) с минимумом потенциальной энергии;

d) с равной нулю первой производной и отрицательной второй производной потенциальной энергии тела по координате.

4.26. *Необходимым условием равновесия является:*

a) равенство нулю первой производной потенциальной энергии по координате;

b) равенство нулю кинетической и потенциальной энергии;
c) минимум потенциальной энергии;
d) равенство нулю потенциальной энергии.

4.27. Указать все правильные ответы.
Различают следующие виды механического равновесия:
a) стойкая;
b) неустойчивая;
c) относительная;
d) внешняя;
e) внутренняя.

4.28. *Необходимым и достаточным условием устойчивого равновесия тела есть:*
a) равенство нулю первой производной и отрицательная вторая производная потенциальной энергии по координате;
b) равенство нулю кинетической и потенциальной энергии;
c) равенство нулю скорости;
d) минимум потенциальной энергии и равенство нулю кинетической энергии.

4.29. *Закон сохранения импульса можно сформулировать следующим образом:*
a) импульс замкнутой системы материальных тел остается постоянным;
b) импульс замкнутой консервативной системы материальных тел остается постоянным;
c) импульс консервативной системы материальных тел остается постоянным;
d) импульс тела не меняется при взаимодействии.

4.30. Указать все правильные ответы.
В случае абсолютно упругого столкновения двух тел:
a) сохраняется кинетическая и потенциальная энергии каждого тела;
b) их механическая энергия может переходить в другие виды энергии;

c) их механическая энергия не переходит в другие виды энергии;

d) сохраняется кинетическая энергия каждого из взаимодействующих тел.

4.31. Указать все правильные ответы.
В случае неупругого столкновения двух тел:

a) сохраняется механическая энергия, и не сохраняется кинетическая энергия каждого тела;

b) сохраняется импульс каждого тела;

c) не сохраняется общий импульс взаимодействующих тел;

d) их механическая энергия тел частично переходит в другие виды энергии;

e) механическая энергия взаимодействующих тел полностью переходит в другие виды энергии.

4.32. *В общем случае при абсолютно неупругом столкновении двух тел:*

a) сохраняется механическая энергия, и не сохраняется кинетическая энергия каждого тела;

b) их механическая энергия полностью переходит в другие виды энергии;

c) не сохраняется их общий импульс;

d) после взаимодействия они движутся как единое целое.

4.33. *Закон сохранения центра масс определяют следующим образом:*

a) в консервативной системе центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно;

b) центр масс инерциальной системы покоится или движется равномерно и прямолинейно;

c) в замкнутой системе центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно;

d) положение центра масс замкнутой консервативной системы не меняется со временем.

4.34. *Момент импульса материальной точки определяется как:*

a) векторное произведение ее радиус-вектора и импульса;

b) производная от импульса по координате;
c) производная от импульса по времени;
d) сумма произведений координат материальной точки на проекции импульса, соответствующие им.

4.35. *Закон сохранения момента импульса определяют следующим образом:*
a) момент импульса замкнутой консервативной системы остается постоянным;
b) момент импульса замкнутой системы остается постоянным;
c) момент импульса консервативной механической системы остается постоянным;
d) момент импульса инерциальной системы остается постоянным.

4.36. *Закон сохранения проекции момента импульса определяют следующим образом:*
a) проекция момента импульса на неподвижную ось вращения сохраняется, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю;
b) проекция момента импульса замкнутой системы на неподвижную ось вращения сохраняется, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю;
c) проекция момента импульса консервативной механической системы на неподвижную ось вращения сохраняется, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю;
d) проекция момента импульса замкнутой консервативной системы на неподвижную ось вращения сохраняется, если сумма моментов внешних сил относительно этой оси равна нулю.

4.37. *Модель самолета массой 1 кг, вращающаяся на корде длиной 5 м со скоростью 10 м/с, имеет момент импульса:*
a) 250 кг·м^2/с; *b)* 100 кг·м^2/с;
c) 50 кг·м^2/с; *d)* 500 кг·м^2/с.

4.38. *Модель самолета массой 1 кг, вращается на корде длиной 6 м со скоростью 10 м/с. При быстром уменьшении длины корда до 3 м, кинетическая энергия модели стала равна:*

a) 150 Дж; *b)* 100 Дж; *c)* 400 Дж; *d)* 200 Дж.

4.39. *Для того, чтобы подвести к берегу рыбу, которая тянет за крючок с силой 20 Н, рыболов должен выполнить работу при длине лески 10 м:*

a) 200 Дж; *b)* 50 Дж; *c)* 20 Дж; *d)* 100 Дж.

4.40. *Чтобы удерживать груз массой 2 кг на высоте 5 м в течении одной секунды необходимо выполнить работу:*

a) 20 Н; *b)* 100 Дж; *c)* 0 Дж; *d)* 10 Н.

4.41. *Чтобы перенести груз массой 2 кг на расстояние 4 м, необходимо выполнить работу:*

a) 20 Дж; *b)* 8 Дж; *c)* 0 Дж; *d)* 80 Дж.

4.42. *Тонкостенный цилиндр массой 5 кг, катящийся без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью 2 м/с, попадая на наклонный участок, поднимется на высоту.*

a) 0,4 м; *b)* 0,2 м; *c)* 0,5 м; *d)* 0,1 м.

4.43. *Два одинаковых груза массой 0,5 кг, соединены невесомой пружиной жесткостью 104 Н/м сжатой на 1 см. После распрямления пружины, скорость каждого груза:*

a) 2 м/с; *b)* 1 м/с; *c)* 5 м/с; *d)* 10 м/с.

4.44. *Хоккеист массой 80 кг ударом по шайбе массой 100 г сообщает ей скорость 40 м/с. Максимальная скорость, которую хоккеист может получить при таком ударе:*

a) 0,8 м/с; *b)* 0,2 м/с; *c)* 0,05 м/с; *d)* 0,1 м/с.

4.45. *Центр масс двух грузов массами 2 и 6 кг, расположенных на расстоянии 3 м друг от друга, находится на расстоянии от груза большей массы. Размерами грузов можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними:*

a) 0,5 м; *b)* 1,5 м; *c)* 1,0 м; *d)* 2,0 м.

4.46. *Муха массой 0,5 г, летящая со скоростью 2 м/с, попадает в подвешенный липкий лист бумаги массой 1,5 г. Сразу после столкновения скорость движения листа с мухой, которая прилипла к нему, составляет:*

a) 2,5 м/с; *b)* 1,5 м/с; *c)* 1,0 м/с; *d)* 0,5 м/с.

4.47. *Падая с высоты 1 м, груз массой 2 кг может сжать пружину жесткостью 105 Н/м на:*

a) 0,2 см; *b)* 2,0 см; *c)* 1,0 см; *d)* 0,5 см.

4.48. *Шар массой 100 г, летящий со скоростью 10 м/с, после абсолютно упругого столкновения с другим таким же шаром, который покоился, имеет скорость 6 м/с. Скорость второго шара после столкновения:*

a) 2 м/с; *b)* 6 м/с; *c)* 8 м/с; *d)* 4 м/с.

4.49. Укажите неверное утверждение.

Физическое поле является потенциальным, если:

a) работа сил поля, осуществляемая по замкнутому пути, не равна нулю;
b) силовые линии поля имеют начало (исток) и конец (сток);
c) работа сил по замкнутому пути равна нулю;
d) работа сил поля зависит от величины перемещения;
e) работа сил поля зависит от положения начальной и конечной точек перемещения.

4.50. *Наиболее общее определение потенциальной энергии:*

a) энергия взаимодействия тел, зависящая от их взаимного расположения;
b) энергия упругой деформации;
c) энергия гравитационного взаимодействия;
d) энергия тела, поднятого над Землей;
e) энергия консервативной системы.

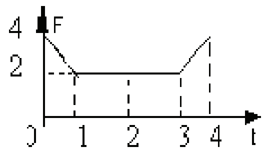
4.51. *Консервативними називаються сили:*

a) работа которых не зависит от формы пути;
b) которые не меняются при изменении состояния систем;
c) системы, не влияющие на состояние;
d) действующие в замкнутых системах;
e) работа которых зависит от формы пути.

4.52. *Какая из сил не является потенциальной?*
a) сила трения;
b) гравитационная сила;
c) сила Архимеда;
d) сила притяжения;
e) сила упругости.

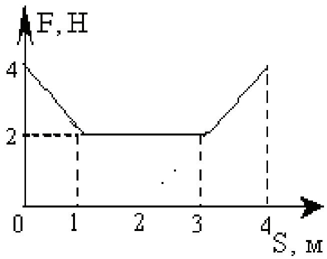
4.53. *Какие силы не относятся к консервативным?*
a) сила трения;
b) сила притяжения;
c) сила упругости;
d) квазиупругая сила;
e) все силы.

4.54. *На тело, движущееся равномерно, действует переменная сила. Найдите работу этой силы (в Джоулях) из графика на отрезке (3, 4).*



a) 3; *b)* 4; *c)* 5; *d)* 7; *e)* 12.

4.55. *На тело, движущееся прямолинейно, действует переменная сила. Найдите работу этой силы из графика на отрезке (1, 3)*



a) 4; *b)* 3; *c)* 5; *d)* 7; *e)* 12.

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Точка движется по прямой линии согласно уравнению $x = 6t - t^3/8$ (длина измеряется в метрах, время – в секундах). Определить средний модуль скорости движения точки в интервале времени от $t_1 = 2$ с, $t_2 = 6$ с.

Анализ и решение

$x = 6t - t^3/8$

$t_0 = 0$

$t_2 = 2$ с

$t_6 = 6$ с

$a \neq \text{const}$

$a < 0$

$a = f(t)$

$\Delta t = t_6 - t_2$

$\langle V \rangle$ – ?

Точка движется прямолинейно вдоль горизонтальной оси Ox (рис. 1). Из приведенного уравнения можно определить положение точки в любой промежуток времени. Средняя скорость определяется по формуле $\langle V \rangle = \Delta x / \Delta t$. Необходимо сделать анализ формы движения точки. Сначала определяем мгновенную скорость как производную от координаты x по независимой переменной t:

$$V = \frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3}{8}t^2.$$

Ускорение определяется как производная от мгновенной скорости по независимой переменной t:

$$a = \frac{dV}{dt} = -\frac{6}{8}t = -\frac{3}{4}t.$$

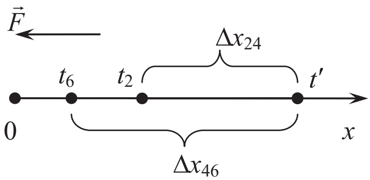


Рис. 1

Движение точки замедленное, модуль ускорения со временем растет. Сила которая сообщает точке ускорение, направлена противоположно движению.

Определим скорость точки в конце второй и шестой секунды:

$$V_2 = 6 - \frac{3}{8}t_2^2 = 6 - \frac{3}{8}2^2 = 4{,}5 \text{ м/с}; \; V_6 = 6 - \frac{3}{8}t_6^2 = 6 - \frac{3}{8}6^2 = -7{,}5 \text{ м/с}.$$

Надо узнать, в какой момент времени t' мгновенная скорость меняет знак (+) на (–):

$$V' = 6 - \frac{3}{8}t'^2 = 0\,;$$

$$t' = \sqrt{16} = 4\ \text{с}.$$

В момент времени $t' = t_4 = 4$ с сила остановит точку, затем точка начнет двигаться в противоположном направлении. Ускорение не меняет направления и тормозная сила действует в том же направлении.

$$\Delta x = \Delta x_{42} + |x_{64}|\,;$$

$$\Delta x_{42} = x_4 - x_2 = 6t_4 - \frac{t_4^3}{8} - 6t_2 + \frac{t_2^3}{8} = 5\ \text{м};$$

$$|\Delta x_{64}| = |x_6 - x_4| = \left|6t_6 - \frac{t_6^3}{8} - 6t_4 + \frac{t_4^3}{8}\right| = 7\ \text{м};$$

$$\langle V \rangle = \frac{\Delta x_{42} + |\Delta x_{64}|}{\Delta x} = \frac{5+7}{4} = 3\ \text{м/с};$$

$$[\langle V \rangle] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]}\ \text{м/с}.$$

Ответ: модуль средней скорости равен 3 м/с.

Пример 2. Радиус-вектор материальной точки определяется выражением $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 4t^2\vec{j} + 7\vec{k}$ м. Найти скорость V и ускорение a точки; модуль скорости в момент $t_1 = 2$ с; путь S, пройденный в течение первых 10 с движения; модуль перемещения $|\Delta r|$ за это же время. Проанализировать полученный результат.

Анализ и решение

$V_0 = 0$
$t_0 = 0$
$t_1 = 2$ с
$t_2 = 10$ с
V_1 – ? a – ?
S_2 – ? Δr_2 – ?

Согласно выражению в условии для радиус-вектора его проекции на оси координат (координаты материальной точки) находятся:

$$x = 3t^2\,; \qquad y = 4t^2\,; \qquad z = 7\,.$$

Видим, что координата z точки остается со временем неизменной (точка движется в плоскости, перпендикулярной оси z). Кроме того, координаты точки в начальный момент времени ($t = 0$):

$$x(0) = 0; \qquad y(0) = 0; \qquad z(0) = 7.$$

Определим мгновенную скорость как производную от вектора $\vec{r}$ по времени. Она направлена в пространстве по касательной к траектории в сторону движения:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} + 8t\vec{j}.$$

Если представить вектор $\vec{V}$ через его проекции на координатные оси (рис. 2), то получим $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$. В данном случае:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 6t; \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = 8t; \qquad V_z = \frac{dz}{dt} = 0.$$

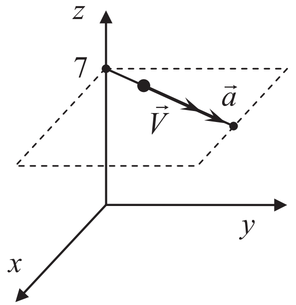


Рис. 2

В начальный момент времени точка не двигалась – $V_x(0) = V_y(0) = V_z(0) = 0$.

Мгновенное ускорение определим как первую производную от вектора мгновенной скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 6\vec{i} + 8\vec{j}.$$

Вектор мгновенного ускорения $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ имеет координаты

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 6; \; a_y = \frac{dV_y}{dt} = 8; \; a_z = \frac{dV_z}{dt} = 0.$$

Ускорение $\vec{a}$ не зависит от времени, отсюда делаем вывод, что движение равноускоренное. Так как движение происходит из состояния покоя с постоянным вектором ускорения, то траектория должна быть прямой. Модуль ускорения найдем по известной формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Значение вектора мгновенной скорости найдем по формуле

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = 10t;$$

$$V_1 = 10t_1 = 20 \text{ м/с}.$$

Движение материальной точки равноускоренное без начальной скорости. Путь, пройденный за 10 с, определяется по формуле

$$S_2 = \frac{at_2^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^2}{2} = 500 \text{ м}.$$

Модуль перемещения за первые 10 с найдем по формуле

$$\Delta r_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(3t_2)^2 + (4t_2)^2} = 500 \text{ м}.$$

Равенство пути S_2 и модуля радиус-вектора перемещения Δr подтверждает то, что рассматриваемое движение – прямолинейное (см рис. 2).

Ответ: скорость $V = 10t$; ускорение $a = 10$ м/с^2; модуль скорости через 2 с после начала движения 20 м/с; путь, пройденный в течение первых 10 с, как и модуль перемещения, составляет 500 м. Движение точки из состояния покоя равноускоренное прямолинейное в плоскости перпендикулярной оси z.

Пример 3. Колесо радиусом 0,2 м вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость изменяется со временем по закону $\omega = 4 - 2t$ с$^{-2}$. Найти угловое ускорение колеса, а также линейное ускорение точки на ободе в начальный момент времени. Сколько оборотов сделает колесо до полной остановки? Какой путь пройдет точка на ободе за это время?

$R = 0{,}2$ м
$\omega = 4 - 2t$ с$^{-1}$
$\omega' = \omega(t') = 0$
ε – ? $a(0)$ – ?
N' – ? S' – ?

Анализ и решение

При вращении вокруг неподвижной оси угловое ускорение направлено вдоль этой оси, а его величина равна производной от модуля угловой скорости

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -2 \text{ с}^{-2}.$$

Итак, колесо вращается с постоянным угловым ускорением. Отрицательное значение говорит о том, что вращение замедленное и вектор углового ускорения направлен против вектора угловой скорости (рис. 3).

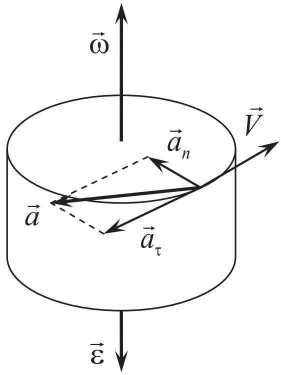


Рис. 3

Точка на ободе при вращении колеса движется по кругу, а ее полное линейное ускорение $\vec{a}$ состоит из нормального $\vec{a}_n$ и тангенциального $\vec{a}_\tau$. Нормальное ускорение направлено к оси вращения и по модулю равно

$$a_n = \omega^2 R.$$

Тангенциальное ускорение точки на ободе при замедленном вращении направлено по касательной к ободу противоположно движению и связано с угловым ускорением

$$a_\tau = \varepsilon R.$$

Модуль линейного ускорения в начальный момент времени

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\omega(0)\right)^4} = 3{,}225 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы найти количество оборотов колеса N' к остановке, сначала найдем момент времени t', когда оно остановилось, т. е. когда угловая скорость стала равна нулю

$$\omega' = 4 - 2t' = 0,$$

откуда

$$t' = 2 \text{ с}.$$

Угол на который обернется колесо, время от 0 до t'

$$\varphi' = \int_0^{t'} \omega dt = \int_0^{t'} (4-2t)dt = 4t' - t'^2.$$

Число оборотов, которые сделает колесо

$$N' = \frac{\varphi'}{2\pi} = \frac{4t' - t'^2}{2\pi} = 0{,}64.$$

Путь который пройдет точка на ободе колеса тоже связан с углом поворота

$$S' = \varphi' R = (4t' - t'^2)R = 0{,}8 \text{ м}.$$

Ответ: колесо вращается равнозамедленно с угловым ускорением 2с^{-2}. Линейное ускорение точки на ободе колеса в начальный момент времени составляло 3,225 м/с^2. До полной остановки колесо сделало 0,64 оборота, а точка на ободе прошла путь 0,8 м.

Пример 4. На тележке массой m_1 = 20 кг, которая может свободно перемещаться вдоль горизонтальных рельсов, лежит брусок массой m_2 = 5кг. Коэффициент трения между бруском и тележкой k = 0,2. Брусок тянут с силой F, направленной параллельно рельсам. Найти ускорение бруска и тележки, если сила изменяется по закону $F = ct$, где $c = 4$ Н/с. Построить графики зависимости найденных ускорений от времени.

Анализ и решение

m_1 = 20 кг
m_2 = 5 кг
k = 0,2
$F = ct$
c = 4,0 Н/с
a_1 – ?
a_2 – ?

В задаче рассматривается поступательное движение двух тел, между которыми действует сила трения. Наличие ее позволяет предположить, что при некоторых значениях приложенной силы F брусок и тележка будут двигаться вместе с одинаковым ускорением, а при больших значениях силы F брусок начнет обгонять тележку, т. е. будет скользить по ней (рис. 4).

Если относительная скорость V' бруска (скорость бруска относительно тележки) равна нулю, то сила трения будет силой трения покоя и может принимать любое значение от 0 до $f_{\text{тр max}} = kN$, т. е. $f_{\text{тр}} \le kN$, где N – сила нормальной реакции при воздействии одного тела на другое. Если $V' \ne 0$, то сила трения будет силой трения скольжения $f_{\text{тр}} = kN$.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную относительной скорости. Поэтому силы трения, действуя на тележку и брусок, направлены так, как показано на рис. 4, причем $f'_{тр} = f_{тр}$.

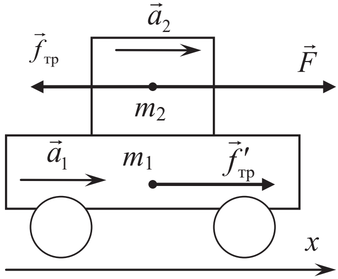


Рис. 4

Рассмотрим силы, действующие на тележку. Кроме силы трения $\vec{f}'_{тр}$ на тележку действуют вертикальные силы тяжести, сила нормального давления бруска и сила нормальной реакции рельсов.

На брусок, кроме горизонтальных сил $\vec{F}$ и $\vec{f}_{тр}$, действуют также вертикальные силы тяжести $m_2\vec{g}$ и нормальной реакции тележки $\vec{N}_2 = -m_2\vec{g}$.

Поскольку начальные скорости отсутствуют, то характер сил трения определяется соотношением между ускорениями обоих тел:

$$f_{тр} \le kN_2, \text{ если } \vec{a}_1 = \vec{a}_2, \; V' = 0;$$

$$f_{тр} = kN_2, \text{ если } \vec{a}_1 \ne \vec{a}_2, \; V' \ne 0,$$

причем $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – это ускорение тележки и бруска относительно Земли. Оба эти векторы совпадают по направлению с силой F: ускорение тележки возникает под действием одной силы трения $f'_{тр}$, направленной одинаково с силой F, ускорение бруска не может быть направлено в другую сторону, что сила трения не меняет направление движения на противоположное. Эти ускорения найдем из уравнения второго закона Ньютона, записанного для каждого тела. Поскольку вертикальные силы, действующие на каждое из тел, скомпенсированы, то уравнение движения для каждого из тел сразу запишем в скалярной форме (для проекции на ось OX):

$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 &= f'_{тр}, \\ m_2 a_2 &= F - f'_{тр} \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Из системы уравнений (1) найдем значение F, при которых $a_1 = a_2 = a$:

$$F = f_{тр}\frac{m_1 + m_2}{m_1}.$$

В этом случае $V' = 0$ и $f_{тр} \le kN_2 = km_2 g$.
тогда

$$F = ct \le km_2 g\left(m_1 + m_2\right)/m_1.$$

Следовательно, при

$$t < t^* = km_2 g\left(m_1 + m_2\right)/\left(cm_1\right) = 3{,}1 \text{ с}$$

ускорение обоих тел одинаковы. Решив систему (1) относительно a, получим

$$a = ct/(m_1 + m_2). \qquad (2)$$

Ускорение обоих тел прямо пропорциональны времени и изменяются от 0 до

$$a = ct^*/\left(m_1 + m_2\right) = 0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

При $t > t^*$ ускорение тел разные, но сила трения имеет определенное значение: $f_{тр} = km_2 g$. Тогда $m_1 a_1 = km_2 g$, $m_2 a_2 = c - km_2 g$, откуда

$$a_1 = km_2 g/m_1 = 0{,}5 \text{ м/с}^2; \; a_2 = ct/m_2 - kg. \qquad (3)$$

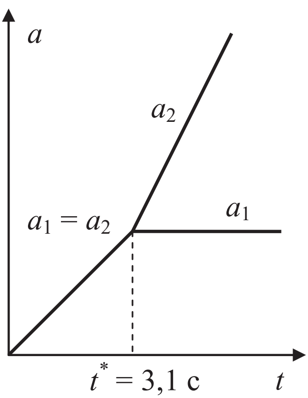


Рис. 5

Ускорение бруска a_2 будет расти линейно со временем, начиная от значения $a_2 = ct^* / m_2 - kg = a_1 = 0,5$ м/с^2.

График зависимости ускорения от времени (рис. 5) можно построить на основе выражений (2), (3). При $t > t^*$ график $a_1(t)$ – прямая линия, параллельная оси абсцисс, график $a_2(t)$ – прямая линия, которая идет вверх более круто.

Ответ: к моменту времени 3,1 с ускорения обоих тел одинаковы и растут по закону $a = ct / (m_1 + m_2)$. После этого ускорения тележки $a_1 = 0,5$ м/с, а ускорение бруска растет по закону $a_2 = ct / m_2 - kg$. Эти зависимости показаны на графике (см. рис. 5).

Пример 5. На горизонтальной поверхности находится неподвижная абсолютно гладкая полусфера радиусом R = 90 см. С верхней точки сферы без начальной скорости соскальзывает малое тело. С какой высоты h, считая от вершины, тело сорвется с полусферы?

Анализ и решение.

R = 90 см = 0,9 м
H – ?

Тело до некоторой точки на полусфере – точки отрыва от поверхности – движется по дуге окружности радиусом R.

Благодаря тому, что поверхность полусферы абсолютно гладкая, силой трения можно пренебречь. На тело действуют только сила тяжести $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны полусферы (рис. 6). Уравнение второго закона Ньютона для этой части траектории имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1)$$

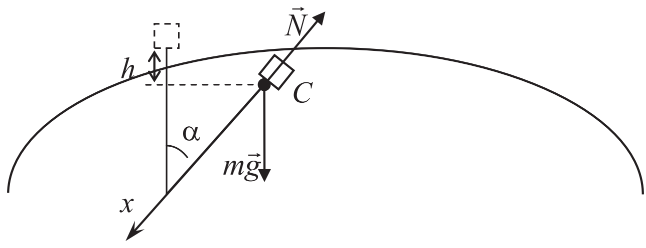


Рис. 6

Проекции сил на направление x, нормали к траектории, придают телу нормальное ускорение $a_x = a_n = V^2 / R$, где V – мгновенная скорость тела, которая постепенно увеличивается. В точке C тело перестает взаимодействовать с поверхностью полусферы, т. е. сила давления тела на полусферу и, соответственно, сила нормальной реакции $\vec{N}$ обращаются в нуль. Начиная с этой точки, тело движется только под действием силы тяжести и траектория его будет зависеть от модуля и направления скорости $\vec{V}_C$ в точке отрыва от полусферы. Таким образом, в этой точке нормальное ускорение предоставляется телу только проекцией силы тяжести и проекция (1) на ось x имеет вид

$$mV_C^2 / R = mg\cos\alpha .$$

Как видно из рис. 6, $\cos\alpha = (R-h)/R$.

Тогда

$$mV_C^2 = mg(R-h). \tag{2}$$

Для того, чтобы определить высоту, на которой находится точка отрыва, надо найти связь скорости тела при его движении по полусфере с его координатами, т. е. с высотой. Такую связь можно установить, зная законы изменения со временем координат и скорости тела. Это же возможно сделать, если рассматривать движение тела в поле тяготения Земли. Поскольку система консервативна (сила тяжести и реакция опоры консервативны, а силой трения пренебрегаем), полная механическая энергия тела остается постоянной, т. е.

$$\Delta E = \Delta K + \Delta W = 0. \tag{3}$$

При скольжении тела по полусфере с вершины до точки C потенциальная энергия его изменяется на $\Delta W = -mgh$, где h – искомая высота, которая отсчитывается от вершины полусферы. Кинетическая энергия тела при этом возрастает на

$$\Delta K = \frac{mV_C^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2}.$$

На вершине полусферы тело находится в положении неустойчивого равновесия и скорость V_0, необходимую для начала движения, можно считать очень малой. Тогда, подставляя найденные выражения в (3), получим

$$-mgh+\frac{mV_C^2}{2}=0. \qquad (4)$$

Уравнения (2) и (4) содержат в себе скорость V_C и высоту h, относящиеся к одной и той же точке, и создающие систему уравнений, совместное решение которой позволяет найти $h=R/3=0,3$ м.

Ответ: h = 0,3 м.

Пример 6. На цилиндр массой m_1 = 2 кг, который может свободно (без трения) вращаться вокруг горизонтальной оси, намотали легкую нить к концу которой подвесили груз массой m_2 = 1 кг. С каким ускорением будет опускаться груз, когда его отпустят?

Анализ и решение

m_1 = 2 кг
m_2 = 1 кг
a – ?

Первый способ. Без учета сил трения на цилиндр действуют вертикальные силы притяжения $m_1\vec{g}$ (приложена к центру тяжести на его оси), сила реакции опоры $\vec{N}$ (тоже приложена к оси) и сила $\vec{T}$, с которой груз натягивает нить. Цилиндр может двигаться только вращательно вокруг горизонтальной оси z. Уравнение вращательного движения цилиндра связывает моменты относительно оси z всех действующих сил (причем моменты сил тяжести и реакции опоры, приложенных к самой оси, равны 0) с угловым ускорением цилиндра (рис. 7)

$$M_z=I_z\varepsilon,$$

где $M_z = T\cdot R$ – момент силы относительно оси; $I_z = m_1R^2/2$ – момент инерции цилиндра относительно оси; R – радиус цилиндра. Или, подставляя

$$T=\frac{m_1R\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

На другое тело – груз действуют только вертикальные силы притяжения $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}'$. причем $\vec{T}'=-\vec{T}$ ($T'=T$). Груз движется поступательно вдоль оси x. Второй закон Ньютона в проекциях на ось x

$$m_2g-T'=m_2a. \qquad (2)$$

Если нить не растягивается, линейное ускорение груза а связано с угловым ускорением цилиндра $a=\varepsilon R$.

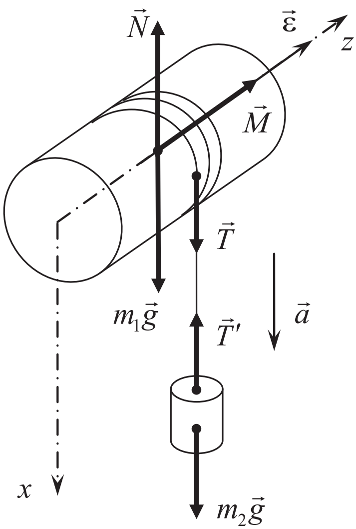


Рис. 7

Получим из (1) и (2) систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} T &= m_1 a / 2 \\ m_2 g - T &= m_2 a \end{aligned}\right\}$$

для двух неизвестных T и a. Решая ее, находим линейное ускорение груза

$$a = \frac{g}{1 + \dfrac{m_1}{2m_2}} = 5 \text{ м/с}^2.$$

Второй способ. Не учитывая силы трения, т. е. считая систему консервативной, можно использовать закон сохранения механической энергии

$$\Delta E = \Delta K + \Delta W = 0. \qquad (3)$$

С начала движения (когда кинетическая энергия и цилиндра и груза равна 0) при опускании груза на высоту h (рис. 8) потенциальная энергия системы уменьшается

$$\Delta W = -m_2 gh\,. \qquad (4)$$

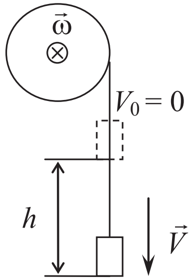


Рис. 8

При этом груз приобретает кинетическую энергию поступательного движения, а цилиндр кинетическую энергию вращательного движения, т. е. кинетическая энергия системы возрастает

$$\Delta K = \frac{m_2 V^2}{2} + \frac{I_1 \omega^2}{2}.$$

Учитывая, что линейная скорость V груза связана с угловой скоростью $\omega = V / R$ вращения цилиндра (нить не растягивается) и подставляя момент инерции цилиндра $I_1 = m_1 R^2 / 2$

$$\Delta K = \frac{V^2}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{2}\right). \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим связь между высотой, на которую опускается груз с начала движения, и скоростью, которую он приобретает.

$$V^2\left(1 + \frac{m_1}{2m_2}\right) = 2gh. \tag{6}$$

С другой стороны? при равноускоренном движении пройденный телом путь и ускорение связанные с изменением скорости

$$h = \frac{V^2 - V_0^2}{2a} = \frac{V^2}{2a}. \tag{7}$$

Из (7) с использованием (6) выражаем ускорения груза

$$a = \frac{g}{1 + \dfrac{m_1}{2m_2}} = 5 \text{ м / с}^2.$$

Ответ: груз опускается с ускорением 5 м/с^2.

Пример 7. На скамье Жуковского сидит спортсмен и держит в руках гири по 10 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи l_1 = 50 см. Скамья вращается с частотой $\nu_1 = 1$ с$^{-1}$. Как изменится частота вращения скамьи и какую работу выполнит спортсмен, если он сведет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до l_2 = 20 см? Суммарный момент инерции спортсмена и скамьи относительно оси вращения I_0 = 2,5 кг·м^2. Ось вращения проходит через центр масс спортсмена и скамьи.

Анализ и решение

m = 10 кг
l_1 = 50 см = 0,5 м
$\nu_1 = 1$ с$^{-1}$
l_2 = 20 см = 0,2 м
I_0 = 2,5 кг·м^2

ν_2 – ? A – ?

Частота вращения скамьи Жуковского меняется в результате действий, выполненных спортсменом при сближении гирь (считаем, что спортсмен не движется относительно скамьи). Однако и характер движения гирь и характер взаимодействий гирь со спортсменом, и спортсмена со скамьей очень сложные. В системе тел скамейка – спортсмен – гири все силы являются внутренними и не меняют ни импульса, ни момента импульса системы. Поскольку все тела системы осуществляют чисто вращательное движение вокруг одной и той же оси, рассмотрим момент импульса L_z системы относительно этой оси z (рис. 9).

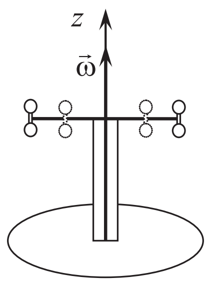


Рис. 9

При перемещении гирь относительно оси вращения на систему скамейка – спортсмен – гири действуют внешние силы: силы реакции оси, линия действия которых проходит через ось, сила тяжести и сила нормальной реакции, параллельные оси вращения. Моменты всех этих внешних сил относительно вертикальной оси вращения скамьи равны нулю (для скамьи Жуковского силы трения в оси можно считать отсутствующими). Итак, момент импульса этой системы относительно оси вращения *z* остается постоянным:

$$L_{z1} = L_{z2.}$$

Если считать гири точечными массами, то момент инерции всей системы до сближения гирь $I_{z1} = I_0 + 2ml_1^2$, а после сближения – $I_{z2} = I_0 + 2ml_2^2$, где *m* масса каждой гири. Выражая угловую скорость через частоту вращения по формуле $\omega = 2\pi\nu$ и подставляя ее в последнее уравнение, получим

$$\left(I_0 + 2ml_1^2\right)\nu_1 = \left(I_0 = 2ml_2^2\right)\nu_2,$$

откуда

$$\nu_2 = \frac{I_0 + 2ml_1^2}{I_0 + 2ml_2^2}\nu_1 = 2{,}3\ \text{с}^{-1}.$$

Так как момент всех внешних сил относительно оси вращения равен нулю, то и работа этих сил при вращении системы равна нулю. Поэтому кинетическая энергия системы меняется благодаря работе, которую выполняет спортсмен

$$A = K_2 - K_1 = \frac{I_{z2}\omega_2^2}{2} - \frac{I_{z1}\omega_1^2}{2}.$$

При этом надо оговорить, что гири движутся в одной горизонтальной плоскости и потенциальная энергия их не меняется.

Учитывая, что $\omega_2^2 = I_{z1}\omega_1^2 / I_{z2}$, получим для работы, которую выполняет спортсмен

$$A == \frac{I_{z1}\omega_1^2}{2I_{z2}}\left(I_{z1} - I_{z2}\right) = 4\pi^2 m\nu_1^2 \frac{I_0 + 2ml_1^2}{I_0 + 2ml_2^2}\left(l_1^2 - l_2^2\right) = 190\ \text{Дж}.$$

Ответ: частота вращения скамьи Жуковского увеличится до ν_2 = 2,3 $с^{-1}$. Работа, которую выполнит спортсмен – 190 Дж.

Ответы к заданиям для самоконтроля

№		№		№		№	
1.1.	*c*	1.13.	*a*	1.25.	*a*, *e*	1.37.	*a*
1.2.	*d*	1.14.	*b*	1.26.	*d*	1.38.	*a*
1.3.	*d*	1.15.	*c*, *h*	1.27.	*a*, *f*	1.39.	*c*
1.4.	*a*, *d*	1.16.	*a*	1.28.	*a*	1.40.	*a*
1.5.	*b*	1.17.	*a*	1.29.	*c*	1.41.	*b*
1.6.	*c*	1.18.	*a*	1.30.	*d*	1.42.	*d*
1.7.	*a*	1.19.	*c*	1.31.	*c*	1.43.	*c*
1.8.	*a*	1.20.	*a*	1.32.	*d*	1.44	*a*
1.9.	*a*	1.21.	*d*	1.33.	*c*	1.45	*a*
1.10.	*a*, *c*	1.22.	*a*, *b*, *c*	1.34.	*b*		
1.11.	*a*, *b*	1.23.	*a*	1.35.	*a*		
1.12.	*d*	1.24.	*b*	1.36.	*a*		

№		№		№		№	
2.1.	*c*	2.20.	*c*	2.39.	*a*	2.58.	*d*
2.2.	*d*	2.21.	*b*	2.40.	*a*, *e*	2.59.	*d*
2.3.	*a*	2.22.	*a*	2.41.	*c*, *d*	2.60.	*d*
2.4.	*c*	2.23.	*d*	2.42.	*d*	2.61.	*a*
2.5.	*a*	2.24.	*a*	2.43.	*d*	2.62.	*a*
2.6.	*a*	2.25.	*d*	2.44.	*a*	2.63.	*d*
2.7.	*a*, *f*	2.26.	*c*	2.45.	*d*	2.64.	*d*
2.8.	*a*	2.27.	*d*	2.46.	*c*	2.65.	*d*, *e*
2.9.	*c*	2.28.	*a*, *d*, *f*	2.47.	*a*	2.66.	*d*
2.10.	*d*	2.29.	*b*	2.48.	*b*	2.67.	*b*
2.11.	*b*	2.30.	*a*	2.49.	*d*	2.68.	*d*, *e*
2.12.	*a*	2.31.	*a*	2.50.	*a*	2.69.	*c*
2.13.	*d*	2.32.	*a*	2.51.	*b*	2.70.	*b*
2.14.	*a*	2.33.	*a*	2.52.	*a*	2.71.	*b*
2.15.	*a*	2.34.	*c*	2.53.	*c*	2.72.	*a*, *d*
2.16.	*d*	2.35.	*b*	2.54.	*d*	2.73.	*b*
2.17.	*a*	2.36.	*d*	2.55.	*a*, *d*	2.74.	*a*, *b*
2.18.	*c*	2.37.	*c*	2.56.	*d*	2.75.	*a*
2.19.	*a*	2.38.	*b*, *c*	2.57.	*a*		

№		№		№		№	
3.1.	*d*	3.13.	*a*	3.25.	*c*	3.37.	b
3.2.	*b*	3.14.	*c*	3.26.	*d*	3.38.	*a*
3.3.	*a*	3.15.	*b*	3.27.	*b*	3.39.	*a*
3.4.	*c*	3.16.	*d*	3.28.	*a*	3.40.	*d*
3.5.	*a*	3.17.	*a*	3.29.	*c*	3.41.	*a*
3.6.	*a*	3.18.	*a*	3.30.	*a*	3.42.	*b*
3.7.	*d*	3.19.	*c*	3.31.	*a*	3.43.	*a*
3.8.	*c*	3.20.	*d*	3.32.	*d*	3.44.	*c*
3.9.	*b*	3.21.	*b*	3.33.	*c*	3.45.	*a*
3.10.	*d*	3.22.	*a*	3.34.	*b*	3.46.	*c*
3.11.	*d*	3.23.	*b*	3.35.	*d*	3.47.	*b*
3.12.	*a*	3.24.	*b*	3.36.	*d*	3.48.	*c*

№		№		№		№	
4.1.	*a*	4.15.	*c*	4.29.	*a*	4.43.	a
4.2.	*d*	4.16.	*d*	4.30.	*c*	4.44.	*b*
4.3.	*a*, *c*	4.17.	*a*	4.31.	*d*	4.45.	*c*
4.4.	*c*	4.18.	*a*	4.32.	*d*	4.46.	*c*
4.5.	*d*	4.19.	*b*, *c*	4.33.	*c*	4.47.	*d*
4.6.	*a*	4.20.	*c*, *d*	4.34.	*a*	4.48.	*b*
4.7.	*a*	4.21.	*a*	4.35.	*b*	4.49.	*c*
4.8.	*b*, *c*	4.22.	*a*	4.36.	*a*	4.50.	*d*
4.9.	*c*, *d*	4.23.	*c*	4.37.	*c*	4.51.	*a*
4.10.	*a*	4.24.	*b*, *d*	4.38.	*d*	4.52.	*c*
4.11.	*c*, *d*	4.25.	*b*	4.39.	*a*	4.53.	*c*
4.12.	*a*, *b*, *c*	4.26.	*a*	4.40.	*c*	4.54.	*b*
4.13.	*a*	4.27.	*a*, *b*	4.41.	*c*	4.55.	*a*
4.14.	*d*	4.28.	*d*	4.42.	*d*		

ПРИЛОЖЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Кинематика	
Равномерное прямолинейное движение	
Уравнение изменения проекции перемещения со временем	$S_x = \upsilon_x t$
Уравнение равномерного прямолинейного движения	$x = x_0 + \upsilon_x t$
Средняя путевая скорость	$\upsilon_{c.l} = \frac{l}{t} = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$
Средняя скорость перемещения	$\vec{\upsilon}_{c.S} = \frac{\vec{S}}{t} = \frac{\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \ldots + \vec{S}_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$
Правило сложения перемещений, где $\overline{S}$ – перемещение тела в неподвижной системе отсчета; $\overline{S}_1$ – перемещение тела в подвижной системе отсчета; $\overline{S}_2$ – перемещение подвижной системы отсчета относительно неподвижной	$\vec{S} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2$
Правило сложения скоростей, где $\vec{\upsilon}$ – скорость тела в неподвижной системе отсчета; $\vec{\upsilon}_1$ – скорость тела в подвижной системе отсчета; $\vec{\upsilon}_2$ – скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной	$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$
Равноускоренное прямолинейное движение	
Уравнение проекции скорости при равноускоренном движении	$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$
Уравнение проекции перемещения на ось *Ox*	$S_x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t}{2}$ $S_x = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}$ $S_x = \frac{\upsilon_{0x} - \upsilon_x}{2} \cdot t$
Уравнение равноускоренного прямолинейного движения	$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$

Движение тела, брошенного под углом к горизонту	
Дальность полета тела	$l = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t = \dfrac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$
Максимальная высота поднятия тела	$h = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_n - \dfrac{g t_n^2}{2}$
Время поднятия на максимальную высоту	$t_0 = \dfrac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$
Равномерное движение по окружности	
Длина дуги	$l = R\varphi$
Период вращения	$T = \dfrac{t}{N}$
Частота вращения	$n = \dfrac{N}{t} = \dfrac{1}{T}$
Линейная скорость	$\upsilon = \dfrac{l}{t} = \dfrac{2\pi R}{T} = \omega R$
Угловая скорость	$\omega = \dfrac{\phi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi n$
Модуль центростремительного ускорения	$a = \dfrac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$
Динамика	
Законы Ньютона	
Равнодействующая сила	$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$
Масса тела	$m = \rho V$
Второй закон Ньютона	$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$
Третий закон Ньютона	$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
Силы в механике	
Закон всемирного тяготения	$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

Сила тяжести	$F_{тяж} = G\dfrac{M_3 m_2}{r^2} = mg$
Ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью Земли	$g_h = G\dfrac{M_3}{(R_3+h)^2} = g\dfrac{R_3^2}{(R_3+h)^2}$
Первая космическая скорость (скорость спутника, который движется по круговой орбите)	$\upsilon_1 = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$
Сила упругости (закон Гука)	$F_{упр} = k\lvert x\rvert$
Механическое напряжение, где E – модуль Юнга (упругости), $\varepsilon = \dfrac{\lvert\Delta l\rvert}{l_0}$ – относительное удлинение	$\sigma = E\varepsilon$
Максимальная сила упругости	$F_{max} = \sigma_м S$
Запас прочности	$n = \dfrac{\sigma_м}{\sigma}$
Жесткость тела, где l_0 – начальная длина тела, S – площадь поперечного сечения тела	$k = \dfrac{ES}{l_0}$
Жесткость системы двух параллельно соединенных пружин	$k_{пар} = k_1 + k_2$
Жесткость системы двух последовательно соединенных пружин	$\dfrac{1}{k_{посл}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$
Вес тела, которое находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно	$P_0 = mg$
Вес тела, которое движется с ускорением a, направленным вертикально вверх	$P = m(g+a)$
Вес тела, которое движется с ускорением a, направленным вертикально вниз	$P = m(g-a)$
Вес тела, которое движется с ускорением a, направленным горизонтально	$P = m\sqrt{g^2+a^2}$
Коэффициент перегрузки	$k = \dfrac{P}{P_0}$
Сила трения скольжения	$F_{тр} = \mu N$
Сила давления	$F = pS$

Элементы статики	
Момент силы, где l – плечо силы	$M = Fl$
Динамическое условие равновесия	$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0 \\ M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0 \end{cases}$
Законы сохранения в механике	
Импульс тела	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$
Второй закон Ньютона в импульсной форме	$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$
Закон сохранения импульса	$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \text{const}$
Потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h	$E_p = mgh$
Потенциальная энергия деформированной пружины	$E_p = \frac{kx^2}{2}$
Кинетическая энергия тела	$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$
Полная механическая энергия тела	$E = E_p + E_к$
Закон сохранения энергии в замкнутых механических системах	$E_1 = E_2$
Закон сохранения энергии при неупругих столкновениях	$E_1 = E_2 + Q$
Механическая работа	$A = FS\cos\alpha$
Теорема про потенциальную энергию	$A = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$
Теорема про кинетическую энергию	$A = \Delta E_к = E_{к2} - E_{к1}$
Связь между работой и полной энергией	$A = E_2 - E_1$
Механическая мощность	$P = \frac{A}{t} = F\upsilon\cos\alpha$
КПД механизма	$\eta = \frac{A_к}{A_з} = \frac{P_к}{P_з}$
Динамика вращательного движения	
Момент инерции системы (тела)	$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

Моменты инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии	$J = mR^2$; $J = \frac{1}{2}mR^2$
Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара	$J = \frac{2}{5}mR^2$
Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину	$J = \frac{1}{12}mR^2$
Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец	$J = \frac{1}{3}mR^2$
Теорема Штейнера	$J = J_C + ma^2$
Кинетическая энергия вращающегося тела относительно неподвижной оси	$T_{\text{вр}} = \frac{J_z\omega^2}{2}$
Момент силы относительно неподвижной точки	$M = [rF]$
Момент силы относительно неподвижной оси	$M = [rF]_z$
Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки	$L = [rp] = [r, m\upsilon]$
Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси	$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \upsilon_i r_i = J_z\omega$
Уравнение динамики вращательного движения твердого тела	$M_z = J_z\varepsilon$; $M = \frac{dL}{dt}$
Закон сохранения момента импульса	$L = \text{const}$

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Прописные	Строчные	Название	Прописные	Строчные	Название	Прописные	Строчные	Название
Α	α	альфа	Ι	ι	йота	Ρ	ρ	ро
Β	β	бета	Κ	κ	каппа	Σ	ς, σ	сигма
F	γ	гамма	Λ	λ	лямбда	Τ	τ	тау
Δ	δ	дельта	Μ	μ	ми	Υ	υ	ипсилон
Ε	ε	эпсилон	Ν	ν	ни	Φ	φ	фи
Ζ	ζ	дзета	Ξ	ξ	кси	Χ	χ	хи
Η	η	эта	Ο	ο	омикрон	Ψ	ψ	пси
Θ	θ	тета	Π	π	пи	Ω	ω	омега

ПРИСТАВКИ К ОБОЗНАЧЕНИЯМ ЕДИНИЦ

фемто	10^{-15}	ф	f
пико	10^{-12}	п	p
нано	10^{-9}	н	n
микро	10^{-6}	мк	μ
мили	10^{-3}	м	m
санти	10^{-2}	с	c
деци	10^{-1}	д	d
дека	10	да	da
гекто	10^{2}	г	h
кило	10^{3}	к	к
мега	10^{6}	М	M
гига	10^{9}	Г	G

ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Название физической величины и ее обозначения	Единица измерения физической величины	
	название единицы измерения (в СИ)	обозначения единицы измерения
Длина l	метр	м
Время t	секунда	с
Скорость υ		м/с
Ускорение a		м/с^2
Угловое перемещение φ	радиан	рад
Угловая скорость ω		рад/с
Угловое ускорение ε		рад/с^2
Период T	секунда	с
Частота n		$\frac{1}{c} = c^{-1}$
Масса m	килограмм	кг
Сила F	ньютон	$\text{Н} = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Импульс тела p		$\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Работа A	джоуль	Дж = Н·м
Энергия E	джоуль	Дж = Н·м
Мощность P	ватт	$\text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$
Момент силы M	ньютон-метр	Н·м
Момент импульса L	джоуль-секунда	Дж·с
Момент инерции I		кг·м^2
КПД механизма η		1
Давление p	паскаль	$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Гравитационая постоянная	$G = 6{,}6731 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31447\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$
Атомная единица массы	$1\ \text{а.е.м.} = 1{,}66057 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}$
Постоянная Планка	$h = 6{,}62607 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}$
Элементарный заряд	$e = 1{,}60218 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}\ \text{кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}67262 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}$
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях (p_0 = 101325 Па, T_0 =273,15 К)	$V_0 = 22{,}4138 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Число Авогадро	$N_A = 6{,}02214 \cdot 10^{-23}\ \text{моль}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = \dfrac{R}{N_A} = 1{,}38065 \cdot 10^{-23}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5{,}6704 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}854188 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Скорость света в вакууме	$c = 2{,}99792 \cdot 10^{8}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$
Постоянная Фарадея	$F = 9{,}648 \cdot 10^{4}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{моль}}$

УСКОРЕНИЯ (примерные значения)

Ускоренное движение	Ускорение, м/с^2	Замедленное движение	Ускорение (отриц.), м/с^2
Поезд метро	1	Аварийное торможение автомобиля	4–6
Гоночный автомобиль	4,5	Реактивный самолет при посадке	5–8
Скоростной пассажирский лифт	0,9–1,6		
Пассажирский поезд	0,35	Парашютист во время наполнения купола парашюта при скорости падения 60 м/с	около 60
Трамвай	0,6		
Запуск ракеты	30–90		
Снаряд в стволе орудия	100 000		

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛАНЕТ

Планеты	Период обращения вокруг Солнца T_C (в годах)	Период обращения вокруг оси T_0	Орбитальная скорость υ_0, км/с	Скорость освобождения υ, км/с	Число спутников N
Меркурий	0,241	88 дней	48,8	4,20	–
Венера	0,615	247 ± 5 дней	35,0	10,2	–
Земля	1,00004	23 ч 56 мин 4 с	29,8	11,16	1
Марс	1,881	24 ч 37 мин 23 с	24,2	5,01	2
Юпитер	11,86	9 ч 51 мин	13,06	59,5	12
Сатурн	29,46	10 ч 14 мин	9,65	35,4	9
Уран	84,01	10 ч 49 мин	6,78	22,2	5
Нептун	164,8	14 ч (?)	5,42	24,8	2
Плутон	247,7	–	4,73	–	–
Луна	(спутник Земли)	27 дней 7 ч 43 мин 11 с	–	2,37	–

ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ УБЕГАНИЯ υ ОТ ВЫСОТЫ *H* НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ЗЕМЛИ

H, 10^3 км	υ, км/с	H, 10^3 км	υ, км/с
0	11,19	10	6,98
0,5	10,77	20	5,50
1	10,40	30	4,68
2	9,76	40	4,15
5	8,37	50	3,76

ПЕРИОД ОБРАЩЕНИЯ T СПУТНИКА ЗЕМЛИ НА РАЗНЫХ ВЫСОТАХ H

H, км	T, ч	H, км	T, ч
0	1,41	1690	2,00
250	1,49	2000	2,12
500	1,58	5000	3,35
750	1,68	10 000	5,78
1000	1,75	35 800	23,935
1500	1,93		

ПЛОТНОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (при 20 °С)

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3
Металлы и сплавы		Сталь	7,7–7,9
Алюминий	2,7	Супермаллой	8,87
Бронза	8,7–8,9	Таллий	11,86
Ванадий	6,02	Тантал	16,6
Висмут	9,8	Титан	4,5
Вольфрам	19,34	Торий	11,71
Германий	5,3	Уран	19,1
Дюралюминий	2,79	Хром	7,15
Железо	7,88	Цинк	7,15
Золото	19,31	Цирконий	6,5
Кобальт	8,8	Чугун	7,0
Константан	8,88	*Дерево (воздушно-сухое)*	
Кремний	2,3	Бальса	0,2
Латунь	8,4–8,7	Бамбук	0,4
Магний	1,76	Береза	0,7
Манганин	8,5	Дуб, бук	0,7–0,9
Медь	8,93	Железное дерево (бакаут)	1,1–1,4
Молибден	10,2	Кедр	0,5–0,6
Натрий	0,975	Орех	0,6–0,7
Никелин	8,77	Сосна, ель	0,4–0,5
Никель	8,9	Черное дерево	1,1–1,3
Ниобий	8,57	Ясень, красное дерево	0,6–0,8
Олово	7,29	*Минералы*	
Пермаллой	8,6	Алмаз	3,51
Пермендур	8,2–8,3	Апатит	3,16–3,22
Платина	21,46	Асбест	2,35–2,6
Плутоний	19,25	Барит	4,48
Свинец	11,35	Берилл	2,67–2,72
Серебро	10,5	Графит	2,21–2,25

Кальцит	2,6–2,8	Текстолит	1,3–1,4
Каолинит	2,54–2,60	Фенопласт текстолитовый	1,34–1,4
Кварц	2,65	Фторопласты	2,1–2,4
Корунд	4,00	Целлон	1,3
Слюда	2,6–3,2	*Различные материалы*	
Горные породы		Бакелитовый лак	1,4
Базальт	2,8–3,2	Воск пчелиный белый	0,95–0,96
Бокситы	2,9–3,5	Кость	1,8–2,0
Граниты	2,5–3,0	Лед (при 0 °C)	0,917
Каменный уголь (сухой)	1,2–1,5	Резина твердая обыкновенная	1,2
Мел (воздушно-сухой)	2,0	Стекло зеркальное	2,55
Мрамор	2,5–2,8	– кварцевое	2,21
Пластмассы и слоистые пластики		– пирекс	2,59
Аминопласты слоистые	1,4	– обыкновенное	2,5
Винипласт	1,38–1,4	– термометрическое	2,59
Плексиглас	1,18	Фарфор	2,2–2,4
Поливиниловый пластикат	1,34–1,4	Эбонит	1,2
Полистирол	1,06	Янтарь	1,1

ПЛОТНОСТЬ ГАЗОВ И ПАРОВ (при 0 °C и давлении 760 мм рт. ст.)

Вещество	ρ, кг/м^3	Вещество	ρ, кг/м^3
Азот	1,251	Неон	0,900
Аммиак	0,771	Озон	2,139
Аргон	1,783	Окись углерода	1,25
Ацетилен	1,173	Хлор	3,22
Водород	0,08988	*Насыщенные пары при 0 °C*	
Воздух	1,293	Бензол	0,012
Гелий	0,1785	Водяной пар	0,005
Двуокись углерода	1,977	Этиловый спирт	0,033
Кислород	1,429	Этиловый эфир	0,83
Криптон	3,74		

ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ (при 20 °C)

Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3	Вещество	ρ, 10^3 кг/м^3
Азотная кислота	1,51	Молоко средней жирности	1,03
Анилин	1,02	Морская вода	1,01–1,03
Ацетон	0,791	Муравьиная кислота	1,22
Бензин	0,68–0,72	Нефть	0,76–0,85
Бензол	0,879	Нитробензол	1,2
Бром	3,12	Нитроглицерин	1,6
Вода – тяжелая	0,99823 1,1086	Ртуть Серная кислота	13,55 1,83
Гексан	0,660	Соляная кислота (38 %)	1,19
Гептан	0,684	Хлороформ	1,489
Глицерин	1,26	Толуол	0,866
Масло вазелиновое – машинное	0,8 0,9	Уксусная кислота Этиловый спирт	1,049 0,79
Метиловый спирт	0,792		

КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Трущиеся поверхности	*k*
Бронза по бронзе	0,2
Сталь по стали	0,18
Дерево сухое по дереву	0,25–0,5
Деревянные полозья по снегу и льду	0,035
то же, но полозья обиты железом	0,02
Дуб по дубу вдоль волокон	0,48
то же поперек волокон одного тела и вдоль волокон другого	0,34
Канат пеньковый мокрый по дубу	0,33
Канат пеньковый сухой по дубу	0,53
Кожаный ремень влажный по металлу	0,36
Кожаный ремень влажный по дубу	0,27–0,38
Кожаный ремень сухой по металлу	0,56
Колесо со стальным бандажом по стальному рельсу	0,16
Лед по льду	0,028
Медь по чугуну	0,27
Металл влажный по дубу	0,24–0,26
Металл сухой по дубу	0,5–0,6
Подшипник скольжения при смазке	0,02–0,08
Резина (шины) по твердому грунту	0,4–0,6
Резина (шины) по чугуну	0,83
Смазанный жиром кожаный ремень по металлу	0,23
Сталь (или чугун) по феродо* и райбесту*	0,25–0,45
Сталь по железу	0,19

Сталь по льду (коньки)	0,02–0,03
Сталь по стали	0,18
Сталь по чугуну	0,16
Фторопласт по нержавеющей стали	0,064–0,080
Фторопласт-4 по фторопласту	0,052–0,086
Чугун по бронзе	0,21
Чугун по чугуну	0,16

Примечание. Звездочкой отмечены материалы, применяемые в тормозных и фрикционных устройствах

ПРЕДЕЛЫ ПРОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТЕРИАЛОВ ($кГ/мм^2$)

Материалы	Предел прочности	
	при растяжении	при сжатии
Аминопласты слоистые	8	20
Бакелит	2–3	8–10
Бетон	–	0,5–3,5
Винипласт	4	8
Гетинакс	15–17	15–18
Гранит	0,3	15–26
Графит	0,5–1,0	1,6–3,8
Дуб (при 15% влажности) вдоль волокон	9,5	5
то же поперек волокон	–	1,5
Кирпич	–	0,74–3
Латунь, бронза	22–50	–
Лед (0 °С)	0,1	0,1–0,2
Пенопласт плиточный	0,06	–
Полиакрилат (оргстекло)	5	7
Полистирол	4	10
Сосна (при 15% влажности) вдоль волокон	8	4
то же поперек волокон	–	0,5
Сталь для конструкций	38–42	–
Сталь кремнехромомарганцвистая	155	–
Сталь машиноподелочная (углеродистая)	32–80	–
Сталь рельсовая	70–80	–
Текстолит ПТК	10	15–25
Фенопласт текстолитовый	8–10	10–6
Фторопласт-4	2	–
Целлон	4	16
Целлулоид	5–7	–
Чугун белый	–	до 175
Чугун серый мелкозернистый	21–25	до 140
Чугун серый обыкновенный	14–18	60–100

МОДУЛИ УПРУГОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПУАССОНА

Наименование материала	Модуль Юнга E, 10^7 Н/м^2	Модуль сдвига G, 10^7 Н/м^2	Коэффициент Пуассона μ
Алюминиевая бронза, литье	10300	4100	0,25
Алюминий	6300–7000	2500–2600	0,32–0,36
Бетон	1500–4000	700–1700	0,1–0,15
Висмут	3200	1200	0,33
Гранит, мрамор	3500–5000	1400–4400	0,1–0,15
Дюралюминий катаный	7000	2600	0,31
Известняк плотный	3500	1500	0,2
Инвар	13500	5500	0,25
Кадмий	5000	1900	0,3
Каучук	0,79	0,27	0,46
Кварцевая нить (плавленая)	7300	3100	0,17
Константан	16000	6100	0,33
Латунь корабельная катаная	9800	3600	0,36
Латунь холоднотянутая	8900–9700	3400–3600	0,32–0,42
Манганин	12300	4600	0,33
Медь, литье	8200		
Медь прокатанная	10800	3900	0,31–0,34
Медь холоднотянутая	12700	4800	0,33
Никель	20400	7900	0,28
Плексиглас	525	148	0,35
Резина мягкая вулканизированная	0,15–0,5	0,05–0,15	0,46–0,49
Серебро	8270	3030	0,37
Стали легированные	20600	8000	0,25–0,30
Стали углеродистые	19500–20500	800	0,24–0,28
Стальное литье	17000		
Стекло	4900–7800	1750–2900	0,2–0,3
Титан	11600	4400	0,32
Фосфористая бронза катаная	11300	4100	0,32–0,35
Целлулоид	170–190	65	0,39
Цинк катаный	8200	3100	0,27
Чугун белый, серый	11300–11600	4400	0,23–0,27
Чугун ковкий	15000		

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Мочалов А. А. Курс физики : учеб. пособ. : в 2 т. Николаев : Видавництво НУК, 2008. Т. 1. 560 с.
2. Трофимова Т. И. Курс физики : учеб. пособ. – Москва : Высшая школа, 1985. 432 с.
3. Савельев И. В. Курс физики. Механика, молекулярная физика : учеб. пособ. : в 3 т. Москва : Наука, 1989. Т. 1. 352 с.
4. Ушкац М. В. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка : метод. посіб. Миколаїв : Видавництво НУК, 2008. 214 с.
5. Кучерук І. М. Загальний курс фізики : навч. посіб. : в 3 т. Механика, молекулярная физика. Київ : Техніка, 1999. Т. 1. 536 с.
6. Зачек І. Р. Курс фізики : навч. посіб. Львів : Видавництво "Бескид Біт", 2002. 376 с.
7. Кириллов В. М. Решение задач по физике : учеб. пособ. Москва : КомКнига, 2006. 286 с.
8. Кингсеп А. С. Основы физики. Курс общей физики. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика : учеб. пособ. Москва, 2001. 400 с.
9. Иванов А. Е. Механика. Молекулярная физика и термодинамика : учеб. пособ. Москва, 2016. 960 с.

УДК 531(075.8)
К93

К93 **Курс** лекцій з фізики. Механіка : навчальний посібник / Ж. Ю. Буруніна, С. С. Коваль, М. В. Ушкац, Н. О. Шаповал, К. Д. Євфимко ; за ред. О. О. Мочалова. – Миколаїв : НУК, 2020. – 152 с.

ISBN 978-966-321-379-8

Посібник містить базові теоретичні відомості для самостійної роботи студентів при вивченні розділу «Механіка» загального курсу фізики.

Посібник призначений для іноземних студентів технічних спеціальностей.

УДК 531(075.8)

Навчальне видання

БУРУНІНА Жанна Юріївна
КОВАЛЬ Сергій Станіславович
УШКАЦ Михайло Вікторович
ШАПОВАЛ Наталя Олександрівна
ЄВФИМКО Костянтин Дмитрович

КУРС ЛЕКЦІЙ З ФІЗИКИ. МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Під редакцією О. О. Мочалова

Російською мовою

Коректор М. О. Паненко
Верстка – І. І. Стратій

Підписано до друку 03.06.2020 р. Формат 60х84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Цифровий друк. Умовно-друк. арк. 8,84. Наклад 300. Замовлення № 0906-05.
Віддруковано з готового оригінал-макета.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 6402 від 19.09.2018 р.