

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**Т.В. ЄМЕЛЬЯНОВА, А.В. ВАРШАМОВ,
М.Б. БОНДАРЕНКО**

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Конспект лекцій

Частина 1

Рекомендовано Методичною радою НУК



Миколаїв
НУК
2004

УДК 519.8
ББК 22.18
Є 60

Рекомендовано Методичною радою НУК

Рецензент Т.А. Юрченко, кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Ємельянова Т.В., Варшамов А.В., Бондаренко М.Б.
Є 60 Математичні методи дослідження операцій: Конспект
лекцій. – Миколаїв: НУК, 2004. – Ч.1. – 60 с.

Розглянуто основні принципи та задачі дослідження операцій, висвітлено загальну задачу лінійного програмування та її властивості. Дано обґрунтування основних методів розв'язування задач і розглянуто їх алгоритми. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується прикладами.

Призначено для студентів, які вивчають дослідження операцій та математичне програмування.

УДК 519.8
ББК 22.18

© Ємельянова Т.В., Варшамов А.В.,
Бондаренко М.Б., 2004
© Видавництво НУК, 2004

ВСТУП

Дослідження операцій – це мистецтво давати погані відповіді на ті практичні питання, на які даються ще гірші відповіді іншими методами.

Т. Саати

В останні роки наука приділяє все більшу увагу питанням організації й управління; це обумовлюється цілим рядом причин. Швидкий розвиток і ускладнення техніки, збільшення масштабів і вартостей проведених заходів, широке впровадження автоматизації в сферу управління – усе це приводить до необхідності наукового аналізу складних цілеспрямованих процесів під кутом зору їхньої структури й організації. Від науки вимагаються рекомендації щодо найкращого (оптимального) керування такими процесами.

Ці потреби практики викликали до життя спеціальні наукові методи, що прийнято поєднувати за назвою "дослідження операцій". Під цим мається на увазі застосування математичних та кількісних методів для обґрунтування рішень у всіх сферах цілеспрямованої людської діяльності.

Необхідність прийняття рішень так само стара, як людство. Споконвіку люди, приступаючи до здійснення своїх заходів, роздумували над їхніми можливими наслідками і приймали рішення, вибираючи тим чи іншим способом залежні від них параметри. Але

до певного часу рішення могли прийматися без спеціального математичного аналізу, просто на основі досвіду і здорового глузду.

Наведемо приклад. Припустимо, організовується робота міського транспорту. В нашому розпорядженні є деяка кількість транспортних засобів. Необхідно прийняти ряд рішень, зокрема яку кількість і які транспортні засоби направити по тому чи іншому маршруту, як змінювати частоту проходження машин у залежності від часу доби, де розмістити зупинки тощо. Ці рішення є досить відповідальними. У силу складності явища наслідки кожного з них не очевидні; для того щоб уявити собі ці наслідки, потрібно провести розрахунки.

Звичайно, в цьому прикладі при виборі рішення можна діяти інтуїтивно, спираючись на досвід і здоровий глузд. Але рішення виявляться набагато розумнішими, якщо вони будуть підкріплені кількісними й математичними розрахунками. Ці попередні розрахунки допоможуть уникнути тривалого й дорогого пошуку правильного рішення.

Найбільш складним є прийняття рішень, коли мова йде про заходи, досвіду в проведенні яких ще не існує.

Узагалі, чим складніший захід, чим більше вкладається в нього коштів, чим ширший спектр його можливих наслідків, тим менш припустимі так звані "вольові" рішення, що не спираються на науковий розрахунок, і тим більше значення дістає сукупність наукових методів, які дозволяють заздалегідь оцінити наслідки кожного рішення, відкинути неприпустимі варіанти і рекомендувати ті, котрі є найбільш удалими.

Такими математичними розрахунками і займається наука *дослідження операцій*. Це – порівняно молода наука. Її виникнення звичайно відносять до років другої світової війни, коли в збройних силах США й Англії були сформовані спеціальні наукові групи для підготовки рішень щодо способів організації й забезпечення бойових дій. Треба відзначити, що подібними дослідженнями (правда, не під такою назвою) займалися і до війни, зокрема в нашій країні, де були широко розвинені математичні методи оцінки ефективності стрільби, що в сучасному розумінні являють собою частину дослідження операцій. Зародившись у галузі переважно військових задач, дослідження операцій з часом вийшло з цієї вузької сфери. У даний час дослідження операцій – наука, що за-войо-

вус все більше галузей застосування: промисловість, сільське господарство, торгівлю, транспорт, охорону здоров'я і т. д.

Щоб ближче познайомитися зі специфікою задач дослідження операцій та їх характерними рисами, наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Завод випускає вироби певного виду. Для забезпечення високої якості цих виробів організовується система вибіркового контролю. Потрібно раціонально організувати цей контроль, тобто вибрати розмір контрольної партії, послідовність контрольних операцій, правила бракування виробів тощо так, щоб забезпечити заданий рівень якості при мінімальних витратах.

Приклад 2. Для реалізації певної маси сезонних товарів створюється мережа тимчасових торгових точок. Потрібно вибрати параметри цієї мережі: число точок та їхнє розміщення, кількість персоналу, продажні ціни товарів тощо – так, щоб забезпечити максимальну економічну ефективність розпродажу.

Приклад 3. Організовується повітряний наліт групи літаків-бомбардувальників на промисловий район супротивника. У нашому розпорядженні – певна кількість літаків з відомими льотно-тактичними даними й озброєнням. Потрібно вибрати параметри нальоту: висоту польоту, ешелонування літаків у строю, точки прицілювання окремих літаків і груп, спосіб бомбометання (залпом, серією) тощо – так, щоб у результаті нальоту максимально знизити промисловий потенціал району.

Приклад 4. Організовується постачання сировиною групи промислових підприємств. Можливі постачальники сировини розміщені в різних географічних пунктах країни і зв'язані з групою підприємств різними шляхами сполучення (з різними тарифами). Потрібно раціонально розмістити замовлення на сировину, щоб потреби групи підприємств були задоволені в заданий термін і при мінімальних витратах на перевезення.

Приклад 5. Складний технічний пристрій час від часу може відмовляти (виходити з ладу). Щоб ліквідувати аварію, необхідно локалізувати несправність (знайти її причину). Потрібно розробити систему тестів, що дозволяє з визначеною, досить великою ймовірністю локалізувати несправність за мінімальний час.

Приклад 6. Організовується медичне обстеження групи населення з метою виявлення деяких захворювань. На обстеження виділені певні кошти, устаткування і медичний персонал. Потрібно

розробити план обстеження: кількість пунктів, їхнє розміщення, послідовність оглядів, вид і кількість аналізів тощо, щоб до заданого терміну виявити максимальний відсоток захворілих.

Незважаючи на те, що приклади відносяться до різних галузей практики, в них легко проглядаються подібні риси. У кожному з них мова йде про якийсь *захід* (чи систему заходів), що має певну *мету*. Задано деякі *умови*, що характеризують обстановку заходу, змінювати які ми не можемо (наприклад, відпущені кошти). У рамках цієї системи умов потрібно прийняти якесь *рішення* для того, щоб захід у деякому значенні був найбільш вигідним (чи найменш збитковим). Відповідно до цих загальних рис виробляються і загальні прийоми вирішення подібних задач, які в сукупності складають методологічну основу дослідження операцій.

Задачі дослідження операцій, що відносяться до різних галузей, мають спільні риси, і при їхньому вирішенні застосовуються подібні методологічні прийоми. Наприклад, методика кількісного дослідження, вироблена для аналізу процесів утворення черг у системах масового обслуговування, може майже без змін бути перенесена на деякі задачі електронної обчислювальної техніки, а також задачі, пов'язані з організацією системи протиповітряної оборони.

Ціль, що стоїть у процесі дослідження операцій, полягає в тому, щоб виявити найкращий (оптимальний) спосіб дії при вирішенні тієї чи іншої задачі організаційного керування в умовах, коли мають місце обмеження техніко-економічного чи якого-небудь іншого характеру. Коли використовують термін *дослідження операцій*, то майже завжди мають на увазі застосування математичних методів для моделювання систем та аналізу їхніх характеристик. Дійсно, математичні моделі й методи займають у дослідженні операцій центральне місце. Однак вирішення задач організаційного керування далеко не завжди зводиться до побудови моделей і виконання відповідних обчислень. Це обумовлено, зокрема, тим, що в ході формування керуючих рішень нерідко зустрічаються з факторами, які для правильного вирішення поставленої задачі є істотними, але не піддаються строгій формалізації і, отже, не можуть безпосередньо вводитися в математичну модель. Одним із факторів такого роду є фактор людської діяльності.

1. ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ЯК НАУКА Й МИСТЕЦТВО

У даному розділі будуть висвітлені основні поняття дослідження операцій та цілі, які ставить перед собою ця наука. Також будуть наведені основні типи задач дослідження операцій і методика його проведення.

1.1. Операція. Ефективність операції

Під *операцією* будемо розуміти будь-який захід (чи систему дій), об'єднаний єдиним задумом і спрямований на досягнення певної мети.

1.1.1. Приклади операцій

1. Система заходів, спрямована на підвищення надійності технічного пристрою.

2. Відбиття повітряного нальоту засобами ППО.

3. Розміщення замовлень на виробництво устаткування.

4. Розвідувальний пошук групи літаків у тилу супротивника.

5. Запуск групи штучних супутників Землі для встановлення системи телевізійного зв'язку.

6. Система перевезень, що забезпечує постачання ряду пунктів товарами певного виду.

1.1.2. Основні поняття дослідження операцій

Операція завжди є *керуванням заходом*, тобто від нас залежить вибір тим чи іншим шляхом певних параметрів, що характеризують спосіб її організації. "Організація" тут використовується в широкому розумінні слова, включаючи в себе і вибір технічних засобів, застосовуваних в операції. Наприклад, при організації відбиття повітряного нальоту засобами ППО ми можемо в залежності від обстановки вибирати тип і властивості застосовуваних технічних засобів (ракет, установок) чи (при заданих технічних засобах) вирішувати тільки задачу раціональної організації самої процедури відбиття нальоту (розподіл цілей між установками, кількість ракет, що направляються на кожну ціль і т. д.).

Усякий визначений вибір залежних від нас параметрів будемо називати *рішенням*. Рішення можуть бути вдалимими і невдалимими,

розумними й нерозумними. *Оптимальними* називаються рішення, що з тих чи інших міркувань кращі від інших.

Основна *задача* дослідження операцій – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

Саме прийняття рішення виходить за рамки дослідження операцій і належить до компетенції відповідальної особи чи групи осіб, яким надане право остаточного вибору. При цьому виборі відповідальні за нього особи можуть ураховувати поряд з рекомендаціями, що впливають із математичного розрахунку, ще ряд міркувань (кількісного та якісного характеру), які не були враховані розрахунком.

Таким чином, дослідження операцій не ставить собі завдання повну автоматизацію прийняття рішень, повне виключення з цього процесу людської свідомості. В остаточному підсумку рішення завжди приймається людиною (чи групою осіб); задача дослідження операцій – підготувати кількісні дані й рекомендації, що полегшують людині прийняття рішення.

Поряд з основною задачею – обґрунтуванням оптимальних рішень – до сфери дослідження операцій належать інші задачі:

порівняльна оцінка різних варіантів організації операції;

оцінка впливу на результат операції різних параметрів (елементів рішення і заданих умов);

дослідження так званих "вузьких місць", тобто елементів керованої системи, порушення роботи яких особливо сильно позначається на успіху операції, і т. д.

Ефективність операції – ступінь її пристосованості до виконання задачі – кількісно виражається у вигляді критерію ефективності (цільової функції). Наприклад, у задачі про використання ресурсів критерій ефективності – прибуток від реалізації продукції, який потрібно максимізувати, у транспортній задачі – сумарні витрати на перевезення вантажів від постачальників до споживачів, які потрібно мінімізувати. Вибір критерію ефективності обумовлює практичну цінність дослідження.

1.2. Математична модель операції

Для застосування кількісних методів дослідження в будь-якій сфері завжди потрібно побудувати ту чи іншу математичну мо-

дель явища. Не становить винятку і дослідження операцій. При побудові математичної моделі явище (у нашому випадку – операція) якимось чином спрощується, схематизується. З незліченної множини факторів, що впливають на явище, виділяється порівняно невелика кількість найважливіших, і отримана схема описується за допомогою того чи іншого математичного апарату. В результаті встановлюються кількісні зв'язки між умовами операції, параметрами рішення й результатом операції – показником (критерієм) ефективності. Чим удаліше підібрана математична модель, тим краще вона відображає характерні риси явища, тим успішніше буде дослідження і корисніші рекомендації, що випливають із нього.

Загальних способів побудови математичних моделей не існує. У кожному конкретному випадку модель будується виходячи з цільової спрямованості операції й задачі наукового дослідження, з урахуванням необхідної точності рішення, а також точності, з якою можуть бути одержані вихідні дані.

Вимоги до моделі суперечливі. З одного боку, вона повинна бути досить повною, тобто в ній повинні бути враховані всі важливі фактори, від яких істотно залежить результат операції. З іншого боку, модель повинна бути досить простою, для того щоб можна було встановити залежності між вхідними в неї параметрами. Модель не повинна бути "засмічена" безліччю дрібних, другорядних факторів: їхній облік ускладнює математичний аналіз і робить результати дослідження важкодоступними для огляду.

Одним словом, мистецтво складати математичні моделі є саме *мистецтво*, і досвіду в цій справі набувають поступово. Успішне виконання всіх етапів дослідження багато в чому обумовлюється творчими здібностями й інтуїцією дослідників. Дві небезпеки завжди підстерігають укладача моделі: перша – потонути в подробицях ("через дерева не побачити лісу"); друга – занадто огрубіти явище ("виплеснути з ванни разом із водою й дитину"). У складних випадках, коли побудова моделі викликає найбільший сумнів, корисною виявляється своєрідна "суперечка моделей", коли те саме явище досліджується на кількох моделях. Якщо наукові висновки й рекомендації від моделі до моделі змінюються мало, це – серйозний аргумент на користь об'єктивності дослідження. Характерним для складних задач дослідження операцій є також

повторне звернення до моделі: після того як перший цикл досліджень виконаний, повертаються знову до моделі і вносять у неї необхідні корективи.

Побудова математичної моделі – найбільш важлива й відповідальна частина дослідження, що вимагає глибоких знань не тільки й не стільки з математики, скільки із сутності явищ, що моделюються. Однак раз створена вдала модель може знайти застосування і далеко за межами того кола явищ, для якого вона спочатку створювалася. Так, наприклад, математичні моделі, спочатку призначені для опису динаміки розвитку біологічних популяцій, знаходять широке застосування при описі бойових дій і навпаки – бойові моделі з успіхом застосовуються в біології.

1.3. Основні типи задач дослідження операцій

Найбільш поширеним і розробленим розділом дослідження операцій є лінійне програмування. У його рамки вкладається широке коло задач дослідження операцій.

За своєю змістовною постановкою безліч інших, типових задач дослідження операцій може бути розбита на ряд класів.

Задачі сітьового планування й управління розглядають відношення між термінами закінчення великого комплексу операцій (робіт) і моментами початку всіх операцій комплексу. Ці задачі полягають у знаходженні мінімальних тривалостей комплексу операцій, оптимального співвідношення величин вартості й термінів їхнього виконання.

Задачі масового обслуговування присвячені вивченню й аналізу систем обслуговування з чергами заявок чи вимог і полягають у визначенні показників ефективності роботи систем, їхніх оптимальних характеристик, наприклад числа каналів обслуговування, часу обслуговування і т. п.

Задачі управління запасами полягають у знаходженні оптимальних значень рівня запасів (точки замовлення) і розміру замовлення. Особливість таких задач у тому, що зі збільшенням рівня запасів, з одного боку, збільшуються витрати на їхнє збереження, але, з іншого боку, зменшуються втрати внаслідок можливого дефіциту продукту, що запасасться.

Задачі розподілу ресурсів виникають при певному наборі опе-

рацій (робіт), які необхідно виконувати з обмеженими наявними ресурсами, і коли потрібно знайти оптимальний розподіл ресурсів між операціями чи склад операцій.

Задачі ремонту і заміни обладнання актуальні у зв'язку зі зносом та старінням устаткування й необхідністю його заміни з часом. Задачі зводяться до визначення оптимальних термінів, числа профілактичних ремонтів і перевірок, а також моментів заміни обладнання модернізованим.

Задачі складання розкладу (календарного планування) полягають у визначенні оптимальної черговості виконання операцій (наприклад, обробки деталей) на різних видах устаткування.

Задачі планування й розміщення мають метою визначення оптимального числа і місця розміщення нових об'єктів з урахуванням їх взаємодії з існуючими об'єктами та між собою.

Задачі вибору маршруту найчастіше зустрічаються при дослідженні різноманітних задач на транспорті й у системі зв'язку і полягають у визначенні найбільш економічних маршрутів.

Серед моделей дослідження операцій особливо виділяються моделі прийняття оптимальних рішень у конфліктних ситуаціях, досліджувані *теорією ігор*. До конфліктних ситуацій, у яких зіштовхуються інтереси двох чи більше сторін, що мають різні цілі, можна віднести ряд ситуацій в галузі економіки, права, військової справи і т. п. У задачах теорії ігор необхідно виробити рекомендації щодо розумної поведінки учасників конфлікту, визначити їхні оптимальні стратегії.

Методика проведення дослідження операцій містить такі етапи:

1. Визначення цілей.
2. Складання плану розробки проекту.
3. Формулювання проблеми.
 - 3.1. Визначення розмірності задачі.
 - 3.2. Визначення керованих змінних.
 - 3.3. Визначення некерованих змінних.
 - 3.4. Визначення технологічних параметрів системи.
 - 3.5. Визначення показників ефективності.
4. Побудова моделі.
 - 4.1. Співвідношення, що виходять з визначень.
 - 4.2. Емпіричні співвідношення.

Цю систему можна записати скорочено:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m}).$$

Зобразимо систему (2.1) в такий спосіб: змінні $x_i (i = \overline{1, n})$ – незалежні, а $y_j (j = \overline{1, m})$ – залежні (табл. 2.1).

Таблицю 2.1 прийнято називати жордановою. Перехід від неї до системи (2.1) здійснюється таким чином: елементи a_{kj} k -го ($k = \overline{1, m}$) рядка множаться на відповідні незалежні змінні $x_j (j = \overline{1, n})$, які розміщені у

Таблиця 2.1

	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1s}	...	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2s}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
y_k	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{ks}	...	a_{kn}
...	...	...	...	...	...	...
y_m	a_{m1}	a_{mk}	...	a_{ms}	...	a_{mn}

верхньому рядку. Одержані добутки додаються й прирівнюються до залежної змінної $y_k (k = \overline{1, m})$.

Систему (2.1) необхідно перетворити таким чином, щоб будь-які дві змінні (наприклад, y_k та x_s) помінялися ролями, тобто залежна змінна y_k після перетворення стала незалежною, а незалежна змінна x_s – залежною.

Нехай у цій системі елемент $a_{ks} \neq 0$. З k -го рівняння знаходимо

$$x_s = \left(- \sum_{j=1}^{s-1} a_{kj} x_j + y_k - \sum_{j=s+1}^n a_{kj} x_j \right) / a_{ks}. \quad (2.2)$$

Вираз x_s , записаний через y_k та інші незалежні змінні, підставимо в решту рівнянь і зведемо подібні члени:

$$y_i = \sum_{j=1}^{s-1} a_{ij} x_j + a_{is} x_s + \sum_{j=s+1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{s-1} a'_{ij} x_j +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{s-1} a_{kj} x_j + y_k - \sum_{j=s+1}^n a_{kj} x_j \\
 & + a_{is} \frac{\quad}{a_{ks}} + \sum_{j=s+1}^n a_{ij} x_j = \\
 & = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{a_{ij} a_{ks} - a_{is} a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_k + \sum_{j=s+1}^n \frac{a_{ij} a_{ks} - a_{is} a_{kj}}{a_{ks}} x_j = \\
 & = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} a_{ks} - a_{is} a_{kj}}{a_{ks}} x_j + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_k.
 \end{aligned}$$

У перетвореній системі позначимо через b_{ij} чисельник коефіцієнта при x_j ($j = \overline{1, n}$) в i -му ($i = \overline{1, m}$) рівнянні: $b_{ij} = a_{ij} a_{ks} - a_{is} a_{kj}$.

Систему $y_i = \sum_{j=1, j \neq s}^n \frac{b_{ij} x_j}{a_{ks}} + \frac{a_{is}}{a_{ks}} y_k$ ($i = \overline{1, m}; i \neq k$) і (2.2) запишемо

у формі жорданової таблиці (табл. 2.2).

Наведене вище перетворення прийнято називати *кроком звичайного жорданового виключення (ЗЖВ)*. Перехід від жорданової таблиці 2.1 до жорданової таблиці 2.2 називають кроком ЗЖВ з розв'язувальним елементом a_{ks} .

Один крок ЗЖВ з розв'язувальним елементом a_{ks} зручно розбити на такі операції:

1) розв'язувальний елемент a_{ks} замінюється одиницею;

2) решта елементів розв'язувального s -го стовпця лишається без змін;

3) решта елементів розв'язувального k -го рядка змінює лише знаки;

4) елементи, які не належать до розв'язувальних рядків та стовпців, визначаються за правилом пря-

Таблиця 2.2

	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
y_1	b_{11}	b_{12}	...	b_{1s}	...	b_{1n}
y_2	b_{21}	b_{22}	...	b_{2s}	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
x_s	$-a_{k1}$	a_{k2}	...	$\boxed{1}$	...	$-a_{kn}$
...	...	...	...	...	...	...
y_m	b_{m1}	b_{m2}	...	a_{ms}	...	b_{mn}

: a_{ks}

мокутника (рис. 1) $b_{ij} = a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}$, де i, k – рядки; j, s – стовпці;

5) усі елементи нової таблиці діляться на розв'язувальний елемент a_{ks} .

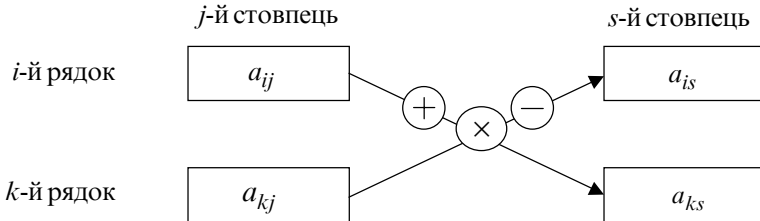


Рис. 1

Якщо діагональ прямокутника, на якій міститься розв'язувальний елемент, назвати головною, а другу – побічною, то правило прямокутника можна сформулювати таким чином: перетворений елемент b_{ij} дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей. Це правило лишається справедливим для розв'язувального елемента, який розміщується в будь-якій вершині прямокутника.

Зазначимо, що коли в розв'язувальному рядку (стовпці) є нульові елементи, то решта елементів відповідних стовпців (рядків) після одного кроку ЗЖВ лишається без змін.

Нехай у розв'язувальному рядку $a_{kj} = 0$, тоді $b_{ij} = a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj} = a_{ij}a_{ks}$. Після ділення b_{ij} на розв'язувальний елемент дістанемо $b_{ij}/a_{ks} = a_{ij}$.

Якщо в жордановій таблиці $m \leq n$ і всі рядки лінійно незалежні, то за m послідовних кроків ЗЖВ всі залежні змінні y_i ($i = \overline{1, m}$) можна перетворити на незалежні.

Приклад. Систему лінійних функцій

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3; \\ y_2 = x_1 + 2x_3; \\ y_3 = x_1 - x_2 + x_3 \end{cases}$$

перетворити так, щоб незалежна змінна x_3 стала залежною, а залежна змінна y_2 – незалежною.

Розв'язання. Запишемо систему у формі симплекс-таблиці і зробимо один крок ЗЖВ з розв'язувальним елементом $a_{23} = 2$:

	x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	y_2		x_1	x_2	y_2
y_1	2	1	-3	y_1	7	2	-3		y_1	$\frac{7}{2}$	$1 - \frac{3}{2}$
y_2	1	0	2	x_3	-1	0	1	:2	x_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_3	1	-1	1	y_3	1	-2	1		y_3	$\frac{1}{2}$	$-1 + \frac{1}{2}$

Запишемо систему, яка відповідає останній таблиці:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{7}{2}x_1 + x_2 - \frac{3}{2}y_2; \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_2; \\ y_3 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}y_2. \end{cases}$$

У цій системі в порівнянні з вихідною незалежна x_3 і залежна y_2 змінні помінялися ролями.

2.1.1. Визначення рангу матриці

Якщо в будь-якій матриці виділити r довільних рядків та r довільних стовпців, то з елементів матриці, які містяться на перетині цих рядків та стовпців, можна скласти визначник (або *мінор*) r -го порядку.

Рангом матриці називається число, яке дорівнює найвищому порядку її мінору, відмінного від нуля. Ранг матриці прийнято позначати $\text{rang } [A]$ або $r [A]$.

Для визначення рангу прямокутної матриці зручно користуватися ЗЖВ. Нехай задано прямокутну матрицю $[A]$, яка склада-

них членів. Очевидно, що $\text{rang}[C]$ розширеної матриці або дорівнює рангу матриці $[A]$, або на одиницю більший.

Теорема Кронекера–Капеллі. Система m рівнянь з n незалежними змінними сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг матриці $[A]$ дорівнює рангу розширеної матриці $[C]$. Якщо ранг розширеної матриці дорівнює рангу матриці й числу невідомих, тобто $\text{rang}[A] = \text{rang}[C] = n$, то система має єдиний розв'язок. Якщо ранг матриці менший від числа невідомих ($\text{rang}[A] = \text{rang}[C] < n$), то система рівнянь має безліч розв'язків.

Розв'яжемо загальну систему лінійних рівнянь методом ЗЖВ. Припустимо, що умова Кронекера–Капеллі виконується: $\text{rang}[A] = \text{rang}[C] = k < n$.

Перепишемо систему рівнянь у вигляді

$$y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ik}x_k + a_{i,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{in}x_n - b_i = 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Подано тепер цю систему в табличній формі (табл. 2.5).

Таблиця 2.5

	x_1	...	x_k	x_{k+1}	...	x_n	1
y_1	a_{11}	...	a_{1k}	$a_{1,k+1}$	...	a_{1n}	$-b_1$
.	.	...	.	.	...	.	.
y_k	a_{k1}	...	a_{kk}	$a_{k,k+1}$	...	a_{kn}	$-b_k$
y_{k+1}	$a_{k+1,1}$	...	$a_{k+1,k}$	$a_{k+1,k+1}$	...	$a_{k+1,n}$	$-b_{k+1}$
.	.	...	.	.	...	.	.
y_m	a_{m1}	...	a_{mk}	$a_{m,k+1}$	...	a_{mn}	$-b_m$

Оскільки $\text{rang}[A] = \text{rang}[C] = k$, то над цією таблицею можна послідовно виконати k кроків ЗЖВ. Не порушуючи загальності, можна вважати, що в результаті k кроків ЗЖВ (табл. 2.6) ми поміняли ролями перші $y_i (i = \overline{1, k})$ і $x_j (j = \overline{1, k})$.

Таблиця 2.6

	y_1	...	y_k	x_{k+1}	...	x_n	1
x_1	α_{11}	...	α_{1k}	$\alpha_{1,k+1}$	...	α_{1n}	β_1
.	.	...	.	.	...	.	.
x_k	α_{k1}	...	α_{kk}	$\alpha_{k,k+1}$	...	α_{kn}	β_k
y_{k+1}	$\alpha_{k+1,1}$	...	$\alpha_{k+1,k}$	0	...	0	0
.	.	...	.	.	...	.	.
y_m	α_{m1}	...	α_{mk}	0	...	0	0

.....

}

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

Насправді бар'якних пор'ядк'ів може вид'являть менше, оск'ільки

Якщо надати x_3 та x_4 певних сталих значень, то дістанемо частинний розв'язок. Наприклад, при $x_3 = 4$, $x_4 = -1$ базисні змінні набудуть значень $x_1 = 4 + 2(-1) + 2 = 4$; $x_2 = -4 + 1 + 1 = -2$. Частинний розв'язок, при якому вільні змінні дорівнюють нулю, буде базисним. У наведеному прикладі базисний розв'язок має вигляд $x_3 = x_4 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Третє рівняння є лінійною комбінацією перших двох рівнянь, яка виражається так: $y_3 = y_1 - 2y_2$.

2.1.3. Розв'язування системи n рівнянь з n невідомими

Якщо ранг матриці $k = n$, то можна зробити n кроків жорданових виключень. У результаті кожного кроку один із y переходить на верх таблиці, а через n кроків усі y опиняться нагорі. При цьому коефіцієнти в y -стовпцях не мають значення, оскільки $y_i = 0$ та $i = \overline{(1, n)}$, ці коефіцієнти можна просто не обчислювати. Невідомі дорівнюють вільним членам: $x_i = \beta_i, i = \overline{1, n}$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Дану систему перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_3 - 2 = 0; \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 5 = 0; \\ y_3 = x_2 + 2x_3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Подамо цю систему рівнянь у табличній формі. Зробимо один крок ЗЖВ з розв'язувальним елементом $a_{11} = 1$ і викреслимо перший стовпчик. Наступний крок ЗЖВ з викреслюванням розв'язувального стовпця зробимо для елемента $a_{22} = 1$. Останній крок зробимо з розв'язувальним елементом $a_{33} = 8$:

| | x_1 | x_2 | x_3 | 1 | | x_2 | x_3 | 1 | | x_3 | 1 | x_i | 1 |
|-------|-------------|-------|-------|----|-------|-------------|-------|----|-------|-------------|---|-------|---|
| y_1 | $\boxed{1}$ | 0 | 3 | -2 | x_1 | 0 | -3 | 2 | x_1 | -3 | 2 | x_1 | 2 |
| y_2 | 2 | 1 | 0 | -5 | y_2 | $\boxed{1}$ | -6 | -1 | x_2 | 6 | 1 | x_2 | 1 |
| y_3 | 0 | 1 | 2 | -1 | y_3 | 1 | 2 | -1 | y_3 | $\boxed{8}$ | 0 | x_3 | 0 |

Звідси $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

2.1.4. Обернення матриці

Розглянемо невироджену матрицю n -го порядку

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця $[A]$ називається *невиродженою* (або *невласною*), якщо її визначник не дорівнює нулю, тобто $\det[A] \neq 0$, і *виродженою* (або *особливою*), якщо її визначник дорівнює нулю, тобто $\det[A] = 0$.

Квадратна матриця $[A]^{-1}$ називається *оберненою* для квадратної матриці $[A]$ того ж порядку, якщо їхній добуток дорівнює одиничній матриці: $[A]^{-1}[A] = [A][A]^{-1} = [E]$.

Для визначення оберненої матриці складемо систему лінійних рівнянь, в якій роль вільних членів виконуватимуть залежні змінні:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad [A]\vec{X} = \vec{Y}.$$

Нехай треба знайти розв'язок системи. Помножимо обидві частини рівності на обернену матрицю:

$$[A]^{-1}[A]\vec{X} = [A]^{-1}\vec{Y}.$$

Ураховуючи, що $[A][A]^{-1}=[E]$, а $[E]\vec{X}=\vec{X}$, дістанемо $\vec{X}=[A]^{-1}\vec{Y}$. Відшукування оберненої матриці зводиться до того, щоб поміняти ролями незалежні $x_i(i=\overline{1,n})$ і залежні $y_i(i=\overline{1,n})$ змінні.

Таблиця 2.7

| | x_1 | x_2 | ... | x_n |
|-------|----------|----------|-----|----------|
| y_1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1n} |
| y_2 | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| y_n | a_{n1} | a_{n2} | ... | a_{nn} |

Запишемо систему рівнянь у вигляді табл. 2.7.

Щоб поміняти ролями незалежні і залежні змінні, послідовно виконаємо над таблицею n кроків ЗЖВ. Якщо за розв'язувальні брати не лише діагональні елементи, то після перестановки деяких рядків та стовпців таблиця набуде вигляду табл. 2.8.

Матриця цієї таблиці є оберненою до матриці $[A]$, тобто

Таблиця 2.8

| | y_1 | y_2 | ... | y_n |
|-------|---------------|---------------|-----|---------------|
| x_1 | α_{11} | α_{12} | ... | α_{1n} |
| x_2 | α_{21} | α_{22} | ... | α_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| x_n | α_{n1} | α_{n2} | ... | α_{nn} |

$$[A]^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Нехай матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ невинроджена. Скла-

демо табл. (*). Зробивши один крок ЗЖВ з розв'язувальним елементом $a_{11}=1$, одержимо табл. (**). Другий крок ЗЖВ зробимо з розв'язувальним елементом $a_{22}=1$, одержимо табл. (***)

| | x_1 | x_2 | x_3 |
|-------|----------|-------|-------|
| y_1 | <u>1</u> | 0 | 3 |
| y_2 | 2 | 1 | 0 |
| y_3 | 0 | 1 | 2 |

(*)

| | y_1 | x_2 | x_3 |
|-------|-------|----------|-------|
| x_1 | 1 | 0 | -3 |
| y_2 | 2 | <u>1</u> | -6 |
| y_3 | 0 | 1 | 2 |

(**)

| | y_1 | y_2 | x_3 |
|-------|-------|-------|----------|
| x_1 | 1 | 0 | -3 |
| x_2 | -2 | 1 | 6 |
| y_3 | -2 | 1 | <u>8</u> |

(***)

Третій крок ЗЖВ можна зробити лише з розв'язувальним елементом $a_{33} = 8$:

$$\begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 2 & 3 & -3 \\ x_2 & -4 & 2 & 6 \\ x_3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \quad :8 \quad \begin{array}{c|ccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ x_2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ x_3 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Обернена матриця має вигляд

$$[A]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

У даному прикладі не було необхідності переставляти рядки та стовпці, оскільки за розв'язувальні вибирали діагональні елементи.

2.1.5. Приклад застосування жорданових виключень

Для відгодівлі тварин на фермі в їхній щотижневий раціон необхідно включати в залежності від пори року різні кількості живильних речовин A , B і C . Для відгодівлі використовуються три види кормів. Дані про вміст живильних речовин в одному кілограмі кожного з кормів наведено нижче:

| Види кормів | A | B | C |
|-------------|-----|-----|-----|
| | од. | | |
| Корм № 1 | 4 | 3 | 1 |
| Корм № 2 | 3 | 2 | 1 |
| Корм № 3 | 2 | 1 | 2 |

Вивести розрахункову формулу, за якою можна визначати щотижневу витрату кормів на кожну тварину, знаючи, що в щотижневий раціон кожній тварині необхідно включати d_1 одиниць живильної речовини A , d_2 одиниць речовини B і d_3 одиниць речовини C .

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3 щотижневу витрату кормів першого, другого і третього видів, при якій в щотижневий раціон кожної тварини входить d_1 одиниць живильної речовини A , d_2 одиниць речовини B і d_3 одиниць речовини C .

Тоді розв'язання задачі зводиться до розв'язання системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} d_1 = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3; \\ d_2 = 3x_1 + 2x_2 + x_3; \\ d_3 = x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Записуємо систему у вигляді таблиці і робимо кроки звичайних жорданових виключень:

| | x_1 | x_2 | x_3 | | d_1 | x_2 | x_3 | | d_1 | x_2 | x_3 |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|---|----------------|
| d_1 | 4 | 3 | 2 | x_1 | 1 | -3 | -2 | x_1 | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| d_2 | 3 | 2 | 1 | d_2 | 3 | -1 | -2 | d_2 | $\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| d_3 | 1 | 1 | 2 | d_3 | 1 | 1 | 6 | d_3 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{2}$ |

| | d_1 | d_2 | x_3 | | d_1 | d_2 | d_3 |
|-------|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | -2 | 3 | 1 | x_1 | -3 | 4 | 1 |
| x_2 | 3 | -4 | -2 | x_2 | 5 | -6 | -2 |
| d_3 | 1 | -1 | 1 | x_3 | -1 | 1 | 1 |

$$\begin{cases} x_1 = -3d_1 + 4d_2 + d_3; \\ x_2 = 5d_1 - 6d_2 - 2d_3; \\ x_3 = -d_1 + d_2 + d_3. \end{cases}$$

Наприклад, якщо в щотижневий раціон тварини повинно входити 33 одиниці живильної речовини *A*, 23 одиниці речовини *B* і 12 одиниць речовини *C*, то витрата кормів розподілиться в такий спосіб:

корм № 1: $x_1 = -3 \cdot 33 + 4 \cdot 23 + 12 = 5$ кг;

корм № 2: $x_2 = 5 \cdot 33 - 6 \cdot 23 - 2 \cdot 12 = 3$ кг;

корм № 3: $x_3 = -33 + 23 + 12 = 2$ кг.

2.2. Модифіковані жорданові виключення

У лінійному програмуванні при розв'язуванні задач часто використовують модифіковані жорданові виключення (МЖВ). Їх також можна використовувати для розв'язування задач лінійної алгебри.

Нехай задано систему лінійних функцій

[illegible]

Суть МЖВ полягає в тому, що коли міняються ролями залежні y_k і незалежні x_s змінні, то всі змінні й коефіцієнти при них беруться з протилежними знаками.

Систему рівнянь запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k = -a_{k1}(-x_1) - a_{k2}(-x_2) - \dots - a_{ks}(-x_s) - \dots - a_{kn}(-x_n); \end{array} \right.$$

$$y_m = -a_{m1}(-x_1) - a_{m2}(-x_2) - \dots - a_{ms}(-x_s) - \dots - a_{mn}(-x_n).$$

Симплекс-таблицю цієї системи функцій для здійснення МЖВ запишемо у вигляді табл. 2.9. З 3-го рівняння знайдемо x_3 , підставимо його вираз у решту рівнянь і запишемо у вигляді симплекс-таблиці 2.10.

Таблица 2.9

| | $-x_1$ | $\dots$ | $-x_s$ | $\dots$ | $-x_n$ |
|----------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| y_1 | $-a_{11}$ | $\dots$ | $-a_{1s}$ | $\dots$ | $-a_{1n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ |
| y_k | $-a_{k1}$ | $\dots$ | $-a_{ks}$ | $\dots$ | $-a_{kn}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ |
| y_m | $-a_{m1}$ | $\dots$ | $-a_{ms}$ | $\dots$ | $-a_{mn}$ |

Таблица 2.10

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $\dots$ | $-y_k$ | $\dots$ | $-x_n$ | |
|----------|-----------|-----------|---------|----------|---------|-----------|--------------|
| y_1 | a_{11} | a_{12} | $\dots$ | a_{1s} | $\dots$ | a_{1n} | |
| y_2 | a_{21} | a_{22} | $\dots$ | a_{2s} | $\dots$ | a_{2n} | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $:(-a_{ks})$ |
| x_s | $-a_{k1}$ | $-a_{k2}$ | $\dots$ | 1 | $\dots$ | $-a_{kn}$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | $\dots$ | $\vdots$ | |
| y_m | a_{m1} | a_{m2} | $\dots$ | a_{ms} | $\dots$ | a_{mn} | |

Отже, один крок МЖВ з розв'язувальним елементом a_{ks} полягає у послідовному виконанні таких операцій:

- 1) розв'язувальний елемент замінюємо одиницею;
- 2) решта елементів s -го стовпця змінює лише знак;
- 3) решта елементів розв'язувального k -го рядка лишається без змін;
- 4) елементи, що не належать до розв'язувальних рядка та стовпця, визначаються за правилом прямокутника $a_{ij} = a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}$ ($i = \overline{1, m}; \quad i \neq k; \quad j = \overline{1, n}; \quad j \neq s$);
- 5) усі елементи нової симплекс-таблиці діляться на розв'язувальний елемент $(-a_{ks})$.

Зазначимо, що МЖВ відрізняються від ЗЖВ тим, що змінюється знак у пп. 2 і 3.

3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування (ЛП) – це розділ математики, в якому вивчаються методи знаходження максимуму та мінімуму лінійної функції скінченного числа змінних за умови, що змінні задовольняють скінченне число додаткових обмежень у вигляді лінійних рівнянь або лінійних нерівностей.

3.1. Приклади задач лінійного програмування

Задача про використання ресурсів (задача планування виробництва). Для виробництва товарів $T_1, T_2, \dots, T_n$ підприємство використовує різного виду ресурси $P_1, P_2, \dots, P_m$. Відомо, що для випуску одиниці товару T_j використовується a_{ij} одиниць ресурсу P_i ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Доход від реалізації одиниці товару T_j дорівнює c_j .

Треба так запланувати виробництво товарів, щоб при використанні наявних ресурсів загальний прибуток від виробництва був найбільшим.

Складемо економіко-математичну модель задачі. Нехай x_j – кількість одиниць j -го товару, що планується виробити (шукані величини). Загальна кількість одиниць i -го ресурсу, що використовується у виробництві згідно з планом, становить $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ ($i = \overline{1, m}$). Оскільки ця кількість одиниць не може перевищувати запас i -го ресурсу, то $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ ($i = \overline{1, m}$).

Із змісту задачі $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Прибуток, одержаний від виробництва x_j одиниць j -го товару, становить $c_j x_j$, а загальний прибуток від виробництва

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Отже, математична модель є такою: знайти максимум ліній-

ної форми $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ за умов $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ ($i = \overline{1, m}$); $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1, n}$).

Задача складання раціону (задача про дієту і домішки). Є види корму I і II, що містять живильні речовини (вітаміни) S_1 , S_2 і S_3 . Вміст числа одиниць живильних речовин в 1 кг кожного виду корму і необхідний мінімум живильних речовин наведені в таблиці:

| Живильна речовина (вітамін) | Необхідний мінімум живильних речовин | Число одиниць живильних речовин в 1 кг корму | |
|-----------------------------|--------------------------------------|--|----|
| | | I | II |
| S_1 | 9 | 3 | 1 |
| S_2 | 8 | 1 | 2 |
| S_3 | 12 | 1 | 6 |

Вартість 1 кг кормів I і II відповідно дорівнює 4 та 6 грн. Необхідно скласти денний раціон, що має мінімальну вартість і в якому вміст кожного виду живильних речовин був би не менший від установленної межі.

Задача про використання потужностей (задача про завантаження устаткування). Підприємству заданий план виробництва продукції за часом і номенклатурою: потрібно за час T випустити $n_1, n_2, \dots, n_k$ одиниць продукції $P_1, P_2, \dots, P_k$. Продукція виробляється на верстатах $S_1, S_2, \dots, S_m$. Для кожного верстата відома продуктивність a_{ij} (тобто число одиниць продукції P_j , яке можна виробити на верстаті S_i) і витрати b_{ij} на виготовлення продукції P_j на верстаті S_i за одиницю часу. Необхідно скласти такий план роботи верстатів (тобто так розподілити випуск продукції між верстатами), щоб витрати на виробництво всієї продукції були мінімальними.

Задача про розкрій матеріалів. На розкрій (розпилювання, обробку) надходить матеріал одного зразка в кількості a одиниць. Потрібно виготовити з нього l різних комплектуючих виробів у кількостях, пропорційних числам $b_1, b_2, \dots, b_l$ (умова комплектності). Кожну одиницю матеріалу можна розкроїти n різними способами, причому використання i -го способу ($i = 1, 2, \dots, n$) дає a_{ij} одиниць k -го виробу ($k = 1, 2, \dots, l$). Необхідно скласти план розкрою, що забезпечує максимальне число комплектів.

цїя $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = \sum_{i=1}^n C_iX_i = \vec{C}^T \vec{X}$ набуває оптималь-

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right. \quad (3.1)$$
$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}) . \quad (3.2)$$

Означення 2. Множина всіх припустимих розв'язків називається припустимою областю (або припустимою множиною)

$$\left\{ X: \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i; \quad i = \overline{1, n}, \quad x_j \geq 0 \right\} = \Omega.$$

Означення 3. Множина B називається опуклою множиною простору R^n , якщо для будь-яких двох точок $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, $X^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$, що належать до цієї множини, виконується умова $[X^1, X^2] \in B$ (рис. 2).

31

хоча б одна пара точок X_1, X_2 , для яких існує хоча б одна така точка X_3 , що $X_3 \in [X_1, X_2]$ і $X_3 \notin C$ (рис. 3).

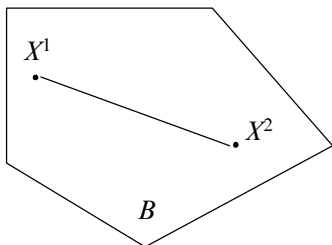


Рис. 2

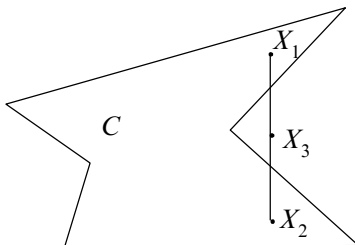


Рис. 3

Теорема 1. Нехай $X^1, X^2, \dots, X^r$ – вершини опуклого обмеженого багатогранника, тоді будь-яку його точку X можна зобразити у вигляді комбінації його вершин.

Теорема 2. Якщо множини A і B опуклі, то перетин цих множин утворює опуклу множину.

Висновок. Перетин скінченного числа опуклих множин утворює опуклу множину.

Означення 5. Множина точок X , що задовольняють співвідношення $\left\{ X : \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \right\}$, називається півпростором.

Означення 6. Множина точок X , що задовольняють співвідношення $\left\{ X : \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \right\}$, називається гіперплощиною.

Твердження. Півпростір є опуклою множиною.

Теорема 3. Припустима множина значень задачі лінійного програмування (область Ω) є опуклою областю.

Означення 7. Непорожній перетин скінченного числа гіперплощин і півпросторів називається багатогранником. Згідно з теоремою 3 цей багатогранник опуклий. Припустима область Ω є опуклим багатогранником.

Зауваження. Точку прийнято вважати опуклою множиною.

Теорема 4. Множина оптимальних точок припустимої множини задачі лінійного програмування є опуклою (якщо вона не є порожньою).

Будь-який розв'язок системи обмежень

$$\begin{cases} y_i = -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i \geq 0 & (i = \overline{1, m}); \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

є припустимим. Якщо в загальному розв'язку системи обмежень вільні (небазисні) змінні взяти рівними нулю і при цьому всі базисні змінні набудуть невід'ємних значень, то одержаний базисний розв'язок буде *припустимим базисним*.

Теорема 5. Кожному припустимому базисному розв'язку системи обмежень відповідає вершина багатогранника розв'язків, і навпаки – кожній вершині відповідає припустимий базисний розв'язок. Цей розв'язок називають *опорним*.

Теорема 6. Якщо цільова функція набуває скінченного (максимального, мінімального) значення, то принаймні один оптимальний розв'язок є базисним.

Отже, оптимум лінійної функції задачі лінійного програмування потрібно шукати серед скінченного числа її припустимих базисних розв'язків.

3.3. Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування

При розв'язуванні задачі лінійного програмування з двома змінними доцільно використовувати геометричний метод з метою більш наочної інтерпретації процесу розв'язування та тлумачення властивостей задачі. До такої форми може бути зведена і канонічна задача (з обмеженнями у вигляді рівнянь), коли число змінних n більше від числа рівнянь m на 2, тобто $n - m = 2$.

Задачу лінійного програмування запишемо у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \end{cases} \quad Z = C_1x_1 + C_2x_2 \Rightarrow \max.$$

Перепишемо обмеження як $-\sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j + b_i \geq 0 \quad (i=\overline{1,n})$ і позна-

чимо кожне з них через y_i , тобто $y_i = -\sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j + b_i$. Ця процедура називається *введенням штучного базису*.

Область припустимих розв'язків може бути порожньою множиною або складатись з однієї точки, бути опуклим багатокутником або багатокутною необмеженою областю.

Якщо припустимий розв'язок є порожньою множиною (рис. 4), то система нерівностей суперечлива і задача не має розв'язку.

Якщо припустима множина складається з однієї точки (рис. 5), то розв'язок задачі – значення цільової функції в цій точці.

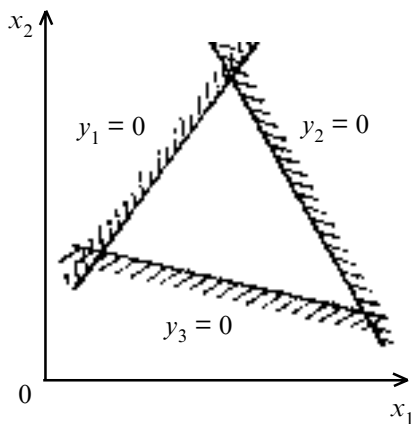


Рис. 4

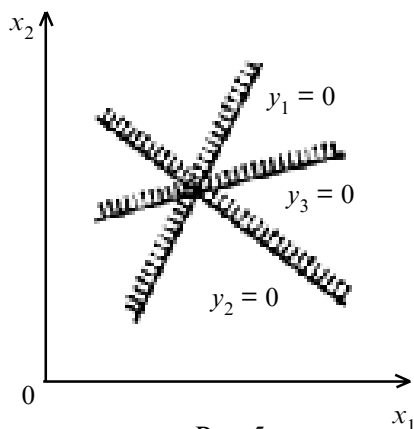


Рис. 5

Припустима область розв'язків може бути областю, не обмеженою зверху або знизу. У цьому разі цільова функція може досягати, наприклад, мінімального значення, а максимальне значення не обмежене зверху (рис. 6).

Розглянемо припустиму область, що являє собою опуклий багатокутник (рис. 7). Кожне з обмежень $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ ($i = \overline{1, m}$) є півплощиною. Перетин усіх півплощин утворює опуклий багатокутник. Координати кожної кутової точки можна знайти, розв'язавши систему двох лінійних рівнянь, як координати точок перетину прямих, що є границями півплощин.

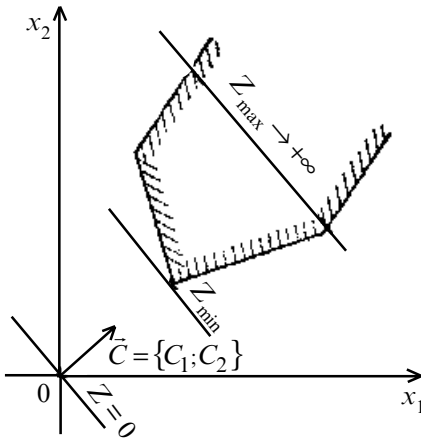


Рис. 6

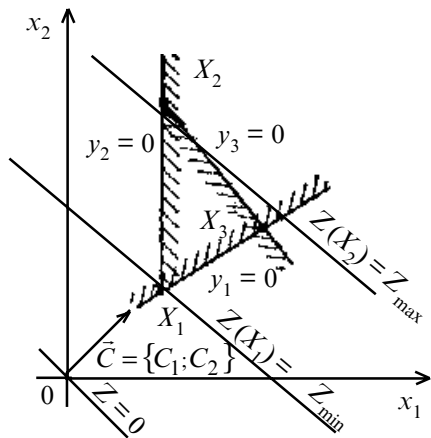


Рис. 7

Рівняння $Z = C_1x_1 + C_2x_2$ є сім'єю паралельних прямих, кожна з яких відповідає певному значенню Z . Із зростанням значення Z лінія рівня $Z = C_1x_1 + C_2x_2$ зміщується паралельно самій собі в напрямку вектора $\vec{C} = \{C_1; C_2\}$. Вектор $\vec{C}$ називається *напрямним*. Переміщуємо лінію рівня доти, доки вона не досягне границі області припустимих розв'язків. Перша точка границі, якої досягне лінія рівня, буде точкою мінімуму. Остання точка, якщо це точка вершини, буде точкою максимуму.

Якщо цільова функція досягає оптимального (максимального, мінімального) значення не в одній вершині, а відразу у двох, то

вона досягає цього значення на всьому відрізку, що з'єднує дані точки. Це можливо тоді, коли хоча б одна з границь припустимої області розв'язків паралельна лінії $C_1x_1 + C_2x_2 = 0$.

Приклад 1. Знайти максимальне і мінімальне значення функції $Z = x_1 + x_2$ при заданих обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1; \\ 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 - 3x_2 \geq -8; \\ 2x_1 + x_2 \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Ця система обмежень визначає на площині опуклий багатокутник, обмежений прямими

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1; & (y_1) \\ 2x_1 - x_2 = 4; & (y_2) \\ x_1 - 3x_2 = -8; & (y_3) \\ 2x_1 + x_2 = 5. & (y_4) \end{cases}$$

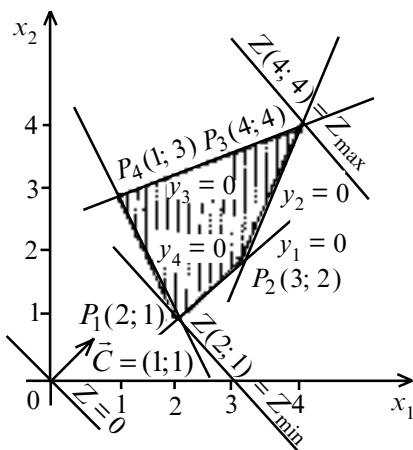


Рис. 8

Напрямний вектор $\vec{C}$ цільової функції має координати $\{1; 1\}$. Будемо рухати лінію рівня $Z = x_1 + x_2$ в напрямку вектора $\vec{C} = \{1; 1\}$. Першою точкою границі припустимої області, якої досягне лінія рівня, буде точка P_1 (рис. 8).

Ця точка є точкою перетину ліній

$$\begin{cases} y_4 = 0, \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, \quad P_1(2; 1).$$

Звідси випливає, що $Z_{\min} = Z(P_1) = x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$. Останньою точкою припустимої області, яку перетинає лінія рівня, рухаючись у напрямку вектора $\vec{C}$, буде точка P_3 :

$$\begin{cases} y_2 = 0, \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 4, \quad P_3(4; 4).$$

Тоді $Z_{\max} = Z(P_3) = x_1 + x_2 = 4 + 4 = 8$.

Приклад 2. Знайти мінімальне значення функції $Z = x_1 + \frac{1}{2}x_2$

при обмеженнях попередньої задачі.

Розв'язання. Область припустимих розв'язків не зміниться, але лінія рівня при перенесенні збіжиться з прямою y_4 . Отже, на всьому відрізку P_1P_4 лінійна функція $Z = x_1 + 0,5x_2$ набуває одного й того ж мінімального значення: $Z_{\min} = Z(P_1) = 2 + 0,5 = 2,5$. Це означає, що задача має нескінченно багато оптимальних розв'язків (їх задають координати точок відрізка P_1P_4), серед яких базисних оптимальних розв'язків два – у точках P_1 і P_4 . Точки відрізка P_1P_4 задаються рівнянням $x_2 = 5 - 2x_1$, де $1 \leq x_1 \leq 2$.

Зауваження. При геометричному розв'язанні подібних задач важливо точно встановити, чи дійсно збігається лінія рівня з границею багатокутника розв'язків, чи це пов'язано з неточністю побудов, дрібним масштабом рисунка і т. п. Необхідно перевірити, чи паралельні лінія рівня і гранична пряма, тобто чи пропорційні їхні коефіцієнти. У розглянутому прикладі коефіцієнти при змінних лінії рівня $Z = x_1 + 0,5x_2$ пропорційні відповідним коефіцієнтам граничної прямої $2x_1 + x_2 = 5$.

3.4. Симплекс-метод розв'язування основної задачі лінійного програмування

Симплексний метод, або метод послідовного поліпшення плану, полягає в послідовному переході від одного опорного плану до іншого так, що значення лінійної форми весь час наближається

до оптимального. Оскільки число опорних планів задачі скінченне, то звичайно за скінченне число кроків метод дає змогу знайти оптимальний план (якщо він існує) або впевнитись, що лінійна форма на множині припустимих планів необмежена (якщо оптимальний план не існує).

Алгоритм розв'язування основної задачі лінійного програмування можна поділити на два етапи: визначення опорного розв'язку ОЗЛП і визначення оптимального плану.

ОЗЛП має вигляд

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & (i=\overline{1,m}); \\ x_j \geq 0 & (j=\overline{1,n}); \end{cases}$$

$$Z = \sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max(\min).$$

Система обмежень визначає в n -вимірному просторі опуклий багатогранник Ω , в одній з вершин якого досягається оптимум – максимум чи мінімум функціонала Z . Тому в основу так званого *симплекс-методу* розв'язання задачі покладена наступна ідея: відшукуємо яку-небудь із вершин багатогранника, а потім, переходячи від вершини до вершини, досягаємо потрібної точки. Для реалізації цієї ідеї розроблена методика знаходження початкової вершини, а наступний перебір вершин упорядкований таким чином, щоб на кожному кроці наближатися до оптимального розв'язку.

Перепишемо систему так:
$$\begin{cases} y_i = -\sum a_{ij}x_j + b_i \geq 0 & (i=\overline{1,m}); \\ x_j \geq 0 & (j=\overline{1,n}). \end{cases}$$

Систему рівнянь одержано таким чином, що введені нові змінні $y_i (i=\overline{1,m})$ невід'ємні. Такий прийом одержання рівностей з нерівностей за допомогою введення нових змінних називають застосуванням штучного базису. Після введення таким способом нових

змінних дістанемо загальний розв'язок, де $y_i (i = \overline{1, m})$ – базисні змінні, а $x_j (j = \overline{1, n})$ – небазисні змінні. Узявши небазисні змінні $x_j (j = \overline{1, n})$ рівними нулю, дістанемо базисний розв'язок.

Система обмежень у табличній формі має вигляд табл. 3.1.

Кожний y_i в перетвореній системі є ліва частина рівняння гіперплощини, що обмежує багатогранник. Вершину багатогранника дає перетин n гіперплощин. Іншими словами, координати кожної вершини задовольняють одночасно n рівняння гіперплощин, тобто перетворюють ліві частини цих рівнянь (ігреки) у нулі.

Таблиця 3.1

| | $-x_1$ | $-x_2$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|-------|----------|----------|-----|----------|-------|
| y_1 | a_{11} | a_{12} | ... | a_{1n} | b_1 |
| y_2 | a_{21} | a_{22} | ... | a_{2n} | b_2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| y_m | a_{m1} | a_{m2} | ... | a_{mn} | b_m |
| Z | $-C_1$ | $-C_2$ | ... | $-C_n$ | 0 |

Звідси випливає: щоб знайти вершину багатогранника, треба взяти n ігреків рівними нулю. Якщо при цьому всі нерівності задовольняються (всі інші $y_i \geq 0$), то ми потрапили у вершину багатогранника Ω . У цьому випадку одержано опорний план. Отже, якщо в таблиці всі $b_i (i = \overline{1, m})$ невід'ємні, то отримано базисний припустимий розв'язок.

Якщо навіть одна нерівність не задовольняється, то це означає, що хоча ми і попали в точку перетину n обмежуючих гіперплощин, але ця точка не є вершиною багатогранника. Вона відділена від багатогранника тією гіперплощиною, що відповідає невиконаній нерівності. Відповідна гіперплощина відносно зазначеної точки називається відокремлюючою. У цьому випадку наша задача – від отриманого неприпустимого розв'язку перейти до припустимого. Для цього треба з даної точки пересуватися по деякому ребру доти, доки не потрапимо в яку-небудь вершину багатогранника. Перехід у сусідню точку перетину гіперплощин аналітично здійснюється одним кроком модифікованих жорданових виключень. У новій таблиці одержимо стільки від'ємних вільних членів, скільки відокремлюючих площин буде для даної точки.

Теорема. Якщо в симплекс-таблиці ОЗЛП існує такий рядок, в якому вільний член від'ємний, а решта елементів рядка невід'ємні, то система обмежень несумісна.

Головна проблема полягає у визначенні базисної і небазисної

змінних, які необхідно поміняти ролями, тобто у визначенні розв'язувального елемента таким чином, щоб зменшити або не збільшити число від'ємних вільних членів, коли система обмежень сумісна.

Припустимо, що a_{ks} – розв'язувальний елемент. Тоді згідно з правилом чотирикутника вільний член, що не належить до розв'язувального рядка, визначається за формулою

$$\beta_i = \frac{b_i a_{ks} - b_k a_{is}}{a_{ks}},$$

а вільний член розв'язувального рядка – за формулою $\beta_k = b_k / a_{ks}$.

Очевидно, що β_k може бути додатним при $a_{ks} < 0$, тобто коли розв'язувальний елемент вибрано від'ємним у рядку з від'ємним вільним членом. При такому виборі розв'язувального елемента додатні вільні члени після кроку модифікованих жорданових виключень можуть стати від'ємними. Тому необхідно накласти такі обмеження на вибір розв'язувального елемента, щоб додатні вільні члени симплекс-таблиці після кроку МЖВ не стали від'ємними, тобто

$$\beta_i = a_{is} \left(\frac{b_i}{a_{is}} - \frac{b_k}{a_{ks}} \right) \geq 0$$

для всіх $b_i \geq 0$.

Згідно з вибором розв'язувального елемента $b_k / a_{ks} > 0$. Розглянемо випадок, коли $a_{is} < 0$. Тоді $b_i / a_{is} < 0$. Вираз у дужках від'ємний, а добуток додатний. Коли $a_{is} > 0$, то при $b_i > 0$ і $b_i / a_{is} > 0$

для $\beta_i > 0$ має виконуватися умова $\frac{b_i}{a_{is}} - \frac{b_k}{a_{ks}} \geq 0$, тобто $\frac{b_i}{a_{is}} \geq \frac{b_k}{a_{ks}}$.

Отже, від'ємний елемент рядка з від'ємним вільним членом можна взяти за розв'язувальний лише в тому випадку, коли серед невід'ємних відношень вільних членів до відповідних елементів розв'язувального стовпця мінімальним є відношення в розв'язувальному рядку.

Якщо для рядка з від'ємним вільним членом не виконується умова мінімальності відношень, то після кроку МЖВ у симплекс-таблиці з'являться додаткові від'ємні вільні члени і їх буде стільки, скільки додатних відношень, які менші за відношення в розв'язувальному рядку. Тому в тих випадках, коли не виконується умова мінімальності додатного відношення для рядка з від'ємним вільним членом, за розв'язувальний беруть рядок, що містить від'ємний елемент розглядуваного стовпця і розв'язувального рядка, для якого невід'ємне відношення вільних членів до відповідних елементів розв'язувального стовпця буде мінімальним. У цьому разі всі вільні невід'ємні члени після кроку МЖВ лишаються невід'ємними. Цю процедуру повторюють доти, доки не позбавляються від'ємного вільного члена або не переконуються в тому, що система обмежень несумісна.

Теорема. *Якщо розв'язувальний елемент вибирати за найменшим симплексним відношенням, то в результаті кроку модифікованих жорданових виключень вільний член у розв'язувальному рядку стає додатним, а інші вільні члени не змінюють знаки.*

Якщо після позбавлення від чергового від'ємного вільного члена в симплекс-таблиці не виявиться від'ємних вільних членів, то одержано припустимий базисний розв'язок. Якщо його не одержано, то за наведеним вище алгоритмом позбавляються решти від'ємних вільних членів.

Скінченність алгоритму визначення припустимого базисного розв'язку полягає в скінченності базисних розв'язків. Число базисних розв'язків не перевищує числа сполучень з n по m : C_n^m .

3.4.1. Алгоритм визначення опорного плану

Нехай табл. 3.1 складена.

1. Переглядаємо стовпець вільних членів. Якщо всі вони невід'ємні, опорний план знайдений:

$$x_1 = 0; x_2 = 0, \dots, x_n = 0; \quad y_1 = b_1; y_2 = b_2, \dots, y_m = b_m.$$

Припустимо, серед вільних членів є від'ємне число: $b_r < 0$.

2. Переглядаємо рядок з номером r . Якщо в цьому рядку всі елементи невід'ємні ($a_{rj} \geq 0$), то система обмежень визначає порожній багатогранник, нерівності несумісні, задача розв'язку не має.

Нехай у r -му рядку коефіцієнт a_{rs} буде від'ємним: $a_{rs} < 0$.

Якщо таких коефіцієнтів декілька, вибираємо будь-який з них.

3. Переглядаємо коефіцієнти стовпця з номером s і коефіцієнти стовпця вільних членів, порівнюючи їх попарно (в одному рядку). Фіксуємо тільки ті пари, в елементів яких однакові знаки. У цих парах ділимо вільний член на коефіцієнт зі стовпця s : b_i/a_{is} – і одержуємо симплексні відношення, що будуть додатними.

4. Знаходимо найменше симплексне відношення

$$\min \left(\frac{b_i}{a_{is}} > 0, i = \overline{1, m} \right) = \frac{b_k}{a_{ks}}.$$

Як розв'язувальний елемент беремо a_{ks} – елемент s -го стовпця, що стоїть у рядку з мінімальним симплексним відношенням. З цим елементом робимо один крок модифікованих жорданових виключень. У кращому випадку розв'язувальним елементом може виявитися елемент a_{rs} . Тоді в результаті одного кроку новий вільний член у r -рядку виявиться додатним, а інші збережуть свої знаки. Якщо розв'язувальний елемент виявиться в іншому рядку, зробимо крок і знову повернемося до r -рядка, оскільки вільний член у ньому залишиться від'ємним. Так продовжуємо роботу з r -рядком доти, доки розв'язувальний елемент не виявиться в ньому.

5. У такий само спосіб перетворимо і всі інші від'ємні вільні члени. За скінченне число кроків одержимо опорний план чи переконаємося в нерозв'язності задачі.

3.4.2. Знаходження оптимального значення цільової функції

Для прикладу знайдемо максимальне значення цільової функції. Раніше було сказано, що коли існує обмежене максимальне значення цільової функції, то воно досягається у вершині багатогранника, тобто є базисним розв'язком. Нехай після здобуття припустимого базисного розв'язку симплекс-таблиця має вигляд табл. 3.2.

Знайдемо значення лінійної функції Z_0 для цієї таблиці:

$$Z_0 = g_1 y_1 + \dots + g_k y_k + g_{k+1} x_{k+1} + \dots + g_s x_s + \dots + g_n x_n + Q_0.$$

Таблиця 3.2

| | y_1 | ... | y_k | x_{k+1} | ... | x_s | ... | x_n | 1 |
|-----------|------------------|-----|------------------|--------------------|-----|------------------|-----|------------------|---------------|
| x_1 | α_{11} | ... | α_{1k} | $\alpha_{1,k+1}$ | ... | α_{1s} | ... | α_{1n} | β_1 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_k | α_{k1} | ... | α_{kk} | $\alpha_{k,k+1}$ | ... | α_{ks} | ... | α_{kn} | β_k |
| y_{k+1} | $\alpha_{k+1,1}$ | ... | $\alpha_{k+1,k}$ | $\alpha_{k+1,k+1}$ | ... | $\alpha_{k+1,s}$ | ... | $\alpha_{k+1,n}$ | β_{k+1} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| y_r | α_{r1} | ... | α_{rk} | $\alpha_{r,k+1}$ | ... | α_{rs} | ... | α_{rn} | β_r |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| y_m | α_{m1} | ... | α_{mk} | $\alpha_{m,k+1}$ | ... | α_{ms} | ... | α_{mn} | β_m |
| Z_0 | g_1 | ... | g_k | g_{k+1} | ... | g_s | ... | g_n | Q_0 |

Оскільки функція Z досягає максимального значення у вершині багатогранника, то $Z_0 = g_1 \cdot 0 + \dots + g_n \cdot 0 + Q_0 = Q_0$.

Перейдемо від одного базисного розв'язку до іншого, вводючи до числа базисних змінну x_s та виводячи y_r . Після кроку МЖВ з розв'язувальним елементом α_{rs} цільова функція набуває вигляду

$$Z_1 = g'_1 y_1 + \dots + g'_k y_k + g'_{k+1} x_{k+1} + \dots + g'_s x_s + \dots + g'_n x_n + Q_0 - \frac{g_s \beta_r}{\alpha_{rs}},$$

де $g'_i = g_i - \alpha_{ri} g_s / \alpha_{rs}$ і для розв'язувального стовпця $g'_s = -g_s / \alpha_{rs}$.

Базисний розв'язок має вигляд $Z_1 = Q_0 - g_s \beta_r / \alpha_{rs}$.

Розв'язувальний елемент у s -му стовпці вибирають таким чином, щоб після кроку МЖВ не вийти за межі припустимої області розв'язків, тобто щоб усі β'_i були невід'ємними. Як було показано раніше, це можливо лише тоді, коли серед усіх невід'ємних відношень β_i / α_{is} відношення β_r / α_{rs} буде мінімальним, тобто $\alpha_{rs} > 0$. Якщо $\beta_r > 0$, $\alpha_{rs} > 0$, $g_s > 0$, то значення цільової функції після кроку МЖВ зменшується: $Z_1 = Q_1 = Q_0 - g_s \beta_r / \alpha_{rs} < Q_0$.

Якщо $\beta_r > 0$, $\alpha_{rs} > 0$, $g_s < 0$, то $Q_1 > Q_0$, тобто значення цільової функції збільшується при виборі розв'язувального стовпця з від'ємним елементом у Z -рядку.

Після скінченного числа кроків МЖВ можна одержати симплекс-таблицю, в якій усі елементи Z -рядка невід'ємні, або з'ясувати, що функція Z необмежена зверху. Цільова функція буде необмежена зверху, якщо у стовпці, який містить від'ємний коефіцієнт у Z -рядку, немає додатних елементів.

Теорема. Якщо для опорного плану симплекс-таблиці серед елементів Z -рядка немає від'ємних, то опорний розв'язок є оптимальним.

Теорема. Якщо в Z -рядку є декілька від'ємних коефіцієнтів, то вигідно вибрати найбільший за абсолютною величиною.

Алгоритм знаходження оптимального розв'язку

1. Після одержання опорного плану переглядаємо коефіцієнти Z -рядка. Якщо всі вони невід'ємні, оптимальний розв'язок досягнуто. Цей розв'язок утворюється прирівнюванням у таблиці верхніх змінних нулю, а бічних – вільним членам.

2. Якщо в Z -рядку є від'ємний коефіцієнт (не рахуючи вільного члена), то стовпець з цим коефіцієнтом беремо за розв'язувальний. Якщо від'ємних коефіцієнтів декілька, за розв'язувальний беремо стовпець з найбільшим по абсолютній величині коефіцієнтом.

3. Розв'язувальний елемент в обраному стовпці визначаємо за найменшим симплексним відношенням. Якщо в стовпці відсутні додатні коефіцієнти, то функція Z необмежена зверху, задача розв'язку на максимум не має.

4. З цим елементом робимо один крок модифікованих жорданових виключень.

5. Отриманий розв'язок перевіряємо на оптимальність. При наявності в Z -рядку від'ємних коефіцієнтів процес повторюється.

Приклад 1. Знайти максимальне значення функції $Z = x_1 + x_2$ при заданих обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1; \\ 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 - 3x_2 \geq -8; \\ 2x_1 + x_2 \geq 5; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ця задача вже була розв'язана графічно (див. рис. 8). Запишемо систему обмежень у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 + 1 \geq 0; \\ y_2 = -2x_1 + x_2 + 4 \geq 0; \\ y_3 = x_1 - 3x_2 + 8 \geq 0; \\ y_4 = 2x_1 + x_2 - 5 \geq 0; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

і складемо симплекс-таблицю. Серед вільних членів є від'ємні. Тому початковий план $x_1 = x_2 = 0$ не є опорним. У рядку з від'ємним вільним членом (-5) два від'ємні елементи. Можна вибрати будь-який з них, наприклад (-2). Перший стовпець буде розв'язувальним. Знаходимо найменше із симплексних відношень:

$$\min\left(\frac{1}{1}, \frac{4}{2}, \frac{-5}{-2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, розв'язувальний елемент $a_{11} = 1$. Робимо крок модифікованих жорданових виключень. Оскільки розв'язувальний елемент не попав у рядок з від'ємним вільним членом, значення y_4 залишилось від'ємним. Отримали розв'язок $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, який ще не є опорним. З початку координат по прямій $x_2 = 0$ перемістилися на пряму $y_1 = 0$.

У четвертому рядку $-3 < 0$, тому другий стовпець – розв'язувальний.

Оскільки

$$\min\left(\frac{9}{2}, \frac{-3}{-3}\right) = \frac{-3}{-3},$$

розв'язувальний елемент $a_{42} = -3$.

| | $-x_1$ | $-x_2$ | 1 | | $-y_1$ | $-x_2$ | 1 | | $-y_1$ | $-y_4$ | 1 | |
|-------|---|--------|----|-------|--------|--|----|-------|--------|--------|-----|-------|
| y_1 | 1 | -1 | 1 | x_1 | 1 | -1 | 1 | x_1 | -1 | 1 | -6 | |
| y_2 | 2 | -1 | 4 | y_2 | -2 | 1 | 2 | y_2 | 4 | -1 | -3 | |
| y_3 | -1 | 3 | 8 | y_3 | 1 | 2 | 9 | y_3 | -7 | -2 | -21 | |
| y_4 | -2 | -1 | -5 | y_4 | 2 | -3 | -3 | x_2 | 2 | 1 | -3 | |
| Z | -1 | -1 | 0 | Z | 1 | -2 | 1 | Z | 1 | 2 | -9 | :(-3) |

Отримали розв'язок $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Оскільки всі вільні члени невід'ємні, він є опорним. Але не є оптимальним, тому що в Z -рядку є від'ємні коефіцієнти. Геометрично ми перемістилися у вершину P_1 багатокутника обмежень по прямій $y_1 = 0$. Тепер вибираємо найбільший за модулем коефіцієнт у Z -рядку. Відповідний стовпець (другий) буде розв'язувальним. Розв'язувальний елемент $a_{22} = \frac{1}{3}$, тому що $\min\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}; \frac{7}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}}$.

| | $-y_1$ | $-y_4$ | 1 | | $-y_1$ | $-y_2$ | 1 | | $-y_1$ | $-y_2$ | 1 |
|-------|----------------|----------------|---|-------|----------------|----------------|---------------|-------|---------------|--------|---|
| x_1 | $\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 2 | x_1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | x_1 | -1 | 1 | 3 |
| y_2 | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | y_4 | $-\frac{4}{3}$ | 1 | 1 | y_4 | -4 | 3 | 3 |
| y_3 | $\frac{7}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 7 | y_3 | $\frac{5}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | y_3 | $\frac{5}{3}$ | -2 | 5 |
| x_2 | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 1 | x_2 | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | x_2 | -2 | 1 | 2 |
| Z | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 3 | Z | -1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | Z | -3 | 2 | 5 |

:(1/3)

Після цього розв'язувальний стовпець – перший, $\min\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{5}{5}$.

Розв'язувальний елемент $a_{31} = 5$. Остаточна таблиця набуває вигляду

| | $-y_3$ | $-y_2$ | 1 | | $-y_3$ | $-y_2$ | 1 |
|-------|--------|--------|----|-------|--------|--------|---|
| x_1 | 1 | 3 | 20 | x_1 | 0,2 | 0,6 | 4 |
| y_4 | 4 | 7 | 35 | y_4 | 0,8 | 1,4 | 7 |
| y_1 | 1 | -2 | 5 | y_1 | 0,2 | -0,4 | 1 |
| x_2 | 2 | 1 | 20 | x_2 | 0,4 | 0,2 | 4 |
| Z | 3 | 4 | 40 | Z | 0,6 | 0,8 | 8 |

:5

У Z -рядку всі коефіцієнти невід'ємні, тому план $x_1 = 4$, $x_2 = 4$ є оптимальним. Максимальне значення цільової функції $Z_{\max} = 8$.

Приклад 2. Мінімізувати функцію $Z = 5x_1 - 4x_2 + 2x_3$ при умовах

$$\begin{cases} y_1 = -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5 \geq 0; \\ y_2 = 2x_1 - x_2 + x_3 + 2 \geq 0; \\ y_3 = -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 7 \geq 0; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

При відшуванні мінімуму цільової функції Z можливі два шляхи:

відшукати максимум цільової функції $Z^* = -Z$, з огляду на те, що $Z_{\min} = -Z_{\max}^*$;

модифікувати симплекс-метод: на кожному кроці зменшувати цільову функцію.

Уводимо нову цільову функцію $Z^* = -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$.

Складаємо вихідну симплекс-таблицю. Початковий план $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ є опорним, тому що всі вільні члени додатні. Але цей план не є оптимальним, оскільки в Z^* -рядку є від'ємний коефіцієнт (-4) . Беремо стовпець з цим коефіцієнтом за розв'язувальний.

Оскільки

$$\min\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{1}, \frac{7}{3}\right) = \frac{2}{1},$$

розв'язувальний елемент $a_{22} = 1$. Після кроку модифікованих жорданових виключень одержуємо таблицю з двома від'ємними коефіцієнтами в Z^* -рядку. Отже, максимум не досягнутий. Крім того, у третьому стовпці над від'ємним коефіцієнтом Z^* -рядка немає жодного додатного коефіцієнта. Звідси робимо висновок, що цільова функція Z^* в області розв'язку задачі не обмежена, може набувати як завгодно великих значень.

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | 1 | | $-x_1$ | $-y_2$ | $-x_3$ | 1 |
|-------|--------|--------|--------|---|-------|--------|--------|--------|---|
| y_1 | 3 | 2 | -4 | 5 | y_1 | 7 | -2 | -2 | 1 |
| y_2 | -2 | 1 | -1 | 2 | x_2 | -2 | 1 | -1 | 2 |
| y_3 | 4 | 3 | -3 | 7 | y_3 | 10 | -3 | 0 | 1 |
| Z^* | 5 | -4 | 2 | 0 | Z^* | -3 | 4 | -2 | 8 |

Зауваження. Щоб краще зрозуміти механіку цього, з останньої таблиці одержуємо $Z^* = 2x_3 + 8$ при $x_1 = y_2 = 0$, $x_3 = t > 0$; $Z^* \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Але у вираз для Z^* змінна x_3 входить з від'ємним коефіцієнтом, а тим часом її зростання не зменшує, а збільшує критерій оптимальності. Щоб це пояснити, випишемо з таблиці значення змінних $x_1 = 0$, $x_2 = 2x_1 - y_2 + x_3 + 2 = x_3 + 2$, підставимо їх у цільову функцію та одержимо

$$Z^* = -5x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \cdot 0 + 4(x_3 + 2) - 2x_3 = 2x_3 + 8,$$

тобто те, що є в Z^* -рядку. Зростання змінної x_3 збільшує Z^* , тому що при цьому безмежно збільшується змінна x_2 , яка входить у нього з додатним коефіцієнтом.

Одержано $Z^* \rightarrow +\infty$, тому $Z \rightarrow -\infty$.

3.4.3. Задача лінійного програмування з мішаними обмеженнями

Багато обмежень задач оптимізації задаються не лише у вигляді нерівності, а й у вигляді рівності. Розглянемо мішану систему обмежень, коли вони задаються у вигляді рівностей і нерівностей. Відомо, як, застосовуючи симплекс-метод, розв'язати задачу оптимізації, коли всі обмеження задано у вигляді нерівностей і всі змінні невід'ємні, тобто ОЗЛП.

Розглянемо, як задачу лінійного програмування з мішаними обмеженнями звести до основної задачі лінійного програмування. Нехай система обмежень має вигляд

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & (i = \overline{1, r}); \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i & (i = \overline{1, r+1}); \\ x_j \geq 0 & (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Знайти такі значення x_j , що задовольняють систему обмежень,

за яких лінійна цільова функція $Z = \sum_{i=1}^n C_i x_i$ досягає

максимального значення.

Для перших r рівнянь уводимо штучні невід'ємні змінні

$$y_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \geq 0 \quad (i = \overline{r+1, r}). \text{ Інші рівняння запишемо так:}$$

$$y_i = - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i = 0 \quad (i = \overline{r+1, m}). \text{ Запишемо задачу з мішаними об-}$$

меженнями у вигляді симплекс-таблиці 3.3.

Очевидно, для того щоб задачу лінійного програмування з мішаними обмеженнями звести до ОЗЛП, необхідно позбутися 0-рядків. При цьому слід пам'ятати, що базисний розв'язок тим ближчий до припустимого базисного розв'язку, чим менше від'ємних вільних членів у симплекс-таблиці. Тому запишемо всі 0-рядки таким чином, щоб усі вільні члени 0-рядків були невід'ємними. Якщо вільний член 0-рядка

від'ємний, то множенням рядка на (-1) дістаємо додатний вільний член. Після складання симплекс-таблиці виключення 0-рядків необхідно виконувати таким чином, щоб число від'ємних вільних членів після кроку ЗЖВ не збільшувалось. Цього можна досягти, якщо виключення 0-рядків виконувати за наступним правилом:

1. Розв'язувальним обирають стовпець, який містить додатний елемент у 0-рядку. Якщо в 0-рядку немає жодного додатного коефіцієнта, то рівняння

$$0 = a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \dots + a_{in}(-x_n) + b_i$$

не задовольняють жодні невід'ємні значення змінних, тобто система обмежень не має невід'ємних розв'язків.

Таблиця 3.3

| | $-x_1$ | $-x_2$ | ... | $-x_n$ | 1 |
|-------|-------------|-------------|-----|-------------|-----------|
| y_1 | a_{11} | a_{1k} | ... | a_{1n} | b_1 |
| · | · | · | ... | · | · |
| y_r | a_{r1} | a_{r2} | ... | a_{rn} | b_r |
| 0 | $a_{r+1,1}$ | $a_{r+2,1}$ | ... | $a_{r+1,n}$ | b_{r+1} |
| · | · | · | ... | · | · |
| 0 | a_{m1} | a_{m2} | ... | a_{mn} | b_m |
| Z | $-C_1$ | $-C_2$ | ... | $-C_n$ | 0 |

2. Знаходять невід'ємні відношення вільних членів до відповідних елементів розв'язувального стовпця. Елемент розв'язувального стовпця, для якого відношення мінімальне, беруть за розв'язувальний. Якщо розв'язувальний елемент містився в 0-рядку, то після кроку МЖВ нуль перекидається наверх і одержаний 0-стовпець викреслюється. Цей алгоритм виконують доти, доки не позбуваються всіх 0-рядків. Одержана ОЗЛП розв'язується за наведеним раніше алгоритмом.

Зауваження. Можна виключати 0-рядки, не дотримуючись наведеного правила. Для перекидання наверх нулів розв'язувальні елементи можна було б вибирати довільно (лише серед додатних елементів), але тоді серед вільних членів могли б з'явитися зайві від'ємні. У результаті може виявитися більше роботи з пошуку опорного розв'язку.

Замість виключення 0-рядків можна вводити нерівності. У цьому випадку замість рівності $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ вводиться система нерівностей

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i. \end{cases}$$

Останній спосіб зручно використовувати тоді, коли є програма розв'язування ОЗЛП, де не передбачено виключення 0-рядків.

3.4.4. Загальна задача лінійного програмування

Нехай у задачі лінійного програмування задано мішані обмеження і не на всі змінні x_i накладено обмеження. Таку задачу називатимемо *загальною задачею лінійного програмування*, і вона зводиться до ОЗЛП у два етапи. Спочатку виключають *вільні змінні* (змінні, на які не накладено обмеження). Після кожного кроку МЖВ виписується рівняння, в якому вільна змінна виражена через інші

змінні, а відповідний рядок таблиці викреслюється. Після виключення вільних змінних маємо задачу лінійного програмування з мішаними обмеженнями. Ця задача зводиться до загальної задачі лінійного програмування виключенням 0-рядків. Після того як оптимальний розв'язок загальної задачі лінійного програмування знайдено, обчислюють значення вільних змінних.

Приклад. Знайти максимум лінійної функції $Z = x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 7; \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq -9; \\ x_4 \leq -1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad x_4 - \text{вільна змінна};$$

Перепишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 - x_2 - 3x_3 + 7 \geq 0; \\ y_2 = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 9 \geq 0; \\ y_3 = -x_4 - 1 \geq 0; \\ 0 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2 \geq 0; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Складемо таблицю. Спочатку позбудемося вільної змінної x_4 , перекинемо її ліворуч. За розв'язувальний елемент можна взяти тільки 1. Випишемо окремо x_4 .

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-x_4$ | 1 |
|-------|--------|--------|--------|---|----|
| y_1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 7 |
| y_2 | -4 | 3 | 2 | 0 | -9 |
| y_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | 2 |
| Z | -1 | -4 | 3 | -1 | 0 |

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-y_3$ | 1 |
|-------|--------|--------|--------|--------|----|
| y_1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 7 |
| y_2 | -4 | 3 | 2 | 0 | -9 |
| x_4 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 |
| 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | 2 |
| Z | -1 | -4 | 3 | 1 | -1 |

| | $-x_1$ | $-x_2$ | $-x_3$ | $-y_3$ | 1 |
|------------------|---|--------|--------|--------|----|
| y_1 | 2 | 1 | 3 | 0 | 7 |
| y_2 | -4 | 3 | 2 | 0 | -9 |
| 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | 2 |
| Z | -1 | -4 | 3 | 1 | -1 |
| $x_4 = -y_3 - 1$ | | | | | |

Тепер перекинемо 0 наверх. У 0-рядку вибираємо $1 > 0$. Складемо симплексні відношення для елементів першого стовпця.

Оскільки

$$\min\left(\frac{7}{2}, \frac{-9}{-4}, \frac{2}{1}\right) = \frac{2}{1},$$

розв'язувальний елемент $a_{31} = 1$. Робимо крок МЖВ і викреслюємо нульовий стовпець. Задача зведена до звичайного вигляду, але в таблиці ще немає опорного плану. Беремо згідно з відповідним правилом за розв'язувальний елемент (-2) і одержуємо на наступному кроці опорний план. Оскільки всі коефіцієнти в Z -рядку додатні, цей план є оптимальним.

| | $-x_2$ | $-x_3$ | $-y_3$ | 1 |
|-------|--------|--|--------|----|
| y_1 | -3 | 5 | 0 | 3 |
| y_2 | 11 | -2 | 0 | -1 |
| x_1 | 2 | -1 | 0 | 2 |
| Z | -2 | 2 | 1 | 1 |

| | $-x_2$ | $-y_2$ | $-y_3$ | 1 |
|-------|--------|--------|--------|------------------|
| y_1 | -49 | -5 | 0 | -1 |
| x_3 | 11 | 1 | 0 | -1 : (-2) |
| x_1 | 7 | 1 | 0 | -5 |
| Z | -18 | -2 | -2 | 0 |

| | $-x_2$ | $-y_2$ | $-y_3$ | 1 |
|-------|-----------------|----------------|--------|---------------|
| y_1 | $\frac{49}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| x_3 | $-\frac{11}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| x_1 | $-\frac{7}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{5}{2}$ |
| Z | 9 | 1 | 1 | 0 |

Шуканий розв'язок такий: $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -y_3 - 1 = 0 - 1 = -1$; $Z_{\max} = 0$.

3.4.5. Особливі випадки застосування симплекс-методу

Можна виділити наступні особливі випадки, що зустрічаються при застосуванні симплекс-методу: виродження, альтернативні оптимальні розв'язки, необмежені розв'язки, відсутність припустимих розв'язків.

Було розглянуто порядок знаходження опорного й оптимального планів у випадку, коли серед вільних членів у жорданових таблицях немає нулів. Якщо ж на якомусь кроці (чи навіть у вихідній системі нерівностей) серед вільних членів з'являється нуль, то розв'язання задачі може трохи ускладнитися.

Наявність виродженого розв'язку не свідчить про яку-небудь "небезпеку" для дослідника і викликає тільки певну незручність у теоретичному відношенні. З практичної точки зору ситуація цілком пояснюється наявністю в моделі принаймні одного *надлиш*-

кового обмеження. Для більш глибокого розуміння сутності питань, пов'язаних з явищем виродженості, можна докладно проаналізувати наступні приклади.

Приклад 1. Вироджений оптимальний розв'язок.

$$\text{Максимізувати } Z = 3x_1 + 9x_2 \text{ при обмеженнях } \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 8; \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Вироджений проміжний розв'язок.

$$\text{Максимізувати } Z = 3x_1 + 2x_2 \text{ при обмеженнях } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12; \\ 4x_1 + x_2 \leq 8; \\ 4x_1 - x_2 \leq 8; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

У першому прикладі через точку оптимуму ($x_1 = 0$, $x_2 = 2$) проходять три прямі. Задача містить лише дві змінні, тому одне з обмежень моделі є надлишковим. Інформація про те, що деякі ресурси не потрібні для досягнення поставленої цілі, може виявитися дуже корисною при практичній реалізації результатів дослідження. Така інформація дозволяє також виявити можливі неточності у формулюванні задачі. На жаль, не існує надійних способів виявлення надлишкових обмежень безпосередньо з даних, що містяться в симплекс-таблиці.

З погляду обчислювального процесу виродження можна включити в загальний алгоритм: розв'язувальний елемент в обраному стовпці завжди знаходиться за найменшим симплексним відношенням. Тут вважаємо, що нулю серед вільних членів приписується знак "плюс", тобто елемент нульового рядка може бути взятий за розв'язувальний тільки тоді, коли він додатний.

Відзначимо ще одну обставину. Оскільки кожному виродженому опорному плану відповідає більш ніж один базис, то можливий випадок, коли при переході від одного виродженого опорного плану до іншого опорний план не зміниться, а зміниться тільки базис, що йому відповідає. Такий перехід може повторитися декілька разів. Якщо при цьому відбулося повернення до базису, що вже зустрічався, то в алгоритмі процес почне повторюватися, відбу-

деться так зване *зациклювання*. Існують строго обґрунтовані методи запобігання зациклюванню. Однак на практиці воно майже не зустрічається.

Коли пряма чи площина (гіперплощина), що являє собою цільову функцію, паралельна гіперплощині, яка відповідає єдальному обмеженню (що в точці оптимуму виконується як точна рівність), цільова функція набуває *одного й того ж оптимального значення* в деякій сукупності точок простору розв'язків. Такі розв'язки називаються *альтернативними оптимальними розв'язками*.

Приклад 3. Нескінченна множина розв'язків.

$$\text{Максимізувати } Z = 2x_1 + 4x_2 \text{ при обмеженнях } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5; \\ x_1 + x_2 \leq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

| | $-x_1$ | $-x_4$ | 1 |
|-------|--------|--------|---|
| y_1 | 1 | 2 | 5 |
| y_2 | 1 | 1 | 4 |
| Z | -2 | -4 | 0 |

| | $-x_1$ | $-y_1$ | 1 |
|-------|--------|--------|----|
| x_2 | 1 | 1 | 5 |
| y_2 | 1 | -1 | 3 |
| Z | 0 | 4 | 20 |

:2

| | $-x_1$ | $-y_1$ | 1 |
|-------|---------------|----------------|---------------|
| x_2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{2}$ |
| y_2 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |
| Z | 0 | 2 | 10 |

В оптимальній таблиці серед коефіцієнтів при небазисних змінних у Z -рівнянні є нуль. Нульове значення коефіцієнта при змінній x_1 свідчить про те, що її включення в базис не змінить значення цільової функції, але приведе до зміни значень інших змінних. Якщо x_1 ввести до базису замість y_2 , то утвориться новий оптимальний розв'язок $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ і $Z = 10$. Як і можна було очікувати, за допомогою симплекс-методу вдається ідентифікувати саме кутові точки (позначимо їх X_1 і X_2). Будь-який розв'язок X , що відповідає точці відрізка X_1X_2 , можна зобразити як опуклу лінійну комбінацію точок X_1 і X_2 :

$$X = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2,$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$.

У даному прикладі

$$x_1 = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot 3 = 3 - 3\alpha; \quad x_2 = \alpha \cdot 5/2 + (1 - \alpha) \cdot 1 = 1 + 3\alpha/2.$$

Помітимо, що при $\alpha = 0$ маємо точку X_1 , при $\alpha = 1$ – точку X_2 , при інших значеннях α – точку відрізка X_1X_2 .

4. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

Вірно (В) чи невірно (Н)?

1. У задачі ЛП оптимальний план завжди знаходиться на границі області припустимих розв'язків.

2. Заміна знака " $\leq$ " на знак " $=$ " в обмеженій лінійній моделі може привести до більш жорсткого обмеження простору розв'язків.

3. Обмеження типу " $\geq$ " можна зробити більш жорстким, зменшивши сталу в його правій частині.

4. Двовимірний простір розв'язків із двома обмеженнями у вигляді рівнянь може містити не більш однієї припустимої точки за умови, що прямі, які відповідають обмеженням, не збігаються (тобто рівняння незалежні).

5. Двовимірний простір розв'язків із двома обмеженнями у вигляді рівнянь може містити безліч припустимих точок тільки в тому випадку, коли прямі, що становлять обмеження, збігаються (тобто рівняння залежні).

6. Оптимальний розв'язок задачі ЛП, якщо він скінченний, можна завжди знайти, знаючи всі екстремальні точки (вершини) простору розв'язків.

7. Зміна коефіцієнтів цільової функції завжди приводить до зміни оптимальних значень змінних.

8. Змінні лінійних оптимізаційних моделей, побудованих для розв'язання практичних задач, можуть не мати обмеження в знаку.

9. Вид виробничої діяльності, що не вважається в заданих умовах вигідним, може стати прибутковим, якщо потреби в обмежених ресурсах, пов'язані з його реалізацією, будуть зменшені.

10. Кожне обмеження у вигляді рівності можна замінити двома нерівностями.

11. Максимізація деякої функції f при заданій сукупності обмежень еквівалентна мінімізації функції $g = -f$ при тій же системі обмежень, за винятком того, що $\min g = -\max f$.

12. При розв'язанні задачі ЛП з m обмеженнями кількість додатних базисних змінних на ітерації симплекс-методу може перевищувати m .

13. Для того щоб можна було використовувати симплекс-метод, усі змінні повинні бути невід'ємними.

14. Будь-яка припустима точка обмеженого простору розв'яз-

ків задачі ЛП може бути визначена, якщо відомі припустимі екстремальні точки (вершини).

15. Якщо із сукупності базисних змінних виключається змінна, для якої відношення сталої в правій частині обмеження до коефіцієнта при цій змінній, використовуване при перевірці допустимості, не є мінімальним, то на наступній ітерації принаймні одна базисна змінна обов'язково набуде від'ємного значення.

16. Якщо з небазисних змінних поточної ітерації для включення в число базисних вибирається змінна, що має в цільовій функції найбільший за абсолютною величиною від'ємний коефіцієнт, то такий вибір гарантує найбільший приріст цільової функції на наступній ітерації.

17. Обсяг обчислень при реалізації симплекс-методу залежить у першу чергу від кількості обмежень.

18. Алгоритм симплекс-методу завжди гарантує, що одержуване на новій ітерації значення цільової функції буде краще, ніж на попередній ітерації.

19. На ітерації симплекс-методу розв'язувальний елемент може бути від'ємним.

20. Стовпець симплекс-таблиці, що відповідає штучній змінній, можна виключити, як тільки ця змінна стає небазисною.

21. Якщо на поточній ітерації симплекс-методу отриманий розв'язок є виродженим, наступна ітерація може не привести до суміжної екстремальної точки.

22. Якщо поточній ітерації симплекс-методу відповідає вироджений розв'язок, то наступна ітерація також приведе до одержання виродженого розв'язку.

23. Якщо простір розв'язків не обмежений, значення цільової функції також не обмежене.

24. У задачі ЛП можлива зміна коефіцієнтів цільової функції, що не викликають зміни оптимальних значень змінних.

25. Якщо деяка змінна в симплекс-таблиці для оптимального розв'язку є небазисною, то зміна коефіцієнта при цій змінній у цільовій функції може вплинути тільки на значення відповідного коефіцієнта в Z-рівнянні цієї таблиці.

26. Зміна коефіцієнта цільової функції при базисній змінній в оптимальному розв'язку може викликати в симплекс-таблиці для оптимального розв'язку зміну всіх коефіцієнтів при небазисних змінних.

27. Включення в модель нового виду виробничої діяльності може поліпшити значення цільової функції.

28. Додавання нового обмеження може поліпшити значення цільової функції.

29. При зміні правих частин обмежень і коефіцієнтів цільової функції розв'язок може стати як неоптимальним, так і неприпустимим.

[Відповіді. 1 – В; 2 – В; 3 – Н; 4 – В; 5 – В; 6 – В; 7 – Н; 8 – В; 9 – В; 10 – В; 11 – В; 12 – Н; 13 – В; 14 – В; 15 – В; 16 – Н; 17 – В; 18 – Н; 19 – В; 20 – В; 21 – В; 22 – Н; 23 – Н; 24 – В; 25 – В; 26 – В; 27 – В; 28 – Н; 29 – В].

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Ашманов С.А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981.
2. Барсов А.С. Линейное программирование в технико-экономических задачах. – М.: Наука, 1964.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1971.
4. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980.
5. Давыдов Э.Г. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1990.
6. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1964.
7. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путько, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
8. Лебедева В.Ф., Червинская Л.Г. Основы линейного программирования. – Николаев: НКИ, 1975.
9. Полунин И.Ф. Курс математического программирования. – Минск: Высшая школа, 1970.
10. Толбатов Ю.А. Математична статистика та задачі оптимізації в алгоритмах і програмах. – К.: Вища школа, 1994.
11. Цегелик Г.Г. Лінійне програмування. – Л.: Світ, 1995.

Додаткова література

12. Абчук В.А. 7:1 в нашу пользу. – М.: Радио и связь, 1982.
13. Акофф Р. Искусство решения проблем. – М.: Мир, 1982.
14. Гасс С. Путешествие в страну линейного программирования. – М.: Мир, 1973.
15. Науман Э. Принять решение – но как? : Пер. с нем. – М.: Мир, 1987.

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| Вступ | 3 |
| 1. Дослідження операцій як наука й мистецтво | 7 |
| 1.1. Операція. Ефективність операції | 7 |
| 1.1.1. Приклади операцій | 7 |
| 1.1.2. Основні поняття дослідження операцій | 7 |
| 1.2. Математична модель операції | 8 |
| 1.3. Основні типи задач дослідження операцій | 10 |
| 2. Жорданові виключення | 12 |
| 2.1. Звичайні жорданові виключення | 12 |
| 2.1.1. Визначення рангу матриці | 16 |
| 2.1.2. Розв'язування загальної системи лінійних рівнянь | 18 |
| 2.1.3. Розв'язування системи n рівнянь з n невідомими | 22 |
| 2.1.4. Обернення матриці | 23 |
| 2.1.5. Приклад застосування жорданових виключень | 25 |
| 2.2. Модифіковані жорданові виключення | 27 |
| 3. Лінійне програмування | 29 |
| 3.1. Приклади задач лінійного програмування | 29 |
| 3.2. Формулювання і властивості основної задачі | 31 |
| 3.3. Графічний метод розв'язування задачі лінійного програмування | 33 |
| 3.4. Симплекс-метод розв'язування основної задачі лінійного програмування | 37 |
| 3.4.1. Алгоритм визначення опорного плану | 41 |
| 3.4.2. Знаходження оптимального значення цільової функції | 42 |
| 3.4.3. Задача лінійного програмування з мішаними обмеженнями | 48 |
| 3.4.4. Загальна задача лінійного програмування | 50 |
| 3.4.5. Особливі випадки застосування симплекс-методу | 52 |
| 4. Контрольні запитання | 55 |
| Рекомендована література | 58 |

ЄМЕЛЬЯНОВА Тетяна Василівна
ВАРШАМОВ Армен Варшамович
БОНДАРЕНКО Михайло Борисович

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Конспект лекцій

Частина 1

Видавництво НУК, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1150 від 12.12.2002 р.

Редактор М.Д. Белікчі
Комп'ютерна правка та верстка Н.В. Чудновцева
Коректор Н.О. Шайкіна

Підписано до друку 27.04.04. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 3,4. Обл.-вид. арк. 3,7. Тираж 100 прим.
Вид. № 6. Зам. № 318. Ціна договірна.