

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О. О. ЩЕГЛОВ, Т. В. ЄМЕЛЬЯНОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання типових розрахунків
з вищої математики
для студентів економічних спеціальностей

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2008

УДК 517: 681.3

Щеглов О.О., Ємельянова Т.В. Методичні вказівки до виконання типових розрахунків з вищої математики для студентів економічних спеціальностей. – Миколаїв: НУК, 2008. – 24 с.

Кафедра вищої математики

Типовий розрахунок №1 включає 4 завдання з лінійної, векторної алгебри, аналітичної геометрії та диференціального числення. Типовий розрахунок №2 включає 5 завдань на визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння та ряди. Завдання подано для 30 варіантів. До типових розрахунків запропоновані зразки їх виконання.

Методичні вказівки призначені для студентів першого курсу економічних спеціальностей.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, проф. А.М. Кузнецов

*Згідно з наказом ректора НУК № 08 від 09.01.2008
методичні вказівки публікуються в авторській редакції.
Відповідальність за редагування несе автор.*

© Видавництво НУК, 2008

Навчальне видання

**ЩЕГЛОВ Олександр Олександрович
ЄМЕЛЬЯНОВА Тетяна Василівна**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання типових розрахунків з вищої математики
для студентів економічних спеціальностей**

(українською мовою)

Комп'ютерна верстка *В.Г. Мазанко*
Коректор *М.О. Паненко*

Свідцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 17.04.08. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 1,4. Обл.-вид. арк. 1,5.
Тираж 150 прим. Вид. № 16. Зам. № 98. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

Типовий розрахунок № 1

Завдання 1

З двох заводів поставляються автомобілі для двох автопідприємств, потреби яких складають відповідно P_1 і P_2 машин. Перший завод випустив B_1 машин, а другий – B_2 машин. Витрати на перевіз з i -го заводу до j -го автопідприємства становлять C_{ij} ум. од. Знайти кількість машин, перевезених з i -го заводу до j -го автопідприємства, якщо загальні витрати на перевіз дорівнюють Q ум. од. Для знаходження кількості машин при розв'язанні системи рівнянь скористатися методом Гаусса. Дані наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Номер варіанта	P_1	P_2	B_1	B_2	C_{11}	C_{12}	C_{21}	C_{22}	Q
1	250	100	150	200	20	15	10	30	4500
2	75	175	150	100	4	3	2	4	850
3	125	125	100	150	1	3	4	2	550
4	160	140	180	120	3	4	5	1	880
5	60	180	140	100	2	7	4	5	1260
6	170	180	150	200	1	6	4	5	1530
7	120	140	130	130	2	5	6	3	980
8	180	100	90	190	3	5	1	8	1010
9	90	50	70	70	4	5	2	6	500

Продовж. табл. 1

Номер варіанта	P_1	P_2	B_1	B_2	C_{11}	C_{12}	C_{21}	C_{22}	Q
10	120	130	90	160	7	2	4	2	890
11	150	100	120	130	1	5	7	2	1070
12	50	180	110	120	2	8	4	5	1280
13	80	110	60	130	5	2	8	4	950
14	55	90	70	75	2	7	6	1	540
15	40	40	35	45	4	7	2	5	350
16	50	130	70	110	5	2	3	6	770
17	60	170	120	110	3	2	1	7	930
18	120	60	90	90	6	1	5	4	850
19	40	100	80	60	4	5	1	6	620
20	100	110	90	120	7	3	5	3	890
21	120	80	110	90	4	5	1	8	670
22	110	80	90	100	8	4	5	6	1050
23	180	160	120	220	3	7	2	5	1320
24	100	350	200	250	5	7	2	6	2600
25	70	60	80	50	1	7	5	3	370
26	80	130	160	50	8	3	1	6	1080
27	190	80	120	150	4	4	3	6	1110
28	60	190	130	120	2	6	7	1	1060
29	110	120	60	170	4	7	2	9	1280
30	130	60	50	140	6	1	4	7	960

Завдання 2

Залежність прибутку від обсягу виробництва задається кривою L_1 , а витрат на рекламу – кривою L_2 . Знайти інтервали обсягів виробництва, де прибуток перевищує витрати на рекламу. Дані наведені в табл. 2 (x і y вимірюються у тис. гривень). Результати скруглити до тис. гривень. Побудувати графіки.

Таблиця 2

№	L_1	L_2	№	L_1	L_2
1	$\frac{(x-150)^2}{150^2} + \frac{y^2}{50^2} = 1$	$y = \frac{1}{21}x + \frac{200}{7}$	16	$\frac{(x-300)^2}{300^2} + \frac{y^2}{200^2} = 1$	$y = \frac{2}{21}x + \frac{800}{7}$
2	$\frac{(x+100)^2}{100^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$	$y = 0,75x$	17	$\frac{(x+200)^2}{200^2} - \frac{y^2}{80^2} = 1$	$y = 0,6x$
3	$y = -0,002 \cdot (x-200)^2 + 80$	$y = 0,2x + 25$	18	$y = -0,004 \cdot (x-150)^2 + 90$	$y = 0,2x + 40$
4	$\frac{(x-200)^2}{200^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1$	$y = \frac{1}{14}x + \frac{400}{7}$	19	$\frac{(x-300)^2}{300^2} + \frac{y^2}{150^2} = 1$	$y = \frac{1}{6}x + 100$
5	$\frac{(x+100)^2}{100^2} - \frac{y^2}{30^2} = 1$	$y = 0,45x$	20	$\frac{(x+250)^2}{250^2} - \frac{y^2}{100^2} = 1$	$y = 0,6x$
6	$y = -0,005 \cdot (x-100)^2 + 50$	$y = 0,4x + 16$	21	$y = -0,006 \cdot (x-150)^2 + 135$	$y = 0,3x + 60$
7	$\frac{(x-200)^2}{200^2} + \frac{y^2}{150^2} = 1$	$y = \frac{3}{28}x + \frac{600}{7}$	22	$\frac{(x-350)^2}{350^2} + \frac{y^2}{200^2} = 1$	$y = \frac{4}{49}x + \frac{800}{7}$
8	$\frac{(x+150)^2}{150^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$	$y = 0,5x$	23	$\frac{(x+250)^2}{250^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$	$y = 0,3x$
9	$y = -0,001 \cdot (x-300)^2 + 90$	$y = 0,15x + 35$	24	$y = -0,001 \cdot (x-200)^2 + 40$	$y = 0,1x + 20$

№	L_1	L_2	№	L_1	L_2
10	$\frac{(x-250)^2}{250^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1$	$y = \frac{2}{15}x + \frac{80}{3}$	25	$\frac{(x-350)^2}{350^2} + \frac{y^2}{150^2} = 1$	$y = \frac{1}{7}x + 100$
11	$\frac{(x+150)^2}{150^2} - \frac{y^2}{20^2} = 1$	$y = 0,2x$	26	$\frac{(x+50)^2}{50^2} - \frac{y^2}{10^2} = 1$	$y = 0,3x$
12	$y = -0,003 \cdot (x-200)^2 + 120$	$y = 0,3x + 60$	27	$y = -0,01 \cdot (x-50)^2 + 25$	$y = 0,3x + 6$
13	$\frac{(x-250)^2}{250^2} + \frac{y^2}{150^2} = 1$	$y = \frac{3}{35}x + \frac{600}{7}$	28	$\frac{(x-150)^2}{150^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1$	$y = \frac{2}{9}x + \frac{200}{3}$
14	$\frac{(x+200)^2}{200^2} - \frac{y^2}{100^2} = 1$	$y = 0,75x$	29	$\frac{(x+50)^2}{50^2} - \frac{y^2}{25^2} = 1$	$y = 0,75x$
15	$y = -0,002 \cdot (x-250)^2 + 125$	$y = 0,3x + 60$	30	$y = -0,002 \cdot (x-350)^2 + 245$	$y = 0,2x + 135$

Завдання 3

Кількість молока, переробленого молокозаводом на протязі робочого дня, задається функцією $G(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$ (тон), де t – час (в годинах). Знайти середню за зміну ($t = 8$ год.) продуктивність праці, максимальну продуктивність праці і продуктивність в кінці робочого дня ($t = 8$ год). Дані наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
1	-0,025	0,40	9,0	16	-0,105	1,20	15,5
2	-0,030	0,45	9,5	17	-0,110	1,30	15,0
3	-0,035	0,50	10,0	18	-0,115	1,40	14,5
4	-0,040	0,55	10,5	19	-0,120	1,50	14,0
5	-0,045	0,60	11,0	20	-0,125	1,60	13,5
6	-0,050	0,65	11,5	21	-0,130	1,70	13,0
7	-0,055	0,70	12,0	22	-0,135	1,80	12,5
8	-0,060	0,75	12,5	23	-0,140	1,90	12,0
9	-0,065	0,80	13,0	24	-0,145	2,00	11,5
10	-0,070	0,85	13,5	25	-0,150	2,10	11,0
11	-0,080	0,90	14,0	26	-0,155	2,20	10,5
12	-0,085	0,95	14,5	27	-0,160	2,30	10,0
13	-0,090	0,100	15,0	28	-0,165	2,40	9,5
14	-0,095	1,05	15,5	29	-0,170	2,50	9,0
15	-0,100	1,10	16,0	30	-0,175	2,60	8,5

Завдання 4

Капітал в K млн. гривень може бути розміщений у банку під $P_1\%$ річних або інвестований у виробництво, причому очікувана ефективність складає $P_2\%$ за рік, а витрати задаються квадратичною залежністю з коефіцієнтом пропорційності a . Доход від інвестицій у виробництво обкладається податком у розмірі $P_3\%$. Скільки грошей треба вкласти у виробництво і скільки розмістити у банку, щоб отримати максимальний сукупний прибуток? Дані наведені у таблиці 4.

Таблиця 4

Номер варіанта	P_1	P_2	P_3	a	K	Номер варіанта	P_1	P_2	P_3	a	K
1	50	100	20	0,1	1	16	40	100	25	0,04	2
2	50	100	22	0,04	2	17	40	100	23	0,05	3
3	50	100	25	0,05	1	18	40	100	20	0,04	5
4	50	100	23	0,03	2	19	40	100	18	0,06	4
5	50	100	24	0,02	2	20	40	100	15	0,08	3
6	40	90	20	0,05	3	21	35	80	20	0,03	3
7	40	90	22	0,04	2	22	35	80	22	0,04	1
8	40	90	25	0,025	1	23	35	80	23	0,03	2
9	40	90	23	0,02	2	24	35	80	25	0,05	4
10	40	90	21	0,03	3	25	35	80	15	0,04	5
11	40	80	20	0,04	1	26	45	100	20	0,05	3
12	40	80	21	0,03	2	27	45	100	25	0,02	4
13	40	80	22	0,025	1	28	45	100	22	0,025	5
14	40	80	18	0,03	2	29	45	100	18	0,04	6
15	40	80	15	0,04	3	30	45	100	15	0,10	2

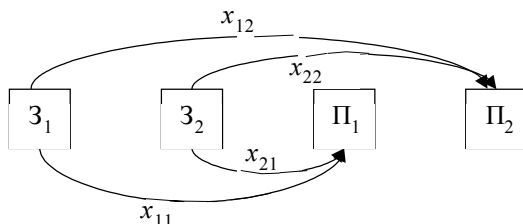
Зразок виконання типового розрахунку №1

Завдання 1

З двох заводів поставляються автомобілі для двох автопідприємств, потреби яких складають відповідно 150 і 400 машин. Перший завод випустив 250 машин, а другий 300 машин. Витрати C_{ij} на перевіз машин з i -го заводу до j -го автопідприємства становлять відповідно $C_{11} = 5$, $C_{12} = 10$, $C_{21} = 10$, $C_{22} = 7$ (ум. од.). Знайти кількість машин, перевезених з i -го заводу до j -го автопідприємства, якщо загальні витрати на перевіз дорівнюють 4250 ум. од.

Розв'язок

Нехай x_{ij} – кількість машин, що поставляються з i -го заводу до j -го автопідприємства. ($i, j = 1, 2$).



Маємо систему рівнянь.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} & & & = 250 \\ & x_{21} + x_{22} & & = 300 \\ x_{11} & & + x_{21} & = 150 \\ & x_{12} & & + x_{22} = 400 \\ 5x_{11} + 10x_{12} + 10x_{21} + 7x_{22} & & & = 4250 \end{cases}$$

Перепишемо систему

$$\begin{cases} 5x_{11} + 10x_{12} + 10x_{21} + 7x_{22} & = 4250 \\ x_{11} + x_{12} & = 250 \\ x_{11} & + x_{21} = 150 \\ & x_{21} + x_{22} = 300 \\ & x_{12} + x_{22} = 400 \end{cases}$$

Систему розв'язуємо методом Гауса, перетворюючи розширену матрицю

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 10 & 10 & 7 & 4250 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cccc|c} I & 5 & 10 & 10 & 7 & 4250 \\ 1-5II & 0 & 5 & 10 & 7 & 3000 \\ I-5II & 0 & 10 & 5 & 7 & 3500 \\ IV & 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \\ V & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c|cccc|c} I & 5 & 10 & 10 & 7 & 4250 \\ II & 0 & 5 & 10 & 7 & 3000 \\ 2II-III & 0 & 0 & 15 & 7 & 2500 \\ IV & 0 & 0 & 1 & 1 & 300 \\ II-5V & 0 & 0 & 10 & 2 & 1000 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|llll|l} I & 5 & 10 & 10 & 7 & 4250 \\ II & 0 & 5 & 10 & 7 & 3000 \\ III & 0 & 0 & 15 & 7 & 2500 \\ III - 15IV & 0 & 0 & 0 & -8 & -2000 \\ 2III - 3V & 0 & 0 & 0 & 8 & 2000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow 5x_{11} = 4250 - 10 \cdot 150 - 10 \cdot 50 - 7 \cdot 250 \rightarrow x_{11} = 100 \\ \rightarrow 5x_{12} = 3000 - 10 \cdot 50 - 7 \cdot 250 \rightarrow x_{12} = 150 \\ \rightarrow 15x_{21} = 2500 - 7 \cdot 250 \rightarrow x_{21} = 50 \\ \rightarrow 8x_{22} = 2000 \quad x_{22} = 250 \end{array}$$

(Враховано, що останні два рядки однакові.)

Перевірка:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot 100 + 10 \cdot 150 + 10 \cdot 50 + 7 \cdot 250 = 4250 \\ 100 + \quad 150 \quad \quad \quad = 250 \\ 100 \quad \quad + \quad 50 \quad \quad = 150 \\ \quad \quad \quad 50 + \quad 250 \quad = 300 \\ \quad \quad 150 \quad \quad + \quad 250 = 400 \end{array} \right.$$

Таким чином $x_{11} = 100$, $x_{12} = 150$, $x_{21} = 50$, $x_{22} = 250$.

Завдання 2

Залежність прибутку від обсягу виробництва задається кривою L_1 :
 $y = -0,001 \cdot (x - 300)^2 + 90$, де x та y вимірюються у тисячах гривень.
 Залежність витрат на рекламу від обсягів виробництва задається кри-

вою L_2 : $y = \frac{3}{40}x + 45$.

Знайти інтервали обсягів виробництва, де прибуток перевищує витрати на рекламу. (Результати округлити до тисяч гривень. Побудувати графіки.)

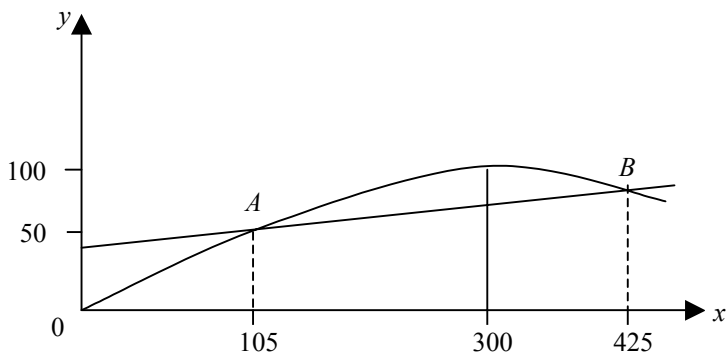
Розв'язування

Для знаходження потрібних інтервалів знаходимо точки перетину графіків функцій прибутку та реклами:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -0,001(x^2 - 600x + 90000) + 90 \Rightarrow \frac{3}{40}x + 45 = -0,001x^2 + 0,6x \Rightarrow \\ y = \frac{3}{40}x + 45 \quad \quad \quad \Rightarrow 0,001x^2 - 0,53x + 45 = 0 \end{array} \right.$$

Знаходимо корені квадратного рівняння: $x_{1,2} = 425; 105$.

Будуємо графіки функцій прибутку та реклами в залежності від обсягу виробництва.



Точки A і B перетину цих графіків визначають відповідні інтервали. На проміжку $(105; 425)$ прибуток перевищує витрати на рекламу.

Завдання 3

Кількість молока, переробленого молокозаводом на протязі робочого дня задається формулою $G(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2 + 8t$ (тон), де t – час (в годинах). Знайти середню за зміну ($t = 8$ год.) продуктивність праці, максимальну продуктивність праці і продуктивність в кінці робочого дня ($t = 8$ год.)

Розв'язок

Середня за зміну продуктивність праці

$$g_{\text{сеп}} = \frac{G(t)}{t} = -0,02t^2 + 0,3t + 8$$

$$g_{\text{сеп}}(8) = -0,02 \cdot 64 + 0,3 \cdot 8 + 8 = 9,12 \text{ (T / год)}$$

Продуктивність праці в будь-який момент часу

$$g(t) = G'(t) = -0,06t^2 + 0,6t + 8$$

Продуктивність праці в кінці робочого дня

$$g(8) = -0,06 \cdot 64 + 0,6 \cdot 8 + 8 = 8,96 \text{ (T / год)}.$$

Максимальну продуктивність праці знаходимо з умови

$$g'(t) = 0 \quad g'(t) = -0,12t + 0,6 \quad g'(t) = 0 \rightarrow t = 5 \text{ (год)}$$

Тоді $g_{\max} = g(5) = -0,06 \cdot 25 + 0,6 \cdot 5 + 8 = 9,5$ (Т / год).

Бачимо, що продуктивність праці в кінці робочого дня нижча за середню і тим більше нижча за максимальну.

Завдання 4

Капітал в 2 млн. гривень може бути розміщений у банку під 50% річних або інвестований у виробництво, причому очікувана ефективність складає 100% за рік, а витрати задаються квадратичною залежністю з коефіцієнтом пропорціональності 0,1. Доход від інвестицій у виробництво обкладається податком у розмірі 15%. Скільки грошей треба вкласти у виробництво і скільки розмістити у банку, щоб отримати максимальний сукупний прибуток?

Розв'язок

Нехай x млн. гривень інвестується у виробництво, а $2-x$ – розміщено у банку під проценти. Тоді розміщений капітал через 1 рік буде дорівнювати $(2-x)\left(1 + \frac{50}{100}\right) = 3 - \frac{3}{2}x$, а капітал, вкладений у виробництво:

$x\left(1 + \frac{100}{100}\right) = 2x$. Витрати складуть $0,1x^2$, тобто доход від вкладення

у виробництво $D = 2x - 0,1x^2$. Податок дорівнює $(2x - 0,1x^2)\frac{15}{100}$, тобто

чистий прибуток складе $\left(1 - \frac{15}{100}\right)(2x - 0,1x^2)$. Загальний прибуток через

1 рік буде дорівнювати $P = 3 - \frac{3}{2}x + 0,85(2x - 0,1x^2) = 3 + 0,2x - 0,085x^2$.

Треба знайти максимальне значення цієї функції на відрізку $[0; 2]$.

Знаходимо P' . $P' = 0,2 - 0,17x$.

З умови $P' = 0$ знаходимо x_0 . $x_0 = \frac{0,2}{0,17} = 1,176$ (млн. гривень).

$P''(x) = -0,17 < 0$, тобто з достатньої умови екстремуму випливає, що x_0 – точка максимуму функції. Таким чином, щоб отримати максимальний сукупний прибуток, треба вкласти 1,176 млн. гривень у виробництво, а 0,824 млн. гривень розмістити у банку.

Типовий розрахунок № 2

Завдання 1

Через скільки років приріст капіталу складе Δk гривень, якщо чисті інвестиції задані формулою $I(t) = S_0 \cdot t^{\frac{m}{n}}$. Дані наведені в табл. 5. (Результати скруглити до цілих місяців)

Таблиця 5

Номер варіанта	Δk	S_0	m	n	Номер варіанта	Δk	S_0	m	n
1	25000	5000	1	2	16	62500	8000	11	13
2	27500	5200	5	6	17	65000	8200	12	17
3	30000	5400	3	4	18	67500	8400	11	14
4	32500	5600	7	9	19	70000	8600	13	15
5	35000	5800	5	8	20	72500	8800	13	16
6	37500	6000	6	7	21	75000	9000	11	15
7	40000	6200	9	10	22	77500	9200	10	13
8	42500	6400	2	3	23	80000	9400	10	17
9	45000	6600	4	5	24	82500	9600	11	12
10	47500	6800	4	7	25	85000	9800	14	17
11	50000	7000	3	7	26	87500	10000	15	17
12	52500	7200	3	8	27	90000	10200	15	19
13	55000	7400	1	5	28	92500	10400	13	19
14	57500	7600	1	3	29	95000	10600	12	19
15	60000	7800	2	5	30	97500	10800	11	19

Завдання 2

Для функції Кобба-Дугласа $f(t)$ знайти об'єм продукції, виробленої за T років. Дані наведені в табл. 6.

Таблиця 6

Номер варіанта	$f(t)$	T	Номер варіанта	$f(t)$	T
1	$2,7te^{2t}$	5	16	$3t \ln(1+t)$	4
2	$2,2te^{3t}$	3	17	$0,7t \ln(1+t^2)$	2
3	$0,6t^2e^{3t}$	2	18	$2,3t^2 \ln(1+t)$	3
4	$0,75t^2e^{2t}$	3	19	$0,2t^3 \ln(1+t)$	2
5	$0,3te^{4t}$	4	20	$3,4 \ln(1+t^2)$	4
6	$0,25t^2e^{4t}$	2	21	$1,2t^2 \ln(1+t^3)$	2
7	$4\sqrt{t} e^{\frac{3}{t^2}}$	3	22	$12 \ln(1+t)$	5
8	$3\sqrt[3]{t} e^{t^{\frac{4}{3}}}$	2	23	$5,4t \sin \frac{t}{2}$	2
9	$0,8te^{t^2}$	3	24	$2,8t \sin \frac{t}{3}$	3
10	$0,7\sqrt[4]{t} e^{\frac{5}{t^4}}$	4	25	$1,8t \sin \frac{t}{4}$	5
11	$3,6t \cdot 3^{2t}$	3	26	$5,1t \sin \frac{t^2}{4}$	2
12	$0,15t \cdot 3^{t^2}$	2	27	$2,3t^2 \sin \frac{t^3}{16}$	2
13	$0,9\sqrt[3]{t^2} e^{\frac{5}{t^3}}$	3	28	$0,4t \sin \frac{t^2}{8}$	4
14	$1,7t \cdot 4^{2t}$	2	29	$0,9 \sin^2 \frac{t}{4}$	2
15	$0,8t^2 \cdot 4^{0,5t^3}$	2	30	$\frac{\ln(1 + \operatorname{tg} t/4)}{\cos^2(t/4)}$	4

Завдання 3

Знайти оптимальне розподілення ресурсів для функції випуску $z = b_0 x^{\frac{m}{n}} y$, якщо витрати на фактори x і y лінійні і задаються цінами P_1 і P_2 . Дані наведені в таблиці 7.

Таблиця 7

Номер варіанта	m	n	P_1	P_2	Номер варіанта	m	n	P_1	P_2
1	1	2	1	3	16	1	3	5	7
2	2	3	2	1	17	2	3	4	6
3	2	5	3	2	18	3	4	4	6
4	1	4	2	1	19	3	5	6	7
5	3	2	1	2	20	2	4	6	8
6	3	1	2	2	21	4	5	2	1
7	4	5	3	1	22	2	3	5	7
8	1	3	4	2	23	1	5	3	6
9	4	3	1	2	24	1	2	5	6
10	3	4	3	2	25	4	5	4	6
11	5	2	3	4	26	5	2	7	3
12	1	2	3	4	27	1	7	5	1
13	1	3	3	2	28	1	6	3	4
14	2	5	1	2	29	2	7	7	5
15	2	3	4	5	30	3	8	1	5

Завдання 4

Знайти функцію доходу, якщо відомі функція споживання $c(t)$ та початкова умова $y(0)$.

Таблиця 8

№ варіанта	Диференціальне рівняння	Функція споживання $c(t)$	Початкова умова $y(0)$
1	$y' = \frac{1}{y}$	0	0,8
2	$y' = \frac{1}{2}(6 - y)y$	0	0,5
3	$y' = (4 - y)y$	0	1
4	$y' = 2$	0	3
5	$y' = \frac{y}{\ln y}$	0	e^2
6	$y' = \frac{1}{\ln^2 y} \cdot y$	0	$\sqrt{e}$

Продовж. табл. 8

№ варіанта	Диференціальне рівняння	Функція споживання $c(t)$	Початкова умова $y(0)$
8	$y' = (2 - 3y)y$	0	$\frac{1}{3}$
9	$y' = \frac{1}{\ln^3 y} \cdot 3y$	0	$\sqrt{e}$
10	$y' = \frac{1}{y^2 + 9} \cdot 2y$	0	e^2
11	$y' = \frac{1}{\cos \ln y} \cdot y$	0	e^{fi2}
12	$y' = \frac{1}{y^3 + 8} \cdot y$	0	$\sqrt{e}$
13	$y' = \frac{1}{y + \ln y} \cdot y$	0	$\sqrt[3]{e}$
14	$y' = \frac{1}{\sqrt{y} + y} \cdot 0,8y$	0	4
15	$y' = \frac{1}{y^2 + \ln y} \cdot 1,2y$	0	1
16	$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{y} + y \cos y} \cdot y$	0	$\frac{\pi}{3}$
17	$y' = \frac{1}{\sqrt{y} + y^2 \sin y}$	0	$\frac{\pi}{2}$
18	$y' = \frac{1}{\sqrt{y} + y^2 \ln y}$	0	e
19	$y' = \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt[4]{y}}$	0	16
20	$y' = 4y$	t	2
21	$y' = \frac{4}{3}y$	$\frac{8}{3}t^2$	4
22	$y' = 4y$	$4t$	2
23	$y' = 2y$	$2t$	3

Продовж. табл. 8

№ варіанта	Диференціальне рівняння	Функція споживання $c(t)$	Початкова умова $y(0)$
24	$y' = 3y$	$\frac{3}{2}t^2$	3
25	$y' = 2y$	$2t^2$	2
26	$y' = 5y$	$5e^{3t}$	4
27	$y' = 4y$	$4e^t$	3
28	$y' = 3y$	$\frac{3}{2}e^{2t}$	3
29	$y' = 3y$	$\frac{4}{3}t$	3
30	$y' = 2y$	$4t$	2

Завдання 5

Вартість обладнання з урахуванням поточних ремонтів може бути

представленою знакопереміжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$. Дослідити цей ряд

на абсолютну і умовну збіжність. У який рік, коли відбувався поточний ремонт, залишкова вартість обладнання стане меншою за N % від початкової? Розрахунки вести з точністю до 1 гривні.

Таблиця 9

Номер варіанта	u_n (млн. грн.)	N	Номер варіанта	u_n (млн. грн.)	N
1	$\frac{2,8}{n^2 + 1}$	75	16	$\frac{7,4}{9n^2 + 4}$	80
2	$\frac{n+1}{2n(4n+1)}$	80	17	$\frac{4,2}{4n^2 - 1}$	90
3	$\frac{4,2}{n}$	40	18	$\frac{n+3}{4^n}$	80
4	$\frac{3,6}{n^2}$	80	19	$\frac{2n+1}{5^n}$	70

Продовж. табл. 9

Номер варіанта	u_n (млн. грн.)	N	Номер варіанта	u_n (млн. грн.)	N
5	$\frac{n+2}{3^n}$	7	20	$\frac{n^2}{4^n}$	45
6	$\frac{n+1}{2^n}$	60	21	$\frac{(n+2)^2}{4^{2n}-1}$	90
7	$\frac{2,5}{2n^2-1}$	90	22	$\frac{2n-1}{4^n}$	50
8	$\frac{n}{3^n}$	60	23	$\frac{n(n+1)}{5^n}$	60
9	$\frac{2n+1}{3^n}$	70	24	$\frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$	70
10	$\frac{n+3}{8n(2n+1)}$	80	25	$\frac{n}{n^4+1}$	75
11	$\frac{5,2}{2n^2-1}$	90	26	$\frac{2n}{\sqrt{n^4+4}}$	70
12	$\frac{n+4}{3n(n+2)}$	80	27	$\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$	70
13	$\frac{n}{n^2+9}$	90	28	$\frac{n^2}{5^n}$	50
14	$\frac{8}{3n+1}$	75	29	$\frac{n^2}{6^n}$	55
15	$\frac{5}{9n^2-4}$	90	30	$\frac{n}{\sqrt{n^4+0,25}}$	80

Зразок виконання типового розрахунку №2.

Завдання 1

Через скільки років приріст капіталу складе $\Delta k = 50\,000$ гривень, якщо задана функція чистих інвестицій $I(t) = 7000\sqrt{t}$?

Розв'язок

Позначаючи шуканий проміжок часу через T , можна записати

$$\Delta k = \int_0^T I(t) dt.$$

Підставляючи числові значення, маємо

$$50\,000 = \int_0^T 7000t^{1/2} dt.$$

Обчислимо визначений інтеграл

$$\int_0^T 7000t^{1/2} dt = 7000 \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_0^T = 4666,67 T^{3/2}.$$

Тепер рівняння запишемо у вигляді

$$4666,67 T^{3/2} = 50\,000.$$

Скорочуючи на сталий множник, маємо

$$T^{3/2} = 10,71.$$

Піднесемо обидві частини до степені $2/3$; знайдемо T :

$$T = (10,71)^{2/3} = 4,86.$$

Округляючи до цілих місяців, маємо, що приріст капіталу складе $\Delta k = 50\,000$ гривень через 4 роки 11 місяців.

Завдання 2

Знайти об'єм продукції, виробленої за 4 роки, якщо функція Кобба-Дугласа має вигляд $f(t) = te^{3t}$.

Розв'язок

Функція Кобба-Дугласа, що включає витрати труда і капіталу, пов'я-

зана з об'ємом виробленої за T років продукції наступним співвідношенням

$$Q = \int_0^T f(t) dt.$$

Підставляючи в формулу дані задачі, маємо

$$Q = \int_0^4 t e^{3t} dt.$$

Для знаходження інтегралу використовуємо метод інтегрування частинами. Нехай $u = t$, $dv = e^{3t} dt$. Тоді $du = dt$, $v = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3} e^{3t}$

Таким чином

$$\begin{aligned} Q &= t \frac{e^{3t}}{3} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{e^{3t}}{3} dt = \frac{4}{3} e^{12} - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^4 = \frac{1}{9} (12e^{12} - e^{12} + 1) = \\ &= \frac{11e^{12} + 1}{9} \approx 1,99 \cdot 10^5 \text{ (ум. од.)} \end{aligned}$$

Завдання 3

Знайти оптимальне розподілення ресурсів для функції випуску $z = b_0 x y^{3/2}$, якщо витрати на фактори x і y лінійні і задаються цінами $p_1 = 1$ і $p_2 = 2$.

Розв'язок

В точці $M_0(x_0; y_0)$, що задає оптимальне розподілення ресурсів x і y , лінія рівня функції витрат $z = x + 2y$ є дотичною до ізокванти $b_0 x y^{3/2} = c_1$.

Ізокванта представляється графіком функції $y = \left(\frac{c_1}{b_0 x} \right)^{\frac{2}{3}}$. Лінії рівня

функції витрат – це прямі $x + 2y = c_2$, кутовий коефіцієнт яких $k = -\frac{1}{2}$.

Таким чином, умова дотику має такий вигляд
$$\left[\left(\frac{c_1}{b_0 x} \right)^{\frac{2}{3}} \right]_{x_0}^1 = -\frac{1}{2},$$

звідки $x_0 = \frac{4^{3/5} \cdot c_1^{2/5}}{3^{3/5} \cdot b_0^{2/5}}$ і відповідно $y_0 = \left(\frac{c_1}{b_0} \right)^{2/5} \left(\frac{4}{3} \right)^{-2/5}$.

Тому фактори x і y треба розподілити у співвідношенні $\frac{x_0}{y_0} = \frac{4}{3}$.

Завдання 4

Знайти функцію доходу $y = y(t)$, якщо відомо, що величина споживання задається функцією $c(t) = 6t$, коефіцієнт пропорційності $k = 1$, $y(0) = 16$

Розв'язок

Модель зростання з урахуванням споживання має вигляд:

$$y' = ky - c(t)$$

Для даної задачі

$$y' = y - 6t,$$

тобто функція доходу задовольняє лінійному неоднорідному диференціальному рівнянню першого порядку. Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$y(t) = u(t) \cdot v(t)$$

$$y'(t) = u'v + uv'$$

Підставляємо значення $y'(t)$ в диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} u'v + uv' - uv &= -6t \\ u'v + u(v' - v) &= -6t \\ v' - v = 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} &= v \rightarrow \frac{dv}{v} = dt \end{aligned}.$$

Після інтегрування останнього виразу маємо

$$\ln|v| = t \rightarrow v = e^t.$$

Підставляємо знайдене значення функції $v(t)$ в диференціальне рівняння

$$u' \cdot e^t = -6t \rightarrow \frac{du}{dt} = -6te^{-t} \rightarrow du = -6te^{-t} dt$$

Останній вираз інтегруємо частинами

$$\begin{aligned} u_1 &= t, & dv_1 &= e^{-t} dt & \int u_1 dv_1 &= u_1 v_1 - \int v_1 du_1 \\ du_1 &= dt, & v_1 &= -e^{-t} \\ \int du &= -6 \int te^{-t} dt \\ u &= -6 \left[-te^{-t} + \int e^{-t} dt \right] = 6(te^{-t} + e^{-t}) + c = 6(1+t)e^{-t} + c \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } y = uv = [6(1+t) + c]e^t = 6(1+t) + ce^t$$

Значення сталої c знаходимо з початкової умови: оскільки $y(0) = u(0) \cdot v(0) = 16$, то

$$16 = 6(1+0) + ce^0 = 6 + c \rightarrow c = 10$$

Остаточо маємо

$$y(t) = 6(1+t) + 10e^t.$$

Завдання 5

Вартість обладнання з урахуванням поточних ремонтів представляється знакопереміжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 1}{3^n}$. Дослідити цей ряд на абсолютну і умовну збіжність. У який рік, коли відбувався поточний ремонт, залишкова вартість обладнання стане меншою за 60% від початкової?

Розв'язок

Вартість обладнання з урахуванням поточних ремонтів представляється рядом, знаки якого строго чергуються

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{9} + \frac{10}{27} - \frac{17}{81} + \frac{26}{243} - \dots \text{ (збігається за ознакою Лейбніца)}$$

$$u_{n+1} < u_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

або $0,6666667 - 0,5555556 + 0,3703704 - 0,2098765 + 0,1069959 -$ (щоб отримати результати з точністю до 1 гривні, треба взяти 7 знаків після коми).

Запишемо суми ряду

$$S_1 = 0,6666667$$

$$S_2 = 0,111111$$

$$S_3 = 0,4814815$$

$$S_4 = 0,271605$$

$$S_5 = 0,3786009, \text{ що складає } 56,79\% \text{ від початкової вартості}$$

$$S_5 < 60 \% S_1 \text{ на п'ятому році.}$$

Таким чином, залишкова вартість становить

$$S_{\text{ЗАЛ}} = S_5 \approx 378601 \text{ гривень.}$$

Досліджуємо отриманий ряд на абсолютну і умовну збіжність. Для цього складаємо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3^n}.$$

Цей знакосталий ряд досліджуємо на збіжність за ознакою Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2 + 1} = \frac{1}{3} < 1, \text{ ряд збігається,}$$

тому початковий знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Рекомендована література

1. *Бугір М.К.* Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: Видавничий центр "Академія", 1998. – 272с.
2. *Бугір М.К.* Математика для економістів. – Т.: Підручники та посібники, 2001. – 192с.
3. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика.: Навч. посіб. – К: Вища школа, 1993. – 648с.
4. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов. – М.: Инфра – М, 1997. – 208с.
5. Высшая математика для экономистов. / Под. ред. *Н.Ш. Кремера*. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 471с.
6. *Щеглов О.О., Неделько Є.Ю.* Збірник задач з вищої математики для студентів економічних спеціальностей. – Миколаїв: НУК, 2005. – 48с.