

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

Е. Ю. НЕДЕЛЬКО, А. С. ЯЦУНСКИЙ

***СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ***

Учебное пособие

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины

Николаев • НУК • 2015

УДК 796:006.91(076)

ББК 75.1я73

Н 42

Авторы:

Е. Ю. Неделько, кандидат технических наук, заведующий кафедрой высшей математики;

А. С. Яцунский, заведующий кафедрой физического воспитания и спорта, профессор НУК имени адмирала Макарова

Рецензенты:

А. Н. Кузнецов, кандидат физико-математических наук, профессор НУК имени адмирала Макарова;

Н. А. Романчук, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
как учебное пособие для студентов высших учебных заведений
(письмо № 1/11-17575 от 15.11.13 г.)*

Неделько Е. Ю.

Н 42 Статистические аспекты спортивной метрологии : учебное пособие / Е. Ю. Неделько, А. С. Яцунский. – Николаев : НУК, 2015. – 128 с.

ISBN 978–966–321–308–8

Учебное пособие направлено на изучение наиболее сложной и важной части спортивной метрологии – статистических методов, которые применяются в области физической культуры и спорта. Рассмотрены (с множеством примеров) следующие основные разделы: выборочный метод, первичная обработка статистических данных, теория оценивания, теория статистического вывода, теория корреляции, однофакторный дисперсионный анализ. Более строго (по сравнению с другими публикациями по спортивной метрологии) изложен раздел теории статистического вывода (проверка гипотез). В конце каждого основного раздела приведены задачи для самостоятельного решения, что позволяет использовать данное пособие и в качестве сборника задач.

Пособие будет полезно студентам вузов спортивного профиля, тренерам и преподавателям.

УДК 796:006.91(076)

ББК 75.1я73

© Неделько Е. Ю., Яцунский А. С., 2015

© Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова, 2015

ISBN 978–966–321–308–8

1. ВВЕДЕНИЕ

Предмет "Спортивная метрология" является неотъемлемой частью программы подготовки тренеров как в специализированных вузах спортивного профиля, так и в педагогических университетах. Наиболее важным и непростым для изучения разделом курса является математическая статистика, которая требует определенной математической культуры. В идеале к изучению математической статистики для использования ее в задачах физической культуры и спорта следует приступать, имея представление о базовых разделах математического анализа – дифференциального и интегрального исчисления. Однако, учитывая некоторую ограниченность математической подготовки тренерских кадров – выпускников вузов, приходится некоторые фундаментальные понятия давать на уровне определений. Вместе с тем зачастую удастся компенсировать указанный недостаток подготовки обилием примеров из практики, то есть отдать предпочтение эмпирическому подходу, логике и здравому смыслу.

Тренерская практика в целом и отдельные ее этапы, как например: планирование тренировочного процесса, выведение спортсменов на пик формы к ответственным соревнованиям, организации реабилитационного процесса в посттравматический период, определение уровня психологической совместимости членов команды и пр. требуют работы с массивами числовых данных. Обработывая и анализируя эти данные, можно сделать основные выводы, от которых в конечном итоге зависит успех работы как спортсмена, как и тренера. Помощь в решении

многих задач тренерской практики можно найти, используя методы математической статистики. В настоящем пособии обсуждаемые методы будут условно разделены на две части. Первая часть связана с методикой, не требующей сложных вычислений, по весьма эффективной для быстрого получения определённых полезных выводов. В частности, анализ статистических данных на основе основных числовых характеристик вариационных рядов. Вторая часть (теория статистического вывода, теория корреляции, дисперсионный анализ) требует более сложных вычислений. Однако, уровень решаемых задач в этой части более глубок и ценен.

2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КАК БАЗА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

В классическом изложении теорию вероятностей делят на две части: случайные события и случайные величины. Придерживаясь этой схемы, приведем основные определения.

Случайные события

Случайным событием назовем результат испытания, осуществляемого в определенных условиях. Заметим, что изменение условий испытания может привести к совершению новых событий. Например, если монетка падает на твёрдую поверхность, то возможны два исхода этого испытания, а, следовательно, два события: орел (событие A), решка (событие B). Если же монета падает в песок, возможно появление нового события – падение на ребро (событие C). Классифицируя события выделяют: а) совместные и несовместные; б) достоверные, невозможные, случайные.

Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном испытании. В противном случае они называются несовместными. Например: штангист во время соревнований использует наколенники (событие A); штангист во время соревнований использует пояс (событие B). События A и B совместны. Пример несовместных событий: одновременно проводятся забег на 100 м и попытка в толкании ядра. Участие в забеге (событие A) и толкание ядра (событие B) одного спортсмена являются событиями несовместными.

Событие является достоверным, если оно обязательно происходит в результате испытаний. Событие считается невозможным, если оно не произойдет никогда в условиях данного испытания. Событие называется случайным, если оно может произойти, а может и не произойти в результате испытания. Например, событие, состоящее в том, что при выходе футбольного мяча за лицевую линию поля от ноги футболиста защищающейся команды следует угловой удар, является достоверным. Тяжелоатлет поднял в толчке 600 кг – событие невозможное. Футбольная команда киевского "Динамо" станет чемпионом Украины в текущем году – событие случайное.

Среди возможных исходов испытания выделяют исходы, благоприятствующие данному событию. То есть исход испытания называется благоприятствующим событию, если появление исхода ведет к совершению события. Например, для попадания в финал соревнования по прыжкам в длину (событие A) спортсмен должен показать результат не менее 7 м. Предположим, что в шести тренировочных попытках показаны следующие результаты: 7,02 м; 6,94 м; 6,71 м; 7,10 м; 7,16 м; 7,01 м. Сколько попыток благоприятствуют событию A ? Очевидно – четыре.

В спортивной метрологии используют статистическое определение вероятности события A . Пусть проведены N испытаний, в каждом из которых событие A может появиться, а может и не появиться. Если событие A появляется M раз, то вероятность события $P(A)$ вычисляется по формуле

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

То есть вероятность – это численная мера объективной возможности появления события. При этом важно заметить, что N исходов испытаний предполагаются равновероятными и взаимно несовместными.

Вернувшись к предыдущему примеру, найдем вероятность того, что на соревнованиях прыгун в длину попадает в финал. В нашем случае $N = 6$, $M = 4$

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

К основным свойствам вероятности необходимо отнести следующие:

- а) вероятность невозможного события равна нулю ($M = 0$);
- б) вероятность достоверного события равна единице ($M = N$);
- в) вероятность случайного события больше нуля, но меньше единицы ($0 < P(A) < 1$).

Из определения вероятности следует, что чем больше вероятность, тем больше уверенности в том, что событие произойдет. Принято считать, что, если вероятность находится в пределах $0,7 \leq P(A) \leq 1$, то существует высокая степень уверенности, что событие A произойдет.

Вероятность в пределах $0,4 \leq P(A) < 0,7$ определяет среднюю уверенность совершения события A . Вероятность $P(A) \leq 0,4$ показывает весьма малую степень возможности появления события.

Определение вероятности $P(A)$ позволяет знать, какие перспективы имеет конкретный спортсмен в части победы в ответственных стартах.

Случайные величины

Случайной назовем величину, которая в результате испытания принимает одно из своих возможных значений. При этом заранее неизвестно, какое значение будет принято. Возможные значения расценивают как случайные события, каждое из которых наступает с определённой вероятностью. Если случайная величина принимает конечное или бесконечное счетное число значений, то ее называют дискретной. Если случайная величина все свои возможные значения принимает из конечного или бесконечного диапазона, она называется непрерывной. Задать случайную величину можно с помощью закона распределения. Для дискретной случайной величины закон распределения это соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Пример 2.1. Спортсмен выполнил 60 прыжков в высоту. 20 прыжков – 170 см, 30 прыжков – 175 см, 10 прыжков –

185 см. Составить закон распределения случайной величины X – результаты спортсмена. Случайная величина X принимает три возможных значения $x_1 = 170$ см; $x_2 = 175$ см; $x_3 = 185$ см. Подсчитываем вероятности этих значений: $P_1 = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$; $P_2 = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$;

$$P_3 = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$

Составим закон распределения

X	170	175	185
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Заметим, что $P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1$. Это свойство характерно для любой дискретной случайной величины. Иногда закон распределения представляют графически в виде многоугольника распределения. Многоугольник распределения для рассмотренного выше примера показан на рис. 2.1.

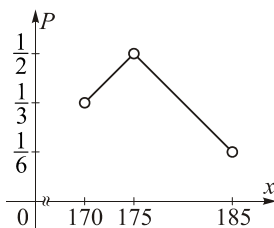


Рис. 2.1. Многоугольник распределения

2.1. Нормальное распределение

Говоря о непрерывных случайных величинах, выделим одну, которая имеет нормальное распределение. Особое внимание этой величине уделяется по той причине, что весьма значительное число процессов в технике, природе, общественной жизни и, следовательно, в спорте подчиняются нормальному закону. Графическое представление нормально распределенной случайной величины показано на рис. 2.2 [2].

На рис. 2.2 обозначено $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ – плотность

вероятности; a – математическое ожидание (или среднее значение $\bar{x}$); σ – среднее квадратическое отклонение.

Нормально распределённые случайные величины могут различаться лишь двумя параметрами a и σ . Как видно из рис. 2.2 параметр a определяет положение симметричной нормальной кривой относительно вертикальной оси, а параметр σ связан формой кривой. Чем больше σ тем более "уплощенной" (прижатой к оси Ox) вы-

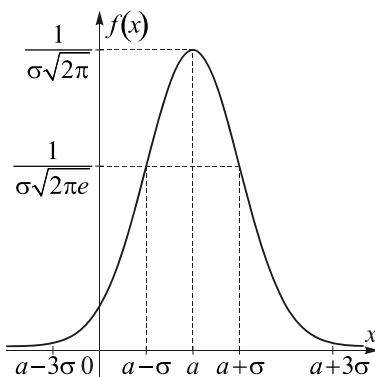


Рис. 2.2. Нормальное распределение

глядит нормальная кривая, чем меньше σ тем более островерхой (прижатой к оси симметрии) является кривая. Площадь под нормальной кривой равна единице. Этот факт можно связать с тем, что попадание возможных значений нормально распределённой случайной величины в диапазон $x \in (-\infty; \infty)$ есть событие достоверное, вероятность которого равна единице.

Еще одним важным свойством нормального распределения является то, что подавляющее большинство возможных значений (99,73 %) попадает в диапазон $x \in (a-3\sigma; a+3\sigma)$. Это обстоятельство дает возможность приблизительно оценить принадлежность данного эмпирического (опытного) распределения к нормальному закону. Действительно, если $0,9973 \cdot n$ значений эмпирического распределения (где n – общее число значений) оказываются в диапазоне $x \in (a-3\sigma; a+3\sigma)$, можно в первом приближении считать данное распределение нормальным.

Последняя методика проверки эмпирического распределения на принадлежность к нормальному получила название – правило 3σ (трёх "сигм").

Более точные приемы определения принадлежности эмпирического распределения нормальному виду связаны с теорией статистического вывода, которая будет рассмотрена ниже.

Обобщая опыт решения задач, встречающиеся в спорте, следует отметить, что большинство эмпирических распределений имеют нормальный характер. Однако, учитывая важность возможных выводов, основанных на нормальном характере распределения, необходимо обладать методикой проверки "нормальности" данного эмпирического распределения.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И ЕЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Приведенные выше краткие сведения о теории вероятностей, позволяет характеризовать ее как науку "доопытную". То есть для определения вероятности какого-либо события не обязательно проводить эксперимент. Его можно провести мысленно. В противоположность этому математическая статистика – наука "послеопытная", то есть вступающая в силу после реально проведенного эксперимента. Можно выделить три основных ее цели и задачи. Первая – организовать сбор статистической информации. Вторая – сгруппировать и обработать полученную информацию. Третья – сделать статистический вывод, учитывая характер поставленных в начале исследований задач.

3.1. Основные шкалы и измерения в них [8]

Статистические данные, подлежащие дальнейшей обработке, как правило, представлены в виде массива качественных или количественных данных. Эти данные можно оценивать и, соответственно, измерять в различных шкалах. Отметим некоторые из них.

Шкала наименований. При измерениях в этой шкале все изучаемые объекты разбиваются на группы, каждой из которых присваивается номер. Например, спортивную делегацию

представляют легкоатлеты (группа 1), тяжелоатлеты (группа 2), боксеры (группа 3). Различие между номерами подчеркивает только принадлежность к группе.

Шкала порядка (ранговая). Числа, присваиваемые объектам, отражают количество свойства, принадлежащего им. Разность между числами не передаёт количественную разность в изучаемом свойстве объекта.

Пример 3.1. Семь спортсменов тяжелоатлетов (вес до 110 кг) показали следующие результаты в толчке (кг): 190, 189, 201, 185, 192, 194, 186. Представить результаты в шкале рангов от большего к меньшему.

Результаты можно представить следующим образом:

Таблица 3.1

Ранг	1	2	3	4	5	6	7
Вес, кг	201	194	192	190	189	186	185

Заметим, разность между рангами здесь равна 1, а разность между результатами различная. Так ранг 1 от ранга 2 отличается на 7 кг, ранг 3 от ранга 4 отличается на 2 кг.

Если среди данных, подверженных ранжированию, есть одинаковые, ранг определяется способом, понятным из следующего примера.

Пример 3.2. Девять прыгунов в высоту закончили соревнования, преодолев высоту (см): 212, 210, 210, 207, 205, 205, 205, 205, 202. Представить результаты в шкале рангов.

Заметим, что среди результатов есть одинаковые. Ранжирование произойдёт по следующей схеме.

Таблица 3.2

Порядковый номер результата	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Результат (см)	212	210	210	207	205	205	205	205	202
Ранг	1	2,5	2,5	4	6,5	6,5	6,5	6,5	9

Ранг 2,5 получен так: $\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$;

Ранг 6,5 получен так: $\frac{5+6+7+8}{4} = \frac{13}{2} = 6,5$.

То есть находится среднее арифметическое между порядковыми номерами одинаковых результатов. Очевидно теперь, что ранги могут быть не целыми числами.

Шкала интервалов. При измерениях в этой шкале существует единица измерений, при помощи которой объекты можно не только упорядочить, но и приписать им числа так, чтобы равные разности отражали равные различия в количестве измеряемого свойства. Нулевая точка произвольна и не указывает на отсутствие свойства. Во взаимоотношениях между числами, приписываемыми объектам по изучаемому качеству, действует понятие "на сколько".

Пример 3.3. Оценке эластичности материалов, используемых для изготовления боксёрских перчаток, подвергнуты пять различных образцов. Эластичность оценивалась в баллах. Чем выше балл, тем более эластичным является материал. Получен следующий результат (таблица 3.3).

Таблица 3.3

№ образца	1	2	3	4	5
Баллы	20	40	80	90	110

Заметим, что образец 3 на 40 баллов эластичней образца 2. Кроме того, образец 2 настолько же эластичней образца 1, насколько образец 5 эластичней образца 4. А именно – на 20 баллов.

Если бы в условиях проведённого примера какой-либо образец показал эластичность равную нулю, это вовсе не означало бы, что некий материал не обладает эластичностью вовсе. Скорей всего, методика оценки эластичности несовершенна и не способна оценить эластичность этого материала (нуль на шкале не означает отсутствие качества).

Шкала отношений. При измерениях в этой шкале между числами, приписываемым объектам по изучаемому качеству, действуют взаимоотношения типа "на сколько" и "во сколько". На этой шкале есть нуль, который указывает на отсутствие качества.

Пример 3.4. Спортсмены-стрелки тестируются на быстроту реакции. По зажиганию сигнальной лампочки требуется нажать кнопку. Результаты сведены в таблицу 3.4.

Таблица 3.4

№ спортсмена	1	2	3	4	5
Время, с	0,15	0,3	0,35	0,4	0,7

Спортсмен № 2 на 0,15 с медлительнее спортсмена № 1. В то же время, спортсмен № 2 в два раза медлительнее спортсмена № 1.

Следует отметить, что наибольшей информативностью обладает шкала отношений. Однако, иногда нельзя обойтись и без шкалы наименований.

При необходимости можно перейти от более мощной шкалы к менее мощной. В табл. 3.5 приведены результаты в толкании ядра x_i , (м) одного спортсмена. Измерения приведены в шкале отношений. В этой же таблице показано как эти же результаты перевести в шкалу рангов и шкалу наименований.

Таблица 3.5

x_i			
Шкала отношений	Шкала рангов	Шкала наименований	
14,20	1	1	$x_i > 13,0$
14,00	2		
13,80	3		
13,60	4		
13,00	5	2	$12,0 < x_i \leq 13,0$
12,50	6		

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Как видим, шкала наименований имеет два значения (дихотомическая шкала наименований). Все результаты большие 13 м помещены в 1 класс, меньшие, либо равные 13 м помещены во 2 класс.

Обратный переход от менее мощной шкалы к более мощной зачастую весьма затруднителен из-за отсутствия необходимой информации об объектах исследования.

4. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

В основе любого статистического исследования лежит выборочный метод. Чтобы понять его суть необходимо ввести несколько определений.

Генеральной совокупностью называется всё множество объектов, подлежащих изучению. Количество всех объектов называется объемом генеральной совокупности. Выборочной совокупностью, или просто выборкой, называется часть генеральной совокупности. Количество объектов, входящих в выборку, называется объёмом выборки.

Суть выборочного метода сводится к тому, что об интересующих нас свойствах генеральной совокупности мы судим по выборке. Необходимость такого подхода связана с несколькими причинами, главной из которых является высокая стоимость и значительная продолжительность исследования всех объектов генеральной совокупности в связи с ее большим объемом.

В реальной практике, работая над созданием методики тренировочного процесса, тренер имеет дело со сравнительно небольшой группой спортсменов. Естественно желание разработанную методику перенести на другие группы с численностью большей, чем исходная. И тут возникает необходимость обозначить главное требование, предъявляемое выборке. Выборка должна быть репрезентативной (представительной). То есть выборка должна представлять генеральную совокупность. Это требование может быть достигнуто только одним способом. Каждый элемент в выборке должен попасть случайным образом.

4.1. Способы образования выборки [2]

Способы можно разделить на два вида:

1. Выборка, не требующая деления генеральной совокупности на части, а именно: а) простой случайный бесповторный отбор; б) простой случайный повторный отбор.

2. Выборка, при формировании которой генеральная совокупность делится на части. А именно: а) типический отбор; б) механический отбор; в) серийный отбор.

Простой случайный бесповторный отбор. Все объекты генеральной совокупности нумеруются от 1 до N и номера выписываются на карточках, которые тщательно перемешивают. Затем наугад извлекают по одной в количестве равном объему выборки n . В выборку попадают объекты генеральной совокупности с извлечёнными номерами. Карточки при этом не возвращают назад в пачку.

Простой случайный повторный отбор. Используется та же технология, что и в предыдущем случае, только карточки возвращают в пачку. То есть, один и тот же объект генеральной совокупности может попасть в выборку несколько раз. Если объем генеральной совокупности велик (больше сотни), для образования выборки используют таблицы случайных чисел (Приложение 1). Пользоваться таблицей можно так. Каждое число в таблице 10-значно. Допустим из группы в 80 спортсменов, которым соответствуют номера от 1 до 80, необходимо выбрать 10 человек. Поскольку число 80 содержит две цифры, обратимся к первому столбцу таблицы случайных чисел (Приложение 1) и выберем в нем только первые две цифры. Выпишем те их них, которые не превысят 80. В результате в выборку попадут объекты с номерами: 10, 37, 8, 12, 66, 31, 63, 73, 11, 65.

Типический отбор. В этом случае объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее "типической" части. Например, если спортсмены-пловцы в количестве 200 человек тренируются в 10 плавательных центрах, то для анализа общего уровня подготовки во всех 10 центрах в выборку должны попасть представители каждого из них. Это определяется тем, что условия подготовки в центрах могут сильно отличаться.

Механический отбор. При этом способе генеральную совокупность делят на столько групп, сколько объектов должно попасть в выборку и из каждой группы выбирают один объект.

Серийный отбор. Здесь объекты отбираются из генеральной совокупности не по одному, а "сериями", которые подвергаются сплошному исследованию.

При образовании выборки в условиях спортивных исследований могут быть созданы две основные ситуации [4].

Во-первых, из заданного, может быть очень большого объема генеральной совокупности, необходимо образовать выборку. Например, из всех спортсменов города Киева необходимо образовать группу. В этом случае выборка составляется одним из перечисленных способов. Во-вторых, генеральная совокупность может быть так велика и неопределённа, что невозможно знать ее численность. Кроме того, её состав может меняться.

Например, если генеральная совокупность – это все боксёры Украины I разряда. Можно затратить время на поиск сведений о них, но в этом случае даже по окончании мы не получили бы полного представления о данной генеральной совокупности. Ведь во время сбора информации могли появиться новые перворазрядники, а кто-то вообще закончил заниматься спортом.

В подобных случаях для формирования выборки можно использовать любых представителей данного класса объектов. Например, случайным образом выбрать несколько городов и боксёров-перворазрядников взять из них. Важнейшим вопросом является так же определение объема выборки. Если генеральная совокупность распределена по нормальному закону, существует не сложная формула для определения минимального объема выборки. Правда, для ее применения требуются дополнительные исследования.

Опыт решения задач математической статистики в области спорта показал [5], что оптимальный объем выборки может колебаться в пределах от 10 до 30. Если есть техническая возможность увеличить объем выборки свыше 30 единиц, это только усилит точность выводов.

5. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

5.1. Вариационные ряды

При решении различных задач в области физической культуры и спорта тренер получает исходные данные (протоколы соревнований, измерения частоты пульса, число повторений какого-либо упражнения и т. п.) в виде хаотического множества чисел. Данная информация бесполезна без ее обобщения. Принято эти "сырые" данные представлять в виде вариационных рядов, которые имеют форму таблицы, где приведены значения признака (варианты) " x_i " и их частоты (количество повторений) " n_i ". Различают два вида вариационных рядов: дискретные и непрерывные.

Если исходных данных не слишком много (до сотни) и они не сильно отличаются друг от друга, обычно строят дискретные вариационные ряды.

Пример 5.1 [4]. У 34 спортсменов-лыжников зарегистрировано следующее время восстановления пульса после прохождения дистанции (в секундах).

81	78	84	90	78	74	84	85	81	84
79	84	74	84	84	85	81	84	78	81
74	84	81	84	85	81	78	81	81	84
84	84	78	81						

Построить дискретный вариационный ряд (таблица 5.1).

Таблица 5.1

№	x_i	n_i
1	74	4
2	78	6
3	81	9
4	84	11
5	85	3
6	90	1
Σ	–	$n = 34$

Таблица 5.2

№	$x_i \div x_{i+1}$	n_i
1	10÷15	10
2	15÷20	25
3	20÷25	35
4	25÷30	70
5	30÷35	45
6	35÷40	25
7	40÷45	15
8	45÷50	5
Σ	–	$n = 230$

В данном вариационном ряде $n = 34$ – это объем совокупности – сумма всех частот.

Если исходных данных много (несколько сотен) и они значительно отличаются друг от друга, то они обобщаются в виде непрерывных вариационных рядов. Такой ряд выглядит в виде табл. 5.2.

Устройство этого вариационного ряда необходимо понимать так: в интервал 10÷15 попадает 10 значений изучаемой совокупности, в интервал 15÷20 соответственно 25 значений и т. д. Таким образом, объем совокупности составил $n = 230$. Чаще всего при построении непрерывных вариационных рядов выбирается одинаковая длина всех интервалов (h). В нашем случае $h = 5$. Кроме того при подсчёте частот используется условие $x_i \leq x < x_{i+1}$. То есть левая граница входит в интервал, а правая нет. Так значение $x = 15$ попадает во второй интервал, значение

$x = 35$ попадает в шестой интервал. Для определения количества интервалов " l " и длины интервала " h " используют формулы:

$$h \approx 1 + 3,2 \lg n; \quad (5.1)$$

$$l \approx \frac{x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}}}{h}. \quad (5.2)$$

В формулах (5.1) и (5.2) n – объем совокупности; $x_{\text{наиб}}$ и $x_{\text{наим}}$ – наибольшее и наименьшее значение признака.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Рассмотрим пример построения непрерывного вариационного ряда. Спортсмен-тяжелоатлет во время тренировочного цикла, отрабатывая рывок, выполнил 181 подход к штанге и показал следующие результаты (кг), показанные в таблице 5.3.

Таблица 5.3

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124
117	123	123	129	121	122	125	131	147	124	137	112
126	128	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
129	125	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118
132	134	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
137	127	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122
120	135	116	118	133	136	125	126	119	126	129	127
129	124	127	132	126	131	127	130	126	124	135	127
124	123	123	130	132	143	122	139	120	134	108	132
124	111	123	140	137	120	125	131	118	120	120	136
129	127	116	138	128	133	122	131	128	140	138	134
120	126	109	137	111	115	117	130	113	126	115	124
125	118	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135
134											

Найдем длину интервала по формуле (5.1)

$$h \approx 1 + 3,2 \lg n = 1 + 3,2 \lg 181 = 8,2 \approx 8.$$

Определим количество интервалов (ф.(5.2))

$$l \approx \frac{x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}}}{h} = \frac{152 - 104}{8} = 6.$$

Составим таблицу для подсчета частот.

Таблица 5.4

№	$x_i \div x_{i+1}$	Подсчёт частот	n_i
1	100÷108	••	3
2	108÷116	⊠ ⊠	17
3	116÷124	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠	46
4	124÷132	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ⊠	65
5	132÷140	⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ••	43
6	140÷148	⊠	6
7	148÷156	•	1
Σ	—	—	$n = 181$

Замечание 1. Символ ⊠ означает количество значений равное 10.

Замечание 2. В таблице 5.4 количество интервалов равно 7, что отличается от расчетного числа 6. Это объясняется тем, что длина интервала для удобства расчетов уменьшена до 8 и начало первого интервала выбрано 100. В результате получим вариационный ряд (таблица 5.5)

Таблица 5.5

№	$x_i \div x_{i+1}$	n_i
1	100÷108	3
2	108÷116	17
3	116÷124	46
4	124÷132	65
5	132÷140	43
6	140÷148	6
7	148÷156	1
Σ	—	$n = 181$

Следует заметить, что, если в формулах (5.1) и (5.2) объем выборки " n " — несколько сотен, а разность ($x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}}$) невелика (не более 30), количество интервалов снижается до 2÷3. В этом случае следует искусственно уменьшить длину интервала h и увеличить l . Считается, что количество интервала порядка 10 вполне приемлемо. Если интервалов мало — теряется информация, а если их

слишком много (15–20), с вариационным рядом работать не удобно.

5.2. Графическое представление вариационных рядов

Статистические данные, представленные в виде вариационных рядов, иногда для большей наглядности приводят в виде графиков. Рассмотрим три вида графиков: полигон, гистограмма, кумулята. Сначала приведем эти графики для дискретных вариационных рядов.

Для примера возьмем вариационный ряд (табл. 5.1) и дополним его столбцом накопленных частот ($\sum n_i$).

Строим графики: полигон частот, гистограмму частот и кумуляту частот.

Таблица 5.6

№	x_i	n_i	$\sum n_i$
1	74	4	4
2	78	6	10
3	81	9	19
4	84	11	30
5	85	3	33
6	90	1	34
Σ	—	$n = 34$	

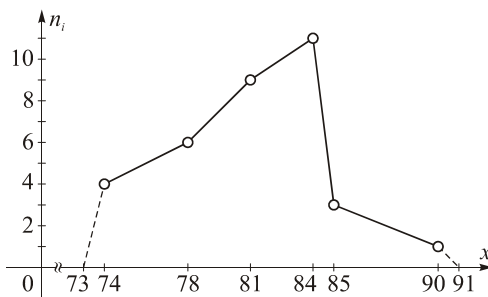


Рис. 5.1. Полигон частот

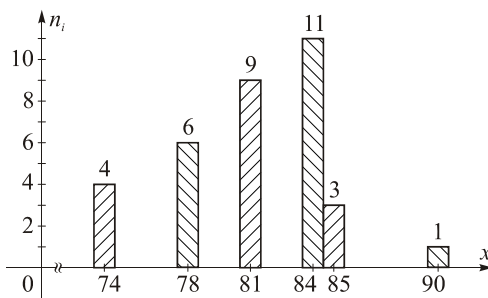


Рис. 5.2. Гистограмма частот

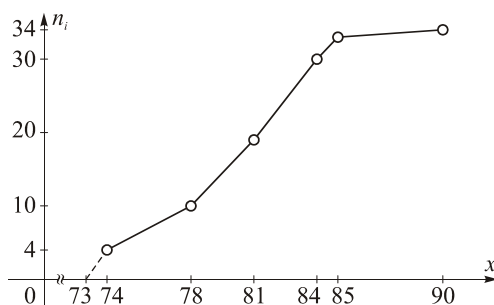


Рис. 5.3. Кумулята частот
(график накопленных частот)

Комментарии к построенным графикам

1. Штриховые линии на рис. 5.1 и 5.3 – это, так называемое, "заземление" графиков (для большей наглядности).

2. Гистограмма частот (рис. 5.2) строится так: над каждым значением "x" строится прямоугольник, высота которого равнялась частоте соответствующего значения, а основание равно 1.

Таким образом: а) площадь каждого прямоугольника равна частоте соответствующего значения x ; б) сумма площадей всех прямоугольников равна объёму совокупности. Заметим, что, если дискретный вариационный ряд имеет одинаковый шаг h (разность между двумя соседними значениями) гистограмма выглядит несколько иначе, но два свойства, отраженные выше, сохраняются. Рассмотрим пример построения гистограммы частот в этом случае (табл. 5.7 и рис. 5.4).

Теперь покажем как строятся эти же графики для непрерывных вариационных рядов. Построим полигон относительных частот, гистограмму относительных частот и кумуляту относительных частот. Относительной частотой называется отношение

частоты n_i к объёму совокупности $\frac{n_i}{n}$. Используем непрерывный вариационный ряд (таблица 5.5) и дополним его необходимыми столбцами.

Таблица 5.7

№	x_i	n_i	$\frac{n_i}{h}, h = 2$
1	2	10	5
2	4	40	20
3	6	20	10
Σ	—	70	

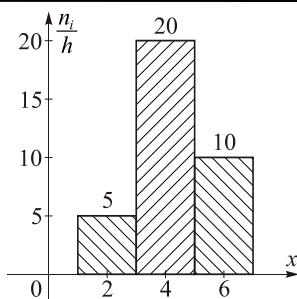


Рис. 5.4. Гистограмма частот

Таблица 5.8

№	$x_i \div x_{i+1}$	Середина интервала $x_{ср i}$	n_i	$\frac{n_i}{n}$	$\sum \frac{n_i}{n}$	$\frac{n_i}{nh}, h = 8$
1	100÷108	104	3	0,017	0,017	0,0021
2	108÷116	112	17	0,094	0,111	0,0118
3	116÷124	120	46	0,254	0,365	0,0318
4	124÷132	128	65	0,359	0,724	0,0449
5	132÷140	136	43	0,238	0,962	0,0298
6	140÷148	144	6	0,032	0,994	0,0040
7	148÷156	152	1	0,006	1,0	0,0008
Σ	—	—	$n = 181$	1,0	—	—

Строим полигон относительных частот. Представителем интервала выбирается его середина.

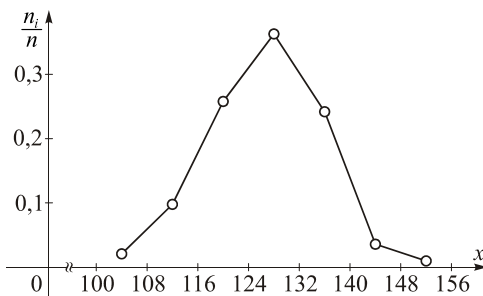


Рис. 5.5. Полигон относительных частот

Строим гистограмму относительных частот

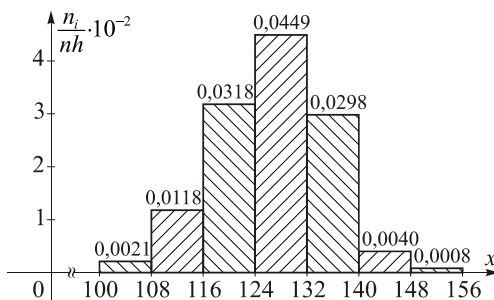


Рис. 5.6. Гистограмма относительных частот

Стоим кумуляту относительных частот. Представителем интервала выбирается его середина.

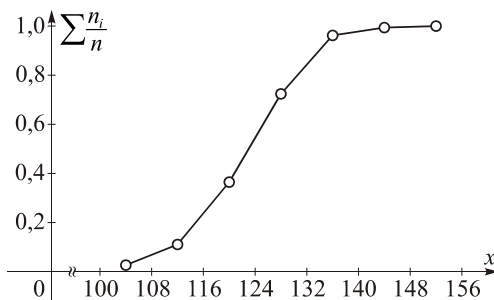


Рис. 5.7. Кумулята относительных частот

Заметим, что на гистограмме: а) площадь каждого прямоугольника равна относительной частоте соответствующего интервала; б) сумма площадей всех прямоугольников равна единице.

5.3. Основные числовые характеристики вариационных рядов

Исходные данные, представленные в виде вариационных рядов, иногда приходится сравнивать. Такое сравнение зачастую

удобно проводить, используя некоторые числовые характеристики. Последние могут быть условно разделены на три группы: меры центра, меры изменчивости и меры формы.

К мерам центра можно отнести: моду (M_o), медиану (M_e) и среднее значение ($\bar{x}$). Охарактеризуем каждую из них.

Модой называется значение вариационного ряда, имеющее наибольшую частоту. Найти моду дискретного ряда, как правило, несложно. Приведем три вариационных ряда.

Таблица 5.9

№	x_i	n_i
1	2	5
2	4	7
3	6	9
4	8	11
Σ	—	$n = 32$

Таблица 5.10

№	x_i	n_i
1	7	10
2	8	5
3	9	10
4	10	4
5	11	3
Σ	—	$n = 32$

Таблица 5.11

№	x_i	n_i
1	1	4
2	3	4
3	5	4
4	7	4
5	9	4
Σ	—	$n = 20$

В первом вариационном ряде (табл. 5.9) мода $M_o = 8$. Во втором (табл. 5.10) две моды $M_{o_1} = 7$; $M_{o_2} = 9$. В третьем (табл. 5.11) моды нет вовсе, так как все значения встречаются одинаково часто.

Мода для непрерывного вариационного ряда определяется по формуле [3].

$$M_o = x_0 + h \frac{n_i - n_{i-1}}{(n_i - n_{i-1}) + (n_i - n_{i+1})}, \quad (5.1)$$

где x_0 — начало модального интервала; h — длина модального интервала; n_i — частота модального интервала, n_{i-1} , n_{i+1} — частоты предшествующего и последующего за модальным интервалом соответственно.

Обратившись к вариационному ряду (табл. 5.5) найдем моду. В нашем случае $x_0 = 124$, $h = 8$, $n_i = n_4 = 65$; $n_{i-1} = n_3 = 46$, $n_{i+1} = n_5 = 43$

$$M_o = 124 + 8 \frac{65 - 46}{(65 - 46) + (65 - 43)} = 127,7.$$

Определим понятие медианы. Медиана – это значение вариационного ряда, делящее его на две равные по количеству значений части. Для дискретных вариационных рядов с равноотстоящими вариантами медиана определяется просто. При нечётном количестве значений – это естественная середина. Так в вариационных рядах (табл. 5.10 и табл. 5.11) $M_e = 9$ и $M_e = 5$ соответственно. При чётном количестве значений медиана определяется как полусумма значений стоящих посередине. Так в вариационном ряде (табл. 5.9) медиана определяется так:

$$M_e = \frac{4 + 6}{2} = 5. \text{ Если же дискретный вариационный ряд по-}$$

строен по неравностоящим значениям, схема определения медианы иная. Покажем ее на примере дискретного ряда (табл. 5.6), который дополнен столбцом накопленных частот. Объем совокупности здесь составляет $n = 34$. Половина этого объема составит 17 единиц. Следовательно, 17 и 18 элементы находятся в третьей строке (см. столбец накопленных частот). Значит медиана $M_e = 81$.

Приведем еще один пример определения медианы [4]. 26 школьников выполняют броски в баскетбольную корзину. Каждому из них предоставлено 12 попыток. Количество попаданий (x_i) и частота (n_i) отражены в вариационном ряде (табл. 5.12), дополненном столбцом накопленных частот.

Серединных элементов два 13-й и 14-й. 13-й элемент находится в шестой строке (7 попаданий) 14-й элемент находится в седьмой строке (8 попаданий). Поэтому $M_e = \frac{7 + 8}{2} = 7,5$ попаданий.

Медиана непрерывного вариационного ряда может быть найдена по следующей приближённой формуле [3].

$$M_e = x_0 + h \frac{\frac{n}{2} - T_{i-1}}{n_i}, \quad (5.2)$$

где x_0 – начало медианного интервала; h – длина медианного интервала; n – объем выборки; T_{i-1} – сумма частот интервалов, предшествующих медианному; n_i – частота медианного интервала. Определим медиану вариационного ряда (табл. 5.5) дополнив его столбцом накопленных частот.

В нашем случае $x_0 = 124$, $h = 8$, $n = 181$, $T_{i-1} = T_3 = 66$, $n_i = n_4 = 65$

$$M_e = 124 + 8 \frac{\frac{181}{2} - 66}{65} = 127,0.$$

Переходим к определению среднего значения ($\bar{x}$). Оно представляет средний уровень данных, подлежащих изучению. Основное соотношение, для вычисления среднего значения вариационного ряда выглядит следующим образом

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i, \quad (5.3)$$

где n – объем выборки; x_i и n_i соответствующие значения и их частота.

Таблица 5.12

№	x_i	n_i	$\sum n_i$
1	0	3	3
2	2	2	5
3	4	1	6
4	5	2	8
5	6	3	11
6	7	2	13
7	8	4	17
8	9	5	22
9	10	3	25
10	12	1	26
$\sum$	–	$n = 26$	

Таблица 5.13

№	$x_i \div x_{i+1}$	n_i	$\sum n_i$
1	100÷108	3	3
2	108÷116	17	20
3	116÷124	46	66
4	124÷132	65	131
5	132÷140	43	174
6	140÷148	6	180
7	148÷156	1	181
$\sum$	–	$n = 181$	

Заметим, что при вычислении $\bar{x}$ для непрерывного вариационного ряда, используют формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i)_{\text{ср}} n_i, \quad (5.4)$$

где $(x_i)_{\text{ср}}$ – середина интервала.

Так для вариационного ряда (табл. 5.1) среднее значение составит:

$$\bar{x} = \frac{1}{34} (74 \cdot 4 + 78 \cdot 6 + 81 \cdot 9 + 84 \cdot 11 + 85 \cdot 3 + 90 \cdot 1) = 81,2 \approx 81 \text{ с.}$$

Таким образом, восстановление пульса 34 лыжников после прохождения дистанции в среднем составит 81с.

Для вариационного ряда (табл. 5.8) среднее значение составит

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{1}{181} (104 \cdot 3 + 112 \cdot 17 + 120 \cdot 46 + 128 \cdot 65 + \\ + 136 \cdot 43 + 144 \cdot 5 + 152 \cdot 1) = 126,6 \approx 127 \text{ кг.} \end{aligned}$$

В результате при 181 подходе к штанге спортсмен-тяжелотелатлет показал в рывке в среднем 127 кг.

Для упрощения вычислений, которые обычно проводят в табличной форме, используют формулу [3].

$$\bar{x} = \frac{h}{n} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - C}{h} \right) n_i + C, \quad (5.5)$$

где h – длина интервала; n – объем выборки; n_i – частота; C – условный нуль.

В качестве условного нуля выбирают, как правило, значение x_i , которое близко к медиане и моде. Величина $\frac{x_i - C}{h}$ называется условной координатой.

Проведем вычисления для вариационного ряда (табл. 5.5) снабдив его необходимыми столбцами.

Таблица 5.14

№	$x_i \div x_{i+1}$	$(x_i)_{cp}$	$\frac{(x_i)_{cp} - C}{h}$	n_i	$\left(\frac{(x_i)_{cp} - C}{h} \right) \cdot n_i$
1	100÷108	104	-3	3	-9
2	108÷116	112	-2	17	-34
3	116÷124	120	-1	46	-46
4	124÷132	128	0	65	0
5	132÷140	126	1	43	43
6	140÷148	144	2	6	12
7	148÷156	152	3	1	3
Σ	—	—	—	$n = 181$	-31

В нашем случае $h = 8$, $n = 181$, $C = 128$. В результате

$$\bar{x} = \frac{8}{181} \cdot (-31) + 128 = 126,6 \approx 127 \text{ кг.}$$

Как видим, результат вычислений по формулам (5.4) и (5.5) совпал.

Если вариационный ряд имеет не равноотстоящие варианты, можно использовать формулу [3].

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - C) \cdot n_i + C, \quad (5.6)$$

где C – условный нуль.

Покажем порядок вычислений для выборки (табл. 5.1), добавив необходимые для вычисления столбцы.

Таблица 5.15

№	x_i	$(x_i - C)$	n_i	$(x_i - C)n_i$
1	74	-10	4	-40
2	78	-6	6	-36
3	81	-3	9	-27
4	84	0	11	0
5	85	1	3	3
6	90	3	1	6
Σ	—	—	$n = 34$	-94

В нашем случае $n = 34$, $C = 84$

$$\bar{x} = -\frac{94}{34} + 84 = 81,2 \approx 81 \text{ с.}$$

Результат вычисления по формулам (5.3) и (5.6) совпал.

Перейдём к изучению мер изменчивости вариационных рядов. К ним отнесем: дисперсию S^2 , стандартное отклонение S , коэффициент вариации V_R , среднее линейное отклонение d и размах варьирования R .

Важность определения этих параметров поясним на примере. Пусть имеется две выборки X и Y , на основе которых построены вариационные ряды.

Таблица 5.16

№	x_i	n_i
1	-1	1
2	0	100
3	1	1
Σ	-	$n = 102$

Таблица 5.17

№	y_i	n_i
1	-100	10
2	0	100
3	100	10
Σ	-	$n = 120$

Вычислим среднее значение обоих вариационных рядов:

$$\bar{x} = \frac{1}{102}(-1 \cdot 1 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 1) = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{120}(-100 \cdot 10 + 0 \cdot 100 + 100 \cdot 10) = 0.$$

Как видим, оба вариационных ряда имеют одинаковые средние значения. Однако, они существенно отличаются тем, что в первом случае варианты (-1) и $(+1)$ близки к $\bar{x} = 0$, а во втором варианты (-100) и $(+100)$ далеки от $\bar{y} = 0$.

Для того чтобы оценить насколько интегрально все значения вариационного ряда удалены от среднего, вводится мера рассеивания – дисперсия, которая определяется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i. \quad (5.7)$$

Следует отметить, что дисперсия принимает только неотрицательные значения ($S^2 \geq 0$).

Вычислим дисперсию для наших вариационных рядов:

$$S_x^2 = \frac{1}{102}[(-1-0)^2 \cdot 1 + (0-0)^2 \cdot 100 + (1-0)^2 \cdot 1] = \frac{2}{102} \approx 0,02,$$

$$S_y^2 = \frac{1}{120}[(-100-0)^2 \cdot 10 + \\ + (0-0)^2 \cdot 100 + (100-0)^2 \cdot 10] = \frac{200000}{120} \approx 1167.$$

Чем выше дисперсия, тем менее компактны данные, представленные вариационным рядом, чем она меньше, тем ближе к среднему расположены изучаемые данные. В нашем случае ответ на вопрос, какая выборка более компактна, совершенно очевиден.

Другим параметром, отвечающим за компактность группы данных, является стандартное отклонение, определяемое по формуле

$$S = +\sqrt{S^2}. \quad (5.8)$$

Целесообразность использования этого параметра в значительной степени связана с размерностью обрабатываемых данных. Так, если изучаемые статистические данные имеют размерности (кг), то дисперсия измеряется в (кг)², а стандартное отклонение вновь возвращается к размерности исходной величины, т. е. к (кг).

Следующий параметр, отнесенный к группе мер изменчивости, называется коэффициентом вариации и вычисляется по формуле

$$V_R = \left| \frac{S}{\bar{x}} \right| \cdot 100 \%. \quad (5.9)$$

Без использования этого параметра нельзя обойтись в случае необходимости оценить, скажем, сравнительную рассеянность данных двух или нескольких вариационных рядов, если

размеренности вариант каждого из них различны. Например, сравниваются между собой две группы спортсменов по компактности результатов. Одна из них – спринтеры, их результаты приводятся в секундах, вторая – прыгуны в высоту – их результаты даются в сантиметрах. Сравнивать между собой стандартные отклонения, то есть секунды с сантиметрами, не корректно. А сравнение по коэффициенту вариации вполне законно, ведь V_R безразмерен.

Можно ставить вопрос об оценке компактности группы данных по величине коэффициента вариации. Однако, сразу стоит оговориться, что величина этого коэффициента может существенно отличаться даже для спортсменов одной специализации, но разного уровня мастерства. Результаты спортсменов высшего уровня должны иметь более низкий коэффициент вариации, чем спортсмены низкого разряда. Считается [4], что коэффициент вариации не более 10÷15 %, определяет компактную группу со стабильными результатами. Если же $V_R > 15 \%$, группа считается некомпактной.

Однако, подчеркнем, что правильной было бы провести специальные исследования и определить критерий компактности результата по коэффициенту вариации для различных видов спорта. Это в дальнейшем существенным образом могло бы сократить время и средства для проведения других исследований.

Подсчитаем дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации для выборки табл. 5.1 ($\bar{x} = 81$).

Таблица 5.18

№	x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
1	74	4	-7	49	196
2	78	6	-3	9	54
3	81	9	0	0	0
4	84	11	3	9	99
5	85	3	4	16	48
6	90	1	9	81	81
Σ	–	$n = 34$	–	–	478

$$S^2 = \frac{1}{34} \cdot 478 = 14,1;$$

$$S = \sqrt{14,1} = 3,8;$$

$$V_R = \frac{3,75}{81} \cdot 100 \% = 4,6 \% \quad (V_R < 15 \%).$$

Судя по коэффициенту вариации – группа компактна.

При вычислении дисперсии непрерывных вариационных рядов используют формулу

$$S^2 = \frac{h^2}{n} \sum_{i=1}^k \left(\frac{x_i - C}{h} \right)^2 \cdot n_i - (\bar{x} - C)^2, \quad (5.10)$$

где h – длина интервала; n – объем выборки; C – условный нуль; $\bar{x}$ – среднее значение; n_i – частота.

Подсчитаем дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации для выборки табл. 5.5. В нашем случае $h = 8$, $n = 181$, $C = 128$, $\bar{x} = 127$.

Таблица 5.19

№	$x_i \div x_{i+1}$	$(x_i)_{\text{ср}}$	n_i	$\left(\frac{x_i - C}{h} \right)$	$\left(\frac{x_i - C}{h} \right)^2$	$\left(\frac{x_i - C}{h} \right)^2 \cdot n_i$
1	100÷108	104	3	−3	9	27
2	108÷116	112	17	−2	4	68
3	116÷124	120	46	−1	1	46
4	124÷132	128	65	0	0	0
5	132÷140	136	43	1	1	43
6	140÷148	144	6	2	4	24
7	148÷156	152	1	3	9	9
Σ	–	–	$n = 181$	–	–	217

$$S^2 = \frac{8^2}{181} \cdot 217 - (127 - 128)^2 = 75,7$$

$$S = \sqrt{75,7} = 8,7;$$

$$V_R = \frac{8,7}{127} \cdot 100 \% = 6,9 \ \%.$$

Так как коэффициент вариации не превышает 15 %, группу данных можно считать компактной, то есть результаты штангиста – стабильными.

В спортивных исследованиях часто используется еще одна характеристика компактности вариационного ряда – среднее линейное отклонение, определяемое по формуле

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| \cdot n_i. \quad (5.11)$$

Покажем вычисление величины d для вариационного ряда (табл. 5.1). Напомним, что среднее значение уже подсчитано и составляет $\bar{x} = 81$ с.

Таблица 5.20

№	x_i	n_i	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$
1	74	4	7	28
2	78	6	3	18
3	81	9	0	0
4	84	11	3	33
5	85	3	4	12
6	90	1	9	9
Σ	–	$n = 34$		100

$$d = \frac{100}{34} = 2,9 \text{ с.}$$

Таким образом, среднее линейное отклонение $d = 2,9$ с. Это означает, что среднее значение восстановления пульса с учетом найденного среднего линейного отклонения d составляет

$$81 - 2,9 < \bar{x} < 81 + 2,9 \text{ или}$$

$$78,1 < \bar{x} < 83,9.$$

Время восстановления пульса, не попадающее в указанный диапазон, не является характерным для данной группы.

Самой "грубой" оценкой степени рассеяния результатов в группе является размах варьирования, определяемый по формуле

$$R = x_{\text{наиб}} - x_{\text{наим}}, \quad (5.12)$$

где $x_{\text{наиб}}$ и $x_{\text{наим}}$ – наибольшее и наименьшее значение изучаемого признака. Этот показатель используется реже, в основном для приближенных вычислений.

Перейдем к определению мер формы. Их две – асимметрия A_s и эксцесс E_k . Обе характеристики определяют степень отклонения распределения изучаемого признака от нормального. Для нормального распределения $A_s = 0$, $E_k = 0$. Значительное отклонение от нуля указывает на то, что эмпирическое (опытное) распределение признака отличается от нормального. Это обстоятельство может стать поводом для проведения более тщательной проверки соответствия данного распределения на принадлежность к нормальному. Схема такой проверки будет приведена ниже.

Асимметрия и эксцесс определяются по следующим формулам.

$$A_s = \frac{1}{nS^3} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^3 \cdot n_i, \quad (5.13)$$

$$E_k = \frac{1}{nS^4} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i - 3, \quad (5.14)$$

где n – объем совокупности; S – стандартное отклонение; $\bar{x}$ – среднее значение, n_i – частота.

Покажем на рисунках, как знак A_s и E_k влияет на форму кривой эмпирического распределения.

На рис. 5.8 показаны кривые трех распределений: нормального ($A_s = 0$); с отрицательной асимметрией ($A_s < 0$), где кривая имеет более "длинную" левую по отношению к среднему ($\bar{x}_2$)

левую часть; с положительной асимметрией ($A_s > 0$), где кривая имеет более "длинную" по отношению $\bar{x}_3$ правую часть. На рис. 5.9 показаны четыре кривые распределения: две нормальные кривые ($E_k = 0$); кривая с положительным эксцессом ($E_k > 0$), имеющая большую, чем нормальная "островершенность"; Кривая с отрицательным эксцессом ($E_k < 0$), имеющая меньшую, чем нормальная "островершенность". Таким образом указанные параметры характеризуют форму кривой эмпирического распределения, сравнивая его с нормальным.

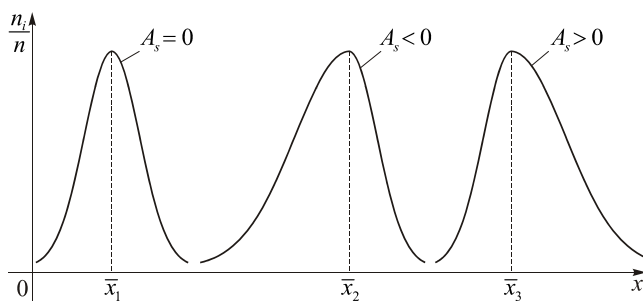


Рис. 5.8. Варианты эмпирических распределений с различной асимметрией

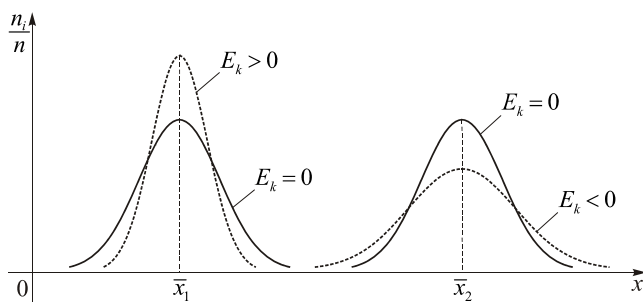


Рис. 5.9. Варианты эмпирических распределений с различным эксцессом

Приведем примеры вычисления в табличной форме A_s и E_k . Для выборки табл. 5.1 имеем

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Таблица 5.21

$$(\bar{x} = 81, S = 3,8)$$

№	x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^3$	$(x_i - \bar{x})^3 \cdot n_i$	$(x_i - \bar{x})^4$	$(x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i$
1	74	4	-7	-343	-1372	2401	9604
2	78	6	-3	-27	-162	81	486
3	81	9	0	0	0	0	0
4	84	11	3	27	297	81	891
5	85	3	4	64	2048	256	768
6	90	1	9	729	729	6561	6561
Σ	—	$n = 34$	—	—	1540	—	18310

$$A_s = \frac{1}{34 \cdot 3,8^3} \cdot 1540 = 0,83$$

$$E_k = \frac{1}{34 \cdot 3,8^4} \cdot 18310 - 3 = -0,41.$$

Незначительное отличие асимметрии и эксцесса от нуля свидетельствует о близости этого эмпирического распределения к нормальному.

Составим таблицу вычисления A_s и E_k для выборки табл. 5.5.

Таблица 5.22

$$(\bar{x} = 127, S = 8,7)$$

№	$x_i \div x_{i+1}$	$(x_{i \text{ cp}})$	n_i	$(x_{i \text{ cp}} - \bar{x})$	$(x_{i \text{ cp}} - \bar{x})^3$	$(x_{i \text{ cp}} - \bar{x})^3 \cdot n_i$	$(x_{i \text{ cp}} - \bar{x})^4$	$(x_{i \text{ cp}} - \bar{x})^4 \cdot n_i$
1	100÷108	104	3	-23	-12167	-36501	279840	839523
2	108÷116	112	17	-15	-3375	-57375	50625	860625
3	116÷124	120	46	-7	-343	-15778	2401	110446
4	124÷132	128	65	-1	-1	-65	1	65
5	132÷140	136	43	9	729	31347	6561	282123
6	140÷148	144	6	17	4913	29478	83521	501126
7	148÷156	152	1	25	15625	15625	390625	390625
Σ	—	—	$n = 181$	—	—	-33269	—	2984533

$$A_s = \frac{1}{181 \cdot 8,7^3} \cdot (-33269) = -0,28;$$

$$E_k = \frac{1}{181 \cdot 8,7^4} \cdot 2984533 - 3 = -0,12.$$

Ориентируясь на величины асимметрии и эксцесса, можно сделать вывод о близости данного распределения к нормальному.

5.4. Решение некоторых задач с помощью числовых характеристик вариационных рядов

В некоторых случаях анализ основных числовых характеристик вариационных рядов помогает решить некоторые вопросы в области взаимоотношений тренер – спортсмен. Имеется ввиду изменение в тренировочном процессе, перспектив роста спортивных результатов и пр.

Рассмотрим некоторые примеры. [4] Существует методика определения пригодности спортсменов к бегу на средние дистанции. Она состоит в том, что оценивают разность между временем бега на 800 м, деленным на 8 и временем бега на 100 м. Чем меньше эта разность, тем выше степень пригодности спортсмена к бегу на средние дистанции. Если разность не превышает 5 с, спортсмена считают пригодным.

Пример 5.2. В результате тренировочных забегов разность между временем бега на 800 м, деленным на 8, и временем бега на 100 м (x_i в секундах) обнаружили следующие результаты: (табл. 5.23)

Таблица 5.23

x_i	3,5	3,8	4,5	5,0	6,0
n_i	1	3	2	4	7

Основные числовые характеристики этого вариационного ряда оказались следующими: $\bar{x} \approx 5$ с; $S^2 = 0,82$ с²; $S = 0,91$; $V_R = 18,1$; $M_0 = 6,0$; $M_e = 5,0$.

Таким образом, среднее значение оказывается в пределах $(\bar{x} \pm S) = (5 \pm 0,91)$ или $4,09 < \bar{x} < 5,91$. Это значит, что в худшем случае $\bar{x}$ выше контрольных 5 с. Кроме того, высокий коэффициент вариации $V_R = 18,1\%$ указывает на нестабильность результатов. В итоге, данный спортсмен плохо пригоден к бегу на средние дистанции. Есть смысл рекомендовать ему попробовать свои силы в других легкоатлетических специальностях.

Иногда, анализируя группу спортсменов по компактности результатов, в случае значительного коэффициента вариации имеет смысл разделить ее на части.

Пример 5.3. Для проверки ловкости 20 начинающих баскетболистов, им предложен тест на ведение мяча с фиксацией времени прохождения дистанции (x_i в сек). Получены следующие результаты (табл. 5.24).

Таблица 5.24

x_i	12	18	20	24	28	30	—
n_i	1	2	7	5	2	3	$n = 20$

Основные характеристики составили: $\bar{x} = 23$ с; $M_0 = 20$ с; $M_e = 22$ с; $S^2 = 21,8$ с²; $S = 4,65$ с; $V_R = 20,2\%$. Приведенные данные свидетельствуют, что группа весьма неоднородна. Мода, медиана и среднее значение существенно отличаются друг от друга. Высокий коэффициент вариации. К более ловким можно отнести спортсменов, с результатами, меньшими среднего $\bar{x} = 23$ с (12 с, 18 с, 20 с), менее ловкие (24 с, 28 с, 30 с). Налицо две группы, тренировочная схема для которых может быть различна.

Иногда при анализе вариационных рядов приходится сталкиваться со случаем, когда одно или несколько значений существенно отличаются от остальных. Приходится задаваться вопросом о закономерности или случайности этого факта. В первом случае придется учесть в дальнейших расчетах это

значение, во втором – пренебречь им. Для проверки пригодности того или иного значения используют следующую формулу

$$(\bar{x} - R \cdot z) \leq x_i \leq (\bar{x} + R \cdot z), \quad (5.15)$$

где $\bar{x}$ – среднее значение; x_i – сомнительное (резко отклоняющееся значение); R – размах варьирования; z – справочный параметр, зависящий от объема выборки n . (Значения z приведены в таблице 5.25 [1].)

Таблица 5.25

n	5	6	7	8–9	10–11	12–15	16–22	23–25	26–63	63–150
z	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Пример 5.4.[4]. При измерении угла в коленном суставе ноги, стоящей на задней колодке, в стартовом положении у 20 спортсменов (x_i , градус) получены следующие результаты (таблица 5.26).

Таблица 5.26

x_i , град	100	110	115	120	140	–
n_i	5	5	5	4	1	$n = 20$

Из приведенного ряда явно выделяется результат одного спортсмена – 140° . Проверим сомнительный вариант по указанной формуле. Исключая этот результат найдем $\bar{x} = \frac{1}{19}(100 \cdot 5 + 110 \cdot 5 + 115 \cdot 5 + 120 \cdot 4) \approx 111^\circ$. Вычислим размах варьирования $R = 120^\circ - 100^\circ = 20^\circ$. По таблице 5.16 найдем $z(n=19) = 1,1$. Сомнительный вариант для признания его закономерности должен находиться в пределах

$$111^\circ - 20^\circ \cdot 1,1 \leq x_i \leq 111^\circ + 20^\circ \cdot 1,1$$

или

$$89^\circ \leq x_i \leq 133^\circ.$$

Очевидно, что вариант 140° не входит в указанный интервал, поэтому его не следует учитывать при дальнейших расчетах.

5.5. Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. При выборке A и B (приложение 9) построить дискретный и непрерывный вариационные ряды.

Задание 2. Для дискретного ряда построить следующие графики: полигон, гистограмму, кумуляту частот. Для непрерывного ряда – полигон, гистограмму, кумуляту относительных частот.

Задание 3. Для обоих вариационных рядов найти: $\bar{x}$ – среднее значение; M_0 – моду; M_e – медиану; S^2 – дисперсию; S – стандартное отклонение; V_R – коэффициент вариации; d – среднее линейное отклонение; R – размах варьирования; A_S – асимметрию; E_k – эксцесс.

Примечание:

Выборка А – статистические данные о результатах участия спортсменов в соревнованиях в течении нескольких лет. Фиксировалось место, занятое спортсменом ("0" – неучастие в соревнованиях).

Выборка В – результаты оценивания (в баллах) качества выполнения спортсменом тренировочных заданий в процессе годичного цикла тренировок.

6. ТЕОРИЯ ОЦЕНИВАНИЯ

Как известно (см. п. 4), основное содержание выборочного метода сводится к тому, что о свойствах генеральной совокупности судят по выборке. Предположим, что закон распределения генеральной совокупности известен, а его основные параметры – нет. Ставится вопрос об оценке (приближённом определении) параметров распределения генеральной совокупности по выборке. Существуют два вида оценок: точечные и интервальные. Точечные оценки дают приближённые значения интересующего параметра с помощью одного числа. Интервальные – с помощью двух чисел – границ интервала.

Если считать, что генеральная совокупность распределена нормально, то точечные оценки генеральной средней $\bar{x}_Г$ и генеральной дисперсии S_G^2 связаны с выборочной средней $\bar{x}_B$ и выборочной дисперсией S_B^2 следующим образом [2]

$$\bar{x}_Г \approx \bar{x}_B; \quad S_G^2 \approx \frac{n}{n-1} S_B^2, \quad (6.1)$$

где n – объём выборки.

Следует заметить, что чем больше объём выборки, тем более точной является оценка. Считается, что в спорте [4] объём выборки $n \geq 30$ обеспечивает достаточную точность оценки. Если же $n < 30$ и составляет порядка 10-15 единиц, что весьма распространено в спорте высших достижений, ошибка в определении $\bar{x}_Г$ и S_G^2 могут быть велики.

Для того, чтобы иметь возможность определить точность (погрешность) оценивания существуют интервальные оценки, которые выглядят в виде двойного неравенства

$$\theta_B - \delta < \theta_G < \theta_B + \delta, \quad (6.2)$$

где θ_G – оцениваемый параметр генеральной совокупности; θ_B – величина соответствующего параметра, найденного по выборке, δ – точность оценки. При этом соотношение (6.2) называется доверительным интервалом, $(\theta_B - \delta)$, $(\theta_B + \delta)$ – левая и правая границы доверительного интервала соответственно. Точность оценки δ связана с объёмом выборки и уровнем надёжности (доверительной вероятности). Смысл понятия надёжности выяснится при решении конкретных примеров.

6.1. Интервальные оценки генерального среднего и генерального стандартного отклонения

Доверительный интервал для генерального среднего выглядит следующим образом [2]

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma S_B}{\sqrt{n}} < \bar{x}_G < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma S_B}{\sqrt{n}}, \quad (6.3)$$

где $\bar{x}_G$ – генеральное среднее; $\bar{x}_B$ – выборочное среднее; S_B – выборочное стандартное отклонение; n – объём выборки; t_γ – справочный параметр (таблица приложения 2). Следует заметить, что параметр t_γ зависит от выборочного уровня доверительной вероятности γ и объёма выборки n .

Обычно уровень доверительной вероятности принимают близким к единице: 0,95; 0,99; 0,999. Чем выше уровень доверительной вероятности, тем шире доверительный интервал. Чаше всего в спорте принимают $\gamma = 0,95$.

Доверительный интервал генерального стандартного отклонения принимается таким [2]

$$S_B(1-q) < S_\Gamma < S_B(1+q), \quad (6.4)$$

где S_Γ – генеральное стандартное отклонения; S_B – выборочное стандартное отклонение; q – справочный параметр, зависящий от уровня доверительной вероятности γ и объема выборки (приложение 3). Если параметр $q > 1$, то оценку (6.4) видоизменяют так

$$0 < S_\Gamma < S_B(1+q). \quad (6.5)$$

Объясняется это тем, что стандартное отклонение S_Γ не может быть отрицательным числом.

Рассмотрим примеры.

Пример 6.1. [4]

50 школьников в возрасте 14 лет исследованы на силу ног по количеству приседаний x_i за 20 сек. Результаты сведены в вариационный ряд. (таблица 6.1) Построить доверительные интервалы для оценки генеральной средней и генерального стандартного отклонения.

Таблица 6.1

x_i	9	10	11	12	13	14	15	16	17	–
n_i	4	5	4	7	8	9	6	5	2	$n = 20$

В результате вычислений найдено $\bar{x}_B = 12,9 \approx 13$, $S_B = 2,2$, по таблице значений t_γ приложения 2 $t_\gamma(\gamma = 0,95; n = 50) = 2,009$ и по таблице значений q приложения 3 $q(\gamma = 0,95; n = 50) = 0,21$.

Доверительный интервал для генерального среднего

$$13 - \frac{2,009 \cdot 2,2}{\sqrt{50}} < \bar{x}_\Gamma < 13 + \frac{2,009 \cdot 2,2}{\sqrt{50}}$$

$$13 - 0,62 < \bar{x}_\Gamma < 13 + 0,62$$

$$12,38 < \bar{x}_\Gamma < 13,62.$$

Округляя до целого, получим

$$12 < \bar{x}_\Gamma < 14.$$

Доверительный интервал для генерального стандартного отклонения

$$2,2(1 - 0,21) < S_{\Gamma} < 2,2(1 + 0,21);$$

$$2,2 - 0,46 < S_{\Gamma} < 2,2 + 0,46;$$

$$1,74 < S_{\Gamma} < 2,66.$$

Округляя до целого, получим

$$2 < S_{\Gamma} < 3.$$

В результате можно сделать вывод, что с вероятностью 0,95 (в 95 случаях из 100) генеральное среднее оказывается в диапазоне от 12 до 14, а генеральное стандартное отклонение находится в пределах от 2 до 3. В итоге исследования 50 школьников 14 лет средний результат силы ног можно распространить на генеральную совокупность, которая может насчитывать сотни человек.

Пример 6.2. [5]

Группа спортсменов в количестве 30 человек исследована на величину поглощения кислорода во время длительной работы x_i (л/мин) (таблица 6.2). Испытуемые отобраны из 300 спортсменов той же квалификации. Построить доверительные интервалы для генеральной средней и генерального стандартного отклонения.

Таблица 6.2

x_i	4,0	4,2	4,3	4,5	4,6	4,7
n_i	5	6	8	4	4	3

В результате подсчётов найдено

$$\overline{x_B} = 4,3 \text{ л/мин}, \quad S_B = 0,22 \text{ л/мин}.$$

Для построения доверительных интервалов из таблиц приложений 2 и 3 при уровне доверительной вероятности $\gamma = 0,95$ найдем $t_{\gamma}(n = 30; \gamma = 0,95) = 2,045$; $q(n = 30; \gamma = 0,95) = 0,28$.

Доверительный интервал для оценки генерального среднего

$$4,3 - \frac{2,045 \cdot 0,22}{\sqrt{30}} < \overline{x}_Г < 4,3 + \frac{2,045 \cdot 0,22}{\sqrt{30}};$$
$$4,3 - 0,08 < \overline{x}_Г < 4,3 + 0,08;$$
$$4,22 < \overline{x}_Г < 4,38. \quad (6.6)$$

Доверительный интервал для оценки генерального стандартного отклонения

$$S_B(1 - q) < S_Г < S_B(1 + q);$$
$$0,22(1 - 0,28) < S_Г < 0,22(1 + 0,28);$$
$$0,22 - 0,06 < S_Г < 0,22 + 0,06;$$
$$0,16 < S_Г < 0,28. \quad (6.7)$$

В результате с вероятностью 0,95 (в 95 случаях из 100) оцениваемые параметры генеральной совокупности (в данном случае генеральная совокупность начитывает 300 человек) покрываются интервалами (6.6) и (6.7)

6.2. Задачи для самостоятельного решения

Используя результаты решения задачи п. 5.5 (то есть найденные $\bar{x}$ и S) построить доверительные интервалы для оценки генеральной средней $\overline{x}_Г$ и генерального стандартного отклонения $S_Г$ для обоих вариационных рядов, построенных по выборкам A и B . Уровень доверительной вероятности γ принять равным 0,95. Необходимые справочные параметры t_γ и q найти по таблицам приложений 2 и 3.

7. ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВЫВОДА (ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ)

Теория статистического вывода решает, по сути, две задачи. Первая – определить вид неизвестного закона распределения генеральной совокупности. Если есть основание предположить, что генеральная совокупность распределена по определенному закону (например, по нормальному), то выдвигается гипотеза: генеральная совокупность распределена нормально. Вторая задача – определить (разумеется, приближённо) величину основных параметров известного распределения генеральной совокупности. В этом случае гипотезы выдвигаются относительно этих параметров. Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений и пр.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного закона распределения или о параметрах известных распределений.

Наряду с выдвинутой (нулевой) гипотезой (её обычно обозначают H_0) рассматривают противоположную ей (альтернативную) гипотезу (H_1). Если гипотеза H_0 будет отвергнута, то будет принята гипотеза H_1 .

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость её проверки. Так как проверку осуществляют статистическими методами, то её называют статистической. В итоге проверки в двух случаях может быть принято неверное решение.

1. Отвергнута правильная гипотеза – ошибка первого рода.

2. Принята неверная гипотеза – ошибка второго рода.

Вероятность совершить ошибку первого рода обозначают " α " и называют уровнем значимости. Величину α принимают близкой к нулю. Наиболее распространенные уровни значимости α : 0,0005; 0,001; 0,01; 0,025; 0,05; 0,10. Вероятность совершить ошибку второго рода обозначают " β ".

Величину $1-\beta$, то есть вероятность не совершить ошибку второго рода, называют мощностью критерия проверки нулевой гипотезы.

Для проверки нулевой гипотезы выдвигают специально подобранную случайную величину, распределение которой, как правило, известно. Её и называют критерием (K). Для проверки нулевой гипотезы по выборкам вычисляют наблюдаемое значение критерия $K_{\text{набл.}}$.

После выбора критерия K , все его значения разбивают на два непересекающихся подмножества. Одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – где она принимается. Область, где нулевая гипотеза отвергается называется критической областью. Область, где нулевая гипотеза принимается называется областью принятия гипотезы. Основным принцип проверки статистической гипотезы состоит в том, что если $K_{\text{набл.}}$ попадает в критическую область, нулевую гипотезу H_0 отвергают (и соответственно принимают альтернативную гипотезу H_1). Если же $K_{\text{набл.}}$ попадает в область принятия гипотезы H_0 – её принимают.

Точки отделяющие критическую область от области принятия гипотезы называют критическими точками $K_{\text{кр.}}$.

Различают три вида критических областей: правостороннюю (рис. 7.1,*а*), левостороннюю (рис. 7.1,*б*) и двухстороннюю (рис. 7.1,*в*).

Критические точки указанных областей определяются по специальным таблицам и выбираются в зависимости от приня-

того уровня значимости α и числа степеней свободы k , связанного с объёмом выборок.

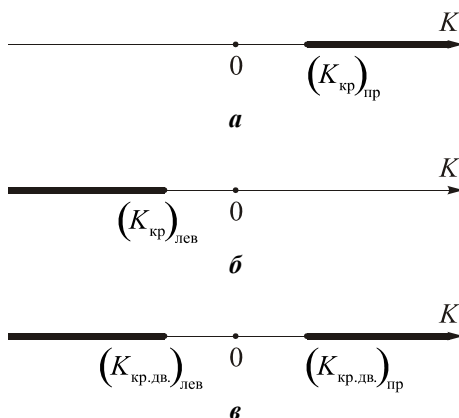


Рис. 7.1. Правосторонняя (а), левосторонняя (б), двухсторонняя (в) критические области

Выбор вида критической области проходит по следующему правилу: если гипотеза H_1 имеет вид неравенства вида: $\theta_1 > \theta_2$ (где θ – параметр генеральной совокупности, подлежащий анализу), то выбирается правосторонняя критическая область. Если H_1 имеет вид $\theta_1 < \theta_2$, выбирается левосторонняя критическая область. Если H_1 имеет вид $\theta_1 \neq \theta_2$, выбирается двухсторонняя критическая область.

7.1. Сравнение дисперсий двух групп по критерию Фишера

Обычно к решению этой задачи приходится обращаться в случае, когда сравнивают стабильность результатов тренировочного процесса, стабильность функциональных и технических показателей в практике физкультуры и спорта.

Решение задачи проводим по следующей схеме:

1. Выдвигаем нулевую гипотезу $H_0: S_x^2 = S_y^2$, где S_x^2 и S_y^2 дисперсии двух групп.
2. Выдвигаем альтернативную гипотезу $H_1: S_x^2 > S_y^2$.
3. По выборочным данным ищем наблюдаемое значение критерия Фишера

$$F_{\text{набл.}} = \frac{(S_x)_B^2}{(S_y)_B^2},$$

где $(S_x)_B$ – большая выборочная дисперсия; $(S_y)_B$ – меньшая выборочная дисперсия.

4. По таблице критических точек критерия Фишера (приложение 4) ищем $F_{\text{кр}}(\alpha; k_1 = n_1 - 1; k_2 = n_2 - 1)$. Здесь α – принятый уровень значимости; k_1 – число степеней свободы большей дисперсии; k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии; n_1, n_2 – объёмы выборок соответственно.

5. Строим правостороннюю критическую область (рис.7.2) и наносим на нее наблюдаемое значение критерия Фишера $F_{\text{набл.}}$.

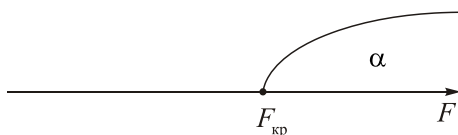


Рис. 7.2. Правосторонняя критическая область

Если $F_{\text{набл.}}$ окажется большим $F_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу отвергаем и признаем различие дисперсий существенным. Если $F_{\text{набл.}}$ будет меньше $F_{\text{кр}}$, нулевую гипотезу считаем достоверной, то есть различие дисперсий незначительно.

Пример 7.1. [5]

Проведены исследования на время отталкивания (с) двух групп гандболисток на время броска по воротам. Результаты сведены в вариационные ряды (таблицы 7.1 и 7.2).

Таблица 7.1

x	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,18	–
n	1	1	2	6	5	3	$\sum = 18$

Таблица 7.2

y	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	–
n	1	2	3	4	3	3	$\sum = 16$

Какая группа спортсменок обладают большей стабильностью результата. Иначе говоря, придётся сравнить дисперсии двух групп по критерию Фишера.

Обработка вариационных рядов дает следующие результаты $\bar{x} = 0,14$ с; $(S_x^2)_B = 0,0005$ с²; $n_x = 18$; $\bar{y} = 0,16$ с; $(S_y^2)_B = 0,0002$ с²; $n_y = 16$.

1) Выдвигаем нулевую гипотезу:

$$H_0 : (S_x^2)_\Gamma = (S_y^2)_\Gamma.$$

2) Выдвигаем альтернативную гипотезу:

$$H_1 : (S_x^2)_\Gamma > (S_y^2)_\Gamma.$$

3) Вычисляем наблюдаемое значение критерия:

$$F_{\text{набл.}} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{0,0005}{0,0002} = 2,5.$$

4) Задаем уровень значимости $\alpha = 0,05$ и находим критическую точку $F_{\text{кр}}$ правосторонней критической области по таблице приложения 4.

$$F_{\text{кр}}(\alpha; k_1 = n_x - 1; k_2 = n_y - 1) = F_{\text{кр}}(0,05; 17, 15) = 2,4.$$

5) Наносим $F_{\text{набл}} = 2,5$ на критическую область (см. рис. 7.3).

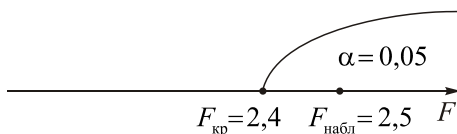


Рис. 7.3. Критическая область

Так как $F_{\text{набл.}}$ оказалось в критической области, нулевую гипотезу о равенстве дисперсий придется отвергнуть и принять альтернативную H_1 . Таким образом, разница в дисперсиях признается существенной. Большей стабильностью результата обладает группа с меньшей дисперсией, то есть вторая группа. Теперь нужны дополнительные исследования, направленные на поиск просчетов в тренировочном процессе гандболистов, тренирующихся по методике, аналогичной методике первой группы.

Пример 7.2. [4]

Проведены исследования двух групп боксеров численностью 40 человек каждая на быстроту реакции (мс). Результаты представлены в вариационных рядах (таблицы 7.3 и 7.4).

Таблица 7.3

x	550	560	570	580	590	600	610	–
n	8	14	7	5	3	2	1	$\Sigma = 40$

Таблица 7.4

y	550	560	570	580	590	600	610	–
n	2	2	1	9	12	10	4	$\Sigma = 40$

В результате обработки вариационных рядов получены следующие результаты: $\overline{x_B} = 568$ мс ; $\overline{y_B} = 588$ мс ; $(S_x^2)_B = 237,5$ (мс)² ; $(S_y^2)_B = 194,5$ (мс)² ; $n_y = 40$; $n_x = 40$.

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о равенстве дисперсий.

$$1) H_0 : (S_x^2)_T = (S_y^2)_T.$$

$$2) H_1 : (S_x^2)_T > (S_y^2)_T.$$

$$3) F_{\text{набл}} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{237,5}{194,5} = 1,22.$$

4) $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1 = n_x - 1, k_2 = n_y - 1) = F_{\text{кр}}(0,05; 39,39) = 1,7$ (по таблице приложения 4).

5) Наносим $F_{\text{набл}}$ на правостороннюю область (рис. 7.4).

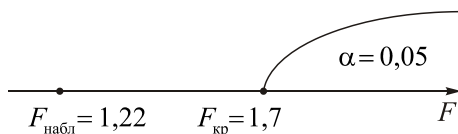


Рис. 7.4 Критическая область

Так как $F_{\text{набл}}$ не попало в критическую область, нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве дисперсий. Разница в выборочных дисперсиях носит случайный характер. Значит стабильность результата в обеих группах примерно одинакова.

7.2. Сравнение генеральных средних двух групп

Данную задачу приходится решать во многих случаях тренерской практики, когда необходимо сравнить эффективность различных методик тренировочного процесса, осуществить обоснованный выбор кандидатов в сборную команду, оценить качество и полезность схем тренировочного процесса и пр. Будем различать 3 случая, которые будут описаны ниже.

7.2.1. Большие ($n > 30$) независимые выборки

1) Выдвигаем нулевую гипотезу:

$$H_0 : \overline{x}_\Gamma = \overline{y}_\Gamma .$$

2) Формулируем альтернативную гипотезу:

$$H_1 : \overline{x}_\Gamma > \overline{y}_\Gamma .$$

3) Вычисляем наблюдаемое значение критерия по формуле:

$$Z_{\text{набл}} = \frac{|\overline{x}_B - \overline{y}_B|}{\sqrt{\frac{(S_B^2)_x}{n_x} + \frac{(S_B^2)_y}{n_y}}} ,$$

где $\overline{x}_B$, $\overline{y}_B$ – выборочные средние; $(S_B^2)_x$, $(S_B^2)_y$ - выборочные дисперсии; n_x , n_y – объёмы выборок.

4) Критическую точку правосторонней критической области ищем по схеме:

Сначала находим значение функции Лапласа* по формуле

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{(1-2\alpha)}{2} , \text{ где } \alpha - \text{ заданный уровень значимости. Затем}$$

по таблице функции Лапласа (приложения 5) ищем $Z_{\text{кр}}$.

5) Наносим $Z_{\text{набл}}$ на критическую область. Если $Z_{\text{набл}} > Z_{\text{кр}}$, то гипотезу H_0 отвергаем и принимаем гипотезу H_1 . Если $Z_{\text{набл}} < Z_{\text{кр}}$, то принимаем гипотезу H_0 .

Пример 7.3. Обратимся к условиям примера 7.2 и поставим задачу сравнить средние. В условиях этого примера: $\overline{x}_B = 568$ мс ; $\overline{y}_B = 588$ мс ; $(S_x^2)_B = 237,5$ (мс)² ; $(S_y^2)_B = 194,5$ (мс)² ; $n_y = 40$; $n_x = 40$; $\alpha = 0,05$.

* Функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

$$1) H_0 : \overline{x}_Г = \overline{y}_Г.$$

$$2) H_1 : \overline{y}_Г > \overline{x}_Г.$$

$$3) Z_{\text{набл}} = \frac{|568 - 588|}{\sqrt{\frac{237,5}{40} + \frac{194,5}{40}}} = 6,1.$$

$$4) \Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{1 - 2 \cdot 0,05}{2} = 0,45.$$

По таблице приложение 5 найдём $Z_{\text{кр}} = 1,64$.

5) Наносим $Z_{\text{набл}}$ на правостороннюю критическую область (рис. 7.5).

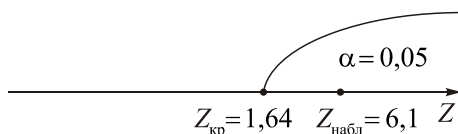


Рис. 7.5. Критическая область

Так как $Z_{\text{набл}}$ попало в критическую область гипотезу H_0 отвергаем и принимаем H_1 . То есть различие в выборочных средних признается закономерным. Первая группа боксёров ($\overline{x}_Б = 568$ мс) обладает лучшей быстротой реакции чем вторая ($\overline{y}_Б = 588$ мс).

7.2.2. Малые ($n < 30$) независимые выборки

1) Выдвигаем нулевую гипотезу:

$$H_0 : \overline{x}_Г = \overline{y}_Г.$$

2) Формулируем альтернативную гипотезу:

$$H_1 : \overline{x}_Г > \overline{y}_Г.$$

3) Наблюдаемое значение критерия определяем по формуле:

$$T_{\text{набл}} = \frac{|\overline{x_B} - \overline{y_B}|}{\sqrt{(n_x - 1)(S_x^2)_B + (n_y - 1)(S_y^2)_B}} \cdot \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}}.$$

4) Строим правостороннюю критическую область и находим критическую точку $T_{\text{кр}}$. По таблице критических точек распределения Стьюдента (приложение 6). $T_{\text{кр}}$ есть функция от принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n_x + n_y - 2$.

5) Наносим $T_{\text{набл}}$ на критическую область и делаем статистический вывод.

Пример 7.4. Обратимся к примеру 7.1 и поставим задачу сравнить средние. В условиях этого примера $\overline{x_B} = 0,14$ с; $(S_x^2)_B = 0,0005$ с²; $n_x = 18$; $\overline{y_B} = 0,16$ с; $(S_y^2)_B = 0,0002$ с²; $n_y = 16$; $\alpha = 0,05$.

$$1) H_0 : \overline{x_{\Gamma}} = \overline{y_{\Gamma}}.$$

$$2) H_1 : \overline{y_{\Gamma}} > \overline{x_{\Gamma}}.$$

$$3) T_{\text{набл}} = \frac{|0,14 - 0,16|}{\sqrt{(18 - 1)0,0005 + (16 - 1)0,0002}} \times \sqrt{\frac{18 \cdot 16(18 + 16 - 2)}{18 + 16}} = 3,0.$$

$$4) T_{\text{кр}}(\alpha = 0,05; k = 18 + 16 - 2) = 1,7.$$

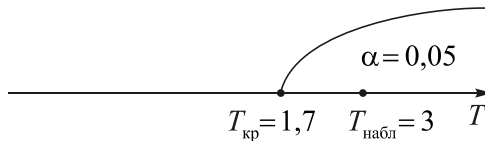


Рис. 7.6. Критическая область

Так как $T_{\text{набл}}$ попало в критическую область (рис. 7.6), H_0 отвергаем и принимаем H_1 . В результате заключаем, что разница в средних носит закономерный характер. То есть вторая группа ($\overline{y_B} = 0,16$ с) действительно показала большее время отталкивания, чем первая ($\overline{x_B} = 0,14$ с).

7.2.3. Малые зависимые выборки одинакового объёма

1) Выдвигаем нулевую гипотезу:

$$H_0 : \overline{x_{\Gamma}} = \overline{y_{\Gamma}}.$$

2) Формулируем альтернативную гипотезу:

$$H_1 : \overline{x_{\Gamma}} > \overline{y_{\Gamma}}.$$

3) Наблюдаемое значение критерия определяем по формуле:

$$T_{\text{набл}} = \frac{|\overline{z}| \sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - \overline{z})^2}},$$

где $z_i = x_i - y_i$, $\overline{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$.

4) Строим правостороннюю критическую область и находим критическую точку $T_{\text{кр}}$ по таблице критических точек распределения Стьюдента (приложение 6). $T_{\text{кр}}$ есть функция от принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k = n - 1$.

5) Наносим $T_{\text{набл}}$ на критическую область и делаем статистический вывод.

Пример 7.4. Баскетбольная команда, вступая в соревновательный сезон, проходит тренировочный сбор, один из элементов которого является цикл тренировок силового характера.

Для проверки эффекта этого цикла пять спортсменов выполняют подтягивание на перекладине до начала тренировок (x_i) и после них (y_i). Результаты в виде количества подтягиваний приведены в таблице 7.5.

Таблица 7.5

x_i	10	12	11	14	13	$n = 5$
y_i	12	13	12	12	14	$n = 5$

Подсчитаем: $\bar{x}_B = \frac{1}{5}(10 + 12 + 11 + 14 + 13) = 12,0$

$$\bar{y}_B = \frac{1}{5}(12 + 13 + 12 + 12 + 14) = 12,6$$

1) $H_0 : \bar{x}_\Gamma = \bar{y}_\Gamma$.

2) $H_1 : \bar{y}_\Gamma > \bar{x}_\Gamma$.

3) Для вычисления $T_{\text{набл}}$ строим таблицу 7.6.

Таблица 7.6

№	x_i	y_i	z_i	$z_i - \bar{z}$	$(z_i - \bar{z})^2$
1	10	12	-2	-1,4	1,96
2	12	13	-1	-0,4	0,16
3	11	12	-1	-0,4	0,16
4	14	12	2	2,6	6,76
5	13	14	-1	-0,4	0,16
Σ	60	63	-3	-	9,2

$$\bar{z} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{5} \cdot (-3) = -0,6$$

$$T_{\text{набл}} = \frac{|-0,6| \sqrt{5 \cdot (5-1)}}{\sqrt{9,2}} = 0,88.$$

4) $T_{\text{кр}}(\alpha = 0,05; k = 5-1) = T_{\text{кр}}(0,05; 4) = 2,13.$

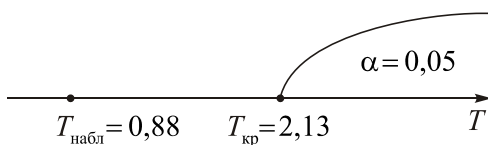


Рис. 7.7. Критическая область

Так как $T_{\text{набл}} = 0,88$ не попало в критическую область, оснований отвергать нулевую гипотезу нет. Расхождение в средних $\bar{x}_B = 12,0$, $\bar{y}_B = 12,6$ следует признать случайным. Этот факт может, например, означать, что тренировочный цикл силового характера не привел к улучшению физических кондиций баскетболистов и оказался малоэффективным.

7.3. Сравнение нескольких (> 2) генеральных средних (дисперсионный анализ)

В тренерской практике приходится сталкиваться с ситуацией, когда необходимо сравнить степень готовности к ответственным стартам нескольких групп спортсменов. Например, при отборе в сборную команду. Методика попарного сравнения в этом случае не пригодна. Дело в том [2], что с возрастанием числа средних возрастает и наибольшее различие между ними: среднее новой выборки может оказаться больше наибольшего или меньше наименьшего из средних, полученных до нового опыта.

Действенным в этом случае оказывается дисперсионный анализ. Основная идея метода сводится к тому, что о случайности или закономерности различий групповых средних судят по дисперсии. Вводят в рассмотрение факторную $S_{\text{факт}}^2$ и остаточную $S_{\text{ост}}^2$ дисперсии. Первая оценивает влияния непосредственно фактора (степени готовности спортсмена), вторая интегрально оценивает влияние случайных причин на результат.

Оценка существенности влияния фактора производится по критерию Фишера. В данном случае нулевая гипотеза $H_0 : \bar{x}_{\Gamma_1} = \bar{x}_{\Gamma_2} = \dots = \bar{x}_{\Gamma_n}$, где $\bar{x}_{\Gamma_i}$ – средние рассматриваемых групп, сводится к гипотезе $H_0 : S_{\text{факт}}^2 = S_{\text{ост}}^2$ при альтернативной гипотезе $H_0 : S_{\text{факт}}^2 > S_{\text{ост}}^2$. Наблюдаемое значение критерия Фи-

шера вычисляется по формуле $F_{\text{набл}} = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{ост}}^2}$. Критическая точка

правосторонней критической области $F_{\text{кр}}$ находится по таблице приложение 4. и зависит от величин: α , k_1 , k_2 , где α – уровень значимости, k_1 и k_2 – число степеней свободы факторной и остаточной дисперсий; $k_1 = p - 1$, $k_2 = N - p$ (p – количество уровней фактора, т. е. число групп; N – сумма наблюдений на всех уровнях фактора, т. е. общее количество спортсменов во всех группах). Если $F_{\text{набл}}$ не попадает в критическую область, то расхождение между средними признается несущественным. Если же $F_{\text{набл}}$ попадает в критическую область, расхождение между признаётся закономерным. Если это так, то можно провести дополнительно попарное сравнение, чтобы выяснить какая группа спортсменов готова лучше.

Вычисление факторной и остаточной дисперсии в случае различного количества наблюдений на каждом уровне фактора, проводится по формулам:

$$S_{\text{факт.}}^2 = \frac{S_{\text{факт.}}}{p - 1}, \quad (7.1)$$

$$S_{\text{ост.}}^2 = \frac{S_{\text{ост.}}}{N - p}, \quad (7.2)$$

$$S_{\text{факт.}} = \sum_{j=1}^p \frac{1}{n_j} T_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^p T_j \right)^2, \quad (7.3)$$

$$S_{\text{ост.}} = S_{\text{общ.}} - S_{\text{факт.}}, \quad (7.4)$$

$$S_{\text{общ.}} = \sum_{j=1}^p K_j - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^p T_j \right)^2, \quad (7.5)$$

$$\begin{cases} K_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2; \quad T_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}; \\ y_{ij} = x_{ij} - c; \quad N = \sum_{j=1}^p n_j; \end{cases} \quad (7.6)$$

где x_{ij} – наблюдаемое значение; c – условный нуль ($c \approx \bar{x}$); n_j – количество наблюдений на j -том уровне фактора.

Пример 7.5. [6]

В семи плавательных центрах прошли подготовку 28 кандидатов в сборную. На тренировочный сбор из каждого центра привлечено разное количество спортсменов. Сравнительная эффективность работы центров проверялась контрольным тестированием спортсменов, оцениваемым в баллах. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о равенстве средних результатов тестирования по всем плавательным центрам. Результаты тестирования спортсменов приведены в таблице 7.7.

Таблица 7.7

$i \backslash j$	Уровни фактора F_j (плав. центры)							Σ
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	
1	75	104	96	92	76	92	89	
2	86	89	88	89	89	87	85	
3		92	105		90	88	93	
4		90	90		77	82		
5		81	91		75	90		
6						86		
n_j	2	5	5	2	5	6	3	$N = 28$
$\bar{x}_{j \Gamma P}$	80,5	91,2	94,0	90,5	81,4	87,5	89	

В таблице 7.7. групповые средние подсчитаны по формуле:

$$\bar{x}_{j\Gamma P} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_i$$

Общую среднюю найдем по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^7 \bar{x}_{j\Gamma P} \cdot n_j; \quad N = \sum_{j=1}^7 n_j = 28.$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{1}{28} (80,5 \cdot 2 + 91,2 \cdot 5 + 94,0 \cdot 5 + \\ + 90,5 \cdot 2 + 81,4 \cdot 5 + 87,5 \cdot 6 + 89,0 \cdot 3) = 88. \end{aligned}$$

Перейдем к новым координатам: $y_{ij} = x_{ij} - c$, где $c = 88$.

Для вычисления факторной $S_{\text{факт}}^2$ и остаточной $S_{\text{ост}}^2$ дисперсии, используем следующие соотношения:

$$\left\{ \begin{aligned} S_{\text{общ}} &= \sum_{j=1}^7 K_j - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^7 T_j \right)^2, \\ S_{\text{факт}} &= \sum_{j=1}^7 \frac{1}{n_j} T_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^7 T_j \right)^2, \\ S_{\text{ост}} &= S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}} \end{aligned} \right. \quad (7.7)$$

$$\text{где } K_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2, \quad T_j = \sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}.$$

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

С использованием формул (7.7) дисперсии найдутся по формулам:

$$\begin{cases} S_{\text{факт}}^2 = \frac{S_{\text{факт}}}{p-1} = \frac{S_{\text{факт}}}{7-1} = \frac{S_{\text{факт}}}{6} \\ S_{\text{ост}}^2 = \frac{S_{\text{ост}}}{N-p} = \frac{S_{\text{ост}}}{28-7} = \frac{S_{\text{ост}}}{21} \end{cases} \quad (7.8)$$

Составим расчетную таблицу (таблица 7.8)

Таблица 7.8

$j \backslash i$	F_1		F_2		F_3		F_4		F_5		F_6		F_7		Σ
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	y_{i4}	y_{i4}^2	y_{i5}	y_{i5}^2	y_{i6}	y_{i6}^2	y_{i7}	y_{i7}^2	
1	-13	169	16	256	8	64	4	16	-12	144	4	16	1	1	
2	-2	4	1	1	2	0	1	1	1	1	-1	1	3	9	
3			4	16	17	289			2	4	0	0	5	25	
4			2	4	2	4			-11	121	-6	36			
5			-7	49	3	9			-13	169	2	4			
6											-2	4			
n_j	2		5		5		2		5		6		3		$N = 28$
K_j		173		326		366		17		439		61		35	1417
T_j	-15		16		30		5		-33		-3		3		3
$\frac{T_j^2}{n_j}$	112,5		51,2		180		12,5		217,8		1,5		3		578,5

Используя данные таблицы 7.8 и формулы (7.7) и (7.8) найдем:

$$S_{\text{общ}} = 1417 - \frac{3^2}{28} = 1416,7;$$

$$S_{\text{факт}} = 578,5 - \frac{3^2}{28} = 578,2;$$

$$S_{\text{ост}} = 1416,7 - 578,5 = 838,5;$$

$$S_{\text{факт}}^2 = \frac{578,2}{6} = 96,4;$$

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{838,5}{21} = 39,9.$$

Наблюдаемое значение критерия Фишера найдем по формуле

$$F_{\text{набл}} = \frac{S_{\text{факт}}^2}{S_{\text{ост}}^2} = \frac{96,4}{39,9} = 2,42.$$

Критическую точку правосторонней критической области найдем по таблице приложение 4.

$$\begin{aligned} F_{\text{кр}}(\alpha; k_1; k_2) &= F_{\text{кр}}(0,05; p-1; N-p) = \\ &= F_{\text{кр}}(0,05; 7-1; 28-7) = F(0,05; 6; 21) = 2,6. \end{aligned}$$

Строим правостороннюю критическую область и наносим на нее $F_{\text{набл}}$

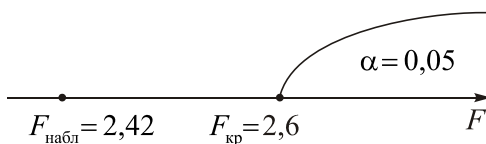


Рис. 7.8. Критическая область

Так как $F_{\text{набл}}$ не попало в критическую область разница между факторной и остаточной дисперсией признается не существенной. Иначе говоря, средний уровень подготовки спортсменов во всех группах примерно одинаков. Разность групповых средних объясняется случайными причинами.

Следует заметить, что в данном примере $F_{\text{набл}}$ и $F_{\text{кр}}$ несущественно отличаются друг от друга. В этом случае имеет смысл

повторить контрольные соревнования, расширив, может быть, представительство участников от каждого плавательного центра. Малое представительство от первого, второго и седьмого центров могло сказаться на общем результате сравнения.

7.4. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности

Как было указано ранее, в п. 2.1. и п. 5.3. существует два способа оценки принадлежности данного эмпирического распределения к нормальному. Правило "трех сигм" и определение ассиметрии A_S и эксцесса E_K . Более точно отвечает на вопрос о возможности считать (или не считать) данное распределение нормальным является проверка гипотезы о нормальном распределении.

Проверяют данную гипотезу с помощью критерия согласия. В данной работе рассматривается критерий согласия Пирсона (критерий χ^2 "хи квадрат"). В основе критерия лежит сравнение теоретических частот нормального распределения и опытных (эмпирических) частот. Обычно они различаются. Задача критерия установить случайно или не случайно это расхождение.

Формулируем нулевую гипотезу H_0 : генеральная совокупность распределения по нормальному закону. Альтернативная гипотеза H_1 : генеральная совокупность не имеет нормального распределения. Критерием проверки выступает случайная величина

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

где n_i' – теоретические частоты нормального распределения; n_i – эмпирические частоты. Критическую точку правосторонней критической области $\chi_{кр}^2$ находят по таблице критических точек

распределения χ^2 (приложение 7) в зависимости от двух параметров α – уровня значимости и числа степеней свободы $k = S - 3$. Буквой S обозначено количество частичных интервалов непрерывного вариационного ряда.

Работа по проверке нулевой гипотезы проводится в два этапа: первый – вычисление теоретических частот нормального распределения, второй – вычисление наблюдаемого значения критерия χ^2 по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_i \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$

Методику проверки гипотезы рассмотрим на примере [7].

Пример 7.6.

В течение года оценивалось качество выполнения спортсменом тренировочного задания. Результат 161 тренировки в баллах приведен в виде непрерывного вариационного ряда (таблица 7.9).

Таблица 7.9

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i - x_i + 1$	48–51	51–54	54–57	57–60	60–63	63–66	66–69	69–72	72–75	75–78
n_i	2	7	21	22	31	34	27	11	4	2

Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу H_0 : генеральная совокупность распределена по нормальному закону. При альтернативной гипотезе H_1 : генеральная совокупность не имеет нормального распределения.

Для вычисления теоретических частот нормального распределения составим таблицу 7.10.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Таблица 7.10

i	x_i	x_{i+1}	$x_i - \bar{x}$	$x_{i+1} - \bar{x}$	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	p_i	n'_i
1	48	51	–	–11,5	–∞	–2,1	–0,5	–0,4821	0,0179	2,88
2	51	54	–11,5	–8,5	–2,1	–1,55	–0,4821	–0,4394	0,0427	6,87
3	54	57	–8,5	–5,5	–1,55	–1,0	–0,4394	–0,3413	0,0981	15,79
4	57	60	–5,5	–2,5	–1,0	–0,46	–0,3413	–0,1772	0,1641	26,42
5	60	63	–2,5	0,5	–0,46	0,09	–0,1772	0,0359	0,2131	34,31
6	63	66	0,5	3,5	0,09	0,64	0,0359	0,2389	0,203	32,68
7	66	69	3,5	6,5	0,64	1,19	0,2389	0,3830	0,1441	23,20
8	69	72	6,5	9,5	1,19	1,73	0,3830	0,4582	0,0752	12,11
9	72	75	9,5	12,5	1,73	2,28	0,4582	0,4887	0,0305	4,91
10	75	78	12,5	–	2,28	∞	0,4887	0,5	0,0113	1,82
Σ									1,0	161

В таблице обозначено $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$; $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S}$; $\Phi(z_i)$, $\Phi(z_{i+1})$ – значение функции Лапласа из таблицы приложения 5; $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$; $n'_i = np_i = 161 \cdot p_i$; $\bar{x} = 62,5$; $S = 5,48$.

Для подсчета $\chi^2_{\text{набл}}$ составим таблицу 7.11.

Таблица 7.11

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	2	2,88	–0,88	0,77	0,27	4	1,39
2	7	6,87	0,23	0,05	0,007	49	7,13
3	21	15,79	5,21	27,14	1,71	441	27,93
4	22	26,42	–4,42	19,54	0,74	484	18,32
5	31	34,31	–3,31	10,96	0,32	961	28,01
6	34	32,68	1,32	1,74	0,05	1156	35,37
7	27	23,20	3,8	14,41	0,62	729	31,42
8	11	12,11	–1,11	1,23	0,10	121	9,99

Продолж. табл. 7.11

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
9	4	4,91	-0,91	0,83	1,17	16	3,26
10	2	1,82	0,08	0,006	0,004	4	2,20
Σ	161	161			$\chi^2_{\text{набл}} = 3,991$		165,02

В таблице 7.11 последние два столбца приведены для контроля вычислений. Если они выполнены тщательно, то должно быть

$$\frac{n_i^2}{n_i'} - n = \chi^2_{\text{набл}}.$$

В нашем случае

$$165,02 - 161 = 4,02,$$

что практически совпадает с найденным $\chi^2_{\text{набл}} = 3,991$.

Критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{набл}}$ при $\alpha = 0,05$; $k = S - 3 = 10 - 3 = 7$ найдем по таблице приложения 7: $\chi^2_{\text{набл}}(\alpha = 0,05; k = 7) = 14,1$.

Нанесем наблюдаемое значение $\chi^2_{\text{набл}} = 3,991$ на критическую область.

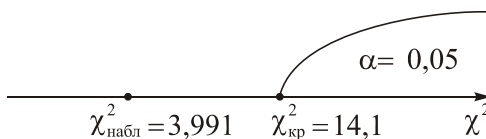


Рис. 7.9. Критическая область

Поскольку наблюдаемое значение не попало в критическую область ($\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$), нет оснований отвергать гипотезу о распределении генеральной совокупности по нормальному закону.

7.5. Задачи для самостоятельной работы

Задание 1. По данным, приведённым в приложении 10, проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий двух групп по критерию Фишера. Уровень значимости α принять равным 0,05. Критическую точку $F_{кр}$ правосторонней критической области найти по таблице приложения 4.

Задание 2. По данным, приведённым в приложении 10, проверить гипотезу о равенстве генеральных средних (две большие по численности независимые выборки). Уровень значимости $\alpha = 0,05$. Критическую точку $Z_{кр}$ правосторонней критической области найти по таблице приложения 5.

Задание 3. По данным, приведённым в приложении 11, проверить гипотезу о равенстве генеральных средних (две малые, независимые выборки). Уровень значимости $\alpha = 0,05$. Критическую точку $T_{кр}$ правосторонней критической области найти по таблице приложения 6.

Задание 4. По данным, приведённым в приложении 12, проверить гипотезу о равенстве генеральных средних (две малые зависимые выборки). Уровень значимости $\alpha = 0,05$. Критическую точку $T_{кр}$ правосторонней критической области найти по таблице приложения 6.

Задание 5. По данным выборки C (приложения 9) проверить гипотезу о равенстве средних нескольких (>2) генеральных совокупностей (дисперсионный анализ). Уровень значимости $\alpha = 0,05$. Критическую точку $F_{кр}$ распределения Фишера найти по таблице приложения 4.

Примечание: Выборка С. Результат контрольных соревнований (в баллах) группы спортсменов, прошедших подготовку в различных ($F_j, j = 1, 2, \dots, p$) плавательных центрах.

Задание 6. По выборке B (приложение 9) проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Уровень значимости $\alpha = 0,05$. Критическую точку $\chi_{кр}^2$ распределения Фишера найти по таблице приложения 7.

8. ТЕОРИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

В спорте, в спортивной команде и в организме спортсмена существует много взаимосвязей между различными признаками. Например, с увеличением количества занимающихся в каком-либо виде спорта, повышает результаты; осложнения во взаимоотношениях между игроками одной команды ухудшает ее результативность; с повышением интенсивности нагрузки у спортсмена повышается пульс, увеличивается скорость кровотока в работающих мышцах, уменьшаются в них энергетические ресурсы, и т. д.

В результате ставится вопрос о наличии или отсутствии взаимосвязи между двумя признаками, которые выражены переменными X и Y .

Существуют два вида связей между переменными X и Y .

Функциональная $Y = f(X)$, при которой каждому значению X соответствует единственное значение Y

Статистическая, при которой на формирование переменных X и Y оказывают влияние различные факторы. При этом среди факторов есть такие, которые одновременно влияют на переменную X и на переменную Y . В этом случае каждому значению переменной X могут соответствовать несколько значений переменной Y и наоборот.

Частным случаем статистической является корреляционная зависимость. В этом случае каждому значению X соответствует

единственное значение среднего переменной Y или наоборот. То есть:

$$\bar{y}_x = f(x) \quad \text{или} \quad \bar{x}_y = \varphi(y).$$

Последние уравнения называются уравнениями регрессии. Теория корреляции ставит перед собой две задачи. Первая – установить форму корреляционной зависимости, то есть определить конкретный вид функций $f(x)$ и $\varphi(y)$. Вторая – определить силу или тесноту корреляционной связи.

Решение первой задачи начинается с построения корреляционного поля – графика, на котором в виде точек показаны пары значений X и Y , полученные в результате эксперимента.

Корреляционное поле может выглядеть так, как показано на рисунках 8.1, 8.2, 8.3.

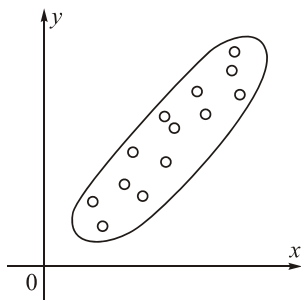


Рис. 8.1

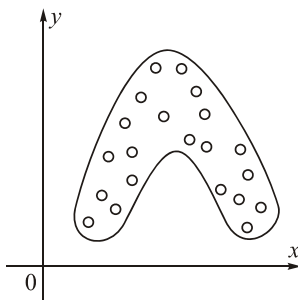


Рис. 8.2

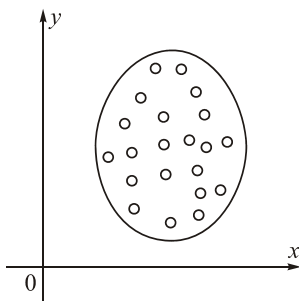


Рис. 8.3

Анализ рис. 8.1 показывает, что переменные X и Y взаимосвязаны, причем в первом случае отмечается тенденция к росту переменной Y с увеличением переменной X . Зависимость носит линейный характер. Во втором случае (рис. 8.2) зависимость между X и Y скорее всего носит нелинейный характер. В последнем случае рис. 8.3 хаотичность расположения точек отражает, по-видимому, отсутствие связи между изучаемыми переменными.

Если установлено, что между переменными X и Y имеет место линейная зависимость, то уравнение регрессии можно записать в виде:

$$y = \bar{y} + \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \cdot (x - \bar{x}), \quad (8.1)$$

$$x = \bar{x} + \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \cdot (y - \bar{y}). \quad (8.2)$$

В формулах 8.1; 8.2 x_i, y_i – пары экспериментальных значений переменных X и Y ; $\bar{x}, \bar{y}$ – средние значения X и Y соответственно.

Прямые, построенные по уравнениям 8.1 и 8.2 пересекаются в точке $A(\bar{x}, \bar{y})$.

Вопрос о силе или тесноте линейной корреляционной связи решается с помощью коэффициента корреляции Пирсона r_{xy} и рангового коэффициента Спирмена r_s . Первому из них отдается предпочтение в случае, если известно, что выборочные экспериментальные данные подчинены нормальному закону распределения. Оба коэффициента изменяются в пределах от (-1) до $(+1)$. Чем ближе коэффициенты по модулю к единице,

тем более сильной является линейная зависимость. Принято считать, что, если указанные коэффициенты по модулю меньше (0,3), то линейная связь между переменными X и Y весьма слаба. Однако, заметим, близость коэффициентов к нулю указывает лишь на отсутствие линейной связи. Может случиться, что существует, но носит, например, нелинейный характер.

Величины коэффициентов корреляции вычисляются по формулам:

$$r_{xy} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (8.3)$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_i (dx_i - dy_i)^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (8.4)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i$; dx_i , dy_i – ранги переменных X и Y ; n – объём выборки.

Приведем пример вычисления рангового коэффициента корреляции r_s . Основные вычисления сведены в таблицу 8.1.

Таблица 8.1

x_i	N_{2x}	dx_i	y_i	N_{2y}	dy_i	$(dx_i - dy_i)$	$(dx_i - dy_i)^2$
702	1	1	9,1	1	1	0	0
730	2	2	9,6	2	2	0	0
790	3	3	9,8	3	3	0	0
795	4	4	10,1	4	4	0	0
802	5	5	10,5	5	6,5	-1,5	2,25
820	6	6	10,5	6	6,5	-0,5	0,25
821	7	7	10,3	7	5	2	4,0
890	8	8	10,7	8	8	0	0
–	$\sum$	–	–	–	–	0	6,5

Замечание. Обычно определение рангов переменных X и Y проходит по следующему алгоритму:

1) Значение одной из переменных (например X) приводят и нумеруют в возрастающем порядке.

2) Значение второй переменной (например Y) приводят в порядке, соответствующем эксперименту. Нумерация значений переменной Y приводится так же в возрастающем порядке (см. столбец №_у в таблице 8.1).

3) Определяют ранг переменных X и Y в соответствии с их порядковыми номерами. В случае если среди значений переменных встречаются одинаковые, им присваиваются одинаковые ранги по принципу осреднения их порядковых номеров. Так в таблице 8.1 переменная Y принимает два одинаковых значения 10,5, расположенных на 6 и 7 местах. Ранг значения 10,5 найдется так: $\frac{6+7}{2} = 6,5$.

Вычислим коэффициент корреляции Спирмена по формуле (8.4)

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 6.5}{8(8^2 - 1)} = 0,92.$$

Так как $r_s = 0,92$, близок к 1, заключаем, что переменные X и Y имеют тесную линейную взаимосвязь.

Как правило, достоверность найденных коэффициентов корреляции (существенность их отличия от нуля) проверяют с привлечением специальных таблиц (приложение 8).

Схема проверки следующая. Найденные коэффициенты сравнивают с критическими значениями с таблицы для трех уровней доверительной вероятности $\gamma = 0,95; 0,99; 0,999$. Если найденный коэффициент оказывается больше наименьшего табличного, следует вывод о том, что коэффициент корреляции достоверен; если коэффициент оказывается меньшим наименьшего табличного, то достоверность найденного коэффициента подвергается сомнению.

Пример 8.1. По результатам тестирования группы спортсменов (таблица 8.2) определить, анализируя корреляционное поле, существует ли взаимосвязь между показателем индекса Кетле (индекс массы тела) X и становой силы Y . Определить наличие взаимосвязи между показателем индекса Кетле X и становой силы Y с помощью расчета рангового коэффициента корреляции Спирмена и коэффициента корреляции Пирсона. Найти уравнение регрессии для показателей индекса Кетле X и становой силы Y . Показать прямые регрессии на рисунке.

Результаты тестирования спортсменов (Сп).

X - индекс Кетле ($\text{кг}/\text{м}^2$); Y - становая сила (кг).

Таблица 8.2

Сп	A	B	C	D	E	F	G	H
x_i	19	21	23	24	25	29	30	32
y_i	94	92	96	100	100	98	102	120

Строим корреляционное поле и график эмпирической регрессии.

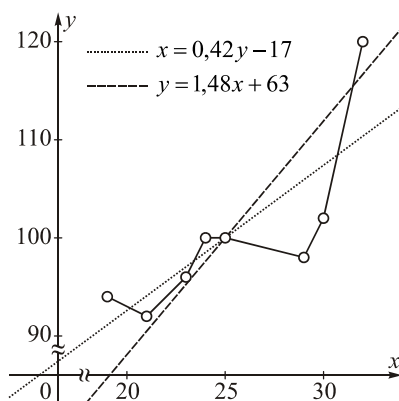


Рис. 8.4. Корреляционное поле.
График эмпирической регрессии ($\circ-\circ-\circ$).
Прямые линии регрессии (..... и -----)

Анализируя корреляционное поле и график эмпирической регрессии, можно сделать вывод о том, что с увеличением индекса Кетле, растет и становая сила. Предполагаем, что эти две величины связывает линейная зависимость.

Вычисляем ранговый коэффициент корреляции Спирмена по формуле (8.4).

Строим таблицу для определения рангов для переменных X и Y .

Таблица 8.3

x_i	N_{xi}	dx_i	y_i	N_{yi}	dy_i	$(dx_i - dy_i)$	$(dx_i - dy_i)^2$
19	1	1	94	2	2	-1	1
21	2	2	92	1	1	1	1
23	3	3	96	3	3	0	0
24	4	4	100	5	5,5	-1,5	2,25
25	5	5	100	6	5,5	-0,5	0,25
29	6	6	98	4	4	2	4,0
30	7	7	102	7	7	0	0
32	8	8	120	8	8	0	0
Σ	-	-	-	-	-	0	6,5

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot 6,5}{8(8^2 - 1)} = 0,92.$$

Так как $r_s = 0,92$ весьма близок к единице, то между переменными X и Y существует тесная положительная линейная корреляционная зависимость.

Достоверность коэффициента корреляции Спирмена (существенность его отличия от нуля), проверим, сравнивая его с табличными значениями критических значений r_s (приложение 5).

В таблице найдем критическое значение $r_s^{kp}(\gamma; n) = r_s^{kp}(0,99; 8) = 0,881$.

Поскольку $r_s > r_s^{kp}$, делаем вывод о том, что с вероятностью 0,99 найденный коэффициент ранговой корреляции отражает су-

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

существующую взаимосвязь между индексом Кетле и становой силы. Подобную закономерность можно распространить и на генеральную совокупность.

В предположении нормального распределения генеральной совокупности, откуда осуществлена выборка исходных данных, подсчитаем коэффициент корреляции Пирсона.

Составим таблицу:

Таблица 8.4

№	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	19	94	-6	-6	36	36	36
2	21	92	-4	-8	32	16	64
3	23	96	-2	-4	8	4	16
4	24	100	-1	0	0	1	0
5	25	100	0	0	0	0	0
6	29	98	4	-2	-8	16	4
7	30	102	5	2	10	25	4
8	32	120	7	20	140	49	400
Σ	203	802	-	-	218	147	524

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot 203 \approx 25; \quad \bar{y} = \frac{1}{8} \cdot 802 \approx 100.$$

Используя формулу (8.3), получим: $r_{xy} = \frac{218}{\sqrt{147 \cdot 524}} = 0,79$.

Величина коэффициента корреляции Пирсона $r_{xy} = 0,79$ подтверждает тесную линейную корреляционную связь переменных X и Y .

Достоверность r_{xy} проверяем, сравнивая его с табличным значением r_{xy}^{kp} , найденного из таблицы приложения 8. По этой таблице $r_{xy}^{kp}(\gamma; n) = r_{xy}^{kp}(0,99; 8) = 0,71$.

Так как $r_{xy} > r_{xy}^{kp}$, делаем вывод о том, что с вероятностью 0,99, найденный коэффициент корреляции подтверждает

характер зависимости между переменными X и Y . В результате, этот вывод можно распространить на всю генеральную совокупность.

Для отыскания уравнений прямых линий регрессии используем формулы (8.1), (8.2).

Расчетные данные для приведенных уравнений возьмем из таблицы 8.4.

$$y = \frac{218}{147}(x - 25) + 100;$$

$$x = \frac{218}{524}(y - 100) + 25.$$

В результате получим:

$$y = 1,48x + 63;$$

$$x = 0,42y - 17.$$

Полученные прямые показаны на рис.8.4. Как было указано выше, прямые регрессии пересеклись в точке $A(\bar{x}, \bar{y}) = A(25, 100)$.

Для оценки адекватности построенных уравнений регрессии вычисляем относительную ошибку оценки по формулам:

$$(S_B)_y = \left(S_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \right) \cdot \frac{1}{y} \cdot 100\%,$$

$$(S_B)_x = \left(S_x \sqrt{1 - r_{xy}^2} \right) \cdot \frac{1}{x} \cdot 100\%.$$

Чем меньше S_B , тем лучше построенная модель описывает связь между X и Y .

Соответствующие стандартные отклонения найдем по формулам:

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

В результате найдем:

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 524} = 8,1;$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{8} \cdot 147} = 4,3.$$

Тогда

$$(S_B)_y = \frac{8,1 \cdot \sqrt{1 - 0,79^2}}{100} \cdot 100 \% = 5 \%;$$

$$(S_B)_x = \frac{4,3 \cdot \sqrt{1 - 0,79^2}}{25} \cdot 100 \% = 10,5 \%.$$

8.1. Задачи для самостоятельной работы

По данным приведенным в приложении 13, выполнить следующие задания.

Задание 1. По результатам тестирования группы спортсменов определить, анализируя корреляционное поле, существует ли взаимосвязь между показателями индекса Кетле (индекс массы тела) X и становой силы Y . (Изобразить корреляционное поле на рисунке)

Задание 2. Определить наличие линейной связи между показателем индекса Кетле X и становой силы Y с помощью расчёта рангового коэффициента корреляции Спирмена и коэффициента корреляции Пирсона.

Задание 3. Найти уравнение регрессии вида $y = kx + b$ и $x = k_1y + b_1$, и построить их на чертеже. Провести оценку адекватности уравнений регрессии, вычисляя остаточные средние квадратические отклонения.

9. ЛИТЕРАТУРА

1. **Венецкий, М. Г.** Основные математико-статистические понятия [Текст] : монография / М. Г. Венецкий, В. Н. Венецкая. – М. : Статистика, 1974. – 256 с.
2. **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2003. – 479 с.
3. **Колде, Я. К.** Практикум по теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учебное пособие / Я. К. Колде. – М. : Высшая школа, 1991. – 157 с.
4. **Начинская, С. В.** Математическая статистика в спорте [Текст] : монография / С. В. Начинская. – К. : Здоровье, 1978. – 136 с.
5. **Начинская, С. В.** Спортивная метрология [Текст] : учебное пособие / С. В. Начинская. – М. : Изд. центр "Академия", 2005. – 240 с.
6. **Неделько, Е. Ю.** Практикум по спортивной метрологии [Электронное издание] : методические указания / Е. Ю. Неделько, О. В. Кувалдина, А. Л. Чорный. – Николаев : НУК, 2012. – 65 с.
7. **Неделько, Е. Ю.** Лабораторные работы по математической статистике [Электронное издание] : учебное пособие / Е. Ю. Неделько. – Николаев : НУК, 2013. – 89 с.
8. **Смирнов, Ю. И.** Спортивная метрология [Текст] : монография / Ю. И. Смирнов, М. М. Полевщиков. – М. : Изд. центр "Академия", 2000. – 232 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица случайных чисел

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Продолжение приложения 1

04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
48 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,62	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критические точки распределения F Фишера-Снедекора

k_1 – число степеней свободы большей дисперсии,

k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии

Уровень значимости $\alpha = 0,01$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,40	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,93	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,99	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,08	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,34	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,23	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Продолжение приложения 4

Уровень значимости $\alpha = 0,01$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

Таблицы значений для функций $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\text{и } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	091	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Продолжение приложения 5

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3725	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	148	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	292	2852	19	1965	3830
1,20	0,1942	0,3849	1,60	0,1109	0,4452	2,00	0,0540	0,4772
21	1919	3869	61	1092	4463	02	0519	4783
22	1895	3888	62	1074	4474	04	0498	4793
23	1872	3907	63	1057	4484	06	0478	4803
24	1849	3925	64	1040	4495	08	0459	4812
25	1826	3944	65	1023	4505	10	0440	4821
26	1804	3962	66	1006	4515	12	0422	4830
27	1781	3980	67	0989	4525	14	0404	4838
28	1758	3997	68	0973	4535	16	0387	4846
29	1736	4015	69	0957	4545	18	0371	4854
1,30	0,1714	0,4032	1,70	0,0940	0,4554	2,20	0,0355	0,4861
31	1691	4049	71	0925	4564	22	0339	4868
32	1669	4066	72	0909	4573	24	0325	4875
33	1647	4082	73	0893	4582	26	0310	4881
34	1626	4099	74	0878	4591	28	0297	4887
35	1604	4115	75	0863	4599	30	0283	4893
36	1582	4131	76	0848	4608	32	0270	4898
37	1561	4147	77	0833	4616	34	0258	4904
38	1539	4162	78	0818	4625	36	0246	4909
39	1518	4177	79	0804	4633	38	0235	4913
1,40	0,1497	0,4192	1,80	0,0790	0,4641	2,40	0,0224	0,4918
41	1476	4207	81	0775	4649	42	0213	4922
42	1456	4222	82	0761	4656	44	0203	4937
43	1435	4236	83	0748	4664	46	0194	4931
44	1415	4251	84	0734	4671	48	0184	4934
45	1394	4265	85	0721	4678	50	0175	4938
46	1374	4279	86	0707	4686	52	0167	4941
47	1354	4292	87	0694	4693	54	0158	4945
48	1334	4306	88	0681	4699	56	0151	4948
49	1315	4319	89	0669	4706	58	0143	4951

Е. Ю. НЕДЕЛЬКО, А. С. ЯЦУНСКИЙ

Продолжение приложения 5

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,50	0,1295	0,4332	1,90	0,0656	0,4713	2,60	0,0136	0,4953
51	1276	4345	91	0644	4719	62	0129	4956
52	1257	4357	92	0632	4726	64	0122	4959
53	1238	4370	93	0620	4732	66	0116	4961
54	1219	4382	94	0608	4738	68	0110	4963
55	1200	4394	95	0596	4744	70	0104	4965
56	1182	4406	96	0584	4750	72	0099	4967
57	1163	4418	97	0573	4756	74	0093	4969
58	1145	4429	98	0562	4761	76	0088	4971
59	1127	4441	99	0551	4767	78	0084	4973
2,80	0,0079	0,4974	3,00	0,0044	0,49865	4,00	0,0001338	499968
82	0075	4976	3,10	0033	49903	4,50	00000160	499997
84	0071	4977	3,20	0024	49931	5,00	00000015	49999997
86	0067	4979	3,30	0017	49952			
88	0063	4980	3,40	0012	49966			
90	0060	4981	3,50	00087	49977			
92	0056	4982	3,60	00061	49984			
94	0053	4984	3,70	00042	49989			
96	0050	4985	3,80	00029	49993			
98	0047	4986	3,90	00020	49995			

Приложение 6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,71	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,05	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
Уровень значимости α (односторонняя критическая область)						

Критические точки распределения χ^2 . $P(\chi^2 > \chi_\alpha) = \alpha$.

$\alpha \backslash k$	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,3	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	10,8	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,64	1,07	0,148	0,0642	0,0158	0,00393	0,00982	0,0157	0,01393
2	13,8	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	3,22	2,41	0,713	0,446	0,211	0,103	0,0506	0,0201	0,0100
3	16,3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,64	3,67	1,42	1,00	0,584	0,352	0,216	0,115	0,0717
4	18,5	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	5,99	4,88	2,19	1,65	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	20,5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	7,29	6,06	3,00	2,34	1,61	1,15	0,831	0,554	0,412
6	22,5	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	8,56	7,23	3,83	3,07	2,20	1,64	1,24	0,872	0,676
7	24,3	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9,80	8,38	4,67	3,82	2,83	2,17	1,69	1,24	0,989
8	26,1	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	11,0	9,52	5,53	4,59	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	27,9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	12,2	10,7	6,39	5,38	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73
10	29,6	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	13,4	11,8	7,27	6,18	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	31,3	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	14,6	12,9	8,15	6,99	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	32,9	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	15,8	14,0	9,03	7,81	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	34,5	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	17,0	15,1	9,93	8,63	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	36,1	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	18,2	16,2	10,8	9,47	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	37,7	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	19,3	17,3	11,7	10,3	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	39,3	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	20,5	18,4	12,6	11,2	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	40,8	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	21,6	19,5	13,5	12,0	10,1	8,67	7,56	6,41	5,70
18	42,3	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	22,8	20,6	14,4	12,9	10,9	9,39	8,23	7,01	6,26
19	43,8	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	23,9	21,7	15,4	13,7	11,7	10,1	8,91	7,63	6,84
20	45,3	40,0	37,6	34,2	31,4	28,4	25,0	22,8	16,3	14,6	12,4	10,9	9,59	8,26	7,43
21	46,8	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	26,9	23,9	17,2	15,4	13,2	11,6	10,3	8,90	8,03
22	48,3	42,8	40,3	36,8	33,9	30,8	27,3	24,9	18,1	16,3	14,0	12,3	11,0	9,54	8,64
23	49,7	44,2	41,6	38,1	35,2	32,0	28,4	26,0	19,0	17,2	14,8	13,1	11,7	10,2	9,26
24	51,2	45,6	43,0	39,4	36,4	33,2	29,6	27,1	19,9	18,1	15,7	13,8	12,4	10,9	9,89
25	52,6	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	30,7	28,2	20,9	18,9	16,5	14,6	13,1	11,5	10,5
26	54,1	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	31,8	29,2	21,8	19,8	17,3	15,4	13,8	12,2	11,2
27	55,5	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	32,9	30,3	22,7	20,7	18,1	16,2	14,6	12,9	11,8
28	56,9	51,0	48,3	44,5	41,3	37,9	34,0	31,4	23,6	21,6	18,9	16,9	15,3	13,6	12,5
29	58,3	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	35,1	32,5	24,6	22,5	19,8	17,7	16,0	14,3	13,1
30	59,7	53,7	50,9	47,0	43,8	40,3	36,3	33,5	25,5	23,4	20,6	18,5	16,8	15,0	13,8
35	66,6	60,3	57,3	53,2	49,8	46,1	41,8	38,9	30,2	27,8	24,8	22,5	20,6	18,5	17,2
40	73,4	66,8	63,7	59,3	55,8	51,8	47,3	44,2	34,9	32,3	29,1	26,5	24,4	22,2	20,7
45	80,1	73,2	70,0	65,4	61,7	57,5	52,7	49,5	39,6	36,9	33,4	30,6	28,4	25,9	24,3
50	86,7	79,5	76,2	71,4	67,5	63,2	58,2	54,7	44,3	41,4	37,7	34,8	32,4	29,7	28,0
75	118,6	110,3	106,4	100,8	96,2	91,1	85,1	80,9	68,1	64,5	59,8	56,1	52,9	49,5	47,2
100	149,4	140,2	135,6	129,6	124,3	118,5	111,7	106,9	92,1	87,9	82,4	77,9	74,2	70,1	67,3

Приложение 8

Критические значения коэффициента корреляции r_{xy}

n	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,999$	n	$\gamma = 0,95$	$\gamma = 0,99$	$\gamma = 0,999$
3	0,99692	0,99988	—	19	0,4555	0,5751	0,6932
4	0,95000	0,99000	0,99900	20	0,4438	0,5614	0,6787
5	0,8783	0,95873	0,99116	21	0,4329	0,5487	0,6652
6	0,8114	0,91720	0,97406	22	0,4227	0,5368	0,6524
7	0,7545	0,8745	0,95074	27	0,3809	0,4869	0,5974
8	0,7067	0,8343	0,92493	32	0,3494	0,4487	0,5541
9	0,6664	0,7977	0,8982	37	0,3246	0,4182	0,5189
10	0,6319	0,7646	0,8721	42	0,3044	0,3932	0,4896
11	0,6021	0,7348	0,8471	47	0,2875	0,3721	0,4648
12	0,5760	0,7079	0,8233	52	0,2732	0,3541	0,4433
13	0,5529	0,6835	0,8010	62	0,2500	0,3248	0,4078
14	0,5324	0,6614	0,7800	72	0,2319	0,3017	0,3799
15	0,5139	0,6411	0,7603	82	0,2172	0,2830	0,3568
16	0,4973	0,6226	0,7420	92	0,2050	0,2673	0,3375
17	0,4821	0,6055	0,7246	102	0,1946	0,2540	0,3211
18			0,7084				

Критические значения коэффициента ранговой корреляции r_s

n	γ				n	γ			
	0,9	0,95	0,98	0,99		0,9	0,95	0,98	0,99
5	0,900				18	0,399	0,476	0,564	0,625
6	0,829	0,886	0,943		19	0,388	0,462	0,549	0,608
7	0,714	0,786	0,893		20	0,377	0,450	0,534	0,591
8	0,643	0,738	0,833	0,881	21	0,368	0,438	0,521	0,576
9	0,600	0,683	0,783	0,833	22	0,359	0,428	0,508	0,562
10	0,564	0,648	0,745	0,794	23	0,351	0,418	0,496	0,549
11	0,523	0,623	0,736	0,818	24	0,343	0,409	0,485	0,537
12	0,497	0,591	0,703	0,780	25	0,336	0,400	0,475	0,526
13	0,475	0,566	0,673	0,745	26	0,329	0,392	0,465	0,515
14	0,457	0,545	0,646	0,716	27	0,323	0,385	0,456	0,505
15	0,441	0,525	0,623	0,689	28	0,317	0,377	0,448	0,496
16	0,425	0,507	0,601	0,666	29	0,311	0,370	0,440	0,487
17	0,412	0,490	0,582	0,645	30	0,305	0,364	0,432	0,478

Выборки А, В и С

Вариант 1

Выборка А

1	0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	0	1	0	3	2	1	1	1	0
0	0	1	1	0	2	0	3	1	2	1	3	2	1	0	0	1	0	1	1
0	2	3	1	0	3	1	1	1	2	1	1	0	0	1	1	3	0	2	3
2	1	1	0	4	2	2	1	1	2	0									

$n = 71$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

71	74	51	87	37	72	64	77	63	58	50	39	71	48	39
44	62	59	50	91	51	65	54	70	50	46	66	44	71	72
58	52	58	72	62	47	58	69	58	72	42	70	84	65	65
49	45	53	50	73	47	21	40	74	35	49	58	44	50	74
53	66	67	64	62	49	67	41	67	57	56	60	71	46	79
72	48	38	51	37	60	58	52	58	55	50	64	68	53	70
59	59	90	72	61	74	36	79	65	68	39	54	86	49	48
59	44	68	52	60	42	78	29	68	79	78	68	70	66	45
62	56	36	67	64	45	63	59	59	58	67	69	44	69	69
78	58	53	58	71	52	59	27	46	56	72	50	55	30	56
62	34	35	38	64	67	59	59	58	62	88	30	41	59	54
47	55	50	79	63	50	77	23	73	63	63	67	74	59	60
46	57	74	54											

$n = 184$; начало первого интервала: $x_1 = 20$; длина интервала: $h = 8$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	41	25	22	32	29
2		33	29	35	30
3		29	38	22	
4		33	24	37	

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 2

Выборка А

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
8	4	8	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3
5	5	7	6	6	1														

$n = 66$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

95	96	103	89	72	105	85	85	91	101	82	91	80	85	91
87	101	94	98	85	82	94	86	72	89	83	100	86	85	95
95	83	87	92	92	79	93	88	77	92	92	103	85	90	83
86	104	104	85	85	80	95	91	93	70	83	93	95	95	78
111	95	94	84	64	87	85	87	87	81	82	97	101	86	89
80	88	85	93	79	95	90	107	93	96	83	88	91	95	94
88	80	96	93	77	71	88	97	90	86	93	91	98	95	83
84	91	99	109	80	95	87	89	85	87	72	77	90	97	87
95	91	88	91	81	88	78	75	80	97	95	83	91	78	87
92	103	77	101	66	71	90	105	76	97	75	95	88	84	96
79	89	94	100	87	100	92	100	79	96	104	84	89	82	93
92	85	80	104	87	90	85	89	83	84	98	81	97	86	81
96	82	102	73	100	81	86	84	86	88	90	94			

$n = 192$; начало первого интервала: $x_{\min} = 62$; длина интервала: $h = 4$.

Выборка С

N_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	89	92	91	107	103	113
2	106	105	101	99	104	109
3	88	94		76	74	89
4	102	92		101	97	99
5	107	100		101	103	92
6	89			96		100
7	101					

Вариант 3

Выборка А

0	0	2	0	1	3	0	1	0	1	2	1	3	0	0	2	1	3	2	2
1	3	3	2	0	2	4	3	2	1	2	2	2	2	3	3	1	1	1	3
2	1	0	1	2	1	4	4	2	3	3	5	5	2	1	2	3	2	3	1
1	0	1	0	4	1	1	0	2	2	4	2	1	4	3	0	2	0	2	0
3	1																		

$n = 82$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

29	22	16	20	16	18	28	20	32	22	23	26	10	25	25
29	29	19	12	26	18	20	19	24	20	19	26	23	11	26
30	23	30	18	20	13	17	24	28	26	21	21	26	24	36
23	24	25	20	23	17	11	22	19	19	25	29	23	16	25
15	18	17	19	21	12	24	30	33	22	15	18	26	22	19
25	23	21	22	22	25	16	25	19	17	30	13	25	19	24
17	24	16	23	15	22	22	19	20	19	33	14	17	21	16
24	13	20	19	17	13	27	25	25	19	22	22	22	23	9
11	22	24	18	19	18	31	16	18	24	14	23	26	25	19
23	24	21	26	25	18	16	30	16	24	13	14	18	22	22
28	18	21	27	31	23	23	27	21	21	22	34	24	20	24
21	32	16	18	15	22	15	15	22	18					

$n = 175$; начало первого интервала: $x_{\min} = 10$; длина интервала: $h = 2$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	59	60	53	51	60	59	46
2		56	69	64		59	61
3		52	67	56		49	65
4			59	54		62	57
5			61	66		60	47
6			62	67		69	

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 4

Выборка А

3	3	1	0	0	3	3	5	3	0	0	4	1	5	1	6	5	4	7	4
5	3	3	0	2	3	1	4	1	2	4	3	4	5	4	0	5	6	6	3
5	4	1	3	3	6	3	1	1	5	2	3	5	3	3	4	1	5	6	1
3	3	3	5	6	1	2	1	3	4										

$n = 70$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70	66	89	71	92	71
93	83	42	110	110	56	96	95	87	88	102	104	88	64	96
92	67	78	95	71	105	50	66	73	76	100	72	86	46	102
95	98	84	82	46	60	94	109	93	79	74	62	97	94	91
81	71	89	78	85	80	93	64	65	109	89	55	103	98	108
68	65	71	82	70	84	73	65	79	99	81	92	76	82	95
75	45	94	81	84	68	77	90	103	119	57	102	100	83	68
69	68	81	83	69	90	99	69	85	84	70	80	117	76	104
78	114	79	70	56	62	73	71	77	98	86	82	54	62	82
103	91	61	93	68	109	96	67	110	84	82	56	78	80	88
66	78	65	50	88	72	94	92	89	109	69	58	75	72	101
92	75	77	85	76	85	84	68	74	78	87	69	75	61	53
70	106	68	81	61	64	100	73	74	57	63	102			

$n = 192$; начало первого интервала: $x_{\min} = 39$; длина интервала: $h = 6$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	70	67	67	81	82	66	70
2	74	70	71	69	82	77	67
3	59	66		73		62	68
4				77		73	76
5				71		74	
6				87		54	
7						67	

Вариант 5

Выборка А

0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1

$n = 81$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

34	14	14	10	9	29	27	1	4	17	23	13	1	8	9
3	11	6	26	6	8	10	19	22	17	21	20	17	16	3
6	25	1	4	5	6	6	11	3	2	17	13	8	27	11
9	12	12	19	8	29	1	13	1	9	26	19	29	9	22
1	10	20	7	21	10	8	5	2	9	10	1	11	15	13
2	5	12	11	9	34	9	2	20	31	31	11	7	23	20
2	12	3	13	7	15	8	12	8	30	22	18	9	19	17
28	26	6	7	11	20	23	12	19	52	10	32	29	33	3
9	18	16	1	8	25	32	26	1	5	6	5	21	33	7
19	2	6	14	8	14	27	16	6	16	22	7	13	20	18
1	4	4	2	20	14	34	16	9	5	20	8	25	7	19
5	12	2	6	7	4	14	3	2	24	5	4	24	30	21
42	13	2	18											

$n = 184$; начало первого интервала: $x_{\min} = 1$; длина интервала: $h = 6$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	123	125	113	115	122	127	109
2	117	113		108	123	104	
3	115	98		116	131	111	
4	97	103		123	116	103	
5	108	95		124	102		
6				132	98		
7				113	105		

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 6

Выборка А

4	10	7	6	3	7	8	7	4	7	10	7	3	9	3	1	5	8	10	11
6	5	7	6	3	8	4	3	8	4	10	6	8	7	8	7	7	7	4	6
7	10	4	4	0	5	4	4	8	5	5	10	7	3	8	5	5	6	6	3
5	7	8	5	7	10	9	10	8	2	3	6	9							

$n = 73$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

324	296	313	323	312	321	322	301	337	322	329	307	301	328	312
318	327	315	319	317	309	334	323	340	326	322	314	335	313	322
319	325	312	300	323	335	339	326	298	298	337	322	303	314	315
310	316	321	312	315	331	322	321	336	328	315	338	318	327	323
325	314	297	303	322	314	317	330	318	320	312	333	332	319	325
319	307	305	316	330	318	335	327	321	332	288	322	334	295	318
329	305	310	304	326	319	317	316	316	307	309	309	328	317	317
322	316	304	303	350	309	327	345	329	338	311	316	324	310	306
308	302	315	314	343	320	304	310	345	312	330	324	308	326	313
320	328	309	306	306	308	324	312	309	324	321	313	330	330	315
320	313	302	295	337	346	327	320	307	305	323	331	345	315	318
331	322	315	304	324	317	322	312	314	308	303	333	321	312	323
317	288	317	327	292	316	322	319	313	328	313	309	329	313	340
314	320	301	329	319	332	316	300	300	304	306	314	323	318	337
325	321	322	288	313	314	307	329	302	300	316	321	315	323	331
318	334	316	328	294	288	312	312	315	321	332	319			

$n = 237$; начало первого интервала: $x_{\min} = 285$; длина интервала: $h = 7$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4
1	219	227	225	233
2	227	242	324	321
3	227			231
4	223			228
5	220			232
6				219
7				225

Вариант 7

Выборка А

2	4	2	4	3	3	3	2	0	6	1	2	3	2	2	4	3	3	5	1
0	2	4	3	2	2	3	3	1	3	3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
7	4	3	4	2	3	2	3	3	1	4	3	1	4	5	3	4	2	4	5
3	6	4	1	3	2	4	1	3	1	0	0	4	6	4	7	4	1	3	

$n = 79$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

65	71	67	73	68	68	72	68	67	70	78	74	79	65	72
65	71	70	69	69	76	71	63	77	75	70	74	65	71	68
74	69	69	66	71	69	73	74	80	69	73	76	69	69	67
67	74	68	74	60	70	66	70	68	64	75	78	71	70	69
73	75	74	72	80	72	69	69	71	70	73	65	66	67	69
71	70	72	76	72	73	64	74	71	76	68	69	75	76	73
74	78	66	75	72	69	68	63	70	70	78	76	73	73	67
71	66	66	72	69	71	71	68	72	69	73	73	66	72	73
70	69	74	72	69	74	70	74	72	76	71	66	62	69	74
76	74	69	64	75	71	76	68	68	78	71	71	68	67	74
68	81	72	68	72	71	71	71	69	61	74	66	70	72	65
67	73	78	73	71	75	73	71	72	68	67	69	69	77	63
71	74	67	68	69	74	69	67	74	66	74	74	69	75	70
73	63	77	74	75										

$n = 195$; начало первого интервала: $x_{\min} = 59$; длина интервала: $h = 2$.

Выборка С

N_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	75	104	96	92	76	92	89
2	86	89	88	89	89	87	85
3		92	105		90	88	93
4		90	90		77	82	
5		81	91		75	90	
6						86	

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 8

Выборка А

3	5	6	8	4	5	5	7	2	7	7	3	7	4	4	5	4	4	5	2
4	8	8	4	6	5	9	4	0	4	4	4	9	3	3	2	1	5	2	5
5	3	4	4	7	8	9	10	4	5	2	5	7	6	1	2	5	6	3	1
2	6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5	2	8	3	6	4
6	6	8	7	3	3	7	3												

$n = 87$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

71	62	43	80	70	44	42	25	48	55	58	44	74	55	56
49	54	63	60	57	70	52	74	65	61	60	72	69	68	47
30	62	81	56	55	38	68	55	74	50	29	35	55	52	27
58	50	62	80	49	68	68	81	66	64	41	45	48	68	79
56	82	76	84	47	44	72	58	58	80	61	55	66	36	69
44	88	88	73	39	70	70	35	51	69	50	59	35	43	71
54	65	85	63	59	52	88	64	60	61	31	64	48	49	50
41	62	42	76	81	76	70	76	75	53	66	87	74	61	68
73	44	61	53	46	69	71	58	63	73	56	65	53	77	39
83	45	55	77	61	42	72	49	52	67	62	68	72	46	76
67	53	70	76	56	62	38	59	53	50	76	62	73	34	51
60	61													

$n = 173$; начало первого интервала: $x_{\min} = 23$; длина интервала: $h = 5$.

Выборка С

N_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	30	33	29	36	36
2	27	26	27	30	24
3	30	34	31	42	31
4		31	31		39
5		30			33

Вариант 9

Выборка А

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7
3	3	4	4	3	5	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3
1	0	2	2	1	7	5	2	6	2	1	1	8	4	5	4	1	4	5	4
4	2	3	4	3	3	9	2	6	2	3	2	7	1	4	7	3	5	7	2
5	5	4	4	6	1														

$n = 86$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

127	141	121	131	145	139	141	131	139	137	128	132	129	134	140
143	140	127	132	136	134	133	121	133	136	126	138	144	135	138
137	137	127	139	140	141	125	136	136	129	136	135	142	132	129
128	134	139	130	137	132	140	125	127	129	133	134	135	124	132
127	133	140	135	140	130	130	130	131	133	133	131	129	127	138
128	122	137	136	137	140	138	117	114	132	137	126	137	136	130
148	130	140	132	127	125	134	136	116	120	125	136	124	144	133
132	123	136	131	130	130	134	132	131	125	138	130	146	132	131
138	135	133	126	134	137	141	136	126	125	135	139	150	130	136
132	127	131	122	125	133	133	123	136	131	135	130	123	133	123
140	133	138	124	129	129	128	126	128	138	127	120	144	135	126
126	144	125	123	132	138	155	139	137	133	129	124	140	131	128
130	130	124	142	124	129	131	143	129	127					

$n = 190$; начало первого интервала: $x_{\min} = 112$; длина интервала: $h = 5$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4
1	25	31	26	21
2	21	35	25	20
3	17	23	22	22
4	28	22	26	30
5	29			12
6				24
7				21

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 10

Выборка А

11	6	7	8	7	3	7	3	3	12	7	9	12	5	10	4	7	2	7	7
4	5	11	5	5	6	4	5	8	9	8	12	5	6	7	10	11	9	13	9
3	8	11	9	7	12	6	6	14	11	9	8	14	6	4	10	8	4	6	8
3	6	6	7	7	6	10	11	3	11	8	5	8	11	11	6	11	7	8	7
12	5	5	9	5	7	10	5	7											

$n = 89$; начало первого интервала: $x_{\min} = 2$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

103	120	129	105	131	138	113	87	117	109	109	113	162	139	101
98	114	116	94	125	108	119	130	127	116	124	137	140	151	102
115	127	121	110	131	106	112	96	112	112	120	100	118	104	106
123	112	134	106	107	115	130	140	104	127	125	117	109	106	109
112	90	111	138	112	97	124	128	105	122	118	126	84	138	123
119	121	116	120	101	118	102	102	120	145	117	110	138	107	127
119	127	128	90	95	92	105	131	118	127	105	139	92	122	116
111	111	101	99	98	103	123	114	126	132	120	142	92	103	109
138	115	94	116	138	125	91	132	98	111	154	129	146	123	96
112	104	111	108	89	128	111	140	143	131	102	116	105	135	96
102	106	99	116	99	129	128	125	97	97	96	114	148	133	126
98	107	130	93	123	112	117	87	98	79	97	136	121	100	127
113	116	117	115	97	108	110	110	103	128	86	126	98	121	119
99	134	114	157	133	109	120	129	129	147	110	120			

$n = 207$; начало первого интервала: $x_{\min} = 80$; длина интервала: $h = 6$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	29	31	22	18	26	22	26
2	24	26	27	27	22	24	24
3		22	29	19	29	26	28
4			30	27	31	28	
5				21			

Вариант 11

Выборка А

0	4	2	0	5	1	1	3	0	2	2	4	3	2	3	3	0	4	5	1
3	1	5	2	0	2	2	3	2	2	2	6	2	1	3	1	3	1	5	4
5	5	3	2	2	0	2	1	1	3	2	3	5	3	5	2	5	2	1	1
2	3	4	3	2	3	2	4	2											

$n = 69$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124	117	123	123
129	121	122	125	131	147	124	137	112	126	128	111	129	115	147
131	132	137	119	125	120	129	125	123	127	132	118	133	132	132
134	131	120	135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118	132	134	127
127	124	135	128	127	115	144	129	120	137	127	125	116	132	120
117	127	118	109	127	122	120	135	116	118	133	136	125	126	119
126	129	127	129	124	127	132	126	131	127	130	126	124	135	127
124	123	123	130	132	143	122	139	120	134	108	132	121	411	123
140	137	120	125	131	118	120	120	136	129	127	116	138	128	133
122	131	128	140	138	134	120	126	109	137	111	115	117	130	113
125	118	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135	126	115	124
134														

$n = 181$; начало первого интервала: $x_{\min} = 102$; длина интервала: $h = 4$.

Выборка С

N_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	51	56	59	59	52	51
2	57	56		56	58	56
3	55	54		54	53	55
4	52	55		52	55	
5	51			54	55	
6	54			51	52	
7				56	56	

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 12

Выборка А

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7	6	9	5	8	8
7	10	8	6	9	9	10	3	10	5	7	6	8	9	9	3	8	4	11	4
6	9	2	8	7	7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8	2	3
8	8	7	6	9	4	4	7	6	9	6									

$n = 71$; начало первого интервала: $x_{\min} = 2$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

58	48	46	53	63	64	53	46	59	64	50	55	57	55	68
48	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47	50	43	62	43
40	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45	50	44	45	57
65	52	60	58	27	41	60	44	38	44	59	72	43	60	50
55	53	51	33	53	70	55	60	50	51	50	55	57	58	61
52	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54	55	64	58	68
52	52	47	48	55	58	72	53	69	42	41	59	56	28	50
47	54	52	60	47	55	48	64	63	72	51	55	50	65	66
42	63	59	60	70	54	40	58	49	66	50	55	50	46	58
73	41	68	54	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71	67
54	63	63	65	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43	45
45	40	54	77	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47	38
54	57	52	63	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71	57
47	52	51	59	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71	63
50	46	42	48	59	53	64	53	54	72	55				

$n = 221$; начало первого интервала: $x_{\min} = 25$; длина интервала: $h = 4$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	48	37	53	35	38	49
2	50		52	43		55
3	51		45	46		38
4			43			47
5			48			48
6			46			43
7			54			45

Вариант 13

Выборка А

2	0	1	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	4	0	0
1	0	4	1	1	0	2	1	0	0	2	1	1	1	1	0	1	1	0	3
1	2	1	0	1	2	1	2	3	0	2	4	0	0	0	3	0	2	0	2
2	2	1	1																

$n = 64$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

174	166	157	161	165	162	161	164	172	158	161	163	160	154	171
160	168	171	161	162	168	164	166	159	172	154	154	154	153	159
160	173	150	166	157	177	165	168	152	168	164	158	153	164	174
179	159	165	167	169	164	168	151	174	166	169	170	159	162	153
175	178	157	170	174	169	159	154	165	167	161	168	157	182	175
170	155	164	174	167	170	159	160	153	151	169	155	143	163	155
173	166	164	186	161	158	150	149	167	163	166	155	149	157	164
166	171	172	154	161	169	164	173	164	162	171	156	155	160	156
165	149	175	150	162	179	154	167	158	155	147	161	161	173	166
156	171	158	164	168	173	166	148	174	179	173	167	162	166	167
164	158	160	163	161	154	151	156	150	157	163	168	170	165	174
149	161	162	155	164	156	157	170	173	165	160	166	166	160	165
159	157	162	173	173	151	151	169	167	145	166	168	161	169	170
172	159	161	162	151	165	161	151	156	167	148	167	170	149	162
169	157	167	169	174	163	164	169	161	164	172	160	154	156	166
170	164	160	161	149	158	168	176	155						

$n = 234$; начало первого интервала: $x_{\min} = 141$; длина интервала: $h = 5$.

Выборка С

N_0	F_1	F_2	F_3	F_4
1	11	12	12	11
2	11	12	11	10
3	10	13	14	12
4	11		11	14
5	10			11
6	11			
7	13			

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 14

Выборка А

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5
3	2	3	6	6	2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1
3	6	7	7	2	0	4	6	1	1	6	7	1	3	4	6	6	3	2	1
7	2	5	4	2	3	4	5	6	6	5	3	2							

$n = 73$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

79	56	46	50	67	37	53	49	42	57	49	20	45	83	15
54	43	82	54	49	27	56	49	26	46	72	41	38	29	65
59	61	41	32	42	71	55	46	71	68	37	67	36	33	38
39	59	39	42	45	55	45	54	87	72	68	44	33	47	63
69	52	67	66	7	54	56	39	40	61	73	50	49	72	57
77	54	70	45	49	50	41	39	61	70	44	42	43	71	57
70	55	45	36	40	71	17	48	49	48	72	48	53	28	44
64	11	66	37	12	36	15	55	39	72	61	68	42	48	72
48	28	40	32	26	69	33	50	78	56	61	36	44	36	52
25	67	50	60	69	63	60	58	46	11	59	53	77	38	54
41	76	56	46	26	58	40	43	55	45	73	47	76	46	16
86	25	27	43	26	61	64	10	50	24	42	36	33	51	34
54	80	56	27	57	76	43	49	43	67	75	64	39	64	53
62	88	27	37	56	67	63	56	48	28	24	42	43	48	49

$n = 210$; начало первого интервала: $x_{\min} = 3$; длина интервала: $h = 9$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4
1	147	148	176	171
2	178	162	123	173
3	166	164	176	172
4			153	173
5			131	171
6			147	154

Вариант 15

Выборка А

4	8	4	11	7	7	5	8	9	6	7	1	6	5	8	4	7	4	8	4
6	5	7	4	8	7	4	3	2	8	7	5	0	4	7	6	3	5	7	2
6	6	5	8	1	3	8	6	6	8	8	9	6	8	7	5	12	5	3	9
5	7	7	8	3	7	9	6	5	4	4	4	7	7	4	7	5	9	5	9
3	4	4	8	5	1	10	6	1	7	6	8	6	7	9					

$n = 95$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

21	66	28	40	37	58	44	32	60	33	47	55	47	37	31
41	45	45	41	42	27	33	33	63	51	53	46	37	23	36
43	78	38	43	46	37	46	47	48	59	30	37	60	42	49
32	61	37	54	42	26	30	60	40	65	50	63	53	47	61
47	34	30	62	44	39	25	49	48	51	43	50	44	64	45
54	21	40	25	59	40	48	54	38	42	34	46	31	30	75
70	59	45	57	45	33	51	47	53	32	36	42	37	47	32
28	69	33	45	38	42	30	29	18	57	46	45	47	37	58
72	38	50	51	49	47	63	52	34	47	63	53	65	55	39
60	50	57	46	70	42	39	43	60	52	52	46	34	33	31
39	16	54	63	63	27	48	38	34	40	49	43	32	54	56
38	34	39	31	46	52	80	21	54	50	50	55	47	26	34
54	36	33	46	23	56	28	36	35	52	51	58	65	36	58
53	54	44	43	37	49	63	52	50	58	51	58	40	40	19
51	81	42	52	50	20	53	49	40	55	55	48	28	49	46
65	63	37	47	43	35	81	44	18	41	53				

$n = 236$; начало первого интервала: $x_{\min} = 15$; длина интервала: $h = 7$.

Выборка С

N_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	196	194	185	191	201	194	189
2	197	200	194	199	202	181	207
3	203	190	182	199	207	205	
4	192	172	192	185		179	
5		185	193	176			
6		190	196	195			

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 16

Выборка А

5	3	3	3	5	4	5	3	3	4	2	1	5	2	4	0	2	2	3	2
1	3	3	1	2	4	6	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	6	3	8
4	5	1	1	2	0	2	3	3	2	4	2	1	2	3	1	2	4	3	0
6	3	1	4	3	7	1	1	0	2	3	1	1							

$n = 73$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

52	40	47	54	40	54	41	74	45	45	51	76	58	37	40
42	53	54	65	46	64	61	55	38	66	42	56	54	40	60
43	49	77	64	53	64	58	54	56	53	43	35	56	34	59
58	66	49	49	57	48	42	46	52	59	50	62	50	55	55
46	53	51	50	60	30	48	56	29	74	52	60	44	62	23
54	40	33	20	55	42	61	54	41	45	75	59	41	51	45
54	52	62	69	65	49	48	63	52	46	44	55	60	54	39
82	67	68	34	56	51	56	48	53	47	59	51	59	66	48
61	42	54	33	39	40	46	47	73	63	34	44	51	46	40
43	30	60	61	53	47	42	56	70	48	45	65	48	48	51
40	57	56	33	44	43	45	35	35	56	59	66	56	52	44
53	49	55	25	53	48	73	38	58	72	57	46	54	55	59
38	53	48	68	36	53	41	55	51	50	45	50	29	60	39
50	59	33	56	49	31	70	56	56						

$n = 204$; начало первого интервала: $x_{\min} = 20$; длина интервала: $h = 7$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	228	235	234	234	233	227	228
2	233	232	233	232	232		231
3	235	234	235	234			239
4	231	232	235	234			231
5	234	232	235	234			231
6	234	236		236			238

Вариант 17

Выборка А

2	2	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0
0	2	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0
0	0	0	2	1	1	1	1	3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0

$n = 80$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

144	166	120	89	103	140	143	126	119	125	161	140	168	133	151
132	135	166	131	120	127	105	136	145	154	105	173	97	113	150
143	107	133	139	127	138	107	107	127	127	159	170	120	120	106
126	152	128	160	120	109	106	134	127	107	106	95	91	113	128
120	99	160	137	143	103	138	143	131	157	148	146	112	141	174
109	173	91	148	123	133	117	122	139	107	139	169	125	141	132
115	157	127	158	115	161	165	145	168	107	105	115	113	138	113
145	104	99	137	144	122	93	124	120	112	159	135	145	137	115
98	159	158	125	125	121	145	130	168	132	118	139	184	153	123
122	138	117	147	115	134	102	137	85	159	139	136	123	138	136
112	101	114	141	164	142	96	137	161	153	125	147	137	129	140
171	115	155	126	145	109	147	112	98	144	114	109	149	114	173
118	138	102	168	116	125	151	86	129	166	115	106	120	133	159
158	156	114	109	138	108	155	129	145	139	161	116	110	155	122
181	151	129	128	137	104	107	115	131	146	119	125	164	145	

$n = 224$; начало первого интервала: $x_{\min} = 80$; длина интервала: $h = 10$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4
1	239	238	238	233
2	237	237	231	233
3	235	238		234
4	235	236		232
5	237	234		237
6	237	237		236
7	236	232		

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 18

Выборка А

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2	5	3	6	6	5
5	3	5	6	7	8	9	5	2	5	4	5	6	6	3	6	5	3	4	5
10	3	7	5	3	3	3	7	5	3	4	9	2	1	4	4	4	2	4	3
4	4	5	5	3	7	5	3	2	6	2	4	4	4	0	6	1	3	4	4
5	4	8	3	5	4	11	9	9											

$n = 89$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

107	78	93	81	80	92	126	93	67	50	104	110	120	91	101
91	120	88	69	74	102	65	48	71	103	67	95	112	112	86
99	99	103	122	112	102	92	69	105	106	124	46	72	75	126
73	106	75	80	92	68	112	127	88	53	74	131	51	117	145
96	76	71	138	104	120	67	92	130	99	94	92	97	105	84
78	100	98	114	113	94	108	76	88	91	78	96	81	116	75
120	75	62	113	109	111	127	63	87	86	66	100	75	84	95
121	103	95	70	98	67	148	95	92	105	114	98	102	41	76
114	90	97	111	93	110	79	63	109	69	108	71	111	100	136
92	84	123	84	125	102	96	72	102	90	136	87	132	137	100
102	88	65	75	114	79	122	63	115	90	78	86	122	119	87
115	96	137	106	105	88	75	100	84	71	123	121	94	114	94
93	118	94	102	109	86	45	97	93	43	48	114	85	79	124
89	104	108	108	100	106	102	105	119	71	86	115	82	101	

$n = 209$; начало первого интервала: $x_{\min} = 36$; длина интервала: $h = 10$.

Выборка С

N_2	F_1	F_2	F_3	F_4
1	91	73	64	21
2	47	69	70	73
3	95	36		66
4	83	38		59
5	53			65
6	78			63
7	77			

Вариант 19

Выборка А

4	5	3	4	5	2	3	3	3	4	4	5	3	1	4	1	4	5	5	1
2	5	5	5	3	4	3	5	5	4	0	2	6	7	1	3	2	2	4	2
3	3	6	0	6	2	4	3	6	1	5	4	4	4	5	2	4	5	3	5
5	6	2	2	3	2	2	5	2	5	5	0	7	1	0	0	0	5	3	2
7	6	3	5	3															

$n = 85$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

110	115	122	128	115	118	116	124	120	127	126	129	119	124	131
116	108	122	118	132	118	118	116	132	124	120	124	124	118	127
126	119	115	122	131	129	128	122	103	125	115	122	114	109	132
122	121	129	108	111	104	115	105	135	132	133	119	137	126	102
114	109	125	121	112	131	115	122	118	116	130	126	131	127	116
120	119	128	104	131	115	140	115	124	126	115	104	125	131	117
118	102	127	120	102	120	130	128	106	132	129	131	126	116	128
134	132	124	107	119	132	117	120	122	114	125	139	116	125	132
111	122	120	113	123	119	122	112	125	101	121	124	110	123	141
115	121	113	125	139	111	117	114	109	128	126	139	114	123	125
123	118	129	123	124	122	123	120	115	115	127	115	114	133	128
123	104	124	105	124	112	135	117	127	134	117	120	97	123	105
108	119	112	114	133	112	120	145	121	126	127	118	129		

$n = 193$; начало первого интервала: $x_{\min} = 95$; длина интервала: $h = 5$.

Выборка С

N_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	58	17	53	67	23	49	11
2	59		46	37	56	46	
3	47		54			50	
4	50		23				
5			30				
6			36				

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 20

Выборка А

2	3	1	6	4	6	3	3	1	3	1	2	4	4	4	3	0	3	2	4
2	3	2	3	3	2	0	6	1	0	2	2	6	2	0	2	4	3	1	5
3	0	4	4	3	5	3	2	5	2	0	2	0	2	5	0	1	3	3	2
0	2	2	2	5															

$n = 65$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

184	181	201	178	190	188	181	180	186	180	176	186	185	184	187
176	189	194	196	190	193	180	186	195	197	189	197	190	176	200
196	188	203	191	180	181	158	185	188	173	184	180	189	178	190
175	193	184	177	179	177	203	185	182	191	182	183	211	189	177
195	196	175	188	189	187	193	185	184	193	181	185	214	177	196
195	193	172	190	200	176	179	185	182	175	180	179	170	206	181
197	197	180	193	192	200	175	196	174	171	160	187	185	206	187
182	175	172	154	179	191	199	197	177	175	170	174	194	188	182
179	186	190	183	196	183	185	174	195	179	197	182	183	184	185
172	193	175	172	179	179	184	190	183	178	192	186	157	172	185
180	193	177	174	200	195	184	186	185	206	192	189	189	184	183
182	179	186	184	169	189	180	183	192	186	200	176	191	186	182
202	184	192	179	204	197	194	182	172	185	175	187	182	184	186
201	197	188	188	194	184	193	178	191	203	193	190	185	181	187
181	196	204	177	178	167	178	194	188	182	182	199	180	181	187
187	178	181	180	182	160	183	193	189	193	191				

$n = 236$; начало первого интервала: $x_{\min} = 154$; длина интервала: $h = 6$.

Выборка С

N_i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1	35	32	40	29	28	35	30
2	46	30		34	30	36	34
3	37	14		32	39	36	
4		15		34	35		
5				33	37		
6					40		
7					34		

Вариант 21

Выборка А

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	6	3
2	0	2	2	2	3														

$n = 66$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

5	25	13	29	28	24	8	40	24	7	42	49	30	31	7
3	53	6	14	46	16	3	2	19	31	26	10	46	4	5
5	8	6	30	39	14	3	32	6	25	13	12	20	26	5
33	2	20	5	29	5	39	36	24	38	2	30	53	52	7
20	35	27	11	12	23	1	10	3	5	31	21	6	15	2
17	15	26	17	0	46	13	21	3	6	9	31	15	43	4
19	8	5	37	43	3	20	20	24	17	3	43	19	36	19
6	14	6	24	5	50	4	24	6	43	17	22	37	19	28
9	3	34	7	19	18	14	1	15	26	6	52	5	26	29
28	4	8	1	30	65	1	25	3	1	30	53	35	9	11
1	35	1	21	76	29	15	6	31	6	58	18	10	3	60
17	23	3	3	27	2	9	88	6	1	21	6	30	12	1
24	28	7												

$n = 183$; начало первого интервала: $x_{\min} = 1$; длина интервала: $h = 14$.

Выборка С

N_2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	70	56	48	58	51	62
2	79	48	58		41	75
3	67	51	62		50	56
4			76		49	74
5					59	
6					68	
7					65	

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 22

Выборка А

7	11	5	5	5	5	9	4	5	3	8	5	3	8	3	11	3	9	6	5
3	3	6	2	7	4	4	3	5	7	4	6	5	2	9	5	8	6	1	1
7	7	4	4	9	7	4	3	1	6	6	4	5	4	5	5	7	8	6	8
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6	8				

$n = 76$; начало первого интервала: $x_{\min} = 1$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

64	5	53	29	61	49	1	22	25	38	73	20	8	37	47
0	37	50	46	13	7	13	42	1	44	27	20	33	37	30
20	73	57	40	4	40	83	33	37	26	79	16	77	5	51
28	63	24	25	24	38	16	38	15	29	11	14	34	31	23
16	58	73	43	31	65	12	4	38	25	31	7	9	60	61
47	46	33	15	79	48	1	62	14	49	31	25	33	38	27
51	30	43	64	24	50	22	37	6	11	78	51	1	9	34
1	17	33	11	54	31	34	38	22	2	9	15	6	87	45
22	30	15	30	18	77	6	47	33	21	86	31	45	43	19
36	46	69	22	59	30	22	5	29	42	47	5	17	71	36
6	6	7	41	37	11	11	65	36	58	36	30	46	15	49
88	12	8	83	13	30	48	66	9	31	13	32	21	47	50
25	6	31	75	48	77	13	55	26	9	32	41	68	55	53
25	77	1	65	35	51	24	42							

$n = 203$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 12$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	158	163	162	161	161
2	160	163	164	162	157
3	161		159	162	161
4	162		159	164	
5			164	163	
6				161	

Вариант 23

Выборка А

2	0	2	6	2	3	5	3	8	3	6	4	5	2	6	6	5	5	8	8
3	5	3	2	4	5	2	1	6	9	7	6	7	4	5	6	5	6	8	3
6	5	5	1	7	6	4	1	5	6	4	7	2	8	8	2	8	2	1	6
5	2	3	6	3	3	5	3	3	7	5	6	6	3	4	6	7	4	6	2
7	7	1	2	3	6	6	3	2	6	4	2	4	8						

$n = 94$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

100	51	80	83	83	67	55	84	78	83	101	75	78	99	69
99	71	67	56	74	51	78	34	67	107	66	106	70	117	67
116	79	120	47	113	113	59	100	78	31	68	66	91	85	644
55	83	77	68	83	38	89	88	58	75	60	89	111	42	104
33	96	50	42	81	78	42	64	89	60	32	46	82	33	72
93	94	49	153	68	85	78	95	51	76	81	67	50	75	99
114	111	108	127	110	91	77	85	102	101	79	118	132	130	79
88	76	73	82	75	118	50	100	70	42	79	64	78	137	83
92	71	84	77	73	100	69	77	74	98	79	102	83	66	59
67	87	60	91	68	91	103	73	93	69	54	82	71	60	88
82	82	41	68	53	78	96	97	81	86	69	52	77	66	100
119	84	102	46	54	77	129	87	106	84	96	81			

$n = 177$; начало первого интервала: $x_{\min} = 25$; длина интервала: $h = 13$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1	107	108	108	110	107
2	110	107	109	110	107
3	107	107	109	111	108
4		109		109	109
5				109	109
6					108
7					109

СТАТИСТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СПОРТИВНОЙ МЕТРОЛОГИИ

Вариант 24

Выборка А

2	0	0	3	1	2	2	2	3	4	1	2	3	3	2	1	1	3	3	0
4	1	3	3	0	1	0	0	1	2	1	1	3	2	3	0	1	0	4	2
3	1	2	1	1	1	1	2	1	2	5	2	3	3	2	3	1	1	1	1
2	1	1	1	3	1	3	1	2	1	2	1	1	0	0	3	3	1	2	3

$n = 80$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

22	49	18	44	52	31	18	20	27	35	41	28	29	45	36
40	41	37	18	40	25	38	46	37	50	41	37	37	21	37
27	27	32	34	28	40	31	20	22	25	33	34	56	35	37
47	40	29	28	29	3	27	12	41	24	40	57	49	37	34
23	33	19	29	27	32	21	21	13	40	24	37	7	24	34
52	38	32	49	43	25	16	33	22	6	41	48	35	55	35
4	31	18	19	17	23	6	36	40	12	66	26	23	30	28
49	30	50	13	33	46	26	37	30	46	41	18	28	14	50
26	25	30	53	46	30	11	40	40	24	16	24	28	29	25
10	19	35	27	22	38	32	41	21	46	27	49	34	53	32
31	15	24	38	25	34	22	35	42	38	33				

$n = 161$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 7$.

Выборка С

№	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	107	76	73	100	117	91
2	92	88	107	84	108	84
3	102	94	83	82	79	90
4	119	94	91	96	82	86
5	95	89	69	100	83	
6	114	73	86	92		
7	102	96	114	82		

Вариант 25

Выборка А

1	0	1	3	1	1	4	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	0	1
1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	2	3	0	1
0	2	2	0	2	2	0	1	0	0	0	0	3	2	2	3	1	2	0	1
2	1	1	0	1	2	0	2	2	3	0	0	2	0	0	0	3	1	2	2
2	0	2	0	2	1	0	3	1	1	3									

$n = 91$; начало первого интервала: $x_{\min} = 0$; длина интервала: $h = 1$.

Выборка В

187	193	199	197	196	184	200	193	198	191	193	188	193	195	197
199	202	193	190	197	195	182	201	202	184	197	205	178	191	200
223	188	192	188	194	183	207	183	195	184	175	195	212	197	194
184	175	198	189	194	185	213	192	200	194	173	206	163	204	174
183	199	203	185	199	196	196	188	169	196	190	205	189	189	190
175	190	193	209	190	183	191	193	191	190	192	191	185	202	173
184	176	199	182	186	189	193	185	168	192	193	205	171	193	191
206	187	193	192	189	191	190	182	194	194	197	207	198	180	175
193	191	188	187	191	191	192	192	214	171	208	185	195	190	214
193	183	193	193	187	198	203	181	173	189	195	180	180	205	194
179	191	201	195	195	189	185	199	194	187	173	211	190	165	182
182	194	168	176	192										

$n = 170$; начало первого интервала: $x_{\min} = 160$; длина интервала: $h = 7$.

Выборка С

N_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	82	79	124	131	151	99
2	166	117	106	154	109	101
3	132	107	112	128		108
4	153	128	119	130		124
5		97				107
6		67				
7		100				

Результаты в тройном прыжке

№	$\bar{x}$ (см)	n_x	S_x (см)	$\bar{y}$ (см)	n_y	S_y (см)
1	921	40	28,5	930	35	31,4
2	850	42	27,1	900	32	30,5
3	940	45	26,2	870	38	26,9
4	900	37	31,2	920	46	31,0
5	850	30	25,2	970	40	29,4
6	910	32	27,3	940	31	32,4
7	950	36	28,1	910	39	26,3
8	890	31	31,2	940	34	27,4
9	905	37	28,5	945	30	25,1
10	960	32	24,1	900	42	38,5
11	870	40	25,7	915	45	24,7
12	965	38	26,0	910	41	30,2
13	895	41	29,5	935	36	29,7
14	925	37	28,4	905	32	23,2
15	897	32	21,6	930	36	31,7
16	915	36	24,7	950	42	27,6
17	890	39	31,8	925	46	31,7
18	935	42	27,8	890	32	26,4
19	940	45	31,6	910	37	24,2
20	960	37	29,2	905	31	27,1
21	895	51	24,5	911	47	24,9
22	906	48	30,2	920	39	27,3
23	910	44	28,5	880	41	25,2
24	920	53	24,7	903	45	29,4
25	915	49	27,1	940	35	31,8

Частота сердечных сокращений (ЧСС)

у двух групп спортсменов

№	x_i (уд./мин)					№	x_i (уд./мин)				
	y_i (уд./мин)						y_i (уд./мин)				
1	71	72	85	61	65	14	65	64	65	68	70
	65	84	68	74	80		74	76	70	79	80
2	62	90	66	69	60	15	96	84	79	80	85
	84	78	76	71	86		71	76	70	79	83
3	64	71	69	81	64	16	65	70	71	64	62
	72	60	84	62	76		78	81	84	80	79
4	78	64	76	70	75	17	82	79	77	79	70
	82	81	77	82	64		61	70	78	64	65
5	80	82	68	69	62	18	68	65	65	62	69
	65	71	75	81	82		81	72	76	76	71
6	90	81	72	60	69	19	78	79	84	81	80
	69	70	86	75	72		62	65	63	61	68
7	71	68	82	73	75	20	69	68	67	68	61
	76	79	70	84	76		90	81	79	84	80
8	81	76	70	84	71	21	70	85	60	68	71
	72	84	83	86	82		62	74	80	74	63
9	72	69	65	81	69	22	68	70	73	64	75
	68	73	76	68	84		80	84	75	91	70
10	61	68	82	68	73	23	80	92	74	71	69
	76	81	64	72	75		72	69	70	68	78
11	64	76	90	65	81	24	75	82	76	69	75
	71	85	60	76	75		84	89	72	78	69
12	70	63	72	81	80	25	81	91	110	76	91
	62	65	69	67	69		71	64	81	91	78
13	76	84	78	84	86						
	62	61	69	63	64						

Приложение 12

Количество подтягиваний на перекладине
в группе спортсменов до начала (x_i) и в конце (y_i)
периода тренировок силового характера

№	x_i						№	x_i				
	y_i							y_i				
1	12	10	13	12	10	10	14	10	10	9	8	9
	15	17	14	19	17	13		12	14	12	13	14
2	11	16	13	12	10	9	15	8	11	12	14	10
	15	18	15	19	13	14		11	12	16	18	13
3	12	10	11	9	10	12	16	10	10	11	11	13
	13	14	11	13	14	16		12	15	12	16	15
4	10	11	11	13	10	9	17	11	10	9	12	10
	15	14	13	17	11	14		12	11	14	18	17
5	9	8	10	10	11	10	18	10	9	8	8	11
	12	13	11	12	14	15		12	13	13	18	16
6	10	12	10	13	11	8	19	9	10	10	11	10
	12	15	13	18	14	12		12	14	13	15	14
7	12	14	10	9	10	9	20	10	12	12	11	11
	15	18	13	12	11	10		13	15	16	17	15
8	12	10	9	9	7	10	21	11	10	12	10	9
	16	13	14	12	10	12		15	16	13	14	13
9	10	12	10	11	9	10	22	10	10	12	11	12
	15	14	13	12	10	11		15	14	13	12	16
10	9	10	12	11	10	10	23	9	10	12	10	9
	15	18	16	13	12	13		13	12	14	16	14
11	8	10	12	11	13	9	24	12	13	10	9	12
	9	12	11	12	13	12		12	14	12	10	12
12	10	7	9	10	12	11	25	9	12	10	11	14
	12	9	9	12	14	13		10	12	12	10	15
13	8	10	13	15	11	13						
	9	10	13	14	14	15						

№	Спортсмены								№	Спортсмены							
	A	B	C	D	E	F	G	H		A	B	C	D	E	F	G	H
1	$\frac{18}{70}$	$\frac{21}{73}$	$\frac{20}{75}$	$\frac{19}{74}$	$\frac{22}{75}$	$\frac{25}{80}$	$\frac{26}{80}$	$\frac{23}{76}$	14	$\frac{31}{110}$	$\frac{34}{110}$	$\frac{37}{92}$	$\frac{37}{90}$	$\frac{38}{90}$	$\frac{40}{89}$	$\frac{41}{88}$	$\frac{42}{85}$
2	$\frac{19}{81}$	$\frac{21}{84}$	$\frac{21}{84}$	$\frac{24}{85}$	$\frac{25}{83}$	$\frac{26}{87}$	$\frac{23}{87}$	$\frac{27}{90}$	15	$\frac{32}{95}$	$\frac{30}{98}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{27}{110}$	$\frac{26}{110}$	$\frac{25}{115}$	$\frac{25}{120}$	$\frac{25}{125}$
3	$\frac{20}{92}$	$\frac{22}{93}$	$\frac{22}{96}$	$\frac{25}{100}$	$\frac{26}{110}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{29}{105}$	16	$\frac{33}{115}$	$\frac{31}{105}$	$\frac{30}{105}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{28}{98}$	$\frac{26}{90}$	$\frac{25}{95}$	$\frac{24}{84}$
4	$\frac{21}{81}$	$\frac{23}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{25}{86}$	$\frac{25}{90}$	$\frac{26}{90}$	$\frac{28}{105}$	$\frac{29}{110}$	17	$\frac{34}{90}$	$\frac{36}{92}$	$\frac{36}{94}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{38}{105}$	$\frac{39}{110}$	$\frac{40}{115}$
5	$\frac{22}{79}$	$\frac{24}{76}$	$\frac{26}{82}$	$\frac{26}{85}$	$\frac{27}{87}$	$\frac{28}{90}$	$\frac{29}{90}$	$\frac{30}{107}$	18	$\frac{35}{95}$	$\frac{32}{98}$	$\frac{31}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{28}{105}$	$\frac{26}{107}$	$\frac{26}{107}$	$\frac{24}{110}$
6	$\frac{23}{82}$	$\frac{25}{94}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{27}{96}$	$\frac{28}{100}$	$\frac{29}{110}$	$\frac{30}{110}$	$\frac{28}{108}$	19	$\frac{36}{98}$	$\frac{38}{100}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{40}{125}$	$\frac{42}{125}$	$\frac{44}{130}$	$\frac{44}{135}$	$\frac{45}{135}$
7	$\frac{24}{92}$	$\frac{25}{92}$	$\frac{27}{103}$	$\frac{28}{109}$	$\frac{28}{115}$	$\frac{29}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{32}{125}$	20	$\frac{37}{90}$	$\frac{34}{95}$	$\frac{34}{96}$	$\frac{32}{96}$	$\frac{31}{96}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{30}{105}$	$\frac{30}{110}$
8	$\frac{25}{87}$	$\frac{26}{89}$	$\frac{29}{92}$	$\frac{27}{95}$	$\frac{30}{93}$	$\frac{28}{95}$	$\frac{31}{104}$	$\frac{32}{106}$	21	$\frac{38}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{32}{96}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{28}{91}$	$\frac{28}{90}$	$\frac{26}{85}$
9	$\frac{26}{85}$	$\frac{28}{90}$	$\frac{28}{92}$	$\frac{30}{106}$	$\frac{31}{102}$	$\frac{34}{120}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{35}{120}$	22	$\frac{39}{160}$	$\frac{33}{150}$	$\frac{30}{150}$	$\frac{30}{140}$	$\frac{27}{130}$	$\frac{25}{125}$	$\frac{24}{125}$	$\frac{20}{110}$
10	$\frac{27}{93}$	$\frac{29}{95}$	$\frac{29}{94}$	$\frac{30}{107}$	$\frac{32}{110}$	$\frac{34}{107}$	$\frac{35}{115}$	$\frac{36}{121}$	23	$\frac{40}{150}$	$\frac{35}{140}$	$\frac{30}{140}$	$\frac{30}{130}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{25}{95}$	$\frac{25}{95}$	$\frac{20}{90}$
11	$\frac{28}{85}$	$\frac{29}{79}$	$\frac{26}{79}$	$\frac{25}{70}$	$\frac{26}{74}$	$\frac{22}{70}$	$\frac{28}{70}$	$\frac{21}{72}$	24	$\frac{41}{160}$	$\frac{38}{130}$	$\frac{35}{130}$	$\frac{32}{125}$	$\frac{28}{120}$	$\frac{28}{110}$	$\frac{26}{110}$	$\frac{25}{100}$
12	$\frac{29}{100}$	$\frac{31}{100}$	$\frac{30}{94}$	$\frac{32}{106}$	$\frac{34}{120}$	$\frac{36}{140}$	$\frac{38}{140}$	$\frac{39}{130}$	25	$\frac{42}{190}$	$\frac{40}{180}$	$\frac{38}{180}$	$\frac{36}{170}$	$\frac{30}{160}$	$\frac{30}{150}$	$\frac{28}{150}$	$\frac{27}{140}$
13	$\frac{30}{92}$	$\frac{32}{94}$	$\frac{34}{96}$	$\frac{34}{98}$	$\frac{36}{102}$	$\frac{38}{102}$	$\frac{38}{110}$	$\frac{39}{110}$									

Примечание

В таблице приведены отношения $\frac{x}{y}$, где x – значение индекса Кетле ($\text{кг}/\text{м}^2$), y – значение становой силы (кг).

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	3
2. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КАК БАЗА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	5
2.1. Нормальное распределение	8
3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И ЕЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ	11
3.1. Основные шкалы и измерения в них	11
4. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД	16
4.1. Способы образования выборки	17
5. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ	19
5.1. Вариационные ряды	19
5.2. Графическое представление вариационных рядов ...	23
5.3. Основные числовые характеристики вариационных рядов	26
5.4. Решение некоторых задач с помощью числовых характеристик вариационных рядов	40
5.5. Задачи для самостоятельной работы	43
6. ТЕОРИЯ ОЦЕНИВАНИЯ	44
6.1. Интервальные оценки генерального среднего и генерального стандартного отклонения	45
6.2. Задачи для самостоятельного решения	48
	125

7. ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО ВЫВОДА (ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ)	49
7.1. Сравнение дисперсий двух групп по критерию Фишера	51
7.2. Сравнение генеральных средних двух групп	55
7.2.1. Большие ($n > 30$) независимые выборки	56
7.2.2. Малые ($n < 30$) независимые выборки	57
7.2.3. Малые зависимые выборки одинакового объёма	59
7.3. Сравнение нескольких (> 2) генеральных средних (дисперсионный анализ)	61
7.4. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности	67
7.5. Задачи для самостоятельной работы	71
8. ТЕОРИЯ КОРРЕЛЯЦИИ	72
8.1. Задачи для самостоятельной работы	81
9. ЛИТЕРАТУРА	82
10. ПРИЛОЖЕНИЯ	83
Приложение 1. Таблица случайных чисел	84
Приложение 2. Таблица значений t_γ	86
Приложение 3. Таблица значений q	87
Приложение 4. Критические точки критерия Фишера	88
Приложение 5. Таблицы значений для функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$	90
Приложение 6. Критические точки распределения Стьюдента	93
Приложение 7. Критические точки распределения χ^2 ...	94
Приложение 8. Критические значения коэффициента корреляции r_{xy} и r_s	95
Приложение 9. Выборки А, В и С	96

<i>Приложение 10. Результаты тройного прыжка двух групп спортсменов</i>	121
<i>Приложение 11. Частота сердечных сокращений двух групп спортсменов</i>	122
<i>Приложение 12. Количество подтягиваний на перекладине в группе спортсменов до начала тренировок силового характера и после них</i>	123
<i>Приложение 13. Данные об индексе Кетле и становой силе группы спортсменов</i>	124

УДК 796:006.91(076)

ББК 75.1я73

Н 42

Неделько Є. Ю.

Н 42 Статистичні аспекти спортивної метрології : навчальний посібник / Є. Ю. Неделько, О. С. Яцунський. — Миколаїв : НУК, 2015. — 128 с.

ISBN 978–966–321–308–8

Навчальний посібник спрямовано на вивчення найбільш складної та важливої частини спортивної метрології: статистичних методів, що застосовуються в області фізичної культури та спорту. Розглянуто (з численними прикладами) наступні основні розділи: вибірковий метод, первісна обробка статистичних даних, теорія оцінювання, теорія статистичного виводу, теорія кореляції, однофакторний дисперсійний аналіз. Більш строго (у порівнянні з іншими публікаціями по спортивній метрології) розглянуто розділ теорія статистичного виводу (перевірка гіпотез). В кінці кожного основного розділу наводяться задачі для самостійного розв'язування, що дає можливість використовувати даний посібник і як збірник задач.

Посібник призначено для студентів, що навчаються у вузах спортивного профілю, тренерів та викладачів.

Навчальне видання

НЕДЕЛЬКО Євген Юрійович
ЯЦУНСЬКИЙ Олександр Сергійович

**СТАТИСТИЧНІ АСПЕКТИ
СПОРТИВНОЇ МЕТРОЛОГІЇ**

Навчальний посібник

(російською мовою)

Комп'ютерне складання та верстання *В. Г. Мазанко*
Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 7,4. Тираж 300 прим. Вид. № 16. Зам. № 85.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.