

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

С. Д. Титов, Л. С. Чернова, І. С. Титова

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник



2026

УДК 519.85
Т45

Автори:

С. Д. Титов, доцент;
Л. С. Чернова, д-р техн. наук, доцент;
І. С. Титова, викладач

Рецензенти:

Т. Ковтун – доктор технічних наук, професор кафедри управління логістичними системами та проєктами Одеського національного морського університету;
І. Становська – доктор технічних наук, професор кафедри вищої математики та моделювання систем Національного університету «Одеська політехніка»;
М. Ушкац – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри фізики та вищої математики Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова

*Рекомендовано Вченою радою НУК як навчальний посібник
(протокол № 5 від 23.05.2025 р.)*

Титов С. Д.

Т45 Вища та прикладна математика : навчальний посібник /
С. Д. Титов, Л. С. Чернова, І. С. Титова. – Миколаїв : НУК, 2026.
– 270 с.

ISBN 978-966-321-495-5

Посібник складається з двох розділів – «Елементи теорії лінійної оптимізації» та «Симплекс-метод розв’язання задач лінійної оптимізації». Кожен параграф посібника містить як теоретичні основи, так і практичні приклади.

Посібник може успішно використовуватись при вивченні курсу лінійної оптимізації на економічному та управлінських напрямках, а також для аспірантів, викладачів учбових закладів і фахівців, які використовують теорію оптимізації в різних галузях.

Навчальний посібник буде вельми корисний та витребуваний при підготовці студентів і слухачів очної, заочної та дистанційної форм навчання економічного й управлінського напрямків.

УДК 519.85

© С. Д. Титов, Л. С. Чернова, І. С. Титова, 2026
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2026
ISBN 978-966-321-495-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	5
----------------	---

РОЗДІЛ 1

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	6
---	---

1.1 Загальна постановка задачі лінійної оптимізації. Форми запису задач. Еквівалентність форм запису.....	6
1.2 Основні властивості задач лінійної оптимізації.....	14
1.3 Двоїстість у задачах лінійної оптимізації. Основні теореми двоїстості.....	23
1.4 Розв’язання та графічна інтерпретація системи лінійних алгебраїчних нерівностей. Поліедр.....	29
1.5 Графічний метод розв’язання двовимірних задач лінійної оптимізації.....	34
1.6 Типові завдання № 1.....	50
1.7 Модельний розв’язок завдання № 1.....	71

РОЗДІЛ 2

СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	106
---	-----

2.1 Загальні відомості та алгоритм звичайного симплексного розрахунку.....	106
2.2 Приклади розв’язку задач ЛО звичайним симплекс-методом.....	119
2.3 Приклад виродженого розв’язку задач ЛО.....	125
2.4 Приклад альтернативного оптимуму у розв’язку задач ЛО.....	130

2.5	Приклад відсутності оптимального розв'язку – необмежена цільова функція.....	135
2.6	Двоїстий симплекс-метод.....	139
2.7	Метод штучного базису.....	148
2.8	Типові завдання № 2.....	156
2.9	Модельний розв'язок завдання № 2.....	178
2.10	Типові завдання № 3.....	209
2.11	Модельний розв'язок завдання № 3.....	229
	Література.....	267
	Нотатки.....	269

ПЕРЕДМОВА

Книга написана на базі курсу лекцій, які викладалися авторами протягом деяких років у НУК м. Миколаєва, для студентів економічного та управлінського напрямків.

Навчальний посібник є другою частиною виданої раніше книги «Вища та прикладна математика : навчальний посібник : у 2 ч. Ч. 1. – Харків : Факт, 2017. – 336 с.»

У посібнику викладено необхідні основи математичного апарату лінійної оптимізації як стартового і найважливішого розділу загальної теорії оптимізації.

Теоретичний матеріал посібника подано без доведення, з метою акцентування зусиль на практичних завданнях. Навчальний посібник містить велику кількість задач, згрупованих за темами.

Запропонована книга може успішно використовуватись при вивченні курсу лінійної оптимізації. Навчальний посібник буде вельми корисний та витребуваний при підготовці студентів і слухачів очної, заочної та дистанційної форм навчання. В книзі наведені три типові завдання по 20 варіантів у кожному, згруповані за відповідними темами. По кожному типовому завданню наведено модельні розв'язки задач. З огляду на це, посібник буде корисний у комплектуванні контрольних завдань за курсом лінійної оптимізації.

Завдяки великій кількості розв'язаних задач книга може слугувати довідниковим посібником не тільки для студентів та слухачів, а і для фахівців, які використовують теорію оптимізації в різних галузях.

РОЗДІЛ 1 | ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1 Загальна постановка задачі лінійної оптимізації. Форми запису задач. Еквівалентність форм запису

Задачею лінійної оптимізації (ЛО) прийнято називати задачу на глобальний екстремум (supremum (глобальний максимум) або infimum (глобальний мінімум)) лінійної функції від скінченної кількості змінних, означених на опуклій множині типу поліедра (скінченна або нескінченна множина обмежена прямими).

Задачу ЛО будемо записувати у вигляді

$$W_I = CX - \text{opt}(\max \vee \min)$$
$$\Omega_I : AX \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \\ < \\ > \\ = \end{array} \right\} B,$$

де $\mathbf{c} = C = c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$, $C \in \mathbf{R}^n$ — коефіцієнти цільової функції,

$\mathbf{x} = X = x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $X \in \mathbf{R}^n$ — змінні величини задачі ЛО,

$$A = [a_{ij}]_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad -$$

матриця коефіцієнтів системи обмежень,

$\mathbf{b} = B = b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$, $B \in \mathbf{R}^m$ – коефіцієнти правих частин системи обмежень.

У разі введення векторів $\mathbf{a}_j = a_j = [a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}]^T \in \mathbf{R}^m$, $j = 1, 2, \dots, m$, – вектор-стовпчики A , $\mathbf{a}^i = a^i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$ – вектор-рядочки A , матриця коефіцієнтів системи може бути представлена у векторному вигляді:

$$A = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^m]^T = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] \in \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^n.$$

Не порушуючи загальне викладення матеріалу, будемо використовувати тип екстремуму – supremum (максимум) і знак відношень менше або дорівнює – $\leq$.

Задача ЛО має вигляд

$$W_I = CX \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : AX \leq B.$$

Розгорнута форма запису множини припустимих значень X або інакше поліедр Ω_I , має таку форму запису:

$$\Omega_I : X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (a_i x) \leq b, i = 1, \dots, m\}.$$

Наведемо приклади різних форм запису задачі ЛО.

Приклад № 1.11

$$W_I = 3x_1 + 5x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

або матрична – векторна форма запису

$$W_I = [3, 5, -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x_2 \geq 0.$$

$$W_I = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 \geq 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 \leq 25, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 12, \\ x_1 + 7x_3 + 4x_5 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Для будь-якої задачі ЛО виконується теорема:

Теорема 1.11

Довільний локальний розв'язок задачі ЛО є глобальним.

Розв'язок задачі ЛО будемо позначати як $X^{opt} = [x_1^{opt}, x_2^{opt}, \dots, x_n^{opt}]$, а для конкретного типу оптимуму $X_{\max}^{opt}$ або $X_{\sup}^{opt}$, $X_{\min}^{opt}$ або $X^{\min}$.

Для задач ЛО складена умовна класифікація в залежності від вигляду системи обмежень.

Так, *загальною задачею* ЛО називають задачу типу

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = k+1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Основною задачею ЛО є наступна задача:

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

або у матричній формі запису:

$$W_I = CX \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : AX \leq B.$$

Стандартною задачею ЛО називають за записом такої задачі:

$$\begin{aligned} W_I &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \Omega_I : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

або у матричній формі запису:

$$\begin{aligned} W_I &= CX \rightarrow \max \\ \Omega_I : AX &\leq B, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Канонічна задача ЛО має таку форму запису:

$$\begin{aligned} W_I &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ \Omega_I : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

або у матричному представленні

$$\begin{aligned} W_I &= CX \rightarrow \max \\ \Omega_I : AX &= B, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Аналогічні форми запису задач ЛО і для умови мінімуму цільової функції $W_I = CX \rightarrow \min$, але знаки нерівностей у системі обмежень повинні бути вигляду $\geq$.

Зауважимо, що форми задач ЛО є еквівалентними. Так, основна, стандартна і канонічна є окремими випадками загальної задачі. Загальна задача може бути представлена

у формі основної, стандартної або канонічної. Виконати це можливо завдяки еквівалентним перетворенням, які зберігають множину розв'язків.

Розглянемо ці прийоми перетворення для переходу від однієї форми задач до іншої. Рівняння системи обмежень задачі ЛО еквівалентне системі двох нерівностей:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i. \end{cases}$$

Довільні за знаком змінні можуть бути представлені у вигляді різниці 2-х невід'ємних змінних:

$$x_j = u_j - v_j, \quad u_j \geq 0, \quad v_j \geq 0.$$

Перехід від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь виконують додаванням невід'ємної (балансової) змінної:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Для спрощення перетворення задач ЛО також використовують перехід від максимізації до мінімізації цільової функції і навпаки:

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \Leftrightarrow W_I = -\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min.$$

Приклад № 1.12

Для заданої загальної задачі ЛО виконати перехід до 3-х інших (еквівалентних): основної, стандартної та канонічної.

$$W_I = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 \leq 12, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок.

Для переходу до основної задачі виключаємо невід'ємну змінну x_2 з рівняння. Виключення проводимо у табличній формі (табл. 1.11) за алгоритмом метода Жордана-Гаусса.

Таблиця 1.11

	$x_1 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_4 \geq 0$	x_5	?	b	Σ
I	2	0	1	-3	2	$\leq$	12	14
II	1	-3	2	-1	0	$\leq$	7	6
III	3	1	-1	2	-1	$=$	1	5
W_I	3	5	-4	1	-1			4

I	2	0	1	-3	2	$\leq$	12	14
II	10	0	-1	5	-3	$\leq$	10	21
III	3	1	-1	2	-1	$=$	1	5
W_I	-12	0	1	-9	4		5	

З останнього кроку таблиці 1.11 маємо:

$$W_I = -12x_1 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 - 5 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 \leq 12, \\ 10x_1 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 \leq 7, \\ 3x_1 + \textcircled{x_2} - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Змінна x_2 перейшла в розряд розв'язаних (міститься тільки в одному обмеженні). Оскільки ця змінна є невід'ємною, то відкидаючи (нехтуючи) нею, забезпечуємо гарантований перехід від рівняння до нерівності типу «менше або дорівнює». Отже:

$$\begin{aligned} W_I &= -12x_1 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 - 5 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 \leq 12, \\ 10x_1 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 \leq 7, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отримана задача ЛО є основною задачею згідно з класифікацією. Перехід від неї до стандартної форми містить заміну довільної за знаком змінної x_5 на різницю двох невід'ємних змінних $x_5 = u_5 - v_5$, де $u_5 \geq 0$, $v_5 \geq 0$.

$$\begin{aligned} W_I &= -12x_1 + x_3 - 9x_4 + 4(u_5 - v_5) - 5 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 2(u_5 - v_5) \leq 12, \\ 10x_1 - x_3 + 5x_4 - 3(u_5 - v_5) \leq 7, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 - (u_5 - v_5) \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, u_5 \geq 0, v_5 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отримана еквівалентна до вихідної задача, але у стандартній формі представлення. Останній перехід до канонічної форми задачі ЛО виконуємо від стандартної. У кожній нерівності системи обмежень додаємо невід'ємні змінні (балансові). Така процедура врівноважує нерівність до рівня граничного виконання – рівності. Маємо

$$\begin{aligned}
 W_I &= -12x_1 + x_3 - 9x_4 + 4(u_5 - v_5) - 5 \rightarrow \max \\
 \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 3x_4 + 2(u_5 - v_5) + \textcircled{x_6} = 12, \\ 10x_1 - x_3 + 5x_4 - 3(u_5 - v_5) + \textcircled{x_7} = 7, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 - (u_5 - v_5) + \textcircled{x_8} = 1, \end{cases} \quad (*) \\
 &x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, u_5 \geq 0, v_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0, x_8 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Згідно з класифікацією змінних x_6, x_7, x_8 є базисними (обведені в коло), а x_1, x_3, x_4, u_5, v_5 є вільними змінними.

Після розв'язання задачі (*) необхідно обчислити виключену змінну $x_2 = 1 - 3x_1 + x_3 - 2x_4 + (u_5 - v_5)$.

1.2 Основні властивості задач лінійної оптимізації

Для задач ЛО виконуються дві наступні теореми існування.

Теорема 1.21

Якщо поліедр Ω_I не порожній та обмежений, то задача лінійної оптимізації має розв'язок.

Необхідною та достатньою умовою оптимальності для загальної задачі ЛО є виконання наступної теореми.

Теорема 1.21

Припустимий вектор (план) $x^{opt} = X^{opt} = [x_1^{opt}, x_2^{opt}, \dots, x_n^{opt}] \in R^n$ загальної задачі ЛО є її розв'язком у тому і тільки в тому випадку, якщо існує такий вектор $y^{opt} = Y^{opt} = [y_1^{opt}, y_2^{opt}, \dots, y_m^{opt}] \in R^m$, для якого

$$y_i^{opt} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

та виконано:

$$\sum_{i=1}^m y_i^{opt} a_{ij} \geq c_j, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$\sum_{i=1}^m y_i^{opt} a_{ij} = c_j, \quad j = l+1, \dots, n,$$

$$x_j^{opt} \left(\sum_{i=1}^m y_i^{opt} a_{ij} - c_j \right) = 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$y_i^{opt} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{opt} - b_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Необхідною та достатньою умовою оптимальності основної задачі ЛО є виконання наступної теореми.

Теорема 1.23

Припустимий вектор $x^{opt} = X^{opt} = [x_1^{opt}, x_2^{opt}, \dots, x_n^{opt}] \in \mathcal{R}^n$ є розв'язком у тому і тільки в тому випадку, якщо існують такі невід'ємні числа $y_i^{opt} \geq 0$, $i \in I(x^{opt})$ (двоїсті невідомі), що виконується рівність

$$c = \sum_{i \in I(x^{opt})} y_i^{opt} a_i.$$

Зауваження. $I(x^{opt})$ є натуральними значеннями, які рівні порядковим номерам тільки тих нерівностей системи обмежень основної задачі ЛО, які при підстановці оптимальних значень x^{opt} виконуються гранично – тобто перетворюються у вірні рівності.

Приклад № 1.21

Нехай маємо двовимірну задачу ЛО:

$$\begin{aligned} W_I &= 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \leq 36, \\ 8x_1 + 14x_2 \leq 202, \\ 3x_1 - 10x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Відомий розв'язок цієї задачі:

$$\begin{aligned} W_I^{\max} &= 98, \\ X^{\max} &= [20, 3]. \end{aligned}$$

Підставимо оптимальні значення в кожен нерівність системи обмежень. Перша нерівність виконана строго $-5 \cdot 20 + 6 \cdot 3 < 36$. Друга нерівність виконана гранично, як рівність $8 \cdot 20 + 14 \cdot 3 = 202$, і третя аналогічно другій $-3 \cdot 20 - 10 \cdot 3 = 30$. Таким чином, за умови розв'язання цієї задачі, множина гранично виконаних нерівностей буде дорівнювати $I(x^{\text{opt}}) = \{2, 3\}$.

Проінтерпретуємо теорему 1.23 значеннями задачі. Маємо $c = [4, 6]$, $a_2 = [8, 14]$, $a_3 = [3, -10]$. Пересвідчимося, що вектор $Y^{\text{opt}} = \left[0, \frac{29}{61}, \frac{4}{61}\right]$ виконує умову теореми. Дійсно, маємо:

$$\begin{aligned} 4 &\equiv 8 \cdot \frac{29}{61} + 3 \cdot \frac{4}{61}, \\ 6 &\equiv 14 \cdot \frac{29}{61} - 10 \cdot \frac{4}{61}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що вектор $Y^{\text{opt}} = \left[0, \frac{29}{61}, \frac{4}{61}\right]$ є розв'язком так званої двоїстої задачі до прямої (вихідної).

Теорема 1.23 є окремим випадком загальної теореми 1.22 за умови $k = m$ та $l = 0$. Графічна інтерпретація розв'язку задачі ЛО наведена на рис. 1.21.

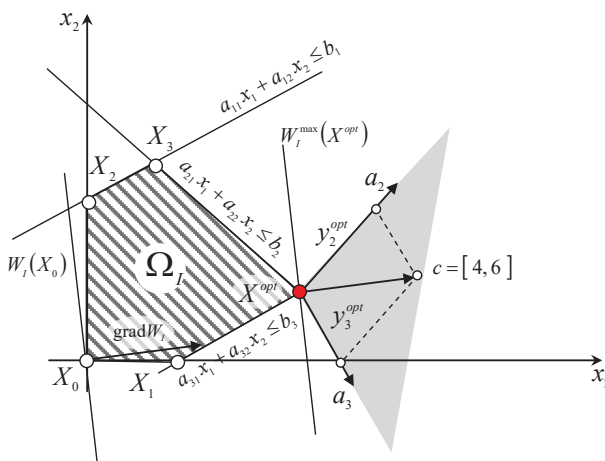


Рис. 1.21. Графічна інтерпретація розв'язку задачі ЛО

Напрямок максимального зростання цільової функції $\text{grad} W_i$ задається вектором $c = [c_1, c_2]$, який для лінійної цільової функції ще й збіжний з вектором нормалі $N = [c_1, c_2]$. В оптимальній вершині X^{opt} вектор $c = [c_1, c_2]$ повинен знаходитись у такій області (на рис. 1.21 зашито сірим фоном), де розвинення за базисом $\{a_2, a_3\}$ містять тільки невід'ємні коефіцієнти $c = y_2^{\text{opt}} a_2 + y_3^{\text{opt}} a_3$, де $y_2^{\text{opt}} \geq 0$ та $y_3^{\text{opt}} \geq 0$. Вектори цього базису $\{a_2, a_3\}$ є векторами нормалей гранично виконаних нерівностей в оптимальній вершині X^{opt} припустимій області Ω_I .

Наведена геометрично-алгебраїчна інтерпретація дозволяє зрозуміти наступну важливу теорему ЛО.

Теорема 1.24

Нехай припустима множина має хоча б одну вершину і задача ЛО має єдиний розв'язок. З огляду на це, розв'язок задачі є вершиною поліедра (припустимої множини).

Зауваження. У разі виконання умови теореми 1.24, для розв'язання задачі достатньо знайти всі вершини й обрати ту, яка надає цільовій функції оптимального значення.

Таку методику розв'язання прийнято називати методом повного перебору (прямий комбінаторний перебір) вершин. Зрозуміло, що доцільна вона тільки у разі невеликої вимірності задачі і позитивного твердження про обмеженість поліедра. Зауважимо, що не комбінаторна, а вибірково інтелектуальна і швидкозбіжна ідея перебору вершин є основою симплекс-методу.

Приклад. Знайти всі вершини множини Ω , поданої системою лінійних алгебраїчних рівнянь виду:

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Максимально можлива кількість вершин поліедра Ω дорівнює числу комбінацій $C_4^2 = 6$. Пари, які відповідають послідовному комбінаторному перебору – (x_1, x_2) , (x_1, x_3) , (x_1, x_4) , (x_2, x_3) , (x_2, x_4) , (x_3, x_4) . Виконуємо розрахунки за цими парами.

Таблиця 1.21 – Пара (x_2, x_3)

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	2	3	6
7	5	-6	-5	1
1	-1	2	3	6
0	12	-20	-26	-41
1	0	1/3	5/6	31/12
0	1	- 5/3	- 13/6	- 41/12

Результати розв'язання для першої пари:

$$\Omega_{(x_1 x_2)} : \begin{cases} x_1 = \frac{31}{12} - \frac{1}{3} x_3 - \frac{5}{6} x_4, \\ x_2 = -\frac{41}{12} + \frac{5}{3} x_3 + \frac{13}{6} x_4, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Маємо неприпустимий розв'язок (план, вершину):

$$X_1 = \left[\frac{31}{12}; -\frac{41}{12}; 0; 0 \right] \notin \Omega.$$

За другою парою (x_1, x_3) розрахунки наведено в табл. 1.22.

Таблиця 1.22 – Пара (x_1, x_3)

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	2	3	6
7	5	-6	-5	1
1	-1	2	3	6
0	12	-20	-26	-41
1	1/5	0	2/5	19/10
0	- 3/5	1	13/10	41/20

В алгебраїчному вигляді

$$\Omega_{(x_1, x_3)} : \begin{cases} x_1 = \frac{19}{10} - \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4, \\ x_3 = \frac{41}{20} + \frac{3}{5}x_2 - \frac{13}{10}x_4, \\ x_2 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Вершиною поліедра $\Omega \in X_2 = \left[\frac{19}{10}; 0; \frac{41}{20}; 0 \right] \in \Omega$.

Далі обираємо як базисні змінні (x_1, x_4) . Обчислення за методом Жордана-Гаусса виконуємо в табл. 1.23.

Таблиця 1.23 – Пара (x_1, x_4)

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	2	3	6
7	5	-6	-5	1
1	-1	2	3	6
0	12	-20	-26	-41
1	5/13	- 4/13	0	33/26
0	- 6/13	10/13	1	41/26

Розв'язки для цього випадку:

$$\Omega_{(x_1, x_4)} : \begin{cases} x_1 = \frac{33}{26} - \frac{5}{13}x_2 + \frac{4}{13}x_3, \\ x_4 = \frac{41}{26} + \frac{6}{13}x_2 - \frac{10}{13}x_3, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Праві частини розв'язаної системи є невід'ємними, тому маємо припустимий розв'язок (вершину) $X_3 = \left[\frac{33}{26}; 0; 0; \frac{41}{26} \right] \in \Omega$.

Четвертий комбінаторний перебір – (x_2, x_3) . Розв’язок для цих базисних змінних наведено в табл. 1.24.

Таблиця 1.24 – Пара (x_2, x_3)

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	2	3	6
7	5	-6	-5	1
-1	1	-2	-3	-6
12	0	4	10	31
5	1	0	2	19/2
3	0	1	5/2	31/4

Маємо розв’язок:

$$\Omega_{(x_2, x_3)} : \begin{cases} x_2 = \frac{19}{2} - 5x_1 - 2x_4, \\ x_3 = \frac{31}{4} - 3x_1 - \frac{5}{2}x_4, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

$$X_4 = \left[0; \frac{19}{2}; \frac{31}{4}; 0 \right] \in \Omega \text{ є вершиною } \Omega.$$

Аналізуємо випадок (x_2, x_4) . Обчислення виконано в табл. 1.25.

Таблиця 1.25 – Пара (x_2, x_4)

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	2	3	6
7	5	-6	-5	1
-1	1	-2	-3	-6
12	0	4	10	31
13/5	1	-4/5	0	33/10
6/5	0	2/5	1	31/10

З останньої таблиці маємо:

$$\Omega_{(x_2, x_4)} : \begin{cases} x_2 = \frac{33}{10} - \frac{13}{5} x_1 + \frac{4}{5} x_3, \\ x_4 = \frac{31}{10} - \frac{6}{5} x_1 + \frac{4}{5} x_3, \end{cases} \cdot$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$X_5 = \left[0; \frac{33}{10}; 0; \frac{31}{10} \right] \in \Omega \text{ є вершиною } \Omega.$$

Останній варіант (x_3, x_4) міститься в табл. 1.26.

Таблиця 1.26 – Пара (x_3, x_4)

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	-1	2	3	6
7	5	-6	-5	1
1/2	- 1/2	1	3/2	3
10	2	0	4	19
- 13/4	- 5/4	1	0	- 33/8
5/2	1/2	0	1	19/4

Алгебраїчний варіант розв'язку має вигляд:

$$\Omega_{(x_3, x_4)} : \begin{cases} x_3 = -\frac{33}{8} - \frac{13}{4} x_1 + \frac{5}{4} x_2, \\ x_4 = \frac{19}{4} - \frac{5}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$X_6 = \left[0; 0; -\frac{33}{8}; \frac{19}{4} \right] \notin \Omega \text{ не є вершиною поліедра, оскільки}$$

третя компонента від'ємна.

Підводячи підсумок, вказуємо – серед прогнозованих шести вершин поліедра Ω тільки чотири є припустимими.

1.3 Двоїстість у задачах лінійної оптимізації. Основні теореми двоїстості

У багатьох розділах математики (теорія множин, предикатів, висловлювань, алгебра подій, геометрії тощо) існують так звані теореми двоїстості. За певними правилами прямій задачі ставиться у відповідність двоїста. У класичному розділі лінійної оптимізації (ЛО) відома така пара екстремальних задач. Пов'язано це з особливістю опуклих множин – замкнені опуклі множини у векторному просторі – можливе дуальне представлення, як у вихідному R^n , так і у спряженому R^m просторах.

Кожній задачі лінійної оптимізації завжди можна поставити у відповідність так звану двоїсту задачу. Порівняння та вивчення цієї пари задач є важливим розділом ЛО, який прийнято називати теорією двоїстості.

Нехай маємо загальну задачу ЛО – пряму задачу:

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = k+1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Або у матричному вигляді

$$\begin{aligned} W_I &= C X - \max, \\ \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \leq \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \right. \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

Двоїстою до неї буде наступна задача:

$$\begin{aligned} W_{II} &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ \Omega_{II} : \begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j, & j = 1, \dots, l, \\ \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} = c_j, & j = l+1, \dots, n, \end{cases} \quad y_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

У матричному представленні

$$\begin{aligned} W_{II} &= Y B - \min, \\ \left\{ (Y_1 \ Y_2) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \geq \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right. \\ y_i &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

З означення двоїстої задачі випливає декілька очевидних фактів:

- екстремальні властивості цільових функцій протилежні за змістом – пряма задача на максимум, тоді двоїста на мінімум;
- для задачі на максимум сукупність нерівностей системи обмежень прямої задачі повинна мати відношення $\leq$, і навпаки, для задачі на мінімум $\geq$;

- коефіцієнти цільової функції прямої задачі є правими частинами системи обмежень двоїстої задачі ЛО;
- матриця системи обмежень двоїстої задачі є транспонованою по відношенню до прямої. Це дійсно так, оскільки $YA = A^T Y^T$;
- праві частини системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнтами цільової функції прямої задачі;
- кількість двоїстих змінних дорівнює кількості рівнянь та нерівностей системи обмежень прямої задачі;
- кожному обмеженню-нерівності прямої задачі ставиться у відповідність невід’ємна двоїста змінна;
- кожному обмеженню-рівнянню прямої задачі ставиться у відповідність довільна за знаком двоїста змінна;
- кожній невід’ємній змінній прямої задачі ставиться у відповідність обмеження-нерівність двоїстої;
- кожній довільній за знаком змінній прямої задачі ставиться у відповідність обмеження-рівняння двоїстої;

Підтвердити спряженість або двоїстість наведеного означення можливо застосуванням наведеного алгоритму до двоїстої задачі. У разі отримання прямої задачі пара задач будуть двоїстими.

Розглянемо пару задач та доведемо їх двоїстість:

$$\begin{array}{ccc} W_I = C X - \max, & & W_{II} = YB - \min, \\ \Omega_I : A X = B & \xrightarrow{\text{def Dual}} & \Omega_{II} : YA = C^T \end{array}$$

Доведення.

$$\begin{array}{ccc} W_I = C X - \max, & & W_I = C(X'' - X') - \max, \\ \Omega_I : A X = B & \xrightarrow{X = X'' - X', X'' \geq 0, X' \geq 0} \left\{ \begin{array}{l} A(X'' - X') \leq B, \\ -A(X'' - X') \leq -B, \\ X'' \geq 0, X' \geq 0, \end{array} \right. & \xrightarrow{\text{def Dual}} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 W_{II} &= (Y'' - Y')B - \min, \\
 \begin{cases} (Y'' - Y')A \geq C^T, \\ (Y'' - Y')(-A) \geq -C^T, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} W_{II} = YB - \min, \\ \Omega_{II} : YA = C^T \end{cases} \\
 Y'' \geq 0, Y' \geq 0, &
 \end{aligned}$$

Що і треба було довести.

Застосовуючи аналогічні перетворення, неважко довести спряженість основних пар двоїстих задач:

$$\begin{aligned}
 W_I = C X - \max, & \quad W_{II} = YB - \min, \\
 \Omega_I : A X \leq B & \xrightarrow{\text{def Dual}} \Omega_{II} : YA = C^T, \\
 Y \geq 0. &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_I = C X - \max, & \quad W_{II} = YB - \min, \\
 \Omega_I : A X = B, & \xrightarrow{\text{def Dual}} \Omega_{II} : YA \geq C^T \\
 X \geq 0. &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_I = C X - \min, & \quad W_{II} = YB - \max, \\
 \Omega_I : A X \geq B & \xrightarrow{\text{def Dual}} \Omega_{II} : YA = C^T, \\
 Y \geq 0 &
 \end{aligned}$$

Наведені пари двоїстих задач дозволяють виконати узагальнення означення двоїстості в задачах лінійного оптимізації на випадок прямої задачі в загальній формі.

Нехай маємо загальну задачу лінійної оптимізації:

$$\begin{aligned}
 W_I &= C X - \max, \\
 \Omega_I : &\left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \leq \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \right. \\
 &\quad \left. x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \right.
 \end{aligned}$$

або із застосуванням символів суми

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, 3, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = k+1, k+2, k+3, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, l \end{cases}$$

Двоїстою до неї будемо називати задачу вигляду

$$W_{II} = Y B - \min,$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} (Y_1 \ Y_2) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \geq \\ = \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \\ y_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

або із застосуванням символів суми

$$W_{II} = \sum_{i=1}^m b_i y_i - \min,$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j, & j = 1, 2, 3, \dots, l, \\ \sum_{i=1}^m y_i a_{ij} = c_i, & i = l+1, l+2, l+3, \dots, n, \\ y_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

Приклад

До прямої задачі лінійної оптимізації скласти двоїсту задачу:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 - \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Для початку переходу до двоїстої задачі підготуємо систему обмежень. Для задачі на максимум необхідна наявність нерівностей тільки типу $\leq$. Змінюємо знак першої нерівності на протилежний:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 - \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Перехід до двоїстої задачі зручно виконувати в табл. 1.31.

Таблиця 1.31

Y/X	$x_1 \geq 0$	x_2	x_3	$x_4 \geq 0$		B
$y_1 \geq 0$	-1	-1	-1	1	$\leq$	-4
$y_2 \geq 0$	2	-1	3	-2	$\leq$	3
y_3	3	1	-2	1	$=$	2
	$\geq$	$=$	$=$	$\geq$		
C	1	9	5	-7		

Двоїста задача має вигляд

$$\begin{aligned} W_{II} = -4y_1 + 3y_2 + 2y_3 - \min, \\ \Omega_{II} : \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1, \\ -y_1 - y_2 + y_3 = 9, \\ -y_1 + 3y_2 - 2y_3 = 5, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -7, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 Розв'язання та графічна інтерпретація системи лінійних алгебраїчних нерівностей. Поліедр

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних нерівностей з двома невідомими:

$$\Omega : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m, \end{cases}$$

Кожна нерівність системи задає півплощину Ω_+ або Ω_- , на які поділяє координатну площину Ox_1x_2 гранична пряма $\omega_i : a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. Для встановлення цієї півплощини необхідно в координатній системі Ox_1x_2 зобразити її межу ω_i . Так, для першої півплощини, яка відповідає першій нерівності, вона рівна $\omega_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ (рис. 1.41).

Потім обрати довільну точку $rand(M(x_1^M, x_2^M)) \in R^2$, яка не належить межі $M(x_1^M, x_2^M) \notin \omega_1$ (рис. 1.41). Координати обраної точки підставляємо у нерівність.

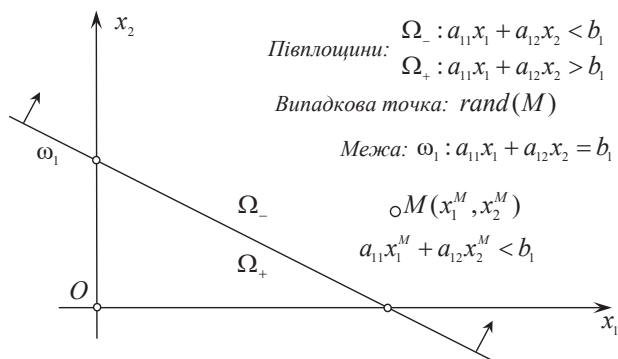


Рис. 1.41. Графічна інтерпретація двовимірної лінійної нерівності

У разі виконання нерівності ставимо стрілочки та наносимо штриховку з орієнтацією у ту півплощину, в якій обрану точку. І навпаки, якщо нерівність не виконується – то у протилежну сторону. Виконуючи такі побудови для всіх нерівностей системи, встановлюється множина Ω як спільна область для всіх півплощин (рис. 1.42).

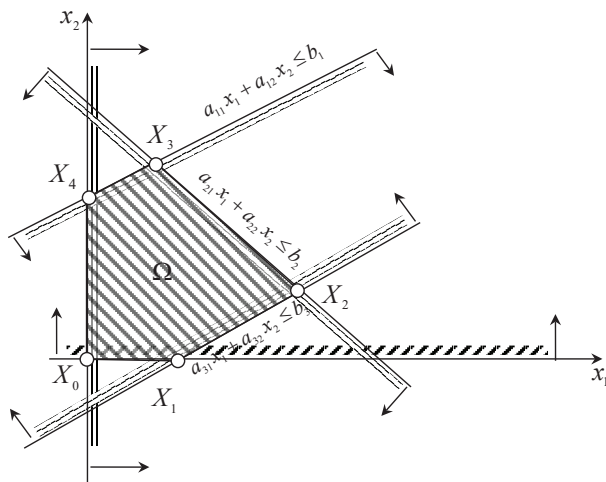


Рис. 1.42. Поліедр

Множину розв'язків системи нерівностей також прийнято називати поліедром.

Приклад

Зобразити графічно поліедр $\Omega_1 : 7x_1 - 3x_2 \leq 21$.

Розв'язок.

Зображуємо межу $\omega : 7x_1 - 3x_2 = 21$ (рис. 1.43). Генеруємо точку початку координат $O(0,0)$. Підстановка координат точки у нерівність задовольняє її, тому розв'язком нерівності є півплощина, орієнтовна до початку координат.

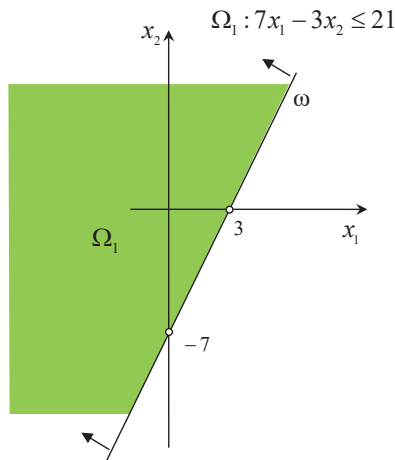


Рис. 1.43. Поліедр

Приклад

Зобразити графічно поліедр $\Omega_2 : \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6, \\ -x_1 + x_2 \leq -2. \end{cases}$

Розв'язок.

Зображуємо межі $\omega_1: 6x_1 - x_2 = -6$ та $\omega_2: -x_1 + x_2 = -2$ (рис. 1.44). Як експертну точку беремо точку початку координат $O(0,0)$. Підстановка координат точки у нерівності не задовольняє їх, тому розв'язком нерівності є півплощина, орієнтовна від початку координат.

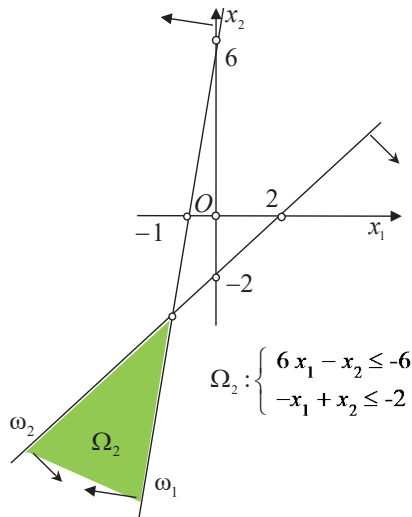


Рис. 1.44. Поліедр

Приклад

Зобразити графічно поліедр Ω_3 :

$$\begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \leq 33, \\ 9x_1 + 13x_2 \leq 117, \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зображуємо межі (рис. 1.45). Як випадкову точку беремо точку початку координат $O(0,0)$. Підстановка координат точки у нерівності задовольняє їх, тому розв'язком нерівності є півплощина, орієнтовна до початку координат.

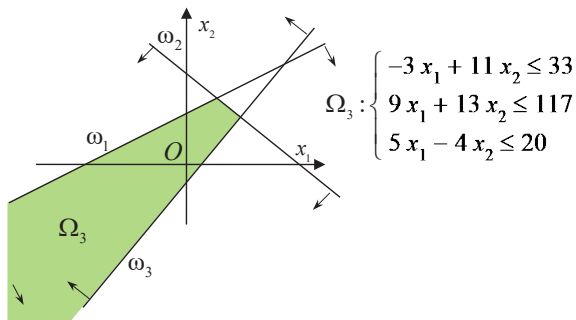


Рис. 1.45. Поліедр

1.5 Графічний метод розв'язання двовимірних задач лінійної оптимізації

Нехай маємо стандартну задачу ЛО з двома змінними:

$$W_I = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \text{opt} (\max, \min)$$

$$\Omega_I : \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Приклади двовимірних задач

$$\begin{array}{ll} W_I = 2x_1 + 5x_2 - \max & W_I = -5x_1 + 2x_2 - \text{opt}(\max, \min) \\ \Omega_I : \begin{cases} -9x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 40, \\ x_1 - 6x_2 \leq 6. \end{cases} & \Omega_I : \begin{cases} -x_1 + 7x_2 \leq 53, \\ 6x_1 - 3x_2 \leq 33, \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -47. \end{cases} \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 & 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \end{array}$$

З геометричної точки зору в задачі ЛО необхідно знайти такі вершини поліедра (множина припустимих значень), в яких цільова функція набуває екстремальних значень. Для встановлення такої вершини доцільно не перебирати всі вершини, а скористатися вектором градієнта цільової функції:

$$\text{grad}(W_I) = [c_1, c_2] = \left[\frac{\partial W_I}{\partial x_1}, \frac{\partial W_I}{\partial x_2} \right].$$

Відомо, що вектор градієнта вказує напрям максимального зростання процесу, який описує цільова функція. В такому

разі послідовне зображення ліній рівня графічно буде вказувати на максимум та мінімум. Оскільки до розгляду беремо тільки лінійні функції, то лінії рівня ортогональні до градієнта. Зауважимо, що вектор градієнта збігається з вектором нормалі до прямої $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$.

Підсумовуючи наведені міркування щодо графічного розв'язку двовимірних задач, відокремимо наступні дії – алгоритм:

зобразити припустиму множину розв'язків системи нерівностей (поліедр Ω_I);

у точці початку координат $O(0,0)$ системи Ox_1x_2 зобразимо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [c_1, c_2] = \left[\frac{\partial W_I}{\partial x_1}, \frac{\partial W_I}{\partial x_2} \right]$;

вирисовуємо сімейство ліній рівня – прямі лінії перпендикулярні до $\text{grad}(W_I)$;

переміщуємо лінії рівня в сторону зростання (напрямок $\text{grad}(W_I)$) з метою знаходження найвіддаленішої вершини поліедра. Ця вершина буде розв'язком задачі на максимум. Переміщення лінії рівня у протилежну сторону дозволяє знайти вершину, яка надає мінімальне значення цільовій функції.

Зауваження.

Можлива ситуація, коли найвіддаленішими будуть не одна, а дві вершини. В такому разі всі точки сторони поліедра, яка поєднує ці вершини, також будуть розв'язками. Цей випадок прийнято називати альтернативним оптимумом і множину розв'язків записувати у вигляді:

$$X^{\text{opt}} = \lambda X_k + (1 - \lambda) X_l \text{ (опукла лінійна комбінація),}$$

де $\lambda \in [0, 1]$ та X_k, X_l – оптимальні вершини Ω_I .

Другою можливою ситуацією може бути відсутність вершини – необмеженість поліедра. В такому разі для задачі

на максимум стверджують $W_I \rightarrow +\infty$ і для задачі на мінімум $W_I \rightarrow -\infty$.

Останнім етапом є обчислення координат оптимальних вершин і значень цільової функції в них.

Приклад № 1

Розв'язати графічно задачу ЛО:

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 - 2x_2 - \text{opt}(\max, \min) \\ \Omega_I : &\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \leq 21 \\ 11x_1 - x_2 \leq 88 \\ -6x_1 - 5x_2 \leq -48 \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Складаємо рівняння меж (граничних прямих):

$$\omega_1 : -5x_1 + 6x_2 = 21 \Leftrightarrow \frac{x_1}{-5} + \frac{x_2}{\frac{7}{3}} = 1,$$

$$\omega_2 : 11x_1 - x_2 = 88, \quad \omega_3 : 6x_1 + 5x_2 = 48, \quad \omega_4 : x_1 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подані відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 1.51).

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [5, -2]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня. У протилежному напрямку знаходимо вершину входу $X_{\min}^{\text{opt}}$ – точку мінімуму.

Координати екстремальних вершин визначаються як координати точок перетину відповідних граничних прямих з розв'язку систем:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 11x_1 - x_2 = 88 \\ 6x_1 + 5x_2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

$$X_{\min}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 21 \\ 6x_1 + 5x_2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \end{cases}.$$

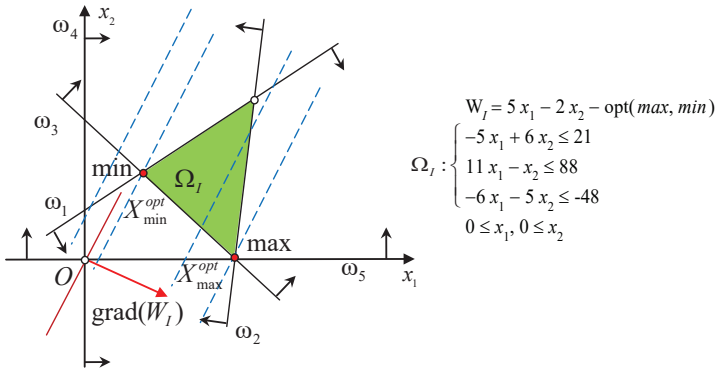


Рис. 1.51. Графічний метод розв'язання

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [8, 0]$ і воно дорівнює $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 40$. Вершиною мінімуму є $X_{\min}^{\text{opt}} = [3, 6]$ зі значенням цільової функції $W_I(X_{\min}^{\text{opt}}) = 3$.

Приклад № 2

Розв'язати графічно задачу ЛО:

$$\begin{aligned}
 W_I &= -x_1 - 5x_2 - \text{opt}(\max, \min) \\
 \Omega_I : &\begin{cases} -5x_1 - 2x_2 \leq -19 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 66 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 23 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Складаємо рівняння граничних прямих поліедра Ω_I :

$$\omega_1 : 5x_1 + 2x_2 = 19, \quad \omega_2 : -x_1 + x_2 = 6, \quad \omega_3 : 3x_1 + 4x_2 = 66,$$

$$\omega_4 : 5x_1 - 3x_2 = 23, \quad \omega_5 : x_1 - 2x_2 = -1, \quad \omega_6 : x_1 = 0, \quad \omega_7 : x_2 = 0.$$

Стрілочками вказуємо півплощини, які відповідають нерівностям (рис. 1.52).

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [-1, -5]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня. У протилежному напрямку знаходимо вершину входу $X_{\min}^{\text{opt}}$ – точку мінімуму.

Координати екстремальних вершин визначаються як координати точок перетину відповідних граничних прямих з розв'язку систем:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 19 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases},$$

$$X_{\min}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 12 \end{cases}.$$

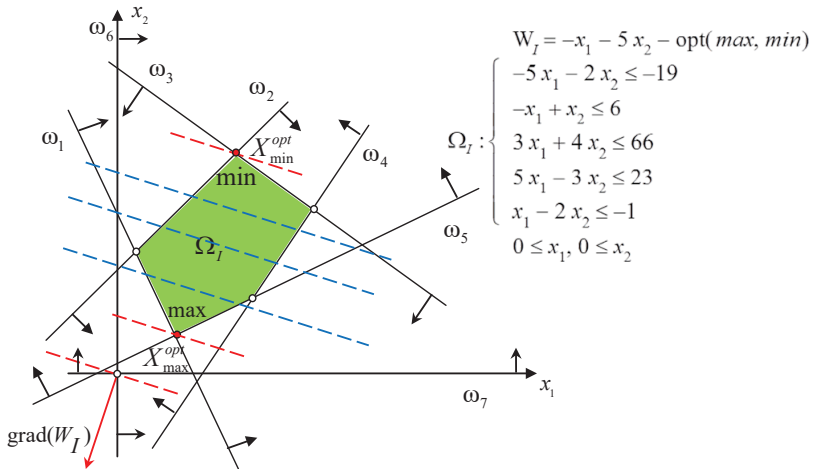


Рис. 1.52. Графічний метод розв'язку.
Випадок класичного поліедра

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [3, 2]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = -13$. Вершиною мінімуму є $X_{\min}^{\text{opt}} = [6, 12]$ зі значенням цільової функції $W_I(X_{\min}^{\text{opt}}) = -66$.

Приклад № 3

Розв'язати графічно задачу ЛО:

$$\begin{aligned}
 W_I &= 5x_1 + 6x_2 - \max \\
 \Omega_I : &\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 57 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Спочатку зображуємо поліедр Ω_I . Для цього вирисовуємо межі та визначаємо півплощини (рис. 1.53):

$$\omega_1 : -4x_1 + 3x_2 = 9, \quad \omega_2 : 5x_1 + 6x_2 = 57, \quad \omega_3 : 2x_1 - 3x_2 = 12,$$

$$\omega_4 : x_1 \geq 0, \quad \omega_5 : x_2 \geq 0.$$

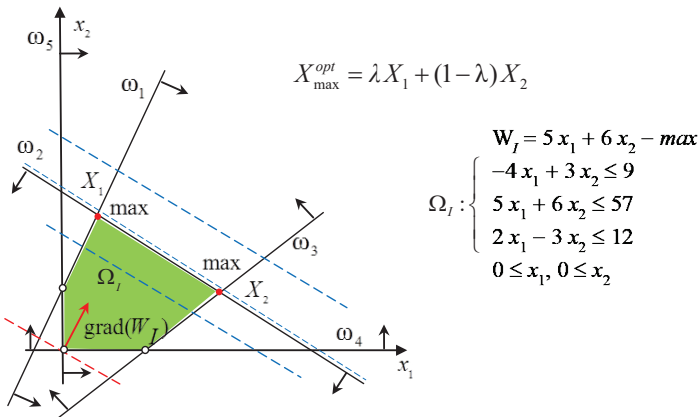


Рис. 1.53. Графічний метод розв'язку.
Випадок альтернативного оптимуму

У початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [5, 6]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її по напрямку градієнта, встановлюємо дві точки максимуму – X_1 та X_2 .

Координати екстремальних вершин знаходимо з розв'язку систем:

$$X_1 : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 9 \\ 5x_1 + 6x_2 = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 7 \end{cases},$$

$$X_2 : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 57 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Максимальне значення цільова функція набуває у вершинах $X_1 = [3, 7]$ та $X_2 = [9, 2]$ і в усіх точках сторони поліедра, з'єднуючої ці вершини. Маємо випадок альтернативного оптимуму. З огляду на це, загальну множину всіх точок представимо у вигляді опуклої лінійної комбінації вершин $X_{\max}^{\text{opt}} = [\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2] = [-6\lambda + 9, 5\lambda + 2]$, де $\lambda \in [0, 1]$. Значення цільової функції в усіх точках однакове і дорівнює $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 57$.

Приклад № 4

Розв'язати графічно задачу ЛО:

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 5x_2 - \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

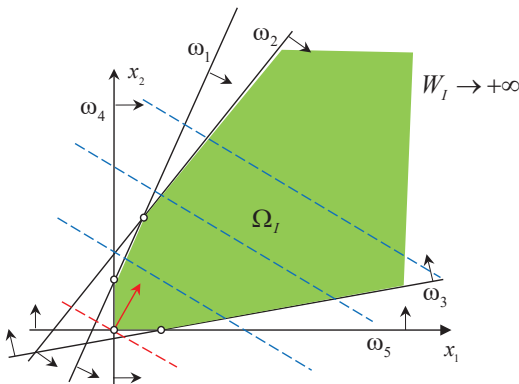
Розв'язок.

Областю розв'язків лінійної нерівності з двома змінними є півплощина, яка лежить по одну зі сторін від межі (граничної прямої). Рівняння цих прямих отримаємо заміною знаку нерівності на знак рівності. Для поданої системи обмежень задачі ЛО маємо п'ять граничних прямих:

$$\omega_1: -9x_1 + 4x_2 = 24, \quad \omega_2: -5x_1 + 4x_2 = 40, \quad \omega_3: x_1 - 6x_2 = 6,$$

$$\omega_4: x_1 = 0, \quad \omega_5: x_2 = 0.$$

Для встановлення розташування півплощини відносно граничних прямих необхідно підставити координати довільної точки (найпростішою є точка початку координат) у нерівність. Підстановка $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$ у першу нерівність приводить до виконаної нерівності (істина) $0 \leq 24$. Це означає, що півплощина орієнтовна до початку координат. На рис. 1.54 на цей факт вказують стрілочки на кінцях межі $\omega_1: -9x_1 + 4x_2 = 24$.



$$W_I = 2x_1 + 5x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -9x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$

Рис. 1.54. Графічний метод розв'язку.
Випадок необмеженої функції

Аналогічно поступають з усіма нерівностями системи обмежень. Зауважимо черговий раз, що у разі розміщення точки початку координат на межі необхідно використовувати будь-яку іншу точку.

Паралельне переміщення лінії рівня в пошуках найвіддаленішої вершини виконується нескінченно. В такому разі маємо необмежену зверху цільову функцію $W_I \rightarrow +\infty$. Висновок – задача розв’язку не має.

Приклад № 5

Розв’язати графічно задачу ЛО:

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_5 - \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 101 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 142 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 15 \end{cases} \\ &0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2, \quad 0 \leq x_3, \quad 0 \leq x_4, \quad 0 \leq x_5 \end{aligned}$$

Розв’язок.

На відміну від попередніх прикладів маємо багатовимірну задачу (п’ятивимірну $n = 5$). Оскільки система обмежень має три незалежних рівняння $m = 3$, то є можливість переходу від канонічної форми представлення задачі до стандартної у вигляді двовимірних нерівностей. Відомо, що такий перехід виконують розв’язанням системи методом Жордана-Гаусса (табл. 1.51).

З останнього ланцюга маємо розв’язану систему:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + \textcircled{x_3} = 60 \\ x_1 + x_2 + \textcircled{x_4} = 15 \\ 2x_1 + x_2 + \textcircled{x_5} = 26 \end{cases} \quad (*)$$

Таблиця 1.51

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	4	8	1	1	1	101	116
	7	10	1	2	2	142	164
	1	1	0	1	0	15	18
W_I	5	5	0	2	-1	4	15
	4	8	1	1	1	101	116
	-1	-6	-1	0	0	-60	-68
	1	1	0	1	0	15	18
W_I	9	13	1	3	0	105	131
	3	7	1	0	1	86	98
	-1	-6	-1	0	0	-60	-68
	1	1	0	1	0	15	18
W_I	6	10	1	0	0	60	77
	2	1	0	0	1	26	30
	1	6	1	0	0	60	68
	1	1	0	1	0	15	18
W_I	5	4	0	0	0	0	9

Відкидаючи базисні змінні, забезпечуємо перехід до двовимірних нерівностей. Проекція п'ятивимірної вихідної задачі на координатну площину Ox_1x_2 має вигляд

$$\begin{aligned}
 W_I &= 5x_1 + 4x_2 - \max \\
 \Omega_I : &\begin{cases} x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 \leq 26 \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.55.

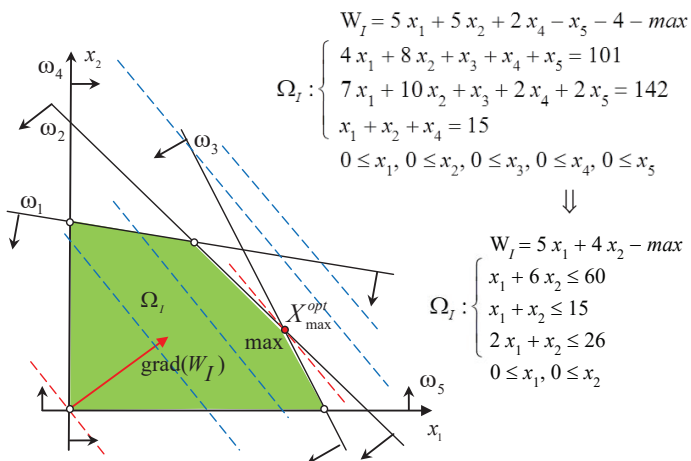


Рис. 1.55. Графічний розв'язок проєкції п'ятивимірного поліедра на координатну площину Ox_1x_2

Координати екстремальної вершини є розв'язком системи:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (*). Таким чином оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 4, 25, 0, 0].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 71$.

Виконуємо альтернативний розрахунок. Як базисні змінні візьмемо x_2, x_3, x_4 . Це друга тріадна комбінація серед максимально можливої у кількості $C_5^3 = 10$.

Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_2, x_3, x_4 . Розв'язання виконуємо методом Жордано-Гаусса (табл. 1.52).

Таблиця 1.52

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	4	8	1	1	1	101	116
	7	10	1	2	2	142	164
	1	1	0	1	0	15	18
W_1	5	5	0	2	-1	4	15
	-4	0	1	-7	1	-19	-28
	-3	0	1	-8	2	-8	-16
	1	1	0	1	0	15	18
W_1	0	0	0	-3	-1	-71	-75
	-1	0	0	1	-1	-11	-12
	-3	0	1	-8	2	-8	-16
	1	1	0	1	0	15	18
W_1	0	0	0	-3	-1	-71	-75
	-1	0	0	1	-1	-11	-12
	-11	0	1	0	-6	-96	-112
	2	1	0	0	1	26	30
W_1	-3	0	0	0	-4	-104	-111

З кінцівки таблиці маємо розв'язану систему з базисними змінними x_2, x_3, x_5 .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_5 + \textcircled{x_2} = 26 \\ -11x_1 - 6x_5 + \textcircled{x_3} = -96 \\ -x_1 - x_5 + \textcircled{x_4} = -11 \end{cases} \quad (**O)$$

Нехтуючи невід'ємними базисними змінними, виконуємо перехід до обмежень-нерівностей. Проекція вихідної задачі на координатну площину Ox_1x_5 або еквівалентний перехід від канонічної форми задачі ЛО до стандартної має вигляд

$$W_I = -3x_1 - 4x_5 + 104 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I^{Ox_1x_5} : \begin{cases} 2x_1 + x_5 \leq 26, \\ 11x_1 + 6x_5 \geq 96, \\ x_1 + x_5 \geq 11, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_5. \end{cases}$$

Графічний розв'язок задачі наведено на рис. 1.56.

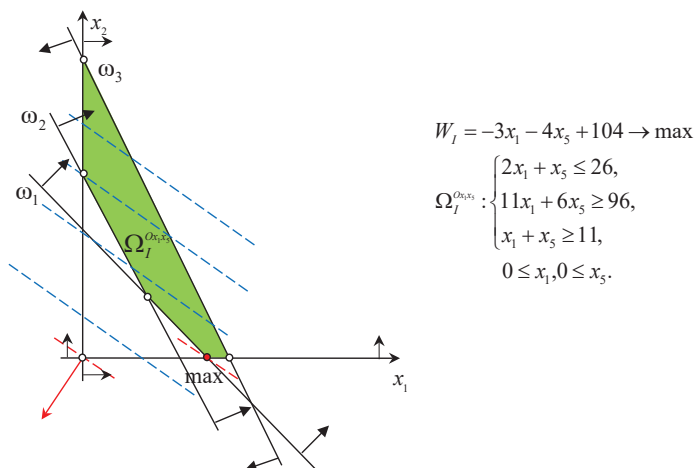


Рис. 1.56. Графічний метод розв'язку.
Проекція поліедра на Ox_1x_5

Оптимальна вершина має координати $x_1 = 11$, $x_5 = 0$. Координати x_2 , x_3 , x_5 обчислюємо з системи (**). Остаточно $X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 4, 25, 0, 0]$. Отриманий іншим шляхом оптимальний розв'язок збігається з попереднім.

Підсумок до графічного розв'язання задач ЛО

○ Графічно можуть бути розв'язані задачі, які представлені у стандартній формі запису і містять не більше двох змінних:

$$W_I = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \text{opt} (\max, \min)$$

$$\Omega_I : \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

○ Графічному розв'язанню підлягають задачі, подані у канонічній формі:

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

за умови $m - n \leq 2$, де m – кількість незалежних рівнянь, а n – кількість змінних.

○ Графічно можуть бути розв'язані задачі, які представлені у загальній формі, але після послідовних еквівалентних перетворень містять не більше двох змінних:

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, & i = k+1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, l, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} W_I &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \text{opt (max, min)} \\ \Rightarrow \Omega_I : \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

○ Графічний розв'язок ґрунтується на двох основних етапах:

– графічне зображення поліедра (багатокутник розв'язків);

– знаходження на границях цієї області оптимального розв'язку.

○ Графічне зображення поліедра може бути декількох типів:

– поліедр є порожньою множиною $\Omega = \emptyset$;

– поліедр є необмеженою множиною;

– поліедр є класичним багатокутником.

○ Якщо поліедр є порожньою множиною, робиться висновок – задача не має

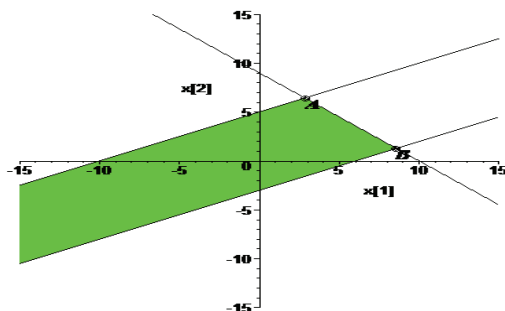
– розв'язків.

○ У разі необмеженої множини можливі всі випадки. В залежності від напрямку вектора градієнта задача може не мати розв'язку (необмеженість), мати один-єдиний та безліч розв'язків.

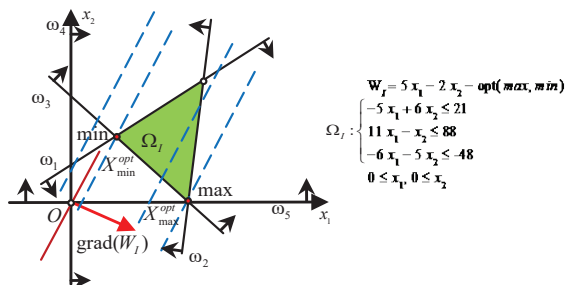
○ Якщо геометричне зображення є класичним замкненим багатокутником, то робиться твердження – задача завжди має розв'язок. Розв'язок один-єдиний або безліч (альтернативний оптимум).

1.6 Типові завдання № 1

Типові завдання № 1 містять стартові задачі з розділу лінійної оптимізації. Перший тип завдань – це задачі на графічне зображення припустимої області задач лінійної оптимізації – поліедри. Типові завдання складаються з дев'яти задач на їх графічне зображення.



Другий тип задач торкається графічного розв'язку задач лінійної оптимізації. Пропонується чотири задачі. Складність розв'язання зростає за номером задач.



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

ВАРІАНТ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

1

Виконати геометричне зображення поліедрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 7x_1 + 2x_2 \leq 14$	$\Omega_2: \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 13x_2 \leq 182 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq -8 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq -24 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 \leq -43 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 31 \\ -7x_1 - 3x_2 \leq -29 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -15 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$

2

Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_f = 2x_1 - 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 7x_1 - 6x_2 \leq 17 \\ -4x_1 - 5x_2 \leq -35 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_f = x_1 + x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq -22 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 26 \\ 4x_1 - x_2 \leq 28 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{cases}$
(2.3) $W_f = 2x_1 + 5x_2 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} -9x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_f = 2x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + 77 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 99 \\ 9x_1 + 13x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 168 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 58 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

ВАРІАНТ № 2

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

1

Виконати геометричне зображення поліедрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 2x_1 + 7x_2 \leq 14$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq -4 \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 18 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 12x_1 + 11x_2 \leq 132 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -7x_1 + 6x_2 \leq 42 \\ x_1 + x_2 \leq 11 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 4x_1 - 11x_2 \leq -65 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq -46 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 \leq -27 \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 33 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 33 \\ -8x_1 - 5x_2 \leq -54 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 - 7x_2 \leq -17 \\ -x_1 + 7x_2 \leq -8 \end{cases}$

80 секунд!



2

Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = -5x_1 + 2x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -x_1 + 7x_2 \leq 53 \\ 6x_1 - 3x_2 \leq 33 \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -47 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -2x_1 - 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 - x_2 \leq -16 \\ -5x_1 + 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + x_2 \leq 19 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 23 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 5 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 5x_1 + 2x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 - 7x_2 \leq 14 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = x_1 + 6x_2 + x_3 - x_5 + 32 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 167 \\ 19x_1 + 17x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 301 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 69 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

ВАРІАНТ №3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

1 Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 7x_1 + x_2 \leq -7$	$\Omega_2: \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 13x_2 \leq 182 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq -8 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq -24 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 \leq -43 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 31 \\ -7x_1 - 3x_2 \leq -29 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -15 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = -x_1 + 2x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -6x_1 + 8x_2 \leq 36 \\ 10x_1 - 2x_2 \leq 76 \\ -4x_1 - 6x_2 \leq -44 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -2x_1 - x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \leq -14 \\ -5x_1 + 7x_2 \leq 49 \\ 2x_1 + x_2 \leq 26 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 4x_1 + 2x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -9x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 11x_1 - 8x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - 20 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} 9x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 130 \\ 17x_1 + 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 238 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 \leq 58 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$

80 хвилин!

80 хвилин!



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ №4



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 7x_1 + x_2 \leq -7$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 7x_1 - 9x_2 \leq -63 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \leq 33 \\ 9x_1 + 13x_2 \leq 117 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ 9x_1 + 13x_2 \leq 117 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -7x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ 11x_1 + 9x_2 \leq 99 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq -25 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq -37 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -8x_1 - 7x_2 \leq -79 \\ -x_1 + x_2 \leq 7 \\ -12x_1 + 11x_2 \leq 75 \\ -5x_1 - 3x_2 \leq -37 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ -2x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$

80 хвилин!



2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = 2x_1 - 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -2x_1 + 9x_2 \leq 72 \\ 8x_1 - 3x_2 \leq 42 \\ -6x_1 - 6x_2 \leq -48 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -3x_1 + 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 \leq -16 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 81 \\ 6x_1 - x_2 \leq 45 \\ x_1 - 4x_2 \leq -4 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 4x_1 + 3x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -9x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = -2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 46 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 94 \\ 13x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 164 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 15 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 5



1 Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: \begin{cases} 7x_1 - 9x_2 \leq 63 \end{cases}$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 + 8x_2 \leq -8 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ 11x_1 + 14x_2 \leq 154 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -6x_1 + 11x_2 \leq 66 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 13x_1 + 14x_2 \leq 182 \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 42 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -7x_1 + 12x_2 \leq 84 \\ 13x_1 + 10x_2 \leq 130 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 - 4x_2 \leq -17 \\ -11x_1 + 6x_2 \leq -70 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -9 \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 59 \\ -11x_1 + 9x_2 \leq 61 \\ -11x_1 - 4x_2 \leq -43 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 \leq 1 \end{cases}$

80 хвилин!



2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_f = -4x_1 + 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 55 \\ 11x_1 - 6x_2 \leq 49 \\ -4x_1 - 5x_2 \leq -25 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_f = 2x_1 - 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -5x_1 - x_2 \leq -17 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 72 \\ 6x_1 - x_2 \leq 45 \\ x_1 - 5x_2 \leq -7 \end{cases}$
(2.3) $W_f = 5x_1 + 3x_2 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - 7x_2 \leq 14 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_f = 23x_1 + 21x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} 12x_1 + 12x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 187 \\ 21x_1 + 19x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 314 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 79 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



© Титов С.Д.



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ №6



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення поліедрів.
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \leq 14 \end{cases}$	$\Omega_2: \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 13x_2 \leq 182 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq -8 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq -24 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 \leq -43 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 31 \\ -7x_1 - 3x_2 \leq -29 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 - 5x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 5x_2 \leq -1 \end{cases}$



80 хвилин!

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_f = -2x_1 + 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -6x_1 + 10x_2 \leq 44 \\ 11x_1 - 4x_2 \leq 77 \\ -5x_1 - 6x_2 \leq -35 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_f = 3x_1 - 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -5x_1 - 3x_2 \leq -31 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ x_1 + x_2 \leq 17 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$
(2.3) $W_f = 5x_1 + 4x_2 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 4x_2 \leq 8 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_f = 5x_1 + 5x_2 + 2x_4 - x_5 - 4 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 101 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 142 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 15 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 7



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1 : 2x_1 + 7x_2$	$\Omega_2 : \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq -4 \\ -2x_1 + 9x_2 \leq 18 \end{cases}$	$\Omega_3 : \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 12x_1 + 11x_2 \leq 132 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4 : \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5 : \begin{cases} -5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6 : \begin{cases} -7x_1 + 6x_2 \leq 42 \\ x_1 + x_2 \leq 11 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 4x_1 - 11x_2 \leq -65 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq -46 \end{cases}$	$\Omega_8 : \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 \leq -27 \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 33 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 33 \\ -8x_1 - 5x_2 \leq -54 \end{cases}$	$\Omega_9 : \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq -18 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$



80 хвилин!

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_f = 4x_1 - 2x_2 - \text{opt}(max, min)$ $\Omega_f : \begin{cases} -4x_1 + 11x_2 \leq 55 \\ 8x_1 - 6x_2 \leq 34 \\ -4x_1 - 5x_2 \leq -25 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_f = -2x_1 + 3x_2 - \text{opt}(max, min)$ $\Omega_f : \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq -18 \\ -6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 64 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 16 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \end{cases}$
(2.3) $W_f = 3x_1 + 3x_2 - \max$ $\Omega_f : \begin{cases} -7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ -x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 4x_2 \leq 8 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_f = 9x_1 + 7x_2 + x_3 - 55 - \max$ $\Omega_f : \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 64 \\ -10x_1 - 8x_2 - x_3 - x_5 = -133 \\ 11x_1 + 5x_2 + x_4 + 2x_5 = 124 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 8



Листок 08

1

Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 7x_1 + x_2$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 7x_1 - 9x_2 \leq -63 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \leq 33 \\ 9x_1 + 13x_2 \leq 117 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ 9x_1 + 13x_2 \leq 117 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -7x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ 11x_1 + 9x_2 \leq 99 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq -25 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq -37 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -8x_1 - 7x_2 \leq -79 \\ -x_1 + x_2 \leq 7 \\ -12x_1 + 11x_2 \leq 75 \\ -5x_1 - 3x_2 \leq -37 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ -2x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$



Листок 08

2

Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = -2x_1 + x_2 - \text{opt}(max, min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ 8x_1 - x_2 \leq 61 \\ -2x_1 - 8x_2 \leq -40 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -3x_1 + 3x_2 - \text{opt}(max, min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 - x_2 \leq -14 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 16 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 63 \\ 6x_1 - x_2 \leq 45 \\ x_1 - 4x_2 \leq -4 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 2x_1 + 5x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -9x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 4x_1 + 4x_2 + x_4 - 34 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -6x_1 - 4x_2 - x_4 - x_5 = -82 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 34 \\ -6x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 = -62 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 9



Інші завдання
на сайті
http://www.mechaplanet.com

1 Виконати геометричне зображення поліедрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 7x_1 - 9x_2$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 + 8x_2 \leq -8 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ 11x_1 + 14x_2 \leq 154 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -6x_1 + 11x_2 \leq 66 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 13x_1 + 14x_2 \leq 182 \\ 6x_1 - 7x_2 \leq 42 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -7x_1 + 12x_2 \leq 84 \\ 13x_1 + 10x_2 \leq 130 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 - 4x_2 \leq -17 \\ -11x_1 + 6x_2 \leq -70 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -9 \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 59 \\ -11x_1 + 9x_2 \leq 61 \\ -11x_1 - 4x_2 \leq -43 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 \leq 1 \end{cases}$



Інші завдання
на сайті
http://www.mechaplanet.com

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_f = -x_1 + x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -3x_1 + 8x_2 \leq 61 \\ 8x_1 - x_2 \leq 61 \\ -5x_1 - 7x_2 \leq -61 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_f = -4x_1 + 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -7x_1 - 5x_2 \leq -40 \\ -3x_1 + 8x_2 \leq 64 \\ 2x_1 + x_2 \leq 27 \\ 5x_1 - x_2 \leq 36 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$
(2.3) $W_f = 2x_1 + 5x_2 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_f = 4x_1 + 14x_2 + 2x_3 - 100 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} -5x_1 - 11x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -118 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_5 = -28 \\ 7x_1 + 6x_2 + x_4 + 2x_5 = 101 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРИАНТ № 10



80 хвилин!

1

Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 3x_1 + 2x_2$	$\Omega_2: \begin{cases} 7x_1 - x_2 \leq 7 \\ 3x_1 - 8x_2 \leq 24 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -3x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ 11x_1 + 9x_2 \leq 99 \\ 7x_1 - 4x_2 \leq 28 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 12x_1 + 11x_2 \leq 132 \\ x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 9x_1 + 13x_2 \leq 117 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \leq 46 \\ 3x_1 - 11x_2 \leq -49 \\ -9x_1 + 5x_2 \leq -49 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -5x_1 - 4x_2 \leq -42 \\ -6x_1 + 11x_2 \leq 76 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ -11x_1 - 7x_2 \leq -78 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \leq 41 \\ -2x_1 - 7x_2 \leq 7 \end{cases}$



80 хвилин!

2

Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = x_1 - 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -6x_1 + 10x_2 \leq 54 \\ 12x_1 - 4x_2 \leq 84 \\ -6x_1 - 6x_2 \leq -42 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -4x_1 + 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 - 3x_2 \leq -31 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 19 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 32 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 7 \\ -3x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - 7x_2 \leq 21 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 16x_1 + 16x_2 + x_3 + 2x_4 - 192 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ -9x_1 - 7x_2 - x_4 - x_5 = -118 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 58 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 17



Інші завдання
на стор. 08

1 Виконати геометричне зображення поліедрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 7x_1 + 2x_2$	$\Omega_2: \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 13x_2 \leq 182 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq -8 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq -24 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 \leq -43 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 31 \\ -7x_1 - 3x_2 \leq -29 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -15 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$



Інші завдання
на стор. 08

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

$W_f = -4x_1 + 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$	(2.2) $W_f = 2x_1 + 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$
$\Omega_f: \begin{cases} -2x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ 9x_1 - 5x_2 \leq 45 \\ -7x_1 - 5x_2 \leq -35 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_f: \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 \leq -30 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 85 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 32 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \end{cases}$

(2.3) $W_f = 2x_1 + 4x_2 - \max$

$$\Omega_f: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$



(2.4) $W_f = 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - 54 - \max$

$$\Omega_f: \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -41 \\ 4x_2 + x_3 - x_5 = 28 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 9 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 12



інтервал 08

1 Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$$\Omega_1: 7x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$\Omega_2: \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$$

$$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$$

$$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 13x_2 \leq 182 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$$

$$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$

$$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq -8 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq -24 \end{cases}$$

$$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 \leq -43 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 31 \\ -7x_1 - 3x_2 \leq -29 \end{cases}$$

$$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -15 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$$



інтервал 08

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_f = 2x_1 + 4x_2 - \max$

$$\Omega_f: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -11 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$

(2.2) $W_f = -2x_1 + 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$

$$\Omega_f: \begin{cases} -5x_1 - 4x_2 \leq -33 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 43 \\ 5x_1 - x_2 \leq 37 \\ x_1 - 3x_2 \leq -1 \end{cases}$$

(2.3) $W_f = 2x_1 + 5x_2 - \max$

$$\Omega_f: \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$

(2.4) $W_f = 12x_1 + 11x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 171 - \max$

$$\Omega_f: \begin{cases} 8x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 69 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 69 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 60 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 13



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення поліедрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: x_1 - x_2 \leq -5$	$\Omega_2: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 8 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 10x_1 + 11x_2 \leq 110 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 13x_1 + 10x_2 \leq 130 \\ 4x_1 - 7x_2 \leq 28 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 11x_2 \leq 154 \\ 7x_1 - 5x_2 \leq 35 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 13x_1 + 10x_2 \leq 130 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 7x_1 - 8x_2 \leq -65 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq -32 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -9 \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 59 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ -11x_1 - 6x_2 \leq -59 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq 1 \end{cases}$



80 хвилин!

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = 2x_1 - 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + 8x_2 \leq 58 \\ 11x_1 - 5x_2 \leq 55 \\ -8x_1 - 3x_2 \leq -40 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -4x_1 - 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 - 2x_2 \leq -30 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 26 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 62 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 16 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 7 \\ -3x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - 7x_2 \leq 21 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 4x_1 + 14x_2 + 2x_3 - 100 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 - 11x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -118 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_5 = -28 \\ 7x_1 + 6x_2 + x_4 + 2x_5 = 101 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 14



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення поліедрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: \begin{cases} x_1 - 9x_2 \leq 9 \end{cases}$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9 \\ -5x_1 + 8x_2 \leq 40 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 - x_2 \leq 7 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 13x_1 + 14x_2 \leq 182 \\ 7x_1 - 6x_2 \leq 42 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -7x_1 + 9x_2 \leq 63 \\ 13x_1 + 9x_2 \leq 117 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 7x_1 + 8x_2 \leq 79 \\ 3x_1 - 11x_2 \leq -46 \\ -7x_1 + 4x_2 \leq -38 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \leq -13 \\ -5x_1 + 7x_2 \leq 37 \\ -7x_1 + 10x_2 \leq 53 \\ -x_1 - x_2 \leq -7 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$



80 хвилин!

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = 5x_1 - 2x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 26 \\ 9x_1 - 7x_2 \leq 38 \\ -5x_1 - 3x_2 \leq -28 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -x_1 - 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 \leq -19 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 66 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 23 \\ x_1 - 2x_2 \leq -1 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = -6x_1 - 3x_2 - x_4 - x_5 + 102 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + x_3 + x_5 = 115 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 78 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_4 + x_5 = 102 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Полієдри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 15



індекс 08

1 Виконати геометричне зображення полієдрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: x_1 + x_2 \leq 4$	$\Omega_2: \begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \leq 56 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 15 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 11x_1 + 12x_2 \leq 132 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ 6x_1 - 5x_2 \leq 30 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 37 \\ 4x_1 - 7x_2 \leq -41 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq -51 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \leq -13 \\ -4x_1 + 7x_2 \leq 38 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ -2x_1 - x_2 \leq -8 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq -11 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -4 \end{cases}$



індекс 08

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = 5x_1 + 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_7: \begin{cases} -6x_1 + 11x_2 \leq 60 \\ 9x_1 - 4x_2 \leq 60 \\ -3x_1 - 7x_2 \leq -45 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -x_1 - 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_7: \begin{cases} -7x_1 - 2x_2 \leq -23 \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 44 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 16 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 5 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 3x_1 + 5x_2 - \max$ $\Omega_7: \begin{cases} -11x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 - 7x_2 \leq 14 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + 9 - \max$ $\Omega_7: \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -39 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 16 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 16



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення поліедрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: \begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \end{cases}$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ 7x_1 - 9x_2 \leq 63 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 9x_1 + 11x_2 \leq 99 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 10x_1 + 13x_2 \leq 130 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \leq 47 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq -23 \\ -6x_1 + 7x_2 \leq -41 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - x_2 \leq -21 \\ -8x_1 + 9x_2 \leq 57 \\ -5x_1 + 6x_2 \leq 39 \\ -4x_1 - x_2 \leq -21 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \leq 34 \\ -2x_1 - 7x_2 \leq 9 \end{cases}$



80 хвилин!

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = 5x_1 + x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -x_1 + 6x_2 \leq 48 \\ 9x_1 - 5x_2 \leq 58 \\ -x_1 - x_2 \leq -8 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -x_1 - 2x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 \leq -22 \\ -3x_1 + x_2 \leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 44 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 16 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 5x_1 + 5x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 8x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_5 - 100 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 70 \\ -5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -46 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Полієдри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 17



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення полієдрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 4x_1 + x_2 \leq 8$	$\Omega_2: \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ -5x_1 + x_2 \leq -5 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -4x_1 + 11x_2 \leq 44 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 7 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 13x_1 + 10x_2 \leq 130 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 4x_1 - 7x_2 \leq 28 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 12x_1 + 11x_2 \leq 132 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 42 \\ x_1 - 2x_2 \leq -12 \\ -9x_1 + 4x_2 \leq -50 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq -39 \\ -7x_1 + 12x_2 \leq 87 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ -2x_1 - x_2 \leq -15 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq -3 \end{cases}$



80 хвилин!

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_f = 3x_1 - 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -7x_1 + 10x_2 \leq 50 \\ 9x_1 - 5x_2 \leq 30 \\ -2x_1 - 5x_2 \leq -25 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_f = -x_1 - 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_f: \begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq -11 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 19 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 23 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 13 \end{cases}$
(2.3) $W_f = 4x_1 + 4x_2 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 7 \\ -2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_f = 6x_1 + 4x_2 + x_3 - 30 - \max$ $\Omega_f: \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 + x_4 = 94 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 19 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = -30 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Поліедри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 18



80 хвилин!

1 Виконати геометричне зображення поліедрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 8x_1 - 9x_2 \leq -72$	$\Omega_2: \begin{cases} 8x_1 - x_2 \leq -8 \\ -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -7x_1 + 10x_2 \leq 70 \\ 10x_1 + 11x_2 \leq 110 \\ 7x_1 - 3x_2 \leq 21 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 13x_1 + 10x_2 \leq 130 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -5x_1 + 11x_2 \leq 55 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ x_1 - x_2 \leq 7 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 5x_1 - 8x_2 \leq -49 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq -32 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -7x_1 - 6x_2 \leq -69 \\ -7x_1 + 11x_2 \leq 67 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ -3x_1 - 2x_2 \leq -25 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ -x_1 - 3x_2 \leq 4 \end{cases}$



80 хвилин!

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = -5x_1 - x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + 10x_2 \leq 67 \\ 3x_1 - x_2 \leq 23 \\ -6x_1 - 7x_2 \leq -55 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = -5x_1 - 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 - 2x_2 \leq -30 \\ -5x_1 + 6x_2 \leq 38 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 66 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 8 \end{cases}$
(2.3) $W_I = x_1 + x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -10x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 3x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + 37 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \leq -63 \\ -11x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_5 \leq -150 \\ -5x_1 + x_2 - x_5 \leq -50 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Полієдри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 19



15 хвилин

1 Виконати геометричне зображення полієдрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: 3x_1 - 5x_2 \leq -15$	$\Omega_2: \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq -8 \\ -9x_1 + 7x_2 \leq -63 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 10x_1 + 9x_2 \leq 90 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 9x_2 \leq 63 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ 7x_1 - 4x_2 \leq 28 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ 13x_1 + 9x_2 \leq 117 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 10x_1 + 9x_2 \leq 90 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \leq 55 \\ 6x_1 - 11x_2 \leq -70 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq -44 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -5x_1 - 6x_2 \leq -53 \\ -3x_1 + 5x_2 \leq 37 \\ -11x_1 + 8x_2 \leq 53 \\ -11x_1 - 8x_2 \leq -75 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq -11 \\ -x_1 + 3x_2 \leq -3 \end{cases}$



80 хвилин

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = 2x_1 + 2x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + 9x_2 \leq 46 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 13 \\ -5x_1 - 3x_2 \leq -28 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = 4x_1 + 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 - 4x_2 \leq -39 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 29 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 59 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 13 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 4x_1 + x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -9x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 - 30 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 42 \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = -6 \\ -x_1 - x_2 - x_4 = -14 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 1

Розділ «Лінійна оптимізація»

Полієдри

Графічний метод розв'язання двовимірних задач

ВАРІАНТ № 20



10 хвилин

1 Виконати геометричне зображення полієдрів (опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)

$\Omega_1: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \end{cases}$	$\Omega_2: \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 \leq 28 \\ 9x_1 - x_2 \leq 9 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 12x_1 + 13x_2 \leq 156 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -5x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -3x_1 + 11x_2 \leq 33 \\ 9x_1 + 13x_2 \leq 117 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 31 \\ 7x_1 - 9x_2 \leq -65 \\ -4x_1 + x_2 \leq -19 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq -27 \\ -4x_1 + 11x_2 \leq 43 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ -4x_1 - x_2 \leq -17 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 2 \end{cases}$



80 хвилин

2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = -5x_1 - 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 + 11x_2 \leq 55 \\ 5x_1 - 3x_2 \leq 25 \\ -x_1 - x_2 \leq -5 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = x_1 + 3x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -6x_1 - x_2 \leq -19 \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 27 \\ x_1 + x_2 \leq 18 \\ 3x_1 - x_2 \leq 18 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 4x_1 + 4x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -11x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ -7x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 - 6x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 5x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_5 - 72 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 61 \\ 7x_1 + 11x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 140 \\ 8x_1 + 16x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 190 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



1.7 Модельний розв'язок завдання № 1

1

**Виконати геометричне зображення полієдрів
(опуклих множин, заданих лінійними нерівностями)**

$\Omega_1: 7x_1 + 2x_2 \leq 14$	$\Omega_2: \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}$	$\Omega_3: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$\Omega_4: \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$	$\Omega_5: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 13x_2 \leq 182 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$	$\Omega_6: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
$\Omega_7: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq -8 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq -24 \end{cases}$	$\Omega_8: \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 \leq -43 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 31 \\ -7x_1 - 3x_2 \leq -29 \end{cases}$	$\Omega_9: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -15 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$

2

Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

(2.1) $W_I = 3x_1 + 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 + 8x_2 \leq 19 \\ 4x_1 - x_2 \leq 32 \\ -x_1 - x_2 \leq -8 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.2) $W_I = 2x_1 + 5x_2 - \text{opt}(\max, \min)$ $\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 \leq -30 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 85 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 32 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$
(2.3) $W_I = 2x_1 + 5x_2 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$	(2.4) $W_I = 13x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - 151 - \max$ $\Omega_I: \begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 179 \\ 19x_1 + 14x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 298 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 69 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$



Розв'язок завдання № 1

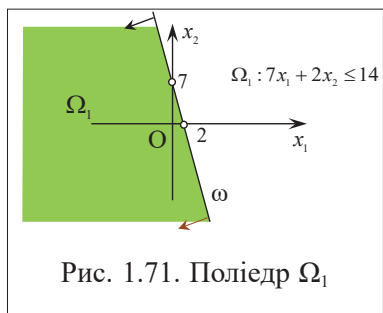


Рис. 1.71. Полієдр Ω_1

Г Зобразити графічно полієдр $\Omega_1 : 7x_1 + 2x_2 \leq 14$.

Зображуємо межі $\omega : 7x_1 + 2x_2 = 14$ (рис. 1.71). Випадково генеруємо точку початку координат $O(0,0)$. Підстановка координат цієї точки у нерівність задовольняє її –

$0 \leq 14$, тому розв'язком нерівності є півплощина, орієнтовна до початку координат.

Г Зобразити графічно полієдр

$$\Omega_2 : \begin{cases} 6x_1 - x_2 \leq -6 \\ -x_1 + x_2 \leq -2 \end{cases}.$$

Зображуємо дві межі $\omega_1 : 6x_1 - x_2 = -6$, $\omega_2 : -x_1 + x_2 = -2$ (рис. 1.72). Для встановлення півплощин відносно граничних ліній, використовуємо точку початку координат $O(0,0)$. Підстановка координат точки у нерівності не задовольняє жодному з них, тому розв'язком є півплощини, орієнтовні від початку координат. Очевидно, що розв'язком є сектор, який суцільно залитий на рис. 1.72.

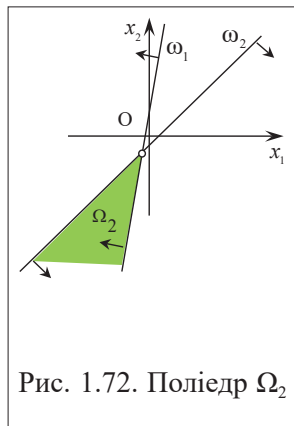


Рис. 1.72. Полієдр Ω_2

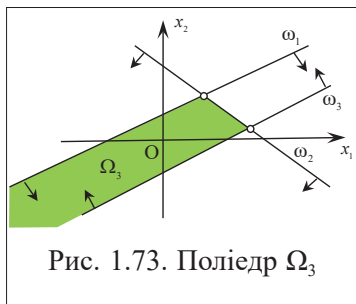


Рис. 1.73. Поліедр Ω_3

Г Зобразити графічно поліедр

$$\Omega_3 : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \end{cases}$$

Зображуємо межі

$$\omega_1: -x_1 + 2x_2 = 10, \quad \omega_2: 9x_1 + 10x_2 = 90,$$

$$\omega_3: x_1 - 2x_2 = 6 \quad (\text{рис. 1.73}).$$

Використовуємо точку початку координат $O(0,0)$ для встановлення півплощин. Підстановка координат точки у нерівності задовольняє їм, тому розв'язком є півплощини, орієнтовні до початку координат. Геометричною інтерпретацією системи нерівностей є область, суцільно залита на рис. 1.73.

Г Зобразити графічно поліедр

$$\Omega_4 : \begin{cases} -7x_1 + 11x_2 \leq 77 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$$

Зображуємо межі

$$\omega_1: -7x_1 + 11x_2 = 77,$$

$$\omega_2: 11x_1 + 10x_2 = 110,$$

$$\omega_3: x_1 - 3x_2 = 66, \quad \omega_4: x_1 = 0$$

(рис. 1.74)

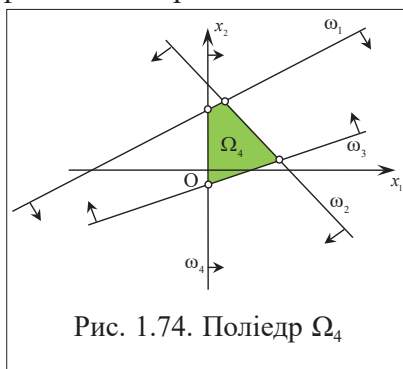


Рис. 1.74. Поліедр Ω_4

Підстановка координат точки $M(1,1)$ у нерівності задовольняє їх, тому розв'язком є півплощини, орієнтовні до початку координат. Графічним зображенням поліедра є область, суцільно залита на рис. 1.74.

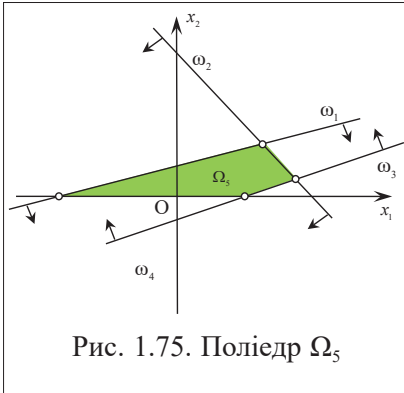


Рис. 1.75. Поліедр Ω_5

Г Зобразити графічно поліедр

$$\Omega_5 : \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 14x_1 + 13x_2 \leq 182 \\ x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \end{cases}$$

Зображуємо межі

$$\omega_1 : -x_1 + 4x_2 = 12,$$

$$\omega_2 : 14x_1 + 13x_2 = 182, \omega_3 : x_1 - 3x_2 = 6, \omega_4 : x_2 = 0 \text{ (рис. 1.75).}$$

Використовуємо точку $M(1,1)$ для встановлення півплощин. Підстановка координат точки у нерівності задовольняє їх, тому розв'язком є півплощини, орієнтовні до початку координат. Геометричною інтерпретацією системи нерівностей є область, яка суцільно залита на рис. 2.75.

Г Зобразити графічно поліедр

$$\Omega_6 : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 13x_1 + 12x_2 \leq 156 \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 20 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$

Зображуємо межі

$$\omega_1 : -x_1 + 2x_2 = 10,$$

$$\omega_2 : 13x_1 + 12x_2 = 156,$$

$$\omega_3 : 5x_1 - 4x_2 = 20, \omega_4 : x_1 = 0,$$

$$\omega_5 : x_2 = 0 \text{ (рис. 1.76).}$$

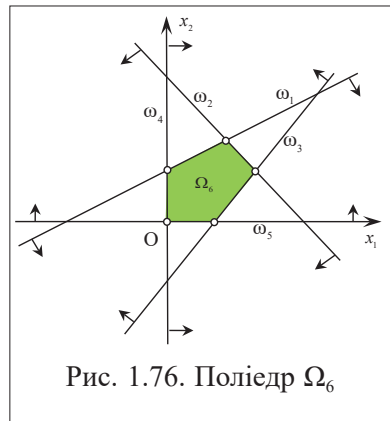


Рис. 1.76. Поліедр Ω_6

Для встановлення півплощин, поданих нерівностями, використовуємо точку $M(1,1)$. Підстановка у перші три нерівності її координат задовольняє їх, тому розв'язком є півплощини, орієнтовні до початку координат. Нерівності $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ є правою та верхньою координатними півплощинами відповідно. Геометричною інтерпретацією системи нерівностей є суцільно залита область на рис. 1.76.

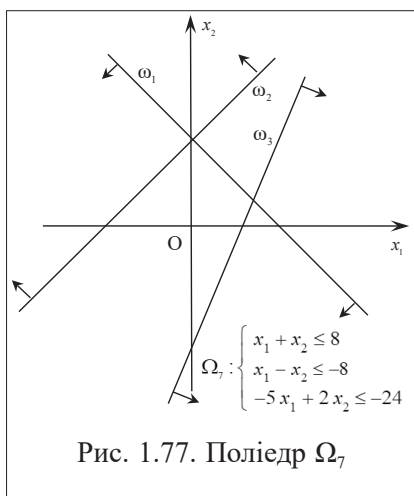


Рис. 1.77. Поліедр Ω_7

Г Зобразити графічно поліедр

$$\Omega_8 : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - x_2 \leq -8 \\ -5x_1 + 2x_2 \leq -24 \end{cases}$$

Зображуємо межі

$$\omega_1 : x_1 + x_2 = 8, \omega_2 : x_1 - x_2 = -8, \omega_3 : -5x_1 + 2x_2 = -24 \text{ (рис. 1.77).}$$

Для встановлення півплощин, поданих нерівностями, обираємо точку початку координат $O(0,0)$.

Підстановка її координат у першу нерівність задовольняє її ($0 \leq 8$), тому розв'язком є півплощина, орієнтовна до початку координат. Друга нерівність дає хибне відношення ($0 \leq -8$). Третя нерівність також не задовольняється ($0 \leq -24$). Зрозуміло, що поліедр Ω_7 є порожньою множиною $\emptyset$, бо спільної координатної площини, яка б задовольняла трьом нерівностям, немає (рис. 1.77).

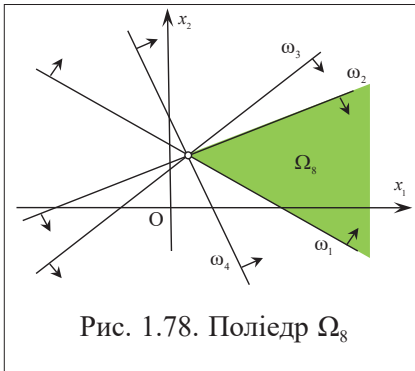


Рис. 1.78. Поліедр Ω_8

Г Зобразити графічно поліедр

$$\Omega_8 : \begin{cases} -4x_1 - 7x_2 \leq -43 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 21 \\ -7x_1 + 9x_2 \leq 31 \\ -7x_1 - 3x_2 \leq -29 \end{cases}$$

Зображуємо межі

$$\omega_1 : -4x_1 - 7x_2 = -43,$$

$\omega_2 : -2x_1 + 5x_2 = 21$, $\omega_3 : -7x_1 + 9x_2 = 31$, $\omega_4 : -7x_1 - 3x_2 = -29$ (рис. 1.78).

Для встановлення півплощин, поданих нерівностями, використовуємо точку $O(0,0)$. Геометричною інтерпретацією системи нерівностей є суцільно залита область на рис. 1.78.

Г Зобразити графічно поліедр

$$\Omega_9 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -15 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 0 \end{cases}$$

Зображуємо межі

$$\omega_1 : 2x_1 - 3x_2 = -15,$$

$$\omega_2 : -2x_1 + 3x_2 = 0 \text{ (рис. 1.79).}$$

Для встановлення півплощин, поданих нерівностями, використовуємо точку $M(1,-1)$.

Поліедр Ω_9 є порожньою множиною $\emptyset$, бо спільної координатної площини, яка б задовольняла двом нерівностям, немає (рис. 1.79).

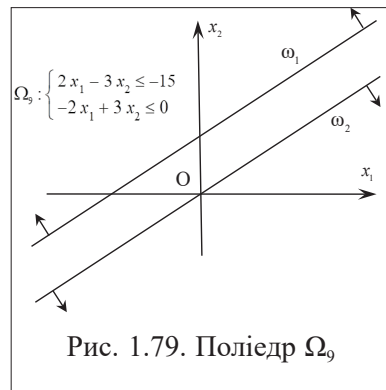


Рис. 1.79. Поліедр Ω_9

Розв'язок завдання № 2

¶ 2.1 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

$$W_I = 3x_1 + 4x_2 - \text{opt}(\max, \min)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + 8x_2 \leq 19 \\ 4x_1 - x_2 \leq 32 \\ -x_1 - x_2 \leq -8 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$

Зображуємо межі $\omega_1: -7x_1 + 8x_2 = 19$, $\omega_2: 4x_1 - x_2 = 32$, $\omega_3: x_1 + x_2 = 8$, $\omega_4: x_1 = 0$, $\omega_5: x_2 = 0$ (рис. 1.81).

Для встановлення півплощин, поданих нерівностями, використовуємо точку $M(1, -1)$. У результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 1.81).

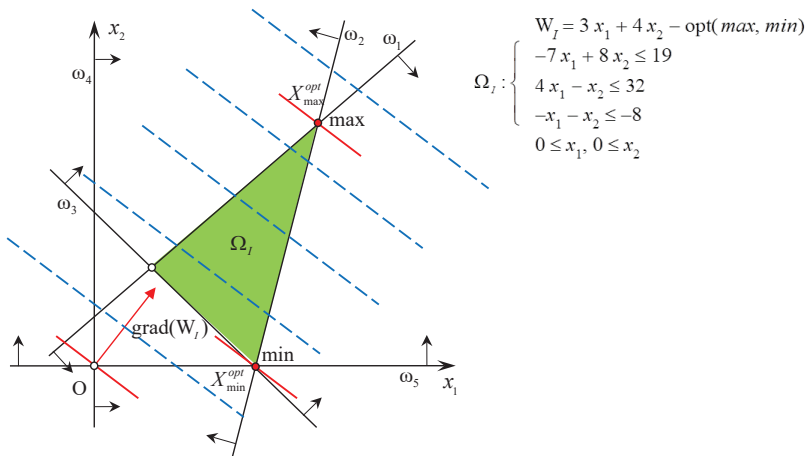


Рис. 1.81. Графічний метод розв'язання

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [3, 4]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня. У протилежному напрямку знаходимо вершину входу $X_{\min}^{\text{opt}}$ – точку мінімуму.

Координати екстремальних вершин визначаються як координати точок перетину відповідних граничних прямих:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -7x_1 + 8x_2 = 19 \\ 4x_1 - x_2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = 12 \end{cases},$$

$$X_{\min}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 32 \\ x_1 + x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 12]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 81$. Вершиною мінімуму є $X_{\min}^{\text{opt}} = [8, 0]$ зі значенням цільової функції $W_I(X_{\min}^{\text{opt}}) = 24$.

¶ 2.2 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 5x_2 - \text{opt}(\max, \min) \\ \Omega_I : &\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 \leq -30 \\ -7x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 85 \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 32 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Складаємо рівняння граничних прямих поліедра Ω_I :

$$\omega_1 : 4x_1 + 5x_2 = 30, \quad \omega_2 : -7x_1 + 5x_2 = 30,$$

$$\omega_3 : 4x_1 + 5x_2 = 85, \quad \omega_4 : 5x_1 - 2x_2 = 32,$$

$$\omega_5 : 2x_1 - 3x_2 = 4, \quad \omega_6 : x_1 = 0, \quad \omega_7 : x_2 = 0.$$

Зображуємо їх графічно, потім визначаємо півплощини. Стрілочками вказуємо півплощини, які відповідають нерівностям (рис. 1.82).

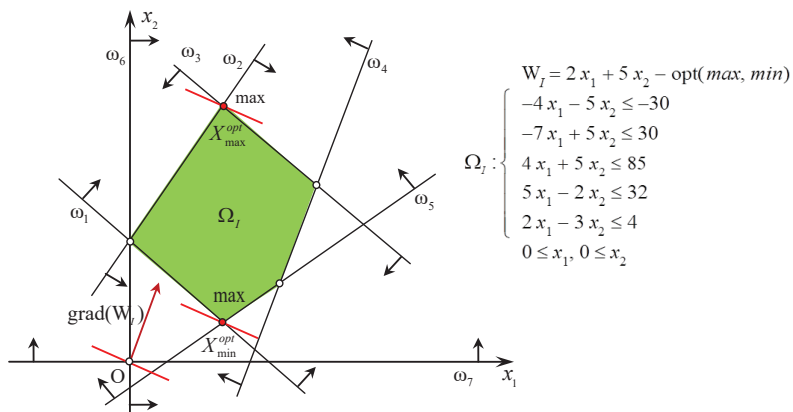


Рис. 1.82. Графічний метод розв'язання

У початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [2, 5]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня. У протилежному напрямку знаходимо вершину входу $X_{\min}^{\text{opt}}$ – точку мінімуму.

Координати екстремальних вершин визначаються як координати точок перетину відповідних граничних прямих:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -7x_1 + 5x_2 = 30 \\ 4x_1 + 5x_2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 13 \end{cases},$$

$$X_{\min}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 30 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{cases}.$$

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [5, 13]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 75$. Вершиною мінімуму є $X_{\min}^{\text{opt}} = [5, 2]$ зі значенням цільової функції $W_I(X_{\min}^{\text{opt}}) = 20$.

¶ 2.3 Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації:

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 5x_2 - \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 27 \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Областю розв'язків лінійної нерівності з двома змінними є півплощина, яка лежить по одну зі сторін від межі (граничної прямої). Рівняння цих прямих отримаємо заміною знаку нерівності на знак рівності. Для поданої системи обмежень маємо п'ять граничних прямих:

$$\omega_1 : -7x_1 + 3x_2 = 21, \omega_2 : -5x_1 + 3x_2 = 27, \omega_3 : x_1 - 2x_2 = 6,$$

$$\omega_4 : x_1 = 0, \omega_5 : x_2 = 0.$$

Для встановлення півплощини відносно граничних прямих необхідно підставити координати довільної точки (найпростішою є точка початку координат) у нерівність. Підстановка $x_1 = 0$ та $x_2 = 0$ у першу нерівність приводить до виконаної нерівності (істина) $0 \leq 21$. Це означає, що півплощина орієнтовна до початку координат. На рис. 1.83 на цей факт вказують стрілочки на кінцях межі $\omega_1 : -7x_1 + 3x_2 = 21$.

Аналогічно поступають з усіма нерівностями системи обмежень. У разі розміщення точки початку координат на межі, необхідно використовувати будь-яку іншу точку.

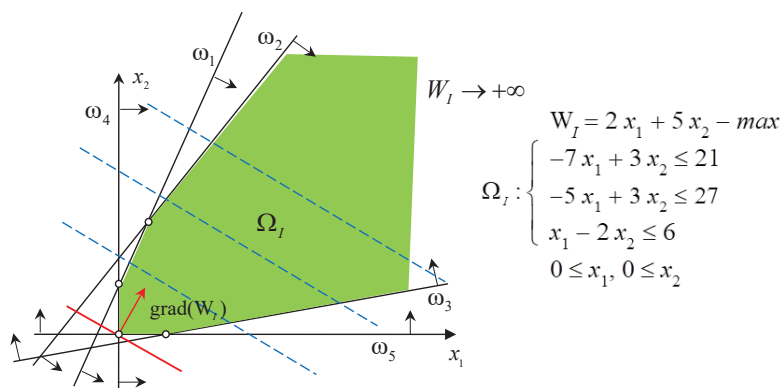


Рис. 1.83. Графічний метод розв'язання

Паралельне переміщення лінії рівня в пошуках найвіддаленішої вершини виконується нескінченно. В такому разі маємо необмежену зверху цільову функцію $W_I \rightarrow +\infty$. Висновок – задача розв'язку не має.

Розв'язати графічно задачу лінійної оптимізації:

$$\begin{aligned}
 W_I &= 13x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 + 13x_5 - 151 - \max \\
 \Omega_I : &\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 179 \\ 19x_1 + 14x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 298 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 69 \end{cases} \\
 &0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

Розв'язок.

Система обмежень (1.80) складається з трьох незалежних рівнянь. Переходимо від канонічної форми представлення задачі до стандартної. Такий перехід виконують розв'язанням системи методом Жордана-Гаусса (табл. 1.81). Як базисні змінні обираємо трійку x_3, x_4, x_5 .

Таблиця 1.81

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	10	10	1	1	1	179	202
	19	14	1	2	2	298	336
	4	5	0	1	0	69	79
W_I	13	7	2	-1	2	151	
	10	10	1	1	1	179	202
	-1	-6	-1	0	0	-60	-68
	4	5	0	1	0	69	79
W_I	-7	-13	0	-3	0	-207	
	9	4	0	1	1	119	134
	1	6	1	0	0	60	68
	4	5	0	1	0	69	79
W_I	-7	-13	0	-3	0	-207	

Продовження табл. 1.81

	5	-1	0	0	1	50	55
	1	6	1	0	0	60	68
	4	5	0	1	0	69	79
W_I	5	2	0	0	0	0	

З останнього ланцюга табл. 1.81 маємо розв'язану систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 69, \\ 5x_1 - x_2 + x_4 = 50, \\ x_1 + 6x_2 + x_5 = 60. \end{cases} \quad (1.81)$$

Відкидаючи базисні змінні, забезпечуємо перехід до двовимірних нерівностей. Проекція п'ятивимірної вихідної задачі на координатну площину Ox_1x_2 має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ \Omega_I^{Ox_1x_2} : &\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 69, \\ 5x_1 - x_2 \leq 50, \\ x_1 + 6x_2 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.84.

Координати екстремальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 69 \\ 5x_1 - x_2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = 5 \end{cases}.$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (1.81). Таким чином оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 65$.

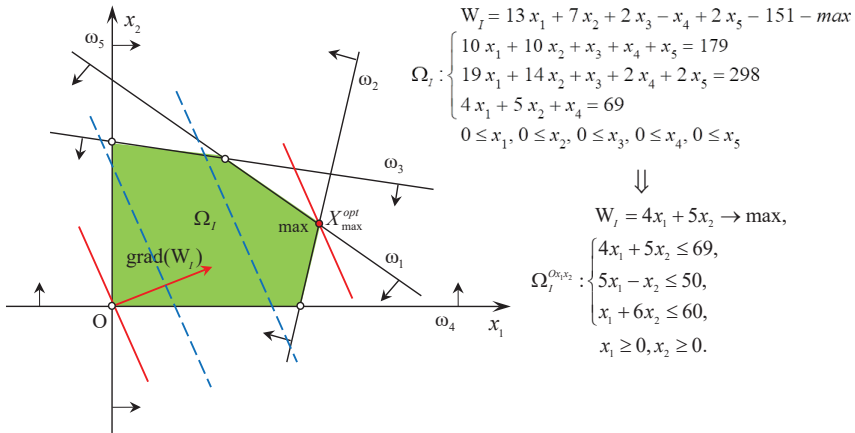


Рис. 1.84. Графічний метод розв'язання.
Проекція на Ox_1x_2

Зауваження. Перехід до стандартної форми задачі ЛО пов'язаний з обиранням базисних змінних. Обирання трьох змінних серед п'яти можливо виконати десятима способами $C_5^3 = 10$. Розглянемо додатково всі можливі редукції нашої задачі.

Проекція на Ox_1x_5

Обираємо базисними змінними x_2, x_3, x_4 . Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_2, x_3, x_4 методом Жордано-Гаусса (табл. 1.82), але використовуємо еквівалентну до (1.80) систему (1.81).

Таблиця 1.82

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	5	-1	0	0	1	50	55
	1	6	1	0	0	60	68
	4	5	0	1	0	69	79
W_I	5	2	0	0	0	0	
	-5	1	0	0	-1	-50	-55
	31	0	1	0	6	360	398
	29	0	0	1	5	319	354
W_I	15	0	0	0	2	100	

Таблиця 1.82 надає розв'язану систему з базисними змінними x_2, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} -5x_1 - x_5 + x_2 = -50 \\ 31x_1 + 6x_5 + x_3 = 360 \\ 29x_1 + 5x_5 + x_4 = 319 \end{cases} \quad (1.82)$$

Нехтуючи невід'ємними базисними змінними x_2, x_3, x_4 , виконуємо перехід до обмежень-нерівностей. Проекція п'яти-вимірного поліедра вихідної задачі (1.80) на координатну площину Ox_1x_5 , інакше, еквівалентний перехід від канонічної форми задачі ЛО до стандартної, має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= 15x_1 + 2x_5 - 100 \rightarrow \max \\ \Omega_I^{Ox_1x_5} &: \begin{cases} -5x_1 - x_5 \leq -50, \\ 31x_1 + 6x_5 \leq 360, \\ 29x_1 + 5x_5 \leq 319, \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_5. \end{cases} \end{aligned}$$

Графічний розв'язок задачі наведено на рис. 1.85, де

$$\omega_1 : 5x_1 + x_5 = 50, \quad \omega_2 : 31x_1 + 6x_5 = 360, \quad \omega_3 : 29x_1 + 5x_5 = 319,$$

$$\omega_4 : x_2 = 0, \quad \omega_5 : x_1 = 0.$$

Оптимальна вершина має координати $x_1 = 11, x_5 = 0$. Координати x_2, x_3, x_5 обчислюємо з системи (1.82). Остаточню $X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0]$. Отриманий оптимальний розв'язок збігається з попередніми, що підтверджує правильність виконаних розрахунків.

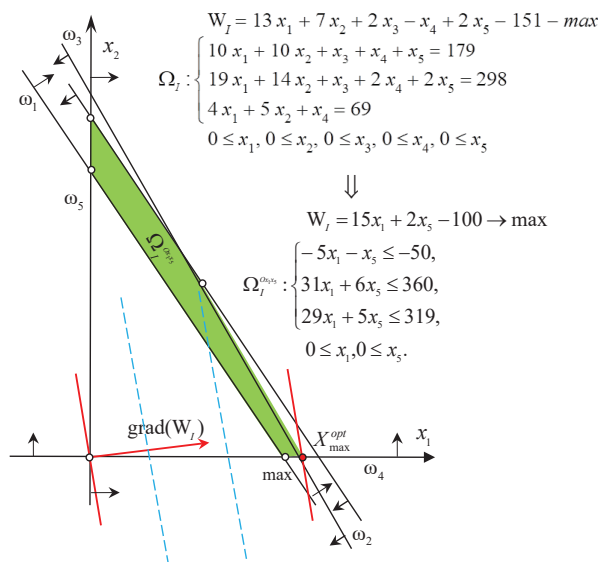


Рис. 1.85. Графічний метод розв'язання.
Проекція на Ox_1x_5

Проекція на Ox_2x_5

Обираємо як базисні змінні x_1, x_3, x_4 .

Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_1, x_3, x_4 , використовуючи таблицю розв'язку попереднього розрахунку (табл. 1.83).

Таблиця 1.83

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	-5	1	0	0	-1	-50	-55
	31	0	1	0	6	360	398
	29	0	0	1	5	319	354
W_I	15	0	0	0	2	100	
	1	-1/5	0	0	1/5	10	11
	0	31/5	1	0	-1/5	50	57
	0	29/5	0	1	-4/5	29	35
W_I	0	3	0	0	-1	-50	

З таблиці 1.83 маємо розв'язану систему з базисними змінними x_1, x_3, x_4 :

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_5 + x_1 = 10, \\ \frac{31}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_5 + x_3 = 50, \\ \frac{29}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_5 + x_4 = 29. \end{cases} \quad (1.83)$$

Нехтуючи невід'ємними базисними змінними, забезпечуємо перехід до обмежень-нерівностей. Проекція п'ятивимірного поліедра вихідної задачі ЛО на координатну площину Ox_2x_5 має вигляд:

$$W_I = 3x_2 - x_5 + 50 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I^{Ox_2x_5} : \begin{cases} -\frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_5 \leq 10, \\ \frac{31}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_5 \leq 50, \\ \frac{29}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_5 \leq 29, \\ 0 \leq x_2, 0 \leq x_5. \end{cases}$$

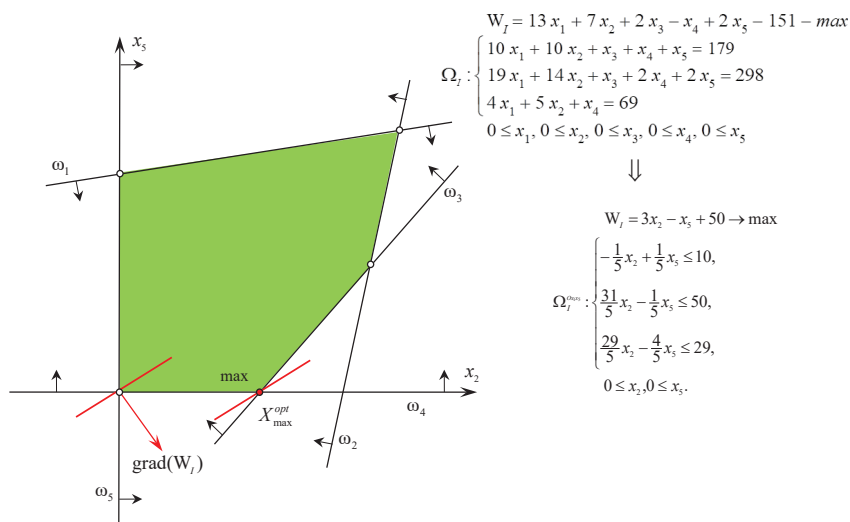


Рис. 1.86. Графічний метод розв'язання.
Проекція на Ox_2x_5

Графічний розв'язок задачі наведено на рис. 1.86, де

$$\omega_1 : -\frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_5 = 10, \quad \omega_2 : \frac{31}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_5 = 50, \quad \omega_3 : \frac{29}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_5 = 29,$$

$$\omega_4 : x_5 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0.$$

Оптимальна вершина має координати $x_2 = 5, x_5 = 0$. Координати x_1, x_3, x_4 обчислюємо з системи (1.83). Остаточню $X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0]$.

Проекція на Ox_4x_5

Обираємо як базисні змінні x_1, x_2, x_3 . Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_1, x_2, x_3 (табл. 1.84), використовуючи попередню таблицю розв'язку (див. табл. 1.82).

Таблиця 1.84

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	-5	1	0	0	-1	-50	-55
	31	0	1	0	6	360	398
	29	0	0	1	5	319	354
W_I	15	0	0	0	2	100	
	0	1	0	5/29	-4/29	5	175/29
	0	0	1	-31/29	19/29	19	568/29
	1	0	0	1/29	5/29	11	354/29
W_I	0	0	0	-15/29	-17/29	-65	

З таблиці 1.84 маємо розв'язану систему з базисними змінними x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} \frac{5}{29}x_4 - \frac{4}{29}x_5 + x_2 = 5, \\ -\frac{31}{29}x_4 + \frac{19}{29}x_5 + x_3 = 19, \\ \frac{1}{29}x_4 + \frac{5}{29}x_5 + x_1 = 11. \end{cases} \quad (1.84)$$

Проекція п'ятивимірного поліедра вихідної задачі ЛО на координатну площину Ox_4x_5 має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= -\frac{15}{29}x_4 - \frac{17}{29}x_5 + 65 \rightarrow \max \\ \Omega_I^{Ox_4x_5} : &\begin{cases} 5x_4 - 4x_5 \leq 145, \\ -31x_4 + 19x_5 \leq 551, \\ x_4 + 5x_5 \leq 319. \end{cases} \\ &0 \leq x_4, \quad 0 \leq x_5. \end{aligned}$$

Графічний розв'язок задачі наведено на рис. 1.87, де

$$\omega_1 : \frac{5}{29}x_4 - \frac{4}{29}x_5 = 5, \quad \omega_2 : -\frac{31}{29}x_4 + \frac{19}{29}x_5 = 19,$$

$$\omega_3 : \frac{1}{29}x_4 + \frac{5}{29}x_5 = 11, \quad \omega_4 : x_5 = 0, \quad \omega_5 : x_4 = 0.$$

Оптимальна вершина має координати $x_4 = 0, x_5 = 0$. Координати x_1, x_3, x_4 обчислюємо з системи (1.84). Остаточню $X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0]$. Отриманий оптимальний розв'язок збігається з попереднім.

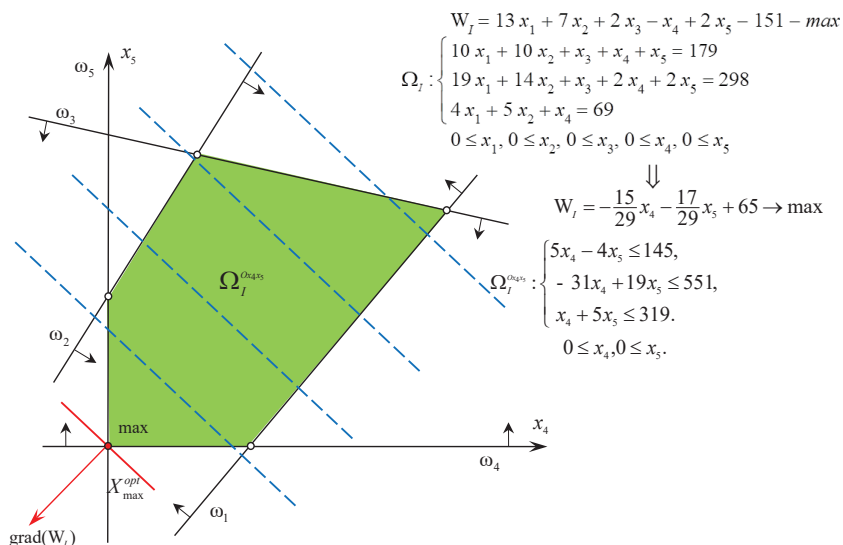


Рис. 1.87. Графічний метод розв'язання.

Проекція на Ox_4x_5

Проекція на Ox_2x_3

Обираємо як базисні змінні комбінацію x_1, x_4, x_5 .

Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_1, x_4, x_5 табл. 1.85, використовуючи попередню таблицю розв'язку (див. табл. 1.81).

З таблиці 1.85 маємо розв'язану систему з базисними змінними x_1, x_4, x_5 .

З останнього ланцюга отримаємо розв'язану систему

$$\begin{cases} -31x_2 - 5x_3 + x_5 = -250, \\ 6x_2 + x_3 + x_1 = 60, \\ -19x_2 - 4x_3 + x_4 = -171. \end{cases} \quad (1.85)$$

Таблиця 1.85

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	5	-1	0	0	1	50	55
	1	6	1	0	0	60	68
	4	5	0	1	0	69	79
W_I	5	2	0	0	0	0	
	0	-31	-5	0	1	-250	-285
	1	6	1	0	0	60	68
	0	-19	-4	1	0	-171	-193
W_I	0	-28	-5	0	0	-300	

Відкидаючи базисні змінні, забезпечуємо перехід до двовимірних нерівностей. Проекція п'ятивимірної вихідної задачі на координатну площину Ox_2x_3 має вигляд:

$$\begin{aligned}
 W_I &= -28x_2 - 5x_3 + 300 \rightarrow \max, \\
 \Omega_I^{Ox_2x_3} : &\begin{cases} -31x_2 - 5x_3 \leq -250, \\ 6x_2 + x_3 \leq 60, \\ -19x_2 - 4x_3 \leq -171, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.87, де

$$\omega_1 : 31x_2 + 5x_3 = 250, \quad \omega_2 : 6x_2 + x_3 = 60, \quad \omega_3 : 19x_2 + 4x_3 = 171,$$

$$\omega_4 : x_3 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0.$$

Координати екстремальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 31x_2 + 5x_3 = 250 \\ 19x_2 + 4x_3 = 171 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_3 = 19 \end{cases}.$$

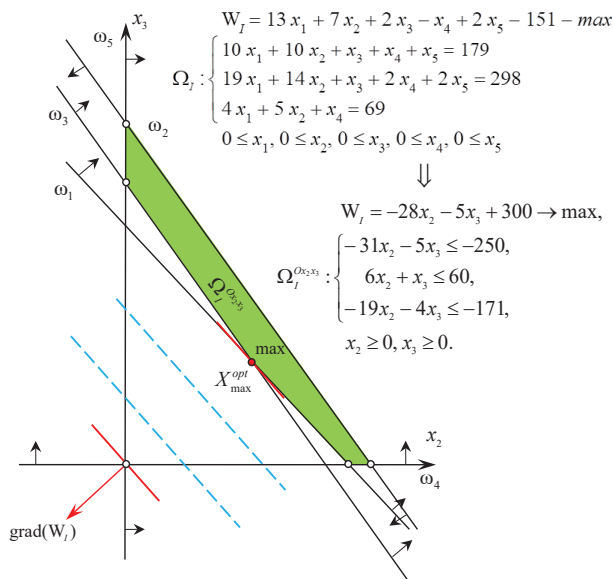


Рис. 1.87. Графічний метод розв'язання.
Проекція на Ox_2x_3

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (1.85). Таким чином, оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний $X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0]$.

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 65$.

Проекція на Ox_2x_4

Обираємо як базисні змінні комбінацію x_1, x_3, x_5 . Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_1, x_3, x_5 табл. 1.86, використовуючи попередню таблицю розв'язку (див. табл. 1.85).

Таблиця 1.86

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	0	-31	-5	0	1	-250	-285
	1	6	1	0	0	60	68
	0	-19	-4	1	0	-171	-193
W_I	0	-28	-5	0	0	-300	
	0	-29/4	0	-5/4	1	-145/4	-175/4
	1	5/4	0	1/4	0	69/4	79/4
	0	19/4	1	-1/4	0	171/4	193/4
W_I	0	-17/4	0	-5/4	0	-345/4	

З таблиці 1.86 маємо розв'язану систему з базисними змінними x_1, x_3, x_5

$$\begin{cases} -\frac{29}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_4 + x_5 = -\frac{145}{4}, \\ \frac{5}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + x_1 = \frac{69}{4}, \\ \frac{19}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4 + x_3 = \frac{171}{4}. \end{cases} \quad (1.86)$$

Переходимо до обмежень-нерівностей. Такий перехід забезпечує проектування вихідної п'ятивимірної задачі (1.80) на координатну площину Ox_2x_4 має вигляд:

$$W_I = -\frac{17}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_4 + \frac{345}{4} \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I^{Ox_2x_4} : \begin{cases} -29x_2 - 5x_4 \leq -145, \\ 5x_2 + x_4 \leq 69, \\ 19x_2 - x_4 \leq 171, \\ x_2 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.88, де

$$\omega_1 : 29x_2 + 5x_4 = 145, \quad \omega_2 : 5x_2 + x_4 = 69, \quad \omega_3 : 19x_2 - x_4 = 171,$$

$$\omega_4 : x_4 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0.$$

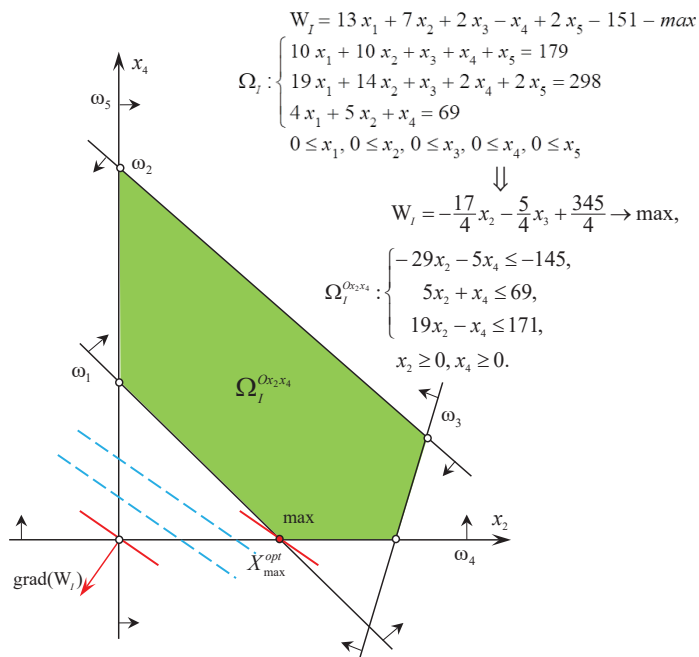


Рис. 1.88. Графічний метод розв'язання.

Проекція на Ox_2x_4

Координати екстремальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 29x_2 + 5x_4 = 145 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (1.86).
Оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний:

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 65$.

Проекція на Ox_1x_3

Нехай базисними змінними будуть x_2, x_4, x_5 . Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_2, x_4, x_5 табл. 1.87, але для зменшення кількості обчислень використовуємо попередню таблицю розв'язку (див. табл. 1.85).

Таблиця 1.87

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	0	-31	-5	0	1	-250	-285
	1	6	1	0	0	60	68
	0	-19	-4	1	0	-171	-193
W_I	0	-28	-5	0	0	-300	
	31/6	0	1/6	0	1	60	199/3
	1/6	1	1/6	0	0	10	34/3
	19/6	0	-5/6	1	0	19	67/3
W_I	14/3	0	-1/3	0	0	-20	

З таблиці 1.87 маємо розв'язану систему з базисними змінними x_2, x_4, x_5 .

В алгебраїчному вигляді вона запишеться так:

$$\begin{cases} \frac{31}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_3 + x_5 = 60, \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_3 + x_2 = 10, \\ \frac{19}{6}x_2 - \frac{5}{6}x_4 + x_4 = 19. \end{cases} \quad (1.87)$$

Переходимо до обмежень-нерівностей. Проекція вихідної п'ятивимірної задачі (1.80) на координатну площину Ox_1x_3 має вигляд:

$$W_I = \frac{14}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 + 20 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I^{Ox_1x_3} : \begin{cases} 31x_1 + x_3 \leq 360, \\ x_1 + x_3 \leq 60, \\ 19x_1 - 5x_3 \leq 114, \\ x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.89, де

$$\omega_1 : 31x_1 + x_3 = 360, \quad \omega_2 : x_1 + x_3 = 60, \quad \omega_3 : 19x_1 - 5x_3 = 114,$$

$$\omega_4 : x_3 = 0, \quad \omega_5 : x_1 = 0.$$

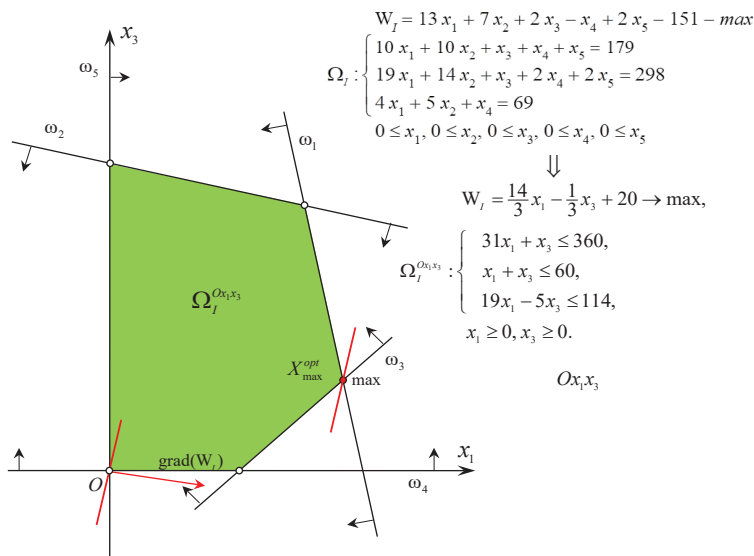


Рис. 1.89. Графічний метод розв'язання.
Проекція на Ox_1x_3

Координати екстремальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 31x_1 + x_3 = 360 \\ 19x_1 - 5x_3 = 114 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_3 = 19 \end{cases}.$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (1.87).
Таким чином, оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 65$.

Проекція на Ox_3x_4

Нехай базисними змінними будуть x_1, x_2, x_5 . Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_1, x_2, x_5 табл. 1.88. Для зменшення кількості обчислень використовуємо попередню таблицю розв'язку (див. табл. 1.87).

Таблиця 1.88

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	31/6	0	1/6	0	1	60	199/3
	1/6	1	1/6	0	0	10	34/3
	19/6	0	-5/6	1	0	19	67/3
W_I	14/3	0	-1/3	0	0	-20	
	0	0	29/19	-31/19	1	29	568/19
	0	1	4/19	-1/19	0	9	193/19
	1	0	-5/19	6/19	0	6	134/19
W_I	0	0	17/19	-28/19	0	-48	

З таблиці 1.88 маємо розв'язану систему з базисними змінними x_1, x_2, x_5 .

В алгебраїчному вигляді вона запишеться так:

$$\begin{cases} \frac{29}{19}x_3 - \frac{31}{19}x_4 + x_5 = 29, \\ \frac{4}{19}x_3 - \frac{1}{19}x_4 + x_2 = 9, \\ -\frac{5}{19}x_3 + \frac{6}{19}x_4 + x_1 = 6. \end{cases} \quad (1.88)$$

Переходимо до обмежень-нерівностей. Проекція вихідної п'ятивимірної задачі (1.80) на координатну площину Ox_3x_4 має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= \frac{17}{19}x_3 - \frac{28}{19}x_4 + 48 \rightarrow \max, \\ \Omega_I^{Ox_3x_4} : &\begin{cases} 29x_3 - 31x_4 \leq 551, \\ 4x_3 - x_4 \leq 171, \\ -5x_3 + 6x_4 \leq 114, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.90, де

$$\omega_1 : 29x_3 - 31x_4 = 551, \quad \omega_2 : 4x_3 - x_4 = 171, \quad \omega_3 : -5x_3 + 6x_4 = 114,$$

$$\omega_4 : x_3 = 0, \quad \omega_5 : x_4 = 0.$$

Координати оптимальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 29x_3 - 31x_4 = 551 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 19 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (1.88).
Оптимальний розв'язок вихідної задачі

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 65$.

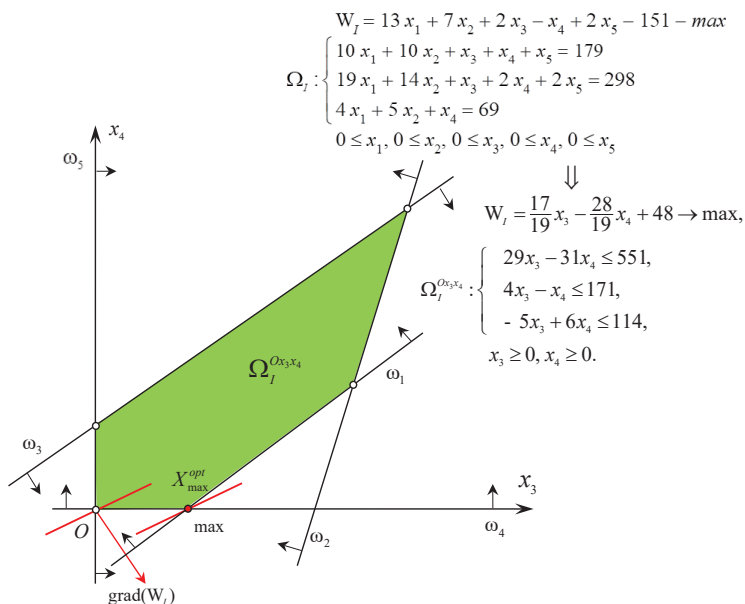


Рис. 1.90. Графічний метод розв'язання.

Проекція на Ox_3x_4

Проекція на Ox_3x_4

Нехай базисними змінними будуть x_2, x_3, x_5 . Розв'яжемо вихідну систему обмежень відносно змінних x_2, x_3, x_5 табл. 1.89, але для зменшення кількості обчислень використаємо попередню таблицю розв'язку (див. табл. 1.88).

З таблиці 1.89 маємо розв'язану систему з базисними змінними x_2, x_3, x_5 .

Таблиця 1.89

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	0	0	29/19	-31/19	1	29	568/19
	0	1	4/19	-1/19	0	9	193/19
	1	0	-5/19	6/19	0	6	134/19
W_I	0	0	17/19	-28/19	0	-48	
	29/5	0	0	1/5	1	319/5	354/5
	4/5	1	0	1/5	0	69/5	79/5
	-19/5	0	1	-6/5	0	-114/5	-134/5
W_I	17/5	0	0	-2/5	0	-138/5	

В алгебраїчному вигляді вона запишеться так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{29}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4 + x_5 = \frac{319}{5}, \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_4 + x_2 = \frac{69}{5}, \\ -\frac{19}{5}x_1 - \frac{6}{5}x_4 + x_3 = -\frac{114}{5}. \end{array} \right. \quad (1.89)$$

Переходимо до обмежень-нерівностей. Проекція вихідної п'ятивимірної задачі (1.80) на координатну площину Ox_1x_4 має вигляд:

$$W_I = \frac{17}{5}x_1 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{138}{5} \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I^{Ox_1x_4} : \left\{ \begin{array}{l} 29x_1 + x_4 \leq 319, \\ 4x_1 + x_4 \leq 69 \\ -19x_1 - 6x_4 \leq -114, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{array} \right.$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.91, де
 $\omega_1 : 29x_1 + x_4 = 319$, $\omega_2 : 4x_1 + x_4 = 69$, $\omega_3 : 19x_1 + 6x_4 = 114$,
 $\omega_4 : x_1 = 0$, $\omega_5 : x_4 = 0$.

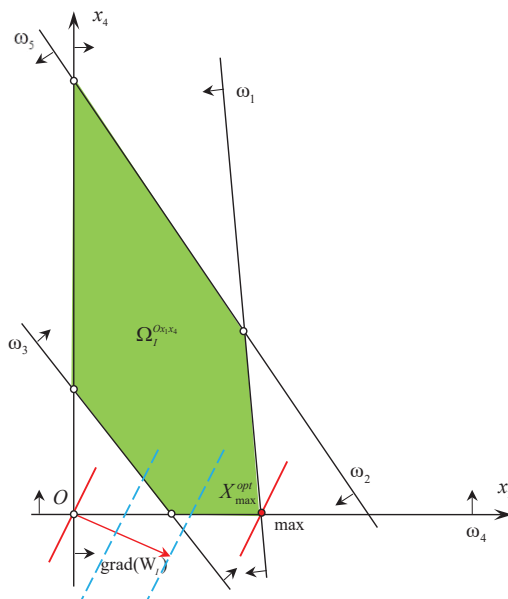


Рис. 1.91. Графічний метод розв'язання.
 Проекція на Ox_1x_4

Координати оптимальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 29x_1 + x_4 = 319 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи (1.89).
 Оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 65$.

Проекція на Ox_3x_5

Візьмемо за базисні змінні x_1, x_2, x_4 . Розв'язуємо вихідну систему обмежень відносно змінних x_1, x_2, x_4 табл. 1.90, але для зменшення кількості обчислень використовуємо таблицю розв'язку (див. табл. 1.88).

Таблиця 1.90

	0	0	29/19	- 31/19	1	29	568/19
	0	1	4/19	- 1/19	0	9	193/19
	1	0	- 5/19	6/19	0	6	134/19
W_1	0	0	17/19	- 28/19	0	- 48	
	0	0	- 29/31	1	- 19/31	- 551/31	- 568/31
	0	1	5/31	0	- 1/31	250/31	285/31
	1	0	1/31	0	6/31	360/31	398/31
W_1	0	0	- 15/31	0	- 28/31	- 2300/31	

Маємо розв'язану систему з базисними змінними x_1, x_2, x_4 . В алгебраїчному вигляді вона запишеться так:

$$\begin{cases} -\frac{29}{31}x_3 - \frac{19}{31}x_5 + x_4 = -\frac{551}{31}, \\ \frac{5}{31}x_3 - \frac{1}{31}x_5 + x_2 = \frac{250}{31}, \\ \frac{1}{31}x_3 + \frac{6}{31}x_5 + x_1 = \frac{360}{31}. \end{cases} \quad (1.90)$$

Переходимо до обмежень-нерівностей. Проекція вихідної п'ятивимірної задачі (1.80) на координатну площину Ox_3x_5 має вигляд:

$$W_I = -\frac{15}{31}x_3 - \frac{28}{31}x_5 + \frac{2300}{31} \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I^{Ox_3x_5} : \begin{cases} 29x_3 + 19x_5 \leq 551, \\ 5x_3 - x_5 \leq 250, \\ x_3 + 6x_5 \leq 360, \\ x_3 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Графічний розв'язок наведено на рис. 1.92, де

$$\omega_1 : 29x_3 + 19x_5 = 551, \quad \omega_2 : 5x_3 - x_5 \leq 250, \quad \omega_3 : x_3 + 6x_5 \leq 360,$$

$$\omega_4 : x_3 = 0, \quad \omega_5 : x_5 = 0.$$

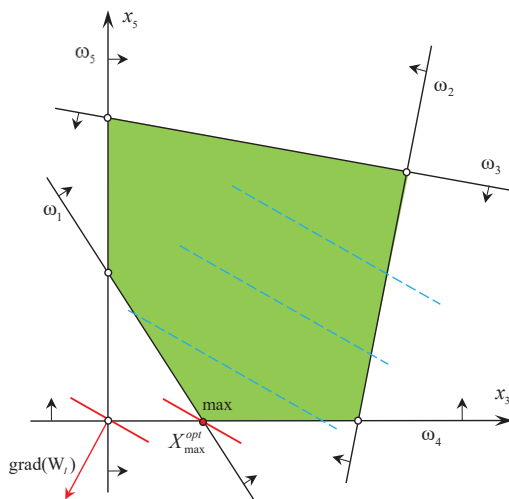


Рис. 1.92. Графічний метод розв'язання.
Проекція на Ox_3x_5

Координати оптимальної вершини є розв'язком системи

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_4 \Leftrightarrow \begin{cases} 29x_3 + 19x_4 = 551 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 19 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Інші координати отримаємо з розв'язаної системи(1.90).
Оптимальний розв'язок вихідної задачі рівний

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [11, 5, 19, 0, 0].$$

Найбільше значення цільової функції буде $W_I^{\max} = 65$.

РОЗДІЛ 2 | СИМПЛЕКС-МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

2.1 Загальні відомості та алгоритм звичайного симплексного розрахунку

Симплекс-метод є найпоширенішим числовим методом розв'язання задач лінійної оптимізації. Головна ідея методу ґрунтується на послідовному переборі вершин поліедра. Стартове обчислення починають з опису припустимої вершини (первісного опорного плану). За скінченну кількість алгоритмічних кроків задача ЛО буде розв'язана або буде доведена відсутність розв'язку. Значення цільової функції за кожною такою інтелектуальною ітерацією методу не погіршуються. Алгоритм звичайного симплекс-методу є швидкозбіжним. Розглянемо та ґрунтовно прокоментуємо кожен крок алгоритму симплекс-методу.

Нехай маємо загальну задачу ЛО:

$$W_f = CX - \text{opt}(\max \vee \min)$$

$$\Omega_f : AX \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \geq \\ < \\ > \\ = \end{array} \right\} B,$$

або завдяки еквівалентним перетворенням (див. розділ 1.1) у вигляді:

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = k+1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Відомо, що за допомогою еквівалентних перетворень завжди можливо звести подану загальну задачу до канонічної форми запису (розділ 1.1):

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Не порушуючи загальності міркувань, припускаємо, що $\text{rang } [a_{ij}]_{m \times n} = m$ та $n > m$. Після такого зведення до канонічної форми розв'язуємо систему $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ методом Жордано-Гаусса.

Для отримання припустимого частинного розв'язку контролюємо розрахунок так, щоб серед загальної кількості можливих комбінацій розв'язків базисна комбінація надавала невід'ємні праві частини. У такому разі буде знайдено первісний опорний план X_0 , який задовольняє умові невід'ємності змінних. Знову ж таки, не порушуючи загальності міркувань,

припустимо, що вільними невідомими у розв'язаній системі будуть перші $n - m$ змінних. З огляду на таке припущення, первісний опорний план буде представлено так:

$$X_0 = [0, 0, \dots, 0, \underbrace{b_{n-m+1}^{(m)}, b_{n-m+2}^{(m)}, \dots, b_n^{(m)}}_{n-m}],$$

де $b_{n-m+1}^{(m)} \geq 0, b_{n-m+2}^{(m)} \geq 0, \dots, b_n^{(m)} \geq 0$ – праві частини системи обмежень після m -кратного перетворення методом Жордано-Гаусса.

Нагадаємо, що вільним невідомим надаються нульові значення для зручності визначення частинного розв'язку.

Враховуючи важливість підготовки системи обмежень до початку розрахунків симплекс-методом, наведемо приклад такої підготовки.

Приклад 1

Подано загальну задачу ЛО:

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Виконати перехід до канонічної форми та знайти первісний опорний план $X_0 \in \Omega_I$.

Розв'язок. Першу нерівність ставимо у відповідність типу екстремума. Оскільки цільова функція на максимум $W_I = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$, то знак нерівності змінюємо на $\leq$ і маємо перше еквівалентне перетворення:

$$W_I = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \leq -3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Переходимо від обмеження-нерівності до обмеження-рівняння додаванням базисної (балансової) змінної $x_6 \geq 0$. Після такого перетворення отримали канонічну форму задачі ЛО, яка еквівалентна вихідній:

$$W_I = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Введемо вектори:

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6], \quad \mathbf{c} = [2, 1, 1, 3, 2, 0],$$

$$\mathbf{a}_1 = [1, 1, 1]^T, \quad \mathbf{a}_2 = [2, 3, -1]^T, \quad \mathbf{a}_3 = [-3, 1, 2]^T,$$

$$\mathbf{a}_4 = [1, 2, -1]^T, \quad \mathbf{a}_5 = [-2, 1, 1]^T, \quad \mathbf{e}_6 = [1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{b} = [-3, 3, 1]^T.$$

За таких позначень задачу можна записати у вигляді

$$W_I = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 + \mathbf{a}_4x_4 + \mathbf{a}_5x_5 + \mathbf{e}_6x_6 = \mathbf{b}.$$

Розв'язок системи виконуємо методом Жордано-Гаусса в табличній формі (табл. 2.11). Обираємо базисні невідомі таким чином, щоб наприкінці обчислень у стовпчику $\mathbf{b}$ були невід'ємні числа.

Таблиця 2.11

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Σ
	1	2	-3	1	-2	1	-3	-3
	1	3	1	2	1	0	3	11
	1	-1	2	-1	1	0	1	3
W_I	2	1	1	3	2	0	0	9
	3	8	-1	5	0	1	3	19
	1	3	1	2	1	0	3	11
	0	-4	1	-3	0	0	-2	-8
W_I	0	-5	-1	-1	0	0	-6	-13
	3	4/3	2/3	0	0	1	14/3	17/3
	1	1/3	5/3	0	1	0	5/3	17/3
	0	4/3	- 1/3	1	0	0	2/3	8/3
W_I	0	- 11/3	- 4/3	0	0	0	- 16/3	- 31/3

З останнього 3-го кроку розрахунків маємо

$$W_I = -\frac{11}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{16}{3} \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_6 = \frac{14}{3}, \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + x_5 = \frac{5}{3}, \\ \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + x_4 = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0.$$

або у векторній формі

$$W = \mathbf{c}^{(2)} \mathbf{x} + \frac{16}{3} \rightarrow \max$$

$$\Omega : \mathbf{a}_1^{(2)}x_1 + \mathbf{a}_2^{(2)}x_2 + \mathbf{a}_3^{(2)}x_3 + \mathbf{e}_4x_4 + \mathbf{e}_5x_5 + \mathbf{e}_6x_6 = \mathbf{b},$$

$$\text{де } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \mathbf{c}^{(2)} = \left[0, -\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 0, 0 \right], \mathbf{a}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_3^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

або, реалізувавши метод Жордана-Гаусса, ми визначили одиничний базис $(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6)$. Змінні величини, які співвідносяться з базисом, є базисними, а інші – вільними. Вільним невідомим надають частинні значення, як правило, використовують нульові значення. В такому разі, маємо первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, \frac{14}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}] \in \Omega_I$, який є припустимим, оскільки праві частини перетвореної системи невід’ємні та задовольняють рівняння системи. У разі присутності хоча б одного мінуса у векторі правих частин $\mathbf{b}^{(2)}$, необхідно було б взяти іншу комбінацію базисних векторів (у розглянутій задачі їх кількість рівна $C_6^3 = 30$) Стає зрозумілим, що безпосередній перебір вершин є трудомісткою задачею. Випадок відсутності припустимого плану, за умови випадкового перебору базисів, на жаль, стає зрозумілим лише після повного перебору всіх комбінацій. Для захисту від цього неприємного випадку є спеціальна процедура – метод штучного базису, що розглядається після викладу звичайного симплекс-методу.

На умовному 2-му кроці звичайного симплекс-методу необхідно виконати числовий опис припустимого опорного плану. Опис цієї вершини поліедра Ω_I виконуємо в таблиці, яку прийнято називати Першою симплекс-таблицею (табл. 2.12).

Таблиця 2.12

Базис	C	B	c_1	c_2	...	c_{n-m}	0	...	0	0	$\begin{Bmatrix} b_j \\ a_{ij} \end{Bmatrix}$	X_i
			a_1	a_2	...	a_{n-m}	a_{n-m+1}	...	a_{n-1}	a_n		
a_{n-m+1}	0	b_1	a_{11}	a_{12}	...	$a_{1, n-m}$	1	...	0	0	{}	
a_{n-m+2}	0	b_2	a_{21}	a_{22}	...	$a_{2, n-m}$	0	...	0	0		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$		
a_{n-1}	0	b_{m-1}	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	...	$a_{n-1, n-m}$	0	...	1	0		
a_n	0	b_m	a_{n1}	a_{n2}	...	$a_{n, n-m}$	0	...	0	1		
Δ_j	$W_I(X_0)=CB$		Δ_1	Δ_2	...	Δ_{n-m}	0	...	0	0		

Першу симплекс-таблицю заповнюють з підготовлених до початку розв'язку вихідних даних задачі ЛО. Розрахунок виконують у так званому індексному рядку Δ_j . Для небазисних векторів оцінки розраховують за формулою

$$\Delta_j = \mathbf{c}\mathbf{a} - c_j = \sum_{i=1}^m c_{n-m+i} a_{ij} - c_j, \quad j=1, \dots, n. \quad (2.11)$$

Зауважимо, що формула (2.11) застосовується і для базисних векторів. Легко обчислити, що оцінки для них завжди рівні нулю.

Значення цільової функції в стартовій вершині $X_0 \in \Omega_I$ рівне скалярному добутку векторів $\mathbf{c}$ та $\mathbf{b}$:

$$W_I(X_0) = \mathbf{c}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^m c_{n-m+i} b_i. \quad (2.12)$$

Приклад 2

Подано загальну задачу ЛО:

$$W_I = 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 - x_5 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 6x_5 \leq 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 9x_4 + x_5 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Скласти першу симплекс-таблицю.

Розв'язок. Виконуємо еквівалентний перехід від загальної до канонічної задачі ЛО. У даному випадку це перехід від обмежень-нерівностей до обмежень-рівнянь. Такий перехід пов'язаний з додаванням балансової змінної до кожної нерівності:

$$W_I = 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 - x_5 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 + 6x_5 + x_6 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 9x_4 + x_5 + x_7 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7.$$

Маємо припустимий первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 8] \in \Omega_I$. Наявність такого плану дозволяє скласти першу симплекс-таблицю 2.13.

Таблиця 2.13

			3	4	-5	7	-1	0	0	Симплекс відношення
Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
a_6	0	1	1	3	-2	-5	6	1	0	
a_7	0	8	3	-2	7	-9	1	0	1	
Δ_i	$W_1(X_0) = 0$		-3	-4	5	-7	1	0	0	

Згідно з формулою (2.12), значення цільової функції в початковій точці X_0 рівне

$$W(X_0) = \mathbf{c}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 8 = 0.$$

Вписуємо це значення в індексний рядок Δ_j . Наступними обчисленнями будуть сім оцінок $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_7$. За формулами (2.11) маємо

$$\Delta_1 = \mathbf{c}\mathbf{a}_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - 3 = -3,$$

$$\Delta_2 = \mathbf{c}\mathbf{a}_2 - c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 = -4,$$

$$\Delta_3 = \mathbf{c}\mathbf{a}_3 - c_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} - (-5) = 5,$$

$$\Delta_4 = \mathbf{c}\mathbf{a}_4 - c_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \end{bmatrix} - 7 = -7,$$

$$\Delta_5 = \mathbf{c}\mathbf{a}_5 - c_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = 1,$$

$$\Delta_6 = \mathbf{c}\mathbf{a}_6 - c_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0,$$

$$\Delta_7 = \mathbf{c}\mathbf{a}_7 - c_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0.$$

Розглянемо можливі випадки оцінки оптимальності початкового плану X_0 . Нехай до розгляду взято задачу на $\max - W_I = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \max$.

□ – у разі невід’ємності усіх оцінок в індексному рядку $\Delta_j \geq 0$ робимо твердження – план оптимальний $X_0 = X_{\max}^{\text{opt}}$ і задача розв’язана; симплекс-таблиця, яка інтерпретує цей випадок, наведена в табл. 2.14.

Таблиця 2.14

Базис	c	b	3	4	-3	7	-1	3	-4	Симплекс відношення
			a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	
a ₅	-1	1	1	3	-2	-5	1	0	0	
a ₆	3	2	3	5	6	7	0	1	0	
a ₇	-4	8	-3	-2	-1	-9	0	0	1	
Δ _j	W ₁ (X ₀) = -27		17	16	27	55	0	0	0	

Останній індексний рядок містить сім невід’ємних оцінок:

$$\Delta_1 = 17, \Delta_2 = 16, \Delta_3 = 27, \Delta_4 = 55, \Delta_5 = 0, \Delta_6 = 0, \Delta_7 = 0.$$

Маємо оптимальний план, який зчитуємо з таблиці $X_{\max}^{\text{opt}} = [0, 0, 0, 0, 1, 2, 8]$.

□ – у разі того, якщо у відповідному стовпчику до мінімальної недодатної оцінка $\Delta_k \leq 0$ немає жодного додатного числа, робиться твердження – цільова функція необмежена зверху (розв’язків немає): $W_l = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \infty$.

Інтерпретуємо цей випадок відповідною симплекс-таблицею 2.15.

Таблиця 2.15

Базис	c	b	7	2	-5	1	Симплекс відношення
			a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	
a ₂	2	3	-1	1	-2	0	
a ₄	1	2	-3	0	7	1	
Δ _j	W ₁ (X ₁) = 8		-12	0	8	0	

Таблиця містить від'ємну оцінку для змінної x_1 або вектора $\mathbf{a}_1$, $\Delta_1 = -12 < 0$. Компоненти вектор-стовпчика $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ не містять додатних значень. З огляду на цей факт, $W_f = \mathbf{c}\mathbf{x} \rightarrow \infty$ – розв'язків немає.

□ – у разі наявності хоча б однієї від'ємної оцінки $\Delta_k < 0$ і обов'язково у відповідному вектор-стовпчику $\mathbf{a}_k$ є хоча б одна додатна компонента, то необхідно виконати перехід до наступної вершини (плану). Обчислювальний процес полягає у перерахунку симплекс-таблиці. Інтерпретуємо цей випадок у табл. 2.16.

Таблиця 2.16

Базис	с	b	9	3	7	1	Симплекс відношення
			$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	
$\mathbf{a}_2$	3	3	3	1	-1	0	
$\mathbf{a}_4$	1	2	-2	0	2	1	
Δ_j	$W_f(X_1) = 11$		-2	0	-8	0	

Симплекс-таблиця містить дві від'ємні оцінки для векторів $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ і серед компонент вектора $\mathbf{a}_3$ є хоча б одне додатне число.

□ – якщо від'ємних оцінок декілька, то обирають найменшу серед них $\min\{\Delta_k, \Delta_l, \dots, \Delta_p\} = \Delta_l$. Стовпчик, який відповідає цьому значенню, називають напрямним, а відповідний вектор після перерахунку таблиці вводять в базис. З базису вилучають вектор, який має найменше симплексне відношення. Симплексне відношення складають тільки для додатних компонент вектора за формулою

$$\left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid a_{il} > 0, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Серед симплексних відношень обирають найменше. Цей рядок називають напрямним і він вказує на вектор базису, який вилучають та замінюють, на визначений раніше вектор, вказаний напрямним стовпчиком.

Розглянемо приклад, який відповідає такому випадку (табл. 2.17).

Таблиця 2.17

Базис	с	b	3	4	-1	1	2	0	Симплекс відношення
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
a_2	4	3	-1	1	-5	0	0	0	-
a_6	0	1	1	0	1	0	0	1	1
a_5	2	8	2	0	4	0	1	0	2
a_4	1	9	-2	0	3	1	0	0	3
Δ_j	$W_1(X_1) = 37$		-5	0	-8	0	0	0	

Маємо в індексному рядку дві від'ємні оцінки: $\Delta_1 = -5$ та $\Delta_3 = -8$. Найменше значення відповідає вектору a_3 – $\min\{-5, -8\} = -8 \rightarrow a_3$. Останнє означає, що вектор a_3 (змінна x_3) буде залучено до базису. З базису $\{a_2, a_4, a_5, a_6\}$ необхідно вилучити один з чотирьох векторів. Для встановлення такого вектора обчислюємо симплексне відношення:

$$\left\{ \frac{b_i}{a_{i3}} \mid a_{i3} > 0, i = 1, \dots, 4 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1}, \frac{8}{4}, \frac{9}{3} \right\} = 1 \rightarrow a_6.$$

Замість a_6 у новому базисі буде вектор a_3 . Перехід до нового базису (сусідня вершина поліедра) $\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ здійснюється перерахунком таблиці за методом Жордана-Гаусса.

Напрямний стовпчик і рядок обводять прямокутниками. На їх перетині міститься розв'язувальний елемент (табл. 2.17). У нашому випадку це елемент $a_{32} = 1$. Перехід до наступної симплекс-таблиці містить перерахунок Жордана-Гаусса для розв'язувального елемента $a_{32} = 1$ та формального опису нового базису і відповідних до нього значень c_j (табл. 2.18).

Таблиця 2.18

Базис	с	b	3	4	-1	1	2	0	b_i
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_{ij}
a_2	4	8	4	1	0	0	0	5	
a_3	-1	1	1	0	1	0	0	1	
a_5	2	4	-2	0	0	0	1	-4	
a_4	1	6	-5	0	0	1	0	-3	
Δ_j	$W_1(X_2) = 45$		3	0	0	0	0	8	

Зауваження. У тому разі, якщо цільова функція на знаходження мінімуму $W_I = \sum c_j x_j \rightarrow \min$, то згідно з умовою оптимальності всі оцінки індексного рядка повинні бути не додатними: $\Delta_j \leq 0, j = 1, \dots, n$.

ПІДСУМОК

Наведемо найголовніші кроки звичайного симплекс-методу.

Маємо на початку загальну задачу ЛО:

$$W_I = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, k, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = k+1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, l. \end{cases}$$

□□ Переходимо від загальної до канонічної форми запису та знаходимо первісний опорний план $X_0 = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m}, b_{n-m+1}^{(m)}, b_{n-m+2}^{(m)}, \dots, b_n^{(m)}]$.

- Заносимо інформацію в першу симплекс-таблицю та оцінюємо оптимальність X_0 .
- В залежності від значень оцінок та компонент векторів розрахунки припиняють (розв'язків немає або план оптимальний) або складають наступну симплекс-таблицю, повторюючи дії до тих пір, поки не буде отримано розв'язок або підтвердження відсутності його.

2.2 Приклади розв'язку задач ЛО звичайним симплекс-методом

Приклад № 1

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом. Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 36, \\ x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зведемо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 36, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Маємо первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 36, 22]$. Складемо вихідну симплексну таблицю (табл. 2.21).

Таблиця 2.21

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	5	4	0	0		Вершина
a_3	0	36	3	1	1	0	12	
a_4	0	22	1	2	0	1	22	X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-5	-4	0	0		

В індексному рядку Δ_j є дві від'ємні оцінки. Це означає, що план $X_0 = [0, 0, 36, 22]$ не є оптимальним і його можливо покращити. Напрямний стовпчик знаходимо за правилом обирання найменшого від'ємного значення оцінок. Це стовпчик a_1 , оскільки $\min\{-5, -4\} = -5 \rightarrow a_1$.

Напрямний рядок встановлюємо за правилом обирання найменшого симплексного відношення для додатних компонент напрямного стовпчика.

Маємо

$$\left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \mid a_{i1} > 0, i = 1, 2 \right\} = \min \left\{ \frac{36}{3}, \frac{22}{1} \right\} = 12 \rightarrow a_3.$$

Розв'язувальним елементом є $a_{11} = 3$. Для нього виконуємо Жордано-Гаусса перетворення та остаточно отримаємо (табл. 2.22).

Таблиця 2.22

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	5	4	0	0		Вершина
a_1	5	12	1	1/3	1/3	0	36	
a_4	0	10	0	5/3	- 1/3	1	6	X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 60$		0	- 7/3	5/3	0		

З таблиці (табл. 2.22): $X_1 = [12, 0, 0, 10]$, $W_I(X_1) = 60$.

В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка. План $X_1 = [12, 0, 0, 10]$ не є оптимальним і його можливо покращити. Напрямний стовпчик a_2 , оскільки тільки він містить від'ємну оцінку $\Delta_2 = -\frac{7}{3}$. Напрямний рядок обираємо з умови найменшого симплексного відношення для додатних компонент напрямного стовпчика. Маємо

$$\left\{ \frac{b_i}{a_{i2}} \mid a_{i2} > 0, i = 1, 2 \right\} = \min \left\{ \frac{12}{\frac{1}{3}}, \frac{10}{\frac{5}{3}} \right\} = \{36, 6\} \rightarrow a_4.$$

У новому базисі замість a_4 буде залучено a_2 . Після відповідних обчислень маємо третю симплексну таблицю (табл. 2.23).

Таблиця 2.23

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	5	4	0	0		Вершина
a_1	5	10	1	0	2/5	- 1/5		
a_2	4	6	0	1	- 1/5	3/5		X_{opt}
Δ_j	$W_I(X_2) = 74$		0	0	6/5	7/5		

Всі оцінки невід'ємні $\Delta_j \geq 0$. Це означає, що знайдено оптимальний розв'язок.

$$X_{\text{max}}^{\text{opt}} = [10, 6, 0, 0], W_I(X_{\text{max}}^{\text{opt}}) = 74.$$

Розглянута задача двовимірна, тому можемо виконати графічний розв'язок.

Складаємо рівняння граничних прямих

$$\omega_1 : 3x_1 + x_2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{36} = 1,$$

$$\omega_2 : x_1 + 2x_2 = 22 \Leftrightarrow \frac{x_1}{22} + \frac{x_2}{11} = 1,$$

$$\omega_3 : x_1 = 0, \quad \omega_4 : x_2 = 0$$

і встановлюємо півплощини, які визначаються відповідними нерівностями системи обмежень. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_r (рис. 2.21).

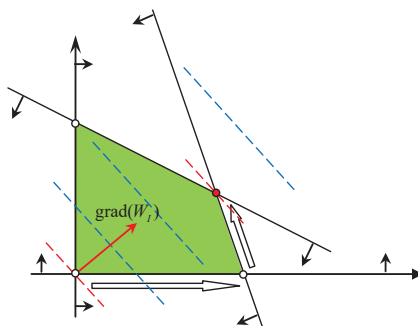


Рис. 2.21. Графічний метод розв'язку з геометричною інтерпретацією симплексного розрахунку.

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_1) = [5, 4]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня.

Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня (рис. 2.21).

Координати екстремальної вершини визначаються як координати точки перетину відповідних граничних прямих:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 36 \\ x_1 + 2x_2 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 6 \end{cases}.$$

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [10, 6]$ і воно дорівнює $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 74$.

Геометрична інтерпретація симплексного обчислення полягає в тому, що перша симплекс-таблиця (табл. 2.21) відповідає вершині X_0 . Обчислення до другої таблиці (табл. 2.22) відповідають переходу у сусідню вершину X_1 . Третя й остання симплекс-таблиця (табл. 2.23) відповідає переходу від X_1 до $X_{\max}^{\text{opt}}$ (рис. 2.21).

Приклад № 2

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 - \text{opt}(\min, \max) \\ \Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 5x_4 \leq 2, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зведемо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \text{opt}(\min, \max) \\ \Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 5x_4 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Спочатку розв'яжемо задачу на мінімум. Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 6, 2] \in \Omega_7$. Складаємо першу симплекс-таблицю (табл. 2.24).

Таблиця 2.24

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	Вершина
			1	-3	1	-3	0	0		
a_5	0	6	1	-1	2	3	1	0		
a_6	0	2	7	5	-6	-5	0	1	2/5	X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-1	3	-1	3	0	0		

Оскільки задача на мінімум, то наявність додатних оцінок означає, що план не є оптимальним. Серед додатних оцінок обираємо найбільшу: $\Delta_2 = 3$. Стовпчик a_2 є напрямним (табл. 2.24). Для його додатних компонент обчислюємо симплексне відношення

$$\left\{ \frac{b_j}{a_{j2}} \mid a_{j2} > 0, j = 1, 2 \right\} = \min \left\{ \frac{2}{5} \right\} \rightarrow a_6.$$

Напрямний рядок a_6 табл. 2.24. Виконуємо перерахунок таблиці. Алгоритм обчислення продовжуємо до появи в індексному рядку всіх недодатних оцінок (табл. 2.25).

Таблиця 2.25

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	Вершина
			1	-3	1	-3	0	0		
a_5	0	32/5	12/5	0	4/5	2	1	1/5	16/5	
a_2	-3	2/5	7/5	1	-6/5	-1	0	1/5		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = -6/5$		-26/5	0	13/5	6				
a_4	-3	16/5	6/5	0	2/5	1	1/2	1/10	8	
a_2	-3	18/5	13/5	1	-4/5	0	1/2	3/10		X_2
Δ_j	$W_1(X_2) = -102/5$		-62/5	0	1/5	0	-3	-6/5		
a_3	1	8	3	0	1	5/2	5/4	1/4		
a_2	-3	10	5	1	0	2	3/2	1/2		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = -22$		-13	0	0	-1/2	-13/4	-5/4		

На останньому ланцюгу обчислень табл. 2.25 отримано всі недодатні оцінки, що є ознакою оптимальності задачі на мінімум.

Задача на мінімізацію розв'язана $X_{\min}^{\text{opt}} = [0, 10, 8, 0]$, $W_I(X_{\min}^{\text{opt}}) = -22$.

У табл. 2.26 наведено розв'язок задачі на максимум.

Таблиця 2.26

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	Вершина
			1	-3	1	-3	0	0		
a_5	0	6	1	-1	2	3	1	0	6/1	X_0
a_6	0	2	7	5	-6	-5	0	1	2/7	
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-1	3	-1	3	0	0		
a_5	0	40/7	0	-12/7	20/7	26/7	1	-1/7	2	X_1
a_1	1	2/7	1	5/7	-6/7	-5/7	0	1/7		
Δ_j	$W_I(X_1) = 2/7$		0	26/7	-13/7	16/7	0	1/7		
a_3	1	2	0	-3/5	1	13/10	7/20	-1/20		X_{opt}
a_1	1	2	1	1/5	0	2/5	3/10	1/10		
Δ_j	$W_I(X_{\text{opt}}) = 4$		0	13/5	0	47/10	13/20	1/20		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Отримано оптимальний розв'язок задачі на максимум $X_{\max}^{\text{opt}} = [2, 0, 2, 0]$, $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 4$.

2.3 Приклад виродженого розв'язку задач ЛО

Наявність в оптимальному розв'язку задачі хоча б одного нульового значення серед оцінок вільних змінних прийнято іменувати виродженим розв'язком задачі ЛО. Така особливість полягає у тому, що в розрахунках будуть принаймні дві симплекс-таблиці, які надають однакове оптимальне значення

в одній вершині, але у різній базисній комбінації. Іншими словами, є вершина поліедра, яка має бінарний опис (два базиси). У двовимірному випадку такий випадок означає, що через оптимальну вершину проходить більше двох прямих.

Розглянемо відповідний до цього випадку приклад.

Приклад

Задачу лінійної оптимізації розв'язати симплекс-методом. Навести альтернативний графічний розв'язок. Геометрично проінтерпретувати симплексний розрахунок та виродженість розв'язку задачі:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 18, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 30, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 18, 20, 30]$. Складаємо першу симплексну таблицю (табл. 2.31).

Таблиця 2.31

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Базис	C	B	1	1	0	0	0	$\theta_l = \{b_j/a_{lj}\}$
a_3	0	18	1	2	1	0	0	18
a_4	0	12	1	1	0	1	0	12
a_5	0	30	3	2	0	0	1	10
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-1	-1	0	0	0	

Серед оцінок вільних змінних є від'ємні. План $X_0 = [0, 0, 18, 20, 30]$ не оптимальний. Серед від'ємних оцінок знаходимо найменшу. Визначено напрямний стовпчик a_1 :

$$\min\{-1, -1\} = -1 \rightarrow a_1.$$

Для встановлення напрямного рядка обчислюємо симплексне відношення та обираємо найменше серед них. Визначено напрямний рядок a_5 :

$$\min\left\{\frac{18}{1}, \frac{12}{1}, \frac{30}{3}\right\} = 10 \rightarrow a_5.$$

Для розв'язувального елемента a_{13} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_3, a_4, a_5\}$ замість a_5 входить a_1 . Новий план (вершина Ω_l) оцифрована в табл. 2.32.

Таблиця 2.32

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Базис	C	B	1	1	0	0	0	$\theta_l = \{b_j/a_{lj}\}$
a_3	0	8	0	4/3	1	0	-1/3	6
a_4	0	2	0	1/3	0	1	-1/3	6
a_1	1	10	1	2/3	0	0	1/3	15
Δ_j	$W_I(X_1) = 10$		0	-1/3	0	0	1/3	

$$\min\left\{\frac{-1}{3}\right\} = \frac{-1}{3} \rightarrow a_2, \quad \min\left\{\frac{18}{4}, \frac{2}{1}, \frac{10}{2}\right\} = \{6, 6, 15\} = 6 \rightarrow a_4.$$

Розв'язувальний елемент a_{22} . Вектор базису a_4 замінюється на a_2 . Знову реалізується розрахунок, результати якого наведені в табл. 2.33.

Таблиця 2.33

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Базис	C	B	1	1	0	0	0	$\theta_i = \{b_j/a_{ij}\}$
a_3	0	0	0	0	1	-4	1	0
a_2	1	6	0	1	0	3	-1	—
a_1	1	6	1	0	0	-2	1	6
Δ_j	$W_I(X_{opt}) = 12$		0	0	0	1	0	

Від'ємних оцінок немає. Отримано оптимальний розв'язок.

$$X_{\max}^{opt} = \{6, 6, 0, 0, 0\}, W_I^{\max} = 12.$$

У стовпчику B міститься нуль, що є ознакою виродженого розв'язку. Небазисний вектор a_5 має нульову оцінку. Введемо його в базис замість вектора a_3 (табл. 2.34).

Таблиця 2.34

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
Базис	C	B	1	1	0	0	0	$\theta_i = \{b_j/a_{ij}\}$
a_3	0	0	0	0	1	-4	1	0
a_2	1	6	0	1	0	3	-1	—
a_1	1	6	1	0	0	-2	1	6
Δ_j	$W_I(X_{opt}) = 12$		0	0	0	1	0	
a_5	0	0	0	0	1	-4	1	
a_2	1	6	0	1	1	-1	0	
a_1	1	6	1	0	-1	2	0	
Δ_j	$W_I(X_{opt}) = 12$		0	0	0	1	0	

Знову отримано оптимальний розв'язок задачі, але обидва розв'язки еквівалентні. Оптимальна вершина поліедра Ω_I має інший опис $\{a_1, a_2, a_5\}$ на відміну від попереднього $\{a_1, a_2, a_5\}$.

Проілюструємо графічно виродженість задачі ЛО. Нагадаємо, що попередньо симплекс-методом був отриманий оптимальний розв'язок наступної двовимірної задачі:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для початку її графічного розв'язку складаємо рівняння граничних прямих:

$$\omega_1 : x_1 + 2x_2 = 18, \quad \omega_2 : x_1 + x_2 = 12, \quad \omega_3 : 3x_1 + 2x_2 = 30,$$

$$\omega_4 : x_1 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які визначаються відповідними нерівностями системи обмежень. У результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 2.31).

Очевидно, що в оптимальній вершині $X_{\max}^{opt}$ перетинаються всі три прямі і нерівності системи обмежень виконуються гранично.

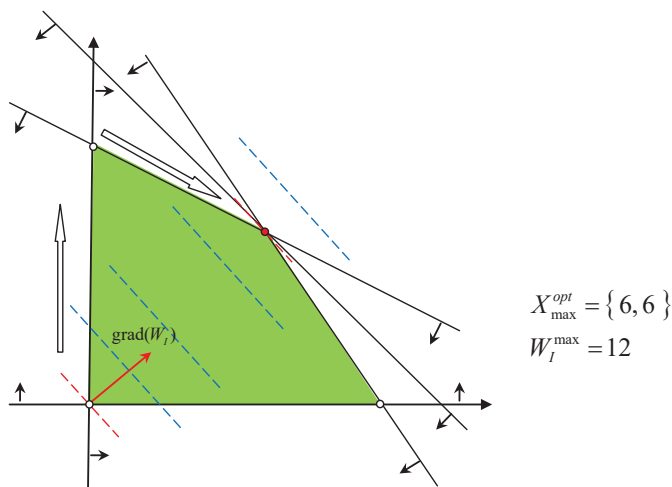


Рис. 2.31. Графічний метод розв'язку з геометричною інтерпретацією симплексного розрахунку та виродженості розв'язку

2.4 Приклад альтернативного оптимуму у розв'язку задач ЛО

Критерієм оптимальності розв'язку задач лінійної оптимізації симплекс-методом на максимум є невід'ємність усіх оцінок $\Delta_j \geq 0$ індексного рядка. Для задач на мінімум умова $\Delta_j \leq 0$. Наявність у кінцевій таблиці симплексного розв'язку хоча б однієї нульової оцінки для небазисних векторів означає додаткову можливість знайти ще один розв'язок. Перехід до нової вершини зберігає оптимальне значення цільової функції. Такий випадок прийнято називати альтернативним оптимумом.

Таким чином, альтернативний оптимум виникає у разі наявності нульових оцінок у небазисних векторів.

У разі наявності тільки одного нуля, розв'язок знаходять як опуклу лінійну комбінацію двох оптимальних розв'язків:

$$X_{\max}^{opt} = \lambda X_1^{opt} + (1 - \lambda) X_2^{opt},$$

де $\lambda \in [0, 1]$.

Якщо ж нульових оцінок дві і більше, то використовують також опуклу лінійну комбінацію у вигляді

$$X_{\max}^{opt} = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i^{opt},$$

де $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, k – кількість нульових оцінок небазисних векторів.

Неважко зрозуміти, що в задачах на альтернативний оптимум є можливість залучення в оптимізаційну модель додаткових критеріїв.

Розглянемо задачу на альтернативний оптимум.

Приклад

Задачу лінійної оптимізації розв'язати симплекс-методом. Навести альтернативний графічний розв'язок. Геометрично проінтерпретувати симплексний розрахунок та вказати, як графічно має прояв альтернативний оптимум задачі.

$$\begin{aligned} W_I &= 4x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \\ \Omega_I : &\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 57, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 4x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_4 = 57, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_5 = 15, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 3, 57, 15]$. Складаємо першу симплексну таблицю (табл. 2.41).

Таблиця 2.41

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	7	0	0	0		Вершина
a_3	0	3	-2	1	1	0	0	3	
a_4	0	57	4	7	0	1	0	57/7	X_0
a_5	0	15	3	-4	0	0	1		
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-4	-7	0	0	0		

Серед оцінок вільних змінних є від'ємні. План $X_0 = [0, 0, 3, 57, 15]$ не оптимальний. Серед від'ємних оцінок знаходимо найменшу. Визначено напрямний стовпчик a_2 .

$$\min \{-4, -7\} = -7 \rightarrow a_2.$$

Для встановлення напрямного рядка обчислюємо симплексне відношення та обираємо найменше серед них. Враховуючи це, напрямним рядком буде a_3 :

$$\min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{57}{7} \right\} = 3 \rightarrow a_3.$$

Для розв'язувального елемента a_{12} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_3, a_4, a_5\}$ замість a_3 входить a_2 . Новий план (вершина Ω_I) має опис у табл. 2.42.

Таблиця 2.42

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	7	0	0	0		Вершина
a_2	7	3	-2	1	1	0	0		
a_4	0	36	18	0	-7	1	0		X_1
a_5	0	27	-5	0	4	0	1		
Δ_j	$W_1(X_1) = 21$		-18	0	7	0	0		

В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка $\Delta_2 = -18$. Поточний розв'язок $X_1 = [0, 3, 0, 36, 27]$ можливо покращити – значення $W_1(X_1) = 21$ збільшити. Розв'язувальний елемент табл. 2.42 є $a_{12} = 18$. Складаємо симплексну таблицю наступного кроку (табл. 2.43).

Таблиця 2.43

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	7	0	0	0		Вершина
a_2	7	7	0	1	2/9	1/9	0	63/2	
a_1	4	2	1	0	-7/18	1/18	0		X_{opt}
a_5	0	37	0	0	37/18	5/18	1	18	
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 57$		0	0	0	1	0		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Знайдено оптимальний план і найбільше значення цільової функції:

$$X_{opt1} = [2, 7, 0, 0, 37], \quad W_1(X_{opt1}) = 57.$$

Звертаємо увагу, що для небазисного вектора a_3 оцінка рівна нулю. Це є ознакою альтернативного оптимуму – існування принаймні ще одного оптимального розв'язку. Знайдемо його, ввівши в базис a_3 замість a_5 (табл. 2.44).

Таблиця 2.44

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_j\}$	
Базис	C	B	4	7	0	0	0		Вершина
a_2	7	3	0	1	0	3/37	- 4/37		
a_1	4	9	1	0	0	4/37	7/37		X_{opt}
a_3	0	18	0	0	1	5/37	18/37		
Δ_j	$W_I(X_{opt}) = 57$		0	0	0	1	0		

Отримано ще один оптимальний розв'язок:

$$X_{opt2} = [9, 3, 18, 0, 0], \quad W_I(X_{opt2}) = 57.$$

Загальний розв'язок (альтернативний оптимум)

$$X_{opt} = \lambda X_{opt1} + (1 - \lambda) X_{opt2} = [9 - 7\lambda, 3 + 4\lambda], \quad \lambda \in [0, 1].$$

У разі надання λ значень з відрізка $[0, 1]$, будемо отримувати різні альтернативні розв'язки.

Впродовж аналізу задачі наведемо її графічний розв'язок. Складаємо рівняння граничних прямих

$$\omega_1 : -2x_1 + x_2 = 3, \quad \omega_2 : 4x_1 + 7x_2 = 57, \quad \omega_3 : 3x_1 - 4x_2 = 15,$$

$$\omega_4 : x_1 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подаються відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 2.41).

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [4, 7]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо дві точки максимуму – X_{opt1} та X_{opt2} . Лінія рівня проходить через сторону поліедра, що і є проявом випадку альтернативного оптимуму. Опукла комбінація

$X_{opt} = \lambda X_{opt1} + (1-\lambda)X_{opt2}$ має опис сторони поліедра від точки X_{opt1} до X_{opt2} . Всі точки сторони є оптимальними.

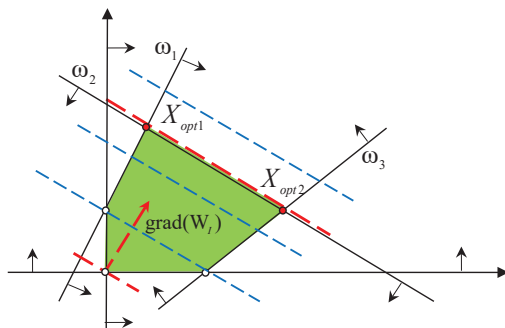


Рис. 2.41. Графічний метод розв'язку.
Випадок альтернативного оптимуму

2.5 Приклад відсутності оптимального розв'язку – необмежена цільова функція

У розділі 1.5 було розглянуто приклад графічного аналізу випадку необмеженості цільової функції. Доцільно проаналізувати цю ситуацію у симплекс-таблицях, які вже не графічно, а з точки зору числового опису інтерпретують відсутність оптимального розв'язку.

Приклад

Задачу лінійної оптимізації розв'язати симплекс-методом. Навести альтернативний графічний розв'язок. Геометрично проінтерпретувати симплексний розрахунок та вказати, як графічно має прояв необмеженість цільової функції задачі ЛО.

$$W_I = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + x_3 = 21, \\ -5x_1 + 3x_2 + x_4 = 27, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 6, \\ x_1 \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 21, 27, 6]$. Складаємо першу симплексну таблицю (табл. 2.51).

Таблиця 2.51

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	5	0	0	0		Вершина
a_3	0	21	-7	3	1	0	0	7	
a_4	0	27	-5	3	0	1	0	9	X_0
a_5	0	6	1	-2	0	0	1		
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-2	-5	0	0	0		

Серед оцінок вільних змінних є від'ємна. План $X_0 = [0, 0, 21, 27, 6]$ не оптимальний. Серед від'ємних оцінок знаходимо найменшу. Визначено напрямний стовпчик a_2 :

$$\min \{-2, -5\} = -5 \rightarrow a_2.$$

Для встановлення прямого рядка обчислюємо симплексне відношення та обираємо найменше серед них.

Враховуючи це, напрямним рядком буде a_3 :

$$\min \left\{ \frac{21}{3}, \frac{27}{3} \right\} = 7 \rightarrow a_3.$$

Для розв'язувального елемента a_{12} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_3, a_4, a_5\}$ замість a_3 входить a_2 . Новий план має опис у табл. 2.52.

Таблиця 2.52

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	5	0	0	0		Вершина
a_2	5	7	-7/3	1	1/3	0	0		X_1
a_4	0	6	2	0	-1	1	0	3	
a_5	0	20	-11/3	0	2/3	0	1		
Δ_j	$W_1(X_1) = 35$		-41/3	0	5/3	0	0		

В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка $\Delta_1 = -\frac{41}{3}$. Поточний розв'язок $X_1 = [0, 7, 0, 6, 20]$ можливо покращити (значення $W_1(X_1) = 35$ збільшити). Розв'язувальний елемент табл. 2.42 є $a_{12} = 2$. Складаємо симплексну таблицю наступного кроку (табл. 2.53).

Таблиця 2.53

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	5	0	0	0		Вершина
a_2	5	14	0	1	-5/6	7/6	0		X_2
a_1	2	3	1	0	-1/2	1/2	0		
a_5	0	31	0	0	-7/6	11/6	1		
Δ_j	$W_1(X_2) = 76$		0	0	-5	41/6	0		

В індексному рядку одна від'ємна оцінка $\Delta_3 = -5$. Компоненти прямого стовпчика a_3 , які відповідають йому,

не містять додатних значень – усі значення від’ємні. Ця ситуація вказує на необмеженість цільової функції $W_I \rightarrow \infty$, інакше, відсутність розв’язку.

Для графічної інтерпретації випадку необмеженості наведемо графічний розв’язок задачі.

Складаємо рівняння граничних прямих:

$$\omega_1 : -7x_1 + 3x_2 = 21, \quad \omega_2 : -5x_1 + 3x_2 = 27, \quad \omega_3 : x_1 - 2x_2 = 6,$$

$$\omega_4 : x_1 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подаються відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 2.51).

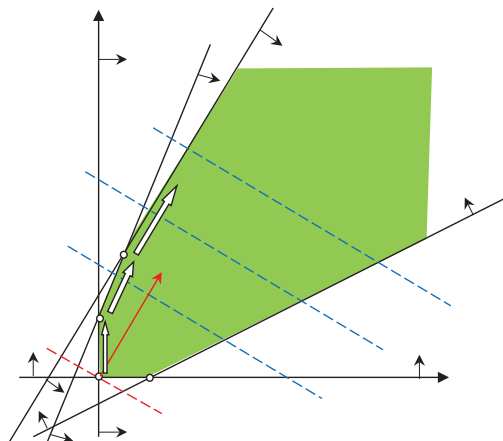


Рис. 2.51. Графічна інтерпретація симплекс-методу.
Випадок необмеженої цільової функції

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [2, 5]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку

градієнта, спостерігаємо необмежене зростання значень цільової функції.

2.6 Двоїстий симплекс-метод

Для початку розв'язку задач лінійної оптимізації звичайним симплекс-методом необхідно знайти початковий опорний план

$$X_0 = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-m}, b_{n-m+1}^{(m)}, b_{n-m+2}^{(m)}, \dots, b_n^{(m)}],$$

де $b_{n-m+1}^{(m)} \geq 0, b_{n-m+2}^{(m)} \geq 0, \dots, b_n^{(m)} \geq 0$ – праві частини системи обмежень після m -кратного перетворення методом Жордано-Гаусса.

Раніше було зауважено, що пошук X_0 може бути не менш трудомістким, ніж безпосередній розв'язок задачі симплекс-методом. З огляду на це, доцільно мати методику розрахунків, яка була б нечутливою до обов'язкової вимоги припустимості плану. Така методика є, і її прийнято називати двоїстим симплекс-методом. Двоїстого симплекс-методу дотримуються до тих пір, поки симплексні перетворення не отримують припустимий початковий план. Усі подальші обчислення виконують за законами звичайного симплекс-методу. Головна ідея алгоритму двоїстого симплекс-методу полягає у покроковій зміні знака «мінус» на знак «плюс» компонентів стовпчика B . Розглянемо модельні приклади, які підпадають під цей випадок.

Приклад № 1

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

$$W_I = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 \leq -2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = -2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, -2, 2] \notin \Omega_I$ не є припустимим. Складаємо першу симплексну таблицю 2.61.

Таблиця 2.61

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
Базис	C	B	1	-1	-1	1	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_5	0	-2	2	0	-1	1	1	0		
a_6	0	2	5	-2	5	-3	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-1	1	1	-1	0	0		

Алгоритм двоїстого симплекс-методу вимагає на кожному кроці зміни від'ємного знака правих частин на додатний. Для цього необхідно знайти у відповідному рядку від'ємні значення. У табл. 2.61 напрямним рядком буде рядок базисного вектора a_5 . Він містить від'ємне значення $b_1 = -2$. У цьому

рядку знаходимо від'ємні значення коефіцієнтів системи обмежень. Таке значення єдине $a_{13} = -1$. У разі відсутності від'ємних значень робиться висновок: задача не має розв'язків. Фактично у двоїстому симплекс-методі значення індексного рядка не враховують.

Для розв'язувального елемента a_{13} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_5, a_6\}$ замість вектора a_5 входить вектор a_3 (табл. 2.62).

Таблиця 2.62

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
Базис	C	B	1	-1	-1	1	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	-1	2	-2	0	1	-1	-1	0		
a_6	0	-8	15	-2	0	2	5	1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = -2$		1	1	0	0	1	0		

Процедура двоїстого симплекс-методу не отримала припустимий план. Стовпчик B містить поки що від'ємне значення. Розв'язувальний елемент табл. 2.62 є $a_{22} = -2$. Складемо наступну симплексну таблицю 2.63.

Таблиця 2.63

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
Базис	C	B	1	-1	-1	1	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	-1	2	-2	0	1	-1	-1	0		
a_2	-1	4	-15/2	1	0	-1	-5/2	-1/2		X_2
Δ_j	$W_1(X_2) = -6$		17/2	0	0	1	7/2	1/2		

Двічі виконаний алгоритм двоїстого симплекс-методу дозволив отримати припустимий план $X_2 = [0, 4, 2, 0]$. Подальший аналіз оптимальності проводимо за алгоритмом звичайного симплекс-методу.

Всі оцінки індексного рядка невід'ємні. Для задачі на максимум це є ознакою оптимальності. План $X_2 = [0, 4, 2, 0]$ є оптимальним.

Приклад № 2

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом:

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \min \\ \Omega_I : &\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 7, \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 \leq -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Для початку розв'язку зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \min \\ \Omega_I : &\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 + x_6 = -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Маємо первісний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 6, -7] \notin \Omega_I$, який не є припустимим. Складаємо першу симплексну таблицю та дотримуємось алгоритму двоїстого симплекс-методу. Повний розрахунок міститься в табл. 2.64.

В останній симплекс-таблиці виконана припустимість плану $X_2 = [0, 5, 0, 6] \in \Omega_I$. Всі оцінки індексного рядка не додатні. Для задачі лінійної оптимізації на мінімум це означає оптимальність плану $X_{\min}^{opt} = [0, 5, 0, 6]$, $W_I(X_{\min}^{opt}) = 28$.

Таблиця 2.64

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_5	0	7	1	-1	2	2	1	0		
a_6	0	-6	5	0	3	-1	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0)=0$		-2	-2	-2	-3	0	0		
a_5	0	-5	11	-1	8	0	1	2		
a_4	3	6	-5	0	-3	1	0	-1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1)=18$		-17	-2	-11	0	0	-3		
a_2	2	5	-11	1	-8	0	-1	-2		
a_4	3	6	-5	0	-3	1	0	-1		X_2
Δ_j	$W_1(X_2)=28$		-39	0	-27	0	-2	-7		

Приклад № 3

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом:

$$\begin{aligned}
 W_I &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min \\
 \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 \leq -3, \\ 6x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 5x_4 \leq -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Підготуємо систему обмежень для початку розв'язку зведенням задачі до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned}
 W_I &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min \\
 \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -3, \\ 6x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 5x_4 + x_6 = -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases}
 \end{aligned}$$

План $X_0 = [0, 0, 0, 0, -3, -4] \notin \Omega_I$ неприпустимий. Необхідно дотримуватись алгоритму двоїстого симплекс-методу. Повний розрахунок міститься в табл. 2.65.

Таблиця 2.65

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
Базис	C	B	3	2	-1	3	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_5	0	-3	2	6	1	-1	1	0		
a_6	0	-4	6	-6	-6	5	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-3	-2	1	-3	0	0		
a_4	3	3	-2	-6	-1	1	-1	0		
a_6	0	-19	16	24	-1	0	5	1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 9$		-9	-20	-2	0	-3	0		
a_4	3	22	-18	-30	0	1	-6	-1		
a_3	-1	19	-16	-24	1	0	-5	-1		X_2
Δ_j	$W_1(X_2) = 47$		-41	-68	0	0	-13	-2		

В останній симплекс-таблиці виконана припустимість плану $X_2 = [0, 0, 19, 22] \in \Omega_I$. Всі оцінки індексного рядка не додатні. Для задачі лінійної оптимізації на мінімум це означає оптимальність плану $X_{\min}^{opt} = [0, 0, 19, 22]$, $W_1(X_{\min}^{opt}) = 47$.

Приклад № 4

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом і графічно. Навести геометричну інтерпретацію ітерацій симплекс-методу:

$$\begin{aligned}
 W_I &= x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{opt}(\max, \min) \\
 \Omega_I &: \begin{cases} -x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 7x_1 - 3x_2 \leq 40, \\ -5x_1 - 7x_2 \leq -56, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок. Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{opt}(\max, \min)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 = 40, \\ 7x_1 - 3x_2 + x_4 = 40, \\ -5x_1 - 7x_2 + x_5 = -56, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5. \end{cases}$$

План $X_0 = [0, 0, 40, 40, -56] \notin \Omega_I$ неприпустимий. Дотримуємось алгоритму двоїстого симплекс-методу. Стартовий розрахунок міститься в табл. 2.66.

Таблиця 2.66

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	1	4	0	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	0	40	-1	5	1	0	0		
a_4	0	40	7	-3	0	1	0		
a_5	0	-56	-5	-7	0	0	1		X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-1	-4	0	0	0		
a_3	0	0	-32/7	0	1	0	5/7		
a_4	0	64	64/7	0	0	1	-3/7		
a_2	4	8	5/7	1	0	0	-1/7		X_1
Δ_j	$W_I(X_1) = 32$		13/7	0	0	0	-4/7		

В останній симплекс-таблиці двоїстого симплекс-методу отриманий припустимий плану $X_1 = [0, 8, 0, 64, 0] \in \Omega_I$. Продовжимо розрахунок на пошук максимуму цільової функції. За відповідним алгоритмом звичайного симплекс-методу маємо табл. 2.67.

В останній симплекс-таблиці (табл. 2.67) всі оцінки індексного рядка невід'ємні. Для задачі лінійної оптимізації на максимум це означає оптимальність плану $X_{\max}^{\text{opt}} = [10, 10]$, $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 50$.

Таблиця 2.67

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	1	4	0	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	0	0	-32/7	0	1	0	5/7	0	
a_4	0	64	64/7	0	0	1	-3/7		
a_2	4	8	5/7	1	0	0	-1/7		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 32$		13/7	0	0	0	-4/7		
a_5	0	0	-32/5	0	7/5	0	1		
a_4	0	64	32/5	0	3/5	1	0	10	
a_2	4	8	-1/5	1	1/5	0	0		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 32$		-9/5	0	4/5	0	0		
a_5	0	64	0	0	2	1	1		
a_1	1	10	1	0	3/32	5/32	0		
a_2	4	10	0	1	7/32	1/32	0		X_{max}
Δ_j	$W_1(X_{max}) = 50$		0	0	31/32	9/32	0		

Далі продовжимо розрахунки на пошук мінімуму цільової функції. За відповідним алгоритмом звичайного симплекс-методу маємо табл. 2.68.

Таблиця 2.68

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	1	4	0	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	0	0	-32/7	0	1	0	5/7		
a_4	0	64	64/7	0	0	1	-3/7	7	
a_2	4	8	5/7	1	0	0	-1/7	56/5	X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 32$		13/7	0	0	0	-4/7		
a_5	0	32	0	0	1	1/2	1/2		
a_1	1	7	1	0	0	7/64	-3/64		
a_2	4	3	0	1	0	-5/64	-7/64		X_{min}
Δ_j	$W_1(X_{min}) = 19$		0	0	0	-13/64	-31/64		

В останній симплекс-таблиці всі оцінки індексного рядка не додатні. Для задачі лінійної оптимізації на

мінімум це означає оптимальність плану $X_{\min}^{opt} = [7, 3, 0, 0, 32]$, $W_I(X_{\min}^{opt}) = 19$.

Розрахунки двоїтим симплекс-методом завершені. Вихідна задача є двовимірною і може бути розв'язана графічно.

Складаємо рівняння меж (граничних прямих):

$$\omega_1 : -x_1 + 5x_2 = 40 \Leftrightarrow \frac{x_1}{-40} + \frac{x_2}{8} = 1,$$

$$\omega_2 : 7x_1 - 3x_2 = 40, \quad \omega_3 : 5x_1 + 7x_2 = 56, \quad \omega_4 : x_1 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подані відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 2.61).

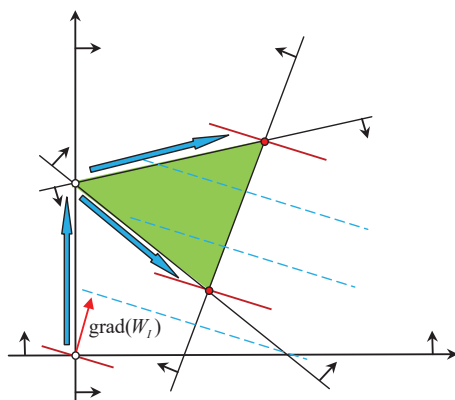


Рис. 2.61. Графічний метод розв'язку

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [1, 4]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{opt}$ – вершина виходу ліній рівня. У протилежному напрямку знаходимо вершину входу $X_{\min}^{opt}$ – точку мінімуму.

Координати екстремальних вершин визначаються як координати точок перетину відповідних граничних прямих:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 5x_2 = 40 \\ 7x_1 - 3x_2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 10 \end{cases},$$

$$X_{\min}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 = 40 \\ 5x_1 + 7x_2 = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

На рис. 2.61 наведено графічну інтерпретацію симплексного розв'язку як послідовного переходу від початкової вершини X_0 до екстремальної. Шлях до максимуму – $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_{\max}^{\text{opt}}$, для мінімуму – $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_{\min}^{\text{opt}}$. Символічне зображення цих шляхів наведено стрілочками (рис. 2.61).

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [10, 10]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 50$. Вершиною мінімуму є $X_{\min}^{\text{opt}} = [7, 3]$ зі значенням цільової функції $W_I(X_{\min}^{\text{opt}}) = 19$.

2.7 Метод штучного базису

Методом штучного базису є числовий алгоритм, націлений на знаходження припустимого опорного плану X_0 з виходом на подальший розрахунок звичайним симплекс-методом.

Метод штучного базису доцільно використовувати у разі трудомісткого процесу вилучення первісного опорного плану X_0 оптимізаційної задачі.

Одиничні базисні вектори $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m]$ об'єднуються в одиничну матрицю $E_m = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m]$. Подальший розв'язок задачі ЛО полягає у складанні та розв'язку допоміжної оптимізаційної задачі вигляду:

$$\begin{aligned} W_I^{\text{доп}} &= \sum_{i=1}^m u_i \rightarrow \min \\ \Omega_I : AX + E_m U &= B, \\ X \geq 0, U &\geq 0, \end{aligned} \quad (**)$$

де $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ – матриця коефіцієнтів системи обмежень;
 $E_m = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m]$ – одинична матриця штучних змінних U ;
 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – матриця-стовпчик основних змінних;
 $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ – матриця-стовпчик штучних змінних.

Цільова функція допоміжної задачі є сумою введених штучних змінних. Система обмежень допоміжної задачі, на відміну від вихідної, містить у кожному рівнянні штучну змінну. Наявність оптимального плану в результаті симплексного розрахунку допоміжної задачі дозволяє отримати первісний опорний план для вихідної задачі. Отриманий розв'язок допоміжної задачі (**) використовують як припустимий план для початку розв'язку вихідної задачі (*) звичайним симплекс-методом. А у разі відсутності розв'язку допоміжної задачі дозволяє стверджувати – вихідна задача не має оптимального плану.

Для отримання досвіду в складанні допоміжної задачі методу штучного базису наведемо декілька прикладів.

Приклад №1

Скласти допоміжну оптимізаційну задачу методу штучного базису до вихідної задачі ЛО:

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

До кожного рівняння додаємо штучну змінну та складемо допоміжну задачу:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min \\ \Omega_I : &\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 + u_1 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + x_4 + u_2 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Приклад №2

Скласти допоміжну оптимізаційну задачу методу штучного базису до вихідної задачі ЛО:

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 8x_4 - 2x_5 \rightarrow \min \\ \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 5, \\ x_1 - 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 - 3x_5 \geq -3, \\ x_1 - 5x_2 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

До лівої частини першої нерівності додаємо балансову змінну $x_6 \geq 0$. У другій нерівності змінюємо знак на $\leq$ множенням на (-1) . Потім до лівої частини нерівності додаємо балансову змінну $x_7 \geq 0$, здійснюючи перехід від нерівності до рівняння. У рівнянні додаємо вже штучну змінну $u_1 \geq 0$. Допоміжна задача для вилучення початкового опорного плану має вигляд

$$\begin{aligned} W_I^{\text{don}} &= u_1 \rightarrow \min \\ \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 + 3x_5 + x_7 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + x_4 - 2x_5 + u_1 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 7, \quad u_1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Наведемо приклади повного розв'язку оптимізаційної задачі, де дослідження на наявність первісного опорного плану виконується методом штучного базису.

Приклад № 3

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

$$\begin{aligned} \Omega_I : &\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -4, \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Застосуємо методику штучного базису для отримання відповіді на запитання задачі. Змінюємо знаки рівнянь з метою переходу до невід'ємних значень у правих частинах. До лівих

частин додаємо штучні змінні. Допоміжна задача методики штучного базису приймає вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min \\ \Omega_I : \begin{cases} -3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 6x_4 + u_1 = 4, \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + u_2 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 4, 4] \in \Omega_I$ є припустимим. Складаємо першу і наступні симплексні таблиці. Алгоритм розрахунку виконано звичайним симплекс-методом. Відповідні ітерації наведені в табл. 2.71.

Таблиця 2.71

			a_1	a_2	a_3	a_4	u_1	u_2		
Базис	C	B	0	0	0	0	1	1	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
u_1	1	4	-3	-9	-2	6	1	0		
u_2	1	4	-4	-2	6	0	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 8$		-7	-11	4	6	0	0		
a_4	0	2/3	- 1/2	- 3/2	- 1/3	1	1/6	0		
u_2	1	4	-4	-2	6	0	0	1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 4$		-4	-2	6	0	-1	0		
a_4	0	8/9	- 13/18	- 29/18	0	1	1/6	1/18		
a_3	0	2/3	- 2/3	- 1/3	1	0	0	1/6		X_2
Δ_j	$W_1(X_2) = 0$		0	0	0	0	-1	-1		

Останній крок симплексного обчислення вказує на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то можна стверджувати, що вихідна система сумісна та невизначена в області невід'ємних значень змінних величин.

Один з безлічі розв'язків зчитуємо з останньої симплекс-таблиці $X_0 = \left[0, 0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9} \right] \in \Omega_I$.

Приклад №4

Розв'язати задачу лінійної оптимізації:

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 - 8x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 + x_5 = -9, \\ 8x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases} \end{aligned} \quad (***)$$

Розв'язок.

З метою переходу до невід'ємних значень у правих частинах, змінюємо знаки рівнянь на протилежні. Додаємо штучні змінні до лівих частин рівнянь системи. Допоміжна задача методу штучного базису має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min \\ \Omega_I : &\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x_5 + u_1 = 9, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 + u_2 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 9, 7] \in \Omega_I$ є припустимим. Виконуємо розрахунки допоміжної задачі звичайним симплекс-методом (табл. 2.72).

Кінцеві обчислення табл. 2.72 вказують на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то допоміжна

задача розв'язана. Отримано припустимий опорний план для вихідної задачі $X_0 = \left[0, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{8}, 0 \right] \in \Omega_I$.

Таблиця 2.72

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	u_1	u_2		
Базис	C	B	0	0	0	0	0	1	1	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
u_1	1	9	-5	6	4	0	-1	1	0	3/2	
u_2	1	7	-8	3	1	4	-4	0	1	7/3	X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 16$		-13	9	5	4	-5	0	0		
a_2	0	3/2	- 5/6	1	2/3	0	- 1/6	1/6	0		
u_2	1	5/2	- 11/2	0	-1	4	- 7/2	- 1/2	1		X_1
Δ_j	$W_I(X_1) = 5/2$		-11/2	0	-1	4	- 7/2	- 3/2	0		
a_2	0	3/2	- 5/6	1	2/3	0	- 1/6	1/6	0		
a_4	0	5/8	- 11/8	0	- 1/4	1	- 7/8	- 1/8	1/4		X_2
Δ_j	$W_I(X_2) = 0$		0	0	0	0	0	-1	-1		

План X_0 дозволяє провести симплекс-розв'язок вихідної задачі (***).

Всі обчислення розміщені в табл. 2.73.

Таблиця 2.73

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	2	-8	1	-6	1	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_2	-8	3/2	- 5/6	1	2/3	0	- 7/8	9/4	
a_4	-6	5/8	- 11/8	0	- 1/4	1	- 7/8		X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = -63/4$		155/12	0	- 29/6	0	45/4		
a_3	1	9/4	- 5/4	3/2	1	0	- 21/16		
a_4	-6	19/16	- 27/16	3/8	0	1	- 77/64		X_1
Δ_j	$W_I(X_1) = -39/8$		55/8	29/4	0	0	157/32		

Перевірка плану $X_0 = \left[0, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{8}, 0\right] \in \Omega_I$ на оптимальність не дає позитивних результатів. В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка $\Delta_3 = -\frac{29}{6}$. Наступна ітерація замінює у базисі a_2 на a_3 . Здійснюється перехід у сусідню вершину Ω_I . Вершина $X_1 = \left[0, 0, \frac{9}{4}, \frac{19}{16}, 0\right]$ є оптимальною для нашої задачі на максимум. Цільова функція набуває максимального значення $W_I^{\max} = -\frac{39}{8}$.

2.8 Типові завдання № 2

Типові завдання № 2 містять три типи задач з розділу лінійної оптимізації. Перший тип завдань присвячений звичайному симплекс-методу. Для розв'язання цих задач необхідно реалізувати табличний розрахунок, дотримуючись алгоритму симплекс-методу.

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	5	4	0	0		Вершина
a_1	5	12	1	1/3	1/3	0	36	
a_4	0	10	0	5/3	- 1/3	1	6	X_1
Δ_j	$W_I(X_1) = 60$	0	- 7/3	5/3	0	0		

Другий тип задач пов'язаний з двоїстістю в задачах лінійної оптимізації. Дотримуючись правил переходу від прямої задачі ЛО до двоїстої, необхідно скласти двоїсту:

$$\begin{aligned}
 W_I &= x_1 + 9x_2 + 5x_3 - 7x_4 - \max, & W_{II} &= -4y_1 + 3y_2 + 2y_3 - \min, \\
 \Omega_I : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \end{cases} & \Rightarrow \Omega_{II} : \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1, \\ -y_1 - y_2 + y_3 = 9, \\ -y_1 + 3y_2 - 2y_3 = 5, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -7, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Третій тип задач типових завдань № 3 пропонує за відомим розв'язком двоїстої задачі знайти розв'язок прямої, використовуючи теорему:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m y_i^{opt} a_{ij} &\geq c_{ij}, & j &= 1, \dots, l, \\
 \sum_{i=1}^m y_i^{opt} a_{ij} &= c_j, & j &= l+1, \dots, n, \\
 x_j^{opt} \left(\sum_{i=1}^m y_i^{opt} a_{ij} - c_j \right) &= 0, & j &= 1, \dots, l, \\
 y_j^{opt} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j^{opt} - b_i \right) &= 0, & j &= 1, 2, \dots, k.
 \end{aligned}$$

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 1

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1 $W_I = 5x_1 + 4x_2 - \max,$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 36, \\ x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2 $W_I = x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 5x_4 \leq 2 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3 $W_I = 4x_1 + 7x_2 - \max$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 57 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

1.4 $W_I = 6x_1 - 4x_2 + x_5 - 14 - \max$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -49 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -4x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$\begin{aligned} & W_I = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 - \min \\ \Omega_I : & \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_3. \end{cases} \end{aligned}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$\begin{aligned} & W_{II} = 30y_1 + 33y_2 + 12y_3 - \text{opt}(\min) \\ \Omega_{II} : & \begin{cases} 8y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \\ -5y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -8 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 117, Y_{\min} = Y\left(\frac{2}{7}, \frac{23}{7}, 0\right) \end{aligned}$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 2

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1 $W_I = 5x_1 + 2x_2 - \max,$

$$\Omega_I : \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \leq 84, \\ 2x_1 + 15x_2 \leq 135, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \leq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 7 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3 $W_I = x_1 + x_2 - \max$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 8x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 28 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 13x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -70 \\ -9x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_4 = 40 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - \min \\ \Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 5x_5 \leq 7, \\ -5x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 \leq 5, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 9, \\ 0 \leq x_4, \end{cases} \end{aligned}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 36y_1 + 222y_2 + 18y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} 7y_1 - 11y_2 - 2y_3 \leq -2 \\ -6y_1 - 12y_2 + 9y_3 \leq -8 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 116, Y_{\min} = Y\left(\frac{32}{75}, \frac{34}{75}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3
Розділ «Лінійна оптимізація»
Звичайний симплекс-метод.

ВАРІАНТ №3

Пари спряжених задач – двоїстість.
Теорема за доповнюючу нежорсткість

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 3x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 - x_2 \leq 50, \\ -6x_1 + 13x_2 \leq 117, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 5x_1 + 6x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 57 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

1.4

$$W_I = 7x_1 + x_3 - x_4 + 24 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -50 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -5x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 6 \\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 42y_1 + 203y_2 + 84y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} 8y_1 - 7y_2 - 7y_3 \leq -3 \\ -7y_1 - 11y_2 + 6y_3 \leq -5 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 91, Y_{\min} = Y\left(\frac{2}{137}, \frac{61}{137}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ №4

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 \leq 63, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 6x_4 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 4x_1 + 3x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 38 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 15x_1 - 10x_2 - x_3 + x_5 + 4 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 13x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -26 \\ -11x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - \min$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ -5x_1 - x_2 - 5x_3 \leq 1 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3 \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 6y_1 + 156y_2 + 12y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} y_1 - 7y_2 - y_3 \leq -5 \\ -y_1 - 11y_2 + y_3 \leq -2 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 88, Y_{\min} = Y\left(0, \frac{7}{18}, \frac{41}{18}\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 5

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 3x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \leq 60, \\ x_1 + 3x_2 \leq 33, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 4x_1 + 5x_2 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 52 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

1.4

$$W_I = -17x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 - 70 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 11x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -52 \\ -11x_1 + 4x_2 + x_3 = 28 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 - x_5 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -5x_1 - 5x_2 - 4x_3 - x_4 \leq 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 \leq 4 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3 \end{cases}$$

80 хвилин!



3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 7y_1 + 21y_2 + 22y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} y_1 - 9y_2 - 2y_3 \leq -3 \\ -y_1 - 16y_2 + 9y_3 \leq -9 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 111, Y_{\min} = Y\left(\frac{33}{25}, \frac{12}{25}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ №6

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 5x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 36, \\ x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 \leq 1 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = x_1 + x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -28x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 - 95 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 14x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -50 \\ -10x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ -5x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = -5x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 - x_5 \leq 7 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \\ -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_3 \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 30y_1 + 33y_2 + 12y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} 8y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \\ -5y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -8 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 117, Y_{\min} = Y\left(\frac{2}{7}, \frac{23}{7}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 7

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \leq 110, \\ -x_1 + 8x_2 \leq 72, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 5 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 5x_1 + 6x_2 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 57 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 5x_1 + x_2 - x_4 + 10 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 10x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = -26 \\ -9x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 5 \\ -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7 \\ 0 \leq x_1 \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 36y_1 + 222y_2 + 18y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} 7y_1 - 11y_2 - 2y_3 \leq -2 \\ -6y_1 - 12y_2 + 9y_3 \leq -8 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 116, Y_{\min} = Y\left(\frac{32}{75}, \frac{34}{75}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 8

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 3x_1 + 3x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \leq 60, \\ 4x_1 + 15x_2 \leq 150, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 \leq 1 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = x_1 + x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -11x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 15 \\ 3x_1 - 7x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

1.4

$$W_I = -18x_1 + 12x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - 82 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 13x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -62 \\ -9x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_4 = 36 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 - \min$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -5x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 \leq 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \\ 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 6y_1 + 156y_2 + 12y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} y_1 - 7y_2 - y_3 \leq -5 \\ -y_1 - 11y_2 + y_3 \leq -2 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 88, Y_{\min} = Y\left(0, \frac{7}{18}, \frac{41}{18}\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ №9

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \leq 54, \\ 5x_1 + 14x_2 \leq 154, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 5 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 13x_1 + 6x_2 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 3 \\ 13x_1 + 6x_2 \leq 129 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 3x_1 - 2x_2 + x_5 - 5 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 13x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -61 \\ -9x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_4 = 36 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 - x_5 - \min$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 \leq 2 \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 7y_1 + 212y_2 + 22y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} y_1 - 9y_2 - 2y_3 \leq -3 \\ -y_1 - 16y_2 + 9y_3 \leq -9 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 111, Y_{\min} = Y\left(\frac{33}{25}, \frac{12}{25}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 10

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 4x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 14x_1 - x_2 \leq 154, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 44, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq 2 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 7x_1 + 6x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 68 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 11x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -25 \\ -9x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = 4x_1 - 4x_2 - x_3 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 \leq 2 \\ -5x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 4 \\ 0 \leq x_5 \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 21y_1 + 89y_2 + 30y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} 4y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -4 \\ -3y_1 - 7y_2 + 7y_3 \leq -7 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 89, Y_{\min} = Y(0, 1, 0)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 11

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 13x_1 + 5x_2 \leq 143, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 7 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 5x_1 + 6x_2 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 52 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 9x_1 + 2x_2 - x_3 + 14 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -34 \\ -7x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 - x_5 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_3, 0 \leq x_5. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 5y_1 + 186y_2 + 30y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} y_1 - 7y_2 - 3y_3 \leq -4 \\ -y_1 - 10y_2 + 4y_3 \leq -6 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 110, Y_{\min} = Y\left(\frac{2}{17}, \frac{10}{17}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 12

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 5x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 14x_1 + 5x_2 \leq 168, \\ -3x_1 + 7x_2 \leq 77, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 7 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 7x_1 + 5x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -8x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 71 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

1.4

$$W_I = 15x_1 - 9x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + 16 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 7x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -34 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 - \min$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4, \\ -5x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 9, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 0 \leq x_4, 0 \leq x_5. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 35y_1 + 242y_2 + 22y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} 7y_1 - 12y_2 - 2y_3 \leq -3 \\ -5y_1 - 13y_2 + 7y_3 \leq -2 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 58, Y_{\min} = Y\left(0, \frac{5}{22}, \frac{3}{22}\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 13

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 13x_1 - x_2 \leq 143, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 27, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 7 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = x_1 + 2x_2 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 10x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + 18 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 11x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = -54 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ -4x_1 + 3x_2 + x_4 = 30 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = -5x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 2, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 5y_1 + 31y_2 + 33y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} y_1 - y_2 - 3y_3 \leq -1 \\ -y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -6 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 79, Y_{\min} = Y\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 14

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 3x_2 - \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \leq 45, \\ 5x_1 + 12x_2 \leq 120, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$\begin{aligned} W_I &= 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - \text{opt}(\min, \max) \\ \Omega_I : \begin{cases} x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 \leq 5 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned} W_I &= 11x_1 + 10x_2 - \max \\ \Omega_I : \begin{cases} -13x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 11x_1 + 10x_2 \leq 172 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.4

$$\begin{aligned} W_I &= -6x_1 + 14x_2 + 2x_3 - x_5 - 13 - \max \\ \Omega_I : \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -35 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - \min \\ \Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 5x_5 \leq 7, \\ -5x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 \leq 5, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 9, \\ 0 \leq x_2, 0 \leq x_4. \end{cases} \end{aligned}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$\begin{aligned} W_{II} &= 28y_1 + 50y_2 + 54y_3 - \text{opt}(\min) \\ \Omega_{II} : \begin{cases} 7y_1 - 2y_2 - 6y_3 \leq -3 \\ -4y_1 - 3y_2 + 7y_3 \leq -4 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} & \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 72, Y_{\min} = Y\left(0, \frac{45}{32}, \frac{1}{32}\right) \\ & W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ? \end{aligned}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРИАНТ № 15

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$\begin{aligned} W_I &= 4x_1 + 4x_2 - \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} 9x_1 - 4x_2 \leq 99, \\ 2x_1 + 15x_2 \leq 165, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$\begin{aligned} W_I &= x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 - \text{opt}(\min, \max) \\ \Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 5x_4 \leq 2 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

1.3

$$\begin{aligned} W_I &= 4x_1 + 9x_2 - \max \\ \Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 93 \\ 5x_1 - 7x_2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.4

$$\begin{aligned} W_I &= 12x_1 - 11x_2 - x_3 + 2x_5 + 4 - \max \\ \Omega_I : \begin{cases} 11x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -29 \\ -9x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$\begin{aligned} W_I &= -x_1 + 3x_2 - 5x_3 - \max \\ \Omega_I : \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 7, \\ -2x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 2x_5 \leq 6, \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 5, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5. \end{cases} \end{aligned}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$\begin{aligned} W_{II} &= 25y_1 + 59y_2 + 11y_3 - \text{opt}(\min) \\ \Omega_{II} : \begin{cases} 6y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -5 \\ -5y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq -9 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} & \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 124, Y_{\min} = Y\left(\frac{7}{39}, \frac{79}{39}, 0\right) \\ & W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ? \end{aligned}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 16

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 3x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 15x_1 + 4x_2 \leq 150, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 33, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 \leq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 7 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 7x_1 + 11x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -8x_1 + x_2 \leq 1 \\ 7x_1 + 11x_2 \leq 106 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -18x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 - 35 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 11x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -29 \\ -10x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - \min$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \leq 2, \\ 0 \leq x_4, 0 \leq x_5. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 30y_1 + 33y_2 + 12y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} 8y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \\ -5y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -8 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 117, Y_{\min} = Y\left(\frac{2}{7}, \frac{23}{7}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 17

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 5x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 11x_1 - 3x_2 \leq 132, \\ -2x_1 + 15x_2 \leq 135, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 7 \\ 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 13x_1 + 10x_2 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -6x_1 + x_2 \leq 3 \\ 13x_1 + 10x_2 \leq 176 \\ 2x_1 - 7x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

1.4

$$W_I = 3x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 - 23 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -44 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_3 = 21 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = 5x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 - \min$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 + 4x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 2x_5 = 6, \\ -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leq 5 \\ 0 \leq x_2, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 30y_1 + 33y_2 + 12y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} 8y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \\ -5y_1 - 2y_2 + y_3 \leq -8 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 117, Y_{\min} = Y\left(\frac{2}{7}, \frac{23}{7}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 18

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 45, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 \leq 6 \\ 7x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 6x_4 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 5x_1 + 3x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -13x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -17x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 - 26 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -38 \\ -10x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 - x_5 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 \leq 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ 0 \leq x_5. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 36y_1 + 222y_2 + 18y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} 7y_1 - 11y_2 - 2y_3 \leq -2 \\ -6y_1 - 12y_2 + 9y_3 \leq -8 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 116, Y_{\min} = Y\left(\frac{32}{75}, \frac{34}{75}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 19

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 5x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 120, \\ x_1 + 5x_2 \leq 55, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 3 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = x_1 + x_2 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -9x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 6x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 24 - \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 8x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = -30 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -5x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_{II} = 5x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 - \min$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 2, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ 0 \leq x_4. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 6y_1 + 156y_2 + 12y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} y_1 - 7y_2 - y_3 \leq -5 \\ -y_1 - 11y_2 + y_3 \leq -2 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 88, Y_{\min} = Y\left(0, \frac{7}{18}, \frac{41}{18}\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Звичайний симплекс-метод.

Пари спряжених задач – двоїстість.

Теорема за доповнюючу нежорсткість

ВАРІАНТ № 20

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 13x_1 + 2x_2 \leq 117, \\ -4x_1 + 7x_2 \leq 63, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2

$$W_I = x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 + 4x_3 + x_4 \leq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 \leq 6 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4 \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 5x_1 + 12x_2 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 12x_2 \leq 125 \\ 5x_1 - 7x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -8x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 - 47 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 9x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -40 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ -7x_1 + 3x_2 + x_4 = 27 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4, 0 \leq x_5 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = -5x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 = 5, \\ -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, 0 \leq x_4. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 7y_1 + 212y_2 + 22y_3 - \text{opt}(\min)$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} y_1 - 9y_2 - 2y_3 \leq -3 \\ -y_1 - 16y_2 + 9y_3 \leq -9 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 111, Y_{\min} = Y\left(\frac{33}{25}, \frac{12}{25}, 0\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} - ?, X^{\text{opt}} - ?$$



2.9 Модельний розв'язок завдання № 2

Задача № 1.1

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом. Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \leq 110, \\ -x_1 + 8x_2 \leq 72, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. А. Симплексний розв'язок:

Зведемо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 110, \\ -x_1 + 8x_2 + x_4 = 72, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Маємо первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 110, 72] \in \Omega_I$.
Складаємо вихідну симплексну таблицю (табл. 1).

Таблиця 1

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	2	0	0		Вершина
a_3	0	110	10	3	1	0	11	
a_4	0	72	-1	8	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-4	-2	0	0		

В індексному рядку Δ_j є дві від'ємні оцінки. Це означає, що план $X_0 = [0, 0, 110, 72]$ не є оптимальним і його можливо

покращити. Напрямний стовпчик знаходимо за правилом обирання найменшого від'ємного значення оцінок. Це стовпчик a_1 , оскільки $\min\{-4, -2\} = -4 \rightarrow a_1$.

Напрямний рядок встановлюємо за правилом обирання найменшого симплексного відношення для додатних компонент прямого стовпчика.

$$\text{Маємо } \left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \mid a_{i1} > 0, i = 1 \right\} = \min \left\{ \frac{110}{10} \right\} = 11 \rightarrow a_3.$$

Розв'язувальним елементом є $a_{11} = 10$. Для нього виконуємо перетворення Жордано-Гаусса і, дотримуючись викладеного раніше алгоритму, отримаємо (табл. 2).

Таблиця 2

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	2	0	0		Вершина
a_1	4	11	1	3/10	1/10	0	110/3	
a_4	0	83	0	83/10	1/10	1	10	X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 44$		0	- 4/5	2/5	0		

З табл. 2 маємо план $X_1 = [11, 0, 0, 83]$ та $W_1(X_1) = 44$.

В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка. План $X_1 = [11, 0, 0, 83]$ не є оптимальним і його можливо покращити. Напрямний стовпчик a_2 , оскільки тільки він містить від'ємну оцінку $\Delta_2 = -\frac{5}{5}$. Напрямний рядок обираємо з умови найменшого симплексного відношення для додатних компонент прямого стовпчика. Маємо

$$\left\{ \frac{b_i}{a_{i2}} \mid a_{i2} > 0, i = 1, 2 \right\} = \min \left\{ \frac{11}{3}, \frac{83}{83} \right\} = \left\{ \frac{110}{3}, 10 \right\} \rightarrow a_4.$$

У новому базисі замість a_4 буде залучено a_2 . Після відповідних обчислень маємо третю симплексну таблицю (табл. 3).

Таблиця 3

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	2	0	0		Вершина
a_1	4	8	1	0	8/83	- 3/83		
a_2	2	10	0	1	1/83	10/83		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_2) = 52$		0	0	34/83	8/83		

Всі оцінки невід'ємні $\Delta_j \geq 0$. Це означає, що знайдено оптимальний розв'язок:

$$X_{\max}^{\text{opt}} = [8, 10, 0, 0], \quad W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 52.$$

б) Графічний розв'язок:

Складаємо рівняння граничних прямих:

$$\omega_1 : 10x_1 + 3x_2 = 110 \Leftrightarrow \frac{x_1}{11} + \frac{x_2}{\frac{110}{3}} = 1,$$

$$\omega_2 : -x_1 + 8x_2 = 72 \Leftrightarrow \frac{x_1}{-72} + \frac{x_2}{9} = 1,$$

$$\omega_3 : x_1 = 0, \quad \omega_4 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які визначаються відповідними нерівностями системи обмежень. У результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 1).

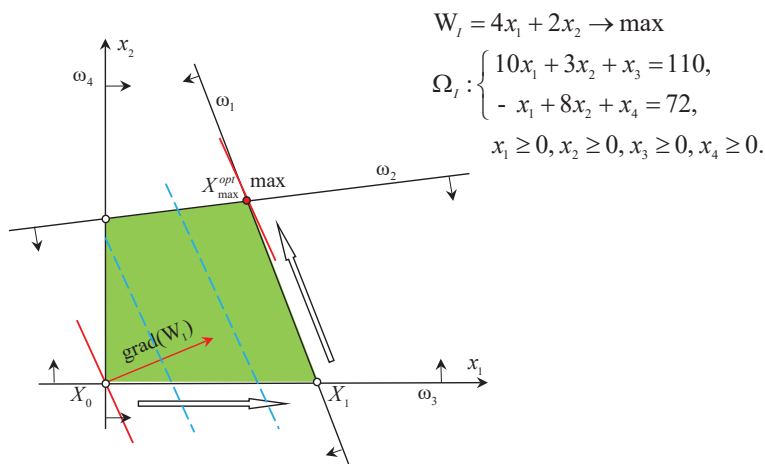


Рис. 1. Графічний метод розв'язку з геометричною інтерпретацією симплексного розрахунку

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [4, 2]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня (рис. 1).

Координати екстремальної вершини визначаються як координати точки перетину відповідних граничних прямих:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 3x_2 = 110 \\ -x_1 + 8x_2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 10 \end{cases}.$$

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [8, 10]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 52$.

Геометрична інтерпретація симплексного обчислення полягає в тому, що перша симплекс-таблиця (табл. 1) відповідає вершині X_0 . Обчислення до другої таблиці (табл. 2)

відповідають переходу у сусідню вершину X_1 . Третя і остання симплекс-таблиця (табл. 3) відповідає переходу від X_1 до $X_{\max}^{\text{opt}}$ (рис. 1).

Задача № 1.2

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 \leq 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зведемо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_6 = 3, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо задачу на мінімум. Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 7, 3] \in \Omega_I$. Складаємо першу симплекс-таблицю (табл. 4).

Таблиця 4

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	Вершина
			2	2	-1	2	0	0		
a_5	0	7	1	6	1	1	1	0	7	
a_6	0	3	1	-1	3	-3	0	1	1	X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-2	-2	1	-2	0	0		

Оскільки задача на мінімум то наявність додатної оцінки означає, що план не є оптимальним. Стовпчик a_3 є напрямним. Для його додатних компонент обчислюємо симплексне відношення

$$\left\{ \frac{b_j}{a_{j3}} \mid a_{j3} > 0, j = 1, 2 \right\} = \min \{7, 1\} \rightarrow a_6.$$

Напрямний рядок a_6 . Виконуємо перерахунок таблиці. Алгоритм обчислення продовжуємо до появи в індексному рядку всіх недодатних оцінок (табл. 5).

Таблиця 5

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	2	-1	2	0	0		Вершина
a_5	0	6	2/3	19/3	0	2	1	-1/3		
a_3	-1	1	1/3	-1/3	1	-1	0	1/3		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = -1$		-7/3	-5/3	0	-1	0	-1/3		

У табл. 5 отримано всі недодатні оцінки, що є ознакою оптимальності задачі на мінімум. Задача на мінімізацію розв'язана:

$$X_{\min}^{opt} = [0, 0, 1, 0], \quad W_1(X_{\min}^{opt}) = -1.$$

У табл. 6 наведено розв'язок задачі на максимум.

Таблиця 6

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	2	-1	2	0	0		Вершина
a_5	0	7	1	6	1	1	1	0	7	
a_6	0	3	1	-1	3	-3	0	1	3	X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-2	-2	1	-2	0	0		

Продовження таблиці 6

a_5	0	4	0	7	-2	4	1	-1	1	
a_1	2	3	1	-1	3	-3	0	1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 6$		0	-4	7	-8	0	2		
a_4	2	1	0	7/4	-1/2	1	1/4	-1/4		
a_1	2	6	1	17/4	3/2	0	3/4	1/4		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 14$		0	10	3	0	2	0		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Отримано оптимальний розв'язок задачі на максимум $X_{\max}^{opt} = [2, 0, 0, 2]$, $W_1(X_{\max}^{opt}) = 14$.

Задача № 1.3

Задачу лінійної оптимізації розв'язати симплекс-методом. Знайти всі розв'язки.

$$\begin{aligned}
 W_I &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 \Omega_I : &\begin{cases} -9x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned}
 W_I &= x_1 + x_2 \rightarrow \max \\
 \Omega_I : &\begin{cases} -9x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_5 = 15, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 3, 13, 15]$. Складаємо першу симплексну таблицю (табл. 7).

Таблиця 7

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	1	1	0	0	0		Вершина
a_3	0	3	-9	1	1	0	0		
a_4	0	13	1	1	0	1	0	13	X_0
a_5	0	15	3	-5	0	0	1	5	
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-1	-1	0	0	0		

Серед оцінок вільних змінних є від'ємні. План $X_0 = [0, 0, 3, 13, 15]$ не оптимальний. Серед від'ємних оцінок знаходимо найменшу. Визначено напрямний стовпчик a_1 : $\Delta_j = \min\{-1, -1\} = -1 \rightarrow a_1$.

Для встановлення прямого рядка обчислюємо симплексне відношення та обираємо найменше серед них. Враховуючи це, напрямним рядком буде a_5 :

$$\min \left\{ \frac{13}{1}, \frac{15}{3} \right\} = 5 \rightarrow a_5.$$

Для розв'язувального елемента a_{31} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_3, a_4, a_5\}$ взамін a_5 буде введено a_1 . Новий план (вершина Ω_1) має опис у табл. 8.

Таблиця 8

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	1	1	0	0	0		Вершина
a_3	0	48	0	-14	1	0	3		
a_4	0	8	0	8/3	0	1	-1/3	3	X_1
a_1	1	5	1	-5/3	0	0	1/3		
Δ_j	$W_1(X_1) = 5$		0	-8/3	0	0	1/3		

В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка $\Delta_2 = -\frac{8}{3}$. Поточний розв'язок $X_1 = [1, 0, 48, 8, 0]$ можна покращити – значення $W_I(X_1) = 5$ збільшити. Розв'язувальний елемент табл. 8 є $a_{22} = \frac{8}{3}$. Складаємо симплексну таблицю наступного кроку (табл. 9).

Таблиця 9

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	1	1	0	0	0		Вершина
a_3	0	90	0	0	1	21/4	5/4	72	
a_2	1	3	0	1	0	3/8	- 1/8		X_{opt1}
a_1	1	10	1	0	0	5/8	1/8	80	
Δ_j	$W_I(X_{opt1}) = 13$		0	0	0	1	0		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Знайдено оптимальний план і найбільше значення цільової функції:

$$X_{opt1} = [10, 3, 0, 0, 90], W_I(X_{opt1}) = 13.$$

Звертаємо увагу, що для небазисного вектора a_5 оцінка рівна нулю. Це є ознакою альтернативного оптимуму – існування принаймні ще одного оптимального розв'язку. Знайдемо його, ввівши в базис a_5 замість a_3 (табл. 10).

Таблиця 10

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	1	1	0	0	0		Вершина
a_5	0	72	0	0	4/5	21/5	1		
a_2	1	12	0	1	1/10	9/10	0		X_{opt2}
a_1	1	1	1	0	- 1/10	1/10	0		
Δ_j	$W_I(X_{opt2}) = 13$		0	0	0	1	0		

Отримано ще один оптимальний розв'язок:

$$X_{opt2} = [1, 12, 0, 0, 72], \quad W_I(X_{opt2}) = 13.$$

Загальний розв'язок (альтернативний оптимум)

$$X_{opt} = \lambda X_{opt1} + (1 - \lambda) X_{opt2} = [10 - 9\lambda, 3 + 9\lambda], \quad \lambda \in [0, 1].$$

У разі надання λ значень з відрізка $[0, 1]$, будемо отримувати різні альтернативні розв'язки.

Впродовж аналізу задачі наведемо її графічний розв'язок.

Складаємо рівняння граничних прямих

$$\omega_1: -9x_1 + x_2 = 3, \quad \omega_2: x_1 + x_2 = 13, \quad \omega_3: 3x_1 - 5x_2 = 15,$$

і встановлюємо півплощини, які подаються відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 2).

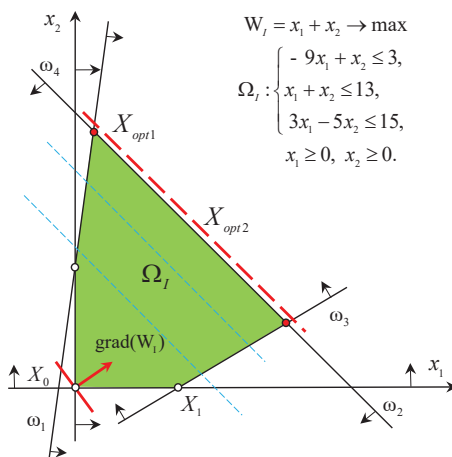


Рис. 2. Графічний метод розв'язку.
Випадок альтернативного оптимуму

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [1, 1]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо дві точки максимуму X_{opt1} та X_{opt2} . Лінія рівня проходить через сторону поліедра, що і є проявом випадку альтернативного оптимуму. Опукла лінійна комбінація $X_{opt} = \lambda X_{opt1} + (1 - \lambda) X_{opt2}$ має числовий опис сторони від точки X_{opt1} до X_{opt2} . Всі точки сторони є оптимальними.

Задача № 1.4

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом:

$$\begin{aligned} W_I &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -9x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} W_I &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -9x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 10, 10, 10]$. Складаємо першу симплексну таблицю (табл. 11).

Таблиця 11

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			3	2	0	0	0		
a_3	0	10	-9	2	1	0	0		X_0
a_4	0	10	-2	1	0	1	0		
a_5	0	10	1	-5	0	0	1	10	
Δ_1	$W_1(X_0) = 0$		-3	-2	0	0	0		

Серед оцінок вільних змінних є від'ємна. План $X_0 = [0, 0, 10, 10, 10]$ не оптимальний. Серед від'ємних оцінок знаходимо найменшу. Визначено напрямний стовпчик a_1 : $\min\{-3, -2\} = -3 \rightarrow a_1$.

Для встановлення напрямного рядка обчислюємо симплексне відношення та обираємо найменше серед них. Враховуючи це, напрямним рядком буде a_5 :

$$\min\left\{\frac{10}{1}\right\} = 10 \rightarrow a_5.$$

Для розв'язувального елемента a_{13} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_3, a_4, a_5\}$ замість a_5 входить a_1 . Новий план має опис у табл. 12.

Таблиця 12

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			3	2	0	0	0		
a_3	0	100	0	-43/1	1	0	9/1		X_1
a_4	0	30	0	-9	0	1	2		
a_1	4	10	1	-5/1	0	0	1/1		
Δ_1	$W_1(X_1) = 40$		1	-22	0	0	4		

В індексному рядку одна від'ємна оцінка $\Delta_2 = -22$. Компоненти напрямного стовпчика a_2 не містять додатних

значень – усі значення від’ємні. Ця ситуація вказує на необмеженість цільової функції $W_I \rightarrow \infty$, інакше, відсутність розв’язку.

Для графічної інтерпретації випадку необмеженості наведемо графічний розв’язок задачі.

Складаємо рівняння граничних прямих:

$$\omega_1 : -9x_1 + x_2 = 10, \quad \omega_2 : -2x_1 + x_2 = 10, \quad \omega_3 : x_1 - 5x_2 = 10,$$

$$\omega_4 : x_1 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подаються відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 3)

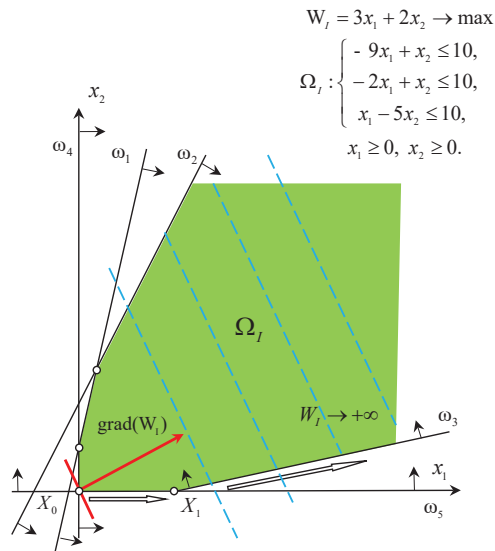


Рис. 3. Випадок необмеженої цільової функції

В точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [3, 2]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію

рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, спостерігаємо необмежене зростання значень цільової функції.

Задача № 2

До прямої задачі ЛО скласти двоїсту задачу.

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - \min, \\ \Omega_I : \begin{cases} -5x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 \leq 5, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 7, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \leq 7, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок. Для задачі на мінімум необхідна наявність нерівностей тільки типу $\geq$. Змінюємо знак першої та третьої нерівності на протилежний:

$$\begin{aligned} W_I &= 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 - \min, \\ \Omega_I : \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq -5, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 7, \\ -4x_1 - x_2 + x_3 \geq -7, \\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Перехід до двоїстої задачі зручно виконувати в табл. 13.

Таблиця 13

УХ	x_1	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	x_4	x_5	Знак	B
$y_1 \geq 0$	5	5	2	1	3	$\geq$	-5
y_2	-2	-2	1	5	-3	=	7
$y_3 \geq 0$	-4	-1	1	0	0	$\geq$	-7
Знак	=	$\leq$	$\leq$	=	=		
C	5	-5	2	3	0		

Двоїста задача має вигляд

$$\begin{aligned} W_{II} &= -5y_1 + 7y_2 - 7y_3 - \max, \\ \Omega_{II} : \begin{cases} 5y_1 - 2y_2 - 4y_3 = 5, \\ 5y_1 - 2y_2 - y_3 \leq -5, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2, \\ y_1 + 5y_2 = 0, \\ 3y_1 - 3y_2 = 0, \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Задача № 3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$\begin{aligned} W_{II} &= 21y_1 + 89y_2 + 30y_3 - \min, \\ \Omega_{II} : \begin{cases} 4y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -4, \\ -3y_1 - 7y_2 + 7y_3 \leq -7, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \end{cases} \\ W_{II}^{\max} &= 89, Y_{\min} = [0, 1, 0]. \end{aligned}$$

Розв'язок.

Відновимо аналітичний запис прямої задачі:

$$\begin{aligned} W_I &= 4x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 89, \\ 3x_1 - 7x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Введемо позначення $X_{\max} = [x_1^{\max}, x_2^{\max}]$, $Y_{\min} = [y_1^{\min}, y_2^{\min}, y_3^{\min}]$ – розв’язки прямої та двоїстої задачі. Згідно з основними теоремами лінійної оптимізації, необхідно та достатньо виконання наступних відношень:

$$x_j^{\text{opt}} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^{\text{opt}} a_{ij} - c_j \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\max} (4y_1^{\min} - 4y_2^{\min} - 3y_3^{\min} + 4) = 0, \\ x_2^{\max} (-3y_1^{\min} - 7y_2^{\min} + 7y_3^{\min} + 7) = 0. \end{cases}$$

$$y_i^{\text{opt}} \left(\sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j^{\text{opt}} - b_i \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^{\min} (-4x_1^{\max} + 3x_2^{\max} - 21) = 0, \\ y_2^{\min} (4x_1^{\max} + 7x_2^{\max} - 89) = 0, \\ y_3^{\min} (3x_1^{\max} - 7x_2^{\max} - 30) = 0. \end{cases}$$

Оскільки відомий розв’язок двоїстої задачі $Y_{\min} = [0, 1, 0]$, який є виродженим, то аналіз наведених відношень вказує на випадок альтернативного оптимуму у розв’язку прямої задачі. Відповідні дві системи для обчислення розв’язків прямої задачі мають вигляд:

$$\begin{cases} -4x_1^{\max} + 3x_2^{\max} = 21, \\ 4x_1^{\max} + 7x_2^{\max} = 89, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\max} = 3, \\ x_2^{\max} = 11, \end{cases} \cup \begin{cases} 3x_1^{\max} - 7x_2^{\max} = 30, \\ 4x_1^{\max} + 7x_2^{\max} = 89, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\max} = 17, \\ x_2^{\max} = 3. \end{cases}$$

Отже, $X_1^{\max} = [3, 11]$ та $X_2^{\max} = [17, 3]$. Загальним представленням альтернативного оптимуму прямої задачі є опукла лінійна комбінація цих розв’язків:

$$X_{\max}^{\text{opt}} = \lambda X_1^{\max} + (1 - \lambda) X_2^{\max}, \text{ де } \lambda \in [0, 1].$$

$$\text{Остаточно } X_{\max}^{\text{opt}} = [-14\lambda + 17, 8\lambda + 3].$$

Модельний варіант № 2 типових завдань № 2

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

1.1 $W_I = 2x_1 + 2x_2 - \max,$

$$\Omega_I: \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 45, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 45, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$
Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

1.2 $W_I = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \text{opt}(\min, \max)$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

1.3 $W_I = 3x_1 + 2x_2 - \max$

$$\Omega_I: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 39 \\ x_1 - 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4 $W_I = 3x_1 + x_2 - \max$

$$\Omega_I: \begin{cases} -9x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ -5x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ x_1 - 5x_2 \leq 5 \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2 \end{cases}$$

Знайти всі розв'язки.

2

До поданої прямої задачі лінійної оптимізації скласти відповідну двоїсту задачу.

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 - \max$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 9, \\ 0 \leq x_3. \end{cases}$$

3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі.

$$W_{II} = 21y_1 + 177y_2 + 60y_3 - \min$$

$$\Omega_{II}: \begin{cases} 5y_1 - 7y_2 - 5y_3 \leq -9 \\ -3y_1 - 13y_2 + 4y_3 \leq -1 \\ 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow W_{II}^{\min} = 149, Y_{\min} = Y\left(0, \frac{41}{93}, \frac{110}{93}\right)$$

$$W_I^{\text{opt}} = ?, X^{\text{opt}} = ?$$



Задача № 1.1

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом. Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 45, \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. А. Симплексний розв'язок:

Переходимо до канонічного вигляду:

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 45, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Маємо первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 45, 45] \in \Omega_I$. Складаємо таблицю симплексного розрахунку (табл. 14).

Таблиця 14

			a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	2	0	0		Вершина
a_3	0	45	5	-2	1	0	9	
a_4	0	45	-2	5	0	1		X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-2	-2	0	0		
a_1	2	9	1	-2/5	1/5	0		
a_4	0	63	0	21/5	2/5	1	15	X_1
Δ_j	$W_I(X_1) = 18$		0	-14/5	2/5	0		
a_1	2	15	1	0	5/21	2/21		
a_2	2	15	0	1	2/21	5/21		X_{opt}
Δ_j	$W_I(X_{opt}) = 60$		0	0	2/3	2/3		

Всі оцінки в третій частині таблиці невід'ємні $\Delta_j \geq 0$. Це означає, що знайдено оптимальний розв'язок $X_{\max}^{opt} = [15, 15, 0, 0]$, $W_I(X_{\max}^{opt}) = 60$.

Б. Графічний розв'язок.

Складаємо рівняння граничних прямих:

$$\omega_1 : 5x_1 - 2x_2 = 45 \Leftrightarrow \frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{-\frac{45}{2}} = 1,$$

$$\omega_2 : -2x_1 + 5x_2 = 45 \Leftrightarrow \frac{x_1}{-\frac{45}{2}} + \frac{x_2}{9} = 1,$$

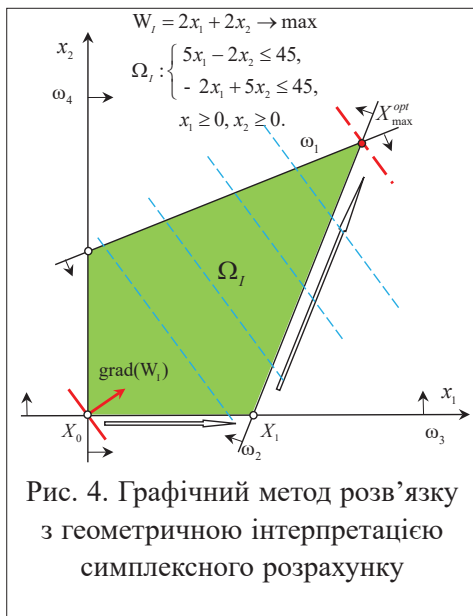
$$\omega_3 : x_1 = 0, \quad \omega_4 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які визначаються відповідними нерівностями системи обмежень. У результаті можемо

зобразити поліедр Ω_I (рис. 4).

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [2, 2]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{opt}$ – вершину виходу ліній рівня (рис. 4).

Координати екстремальної вершини



визначаються як координати точки перетину відповідних граничних прямих:

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{opt} = [15, 15]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{opt}) = 60$.

Геометрична інтерпретація симплексного обчислення полягає в тому, що перша симплекс-таблиця (табл. 14) відповідає вершині X_0 . Обчислення до другої таблиці відповідають переходу у сусідню вершину X_1 . Третя і остання симплекс-таблиця відповідає переходу від X_1 до $X_{\max}^{opt}$ (рис. 4).

Задача № 1.2

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом.

$$W_I = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зведемо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \text{opt}(\min, \max)$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases}$$

Розв'язуємо задачу на мінімум. Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 5, 1] \in \Omega_I$. Складаємо першу симплекс-таблицю (табл. 15).

Таблиця 15

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	-3	-1	3	0	0		Вершина
a_5	0	5	1	-1	3	4	1	0		
a_6	0	1	2	4	-5	-1	0	1	1/4	X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-2	3	1	-3	0	0		

План $X_0 = [0, 0, 0, 0, 5, 1]$ не є оптимальним, оскільки є додатні оцінки. Серед додатних оцінок обираємо найбільшу. З огляду на це, стовпчик a_2 є напрямним. Для його додатних компонент обчислюємо симплексне відношення

$$\left\{ \frac{b_j}{a_{j2}} \mid a_{j2} > 0, j = 2 \right\} = \min \left\{ \frac{1}{4} \right\} \rightarrow a_6.$$

Напрямний рядок a_6 . Виконуємо перерахунок таблиці. Алгоритм обчислення продовжуємо до появи в індексному рядку всіх недодатних оцінок (табл. 16).

Таблиця 16

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	-3	-1	3	0	0		Вершина
a_5	0	21/4	3/2	0	7/4	15/4	1	1/4	3	
a_2	-3	1/4	1/2	1	-5/4	-1/4	0	1/4		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = -3/4$		-7/2	0	19/4	-9/4	0	-3/4		
a_3	-1	3	6/7	0	1	15/7	4/7	1/7		
a_2	-3	4	11/7	1	0	17/7	5/7	3/7		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{\text{opt}}) = -15$		-53/7	0	0	-87/7	-19/7	-10/7		

У табл. 16 отримано всі недодатні оцінки, що є ознакою оптимальності задачі на мінімум. Задача на мінімізацію

розв'язана $X_{\min}^{opt} = [0, 4, 3, 0]$, $W_I(X_{\min}^{opt}) = -15$. У табл. 17 наведено розв'язок задачі на максимум.

Таблиця 17

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	2	-3	-1	3	0	0		Вершина
a_5	0	5	1	-1	3	4	1	0	5/4	
a_6	0	1	2	4	-5	-1	0	1		X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-2	3	1	-3	0	0		
a_4	3	5/4	1/4	-1/4	3/4	1	1/4	0	5	
a_6	0	9/4	9/4	15/4	-17/4	0	1/4	1	1	X_1
Δ_j	$W_I(X_1) = 15/4$		-5/4	9/4	13/4	0	3/4	0		
a_4	3	1	0	-2/3	11/9	1	2/9	-1/9		
a_1	2	1	1	5/3	-17/9	0	1/9	4/9		X_{opt}
Δ_j	$W_I(X_{opt}) = 5$		0	13/3	8/9	0	8/9	5/9		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Отримано оптимальний розв'язок задачі на максимум $X_{\max}^{opt} = [1, 0, 0, 1]$, $W_I(X_{\max}^{opt}) = 5$.

Задача № 1.3

Задачу лінійної оптимізації розв'язати симплекс-методом. Знайти всі розв'язки.

$$\begin{aligned}
 &W_I = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\
 &\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 39, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} W_I &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 39, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 2, 39, 5]$. Складаємо першу симплексну таблицю (табл. 18).

Таблиця 18

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	3	2	0	0	0		Вершина
a_3	0	2	-2	1	1	0	0		
a_4	0	39	3	2	0	1	0	13	X_0
a_5	0	5	1	-2	0	0	1	5	
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-3	-2	0	0	0		

Серед оцінок вільних змінних є від'ємні. План $X_0 = [0, 0, 2, 39, 5]$ не оптимальний. Серед від'ємних оцінок знаходимо найменшу. Визначено напрямний стовпчик a_1 . $\Delta_j = \min\{-3, -2\} = -3 \rightarrow a_1$.

Для встановлення напрямного рядка обчислюємо симплексне відношення та обираємо найменше серед них. Враховуючи це, напрямним рядком буде a_5 :

$$\min\left\{\frac{39}{3}, \frac{5}{1}\right\} = 5 \rightarrow a_5.$$

Для розв'язувального елемента a_{31} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_3, a_4, a_5\}$ замість a_5 буде введено a_1 . План має опис у табл. 19.

Таблиця 19

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	3	2	0	0	0		Вершина
a_3	0	12	0	-3	1	0	2		
a_4	0	24	0	8	0	1	-3	3	X_1
a_1	3	5	1	-2	0	0	1		
Δ_j	$W_I(X_1) = 15$		0	-8	0	0	3		

В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка $\Delta_2 = -8$. Поточний розв'язок $X_1 = [3, 0, 12, 24, 0]$ можна покращити. Розв'язувальний елемент є $a_{22} = 8$. Складемо симплексну таблицю наступного кроку (табл. 20).

Таблиця 20

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	3	2	0	0	0		Вершина
a_3	0	21	0	0	1	3/8	7/8	24	
a_2	2	3	0	1	0	1/8	-3/8		X_{opt1}
a_1	3	11	1	0	0	1/4	1/4	44	
Δ_j	$W_I(X_{opt1}) = 39$		0	0	0	1	0		

В індексному рядку немає від'ємних оцінок. Знайдено оптимальний план і найбільше значення цільової функції:

$$X_{opt1} = [11, 3, 21, 0, 0], W_I(X_{opt1}) = 39.$$

Звертаємо увагу, що для небазисного вектора a_5 оцінка рівна нулю. Це є ознакою альтернативного оптимуму – існування принаймні ще одного оптимального розв'язку. Знайдемо його, ввівши в базис a_5 замість a_3 (табл. 21).

Таблиця 21

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	3	2	0	0	0		Вершина
a_5	0	24	0	0	8/7	3/7	1		
a_2	2	12	0	1	3/7	2/7	0		X_{opt2}
a_1	3	5	1	0	-2/7	1/7	0		
Δ_j	$W_1(X_{opt2}) = 39$		0	0	0	1	0		

Отримано ще один оптимальний розв'язок:

$$X_{opt2} = [5, 12, 0, 0, 24], \quad W_1(X_{opt2}) = 39.$$

Загальний розв'язок (альтернативний оптимум):

$$X_{opt} = \lambda X_{opt1} + (1 - \lambda) X_{opt2} = [11 - 6\lambda, 3 + 9\lambda], \quad \lambda \in [0, 1].$$

У разі надання λ значень з відрізка $[0, 1]$, будемо отримувати різні альтернативні розв'язки.

Додатково наведемо графічний розв'язок задачі.

Складаємо рівняння граничних прямих:

$$\omega_1: -2x_1 + x_2 = 2, \quad \omega_2: 3x_1 + 2x_2 = 39, \quad \omega_3: x_1 - 2x_2 = 5,$$

$$\omega_4: x_1 = 0, \quad \omega_5: x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подаються відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_1 (рис. 5).

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_1) = [3, 2]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо дві точки максимуму – X_{opt1} та X_{opt2} . Лінія рівня проходить через сторону поліедра, що і є проявом випадку альтернативного оптимуму. Опукла лінійна комбінація $X_{opt} = \lambda X_{opt1} + (1 - \lambda) X_{opt2}$ має числовий опис сторони від точки X_{opt1} до X_{opt2} . Всі точки сторони є оптимальними.

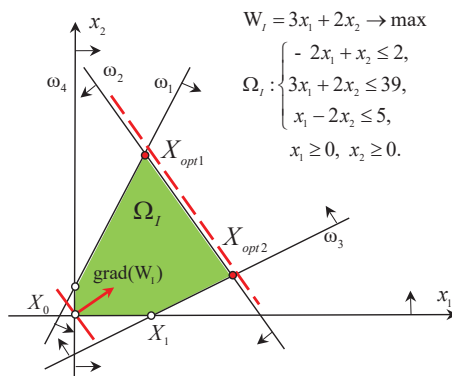


Рис. 5. Графічний метод розв'язку.
Випадок альтернативного оптимуму

Задача № 1.4

Задачу лінійної оптимізації розв'язати звичайним симплекс-методом:

$$W_I = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 - 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 - 5x_2 + x_5 = 10, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 10, 10, 10]$. Складаємо першу симплексну таблицю (табл. 22).

Таблиця 22

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	3	0	0	0		X_i
a_3	0	10	-3	2	1	0	0		X_0
a_4	0	30	-2	3	0	1	0		
a_5	0	10	1	-5	0	0	1	10	
Δ_i	$W_1(X_0) = 0$		-4	-3	0	0	0		

Серед оцінок вільних змінних є від'ємна. План $X_0 = [0, 0, 10, 30, 10]$ не оптимальний. Серед від'ємних оцінок знаходимо найменшу. Визначено напрямний стовпчик a_1 :

$$\min\{-4, -3\} = -4 \rightarrow a_1.$$

Для встановлення прямого рядка обчислюємо симплексне відношення та обираємо найменше серед них. Враховуючи це, напрямним рядком буде a_5 :

$$\min\left\{\frac{10}{1}\right\} = 10 \rightarrow a_5.$$

Для розв'язувального елемента a_{13} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_3, a_4, a_5\}$ замість a_5 входить a_1 . Новий план має опис у табл. 23.

Таблиця 23

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	3	0	0	0		X_i
a_3	0	40	0	-13	1	0	3		X_1
a_4	0	50	0	-7	0	1	2		
a_1	4	10	1	-5	0	0	1		
Δ_i	$W_1(X_1) = 40$		0	-23	0	0	4		

В індексному рядку одна від'ємна оцінка $\Delta_2 = -23$. Компоненти прямого стовпчика a_2 не містять додатних значень – усі значення від'ємні. Ця ситуація вказує на необмеженість цільової функції. Для графічної інтерпретації випадку необмеженості наведемо графічний розв'язок задачі.

Складаємо рівняння граничних прямих

$$\omega_1 : -3x_1 + 2x_2 = 10, \quad \omega_2 : -2x_1 + 3x_2 = 30, \quad \omega_3 : x_1 - 5x_2 = 10,$$

$$\omega_4 : x_1 = 0, \quad \omega_5 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подаються відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_I (рис. 6).

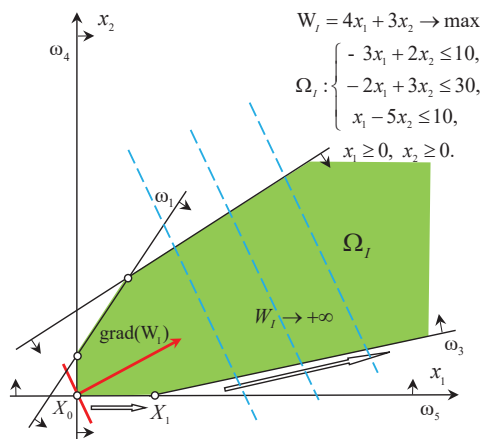


Рис. 6. Випадок необмеженої цільової функції.

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_f) = [4, 3]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, спостерігаємо необмежене зростання значень цільової функції.

Задача № 2

До прямої задачі лінійної оптимізації скласти двоїсту задачу.

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 5x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \leq 9, \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок. Дотримуючись алгоритму переходу від прямої задачі лінійної оптимізації до двоїстої (див. розділ 2.3), таблиця переходу має вигляд, наведений у табл. 14.

Таблиця 14

YX	x_1	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	x_4	x_5	Знак	B
$y_1 \geq 0$	1	-3	5	0	0	=	3
y_2	-3	-2	-5	-2	1	=	6
$y_3 \geq 0$	4	3	-1	2	-2	$\leq$	9
Знак	=	=	$\geq$	=	=		
C	4	2	2	-2	-5		

Двоїста задача має вигляд:

$$W_{II} = 3y_1 + 6y_2 + 9y_3 - \min,$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} y_1 - 3y_2 + 4y_3 = 4, \\ -3y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 2, \\ 5y_1 - 5y_2 - y_3 \geq 2, \\ -2y_2 + 2y_3 = -2, \\ y_2 - 2y_3 = -5, \\ y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Задача № 3

За відомим розв'язком двоїстої задачі лінійної оптимізації знайти розв'язок прямої задачі:

$$W_{II} = 21y_1 + 177y_2 + 60y_3 - \min,$$

$$\Omega_{II} : \begin{cases} 4y_1 - 7y_2 - 5y_3 \leq -9, \\ -3y_1 - 13y_2 + 4y_3 \leq -1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$W_{II}^{\min} = 149, \quad Y_{\min} = \left[0, \frac{41}{93}, \frac{110}{93} \right].$$

Розв'язок.

Пряма задача має вигляд:

$$W_I = 9x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \leq 21, \\ 7x_1 + 13x_2 \leq 177, \\ 5x_1 - 4x_2 \leq 60, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, $X_{\max} = [x_1^{\max}, x_2^{\max}]$, $Y_{\min} = [y_1^{\min}, y_2^{\min}, y_3^{\min}]$ – розв'язки прямої та двоїстої задачі. Згідно з основними теоремами лінійної оптимізації необхідним і достатнім є виконання наступних відношень:

$$x_j^{\text{opt}} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^{\text{opt}} a_{ij} - c_j \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\max} (4y_1^{\min} - 7y_2^{\min} - 5y_3^{\min} + 9) = 0, \\ x_2^{\max} (-3y_1^{\min} - 13y_2^{\min} + 4y_3^{\min} + 1) = 0, \end{cases}$$

$$y_i^{opt} \left(\sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j^{opt} - b_i \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1^{\min} (-4x_1^{\max} + 3x_2^{\max} - 21) = 0, \\ y_2^{\min} (7x_1^{\max} + 13x_2^{\max} - 177) = 0, \\ y_3^{\min} (5x_1^{\max} - 4x_2^{\max} - 60) = 0. \end{cases}$$

Оскільки відомий розв'язок двоїстої, то розв'язок прямої задачі впливає з розв'язку системи:

$$\begin{cases} 7x_1^{\max} + 13x_2^{\max} = 177, \\ 5x_1^{\max} - 4x_2^{\max} = 60, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{\max} = 16, \\ x_2^{\max} = 5. \end{cases}$$

Отже, $X^{\max} = [16, 5]$ та $W_I^{\max} = 149$.

2.10 Типові завдання № 3

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

ВАРІАНТ № 1

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису.

1

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 33x_1 + 33x_2 - 33x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 \leq -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -47x_1 - 32x_2 + 23x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -11x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 68, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -x_2 + x_3 + 6x_4 + 3x_5 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -x_1 + 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq -2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 3x_1 + 5x_2 + 2x_4 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 3x_3 + x_4 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I: \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 9x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.4

$$W_I = -2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 2

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 9x_1 + 63x_2 - 27x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 \leq -1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -50x_1 - 80x_2 + 46x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 7x_3 \leq -3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 5x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ -2x_1 - 5x_2 \leq -10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 3x_5 \leq -2, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 3x_1 + 2x_3 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 8x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -2, \\ 7x_1 - 9x_2 + x_3 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 3

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 60x_1 + 25x_2 - 30x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 \leq -5, \\ -10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -50x_1 - 50x_2 + 25x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 9x_1 - 12x_2 + 3x_3 \leq -4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 3x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 46, \\ 4x_1 - 7x_2 \leq 12, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_i \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 5x_1 + 5x_3 - x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = -8, \\ 6x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = -x_2 + 6x_3 - x_4 - x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ №4

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 50x_1 + 63x_2 - 33x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 10x_1 - 13x_2 + 3x_3 \leq -4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -80x_1 - 50x_2 + 46x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -14x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leq -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$\Omega_I : \begin{cases} W_I = 3x_1 + 2x_2 - \max, \\ -5x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 65, \\ 5x_1 - 7x_2 \leq 15, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq -1, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методику штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$\Omega_I : \begin{cases} W_I = 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 - \max, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$\Omega_I : \begin{cases} W_I = 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 - \min, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 8x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 7x_5 = -9, \\ 8x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.4

$$\Omega_I : \begin{cases} W_I = 4x_1 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 - \min, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = -2, \\ 3x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -3, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРИАНТ № 5

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 63x_1 + 60x_2 - 47x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 \leq 4, \\ -11x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -64x_1 - 19x_2 + 29x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 4, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 4x_1 + 3x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 2, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 86, \\ 4x_1 - 7x_2 \leq 12, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_j \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 2x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 2x_5 \leq -3, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 - 3x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_2 + 6x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 9x_1 - 7x_2 - 5x_3 = -4, \\ 9x_1 - 8x_2 + x_3 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 3x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ 7x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРИАНТ №6

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 65x_1 + 27x_2 - 29x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 \leq -1, \\ -11x_1 + 9x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -68x_1 - 34x_2 + 34x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 \leq 2, \\ -10x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 5x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ -2x_1 - 5x_2 \leq -10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -3x_1 + x_2 - 3x_5 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq -2, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = -x_2 + 3x_3 + 4x_4 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - x_3 + 8x_4 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.4

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ -x_2 + 6x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 7x_5 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису.

ВАРІАНТ № 7

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1 $W_I = 40x_1 + 70x_2 - 35x_3 - \text{opt}(\min),$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2 $W_I = -56x_1 - 41x_2 + 29x_3 - \text{opt}(\max),$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -12x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3 $W_I = 2x_1 + 3x_2 - \max,$

$$\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 46, \\ 4x_1 - 7x_2 \leq 12, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_j \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$W_I = 7x_1 + 7x_2 + 6x_4 - 3x_5 - \max,$

$$\Omega_I: \begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 2x_4 - x_5 \leq -2, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2 Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1 $W_I = 4x_1 + 6x_3 + 4x_4 - \max,$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$W_I = -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - \min,$

$$\Omega_I: \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I: \begin{cases} 9x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = -4, \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$W_I = 6x_1 - 2x_3 - x_4 + 7x_5 - \max,$

$$\Omega_I: \begin{cases} -x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 3, \\ 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРИАНТ № 8

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 15x_1 + 51x_2 - 27x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1,2,3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -107x_1 - 26x_2 + 33x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -16x_1 + 12x_2 + 4x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1,2,3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 3x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -5x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 65, \\ 5x_1 - 7x_2 \leq 15, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq -3, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 - x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 1, \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 9x_1 - 9x_2 - 5x_3 + 9x_4 = -4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 3x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 7x_5 = -2, \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису.

ВАРИАНТ № 9

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1 $W_f = 68x_1 + 34x_2 - 34x_3 - \text{opt}(\min),$

$$\Omega_f: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -12x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2 $W_f = -74x_1 - 80x_2 + 48x_3 - \text{opt}(\max),$

$$\Omega_f: \begin{cases} 4x_1 - 10x_2 + 6x_3 \leq 5, \\ -13x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3 $W_f = 4x_1 + 3x_2 - \max,$

$$\Omega_f: \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 2, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 86, \\ 4x_1 - 7x_2 \leq 12, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_j \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$W_f = x_2 + x_3 - 2x_4 - \max,$

$$\Omega_f: \begin{cases} 5x_1 + 2x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq -2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2 Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1 $W_f = x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 - \max,$

$$\Omega_f: \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$W_f = -x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 - \min,$

$$\Omega_f: \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_f: \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.4

$W_f = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 - \max,$

$$\Omega_f: \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_4 + 5x_5 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 10

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 91x_1 + 26x_2 - 37x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -76x_1 - 40x_2 + 36x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -13x_1 + 10x_2 + 3x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 3x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -8x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 - 4x_2 \leq -4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 6x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 3x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 5x_5 \leq -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 7x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 3x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = -2x_2 + 7x_3 + 4x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 8x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -3, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 11

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

$$\begin{array}{ll} \text{1.1} & W_I = 33x_1 + 33x_2 - 33x_3 - \text{opt}(\min), \\ & \Omega_I: \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 \leq -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases} \\ \text{1.2} & W_I = -47x_1 - 32x_2 + 23x_3 - \text{opt}(\max), \\ & \Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -11x_1 + 8x_2 + 3x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{1.3} & W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max, \\ & \Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 68, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \\ \text{1.4} & W_I = -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_5 - \max, \\ & \Omega_I: \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases} \end{array}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2 Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

$$\begin{array}{ll} \text{2.1} & W_I = 3x_1 + 5x_2 + 2x_4 - \max, \\ & \Omega_I: \begin{cases} 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases} \\ \text{2.2} & W_I = 3x_3 + x_4 - \min, \\ & \Omega_I: \begin{cases} 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{2.3} & \Omega_I: \begin{cases} 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 - 8x_5 = -7, \\ 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 + x_5 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases} \\ & \text{Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.} \\ \text{2.4} & W_I = -2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 - \max, \\ & \Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases} \end{array}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 12

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 9x_1 + 63x_2 - 27x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 \leq -1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -50x_1 - 80x_2 + 46x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 7x_3 \leq -3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 68, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -2x_1 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \leq -2, \\ 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 2x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 3x_1 + 2x_3 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = -2x_1 - 2x_2 + 2x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ -3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 8x_3 + 7x_4 = -3, \\ 3x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 13

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 60x_1 + 25x_2 - 30x_3 - \text{opt}(\min), \quad W_I = -50x_1 - 50x_2 + 25x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 \leq -5, \\ -10x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases} \quad \Omega_I: \begin{cases} 9x_1 - 12x_2 + 3x_3 \leq -4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

1.3

$$W_I = 3x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 11, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -6, \\ x_j \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 5x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 2x_4 - x_5 \leq -1, \\ 7x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 5x_1 + 5x_3 - x_4 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I: \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 9x_3 + 3x_4 = -2, \\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = -x_2 + 6x_3 - x_4 - x_5 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРИАНТ № 14

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 50x_1 + 63x_2 - 33x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 10x_1 - 13x_2 + 3x_3 \leq -4, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -80x_1 - 50x_2 + 46x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -14x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leq -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 5x_1 + x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 55, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 20, \\ -x_1 - 4x_2 \leq -4, \\ x_j \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -x_2 + x_3 + 6x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq -3, \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -6, \\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 4x_1 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + 7x_5 = -2, \\ 3x_1 + 5x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -3, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 15

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 65x_1 + 27x_2 - 29x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 \leq -1, \\ -11x_1 + 9x_2 + 2x_3 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -68x_1 - 34x_2 + 34x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 \leq 2, \\ -10x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 65, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ -3x_1 - 5x_2 \leq -15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - x_4 - x_5 \leq -3, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 2x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_2 + 6x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -2, \\ 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 6x_1 - 2x_3 - x_4 + 7x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 3, \\ 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 16

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1 $W_I = 40x_1 + 70x_2 - 35x_3 - \text{opt}(\min),$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2 $W_I = -56x_1 - 41x_2 + 29x_3 - \text{opt}(\max),$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -12x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3 $W_I = 3x_1 + 3x_2 - \max,$

$$\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 13, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 18, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ x_j \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$W_I = 7x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 - \min,$

$$\Omega_I: \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 7x_5 \leq -1, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2 Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1 $W_I = -x_2 + 3x_3 + 4x_4 - \max,$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$W_I = 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 - \min,$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I: \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$W_I = 3x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 - \min,$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 - 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 7x_5 = -2, \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 17

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 15x_1 + 51x_2 - 27x_3 - \text{opt}(\min), \quad W_I = -107x_1 - 26x_2 + 33x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \quad \Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -16x_1 + 12x_2 + 4x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

1.3

$$W_I = 2x_1 + 5x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ -2x_1 - 5x_2 \leq -10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -x_2 + 5x_3 + 7x_4 - x_5 \leq -3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 4x_1 + 6x_3 + 4x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 9x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -8, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.4

$$W_I = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_4 + 5x_5 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису.

ВАРІАНТ № 18

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 68x_1 + 34x_2 - 34x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -12x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -74x_1 - 80x_2 + 48x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 4x_1 - 10x_2 + 6x_3 \leq 5, \\ -13x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 1, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 64, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ -x_1 - 4x_2 \leq -4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 2x_2 + x_3 - x_4 + 7x_5 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 \leq -1, \\ 7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 1, \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I: \begin{cases} 8x_1 - 8x_2 + 7x_3 = -2, \\ 7x_1 - 9x_2 + x_3 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -1, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -3, \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ № 19

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 91x_1 + 26x_2 - 37x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -76x_1 - 40x_2 + 36x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -13x_1 + 10x_2 + 3x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 1, \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 76, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 8, \\ -x_1 - 4x_2 \leq -4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 \leq -2, \\ 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 7x_4 - 3x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = -x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -6, \\ x_1 - 5x_2 = -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 5x_4 - x_5 = 3, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ № 3

Розділ «Лінійна оптимізація»

Двоїстий симплекс-метод. Метод штучного базису

ВАРІАНТ №20

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 38x_1 + 45x_2 - 28x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq -4, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -62x_1 - 65x_2 + 47x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = x_1 + x_2 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -5x_1 + x_2 \leq 2, \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 67, \\ 3x_1 - 7x_2 \leq 9, \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -2x_1 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 \leq -3, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 + 6x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = -2x_2 + 7x_3 + 4x_4 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -2x_1 + 7x_2 + x_3 + 6x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + 6x_4 + 5x_5 = -6, \\ 9x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 - \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2, \\ -2x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



2.11 Модельний розв'язок завдання № 3

Модельний варіант №1 типових завдань №3

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 63x_1 + 60x_2 - 47x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 \leq 4, \\ -11x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -64x_1 - 19x_2 + 29x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 4, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 3x_1 + x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -8x_1 + x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 39, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 \leq -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методіку штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$\Omega_I: \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 9x_4 = -5, \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

2.4

$$W_I = -2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5. \end{cases}$$



Задача № 1.1

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїтим симплекс-методом.

$$W_I = 63x_1 + 60x_2 - 47x_3 \rightarrow \min$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 \leq 4, \\ -11x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 63x_1 + 60x_2 - 47x_3 \rightarrow \min$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ -11x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 4, -2] \notin \Omega_I$ не є припустимим. Складаємо першу симплексну таблицю, двоїстого симплекс-методу (табл. 1).

Таблиця 1

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	63	60	-47	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_4	0	4	3	-8	5	1	0		
a_5	0	-2	-11	4	7	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-63	-60	47	0	0		

Алгоритм двоїстого симплекс-методу вимагає на кожному кроці зміни від'ємного знака правих частин на додатний. Для цього необхідно знаходження у відповідному рядку від'ємних значень. У табл. 1 напрямним рядком буде рядок

базисного вектора a_5 . Він містить від'ємне значення $b_1 = -2$. У цьому рядку знаходимо від'ємні значення коефіцієнтів системи обмежень. Таке значення єдине $a_{21} = -11$. У разі відсутності від'ємних значень робиться висновок: задача не має розв'язків. Фактично у двоїстому симплекс-методі значення індексного рядка не враховують.

Для розв'язувального елемента $a_{21} = -11$ виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_4, a_5\}$ замість вектора a_5 входить вектор a_1 (табл. 2).

Таблиця 2

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	63	60	-47	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_4	0	38/11	0	- 76/11	76/11	1	3/11	1/2	
a_1	63	2/11	1	- 4/11	- 7/11	0	- 1/11		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) =$	126/11	0	-912/11	76/11	0	- 63/11		

Процедура двоїстого симплекс-методу отримала припустимий план. Стовпчик B не містить від'ємні значення. Розв'язувальний елемент згідно зі звичайним симплекс-методом a_{13} (табл. 2). Складаємо наступну симплексну таблицю 3.

Таблиця 3

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	63	60	-47	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	-47	1/2	0	-1	1	11/76	3/76		
a_1	63	1/2	1	-1	0	7/76	- 5/76		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) =$	8	0	-76	0	-1	-6		

Всі оцінки індексного рядка не додатні. Для задачі на мінімум це є ознакою оптимальності. План $X_{opt} = \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right]$ є оптимальним.

Задача № 1.2

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїтим симплекс-методом.

$$W_I = -64x_1 - 19x_2 + 29x_3 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 4, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = -64x_1 - 19x_2 + 29x_3 \rightarrow \max$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 = 4, \\ -5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 4, -1]$ не є припустимим. Складаємо першу симплексну таблицю двоїстого симплекс-методу (табл. 4).

Таблиця 4

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	-64	-19	29	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_4	0	4	2	-7	5	1	0		
a_5	0	-1	-5	4	1	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		64	19	-29	0	0		

Алгоритм двоїстого симплекс-методу вимагає на кожному кроці зміни від'ємного знака правих частин на додатний. Для цього необхідно знаходження у відповідному рядку

від'ємних значень. У табл. 4 напрямним рядком буде рядок базисного вектора a_5 . Він містить від'ємне значення $b_2 = -1$. У цьому рядку знаходимо від'ємні значення коефіцієнтів системи обмежень. Таке значення єдине $a_{21} = -5$.

Для розв'язувального елемента a_{21} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_4, a_5\}$ замість вектора a_5 входить вектор a_1 (табл. 5).

Таблиця 5

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	-64	-19	29	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_4	0	18/5	0	- 27/5	27/5	1	2/5	2/3	
a_1	-64	1/5	1	- 4/5	- 1/5	0	- 1/5		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = -64/5$	0	351/5	- 81/5	0	64/5			

Процедура двоїстого симплекс-методу отримала припустимий план. Стовпчик B не містить від'ємних значень. Розв'язувальном елементом табл. 5 є a_{13} . Складаємо наступну симплексну за алгоритмом звичайного симплекс-методу табл. 6.

Таблиця 6

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	-64	-19	29	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	29	2/3	0	-1	1	5/27	2/27		
a_1	-64	1/3	1	-1	0	1/27	- 5/27		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = -2$	0	54	0	0	3	14		

Всі оцінки індексного рядка невід'ємні. Для задачі на максимум це є ознакою оптимальності. Оптимальний план – $X_{opt} = \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right]$ та максимальне значення цільової функції – $W_{max} = -2$.

Задача № 1.3

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом і графічно. Навести геометричну інтерпретацію ітерацій симплекс-методу.

$$\begin{aligned} W_I &= 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -8x_1 + x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 39, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} W_I &= 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -8x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 39, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 6, \\ -x_1 - 6x_2 + x_6 = -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases} \end{aligned}$$

План $X_0 = [0, 0, 1, 39, 6, -6] \notin \Omega_I$ неприпустимий. Дотримуємось алгоритму двоїстого симплекс-методу. Стартовий розрахунок міститься в табл. 7.

Таблиця 7

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			3	1	0	0	0	0		
a_3	0	1	-8	1	1	0	0	0		X_0
a_4	0	39	3	4	0	1	0	0		
a_5	0	6	1	-1	0	0	1	0		
a_6	0	-6	-1	-6	0	0	0	1		
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-3	-1	0	0	0	0		
a_3	0	49	0	49	1	0	0	-8		X_1
a_4	0	21	0	-14	0	1	0	3	7	
a_5	0	0	0	-7	0	0	1	1	0	
a_1	3	6	1	6	0	0	0	-1		
Δ_j	$W_1(X_1) = 18$		0	17	0	0	0	-3		

В останній симплекс-таблиці двоїстого симплекс-методу отриманий припустимий план $X_1 = [6, 0, 21, 49, 0] \in \Omega_I$. Продовжимо розрахунок на пошук максимуму цільової функції. За відповідним алгоритмом звичайного симплекс-методу маємо табл. 8.

Таблиця 8

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			3	1	0	0	0	0		
a_3	0	49	0	-7	1	0	8	0		X_2
a_4	0	21	0	7	0	1	-3	0	3	
a_6	0	0	0	-7	0	0	1	1		
a_1	3	6	1	-1	0	0	1	0		
Δ_j	$W_1(X_2) = 18$		0	-4	0	0	3	0		
a_3	0	70	0	0	1	1	5	0		X_{opt}
a_2	1	3	0	1	0	1/7	-3/7	0		
a_6	0	21	0	0	0	1	-2	1		
a_1	3	9	1	0	0	1/7	4/7	0		
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 30$		0	0	0	4/7	9/7	0		

$$X_{\max}^{opt} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 39, \\ x_1 - x_2 = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

На рис. 1 наведено графічну інтерпретацію симплексного розв'язку, як послідовного переходу від початкової вершини X_0 до екстремальної. Шлях до максимуму – $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_{\max}^{opt}$. Символічне зображення цих шляхів наведено стрілочками (рис. 1). Зауважимо, що маємо випадок виродженого розв'язку в задачах лінійної оптимізації. Вершини X_1 та X_2 графічно тотожні – є однією вершиною (рис. 1).

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{opt} = [9, 3]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{opt}) = 30$.

Задача № 1.4

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

$$\begin{aligned} W_I &= -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 \leq -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \leq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Підготуємо систему обмежень для початку розв'язку симплекс-методом:

$$\begin{aligned} W_I &= -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max \\ \Omega_I : &\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 + x_7 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 7. \end{cases} \end{aligned}$$

План $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, -3, -3] \notin \Omega_I$ неприпустимий. Необхідно дотримуватись алгоритму двоїстого симплекс-методу. Повний розрахунок міститься в табл. 9.

Таблиця 9

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			-3	-2	5	-2	-3	0	0		
a_6	0	-3	-2	4	4	1	-2	1	0		
a_7	0	-3	-1	2	2	-1	3	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		3	2	-5	2	3	0	0		
a_6	0	3	0	0	0	3	-8	1	-2	1	
a_1	-3	3	1	-2	-2	1	-3	0	-1	3	X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = -9$		0	8	1	-1	12	0	3		
a_4	-2	1	0	0	0	1	-8/3	1/3	-2/3		
a_1	-3	2	1	-2	-2	0	-1/3	-1/3	-1/3		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = -8$		0	8	1	0	28/3	1/3	7/3		

На другому кроці симплексного розрахунку виконана припустимість плану $X_2 = [3, 0, 0, 0, 0, 3, 0] \in \Omega_I$. Подальший розрахунок в межах звичайного симплекс-методу надає оптимальне значення $X_{max}^{opt} = [2, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$, $W_I(X_{max}^{opt}) = -8$.

Задача № 2.1

Розв'язати задачу лінійної оптимізації:

$$\begin{aligned}
 W_I &= 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \max \\
 \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Додаємо штучні змінні до лівих частин рівнянь системи. Допоміжна задача методу штучного базису має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min \\ \Omega_I : &\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 4x_4 + u_1 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 + u_2 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 2, 2] \in \Omega_I$ є припустимим. Виконуємо розрахунки допоміжної задачі звичайним симплекс-методом (табл. 10).

Таблиця 10

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	u_1	u_2	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			0	0	0	0	1	1		
u_1	1	2	2	0	-1	4	1	0	1/2	X_0
u_2	1	2	1	5	1	2	0	1	1	
Δ_j	$W_1(X_0) = 4$		3	5	0	6	0	0		
a_4	0	1/2	1/2	0	-1/4	1	1/4	0		X_1
u_2	1	1	0	5	3/2	0	-1/2	1		
Δ_j	$W_1(X_1) = 1$		0	5	3/2	0	-3/2	0		
a_4	0	1/2	1/2	0	-1/4	1	1/4	0		X_2
a_2	0	1/5	0	1	3/10	0	-1/10	1/5		
Δ_j	$W_1(X_2) = 0$		0	0	0	0	-1	-1		

Кінцеві обчислення табл. 10 вказують на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то допоміжна

задача розв'язана. Отримано припустимий опорний план для вихідної задачі $X_0 = \left[0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{2}, 0\right] \in \Omega_I$.

План X_0 дозволяє провести симплексний розв'язок вихідної задачі.

Всі обчислення розміщені в табл. 11.

Таблиця 11

			a_1	a_2	a_3	a_4		
Базис	C	B	7	-3	5	6	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_4	6	2/3	1/2	5/6	0	1		
a_3	5	2/3	0	10/3	1	0		X_3
Δ_j	$W_I(X_2) =$	22/3	-4	74/3	0	0		
a_1	7	4/3	1	5/3	0	2		
a_3	5	2/3	0	10/3	1	0		X_{opt}
Δ_j	$W_I(X_{opt}) =$	38/3	0	94/3	0	8		

Перевірка плану $X_3 = \left[0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{2}, 0\right] \in \Omega_I$ на оптимальність не дає позитивних результатів. В індексному рядку Δ_j є від'ємна оцінка $\Delta_1 = -4$. Наступна ітерація замінює в базисі a_4 на a_1 . Здійснюється перехід у сусідню вершину поліедра Ω_I . Вершина $X_{opt} = \left[\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0\right]$ є оптимальною для нашої задачі на максимум. Цільова функція набуває максимального значення $W_I^{\max} = -\frac{38}{3}$.

Задача № 2.2

Розв'язати задачу лінійної оптимізації:

$$W_I = -3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 \rightarrow \min$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 - x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Розв'язок.

З метою переходу до невід'ємних значень в правих частинах, змінюємо знак рівнянь на протилежний. Додаємо штучні змінні до лівих частин рівнянь системи обмежень. Допоміжна задача методу штучного базису має вигляд:

$$W_I = u_1 + u_2 \rightarrow \min$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + u_1 = 1, \\ -6x_1 - 5x_2 - 7x_3 + x_4 + u_2 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 1, 2] \in \Omega_I$ є припустимим. Виконуємо розрахунки допоміжної задачі звичайним симплекс-методом (табл. 12).

Таблиця 12

			a_1	a_2	a_3	a_4	u_1	u_2		
Базис	C	B	0	0	0	0	1	1	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
u_1	1	1	-3	1	2	0	1	0		
u_2	1	2	-6	-5	-7	1	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 3$		-9	-4	-5	1	0	0		

Продовження таблиці 12

u_1	1	1	-3	1	2	0	1	0		
a_4	0	2	-6	-5	-7	1	0	1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 1$		-3	1	2	0	0	-1		
a_2	0	1	-3	1	2	0	1	0		
a_4	0	7	-21	0	3	1	5	1		X_2
Δ_j	$W_1(X_2) = 0$		0	0	0	0	-1	-1		

Кінцеві обчислення табл. 12 вказують на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то допоміжна задача розв'язана. Отримано припустимий опорний план для вихідної задачі $X_2 = [0, 1, 0, 7, 0] \in \Omega_f$.

План X_2 дозволяє провести симплексний розв'язок вихідної задачі.

Всі обчислення розміщені в табл. 13.

Таблиця 13

			a_1	a_2	a_3	a_4		
Базис	C	B	3	4	7	4	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_2	4	1	-3	1	2	0	1/2	X_2
a_4	4	7	-21	0	3	1	7/3	
Δ_j	$W_1(X_2) = 32$		-99	0	13	0		
a_3	7	1/2	-3/2	1/2	1	0		X_{opt}
a_4	4	11/2	-33/2	-3/2	0	1		
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 51/2$		-159/2	-13/2	0	0		

Перевірка плану $X_2 = [0, 1, 0, 7, 0]$ на оптимальність не дає позитивних результатів. В індексному рядку Δ_j є додатна оцінка $\Delta_4 = 13$. Наступна ітерація замінює в базисі a_2 на a_3 . Здійснюється перехід у сусідню вершину поліедра Ω_f .

Вершина $X_{\text{opt}} = \left[0, 0, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right]$ є оптимальною для нашої задачі на мінімум. Цільова функція набуває мінімального значення $W_I^{\min} = \frac{51}{2}$.

Задача № 2.3

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.

$$\Omega_I : \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 9x_4 = -5, \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Розв'язок.

Застосуємо методику штучного базису для отримання відповіді на запитання задачі. Змінюємо знак першого рівняння, з метою переходу до невід'ємного значення в правій частині. До лівої частини першого рівняння додаємо штучну змінну. Допоміжна задача методики штучного базису приймає вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min, \\ \Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 9x_4 + u_1 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 5x_3 + x_4 + u_2 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 5, 2] \in \Omega_I$ є припустимим. Складаємо першу і наступні симплексні таблиці. Алгоритм розрахунку виконано звичайним симплекс-методом (табл. 14).

Таблиця 14

			a_1	a_2	a_3	a_4	u_1	u_2		
Базис	C	B	0	0	0	0	1	1	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
u_1	1	5	-7	6	-5	-9	1	0		
u_2	1	2	1	-7	5	1	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 7$		-6	-1	0	-8	0	0		

Обчислення вказують на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису не вилучені штучні змінні, то можна стверджувати: вихідна система не має розв'язків в області невід'ємних значень змінних величин.

Задача № 2.4

Розв'язати задачу лінійної оптимізації:

$$\begin{aligned}
 W_I &= -2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 3x_5 \rightarrow \max \\
 \Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Додаємо штучні змінні до лівих частин рівнянь системи. Допоміжна задача методу штучного базису має вигляд:

$$\begin{aligned}
 W_I &= u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \min, \\
 \Omega_I : \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 5x_3 - x_4 + 7x_5 + u_1 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 + u_2 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 + u_3 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 3, 1, 2] \in \Omega_I$ є припустимим. Виконуємо розрахунки допоміжної задачі звичайним симплекс-методом (табл. 15).

Таблиця 15

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	u_1	u_2	u_3	$\{b_i/a_{ij}\}$	Вершина
			0	0	0	0	0	1	1	1		
u_1	1	3	-3	5	5	-1	7	1	0	0	3/5	X_0
u_2	1	1	1	5	3	-2	2	0	1	0	1/3	
u_3	1	2	4	4	7	-2	-1	0	0	1	2/7	
Δ_j	$W_1(X_0) = 4$		2	14	15	-5	8	0	0	0		
u_1	1	11/7	-41/7	15/7	0	3/7	54/7	1	0	-5/7	11/54	X_1
u_2	1	1/7	-5/7	23/7	0	-8/7	17/7	0	1	-3/7	1/17	
a_3	0	2/7	4/7	4/7	1	-2/7	-1/7	0	0	1/7		
Δ_j	$W_1(X_1) = 12/7$		-46/7	38/7	0	-5/7	71/7	0	0	-15/7		
u_1	1	19/17	-61/17	-141/17	0	69/17	0	1	-54/17	11/17	19/69	X_2
a_5	0	1/17	-5/17	23/17	0	-8/17	1	0	7/17	-3/17		
a_3	0	5/17	9/17	13/17	1	-6/17	0	0	1/17	2/17		
Δ_j	$W_1(X_2) = 19/17$		-61/17	-141/17	0	69/17	0	0	-71/17	-6/17		
a_4	0	19/69	-61/69	-47/23	0/1	1/1	0/1	17/69	-18/23	11/69		X_{opt}
a_5	0	13/69	-49/69	9/23	0/1	0/1	1/1	8/69	1/23	-7/69		
a_3	0	9/23	5/23	1/23	1/1	0/1	0/1	2/23	-5/23	4/23		
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 0$		0	0	0	0	0	-1	-1	-1		

Кінцеві обчислення табл. 15 вказують на відсутність від'ємних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою максимуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то допоміжна задача розв'язана. Отримано припустимий опорний план для вихідної задачі $X_0 = \left[0, 0, \frac{9}{23}, \frac{19}{69}, \frac{13}{69}\right] \in \Omega_I$.

План X_0 дозволяє провести симплекс-розв'язок вихідної задачі.

Всі обчислення розміщені в табл. 16.

Перевірка плану $X_0 = \left[0, 0, \frac{9}{23}, \frac{19}{69}, \frac{13}{69}\right] \in \Omega_I$ на оптимальність не дає позитивних результатів. В індексному рядку Δ_j

є від'ємні оцінки. Наступна ітерація підкорена алгоритму звичайного симплекс-методу. Вершина $X_{opt} = \left[\frac{5}{4}, \frac{11}{4}, 0, 7, 0 \right] \in \Omega_I$ є оптимальною для нашої задачі на максимум. Цільова функція набуває максимального значення $W_I^{\max} = 39$.

Таблиця 16

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	Вершина
			-2	1	1	5	-3		
a_4	5	19/69	-61/69	-47/23	0	1	0		X_0
a_5	-3	13/69	-49/69	9/23	0	0	1	13/27	
a_3	1	9/23	5/23	1/23	1	0	0	9	
Δ_j	$W_I(X_0) = 56/69$		- 5/69	-284/23	0	0	0		
a_4	5	34/27	-124/27	0	0	1	47/9		X_1
a_2	1	13/27	- 49/27	1	0	0	23/9		
a_3	1	10/27	8/27	0	1	0	- 1/9	5/4	
Δ_j	$W_I(X_1) = 193/27$		-607/27	0	0	0	284/9		
a_4	5	7	0	0	31/2	1	7/2		X_{opt}
a_2	1	11/4	0	1	49/8	0	15/8		
a_1	1	5/4	1	0	27/8	0	- 3/8		
Δ_j	$W_I(X_{opt}) = 39$		3	0	86	0	22		

Модельний варіант № 2 типових завдань № 3

1 Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

1.1

$$W_I = 91x_1 + 26x_2 - 37x_3 - \text{opt}(\min),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.2

$$W_I = -76x_1 - 40x_2 + 36x_3 - \text{opt}(\max),$$

$$\Omega_I: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -13x_1 + 10x_2 + 3x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

1.3

$$W_I = 4x_1 + 2x_2 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 1, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 77, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 18, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.4

$$W_I = x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq -1, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 3x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Навести геометричну інтерпретацію розв'язку.

2

Застосовуючи методику штучного базису знайти розв'язок задачі лінійної оптимізації

2.1

$$W_I = 3x_1 + 5x_2 + 2x_4 - \max,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.2

$$W_I = 3x_3 + x_4 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.3

$$W_I = 7x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 6x_4 - 7x_5 - \max, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

$$\Omega_I: \begin{cases} 8x_1 - 9x_2 - 7x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = -9, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

2.4

$$W_I = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 - \min,$$

$$\Omega_I: \begin{cases} -2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних.



Задача № 1.1

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

$$W_I = 91x_1 + 26x_2 - 37x_3 \rightarrow \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = 91x_1 + 26x_2 - 37x_3 \rightarrow \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 1, -1] \notin \Omega_I$ не є припустимим. Складаємо першу симплексну таблицю двоїстого симплекс-методу (табл. 17).

Таблиця 17

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	91	26	-37	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_4	0	1	1	-2	1	1	0		
a_5	0	-1	-3	2	1	0	1		X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-91	-26	37	0	0		

Алгоритм двоїстого симплекс-методу вимагає на кожному кроці зміни від'ємного знака правих частин на додатний. Для цього необхідно знаходження у відповідному рядку

від'ємних значень. У табл. 17 напрямним рядком буде рядок базисного вектора a_5 . Він містить від'ємне значення $b_2 = -1$. У цьому рядку знаходимо від'ємні значення коефіцієнтів системи обмежень. Таке значення єдине $a_{21} = -3$. У разі відсутності від'ємних значень стверджується – задача не має розв'язків. Фактично у двоїстому симплекс-методі значення індексного рядка не враховують.

Для розв'язувального елемента $a_{21} = -3$ виконуємо розрахунки симплекс-методом. В базис $\{a_4, a_5\}$ замість вектора a_5 входить вектор a_1 (табл. 18).

Таблиця 18

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	91	26	-37	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_j
a_4	0	2/3	0	- 4/3	4/3	1	1/3	1/2	
a_1	91	1/3	1	- 2/3	- 1/3	0	- 1/3		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 91/3$		0	-260/3	20/3	0	- 91/3		

Процедура двоїстого симплекс-методу отримала припустимий план. Стовпчик B не містить від'ємні значення. Розв'язувальний елемент відповідно до звичайного симплекс-методу a_{13} . (табл. 18). Складаємо наступну симплексну таблицю 19.

Таблиця 19

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	91	26	-37	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_j
a_3	-37	1/2	0	-1	1	3/4	1/4		
a_1	91	1/2	1	-1	0	1/4	- 1/4		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 27$		0	-80	0	-5	-32		

Всі оцінки індексного рядка не додатні. Для задачі на мінімум це є ознакою оптимальності. План $X_{opt} = \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right]$ є оптимальним.

Задача № 1.2

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїтим симплекс-методом.

$$W_I = -76x_1 - 40x_2 + 36x_3 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -13x_1 + 10x_2 + 3x_3 \leq -5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 3. \end{cases}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$W_I = -76x_1 - 40x_2 + 36x_3 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -13x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_5 = -5, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 1, -5] \notin \Omega_I$ не є припустимим. Складаємо першу симплексну таблицю двоїстого симплекс-методу (табл. 20).

Таблиця 20

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	-76	-40	36	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_4	0	1	1	-2	1	1	0		
a_5	0	-5	-13	10	3	0	1		X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		76	40	-36	0	0		

Алгоритм двоїстого симплекс-методу вимагає на кожному кроці зміни від'ємного знака правих частин на додатний. Для цього необхідно знаходження у відповідному рядку від'ємних значень. У табл. 20 напрямним рядком буде рядок

базисного вектора a_5 . Він містить від'ємне значення $b_2 = -5$. У цьому рядку знаходимо від'ємні значення коефіцієнтів системи обмежень. Таке значення єдине: $a_{21} = -13$.

Для розв'язувального елемента a_{21} виконуємо розрахунки симплекс-методом. У базис $\{a_4, a_5\}$ замість вектора a_5 входить вектор a_1 (табл. 21).

Таблиця 21

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	-76	-40	36	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_j
a_4	0	8/13	0	-16/13	16/13	1	1/13	1/2	
a_1	-76	5/13	1	-10/13	-3/13	0	-1/13		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = -380/13$		0	1280/13	-240/13	0	76/13		

Процедура двоїстого симплекс-методу отримала припустимий план. Стовпчик B не містить від'ємних значень. Розв'язувальний елемент табл. 5 є a_{13} . Складемо наступну симплексну таблицю за алгоритмом звичайного симплекс-методу табл. 22.

Таблиця 22

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
Базис	C	B	-76	-40	36	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_j
a_3	36	1/2	0	-1	1	13/16	1/16		
a_1	-76	1/2	1	-1	0	3/16	-1/16		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = -20$		0	80	0	15	7		

Всі оцінки індексного рядка невід'ємні. Для задачі на максимум це є ознакою оптимальності. Оптимальний план – $X_{opt} = \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right]$, максимальне значення цільової функції – $W_{max} = -20$.

Задача № 1.3

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїтим симплекс-методом і графічно. Навести геометричну інтерпретацію ітерацій симплекс-методу.

$$\begin{aligned}
 W_I &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\
 \Omega_I : &\begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 1, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 77, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 18, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ 0 \leq x_1, \quad 0 \leq x_2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned}
 W_I &= 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\
 \Omega_I : &\begin{cases} -7x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 + 9x_2 + x_4 = 77, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_5 = 18, \\ -x_1 - 6x_2 + x_6 = -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6. \end{cases}
 \end{aligned}$$

План $X_0 = [0, 0, 1, 77, 18, -6] \notin \Omega_I$ неприпустимий. Дотримуємось алгоритму двоїстого симплекс-методу. Стартовий розрахунок міститься в табл. 23.

В останній симплекс-таблиці двоїстого симплекс-методу отриманий припустимий план $X_1 = [6, 0, 43, 47, 0] \in \Omega_I$. Продовжимо розрахунок на пошук максимуму цільової функції. За відповідним алгоритмом звичайного симплекс-методу маємо табл. 24.

Таблиця 23

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
Базис	C	B	4	2	0	0	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	0	1	-7	1	1	0	0	0		
a_4	0	77	5	9	0	1	0	0		
a_5	0	18	3	-4	0	0	1	0		X_0
a_6	0	-6	-1	-6	0	0	0	1		
Δ_j	$W_1(X_0) = 0$		-4	-2	0	0	0	0		
a_3	0	43	0	43	1	0	0	-7		
a_4	0	47	0	-21	0	1	0	5	9,4	
a_5	0	0	0	-22	0	0	1	3	0	X_1
a_1	4	6	1	6	0	0	0	-1		
Δ_j	$W_1(X_1) = 24$		0	22	0	0	0	-4		

Таблиця 24

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
Базис	C	B	4	2	0	0	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	0	68	0	0	1	25/47	68/47	0		
a_2	2	3	0	1	0	3/47	- 5/47	0		
a_6	0	22	0	0	0	22/47	- 21/47	1		X_{opt}
a_1	4	10	1	0	0	4/47	9/47	0		
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 46$		0	0	0	22/47	26/47	0		

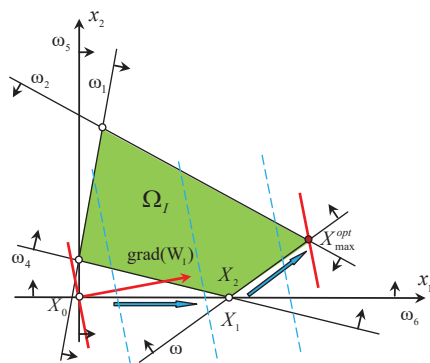
В останній симплекс-таблиці всі оцінки індексного рядка невід'ємні. Для задачі лінійної оптимізації на максимум це означає оптимальність плану $X_{\max}^{opt} = [10, 3]$, $W_1(X_{\max}^{opt}) = 46$.

Вихідна задача є двовимірною і тому може бути розв'язана графічно. Складаємо рівняння меж (граничних прямих):

$$\omega_1 : -7x_1 + x_2 = 1, \quad \omega_2 : 5x_1 + 9x_2 = 77, \quad \omega_3 : 3x_1 - 4x = 18,$$

$$\omega_4 : x_1 + 6x_2 = 6, \quad \omega_5 : x_1 = 0, \quad \omega_6 : x_2 = 0,$$

і встановлюємо півплощини, які подані відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_1 (рис. 2).



$$W_I = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + x_2 \leq 1, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 77, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 18, \\ -x_1 - 6x_2 \leq -6, \\ 0 \leq x_1, 0 \leq x_2. \end{cases}$$

Рис. 2. Геометрична інтерпретація двоїстого симплекс-методу

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_I) = [4, 2]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня.

Координати екстремальних вершин визначаються як координати точок перетину відповідних граничних прямих:

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 9x_2 = 77, \\ 3x_1 - 4x_2 = 18, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

На рис. 2 наведено графічну інтерпретацію симплексного розв'язку, як послідовного переходу від початкової вершини X_0 до екстремальної. Шлях до максимуму – $X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_{\max}^{\text{opt}}$. Символічне зображення цих шляхів наведено стрілочками (рис. 2). Зауважимо, що маємо випадок виродженого розв'язку в задачах лінійної оптимізації. Вершини X_1 та X_2 графічно тотожні – є однією вершиною.

Таким чином, максимального значення цільова функція набуває у вершині $X_{\max}^{\text{opt}} = [10, 3]$ і воно рівне $W_I(X_{\max}^{\text{opt}}) = 46$.

Задача № 1.4

Задачу лінійної оптимізації розв'язати двоїстим симплекс-методом.

$$W_I = x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 \leq -1, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 3x_5 \leq -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Розв'язок.

Підготуємо систему обмежень для початку розв'язку симплекс-методом:

$$W_I = x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \min,$$

$$\Omega_I : \begin{cases} 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 + x_6 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - 3x_5 + x_7 = -1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 7. \end{cases}$$

План $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, -1, -1] \notin \Omega_I$ неприпустимий. Необхідно дотримуватись алгоритму двоїстого симплекс-методу. Повний розрахунок міститься в табл. 25.

Таблиця 25

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7		
Базис	C	B	1	1	5	2	-1	0	0	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_6	0	-1	2	0	-2	2	5	1	0		
a_7	0	-1	-2	-1	5	-3	-3	0	1		X_0
Δ_j	$W_I(X_0) = 0$		-1	-1	-5	-2	1	0	0		
a_6	0	-1	2	0	-2	2	5	1	0		
a_2	1	1	2	1	-5	3	3	0	-1		X_1
Δ_j	$W_I(X_1) = 1$		1	0	-10	1	4	0	-1		

Продовження таблиці 25

a_3	5	1/2	-1	0	1	-1	- 5/2	- 1/2	0		
a_2	1	7/2	-3	1	0	-2	-19/2	- 5/2	-1		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 6$		-9	0	0	-9	-21	-5	-1		

На першому та другому кроці симплексного розрахунку реалізовувало алгоритм двоїстого симплекс-методу. Він дозволив отримати припустимий план $X_2 = \left[0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right] \in \Omega_I$. Отриманий план є оптимальним, оскільки всі оцінки індексного рядку не додатні, $X_{min} = \left[0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0\right] \in \Omega_I$, $W_I(X_{max}^{opt}) = 6$.

Зауваження до розв'язку задачі № 1.4.

Подану задачу можливо розв'язати інакше. Дійсно, оскільки двоїста задача буде двовимірною, то можна навести графічний розв'язок двоїстої задачі. А далі, для заходження розв'язку прямої задачі використати основну теорему лінійної оптимізації, яка пов'язує розв'язки прямої та двоїстої задачі. Реалізуємо описаний алгоритм.

Двоїста задача до вихідної має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
 & W_{II} = y_1 + y_2 \rightarrow \max, \\
 & \Omega_{II} : \begin{cases} -2y_1 + 2y_2 \leq 1, \\ y_2 \leq 1, \\ 2y_1 - 5y_2 \leq 5, \\ -2y_1 + 3y_2 \leq 2, \\ -5y_1 + 3y_2 \leq -1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Зобразимо поліедр Ω_{II} двоїстої задачі. Граничні рівняння поліедра рівні:

$$\omega_1: -2y_1 + 2y_2 = 1, \quad \omega_2: 2y_2 = 1, \quad \omega_3: 2y_1 - 5y_2 = 5,$$

$$\omega_4: -2y_1 + 3y_2 = 2, \quad \omega_5: -5y_1 + 3y_2 = -1, \quad \omega_6: y_1 = 0, \quad \omega_7: y_2 = 0.$$

Встановлюємо півплощини, які подані відповідними нерівностями. В результаті можемо зобразити поліедр Ω_{II} (рис. 3).

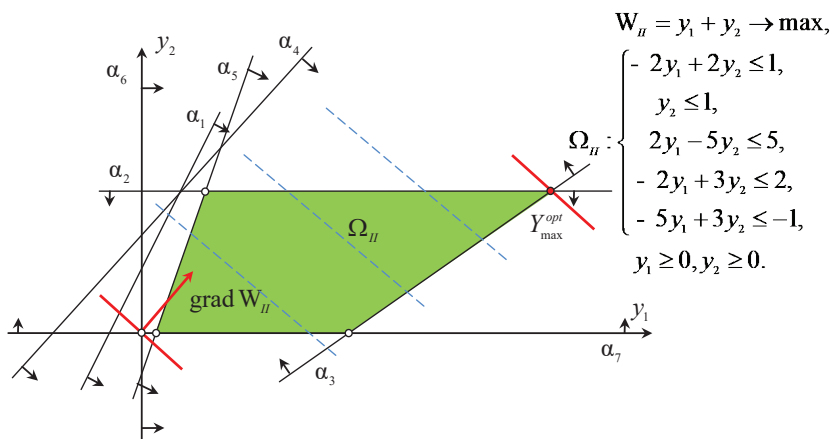


Рис. 3. Геометричний розв'язок двоїстої задачі

У точці початку координат зображуємо вектор градієнта $\text{grad}(W_{II}) = [1, 1]$. Перпендикулярно до нього проводимо лінію рівня. Переміщуючи її паралельно собі по напрямку градієнта, встановлюємо точку максимуму $Y_{\max}^{\text{opt}}$ – вершина виходу ліній рівня. Координати екстремальної вершини визначаються як координати точок перетину відповідних граничних прямих:

$$Y_{\max}^{\text{opt}} : \alpha_2 \times \alpha_3 \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 1, \\ 2y_1 - 5y_2 = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Таким чином, максимального значення цільова функція двоїстої задачі набуває у вершині $Y_{\max}^{opt} = [5, 1]$ і воно рівне $W_{II}(Y_{\max}^{opt}) = 6$.

Введемо позначення $X_{\min}^{opt} = [x_1^{\min}, x_2^{\min}, x_3^{\min}, x_4^{\min}, x_5^{\min}]$, $Y_{\max}^{opt} = [y_1^{\max}, y_2^{\max}] = [5, 1]$ – розв’язки прямої та двоїстої задачі. Згідно з основними теоремами лінійної оптимізації, необхідним і достатнім є виконання наступних відношень:

$$\begin{cases} x_1^{\min}(-2y_1^{\max} + 2y_2^{\max} - 1) = 0, \\ x_2^{\max}(y_2^{\max} - 1) = 0, \\ x_3^{\min}(2y_1^{\max} - 5y_1^{\max} - 5) = 0, \\ x_4^{\min}(-2y_1^{\max} + 3y_2^{\max} - 2) = 0, \\ x_5^{\min}(-5y_1^{\max} + 3y_2^{\max} + 1) = 0, \\ y_1^{\max}(2x_1^{\min} - 2x_3^{\min} + 2x_4^{\min} + 5x_5^{\min} + 1) = 0, \\ y_2^{\max}(-2x_1^{\min} - x_2^{\min} + 5x_3^{\min} - 3x_4^{\min} - 3x_5^{\min} + 1) = 0. \end{cases}$$

Оскільки відомий розв’язок двоїстої задачі $Y_{\max}^{opt} = [y_1^{\max}, y_2^{\max}] = [5, 1]$, то з кожного рівняння системи будемо мати:

$$x_1^{\min}(-2y_1^{\max} + 2y_2^{\max} - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1^{\min}(-2 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1^{\min} = 0,$$

$$x_2^{\max}(y_2^{\max} - 1) = 0 \Leftrightarrow x_2^{\max}(1 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_2^{\max} > 0,$$

$$x_3^{\min}(2y_1^{\max} - 5y_1^{\max} - 5) = 0 \Leftrightarrow x_3^{\min}(2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 - 5) = 0 \Leftrightarrow x_3^{\min} > 0,$$

$$x_4^{\min}(-2y_1^{\max} + 3y_2^{\max} - 2) = 0 \Leftrightarrow x_4^{\min}(-2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_4^{\min} = 0,$$

$$x_5^{\min}(-5y_1^{\max} + 3y_2^{\max} + 1) = 0 \Leftrightarrow x_5^{\min}(-5 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_5^{\min} = 0,$$

Отже, $X_{\min}^{opt} = \left[0, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right]$, що збігається з наведеними вище розрахунками симплекс-методом.

Задача № 2.1

Розв'язати задачу лінійної оптимізації:

$$\begin{aligned} W_I &= 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ \Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

Додаємо штучні змінні до лівих частин рівнянь системи. Допоміжна задача методу штучного базису має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min, \\ \Omega_I : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + u_1 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + u_2 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 3, 2] \in \Omega_I$ є припустимим. Виконуємо розрахунки допоміжної задачі звичайним симплекс-методом (табл. 26).

Кінцеві обчислення табл. 26 вказують на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то допоміжна задача розв'язана. Отримано припустимий опорний план для

вихідної задачі $X_0 = \left[\frac{3}{7}, 0, \frac{1}{7}, 0\right] \in \Omega_I$.

Таблиця 26

			a_1	a_2	a_3	a_4	u_1	u_2		
Базис	C	B	0	0	0	0	1	1	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
u_1	1	1	1	2	4	1	1	0	1/1	
u_2	1	3	6	5	3	-2	0	1	1/2	X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 4$		7	7	7	-1	0	0		
u_1	1	1/2	0	7/6	7/2	4/3	1	-1/6	1/7	
a_1	0	1/2	1	5/6	1/2	-1/3	0	1/6	1	X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 1/2$		0	7/6	7/2	4/3	0	-7/6		
a_3	0	1/7	0	1/3	1	8/21	2/7	-1/21		
a_1	0	3/7	1	2/3	0	-11/21	-1/7	4/21		X_2
Δ_j	$W_1(X_2) = 0$		0	0	0	0	-1	-1		

План X_0 дозволяє провести симплексний розв'язок вихідної задачі.

Всі обчислення розміщені в табл. 27.

Таблиця 27

			a_1	a_2	a_3	a_4		
Базис	C	B	6	-3	-1	2	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
a_3	-1	1/7	0	1/3	1	8/21	3/8	
a_1	6	3/7	1	2/3	0	-11/21		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 17/7$		0	20/3	0	-116/21		
a_4	2	3/8	0	7/8	21/8	1		
a_1	6	5/8	1	9/8	11/8	0		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 9/2$		0	23/2	29/2	0		

Перевірка плану $X_0 = \left[\frac{3}{7}, 0, \frac{1}{7}, 0 \right] \in \Omega_I$ на оптимальність не дає позитивних результатів. В індексному рядку Δ_j є від'ємна

оцінка $\Delta_4 = -\frac{116}{21}$. Наступна ітерація замінює у базисі a_3 на a_4 . Здійснюється перехід у сусідню вершину поліедра Ω_I . Вершина $X_{opt} = \left[\frac{5}{8}, 0, 0, \frac{3}{8}\right] \in \Omega_I$ є оптимальною для нашої задачі на максимум. Цільова функція набуває максимального значення $W_I^{\max} = \frac{9}{2}$.

Задача № 2.2

Розв'язати задачу лінійної оптимізації

$$\begin{aligned} W_I &= 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ \Omega_I : \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -3, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язок.

З метою переходу до невід'ємних значень у правих частинах, змінюємо знак рівнянь на протилежний. Додаємо штучні змінні до лівих частин рівнянь системи обмежень. Допоміжна задача методу штучного базису має вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min, \\ \Omega_I : \begin{cases} -7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + u_1 = 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 + u_2 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 3, 2] \in \Omega_f$ є припустимим. Виконуємо розрахунки допоміжної задачі звичайним симплекс-методом (табл. 28).

Таблиця 28

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	u_1	u_2	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			0	0	0	0	1	1		
u_1	1	3	-7	3	-5	0	1	0		
u_2	1	2	0	-1	1	1	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 5$		-7	2	-4	1	0	0		
a_2	0	1	-7/3	1	-5/3	0	1/3	0		
u_2	1	3	-7/3	0	-2/3	1	1/3	1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 3$		-7/3	0	-2/3	1	-2/3	0		
a_2	0	1	-7/3	1	-5/3	0	1/3	0		
a_4	0	3	-7/3	0	-2/3	1	1/3	1		X_2
Δ_j	$W_1(X_2) = 0$		0	0	0	0	-1	-1		

Кінцеві обчислення табл. 28 вказують на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то допоміжна задача розв'язана. Отримано припустимий опорний план для вихідної задачі $X_2 = [0, 1, 0, 3] \in \Omega_f$.

План X_2 дозволяє провести симплексний розв'язок вихідної задачі.

Всі обчислення розміщені в табл. 29.

Таблиця 29

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
			6	7	5	-2		
a_2	7	1	-7/3	1	-5/3	0		
a_4	-2	3	-7/3	0	-2/3	1		X_{opt}
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 1$		-53/3	0	-46/3	0		

Перевірка плану $X_{opt} = [0, 1, 0, 3]$ на оптимальність дає позитивні результати. В індексному рядку Δ_j відсутні додатні оцінки. Вершина $X_{opt} = [0, 1, 0, 3]$ є оптимальною для нашої задачі на мінімум. Цільова функція набуває мінімального значення $W_I^{\min} = 1$.

Задача № 2.3

Встановити наявність або відсутність розв'язку системи на множині невід'ємних значень змінних:

$$\Omega_I : \begin{cases} 8x_1 - 9x_2 - 7x_3 + 8x_4 - 6x_5 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = -9, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Розв'язок.

Застосуємо методику штучного базису для отримання відповіді на запитання задачі. До лівих частин рівнянь системи додаємо штучні змінні. Допоміжна задача методики штучного базису приймає вигляд:

$$\begin{aligned} W_I &= u_1 + u_2 \rightarrow \min, \\ \Omega_I : \begin{cases} 8x_1 - 9x_2 - 7x_3 + 8x_4 - 6x_5 + u_1 = 4, \\ -3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 + u_2 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 4, 9] \in \Omega_I$ є припустимим. Складаємо першу і наступні симплексні таблиці. Алгоритм розрахунку виконано звичайним симплекс-методом табл. 30.

Таблиця 30

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	u_1	u_2		
Базис	C	B	0	0	0	0	0	1	1	$\{b_j/a_{ij}\}$	X_i
u_1	1	4	8	-9	-7	8	-6	1	0		
u_2	1	9	-3	-4	-1	-4	-6	0	1		X_0
Δ_j	$W_1(X_0) = 13$		5	-13	-8	4	-12	0	0		
a_1	0	1/2	1	-9/8	-7/8	1	-3/4	1/8	0		
u_2	1	21/2	0	-59/8	-29/8	-1	-33/4	3/8	1		X_1
Δ_j	$W_1(X_1) = 21/2$		0	-59/8	-29/8	-1	-33/4	-5/8	0		

Обчислення вказують на відсутність додатних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою мінімуму, а оскільки з базису не вилучено штучну змінну u_2 , то можливо стверджувати: вихідна система не має розв'язків в області невід'ємних значень змінних величин.

Задача № 2.4

Розв'язати задачу лінійної оптимізації

$$\begin{aligned}
 W_f &= 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 \rightarrow \min, \\
 \Omega_f : &\begin{cases} -2x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 3x_5 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розв'язок.

Змінюємо знаки рівнянь та додаємо штучні змінні до лівих частин рівнянь системи. Допоміжна задача методу штучного базису має вигляд:

$$\begin{aligned}
 W_I &= u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \min, \\
 \Omega_I : &\begin{cases} 2x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 3x_5 + u_1 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 + u_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 6x_5 + u_3 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5, \quad u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Первісний опорний план $X_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 2] \in \Omega_I$ є припустимим. Виконуємо розрахунки допоміжної задачі звичайним симплекс-методом (табл. 30).

Таблиця 30

Базис	C	B	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	u_1	u_2	u_3	$\{b_j/a_{ij}\}$	Вершина
u_1	1	2	0	2	-6	-6	-3	1	0	0		X_0
u_2	1	3	3	-1	-1	1	3	0	1	0	1	
u_3	1	2	2	-1	-4	2	-6	0	0	1	1	
Δ_j	$W_1(X_0) = 5$		5	0	-11	-3	-6	0	0	0		
u_1	1	2	0	2	-6	-6	-3	1	0	0	1	X_1
a_1	1	1	1	-1/3	-1/3	1/3	1	0	1/3	0		
u_3	0	0	0	-1/3	-10/3	4/3	-8	0	-2/3	1		
Δ_j	$W_1(X_1) = 3$		1	5/3	-19/3	-17/3	-2	0	-2/3	-1		
a_2	0	1	0	1	-3	-3	-3/2	1/2	0	0		X_2
a_1	0	4/3	1	0	-4/3	-2/3	1/2	1/6	1/3	0		
u_3	1	1/3	0	0	-13/3	1/3	-17/2	1/6	-2/3	1		
Δ_j	$W_1(X_2) = 1/3$		0	0	-13/3	1/3	-17/2	-5/6	-5/3	0		
a_2	0	4	0	1	-42	0	-78	2	-6	9		X_{opt}
a_1	0	2	1	0	-10	0	-33/2	1/2	-1	2		
a_4	0	1	0	0	-13	1	-51/2	1/2	-2	3		
Δ_j	$W_1(X_{opt}) = 0$		0	0	0	0	0	-1	-1	-1		

Кінцеві обчислення табл. 30 вказують на відсутність від'ємних оцінок в індексному рядку. Це є ознакою максимуму, а оскільки з базису вилучені всі штучні змінні, то допоміжна задача розв'язана. Отримано припустимий опорний план для вихідної задачі $X_0 = [2, 4, 0, 1, 0] \in \Omega_I$.

План X_0 дозволяє провести симплекс розв'язок вихідної задачі.

Всі обчислення розміщені в табл. 31.

Таблиця 31

			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	$\{b_j/a_{ij}\}$	
Базис	C	B	4	5	6	6	0		Вершина
a_2	5	4	0	1	-42	0	-78		
a_1	4	2	1	0	-10	0	-33/2		X_{opt}
a_4	6	1	0	0	-13	1	-51/2		
Δ_i	$W_1(X_{opt}) = 34$	34	0	0	-334	0	-609		

Перевірка плану $X_0 = [2, 4, 0, 1, 0] \in \Omega_I$ на оптимальність вказує на його оптимальність, оскільки в індексному рядку Δ_j немає додатних оцінок. Вершина $X_{opt} = [2, 4, 0, 1, 0] \in \Omega_I$ є оптимальною для вихідної задачі на мінімум. Цільова функція набуває максимального значення $W_I^{max} = 34$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. – Київ : ЗАТ «ВІПОЛ», 2000. – 688 с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций : учебник для вузов. – Киев : Вища школа, 1975. – 319 с.
3. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків, 2004. – 480 с.
4. Нікольський Ю. В. Дискретна математика : підручник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – К. : Видавнича група ВНУ, 2007. – 368 с.
5. Бех О. В. Математичне програмування : навч. посіб. / О. В. Бех, Т. А. Городня, А. Ф. Щербак. – Львів : Магнолія-2006, 2014. – 200 с.
6. Дзюбан І. Ю. Методи дослідження операцій / І. Ю. Дзюбан, О. Л. Жиров, О. Г. Охріменко. – Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка », 2005. – 108 с.
7. Дослідження операцій в економіці : підручник / за ред. І. К. Федоренко, О. І. Черняка. – Київ : Знання, 2007. – 558 с. – (Вища освіта ХХІ століття).
8. Крушевський А. В. Математичне програмування в економіці та управлінні : навч.-метод. посіб. / А. В. Крушевський, М. Ф. Тимчук. – Київ : ІММБ, 2001. – 107с.
9. Толбатов Ю. А. Математичне програмування : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / Ю. А. Толбатов, Є. Ю. Толбатов. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. – 432 с.

10. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навчальний посібник. – К. : Вид-во «Професіонал», 2004. – 350 с.

11. Титов С. Д., Чернова Л. С. Вища та прикладна математика : навч. посібник: у 2-х ч. – Ч. 1. – Харків : Факт, 2017. – 336 с.

НОТАТКИ

Навчальне видання

ТИТОВ Сергій Дмитрович
ЧЕРНОВА Людмила Сергіївна
ТИТОВА Ірина Сергіївна

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Комп'ютерне верстання *Н. М. Ковальчук*
Коректор *О. Є. Вакула*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 15,69. Вид. № 29. Зам. № 0203-07.
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54007
E-mail : publishing@nuos.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.