МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
імені адмірала Макарова
Первомайський політехнічний інститут

А.Ю. ЛИСИХ

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ТА ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

МОДУЛЬ "КІНЕМАТИКА"

Рекомендовано Методичною Радою ППІ НУК

Первомайськ 2016

УДК 531.
ББК 22.21
Л-63

Рекомендовано Методичною Радою ППІ НУК
протокол № 8 від 23.03.2016 р.

Кафедра фундаментальних та загальнотехнічних наук

А.Ю. Лисих
Теоретична механіка: Методичні вказівки для підготовки та виконання практичних робіт. Модуль "Кінематика" – Первомайськ: Видавництво НУК, 2016. – 80 с.

Методичні вказівки для практичних занять містять теоретичний матеріал, методику та приклади розв’язання задач з другого розділу теоретичної механіки: "Кінематика" у межах навчальної програми вищих технічних навчальних закладів. Методичні вказівки призначені для студентів, які навчаються за напрямами 6.050503 "Машинобудування", 6.050502 "Інженерна механіка" та 6.050601 "Теплоенергетика" денної і заочної форм навчання.

Рецензент: кандидат технічних наук, доцент Ю.Є. Мєшков

УДК 531.
ББК 22.21

© А.Ю. Лисих, 2016
© Національний університет кораблебудування, 2016
© Видавництво НУК, 2016

ВСТУП

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, що вивчає геометричні властивості руху тіл, які розглядаються як чисто геометричні об'єкти – точки і тіла – без урахування їх матеріальних характеристик (маси та ін.). При цьому не розглядаються причини, що викликають і змінюють рух об'єкта.

Під рухом у механіці розуміється зміна з часом взаємного положення в просторі даного тіла відповідно якого-небудь іншого тіла. Характер руху, що спостерігається, істотно залежить від вибору тіла, з яким пов'язаний спостерігач. З твердим тілом, відповідно якого вивчається рух, жорстко з'єднують систему координат, що утворить разом з ним систему відліку.

Основною задачею кінематики є встановлення завдання руху точок (тіл) і методів визначення кінематичних величин, які характеризують цей рух.

В методичних вказівках для підготовки та виконання практичних робіт наведені приклади розв’язків задач кінематики за основними темами.

Стислі теоретичні дані забезпечують поєднання теорії з практичними навичками при розв’язанні задач, що сприяє, насамперед, творчому їх розумінню.

При розв’язанні задач на прикладах здійснюється зв’язок алгоритму розв’язання з математичним виразом та фізичним змістом рівняння або теореми з теоретичним обґрунтуванням, що забезпечують творчу діяльність студента при вивченні курсу теоретичної механіки.

Вивчення теоретичної механіки є необхідною складовою підготовки інженера. Значною мірою реалізації завдання по якісній підготовці сучасного фахівця в галузі інженерії сприяють ґрунтовні, міцні, сучасні політехнічні знання та вміння застосовувати їх у практичній діяльності.

Практичне заняття № 1

ТРАЄКТОРІЯ І ПОЛОЖЕННЯ ТОЧКИ В ПРЯМОКУТНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Мета роботи: навчитись визначати кінематичні характеристики точки, знаходити рівняння траєкторії руху точки при кінематичному способі задання руху

Основні теоретичні відомості

Рух точки в просторі можна задати трьома способами: **векторним**, **координатним** і **натуральним** (природним).

При координатному способі задання руху положення точки в просторі визначається її декартовими координатами *x, y, z* залежними від часу t.

Безперервні функції:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t), \tag{1.1}$$

які називають кінематичними рівняннями, визначають закон руху точки в прямокутних декартових координатах.

Рівняння (1.1) одночасно є рівняннями траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметра відіграє час t. Якщо виключити з рівнянь (1.1) час t, то знайдемо рівняння траєкторії в звичайній формі у вигляді залежності між координатами точки.

Проекція швидкості точки на координатну вісь дорівнює першій похідній від відповідної координати точки за часом:

$$V_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x};\ V_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y};\ V_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}, \tag{1.2}$$

де крапка над координатою – символ диференціювання за часом.

Модуль швидкості знаходимо за формулою:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{1.3}$$

Проекція прискорення точки на координатну вісь дорівнює першій похідній від відповідної проекції швидкості точки за часом:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = \ddot{x};\ a_y = \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = \ddot{y};\ a_z = \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} = \ddot{z}. \quad (1.4)$$

Величина **тангенціального (дотичного) прискоренення** визначається за формулою:

$$a_\tau = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y + V_z \cdot a_z}{V}. \quad (1.5)$$

Величина **нормального прискоренення** визначається за формулами (1.6) та (1.7):

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.6)$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \quad (1.7)$$

де a – модуль повного прискорення.

Модуль повного прискорення знаходимо за формулами (1.8) та (1.9):

$$a = \sqrt{a_\mathrm{n}^{\,2} + a_\tau^2}. \quad (1.8)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.9)$$

Приклад рішення задачі

Точка рухається у площині *Oxy*, закон її руху заданий рівняннями:

$$x = t - 4; \quad (1.10)$$

$$y = 2t^3. \quad (1.11)$$

Знайти: рівняння траєкторії точки, для моменту часу $t_1 = 1$ с визначити швидкість та прискорення точки, її дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

Для визначення рівняння траєкторії точки виключимо з рівняння руху (1.10) час *t*. $t = (x+4)$ і підставивши значення *t* в рівняння (1.11) отримаємо:

$$y = 2(x+4)^3. \quad (1.12)$$

Рівняння (1.12) являє собою рівняння кубічної параболи та є рівнянням траєкторії точки у координатній формі. Тобто траєкторія точки знаходиться на кубічній параболі $y = 2(x+4)^3$. У початковий момент часу положення точки

визначається координатами M_0(-4;0). З часом точка рухається параболою в нескінченність правого квадранта (додатного) декартових координат.

Швидкість точки знайдемо за її проекціями на координатні вісі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 1 \text{ см/с}; \quad V_y = \frac{dy}{dt} = 6t^2 \text{ см/с}; \quad V_z = \frac{dz}{dt} = 0;$$

при $t_1 = 1$ с; $V_{1x} = 1$ см/с; $V_{1y} = 6$ см/с;

$$V_1 = \sqrt{V^2_{1x} + V^2_{1y}} = \sqrt{1^2 + 6^2} = 6{,}08 \text{ см/с}.$$

Аналогічно знайдемо прискорення точок:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 0; \; a_y = \frac{dV_y}{dt} = 12t \text{ см/с}^2; \; a_z = \frac{dV_z}{dt} = 0; \quad a = \sqrt{a^2_x + a^2_y + a^2_z};$$

при $t_1 = 1$ с;

$$a_{1y} = \sqrt{12^2 + 0 + 0} = 12 \text{ см/с}^2; \; a_1 = a_{1y} = 12 \text{ см/с}^2.$$

Дотичне прискорення знайдемо шляхом диференціювання за часом рівності

$$V^2 = V^2_x + V^2_y; \; a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V}.$$

Підставивши у вираз чисельні значення, отримаємо:

$$a_{1\tau} = \frac{1 \cdot 0 + 6 \cdot 12 + 0 \cdot 0}{6{,}08} = 11{,}8 \text{ см/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки:

$$a_n = \sqrt{a^2_1 + a^2_{1\tau}}; \; a_{1n} = \sqrt{12^2 - 11{,}8^2} = 2{,}2 \text{ см/с}^2.$$

Радіус кривизни траєкторії: $\rho = \frac{V^2}{a_n}$

Знаходимо радіус кривизни траєкторії для моменту часу для $t_1 = 1$ с:

$$\rho_1 = \frac{6{,}08^2}{2{,}2} = 16{,}8 \text{ см}.$$

Відповідь: $V_1 = 6{,}08$ см/с; $a_1 = 12$ см/с^2; $a_\tau = 11{,}8$ см/с^2; $a_n = 2{,}2$ см/с^2; $\rho_1 = 16{,}8$ см.

Варіанти завдань для практичної роботи № 1

Таблиця 1.1 Вихідні дані для виконання практичної роботи № 1

варіант	Рівняння руху		Час, сек	
	$x = f(t)$, м	$y = f(t)$, м	t_1	t_2
1	$2t$	$2 - (1 - 2t)^2$	1	0,5
2	$6\sin(\frac{\pi t}{4}) + 2$	$3 - 3\cos(\frac{\pi t}{4})$	2	4
3	$-2t^2 + 3$	$-5t$	0,5	1
4	$4\cos(\frac{\pi t}{3}) + 2$	$4\sin^2(\frac{\pi t}{3})$	1	0
5	$1 + 6\sin(\frac{\pi t}{6})$	$4\cos(\frac{\pi t}{6}) - 2$	0	3
6	$3 - 2\cos(\frac{\pi t}{4})$	$2\sin(\frac{\pi t}{4}) - 1$	0	4
7	$3t$	$6t - 5t^2$	1	2
8	$20\cos(\frac{3\pi t}{2})$	$20\sin(\frac{3\pi t}{2})$	0	1
9	$5 - 2\cos(\frac{\pi t}{3})$	$3\sin(\frac{\pi t}{3}) - 2$	1	2
10	$-\cos(\frac{\pi t^2}{3}) + 3$	$\sin(\frac{\pi t^2}{3}) - 1$	1	0
11	$4t + 4$	$-\frac{4}{t+1}$	1	2
12	$3 - t^2$	$1 + t^2$	1	2
13	$10\cos 3t$	$3 + 3t$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
14	$4\cos 2\pi t$	$-4\sin \pi t$	1	0,5
15	$3(1 + t^2)$	$\frac{3}{(1+t^2)}$	1	0,5
16	$5\sin(\frac{\pi t^2}{4}) + 3$	$2 - 5\cos(\frac{\pi t^2}{4})$	1	2
17	$t + 2$	$2\cos 2t$	$\frac{\pi}{2}$	π
18	$12\cos 3t$	$-2\sin 6t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
19	$3t$	$4t^2 - 1$	0,5	1

продовження табл. 1.1

20	$3-8\sin(\frac{\pi t}{6})$	$-6\cos(\frac{\pi t}{6})$	0	3
21	$2-3t-6t^2$	$3-\frac{3t}{2}-3t^2$	1	2
22	$5e^{2t}$	$5e^{-2t}$	0	0,5
23	$\cos(\pi t^2)$	$2\sin(\pi t^2)-1$	0	1
24	$2\cos(\pi t^2)$	$\cos(2\pi t^2)$	0	1
25	$2\cos 6t$	$12\sin 3t$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
26	$5\cos 2t$	$5\sin 2t$	0	0,5
27	$1+3\cos(\frac{\pi t^2}{3})$	$3\sin(\frac{\pi t^2}{3})+3$	0	1
28	$6t\text{-}5t^2$	$3t$	3	2
29	$5t$	$2t^2-3$	0	1
30	$2\text{ - }(1+2t)^2$	$\text{- }2t$	0,5	0

Контрольні запитання:

1. Які способи задання руху точки існують і в чому полягає кожний з них?
2. Чому функції $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, і $z=f_3(t)$, що визначають рух точки в координатній формі, повинні бути однозначними?
3. Як при координатному способі задання руху точки визначається її траєкторія?

***Література*:**

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: изд-во Наука, 1970. – С. 140-143.
2. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 180-114.

Практичне заняття № 2

ДОТИЧНЕ І НОРМАЛЬНЕ ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ

Мета роботи: навчитись визначати нормальне та дотичне прискорення руху точки у різних формах задання руху, визначати напрямок та величину повного прискорення.

Основні теоретичні відомості

В кожен момент часу прискорення точки, що рухається є геометричною сумою двох прискорень: дотичного і нормального прискорення.

Повне прискорення точки в загальному випадку криволінійного руху визначають за формулою:

$$\bar{a} = \frac{\mathrm{d}V_\tau}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{\tau} + \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \bar{n}, \qquad (2.1)$$

де $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ – одиничні вектори,

ρ – радіус кривизни.

Перший додаток цього рівняння називають **тангенціальним** (дотичним) прискоренням $\bar{a}_\tau$, а другий – **нормальним** прискоренням $\bar{a}_n$:

$$\bar{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}V_\tau}{\mathrm{d}t} \cdot \bar{\tau}, \qquad |\bar{a}_\tau| = \frac{\mathrm{d}V_\tau}{\mathrm{d}t}; \quad \bar{a} = \frac{V_\tau^2}{\rho} \cdot \bar{n}, \qquad |\bar{a}_\mathrm{n}| = \frac{V_\tau^2}{\rho}. \qquad (2.2)$$

Вектор тангенціального прискорення $\bar{a}_\tau$ спрямований по дотичній до траєкторії точки і характеризує зміну модуля швидкості точки. Величина $\bar{a}_\tau$ може бути додатною, від'ємною або рівною нулю. Вектор нормального прискорення $\bar{a}_n$ завжди спрямований в бік угнутості траєкторії і характеризує зміну вектора швидкості точки за напрямом. Величина $\bar{a}_n$ завжди додатна (рис 2.1)

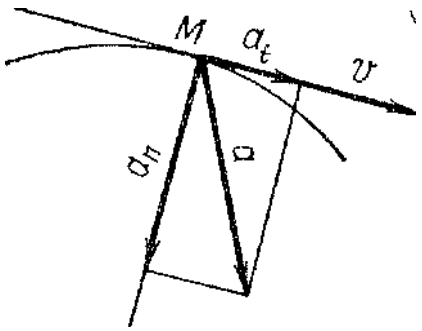

Рисунок 2.1

Модуль повного прискорення точки визначають за формулою:

$$a = \sqrt{a_{\text{n}}{}^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\dot{V})^2 + \left(\frac{V^2}{\rho}\right)^2}\ . \qquad (2.3)$$

Приклад рішення задачі

Точка рухається по дузі кола радіуса R =30 см. Закон її руху цією дугою s=30sinπt (t – в секундах, s – в сантиметрах (рис. 2.2.)). Знайти величину і напрямок швидкості та повного прискорення точки в момент часу t = 5 с.

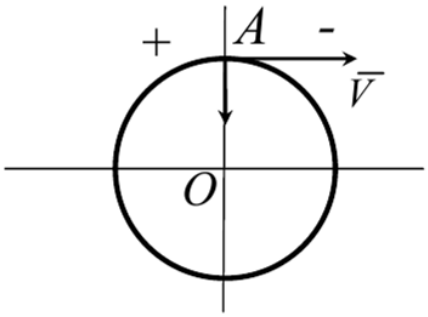

Рисунок 2.2

В початковий момент часу точка розміщувалася на колі в положенні A. Напрям руху точки по колу проти руху стрілки годинника вважаємо додатним. Швидкість для будь-якого моменту часу:

$$V = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(30\sin\pi t) = 30\pi\cos\pi t\,.$$

У момент часу t = 5 с

$$V = 30\pi\cos 5\pi = -30\pi \text{ см/с}.$$

Знак «−» показує, що швидкість точки в цей момент часу спрямована проти додатного напряму руху. Для визначення повного прискорення треба знайти дотичне й нормальне прискорення.

Дотичне прискорення для будь-якого моменту часу:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(30\cos\pi t) = -30\pi^2\sin\pi t\,.$$

У момент часу t = 5 с:

$$a_\tau = -30\pi^2\sin 5\pi = 0\,.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(30\pi\cos\pi t)^2}{30} = 30\pi^2\cos^2\pi t.$$

У момент часу t = 5 с нормальне прискорення:

$$a_n = 30\pi^2\cos^2 5\pi = 30\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Нормальне прискорення спрямоване вздовж радіуса до центра кола.

Повне прискорення для будь-якого моменту часу:

$$a = \sqrt{a_n{}^2 + a_\tau^2}.$$

У момент часу t = 5 с дотичне прискорення дорівнює нулю і, отже, повне прискорення за величиною і напрямом дорівнює нормальному прискоренню.

$$a = a_n = 30\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Варіанти завдань для практичної роботи № 2

1. Точка рухається колом відповідно рівнянню $s = t^3 + 2t^2 + 3t$. Визначити криволінійну координату точки у момент часу, коли її дотичне прискорення $a_\tau = 16$ м/с^2.

Відповідь: 22.

2. Точка рухається зі сталим дотичним прискоренням $a_\tau = 0{,}5$ м/с^2. Визначити криволінійну координату точки в момент часу $t = 4$ с, якщо при $t_0 = 0$ швидкість точки $V_0 = 0$ координата $s_0 = 0$.

Відповідь: 4.

3. Дотичне прискорення точки $a_\tau = 0{,}2t$. Визначити момент часу t, коли швидкість V точки досягне 10 м/с, якщо при $t_0 = 0$ швидкість $V_0 = 2$ м/с.

Відповідь: 8,94 с.

4. Проекція швидкості точки в час руху визначається виразами $V_x = 0{,}2t^2$, $V_y = 3$ м/с. Визначити дотичне прискорення в момент часу $t = 2{,}5$ с.

Відповідь: 0,385 м/с^2.

5. Швидкість точки в декартових координатах задана виразом $\bar{V} = 1{,}5t\bar{i} + 1{,}5t\bar{j} + 0{,}5t^2\bar{k}$. Визначити дотичне прискорення точки в момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: 2,18 м/с^2.

6. Прискорення точки в декартових координатах задано виразом $\bar{a} = 0{,}1t\bar{i} + 0{,}9t\bar{j}$. Визначити дотичне прискорення в момент часу $t = 10$ с, якщо при $t_0 = 0$ швидкість точки $V_0 = 0$.

Відповідь: 1,27 м/с^2.

7. Проекції прискорення точки в час руху визначається виразами $a_x = 0{,}8t$ м/с^2, $a_y = 0{,}8$ м/с^2. Знайти дотичне прискорення в момент часу $t = 2$ с, якщо при $t_0 = 0$ швидкість точки $V_0 = 0$.

Відповідь: 1,7 м/с^2.

8. Точка рухається з сталою швидкістю $V = 30$ см/с по дузі кола радуіса $r = 2$ м. Визначити нормальне прискорення точки в см/с^2.

Відповідь: 4,5 см/с^2.

9. Колом рухається точка відповідно рівнянню $s = 5t - 4t^2$. Визначити час t коли нормальне прискорення $a_n = 0$.

Відповідь: 6,25 с.

10. Визначити радіус загруглення траси бобслею, якщо швидкості спуску 120 км/год, нормальне прискорення санок $a_n = 2g$.

Відповідь: 56,6 м.

11. Автомобіль рухається горизонтальною дорогою зі сталою швидкістю $V = 90$ км/год. Визначити радіус закруглення дороги в момент часу, коли нормальне прискорення центра автомобіля $a_n = 2{,}5$ м/с^2.

Відповідь: 250 м.

12. Задано рівняння точки по траєкторії $s = 5t$. Визначити радіус кривизни траєкторії, коли нормальне прискорення точки $a_n = 3$ м/с^2.

Відповідь: 8,33 м.

13. Електровоз рухається дугою кола радіуса $R = 300$ м. Визначити максимальну швидкість електровоза в км/год при якій нормальне прискорення не перевищує 1 м/с^2.

Відповідь: 62,4 км/год.

14. Центрифуга для тренування пілотів влаштована так, що центр кабіни з людиною знаходиться на відстані $r = 5$ м від осі обертання. Визначити швидкість центра кабіни у випадку, коли її нормальне прискорення $a_n = 5g$.

Відповідь: 15,7 м/с.

15. Літак летить круговою траєкторією радіуса 10 км. Визначити швидкість літака, якщо нормальне прискорення $a_n = 6{,}25$ м/с^2.

Відповідь: 900 км/год.

16. Задано рівняння руху точки за траєкторією $s = 0{,}1t^2 + 0{,}2t$. Визначити її нормальне прискорення в момент часу $t = 6$ с. У стані, який точка займає в цей момент, радіус кривизни траєкторії $\rho = 0{,}6$ м.

Відповідь: 3,27 м/с^2.

17. Точка рухається колом, радіуса $r = 30$ см з швидкістю $V = \ln t$. Визначити нормальне прискорення точки в момент часу $t = 12$ с.

Відповідь: 20,6 м/с^2.

18. Дано рівняння руху точки по траєкторії $s = 0{,}6t^2$. Визначити нормальне прискореня точки в момент часу, коли її координата $s = 30$ м і радіус кривизни траєкторії $\rho = 15$ м.

Відповідь: 4,8 м/с^2.

19. Колом, радіус якого $r = 7$ м, рухається точка відповідно рівнянню $s = 0{,}3t^2$. Визначити час, коли нормальне прискорення точки $a_n = 1{,}5$ м/с^2.

Відповідь: 5,4 с.

20. Точка рухається колом, радіус якого $r = 20$ м, зі швидкістю $V = e^t$. Визначити момент часу, коли нормальне прискорення точки $a_n = 3$ м/с^2.

Відповідь: 2,05 с.

21. Точка рухається колом. Визначити радіус кола, якщо в момент часу, коли швидкість $V = 10$ м/с, вектор прискорення, рівний за модулем 12 м/с^2 і вектор швидкості, утворюють кут 30^0.

Відповідь: 6 см.

22. Прискорення точки $a_n = 1$ м/с^2. Вектори прискорення і швидкості утворюють кут 45^0. Визначити швидкість, якщо радіус кривизни траєкторії $\rho = 300$ м.

Відповідь: 52,4 км/год.

23. Точка рухається колом, радіус якого $r = 200$ м, з дотичним прискоренням 2 м/с^2. Визначити кут в градусах між векторами швидкості і повного прискорення точки в момент часу, коли її швидкість $V = 10$ км/с.

Відповідь: $14{,}0^0$.

24. Точка рухається колом, радіус якого $r = 50$ м, зі швидкістю $V = 2t$. Визначити модуль повного прискорення в момент часу $t = 5$ с.

Відповідь: 2,83 м/с^2.

25. Задано рівняння руху точки за криволінійною траєкторією $s = 0{,}2t^2 + 0{,}3t$. Визначити повне прискорення точки в момент часу $t = 3$ с, якщо в цей момент радіус кривизни траєкторії $\rho = 1{,}5$ м.

Відповідь: 1,55 м/с^2.

26. Визначити швидкість точки в момент часу, коли радіус кривизни траєкторії $\rho = 5$ м, дотичне прискорення $a_\tau = 2$ м/с^2, а $\mathrm{tg}\beta = 3$, де β – кут між векторами швидкості і прискорення точки.

Відповідь: 5,48 м/с.

27. Точка рухається колом радіуса $r = 9$ м. Визначити швидкість точки в момент часу, коли дотичне прискорення $a_\tau = 2$ м/с^2, а вектор повного прискорення $\bar{a}$ утворює кут 70^0 з дотичною до траєкторії.

Відповідь: 7,03 м/с.

28. Точка рухається колом радіуса $r = 200$ м із стану спокою і сталим дотичним прискоренням $a_\tau = 1$ м/с^2. Визначити повне прискорення точки в момент часу $t = 20$ с.

Відповідь: 2,24 м/с^2.

29. Колом радіуса $r = 1$ м рухається точка відповідно рівнянню $s = 0{,}1t^3$. Визначити повне прискорення точки в момент часу $t = 2$ с.

Відповідь: 1,87 м/с^2.

30. Заданий закон руху точки за траєкторією $s = 0{,}5t^2$. Визначити кут в градусах між векторами швидкості і повного прискорення точки в момент часу $t_1 = 3$ с, коли радіус кривизни $\rho = 4$ м.

Відповідь: 66^0.

Контрольні запитання:

1. Чому дорівнює нормальне прискорення?
2. Чому дорівнює дотичне прискорення?
3. Як спрямовуються натуральне і дотичне прискорення?
4. Як визначити за модулем і напрямком повне прискорення у натуральній формі?
5. Чому дорівнюють складові прискорення у координатній формі?
6. На що вказує знак прискорення?

***Література*:**

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: изд-во Наука, 1970. – С. 155-156.
2. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 108-112.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие для втузов/ под ред. А.А Яблонского. – М.: Высшая школа, 1978. – С. 76-87.

Практичне заняття № 3

КУТОВА ШВИДКІСТЬ ТА КУТОВЕ ПРИСКОРЕННЯ

Мета роботи: навчитись визначати кінематичні характеристики при обертальному русі, визначати напрямок векторів кутової швидкісті та кутового прискорення

Основні теоретичні відомості

При обертальному русі для визначення положення тіла в довільний момент часу, необхідно знати залежність кута φ від часу *t*, тобто

$$\varphi = (t). \tag{3.1}$$

Рівняння (3.1) – закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.

Кутова швидкість ω і кутове прискорення ε є кінематичними характеристиками обертального руху твердого тіла.

Кутова швидкість характеризує зміну з часом кута повороту тіла, а її алгебраїчна величина дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}. \tag{3.2}$$

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло обернулося на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то чисельно середня кутова швидкість тіла за цей проміжок часу буде:

$$\omega_{ср} = \Delta\varphi / \Delta t. \tag{3.3}$$

Знак ω визначає напрямок обертання тіла.

Кутове прискорення характеризує зміну з часом кутової швидкості тіла, а його алгебраїчна величина дорівнює першій похідній від кутової швидкості, або другій похідній від кута повороту тіла за часом.

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\varphi}. \tag{3.4}$$

Якщо, за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість тіла змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то числове значення середнього кутового прискорення тіла за цей проміжок часу буде

$$\varepsilon_{ср} = \Delta\omega / \Delta t. \tag{3.5}$$

Якщо кутова швидкість тіла залишається увесь час руху сталою (ω=const), то обертання тіла називається **рівномірним**.

Враховуючи, що в початковий момент часу $t = 0$ кут $\varphi = \varphi_0$, після інтегрування лівої частини від φ_0 до φ, а правої від 0 до *t*, отримаємо:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t\,. \tag{3.6}$$

У техніці швидкість рівномірного обертання часто визначають кількістю обертів за хвилину.

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 0{,}1n\,; \tag{3.7}$$

де n – кількість обертів за хвилину.

Якщо кутове прискорення тіла весь час руху є сталим (ε = const), то обертання називається **рівнозмінним**.

Закон рівномірного обертання:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\,. \tag{3.8}$$

Якщо числові значення ω і ε мають однакові знаки, обертання буде **рівноприскореним**, а якщо різні – **рівносповільненим**.

Приклад рішення задачі

Точка A шківа рухається зі швидкістю V_B = 0,2 м/с, AB = 0,4 м (рис. 3.1.). Визначити кутову швидкість шківа і прискорення точки B.

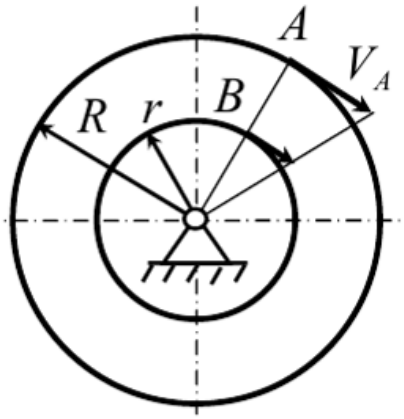

Рисунок. 3.1

Оскільки точка A і B лежать на одному радіусі, то їх швидкості перпендикулярні до цього радіуса:

$V_A = R \cdot \omega,\ V_B = (R - AB) \cdot \omega.$

отже $\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{R}{R - AB}$

звідки $R = \dfrac{V_A \cdot AB}{V_A - V_B} = 50$ см.

Обислюємо кутову швидкість шківа, знаючи швидкість точки *A* і радіус *R*:

$\omega = \dfrac{V_A}{R} = 2$ с$^{-1}$.

Оскільки кутова швидкість шківа стала величина, то точка *B* має тільки нормальне прискорення. Отже, прискорення точки *B*:

$a_B = OB \cdot 10^2 = 0{,}4$ м/с^2.

Варіанти завдань для практичної роботи № 3

1. При рівномірному обертанні махових виконує 4 обороти за секунду. За скільки секунд маховик повернеться на кут $\varphi = 24\pi$?

Відповідь: 3 с.

2. Кутова швидкість тіла змінюється відповідно закону $\omega = -8t$. Визначити кут оберту тіла в момент t = 3 с, якщо при $t_0 = 0$ кут оберту $\varphi_0 = 5$ рад.

Відповідь: -31 рад.

3. Ротор електродвигуна почав обертатися рівноприскорено, зробив за перші 5 секунд 100 оборотів. Визначити кутове прискорення ротора.

Відповідь: 50,3 с$^{-2}$.

4. Частота обертання маховика за час t_1 = 10 с зменшилася в 3 рази і стала дорівнювати 30 об/хв. Визначити кутове прискорення вала, якщо він обертається рівносповільнено.

Відповідь: -0,628 с$^{-2}$.

5. Кутова швидкість маховика змінюється відповідно до закону $\omega = \pi \cdot (6t - t^3)$. Визначити час зупинки маховика.

Відповідь: 6 с.

6. Тіло обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $\varphi = t^3 + 2$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу, коли кут оберту $\varphi = 10$ рад.

Відповідь: 12 с$^{-1}$.

7. Тіло обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $\varphi = 4 + 2t^3$ Визначити кутове прискорення тіла в момент часу, коли кутова швидкість $\omega = 6$ с$^{-1}$.

Відповідь: 12 с$^{-2}$.

8. Кутова швидкість тіла змінюється відповідно до закону $\omega = 2 - 8t^2$. Визначити час t зупинки тіла.

Відповідь: 0,5 с.

9. Кутове прискорення тіла змінюється відповідно до закону $\varepsilon = 2t$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу t = 4 с, якщо при t_0 = 0, кутова швидкість дорівнює нулю.

Відповідь: 16 с$^{-1}$.

10. Кутове прискорення тіла змінюється відповідно до закону $\varepsilon = 3t^2$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу t = 2 с, якщо при t_0 = 0, кутова швидкість $\omega_0 = 2$ с$^{-1}$.

Відповідь: 10 с$^{-1}$.

11. Тіло обертається навколо нерухомої осі, здійснює коливальний рух відповідно до закону $\varphi = \sin 0{,}5\pi t$. Визначити кутове прискорення тіла в момент часу t = 1 с.

Відповідь: -2,47 с$^{-2}$.

12. Тіло, обертаючись навколо нерухомої вісі, здійснює коливальний рух відповідно до закону $\varphi = 0{,}5\pi \sin 2\pi t$. Визначити кутову швидкість тіла в момент часу t = 0,125 с.

Відповідь: 6,98 с$^{-1}$.

13. Деталь обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $\varphi = 2\pi \cos \pi t^2$. Визначити кут φ обороту деталі в момент часу t = 2 с.

Відповідь: 6,28 рад.

14. При запуску ротор електродвигуна обертається відповідно до закону $\varphi = \pi t + \pi e^{-1}$. Визначити кутову швидкість ротора в момент часу t = 2 с.

Відповідь: 2,72 с$^{-1}$.

15. Швидкість точки тіла на відстані r = 0,2 м від осі обертання змінюється за законом $V=4t^2$. Визначити кутове прискорення даного тіла в момент часу t = 2 с.

Відповідь: 80 $с^{-2}$.

16. Маховик обертається зі сталою частотою обертання, рівною 90 об/хв. Визначити прискорення точки маховика на відстані 0,043 м від осі обертання.

Відповідь: 3,82 $с^{-2}$.

17. Тіло обертається навколо нерухомої осі відповідно до закону $\varphi = 2t^2$. Визначити нормальне прискорення точки тіла на відстані r = 0,2 м від осі обертання в момент часу t = 2 с.

Відповідь: 12,8 $м/с^2$.

18. Нормальне прискорення точки M диска, який обертається навколо нерухомої осі, дорівнює 6,4 $м/с^2$. Визначити кутову швидкість ω цього диска (рис. 3.2), якщо його радіус R = 0,4 м.

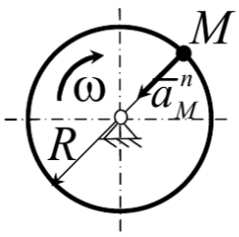

Рисунок 3.3

Відповідь: 4 $с^{-1}$.

19. Тіло обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = 2t^3$. В момент часу t = 2 с визначити дотичне прискорення токи тіла на відстані r = 0,2 м від осі обертання.

Відповідь: 4,8 $м/с^2$.

20. Кутова швидкість тіла змінюється за законом $\omega = 2t^3$. Визначити дотичне прискорення точки цього тіла на відстані r = 0,2 м від осі обертання в момент часу t = 2 с.

Відповідь: 2,4 $м/с^2$.

21. У даний момент часу ротор електродвигуна обертається з кутовою швидкістю $\omega = 3\pi$ і кутовим прискоренням $\varepsilon = \pi$. Визначити прискорення точки ротора на відстані 0,04 м від осі обертання.

Відповідь: $0{,}36\,\pi$ $м/с^2$.

22. Тіло обертається відповідно до закону $\varphi = 1 + 4t$. Визначити прискорення точки тіла на відстані r = 0,2 м від осі обертання.

Відповідь: 1,6 м/с^2.

23. Кутова швидкість тіла змінюється за законом $\varphi = 1 + t$. Визначити прискорення точки тіла на відстані r = 1 м від осі обертання в момент часу t = 1 с.

Відповідь: 1 м/с^2.

24. Махове колесо в заданий момент часу обертається з кутовим прискоренням $\varepsilon = 20\pi$, а його точка на відстані від осі обертання 5 см має прискорення $a = 8\pi$ м/с^2. Визначити нормальне прискорення вказаної точки.

Відповідь: 7,9 м/с^2.

25. Тіло починає обертатись рівноприскорено із стану спокою і в перші 2 хвилини здійснює 3600 обертів. Визначити кутове прискорення.

Відповідь: π с$^{-2}$.

26. Вал радіуса r = 10 см обертається за допомогою вантажа P, підвішеного до нього на мотузці. Рух вантажа P задано рівнянням $x = 100t^2$. Визначити кутове прискорення вала.

Відповідь: 20 с$^{-2}$.

27. Визначити кутові швидкісті секундної стрілки годинника, хвилинної стрілки годинника, а також кутову швидкість стрілки годинника.

Відповідь: 0,1047 с$^{-1}$; 0,001745 с$^{-1}$; 0,0001455 с$^{-1}$.

28. При запуску ротор електродвигуна обертається відповідно до закону $\varphi = 4\pi \sin \frac{\pi}{8} t$. Визначити кутову швидкість ротора в момент часу t = 2 с.

Відповідь: 2,22 с$^{-1}$.

29. При обертанні ротора кутова швидкість змінюється відповідно до закону $\omega = 6\pi(4t + e^{-0,01t} \sin \pi t)$. Визначити кутове прискорення при t =100 с.

Відповідь: 97,2 с$^{-2}$.

30. Вантаж піднімається за допомогою лебідки, яка обертається відповідно до закону $\varphi = 5 + 2t^2$. Визначити швидкість точки барабана в момент часу t = 2 с якщо діаметр d = 0,6 м.

Відповідь:1,8 с$^{-1}$.

Контрольні запитання:

1. Який рух твердого тіла називають обертанням навколо нерухомої осі? Що являють собою траєкторії окремих точок при такому русі?
2. Яким рівнянням задається закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
3. За якими формулами визначаються модулі кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла, що обертається?
4. Як спрямовані вектори кутової швидкості і кутового прискорення при обертанні тіла навколо нерухомої осі?
5. Наведіть формули для визначення величин швидкостей і прискорень окремих точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1970. – С. 172-174.

2. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 114-124.

Практичне заняття № 4

РІВНОМІРНИЙ І РІВНОЗМІННИЙ РУХ ТОЧКИ

Мета роботи: навчитись визначати кінематичні параметри руху точки при рівномірному та рівнозмінному поступальному русі

Основні теоретичні відомості

Рух точки називається **рівномірним**, якщо шлях, що проходить точка пропорційний часу.

У випадку **рівномірного прямолінійного** руху, коли $\bar{a}_t = 0;\ \bar{a}_n = 0;$ $V = \text{const};$ рівняння руху має вигляд:

$$s = s_0 + V \cdot t \tag{4.1}$$

При $s_0 = 0,\ s = V \cdot t$

У випадку **рівномірного криволінійного** руху, коли $\bar{a}_t = 0;\ \bar{a}_n \neq 0;$ $V = \text{const};$ рівняння швидкості має вигляд:

$$V = \frac{s - s_0}{t}. \tag{4.2}$$

При русі по дузі кола $\rho = r = \text{const}$, $a_n = \frac{V^2}{r}$;

$$V = \frac{s}{t}. \tag{4.3}$$

Рух точки називається **рівнозмінним**, якщо під час руху дотичне прискорення залишається незмінною величиною ($a_t = \text{const}$).

У випадку **нерівномірного прямолінійного** руху, коли $\bar{a}_t \neq 0;\ \bar{a}_n = 0;$ $a = a_t = \text{const}$ рівняння руху точки:

$$s = s_0 + V_0 \cdot t + \frac{at^2}{2};\ V = V_0 + at. \tag{4.4}$$

У випадку **нерівномірного криволінійного** руху, коли $\bar{a}_t \neq 0;\ \bar{a}_n = 0;$ $a = a_t = \text{const}$ рух є кривилінійним **рівнозмінним**.

Якщо $a_t > 0$, то рух **рівноприскорений**, у випадку, коли $a_t < 0$ – **рівносповільнений** рух.

Рівняння **рівнозмінного** руху незалежно від траєкторії має вигляд:

$$s = s_0 + V_0 \cdot t + \frac{a_t \cdot t^2}{2}, \tag{4.5}$$

де s_0 – початкова відстань в момент початку відліку;

V_0 – початкова швидкість.

$$V = V_0 + a_t \cdot t\,. \tag{4.6}$$

Якщо невідомі величини входять в формули (4.5) та (4.6), то використовують наступні формули:

$$s = s_0 + \frac{V + V_0}{2} \cdot t; \tag{4.7}$$

$$s = s_0 + \frac{V^2 - V_0^2}{2a_t}. \tag{4.8}$$

При $s_0 = 0$ і $V_0 = 0$ (**рівнозмінний рух зі стану спокою**) формули (4.7) та (4.8) мають такий вигляд:

$$s = \frac{a_t t^2}{2}; \tag{4.9}$$

$$s = \frac{V^2}{2a_t}. \tag{4.10}$$

Приклад рішення задачі

Точка почала рівноприскорений рух по прямій зі стану спокою і через 25 секунд її швидкість досягла 50 м/с. С цього моменту точка почала рівносповільнений шлях по дузі кола радіуса $r = 200$ м і через 20 секунд її швидкість знизилась до 10 м/с. Після цього точка продовжила свій рух з тією ж швидкістю по прямій і через 5 секунд зупинилась.

Визначити середню швидкість на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після початку її рівносповільненого руху по дузі.

Представимо траєкторію руху точки, как показано на рисунку 4.2.

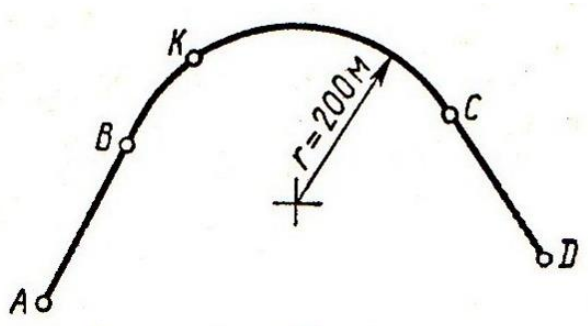

Рисунок 4.2

Весь пройдений точкою шлях розбиваємо на ділянки рівноприскореного (відрізок *AB*), рівносповільненого (по дузі *BC*) та рівномірного (відрізок *CD*) руху.

Розглянемо рух точки на відрізку *AB*:

$$V_B = V_A + a_{AB} \cdot t_{AB};\ V_A = 0;\ a_{AB} = \frac{V_B}{t_{AB}} = \frac{50}{25} = 2\ \text{м/с}^2;$$

$$S_{AB} = \frac{a_{AB} \cdot t_{AB}^2}{2} = \frac{2 \cdot 25^2}{2} = 625\ \text{м}.$$

Розглянемо рух точки по дузі *BC*:

$$V_B = 50\ \text{м/с};\ V_c = 10\ \text{м/с};\ t_{BC} = 20\ \text{с};$$

$$V_c = V_B + a_{tBC} \cdot t_{BC};$$

$$a_{tBC} = \frac{V_c - V_B}{t_{BC}} = \frac{10 - 50}{20} = -2\ \text{м/с}^2;$$

$$s_{BC} = V_B \cdot t_{BC} + \frac{a_{tBC} \cdot t_{BC}^2}{2} = 50 \cdot 20 - \frac{2 \cdot 20^2}{2} = 600\ \text{м}.$$

Розглянемо рух точки на відрізку *CD*:

$$V_c = 10\ \text{м/с};\ t_{CD} = 5\ \text{с};$$

$$s_{CD} = V_c \cdot t_{CD} = 10 \cdot 5 = 50\ \text{м}.$$

Визначимо середню швидкість точки на всьому шляху траєкторії *ABCD*

$$V_{\text{ср}} = \frac{s_{ABCD}}{t_{ABCD}};\ s_{ABCD} = s_{AB} + s_{BC} + s_{CD} = 625 + 600 + 50 = 1275\ \text{м};$$

$$t_{ABCD} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} = 25 + 20 + 5 = 50\ \text{с};$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{1275}{50} = 25{,}5\ \text{м/с}.$$

Визначимо значення повного прискорення точки після 5 секунд після початку рівносповільненого руху (точка *K* на рисунку 4.2)

$$V_B = 50\ \text{м/с};\ t_K = 5\,\text{с};\ V_K = V_B + a_{tBC} \cdot t_K = 50 - 2 \cdot 5 = 40\ \text{м/с};$$

$$a_{tBC} = -2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{V_K^2}{r} = \frac{40^2}{200} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 8{,}25 \text{ м/с}^2.$$

Варіанти завдань для практичної роботи № 4

1. Точка почала рівноприскорений рух по прямій зі стану спокою і через 5 секунд її швидкість досягла 10 м/с. С цього цього моменту точка почала шлях по дузі кола радіуса $r = 50$ м. Рухаючись по дузі точка здійснювала перші 15 секунд рівномірний рух, а потім на протязі 10 секунд рухалась рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після початку її рівномірного руху.

2. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 100$ м і через 10 секунд її швидкість досягла 20 м/с. С цього цього моменту 15 секунд точка рухалась по дузі рівномірно, а потім стала рухатись по прямій і через 5 секунд рівносповільненого руху зупинилась. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після початку її руху.

3. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 50$ м і через 20 секунд її швидкість досягла 20 м/с. С цього цього моменту точка рухалась прямолінійно, причому перші 5 секунд ріномірно, а наступні 5 секунд рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку руху.

4. Перші 5 секунд точка рухалась рівномірно дугою радіуса $r = 50$ м зі швидкістю 20 м/с. Наступні 10 секунд точка рухалась рівносповільнено тією ж дугою, знизила швидкість до 10 м/с і з цією швидкістю почала рівносповільнений прямолінійний шлях до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку рівносповільненого руху.

5. Точка, рухаючись прямолінійно і рівноприскорено зі стану спокою пройшла шлях 100 м и досягла швидкості 20 м/с. З цією швидкістю точка продовжила прямолінійний рух на протязі 5 секунд. После цього точка почала рухатись дугою кола радіусом $r = 40$ м і 20 секунд рухалась рівносповільнено до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку рівносповільненого руху дугою.

6. Точка почала рівноприскорений рух по прямій зі стану спокою і через 10 секунд її швидкість досягла 15 м/с. С цього цього моменту точка почала шлях по дузі кола радіуса $r = 50$ м. Рухаючись по дузі точка здійснювала перші 5 секунд рівномірний рух, а потім на протязі 7 секунд рухалась рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після початку її рівносповільненого руху.

7. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 60$ м і через 15 секунд її швидкість досягла 20 м/с. С цього цього моменту 10 секунд точка рухалась по дузі, а потім стала рухатись по прямій і через 5 секунд рівносповільненого руху зупинилась. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 7 секунд після початку її руху.

8. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 70$ м і через 30 секунд її швидкість досягла 25 м/с. С цього цього моменту точка рухалась прямолінійно, причому перші 10 секунд ріномірно, а наступні 15 секунд рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку руху.

9. Перші 5 секунд точка рухалась рівномірно дугою радіуса $r = 30$ м зі швидкістю 20 м/с. Наступні 7 секунд точка рухалась рівносповільнено тією ж дугою, знизила швидкість до 10 м/с і з цією швидкістю почала рівносповільнений прямолінійний шлях до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 15 секунд після її початку рівносповільненого руху.

10. Точка, рухаючись прямолінійно і рівноприскорено зі стану спокою пройшла шлях 90 м и досягла швидкості 20 м/с. З цією швидкістю точка продовжила прямолінійний рух на протязі 10 секунд. Після цього точка почала рухатись дугою кола радіусом $r = 40$ м і 15 секунд рухалась рівносповільнено до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після її початку рівносповільненого руху дугою.

11. Точка почала рівноприскорений рух по прямій зі стану спокою і через 10 секунд її швидкість досягла 12 м/с. С цього цього моменту точка почала шлях по дузі кола радіуса $r = 60$ м. Рухаючись по дузі точка здійснювала перші 10 секунд рівномірний рух, а потім на протязі 15 секунд рухалась рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після початку її рівносповільненого руху.

12. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 80$ м і через 14 секунд її швидкість досягла 20 м/с. С цього цього моменту 15 секунд точка рухалась по дузі, а потім стала рухатись по прямій і через 12 секунд рівносповільненого руху зупинилась. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 20 секунд після початку її руху.

13. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 70$ м і через 10 секунд її швидкість досягла 15 м/с. С цього цього моменту точка рухалась прямолінійно, причому перші 8 секунд ріномірно, а наступні 8 секунд рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 20 секунд після її початку руху.

14. Перші 15 секунд точка рухалась рівномірно дугою радіуса $r = 50$ м зі швидкістю 16 м/с. Наступні 10 секунд точка рухалась рівносповільнено тією ж дугою, знизила швидкість до 8 м/с і з цією швидкістю почала рівносповільнений прямолінійний шлях до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 12 секунд після її початку рівносповільненого руху.

15. Точка, рухаючись прямолінійно і рівноприскорено зі стану спокою пройшла шлях 85 м и досягла швидкості 18 м/с. З цією швидкістю точка продовжила прямолінійний рух на протязі 8 секунд. Після цього точка почала рухатись дугою кола радіусом $r = 50$ м і 15 секунд рухалась рівносповільнено до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку рівносповільненого руху дугою.

16. Точка почала рівноприскорений рух по прямій зі стану спокою і через 7 секунд її швидкість досягла 14 м/с. С цього цього моменту точка почала шлях по дузі кола радіуса $r = 30$ м. Рухаючись по дузі точка здійснювала перші 20 секунд рівномірний рух, а потім на протязі 10 секунд рухалась рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 15 секунд після початку її рівносповільненого руху.

17. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 90$ м і через 12 секунд її швидкість досягла 22 м/с. С цього цього моменту 12 секунд точка рухалась по дузі, а потім стала рухатись по прямій і через 8 секунд рівносповільненого руху зупинилась. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після початку її руху.

18. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 70$ м і через 18 секунд її швидкість досягла 24 м/с. С цього цього моменту точка рухалась прямолінійно, причому перші 8 секунд рівномірно, а наступні 7 секунд рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 20 секунд після її початку руху.

19. Перші 5 секунд точка рухалась рівномірно дугою радіуса $r = 40$ м зі швидкістю 24 м/с. Наступні 12 секунд точка рухалась рівносповільнено тією ж дугою, знизила швидкість до 18 м/с і з цією швидкістю почала рівносповільнений прямолінійний шлях до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 14 секунд після її початку рівносповільненого руху.

20. Точка, рухаючись прямолінійно і рівноприскорено зі стану спокою пройшла шлях 80 м и досягла швидкості 18 м/с. З цією швидкістю точка продовжила прямолінійний рух на протязі 15 секунд. Після цього точка почала рухатись дугою кола радіусом $r = 30$ м і 20 секунд рухалась рівносповільнено до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку рівносповільненого руху дугою.

21. Точка почала рівноприскорений рух по прямій зі стану спокою і через 7 секунд її швидкість досягла 10 м/с. С цього цього моменту точка почала шлях по дузі кола радіуса $r = 40$ м. Рухаючись по дузі точка здійснювала перші 15 секунд рівномірний рух, а потім на протязі 10 секунд рухалась рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після початку її рівномірного руху.

22. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 90$ м і через 10 секунд її швидкість досягла 20 м/с. С цього цього моменту 15 секунд точка рухалась по дузі рівномірно, а потім стала рухатись по прямій і через 5 секунд рівносповільненого руху зупинилась. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 6 секунд після початку її руху.

23. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 45$ м і через 20 секунд її швидкість досягла 22 м/с. С цього цього моменту точка рухалась прямолінійно, причому перші 6 секунд ріномірно, а наступні 6 секунд рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку руху.

24. Перші 8 секунд точка рухалась рівномірно дугою радіуса $r = 50$ м зі швидкістю 16 м/с. Наступні 10 секунд точка рухалась рівносповільнено тією ж дугою, знизила швидкість до 10 м/с і з цією швидкістю почала рівносповільнений прямолінійний шлях до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку рівносповільненого руху.

25. Точка, рухаючись прямолінійно і рівноприскорено зі стану спокою пройшла шлях 110 м и досягла швидкості 24 м/с. З цією швидкістю точка продовжила прямолінійний рух на протязі 5 секунд. Після цього точка почала рухатись дугою кола радіусом $r = 40$ м і 20 секунд рухалась рівносповільнено до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку рівносповільненого руху дугою.

26. Точка почала рівноприскорений рух по прямій зі стану спокою і через 12 секунд її швидкість досягла 15 м/с. С цього цього моменту точка почала шлях по дузі кола радіуса $r = 30$ м. Рухаючись по дузі точка здійснювала перші 5 секунд рівномірний рух, а потім на протязі 7 секунд рухалась рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після початку її рівносповільненого руху.

27. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 50$ м і через 15 секунд її швидкість досягла 15 м/с. С цього цього моменту 10 секунд точка рухалась по дузі, а потім стала рухатись по прямій і через 5 секунд рівносповільненого руху зупинилась. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 7 секунд після початку її руху.

28. Точка почала рівноприскорений рух зі стану спокою по дузі кола радіуса $r = 65$ м і через 25 секунд її швидкість досягла 23 м/с. С цього цього моменту точка рухалась прямолінійно, причому перші 10 секунд ріномірно, а наступні 15 секунд рівносповільнено до зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 10 секунд після її початку руху.

29. Перші 7 секунд точка рухалась рівномірно дугою радіуса $r = 30$ м зі швидкістю 17 м/с. Наступні 8 секунд точка рухалась рівносповільнено тією ж дугою, знизила швидкість до 10 м/с і з цією швидкістю почала рівносповільнений прямолінійний шлях до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після її початку рівносповільненого руху.

30. Точка, рухаючись прямолінійно і рівноприскорено зі стану спокою пройшла шлях 105 м и досягла швидкості 20 м/с. З цією швидкістю точка продовжила прямолінійний рух на протязі 10 секунд. После цього точка почала рухатись дугою кола радіусом $r = 40$ м і 13 секунд рухалась рівносповільнено до повної зупинки. Визначити середню швидкість точки на всьому шляху; повне прискорення точки через 5 секунд після її початку рівносповільненого руху дугою.

Контрольні запитання:

1. Який рух точки вздовж довільної траєкторії називають рівномірним, рівноприскореним, рівносповільненим?
2. Що означає в загальному випадку наявність чи відсутність нормального прискорення точки?
3. Наведіть формулу для визначення закону руху для ріномірного і рівнозміного руху.

***Література*:**

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1970. – С. 174-175.
2. Покровский В.Е., Столярчук А.И. Техническая механика: Методические указания и контрольные задания для учащихся-заочников машиностроительных специальностей техникумов. – М.: Высш. шк., 1990. – С. 21-22, 25-33.
3. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 108-110.

Практичне заняття № 5

ШВИДКІСТЬ І ПРИСКОРЕННЯ ТОЧОК ТІЛА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Мета роботи: навчитись визначати швидкість і прискорення точок тіла при рівномірному та рівнозмінному обертанні

Основні теоретичні відомості

При обертальному русі тіла усі його точки рухаються по колах, центри яких розташовані на осі обертання тіла (рис. 5.1).

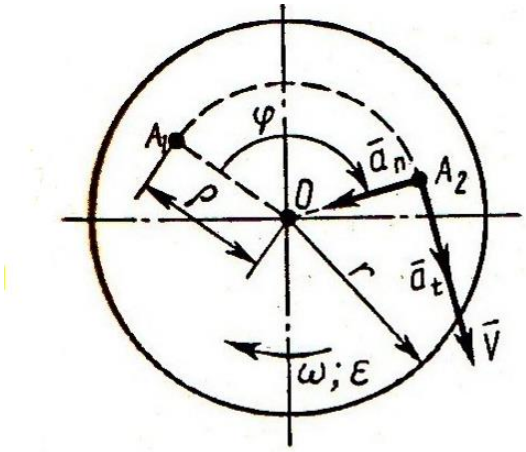

Рисунок 5.1

$$\varphi = 2\pi \cdot \varphi_{об}; \tag{5.1}$$

де φ – кут обертання тіла.

$$\varphi_{об} = \frac{\varphi}{2\pi}, \tag{5.2}$$

де $\varphi_{об}$ – число оборотів.

$$s = r \cdot \varphi; \tag{5.3}$$

де s – відстань, пройдена точкою по дузі кола $(\cup A_1 A_2 = s,$ (рис. 5.1));

φ – кут повороту тіла, рад;

r – відстань точки до осі обертання тіла.

$$V = r \cdot \omega; \tag{5.4}$$

де V – окружна швидкість точки в даний момент часу

$$a_t = r \cdot \varepsilon. \tag{5.5}$$

$$a_n = \omega^2 \cdot r. \tag{5.6}$$

Рівномірним обертальним рухом називається такий рух, при якому кут обертання тіла φ змінюється пропорційно з часом.

При **рівномірному обертанні**

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{5.7}$$

При $\varphi_0 = 0$

$$\varphi = \omega t; \tag{5.8}$$

$$\omega = \varphi / t. \tag{5.9}$$

Рівнозмінним обертальним рухом називається такий рух, при якому кутове прискорення залишається незмінною величиною ($\varepsilon = \text{const}$).

При **рівнозмінному обертанні** тіла ($\varepsilon > 0$ – рівноприскорене обертання; $\varepsilon < 0$ – рівносповільнене обертання):

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \tag{5.10}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{5.11}$$

Для зручності рішення завдань з рівнянь (5.10) і (5.11) отримуємо:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega + \omega_0}{2} t; \tag{5.12}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \tag{5.13}$$

Для випадку **рівнозмінного обертання**, що почалося **зі стану спокою** (при $\varphi_0 = 0$ і $\omega_0 = 0$), формули (5.12) і (5.13) мають вигляд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}; \tag{5.14}$$

$$\varphi = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}. \tag{5.15}$$

Приклад рішення задачі

Тіло почало обертатися зі стану спокою і через 15 секунд його кутова швидкість досягла 30 $с^{-1}$. З цією кутовою швидкістю тіло оберталося 10 секунд рівномірно, а потім стало обертатися рівносповільнено на протязі 5 секунд до повної зупинки.

Визначити: число оборотів і середню кутову швидкість точок тіла через 5 секунд після початку руху; повне прискорення точки після 10 секунд після початку її рівносповільненого руху по колу.

Розділемо обертальний рух тіла на ділянки рівноприскореного, рівномірного і рівносповільного руху. Визначимо параметри обертального руху тіла на цих ділянках.

Рівноприскорене обертання (ділянка I):

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_1}{t_1} = \frac{30}{15} = 2 \text{ с}^{-2};$$

$$\varphi_1 = \frac{\varepsilon_1 \cdot t_1^2}{2} = \frac{2 \cdot 15^2}{2} = 225 \text{ рад};$$

$$\varphi_{об1} = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{225}{6{,}28} = 3{,}58 \text{ об.}$$

Рівномірне обертання (ділянка II):

$$\omega_{II} = \omega_1; \varphi_{II} = \omega_{II} \cdot t_{II} = 30 \cdot 10 = 300 \text{ рад};$$

$$\varphi_{обII} = \frac{\varphi_{II}}{2\pi} = \frac{300}{6{,}28} = 47{,}7 \text{ об.}$$

Рівносповінене обертання (ділянка III):

$$\omega_{III} = \omega_{II} = \omega_I;$$

$$\varepsilon_{III} = -\frac{\omega_{III}}{t_{III}} = -\frac{30}{5} = -6 \text{ с}^{-2};$$

$$\varphi_{III} = \omega_{III} \cdot t_{III} + \frac{\varepsilon_{III} \cdot t_{III}^2}{2} = 30 \cdot 5 - \frac{6 \cdot 25}{2} = 75 \text{ рад};$$

$$\varphi_{обIII} = \frac{\varphi_{III}}{2\pi} = \frac{75}{6{,}28} = 11{,}9 \text{ об.}$$

Визначимо повне число оборотів тіла за весь час обертання:

$$\varphi_{обI} + \varphi_{обII} + \varphi_{обIII} = 35{,}8 + 47{,}7 + 11{,}9 = 95{,}4 \text{ об.}$$

Визначимо середню кутову швидкість тіла за весь час обертання:

$$\omega_{ср} = \frac{\varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III}}{t_I + t_{II} + t_{III}} = \frac{225 + 300 + 75}{15 + 10 + 5} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Визначимо колову швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 0{,}5$ м від осі обертання через 5 секунд після початку руху тіла:

$$\omega_5 = \varepsilon_1 \cdot t_5 = 2 \cdot 5 = 10 \text{ с}^{-1};$$

$$V_5 = \omega_5 \cdot r = 10 \cdot 0{,}5 = 5 \text{ м/с.}$$

Варіанти завдань для практичної роботи № 5

1. Шків діаметром $d = 400$ мм на протязі 10 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 8$ с$^{-1}$. Потім став обертатися рівноприскорено і через 12 секунд рівноприскореного обертання його кутова швидкість досягла $\omega_1 = 14$ с$^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на ободі шківа, через 6 секунд після початку рівноприскореного руху.

2. Вал діаметром $d = 500$ мм протягом 5 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 20$ с$^{-1}$, після чого став уповільнювати своє обертання з постійним кутовим прискоренням. Через 10 секунд після початку рівносповільненого обертання кутова швидкість валу стала $\omega_1 = 10$ с$^{-1}$. Визначитичисло оборотів і середню кутову швидкість валу за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні валу, через 4 секунди після початку рівносповільного обертання.

3. Тіло, уповільнюючи обертання з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2$ с$^{-2}$ через 14 секунд зменьшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 12$ с$^{-1}$, після чого оберталося рівномірно з цією кутовою швидкістю протягом 10 секунд. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1$ м від його осі обертання за 4 секунд до початку рівномірного обертання.

4. Ротор діаметром $d = 200$ мм почав обертання із стану спокою з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 4$ с$^{-2}$ і через деякий час досяг кутової швидкості $\omega = 40$ с$^{-1}$, після чого з цією кутовою швидкістю зробив 510 оборотів. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 8 секунд після початку обертання.

5. Двигун, ротор якого обертався з частотою 430 об/хв, був відключений від джерела живлення і через 40 секунд знову підключений до джерела струму. За цей час при рівносповільненому обертанні ротора його кутова швидкість знизилася

до 5 $с^{-1}$. Після подачі електроенергії ротор двигуна, обертаючись рівноприскорено, через 10 секунд знову набув частоту обертання 430 об/хв. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час рівносповільненого і рівноприскореного обертання ротор двигуна; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 30 секунд після відключення джерела струму, якщо діаметр ротора $d = 200$ мм.

6. Шків діаметром $d = 200$ мм на протязі 10 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 8$ $с^{-1}$. Потім став обертатися рівноприскорено і через 12 секунд рівноприскореного обертання його кутова швидкість досягла $\omega_1 = 12$ $с^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на ободі шківа, через 8 секунд після початку рівноприскореного руху.

7. Вал діаметром $d = 300$ мм протягом 5 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 16$ $с^{-1}$, після чого став уповільнювати своє обертання з постійним кутовим прискоренням. Через 10 секунд після початку рівносповільненого обертання кутова швидкість валу стала $\omega_1 = 10$ $с^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість валу за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні валу, через 4 секунди після початку рівносповільного обертання.

8. Тіло, уповільнюючи обертання з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 4$ $с^{-2}$ через 10 секунд зменшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 10$ $с^{-1}$, після чого оберталося рівномірно з цією кутовою швидкістю протягом 12 секунд. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1$ м від його осі обертання за 4 секунд до початку рівномірного обертання.

9. Ротор діаметром $d = 250$ мм почав обертання із стану спокою з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 6$ $с^{-2}$ і через деякий час досяг кутової швидкості $\omega = 30$ $с^{-1}$, після чого з цією кутовою швидкістю зробив 500 оборотів. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну

швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 10 секунд після початку обертання.

10. Двигун, ротор якого обертався з частотою 400 об/хв, був відключений від джерела живлення і через 30 секунд знову підключений до джерела струму. За цей час при рівносповільненому обертанні ротора його кутова швидкість знизилася до 5 $с^{-1}$. Після подачі електроенергії ротор двигуна, обертаючись рівноприскорено, через 10 секунд знову набув частоту обертання 400 об/хв. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час рівносповільненого і рівноприскореного обертання ротор двигуна; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 30 секунд після відключення джерела струму, якщо діаметр ротора $d = 250$ мм.

11. Шків діаметром $d = 350$ мм на протязі 12 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 8$ $с^{-1}$. Потім став обертатися рівноприскорено і через 10 секунд рівноприскореного обертання його кутова швидкість досягла $\omega_1 = 12$ $с^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на ободі шківа, через 6 секунд після початку рівноприскореного руху.

12. Вал діаметром $d = 350$ мм протягом 8 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 18$ $с^{-1}$, після чого став уповільнювати своє обертання з постійним кутовим прискоренням. Через 10 секунд після початку рівносповільненого обертання кутова швидкість валу стала $\omega_1 = 10$ $с^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість валу за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні валу, через 4 секунди після початку рівносповільного обертання.

13. Тіло, уповільнюючи обертання з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 5$ $с^{-2}$ через 10 секунд зменьшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 13$ $с^{-1}$, після чого оберталося рівномірно з цією кутовою швидкістю протягом 14 секунд. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час

обертання; окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1$ м від його осі обертання за 9 секунд до початку рівномірного обертання.

14. Ротор діаметром $d = 170$ мм почав обертання із стану спокою з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 4$ с$^{-2}$ і через деякий час досяг кутової швидкості $\omega = 28$ с$^{-1}$, після чого з цією кутовою швидкістю зробив 290 оборотів. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 10 секунд після початку обертання.

15. Двигун, ротор якого обертався з частотою 310 об/хв, був відключений від джерела живлення і через 35 секунд знову підключений до джерела струму. За цей час при рівносповільненому обертанні ротора його кутова швидкість знизилася до 10 с$^{-1}$. Після подачі електроенергії ротор двигуна, обертаючись рівноприскорено, через 12 секунд знову набув частоту обертання 310 об/хв. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час рівносповільненого і рівноприскореного обертання ротор двигуна; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 35 секунд після відключення джерела струму, якщо діаметр ротора $d = 200$ мм.

16. Шків діаметром $d = 270$ мм на протязі 10 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 12$ с$^{-1}$. Потім став обертатися рівноприскорено і через 10 секунд рівноприскореного обертання його кутова швидкість досягла $\omega_1 = 15$ с$^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на ободі шківа, через 5 секунд після початку рівноприскореного руху.

17. Вал діаметром $d = 280$ мм протягом 5 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 18$ с$^{-1}$, після чого став уповільнювати своє обертання з постійним кутовим прискоренням. Через 10 секунд після початку рівносповільненого обертання кутова швидкість валу стала $\omega_1 = 10$ с$^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість валу за весь час обертання; окружну

швидкість точок, розташованих на поверхні валу, через 8 секунд після початку рівносповільного обертання.

18. Тіло, уповільнюючи обертання з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2$ с$^{-2}$ через 12 секунд зменьшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 10$ с$^{-1}$, після чого оберталося рівномірно з цією кутовою швидкістю протягом 15 секунд. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1$ м від його осі обертання за 6 секунд до початку рівномірного обертання.

19. Ротор діаметром $d = 380$ мм почав обертання із стану спокою з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 6$ с$^{-2}$ і через деякий час досяг кутової швидкості $\omega = 45$ с$^{-1}$, після чого з цією кутовою швидкістю зробив 560 оборотів. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 10 секунд після початку обертання.

20. Двигун, ротор якого обертався з частотою 450 об/хв, був відключений від джерела живлення і через 60 секунд знову підключений до джерела струму. За цей час при рівносповільненому обертанні ротора його кутова швидкість знизилася до 9 с$^{-1}$. Після подачі електроенергії ротор двигуна, обертаючись рівноприскорено, через 15 секунд знову набув частоту обертання 450 об/хв. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час рівносповільненого і рівноприскореного обертання ротор двигуна; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 30 секунд після відключення джерела струму, якщо діаметр ротора $d = 200$ мм.

21. Шків діаметром $d = 420$ мм на протязі 15 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 8$ с$^{-1}$. Потім став обертатися рівноприскорено і через 10 секунд рівноприскореного обертання його кутова швидкість досягла $\omega_1 = 14$ с$^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на ободі шківа, через 6 секунд після початку рівноприскореного руху.

22. Вал діаметром $d = 500$ мм протягом 8 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 20$ с$^{-1}$, після чого став уповільнювати своє обертання з постійним кутовим прискоренням. Через 10 секунд після початку рівносповільненого обертання кутова швидкість валу стала $\omega_1 = 10$ с$^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість валу за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні валу, через 4 секунди після початку рівносповільного обертання.

23. Тіло, уповільнюючи обертання з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 3$ с$^{-2}$ через 8 секунд зменьшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 12$ с$^{-1}$, після чого оберталося рівномірно з цією кутовою швидкістю протягом 15 секунд. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1$ м від його осі обертання за 9 секунд до початку рівномірного обертання.

24. Ротор діаметром $d = 180$ мм почав обертання із стану спокою з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 3$ с$^{-2}$ і через деякий час досяг кутової швидкості $\omega = 30$ с$^{-1}$, після чого з цією кутовою швидкістю зробив 320 оборотів. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 10 секунд після початку обертання.

25. Двигун, ротор якого обертався з частотою 320 об/хв, був відключений від джерела живлення і через 45 секунд знову підключений до джерела струму. За цей час при рівносповільненому обертанні ротора його кутова швидкість знизилася до 8 с$^{-1}$. Після подачі електроенергії ротор двигуна, обертаючись рівноприскорено, через 10 секунд знову набув частоту обертання 320 об/хв. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час рівносповільненого і рівноприскореного обертання ротор двигуна; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 30 секунд після відключення джерела струму, якщо діаметр ротора $d = 200$ мм.

26. Шків діаметром $d = 240$ мм на протязі 10 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 8$ с$^{-1}$. Потім став обертатися рівноприскорено і через 13 секунд рівноприскореного обертання його кутова швидкість досягла $\omega_1 = 14$ с$^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на ободі шківа, через 5 секунд після початку рівноприскореного руху.

27. Вал діаметром $d = 260$ мм протягом 5 секунд обертався з постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 20$ с$^{-1}$, після чого став уповільнювати своє обертання з постійним кутовим прискоренням. Через 10 секунд після початку рівносповільненого обертання кутова швидкість валу стала $\omega_1 = 13$ с$^{-1}$. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість валу за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні валу, через 8 секунд після початку рівносповільного обертання.

28. Тіло, уповільнюючи обертання з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 3$ с$^{-2}$ через 12 секунд зменьшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 10$ с$^{-1}$, після чого оберталося рівномірно з цією кутовою швидкістю протягом 15 секунд. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1$ м від його осі обертання за 6 секунд до початку рівномірного обертання.

29. Ротор діаметром $d = 350$ мм почав обертання із стану спокою з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 6$ с$^{-2}$ і через деякий час досяг кутової швидкості $\omega = 45$ с$^{-1}$, після чого з цією кутовою швидкістю зробив 620 оборотів. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час обертання; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 10 секунд після початку обертання.

30. Двигун, ротор якого обертався з частотою 440 об/хв, був відключений від джерела живлення і через 40 секунд знову підключений до джерела струму. За цей час при рівносповільненому обертанні ротора його кутова швидкість знизилася до 9 с$^{-1}$. Після подачі електроенергії ротор двигуна, обертаючись рівноприскорено,

через 15 секунд знову набув частоту обертання 440 об/хв. Визначити число оборотів і середню кутову швидкість за весь час рівносповільненого і рівноприскореного обертання ротор двигуна; окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 30 секунд після відключення джерела струму, якщо діаметр ротора d = 220 мм.

Контрольні запитання:

1. Який обертальний рух називається рівномірним?
2. Який обертальний рух називається рівнозмінним?
3. Наведіть формули для визначення кутової швидкості при рівномірному та рівнозмінному обертанні.

Література:

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1965. – С. 230-240.
2. Покровский В.Е., Столярчук А.И. Техническая механика: Методические указания и контрольные задания для учащихся-заочников машиностроительных специальностей техникумов. – М.: Высш. шк., 1990. – С. 21-22, 25-33.

Практичне заняття № 6

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ ПОСТУПАЛЬНОГО РУХУ ТІЛА

Мета роботи: навчитись визначати кінематичні характеристики при поступальному русі твердого тіла, визначати напрямок кутової швидкості та кутового прискорення

Основні теоретичні відомості

Для будь-якого виду руху твердого тіла має місце теорема Ф. Грасгофа: проекції швидкостей двох довільних точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки, завжди рівні між собою.

Рух тіла називається **поступальним**, якщо будь-яка пряма, проведена в тілі, переміщується паралельно самій собі, тобто не повертається відносно свого початкового напряму.

Властивості поступального руху визначаються такою теоремою: при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують геометрично однакові траєкторії і в кожний момент часу мають однакові за модулем і напрямом швидкості і прискорення.

Від поступального руху тіла потрібно відрізняти так званий **миттєво-поступальний рух**, при якому в певний момент часу швидкості точок тіла стають векторно рівними між собою, але при цьому прискорення – векторно різні.

Приклад рішення задачі

У механізмі, зображеному на рис. 6.1, обертання колеса 3 радіуса R_3 передається на двоступінчасте колесо 2 радіуса R_2 за допомогою пасової передачі; вантаж 1 прив'язаний до кінця нитки, намотаної на ступінь меншого діаметра r_2 колеса 2.

Відомий закон руху колеса 3: $\varphi_3(t) = 4\sin\dfrac{\pi}{2}t$, $R_2 = R_3 = 0{,}1$ м, $r_2 = 0{,}5R_2 = 0{,}5$ м.

Визначити для заданого моменту часу t = 0,5 с:

- кутові швидкості і прискорення коліс 2 і 3;
- швидкості та прискорення тіла 1 і точки *M*;

– показати на рисунку вектори $\overline{\omega}_3$, $\overline{\varepsilon}_3$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\varepsilon}_2$, $\overline{a}_{\text{M}}$, $\overline{V}_M$, $\overline{V}_1$, $\overline{a}_1$;

– закон поступального руху тіла 1 $z_1(t)$

За вихідними даними викреслюємо задану схему механізму (рис. 6.1).

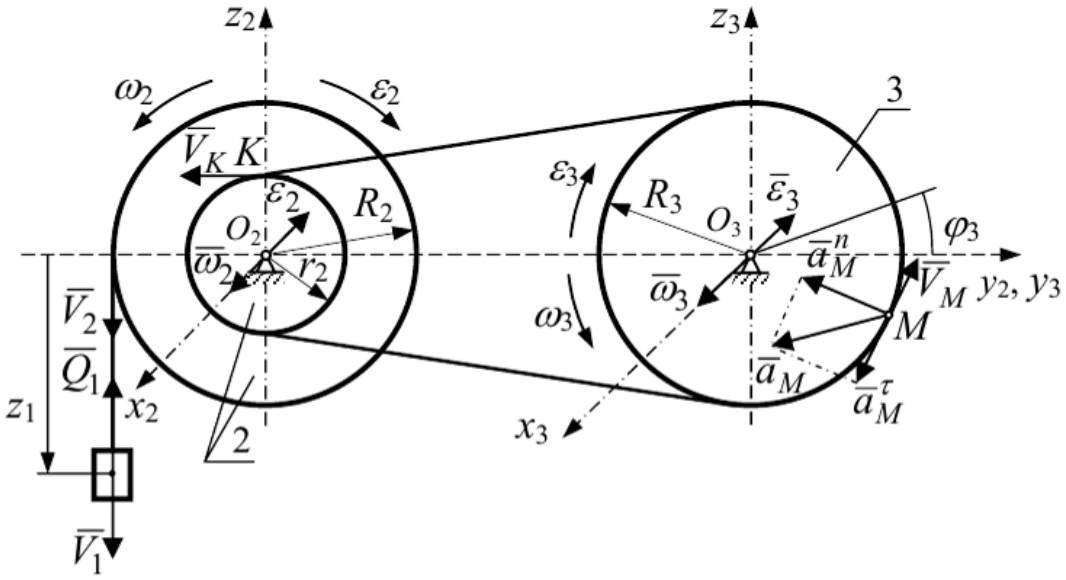

Рисунок 6.1

Кутові швидкість та прискорення колеса 3

$$\omega_3 = \frac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}_3 = 2\pi\cos\frac{\pi}{2}t;$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = -\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t.$$

При t = 0,5 с $\omega_3 = 2\pi\cos(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5) = 1{,}414\pi$ с$^{-1}$;

$$\varepsilon_3 = -\pi^2 \sin(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5) = -0{,}707\pi^2 \text{ с}^{-2}.$$

Швидкість та прискорення точки M:

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = 1{,}414\pi \cdot 0{,}1 = 0{,}1414\pi \text{ м/с};$$

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = (1{,}414\pi)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2\pi^2 \text{ м/с};$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = R_3\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2};$$

$$a_M = 0{,}1\sqrt{(1{,}414\pi)^4 + (-0{,}707\pi^2)^2} = 0{,}212\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Через те, що швидкості на ободах коліс 2 і 3 на пасовій передачі однакові, то V_{K}=V_{M}, $V_K = \omega_2 r_2$ і $V_{\text{K}} = \omega_3 R_3$. Звідси кутова швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{R_3}{r_2}\cdot\omega_3 = \frac{0{,}1}{0{,}05}2\pi\cos\frac{\pi}{2}t = 4\pi\cos\frac{\pi}{2}t.$$

Кутове прискорення тіла 2

$$\varepsilon_2 = \omega_2 = -2\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t.$$

При t = 0,5 с $\omega_2 = 4\pi\cos(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5) = 2{,}828\pi$ с$^{-1}$;

$$\varepsilon_2 = -2\pi^2 \sin(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5) = -1{,}414\pi^2 \text{ с}^{-2}$$

Швидкість на зовнішньому ободі колеса 2 дорівнює швидкості тіла 1

$$V_1 = V_2 = \omega_2 \cdot R_2 = 4\pi\cos\frac{\pi}{2}t \cdot 0{,}1 = 0{,}4\pi\cos\frac{\pi}{2}t.$$

Прискорення тіла 1:

$a_1 = a_2^{\tau} = V_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2$; $a_1 = -0{,}2\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t.$

При t = 0,5 с $V_1 = 0{,}4\pi\cos(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5) = 0{,}2828\pi$ м/с;

$$a_1 = -0{,}2\pi^2 \sin(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5) = -0{,}1414\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Закон поступального руху тіла 1

Через те, що $V_1 = \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}$, то $\mathrm{d}z_1 = V_1\mathrm{d}t$

$$z_1 = \int_0^t V_1\mathrm{d}t = \int_0^t (0{,}4\pi\cos\frac{\pi}{2}t)\cdot\mathrm{d}t = 0{,}8\sin\frac{\pi}{2}t \text{ м.}$$

Вектори швидкостей та прискорень тіла 1 і точки *M*, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2 і 3 наведено на рис. 6.1.

Вектори кутових швидкостей $\overline{\omega_2}$ і $\overline{\omega_3}$ лежать на осях обертання (відповідно на осях x_2 і x_3) і спрямовані в ту сторону, звідки обертання тіла бачимо як таке, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (правило гвинта).

Вектори кутових прискорень $\overline{\varepsilon_2}$ і $\overline{\varepsilon_3}$ співпадають з напрямками векторів кутових швидкостей $\overline{\omega_2}$ і $\overline{\omega_3}$ при обертаннях з прискоренням, тобто якщо знаки ω і ε співпадають.

Варіанти завдань для практичної роботи № 6

Схеми механізмів для виконання практичної роботи № 6 наведені на рис. 6.3, вихідні дані в табл. 6.1.

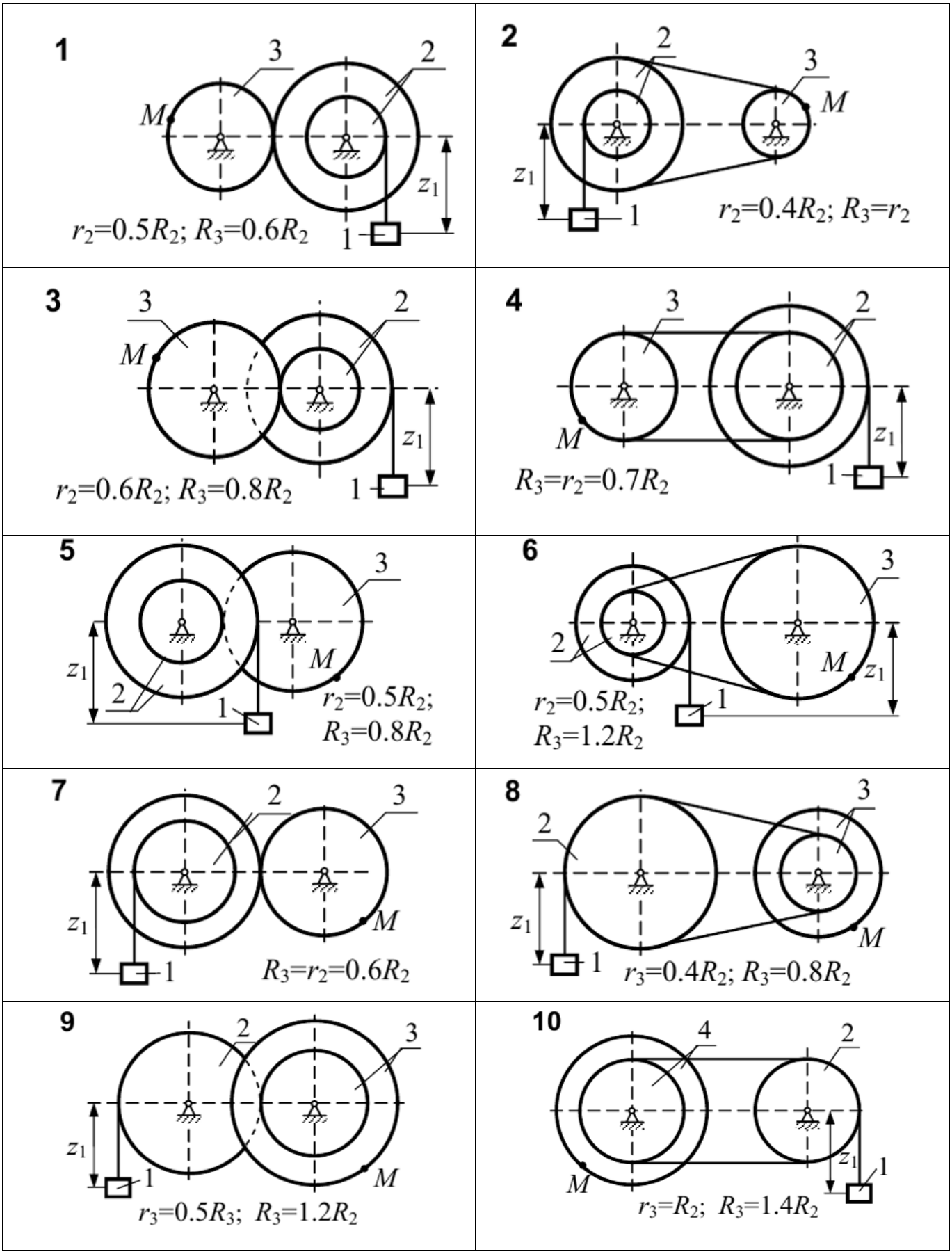
1
3
2
M
z_1
$r_2=0.5R_2$; $R_3=0.6R_2$
1
2
2
3
M
z_1
1
$r_2=0.4R_2$; $R_3=r_2$
3
3
2
M
z_1
$r_2=0.6R_2$; $R_3=0.8R_2$
1
4
3
2
M
z_1
$R_3=r_2=0.7R_2$
1
5
3
z_1
M
2
1
$r_2=0.5R_2$;
$R_3=0.8R_2$
6
3
2
M
z_1
$r_2=0.5R_2$;
1
$R_3=1.2R_2$
7
2
3
z_1
M
1
$R_3=r_2=0.6R_2$
8
3
2
z_1
M
1
$r_3=0.4R_2$; $R_3=0.8R_2$
9
2
3
z_1
1
M
$r_3=0.5R_3$; $R_3=1.2R_2$
10
4
2
M
z_1
1
$r_3=R_2$; $R_3=1.4R_2$

Рисунок 6.3, а

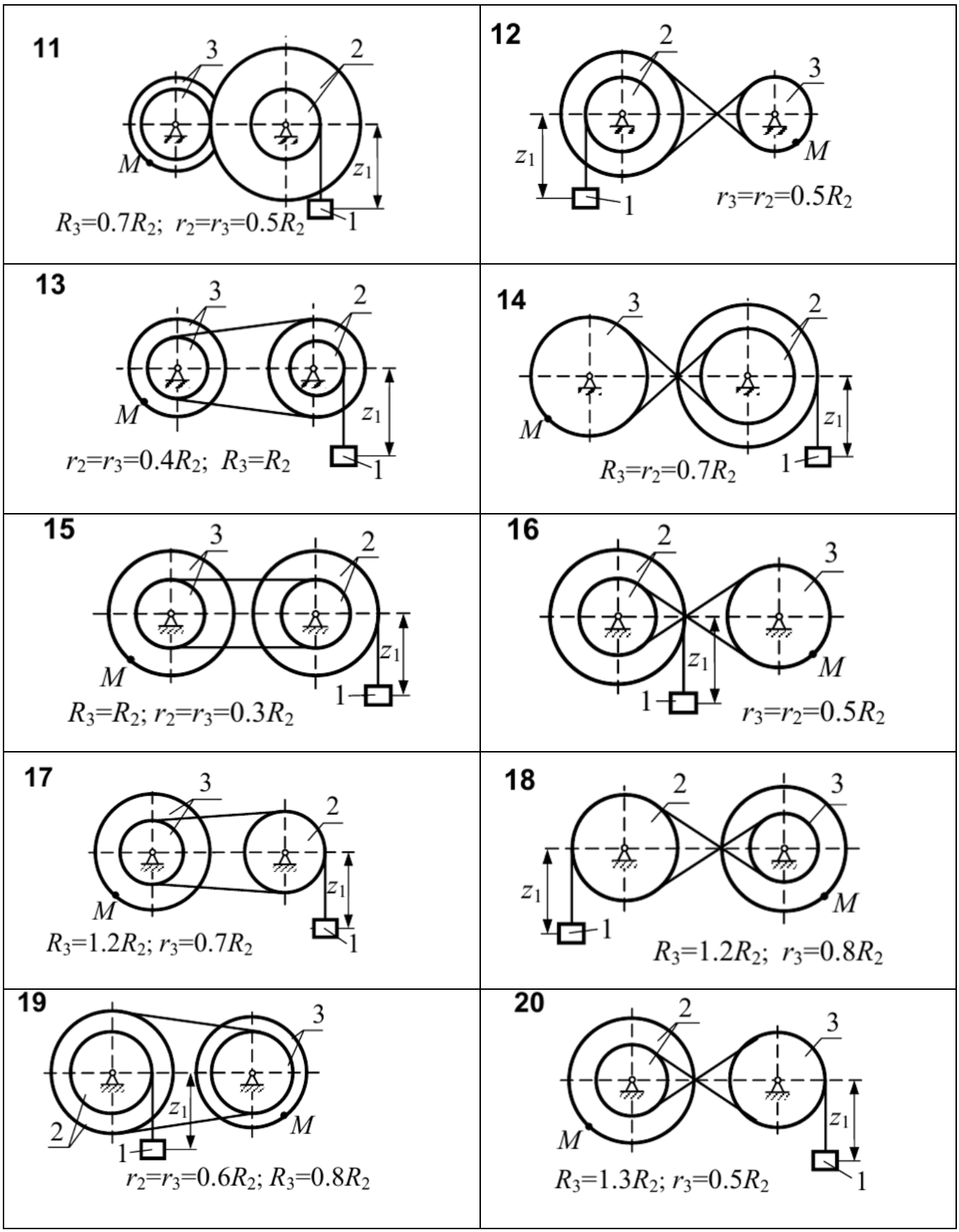
11
3
2
M
z_1
1
$R_3=0.7R_2$; $r_2=r_3=0.5R_2$
12
2
3
z_1
M
1
$r_3=r_2=0.5R_2$
13
3
2
M
z_1
1
$r_2=r_3=0.4R_2$; $R_3=R_2$
14
3
2
M
z_1
1
$R_3=r_2=0.7R_2$
15
3
2
M
z_1
1
$R_3=R_2$; $r_2=r_3=0.3R_2$
16
2
3
z_1
M
1
$r_3=r_2=0.5R_2$
17
3
2
M
z_1
1
$R_3=1.2R_2$; $r_3=0.7R_2$
18
2
3
z_1
M
1
$R_3=1.2R_2$; $r_3=0.8R_2$
19
3
z_1
2
M
1
$r_2=r_3=0.6R_2$; $R_3=0.8R_2$
20
2
3
M
z_1
1
$R_3=1.3R_2$; $r_3=0.5R_2$

Рисунок 6.3, б

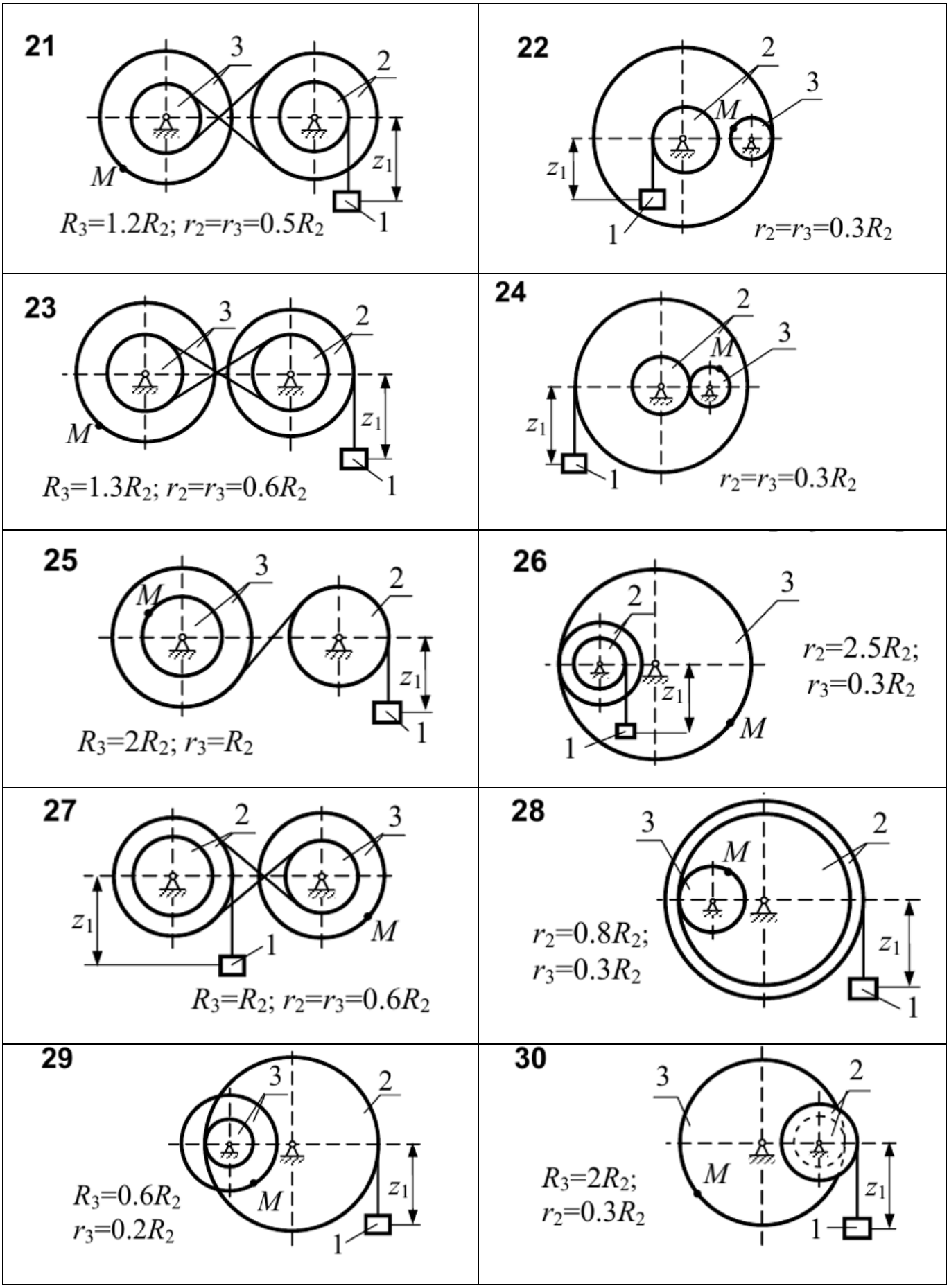
21
3
2
M
z_1
1
$R_3=1.2R_2$; $r_2=r_3=0.5R_2$
22
2
3
M
z_1
1
$r_2=r_3=0.3R_2$
23
3
2
M
z_1
1
$R_3=1.3R_2$; $r_2=r_3=0.6R_2$
24
2
3
M
z_1
1
$r_2=r_3=0.3R_2$
25
3
M
2
z_1
1
$R_3=2R_2$; $r_3=R_2$
26
3
2
z_1
1
M
$r_2=2.5R_2$;
$r_3=0.3R_2$
27
2
3
z_1
1
M
$R_3=R_2$; $r_2=r_3=0.6R_2$
28
3
2
M
z_1
1
$r_2=0.8R_2$;
$r_3=0.3R_2$
29
3
2
$R_3=0.6R_2$
$r_3=0.2R_2$
M
z_1
1
30
3
2
M
z_1
1
$R_3=2R_2$;
$r_2=0.3R_2$

Рисунок 6.3, в

Таблиця 6.1 Вихідні дані для виконання практичної роботи № 6

варіант	$\varphi_3(t)$, рад	R_2, м	Час	
			t_1	t_2
1	$10t - 0{,}1t^2$	0,2	2	1
2	$0{,}2t^3 + t$	0,1	2	1
3	$1{,}5t^3 + 0{,}75t$	0,1	2	1
4	$5t - 3t^2$	0,2	1	0,5
5	$0{,}25t^2 - 2t$	0,1	2	1
6	$4t^2 + 2t$	0,3	0,25	0,5
7	$4t - 0{,}5t^2$	0,3	1	3
8	$3t + 2t^2$	0,4	0,25	0,3
9	$\cos(\frac{\pi}{3}t)$	0,15	1	3
10	$1 + 2\sin 2t$	0,15	$\pi/6$	$\pi/4$
11	$t - 0{,}2t^2$	0,1	2	1
12	$1{,}4t - t^2$	0,2	0,4	0,6
13	$4t - 6t^2$	0,2	1	0,5
14	$3t - 1{,}5t^2$	0,1	2	3
15	$8t^2 - 4{,}5t$	0,2	1	4
16	$1 + \sin 3t$	0,1	$\pi/6$	$\pi/9$
17	$4\cos t$	0,2	$\pi/4$	$\pi/6$
18	$2\sin^2(t) + t$	0,3	$\pi/2$	$\pi/6$
19	$2\cos(2t) + 1$	0,4	$\pi/8$	$\pi/6$
20	$1{,}5\sin(2t)$	0,5	$\pi/12$	$\pi/6$
21	$2t^2 + 3t$	0,14	0,5	0,25
22	$3t^2 - 4t$	0,3	1	2

продовження табл 6.1

23	$0{,}5\pi t^2$	0,2	1	2
24	$0{,}28t^2 + 0{,}42t$	0,1	0,5	0,25
25	$2\pi t - 1{,}2\pi t^2$	0,18	0,3	1,2
26	$2\cos\frac{\pi}{6}t + 1$	0,4	1	2
27	$5t^2 + 3t$	0,12	0,25	0,5
28	$0{,}6t^2 + 0{,}36t$	0,24	3	1
29	$4\cos\frac{\pi}{6}t + 1$	0,14	2	3
30	$t - 0{,}25t^2$	0,2	1	2

Контрольні запитання:

1. Яка залежність існує між проекціями швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки?
2. Який рух тіла називають поступальним?
3. Чим відрізняється миттєво-поступальний рух від поступального руху тіла?
4. Чи можуть траєкторії точок тіла при його поступальному русі бути колами?
5. Назвіть основні властивості поступального руху твердого тіла.

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1970. – С. 170-174.
2. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 114-120.

Практичне заняття № 7

ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТІЛА

Мета роботи: навчитись визначати кінематичні характеристики при обертальному русі твердого тіла, визначати напрямок кутової швидкості та кутового прискорення

Основні теоретичні відомості

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий рух, при якому всі точки, що лежать на певній прямій, незмінно зв'язаній з тілом, залишаються нерухомими в обраній системі відліку.

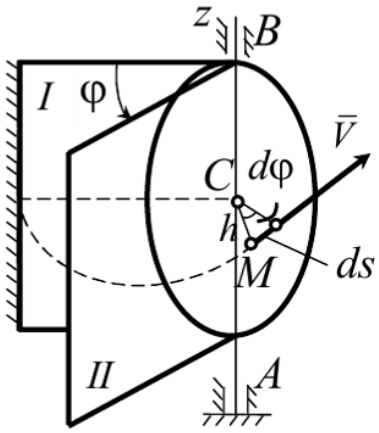

Рисунок 7.1

Положення тіла в любий момент часу визначатиметься взятим з відповідним знаком кутом між площинами I і II (рис.7.1.), цей кут називається кутом оберту тіла.

Нерухому пряму, навколо якої обертається тіло, називають **віссю обертання**. Всі точки тіла, що не лежать на осі обертання, рухаються в площинах, перпендикулярних до осі обертання, і описують кола, центри яких знаходяться на цій осі. Відстань точки від осі обертання називають **радіусом обертання точки**.

Рівняння

$$\varphi = \varphi(t), \qquad (7.1)$$

що установлює залежність кута φ від часу, називають законом обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Для характеристики обертального руху використовують поняття кутової швидкості і кутового прискорення.

Приклад рішення задачі

У механізмі, зображеному на рис. 7.1, обертання колеса 3 радіуса R_3 передається на двоступінчасте колесо 2 радіуса R_2 за допомогою пасової передачі; вантаж 1 прив'язаний до кінця нитки, намотаної на ступінь меншого діаметра r_2 колеса 2.

Заданий закон руху вантажу 1: $z_1=0{,}2t^2+2t$ м; $R_2=R_3=0{,}1$ м; $r_2=0{,}5$; $R_2=0{,}05$ м.

Визначити для заданого моменту часу t = 0,5 с:

- швидкість і прискорення тіла 1;
- кутові швидкість і прискорення тіл 2 і 3;
- швидкість і прискорення точки M;
- закон обертального руху колеса 3.

Показати на рисунку вектори швидкостей та прискорень тіла 1 і точки M, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2 і 3.

За вихідними даними викреслюємо задану схему механізму (рис. 7.1).

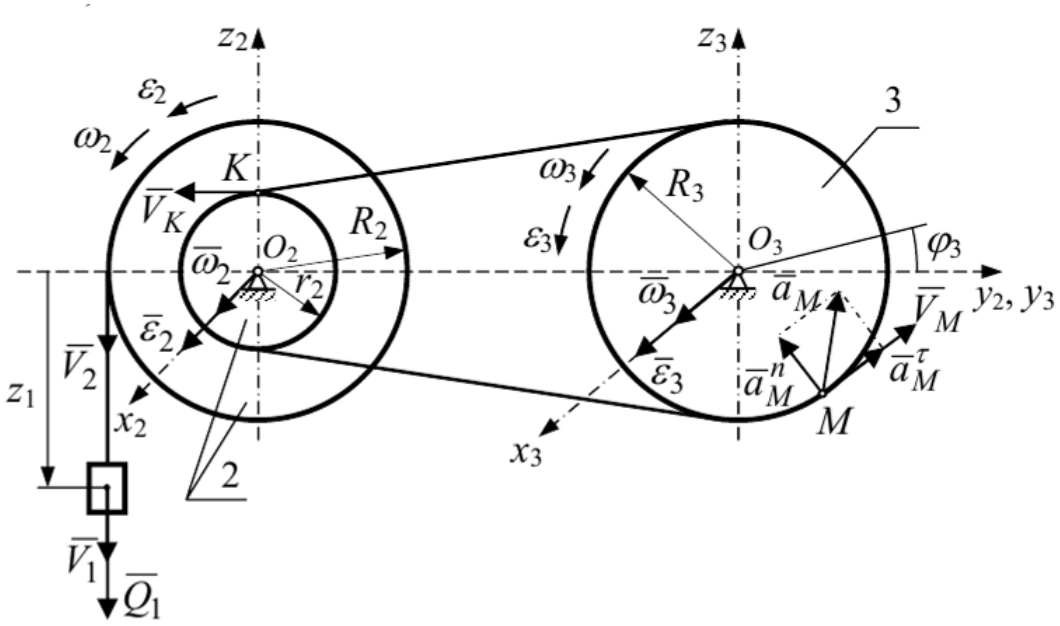

Рисунок 7.1

Швидкість та прискорення тіла 1

$$V_1=\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=\dot{z}_1=0{,}4t+2 \text{ м/с};$$

$$a_1=\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=\dot{V}_1=0{,}4 \text{ м/с}^2.$$

При t = 0,5 с $$V_1 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 2 = 2{,}2 \text{ м/с};$$
$$a_1 = 0{,}4 \text{ м/с}^2.$$

Через те, що швидкості точок на зовнішньому ободі колеса 2 і тіла 1 однакові, то $V_2 = V_1 = \omega_2 \cdot R$. Звідси кутові швидкість і прискорення колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{0{,}4t + 2}{0{,}1} = 4t + 20 \text{ с}^{-1} \text{ і } \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 4 \text{ с}^{-2}.$$

При t = 0,5 с $$\omega_2 = 22 \text{ с}^{-1};\ \varepsilon_2 = 4 \text{ с}^{-2}.$$

Через те, що швидкість на пасі постійна, то $V_K = V_M$, $V_K = \omega_2 r_2$ і $V_M = \omega_3 R_3$. Звідси кутові швидкість і прискорення колеса 3

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{(4t + 20) \cdot 0{,}05}{0{,}1} = 2t + 10 \text{ с}^{-1};$$
$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2 \text{ с}^{-2}.$$

При t = 0,5 с $$\omega_3 = 2 \cdot 0{,}5 + 10 = 11 \text{ с}^{-1};\ \varepsilon_3 = 2 \text{ с}^{-2}.$$

Швидкість, нормальне, тангенціальне і повне прискорення точки M визначаються за формулами:

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = 11 \cdot 0{,}1 = 1{,}1 \text{ м/с};\ a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 11^2 \cdot 0{,}1 = 12{,}1 \text{ м/с}^2.$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 \text{ м/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n + (a_M^\tau)^2} = R\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2} = 0{,}1 \cdot \sqrt{11^4 + 2^2} = 12{,}101 \text{ м/с}^2.$$

Закон обертального руху колеса 3

Через те, що $\omega_3 = \dfrac{\mathrm{d}\varphi_3}{\mathrm{d}t}$, то $\mathrm{d}\varphi_3 = \omega_3 \mathrm{d}t$, а

$$\varphi_3 = \int_0^t \omega_3 \mathrm{d}t = \int_0^t (2t + 10)\mathrm{d}t = t^2 + 10t \text{ рад.}$$

Вектори швидкостей та прискорення тіла 1 і точки M, а також вектори кутових швидкостей і прискорень тіл 2 і 3 наведено на рис. 7.1.

Варіанти завдань для практичної роботи № 7

Схеми механізмів для виконання практичної роботи № 7 наведені на рис. 6.3, вихідні дані в табл. 7.1.

Таблиця 7.1 Вихідні дані для виконання практичної роботи № 7

варіант	$z_1(t)$, рад	R_2, м	Час	
			t_1	t_2
1	$2t - 0{,}02\pi t^2$	0,2	2	1
2	$0{,}02t^3 + 0{,}1t$	0,1	2	1
3	$0{,}15t^3 + 0{,}075t$	0,1	2	1
4	$t - 0{,}3t^2$	0,2	1	0,5
5	$0{,}025t^2 - 0{,}2t$	0,1	2	1
6	$1{,}2t^2 + 0{,}6t$	0,3	0,25	0,5
7	$1{,}2t - 0{,}15t^2$	0,3	1	3
8	$1{,}2t + 0{,}8t^2$	0,4	0,25	0,3
9	$0{,}45\cos(\frac{\pi}{3}t)$	0,15	1	3
10	$0{,}3\sin 2t$	0,15	$\pi/6$	$\pi/4$
11	$0{,}1t - 0{,}02t^2$	0,1	2	1
12	$0{,}28t - 0{,}2t^2$	0,2	0,4	0,6
13	$0{,}8t - 1{,}2t^2$	0,2	1	0,5
14	$0{,}3t - 0{,}15t^2$	0,1	2	3
15	$0{,}8t^2 - 0{,}9t$	0,2	1	4
16	$0{,}1\sin 3t$	0,1	$\pi/6$	$\pi/9$
17	$0{,}8\cos t$	0,2	$\pi/4$	$\pi/6$
18	$0{,}6\sin 2t + 4$	0,3	$\pi/2$	$\pi/6$
19	$0{,}8\sin(2t) + 1$	0,4	$\pi/8$	$\pi/6$
20	$0{,}75\sin(2t) + 5$	0,5	$\pi/12$	$\pi/6$
21	$0{,}28t^2 + 0{,}42t$	0,14	0,5	0,25
22	$0{,}9t^2 - 1{,}2t$	0,3	1	2

продовження табл.7.1

23	$0,1\pi t^2 + 2$	0,2	1	2
24	$0,8t^2 - 0,2t$	0,1	0,5	0,25
25	$0,36\pi t - 0,22\pi t^2$	0,18	0,3	1,2
26	$0,8\cos\frac{\pi}{6}t + 5$	0,4	1	2
27	$0,6t^2 + 0,36t$	0,12	0,25	0,5
28	$6t^2 - 3,6t$	0,24	1	0
29	$0,56\cos\frac{\pi}{6}t$	0,14	2	3
30	$t - 0,05t^2$	0,2	1	2

Контрольні запитання:

1. Який рух твердого тіла називають обертанням навколо нерухомої осі? Що являють собою траєкторії окремих точок при такому русі?
2. Яким рівнянням задається закон обертального руху тіла навколо нерухомої осі?
3. За якими формулами визначаються модулі кутової швидкості і кутового прискорення твердого тіла, що обертається?
4. Як спрямовані вектори кутової швидкості і кутового прискорення при обертанні тіла навколо нерухомої осі?
5. Наведіть формули для визначення величин швидкостей і прискорень окремих точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

***Література*:**

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1965. – С. 277-286.
2. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 114-120.

Практичне заняття № 8

ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТЕЙ ТОЧОК ПЛОСКОЇ ФИГУРИ

Мета роботи: навчитись визначати швидкості точок плоскої фигури при плоскопаралельному русі за допомогою миттевого центра швидкостей

Основні теоретичні відомості

Плоскопаралельним або **плоским рухом** твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються паралельно певній нерухомій в даній системі відліку площині.

З визначення плоскопаралельного руху виходить, що він повністю характеризується рухом плоскої фігури, утвореної перерізом тіла площиною, паралельною певній нерухомій площині.

Оскільки плоский рух можна розглядати як такий, що складається з поступального і обертального рухів, то справедливим буде таке твердження: швидкість будь-якої точки твердого тіла, що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює геометричній (векторній) сумі швидкості полюса і лінійної швидкості цієї точки в її обертанні навколо полюса.

Так, якщо за полюс взяти точку A (рис.8.1.), то швидкість точки B тіла

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA}, \qquad (8.1)$$

де $\overline{V}_A$ – швидкість полюса;

$\overline{V}_{BA}$ – лінійна швидкость точки B в її обертальному русі навколо полюса.

При цьому швидкість $\overline{V}_{BA}$ визначається за числовим значенням і напрямом так само, як у випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, що проходить через полюс, перпендикулярно до площини руху тіла, тобто $\overline{V}_{BA} \perp \overline{AB}$.

$$\overline{V}_{BA} = \vec{\omega} \cdot \overline{AB},\ V_{BA} = \omega \cdot AB. \qquad (8.2)$$

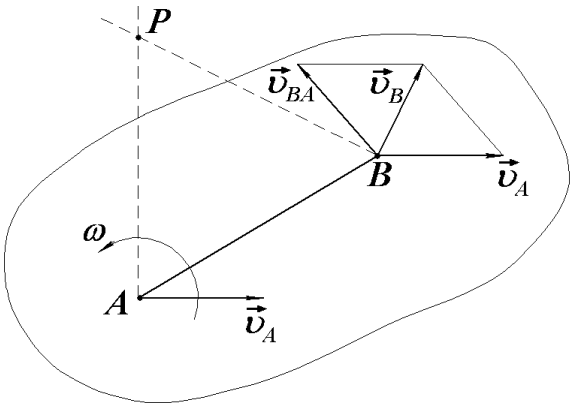

Рисунок 8.1

Точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається **миттєвим центром швидкостей (МЦШ)**. Надалі МЦШ будемо позначати літерою *P*.

Оберемо за полюс МЦШ. Тоді рівняння (8.1) можна записати так:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_P + \overline{V}_{BP},$$

але за визначенням $\overline{V}_P$=0 і тому

$$\overline{V}_B = \overline{V}_{BP} = \overline{\omega} \cdot \overline{PB}. \qquad (8.3)$$

Якщо за полюс вибрати МЦШ, то плоскопаралельний рух тіла зводиться до миттєвого обертального руху навколо миттєвої осі, що проходить через МЦШ перпендикулярно до площини руху цього тіла. Модулі швидкостей всіх точок плоскої фігури будуть прямо пропорційними їх відстаням до МЦШ, а напрями векторів швидкостей будуть перпендикулярними до прямих, які з'єднують ці точки з МЦШ. Саме тому МЦШ називають також **миттєвим центром обертання.**

Відповідно до рисунка 8.1:

$$V_A = \omega \cdot AP;\ V_B = \omega \cdot BP \text{ і } \frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}. \qquad (8.4)$$

Приклад рішення задачі

Для заданого на рис.8.2 положення механізму визначити:

- швидкість точок *A, B, C* та кутову швидкість ланки *AB* за допомогою миттєвого центра швидкостей;

- швидкість точки B за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок, якщо кривошип OA радіуса r = 0,2 м, обертається з кутовим прискоренням ε_{OA}=3 с$^{-2}$, маючи кутову швидкість ω_{OA}=1 с$^{-1}$, $AB = l$ =0,3 м, α = 30°, β = 45°, $AC = CB$.

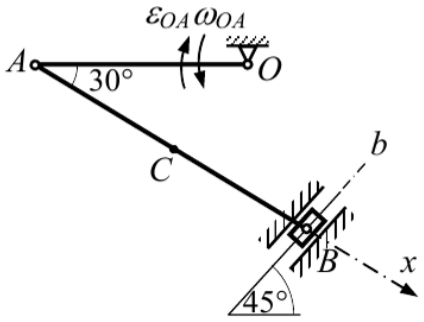

Рисунок 8.2

Визначення швидкостей точок A, B, C і кутової швидкості ланки AB механізму за допомогою миттєвого центра швидкостей.

Кривошип OA обертається в площині навколо точки O (рис. 8.2), швидкість точки A $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 0{,}2$ м/с. Вектор V_A перпендикулярний до кривошипа OA і спрямований в бік його обертання (рис. 8.3).

Швидкості точок B і C обчислимо за використанням властивості миттєвого центра швидкостей.

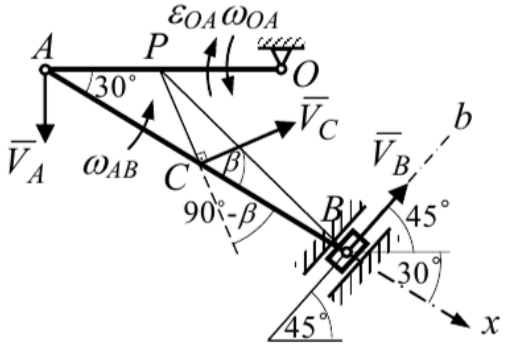

Рисунок 8.3

Миттєвий центр швидкостей ланки AB знаходиться в точці P, яка визначається перетином двох перпендикулярів векторів швидкостей V_A і V_B (вектор V_B спрямований вздовж напрямної Bb, рис. 8.3).

Тому з урахуванням властивості миттєвого центра швидкостей, маємо:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \to V_B = \frac{V_A \cdot BP}{AP};\ \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A \cdot V_C}{CP} \to V_C = \frac{V_A \cdot CP}{AP}.$$

Де, згідно з теоремою синусів,

$$\frac{AP}{\sin 15^\circ} = \frac{AB}{\sin 135^\circ} = \frac{BP}{\sin 30^\circ}$$

$$AP = \frac{AB \cdot \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = 0{,}11 \text{ м}; \; BP = \frac{AB \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 0{,}21 \text{ м}.$$

З теореми косинусів (рис.8.3)

$$CP = \sqrt{AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP \cos 30^\circ} = 0{,}0776 \cong 0{,}08 \text{ м}.$$

Тоді $V_B = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}21}{0{,}11} = 0{,}4$ м/с; $V_C = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}08}{0{,}11} = 0{,}14$ м/с.

Аналогічно можна обчислити кутову швидкість ланки *AB*, якщо використати властивість миттєвого центра швидкостей:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0{,}2}{0{,}11} = 1{,}82 \text{ с}^{-1}.$$

Вектори швидкостей точок *A*, *B*, *C* та напрямок кутової швидкості показано на рис. 8.3.

Швидкості точок *B* і *C* ланки механізму можна знайти за формулами:

$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 1{,}82 \cdot 0{,}21 = 0{,}4$ м/с;

$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 1{,}82 \cdot 0{,}08 = 0{,}14$ м/с.

Варіанти завдань для практичної роботи № 8

Для заданого положення механізму визначити швидкості точок *A*, *B*, *C*. Кривошип *OA* радіуса *r* обертається навколо точки *O* з кутовим прискоренням ε, маючи в даний момент кутову швидкість ω. Числові дані для розрахунку наведені в таблиці 8.1, схеми механізмів – на рисунку 8.4.

Таблиця 8.1 Вихідні дані для виконання практичної роботи № 8

Схема	$OA = r$	$AB = l$	ω	ε	α	β	γ
	м		$с^{-1}$	$с^{-2}$	град (^{0})		
1	0,2	0,3	1	1	30	45	–
2	0,24	0,36	2	1	45	60	–
3	0,3	0,4	3	1	60	30	–
4	0,36	0,48	4	2	30	15	–
5	0,4	0,5	5	2	45	15	–
6	0,48	0,56	6	2	60	30	–
7	0,5	0,6	7	1	30	45	–
8	0,58	0,64	8	1	45	30	–
9	0,6	0,7	9	2	60	45	–
10	0,64	0,72	10	2	30	15	–
11	0,25	0,5	1	2	30	15	30
12	0,3	0,6	2	3	60	45	30
13	0,35	0,4	3	2	30	60	–
14	0,4	0,6	1	3	15	30	–
15	0,2	0,45	2	3	30	45	30
16	0,25	0,6	1	2	30	60	30
17	0,3	0,65	2	1	60	30	–
18	0,35	0,6	3	1	30	45	–
19	0,3	0,8	1	2	15	60	–
20	0,2	0,5	2	1	30	60	–
21	0,3	0,6	3	1	30	45	–
22	0,1	0,7	2	3	60	45	–
23	0,15	0,45	1	4	30	60	30
24	0,2	0,6	2	1	30	45	–
25	0,3	0,5	1	2	–	30	–
26	0,35	0,8	1	3	30	30	–
27	0,4	0,8	1	2	30	15	–
28	0,1	0,4	2	4	15	60	–
29	0,15	0,7	3	4	30	60	–
30	0,2	0,6	4	1	60	30	–

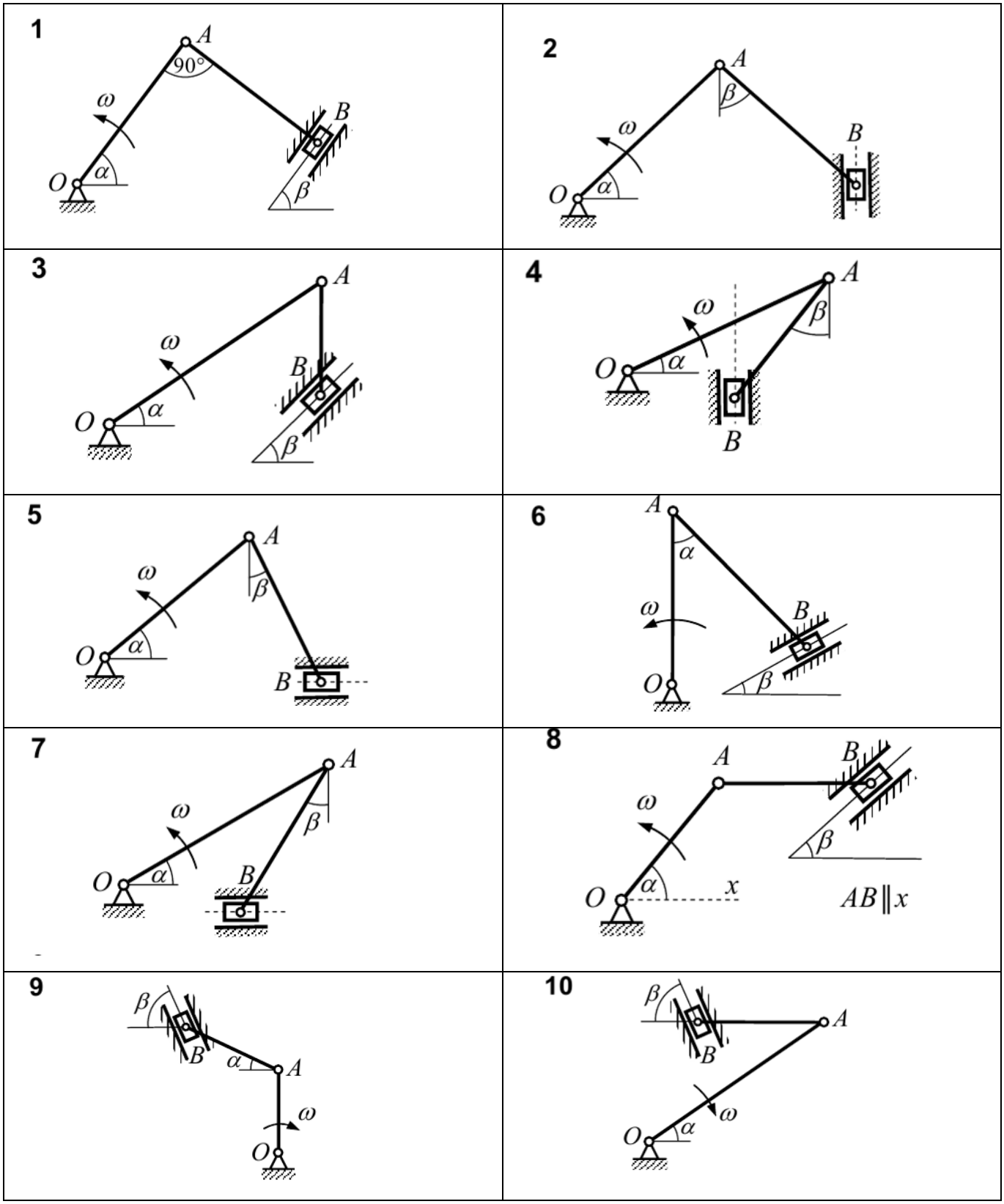
1
A
90°
ω
B
O
α
β
2
A
β
ω
B
O
α
3
A
ω
B
O
α
β
4
A
ω
β
O
α
B
5
A
ω
β
O
α
B
6
A
α
ω
B
O
β
7
A
ω
β
O
α
B
8
A
B
ω
β
O
α
x
AB ∥ x
9
β
B
α
A
ω
O
10
β
A
B
ω
O
α

Рисунок 8.4, а

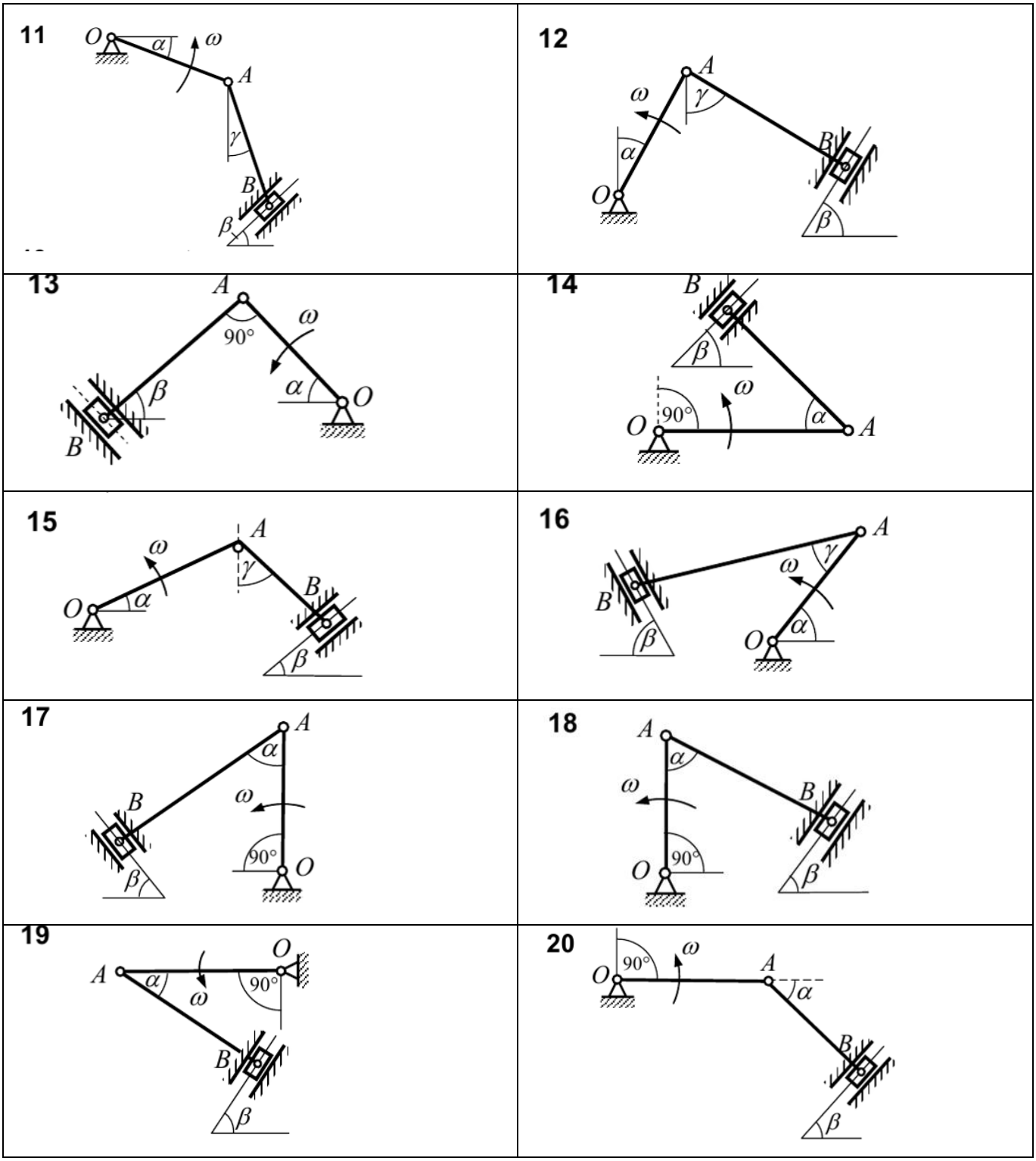
11
O
α
ω
A
γ
B
β
12
A
ω
γ
α
O
B
β
13
A
90°
ω
β
α
O
B
14
B
β
ω
90°
O
α
A
15
ω
A
O
α
γ
B
β
16
A
γ
ω
B
β
O
α
17
A
α
B
ω
β
90°
O
18
A
α
ω
B
90°
O
β
19
O
A
α
ω
90°
B
β
20
90°
O
ω
A
α
B
β

Рисунок 8.4, б

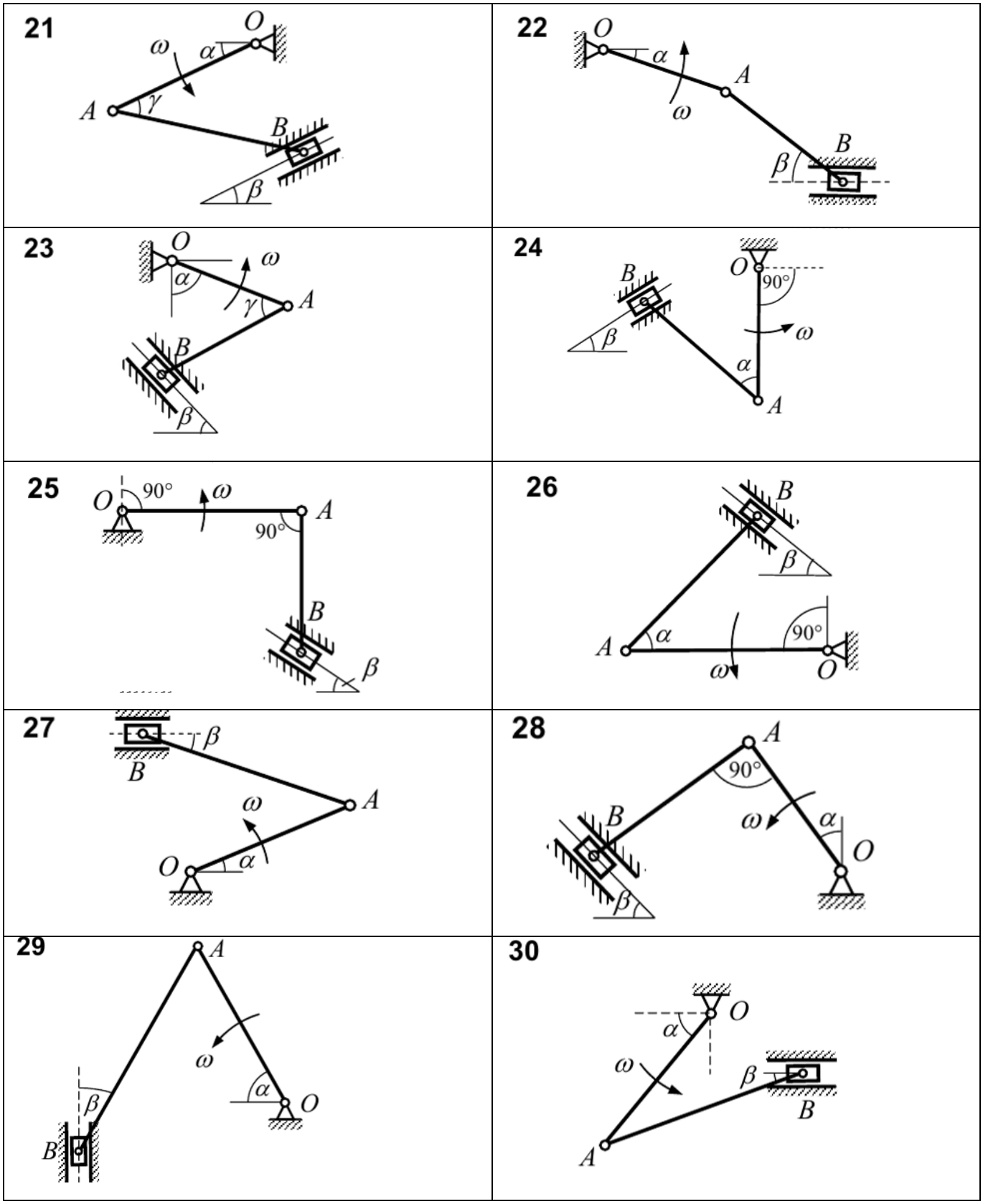
21
O
ω
α
A
γ
B
β
22
O
α
A
ω
B
β
23
O
ω
α
γ
A
B
β
24
B
O
90°
β
ω
α
A
25
O
90°
ω
A
90°
B
β
26
B
β
A
α
90°
ω
O
27
β
B
A
ω
O
α
28
A
90°
B
ω
α
O
β
29
A
ω
β
α
O
B
30
O
α
ω
β
B
A

Рисунок 8.4, в

Контрольні запитання:

1. Який рух твердого тіла називають плоскопаралельним?
2. Рухом якої фігури повністю визначається плоскопаралельний рух твердого тіла?
3. Запишіть у загальній формі рівняння, які задають плоскопаралельний рух.

***Література*:**

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1965. – С. 299-308.
2. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 138-147.

Практичне заняття № 9

ВИЗНАЧЕННЯ ПРИСКОРЕННЯ ТОЧОК ТІЛА ПРИ ПЛОСКОМУ РУСІ

Мета роботи: навчитись визначати величину та напрямок прискорення точок плоскої фигури при плоскопаралельному русі

Основні теоретичні відомості

Прискорення будь-якої точки твердого тіла, що здійснює плоский рух, дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення даної точки в її обертальному русі навколо полюса.

Швидкість довільної точки *B* тіла:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \qquad (9.1)$$

де $\bar{V}_A$ – швидкість полюса;

$\bar{V}_{BA}$ – лінійна швидкость точки *B* в її обертальному русі навколо полюса.

Диференціюємо це рівняння за часом і отримуємо:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}. \qquad (9.2)$$

Прискорення $\bar{a}_{BA}$, як прискорення точки в обертальному русі навколо полюса *A*, складається з нормального і тангенціального прискорень:

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}^{n}_{BA} + \bar{a}^{\tau}_{BA}. \qquad (9.3)$$

Тоді формулі (9.2) можна надати вигляду:

$$\bar{a}_{B} = \bar{a}^{n}_{A} + \bar{a}^{\tau}_{A} + \bar{a}^{n}_{BA} + \bar{a}^{\tau}_{BA}. \qquad (9.4)$$

Модулі векторів $\bar{a}^{n}_{BA}$ і $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ визначають згідно з формулами:

$$\bar{a}^{n}_{BA} = \omega^2 \cdot AB\,,\ \bar{a}^{\tau}_{BA} = \varepsilon \cdot AB\,, \qquad (9.5)$$

причому вектор $\bar{a}^{n}_{BA}$ спрямований від точки *B* до полюса *A*, а вектор $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ перпендикулярний до відрізка *AB*, що з'єднує дану точку з полюсом, і має напрям $\bar{a}_{A}$ в бік напряму стрілки кутового прискорення ε (рис. 9.1).

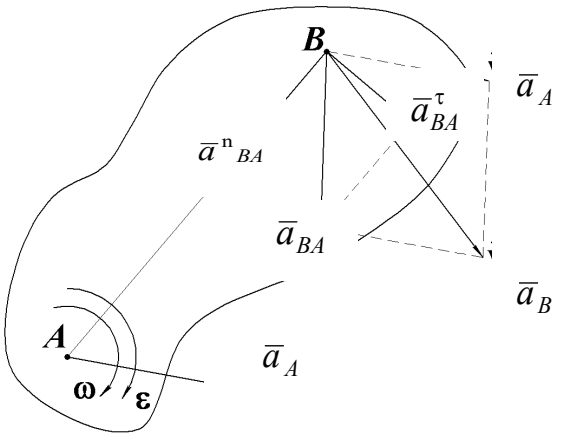

Рисунок 9.1

Приклад рішення задачі

Для заданого на рис.9.2 положення механізму, використовуючі дані з практичної роботи № 8 визначити:

- прискорення точок *A*, *B*, *C* та кутове прискорення ланки *AB*, якщо кривошип *OA* радіуса r = 0,2 м, обертається з кутовим прискоренням ε_{OA} = 3 с$^{-2}$, маючи кутову швидкість ω_{OA} = 1 с$^{-1}$, $AB = l$ = 0,3 м, $\alpha = 30^{\circ}$, $\beta = 45^{\circ}$, $AC = CB$.

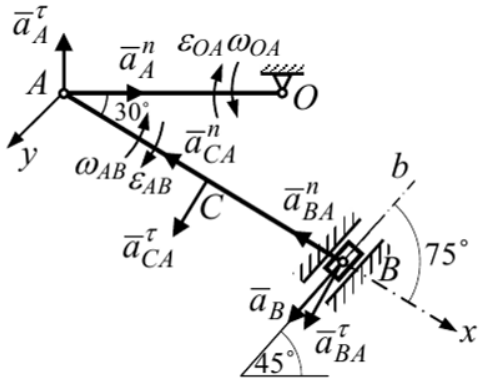

Рисунок 9.2

Визначення прискорень точок *A*, *B*, *C* та кутового прискорення ланки *AB*.

Кривошип *OA* обертається рівнозмінно, а тому $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$, причому нормальне і тангенціальне прискорення точки *A* відповідно становлять:

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 1^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \text{ м/с}^2;\ a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Отже $$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = 0{,}63 \text{ м/с}^2.$$

Вектори $\bar{a}_A^n$ і $\bar{a}_A^\tau$ наведено на рис. 9.2.

Для визначення прискорення $\bar{a}_B$ і ε_{AB} використаємо теорему про прискорення точки *B* плоскої фігури $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$ або

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \qquad (9.6)$$

Напрямок прискорення $\bar{a}_B$ відомий (вздовж *Bb*), а модуль $|\bar{a}_B|$ – невідомий.

Нормальне і тангенціальне прискорення точки *B* при обертальному русі ланки *AB* навколо полюса *A* визначаються:

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1{,}82^2 \cdot 0{,}3 = 1 \text{ м/с}^2;\quad a_{AB}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Спроектувавши рівняння (9.6) на осі декартової системи координат A_x і A_y, отримаємо $$-a_B \cos 75^\circ = a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ - a_{BA}^\tau$$

Та $$a_B \cos 15^\circ = -a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau$$

Звідки $$a_B = \frac{-a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_A^\tau \cos 60^\circ + a_{BA}^n}{\cos 75^\circ} = 4{,}3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^{\tau} = a_B \cos 15^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_A^{\tau} \sin 60^\circ = 4{,}78 \text{ м/с}^2.$$

Тоді $$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^n}{AB} = 7{,}96 \text{ с}^{-2}.$$

Прискорення точки *C*

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^{\tau},$$

де $$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0{,}5 \text{ м/с}^2;\ a_{CA}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 1{,}2 \text{ м/с}^2.$$

За модулем $|\bar{a}_C| = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}$,

де $$a_{Cx} = a_A^n \cos 30^\circ - a_A^{\tau} \sin 60^\circ - a_{CA}^n = -0{,}62 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \cos 30^\circ - a_A^{\tau} \sin 30^\circ + a_{CA}^n = 0{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 0{,}85 \text{ м/с}^2.$$

Вектори прискорень $\bar{a}_{CA}^{\tau}$, $\bar{a}_{CA}^n$ та $\bar{a}_A^{\tau}$, $\bar{a}_A^n$ наведено на рис. 9.2.

Варіанти завдань для практичної роботи № 9

Для заданого положення механізму визначити прискорення точок *A*, *B*, *C*. Кривошип *OA* радіуса *r* обертається навколо точки *O* з кутовим прискоренням ε, маючи в даний момент кутову швидкість ω. Числові дані для розрахунку наведені в таблиці 8.1, схеми механізмів – на рисунку 8.4.

Контрольні запитання:

1. Прискорення якої точки тіла, що здійснює плоский рух, можна обчислити за рівняннями його руху?
2. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром прискорень (МЦП) і чи може МЦП співпадати з МЦШ?
3. За якою формулою можна визначити прискорення будь-якої точки тіла в плоскопаралельному русі? Поясніть фізичне значення окремих складових, що входять до цієї формули.

***Література*:**

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1970. – С. 179-184.
2. Теоретична механіка: Збірник задач/ під ред. М.А. Павловського. – К.: Техніка, 2007. – С. 138-147.

Практичне заняття № 10

СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

Мета роботи: навчитись визначати швидкості точок при складному русі за допомогою теореми складання швидкостей

Основні теоретичні відомості

Складним рухом точки називається такий рух, що відбувається одночасно відносно основної нерухомої системи відліку і деякої другої системи відліку, яка рухається, в свою чергу, відносно основної системи. Це, наприклад, рух пасажира по палубі рухомого пароплава, рух повзуна в механізмі по рухомій напрямній, переміщення людини по рухомому ескалатору, тощо. При цьому рух точки або тіла буде різним в залежності від того, розглядається він відносно рухомої палуби, напрямній, ескалатора, чи відносно нерухомого спостерігача.

Рух точки відносно основної нерухомої системи координат називають **абсолютним**; рух точки по відношенню до рухомої системи відліку називають **відносним**, а рух самої рухомої системи по відношенню до нерухомої – **переносним рухом**.

При складному русі абсолютна швидкість точки дорівнює геометрічній сумі відносної та переносної швидкості (**теорема про складання швидкостей**):

$$\overline{V}_{абс} = \overline{V}_r + \overline{V}_e, \qquad (10.1)$$

де $\overline{V}_r$ – вектор відносної швидкості;

$\overline{V}_e$ – переносної швидкості.

Модуль абсолютної швидкості розраховуємо за формулою:

$$V_{абс} = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e \cdot V_r \cdot \cos\varphi}, \qquad (10.2)$$

де φ – кут між векторами $\overline{V}_r$ і $\overline{V}_e$.

Приклад рішення задачі

Людина, перепливаючи річку, спрямувала човен під кутом 45^0 до напрямку течії річки. В нерухомій воді човен рухається зі швидкістю 3 м/с. Швидкість течії річки 1 м/с. Визначити абсолютну швидкість руху лодки, а також час, на протязі якого човен перепливе річку шириною 360 м.

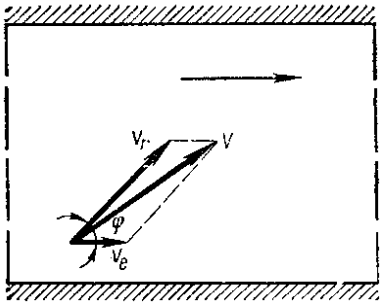

Рисунок 10.1

Відносно берега човен здійснює складний рух: відносно потока води (відносний рух) і одночасно з потоком води (переносний рух). Тоді V_r=3 м/с, V_e=1 м/с.

$$\overline{V}_{абс} = \overline{V}_r + \overline{V}_e.$$

Модуль абсолютної швидкості розраховуємо за формулою:

$$V_{абс} = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e \cdot V_r \cdot \cos\varphi}.$$

$$V_{абс} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 21 \cdot 3 \cdot \cos 45^0} = 3{,}78 \text{ м/с}.$$

Для того, щоб знайти час, за який човен перепливе річку, необхідно знайти складову швидкості V_1 поперек течії річки:

$$V_1 = V_r \cdot \cos 45^0 = 3 \cdot 0{,}707 = 2{,}21 \text{ м/с}.$$

$$t = \frac{l}{V_1} = \frac{360}{2{,}12} = 170 \text{ с} = 2 \text{ хвилини } 50 \text{ секунд}.$$

Варіанти завдань для практичної роботи № 10

1. Тіло *A* спускається по похилій площині зі швидкістю V_r, а площина переміщається поступально у напрямку, вказаному на рис. 10.2, з постійною швидкістю V_e, де $V_e = 4$ дм/сек, α = 22°. Визначити модуль V_a абсолютної швидкості тіла і кут β, складений V_a з похилою площиною в той момент, коли V_r = 6 дм/сек.

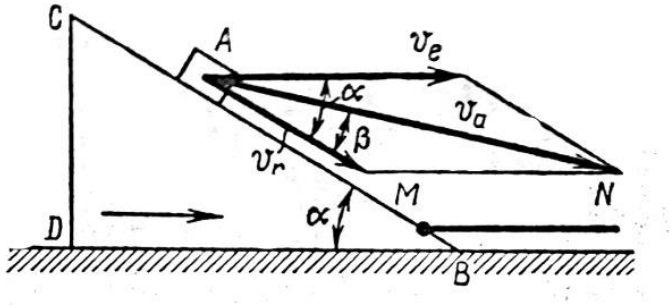

Рисунок 10.2

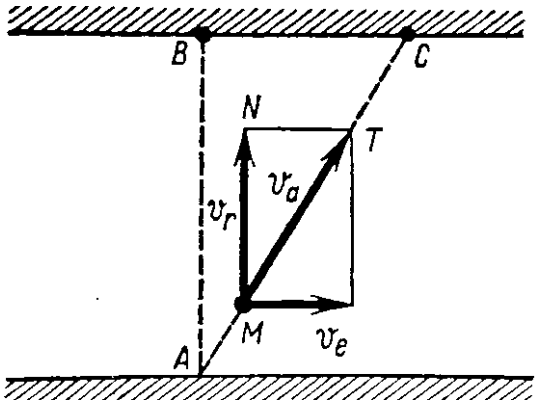

Рисунок 10.3

Відповідь: 9,8 дм/с; $8^0 48'$.

2. Швидкість катера відносно нерухомої води V_r = 18 км/год, швидкість течії V_e = 0,8 м/сек. Відстань між пунктами *A* і *B*, розташованими на березі, 80 км. Скільки часу, не враховуючи зупинок, триває рух катера з пункту *A* в пункт *B* і назад.

Відповідь: 9 годин 7 хвилин.

3. Катер відпливає від деякої точки *A* берега, тримаючи курс перпендикулярно до берега. *B* – точка протилежного берега, розташована на прямій *AB*, перпендикулярній до берега. *AB* = 800 м. За даних попередньої задачі (V_r = 18 км/год, V_e = 0,8 м/сек) визначити, на яку відстань *BC* від точки *B* катер буде віднесений течією, коли досягне протилежного берега (рис. 10.3).

Відповідь: 128 м.

4. Точка M рухається вздовж прямої OA зі швидкістю u, а сама пряма обертається в площині Ox_1y_1 навколо центра O з кутовою швидкістю ω (рис. 10.4). Визначити швидкість точки M відносно вісей Ox_1y_1 в залежності від відстані $OM = r$.

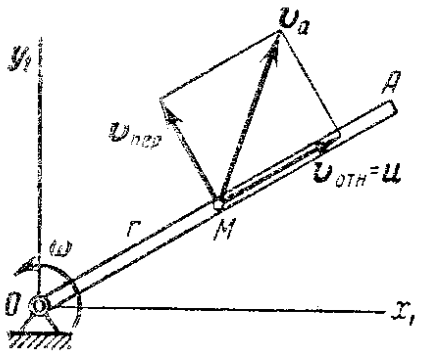

Рисунок 10.4

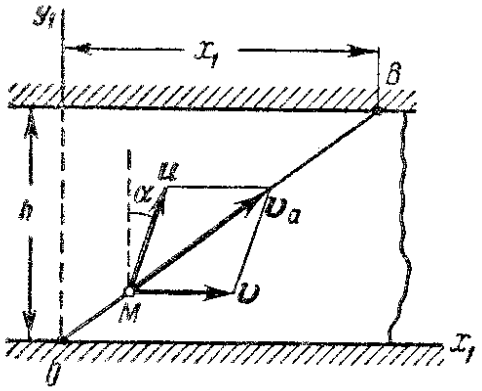

Рисунок 10.5

Відповідь: $\sqrt{u^2 + \omega^2 \cdot r^2}$.

5. Рух води в річці шириною h відбувається з постійною швидкістю V. Людина може надати швидкість човну відносно нерухомої води u (рис. 10.5). Визначити, в якому напрямку потрібно плисти річкою, щоб в найкоротший строк дістатись протилежного берега.

Відповідь: $\frac{h}{u}$.

6. Ротор парової турбіни здійснює 3000 обертів за хвилину. Середній радіус робочого диска $R = 0{,}4$ м. Абсолютна швидкість c=274 м/с входу пари в лопатки турбіни спрямована під кутом 15^0 до площини, перпендикулярної до вісі обертання диска (рис. 10.6). Знайти модуль та напрямок відносної швидкості пари V_r при вході до робочих лопаток.

Відповідь: 155 м/с.

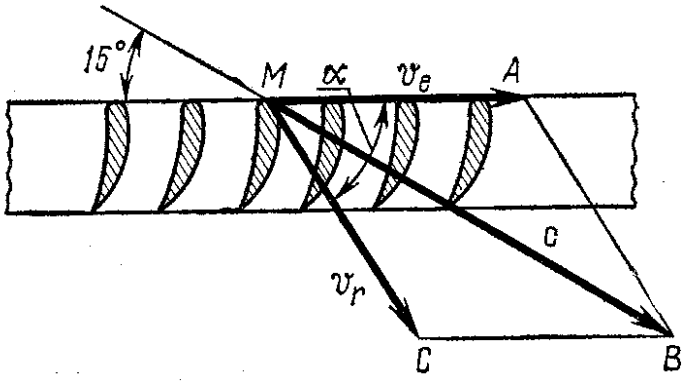

Рисунок 10.6

7. Два автомобіля рухаються по шосе зі швидкостями $V_1 = 120$ км/год та $V_2 = 100$ км/год. Знайти відносну швидкість першого автомобіля відносно другого автомобіля при русі в одному напрямку і назустріч один одному.

Відповідь: 20 км/год; 220 км/год.

8. Берега річкі паралельні. Швидкість течії річки V_e = 0,8 м/сек. Прийнявши відносну швидкість човна 4 м/с визначити під яким кутом човен має рухатись, для того ,щоб переплисти річку перпендикулярно до берега.

Відповідь: $101^0 32'$.

9. Необхідно переправити човен на протилежний берег річки перпендикулярно течії річки, швидкість якої 3 км/год. Швидкість човна відносно води 7 км/год. Під яким кутом до напряму течії річки треба рухатись човну? Чому дорівнює абсолютна швидкість човна?

Відповідь: $64{,}62^0$; 6,32 км/год.

10. По схиленому під кутом 45^0 до горизонту конвеєру, що піднімає деталі догори зі швидкістю 3 м/с, на висоті від рівня підлоги 1,5 м зісковзнула деталь і почала рухатись донизу рівноприскорено і прямолінійно з прискоренням $a_\tau = 2{,}3$ м/с^2. Визначити час, за який деталь опуститься до рівня підлоги (рис. 10.7).

Відповідь: 3,33 с.

11. Визначити швидкість конвеєра, на якому встановлена деталь довжиною 0,425 м, якщо відомо, що вона напротязі 1,2 с фіксувалась на платформі, яка рухається паралельно, але в протилежному напрямку зі швидкістю 0,25 м/с (рис. 10.8)

Відповідь: 0,104 м/с.

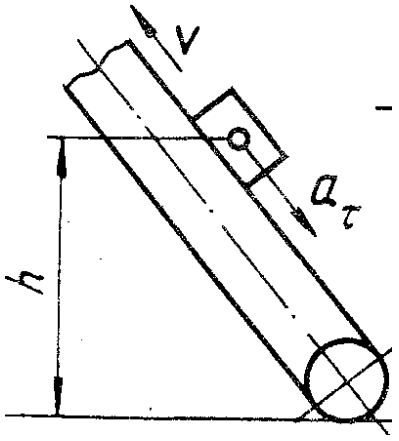

Рисунок 10.7

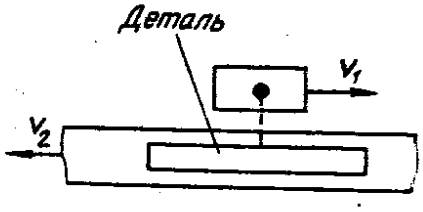

Рисунок 10.8

12. Скільки часу пасажир потяга, що рухається зі швидкістю 72 км/год, буде бачити зустрічний потяг, що рухається паралельно, якщо довжина зустрічного потяга 198 м, а швидкість 63 км/год.

Відповідь: 5,3 с.

13. Визначити швидкість обробки деталі довжиною 400 мм на круглошліфувальному верстаті, якщо відомо, що швидкість допоміжного руху деталі 0,06 м/хв, а швидкість подачі шліфувального круга 0,04 м/хв (рис. 10.9).

Відповідь: 240 с.

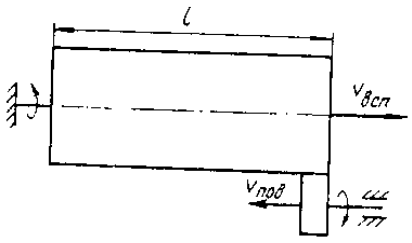

Рисунок 10.9

14. Визначити довжину деталі, якщо відомо, що час її обробки на круглошліфувальному верстаті складає 3 хвилини рис (10.9). Швидкість допоміжного руху деталі 0,04 м/с, а швидкість подачі шліфувального круга 0,02 м/с.

Відповідь: 3,6 м.

15. Пасажир пароплава, що рухається зі швидкістю 10 вузлів (1 вузол = 0,514 м/с) в ілюмінаторі побачив ніс лайнера, який плив паралельним курсом. Через 2,2 хвилини було видно корму лайнера. Визначити швидкість лайнера, якщо довжина пароплава 220 м, а довжина лайнера – вдвічі больша.

Відповідь: 19,7 вузлів = 36,4 км/год.

16. Швидкість катера відносно нерухомої води V_r = 18 км/год, швидкість самої річки V_e = 1 м/сек. Відстань між пунктами *A* і *B*, розташованими на березі, 90 км. Скільки часу, не враховуючи зупинок, триває рух катера з пункту *A* в пункт *B* і назад.

Відповідь: 9 годин 10 хвилин.

17. По двом прямим дорогам, що перетинаються рухаються два автомобіля з постійними швидкостями 60 км/год і 90 км/год. В момент, коли перше авто проїде перехрестя, друге авто ще не доїхало до перехрестя 1,5 км. Через який час після цього, як перехрестя проїде друге авто, відстань між автомобілями сягне 5,19 км.

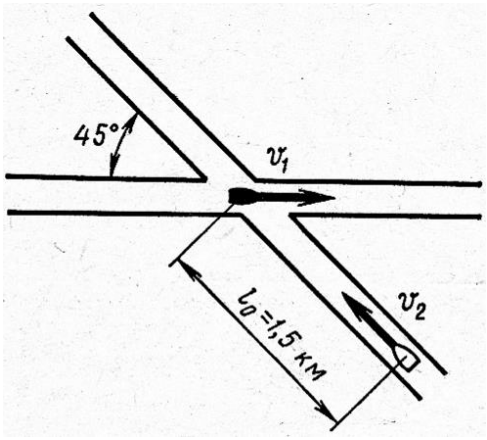

Рисунок 10.10

Відповідь: 2 хвилини.

18. На ескалаторі одночасно можуть знаходитись 120 людей, якщо на кожній сходинці буде стояти лише один пасажир. Час рейсу пасажира, що стоїть нерухомо, на ескалаторі складає 1,5 хвилини. Пасажир піднімається по ескалатору зі швидкістю 0,4 м/с і проходить 20 сходинок доки не досягне середини тунелю, схиленого під кутом 30^0. На яку глубину опускається ескалатор?

Відповідь: 36 м.

19. Якщо підніматись по нерухомому ескалатору, то необхідно пройти 110 сходинок. На скільки сходинок необхідно піднятись, якщо бігти по ескалатору за швидкістю в 1,2 рази більшою за швидкість ескалатора в напрямку протилежному руху ескалатора?

Відповідь: 60.

20. Катер відпливає від деякої точки A берега, тримаючи курс перпендикулярно до берега. B – точка протилежного берега, розташована на прямій AB, перпендикулярній до берега. AB = 600 м. V_r = 21,6 км/год, V_e = 1 м/сек. Визначити, на яку відстань BC від точки B катер буде віднесений течією, коли досягне протилежного берега (рис. 10.3).

Відповідь: 100 м.

21. Літак A летить зі швидкістю 800 км/год. Під кутом 125^0 до його курсу летить літак B зі швидкістю 1100 км/год. З якою швидкістю літаки віддаляються один від одного?

Відповідь: 1690 км/год.

22. Якщо підніматись по нерухомому ескалатору, то необхідно пройти 110 сходинок. На скільки сходинок необхідно піднятись, якщо бігти по ескалатору за швидкістю в 1,2 рази більшою за швидкість ескалатора в напрямку руху ескалатора?

Відповідь: 550.

23. За півкілометра від початку платформи машиніст потяга, що мав швидкість 72 км/год увімкнув гальма. За півхвилини до цього моменту від платформи по зустрічному шляху рушив інший потяг. На якій відстані від платформи потяги зустрінуться, якщо перший рухається з прискоренням $a_1 = -0{,}4$ м/с^2, а другий з прискоренням – $a_1 = 0{,}6$ м/с^2.

Відповідь: 376 м.

24. Два автомобіля рухаються по шосе зі швидкостями $V_1 = 90$ км/год та $V_2 = 60$ км/год. Знайти відносну швидкість першого автомобіля відносно другого автомобіля при русі в одному напрямку і назустріч один одному.

Відповідь: 30 км/год; 150 км/год.

25. Швидкість течії річки шириною b = 400 м пропорційна відстані до берега. В середині річки швидкість 2,5 м/с. Перпендикулярно течії річки від одного берега до другого рухається катер зі швидкістю 5 м/с. На якій відстані нижче течії катер дістанеться протилежного берега.

Відповідь: 100 м.

26. Відстань між двома пунктами вздовж річки $S = 2500$ км. Швидкість течії 1,8 м/с. Якою має бути власна швидкість пароплаву, щоб повний рейс здійснити за 12,5 доби? Час зупинок складає 15% від часу руху.

Відповідь: 21,2 км/год.

27. Пасажир автомобіля, що рухається зі швидкістю 72 км/год бачить скізь бокове скло кабіни траєкторії руху капель дощу під кутом 40^0 до вертикалі. Визначити абсолютну швидкість падіння капель дощу без врахування сили тертя капель на бокове скло автомобіля.

Відповідь: 23,8 м/с.

28. Знайти абсолютну швидкість будь-якої точки M ланки AB, що з'єднує кривошипи OA і O_1B вісей O і O_1 , якщо радіуси колес однакові: R=1 м; радіуси колес кривошипов: OA=O_1B=0,5 м. Швидкість екіпажа V_0 =20 м/сек. Швидкість точки M визначити для чотирьох моментів, коли кривошипи вертикальні або горизонтальні (рис 10.11). Колеса котяться по рейках без ковзання.

Відповідь: $V_1 = 10$ м/с; $V_2 = 30$ м/с; $V_3 = V_4 = 22{,}36$ м/с.

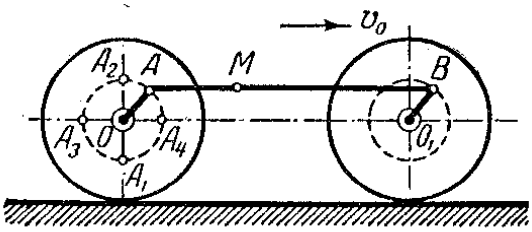

Рисунок 10.11

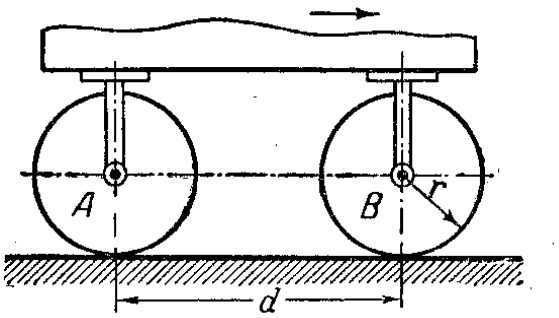

Рисунок 10.12

29. Колеса A і B вагона, що рухається зі швидкістю V, котяться по рейках без ковзання (рис 10.12). Радіуси колес r і відстань між вісями d. Визначити швидкість центра колеса A відносно системи координат, незмінно зв'язаній з колесом B.

Відповідь: $\frac{Vd}{r}$.

30. Корабель пливе на південь зі швидкістю 42,43 км/год. Другий корабель йде курсом на південний схід і пливе зі швидкістю 30 км/год. Знайти величину і напрямок другого корабля, які може визначити людина, що знаходиться на палубі першого корабля.

Відповідь: 30 км/год і напрямок північний схід.

Контрольні запитання:

1. Який рух матеріальної точки називається абсолютним?
2. Який рух матеріальної точки називається відносним?
3. Наведіть приклад складного руху точки.
4. Сформулюйте теорему складання швидкостей.

***Література*:**

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1970. – С. 212-218.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1965. – С. 350-358.
3. Рижкова С.А. Теоретична механіка. Практикум: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1992. – С. 43-56.

Додаток А

Таблиця похідних основних функцій

Функція	Похідна
C (const)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\lg x$	$\frac{0{,}4343}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Додаток Б

Таблиця основних інтегралів

1	$\int dx = x$
2	$\int x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
3	$\int \sin x dx = -\cos x$
4	$\int \cos x dx = \sin x$

ЗМІСТ

Вступ ……3

Практичне заняття № 1

Траєкторія і положення точки в прямокутній системі координат……..……..…4

Практичне заняття № 2

Дотичне і нормальне прискорення точки ……...…9

Практичне заняття № 3

Кутова швидкість та кутове прискорення…….....15

Практичне заняття № 4

Рівномірний і рівнозмінний рух точки…….……22

Практичне заняття № 5

Швидкість і прискорення точок тіла, що обертається……..33

Практичне заняття № 6

Визначення закону поступального руху тіла……..……44

Практичне заняття № 7

Визначення закону обертального руху тіла……52

Практичне заняття № 8

Визначення швидкостей точок плоскої фигури……..…57

Практичне заняття № 9

Визначення прискорення точок тіла при плоскому русі……..…65

Практичне заняття № 10

Складний рух точки ……..……70

Дадоток А ……79

Дадоток Б ……79