

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Я. Б. ВОЛЯНСЬКА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

**до виконання лабораторних робіт з курсу
"Обчислювальна техніка і програмування"**

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2006

УДК 681.3.06

Волянська Я.Б. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з курсу "Обчислювальна техніка і програмування". – Миколаїв: НУК, 2006. – 72 с.

Кафедра електрообладнання суден

У вказівках викладено методику розв'язання традиційних математичних та інженерних задач. Наведено приклади розв'язання задач та короткі теоретичні відомості до кожної теми.

Призначені для студентів другого і третього курсів спеціальності 8.092201 "Електричні системи і комплекси транспортних засобів".

Рецензент д-р техн. наук, проф. В.Я. Кутковецький

© Видавництво НУК, 2006

Робота № 1

Робота з масивами і матрицями

Мета роботи: закріпити знання за табличними формулами, набути навички розв'язання задач на використання формул і функцій масивів у MS Excel.

Завдання

Завдання 1.1. Розв'язати задачу, використовуючи формули масиву. Варіанти завдання наведені в табл. 1.1 і 1.2.

Таблиця 1.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	Даний масив з $N \leq 30$ натуральних чисел. Обчислити: суму елементів масиву; суму парних елементів масиву; кількість непарних елементів масиву	16	Дана квадратна матриця 5×5 . Одержати матрицю, елементи якої одержані заміною нулями всіх тих елементів заданої матриці, квадрат модуля яких менше 36
2	Визначити, чи являє собою даний масив $N \leq 30$ цілих чисел прогресію: арифметичну; геометричну	17	Дана квадратна матриця 5×5 . Обчислити кількість нульових елементів, розташованих на головній діагоналі
3	Даний масив з $N \leq 30$ натуральних чисел. Знайти масив, що складається з чисел даного масиву: усіх парних; повторюваних	18	Дана квадратна матриця 5×5 . Обчислити кількість парних елементів матриці в непарних стовпцях і кількість непарних елементів матриці в парних рядках
4	Дана дійсна двовимірна матриця довільних розмірів. Знайти найбільший і найменший елементи та кількість нульових елементів	19	Дана квадратна матриця 5×5 . Обчислити кількість елементів матриці, квадрат модуля яких перевищує 25

Продовж. табл. 1.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
5	Даний масив цілих чисел. Визначити кількість чисел, кратних 5 і 3 одночасно	20	Дана квадратна матриця 5×5 . Обчислити суму всіх найменших елементів кожного рядка
6	Даний масив цілих чисел. Визначити кількість чисел, що мають непарні порядкові номери і які є парними	21	Дані дві дійсні матриці A і B з розмірами $n \times n$. Одержати наступні матриці: а) $A^2B - B$; б) $(AB)^3$; в) $(B + A)^2$; г) $A^3B + B^2A$
7	Даний масив з $N \leq 30$ натуральних чисел. Знайти масив, що складається з таких елементів: квадратів цих чисел; цих чисел у зворотному порядку; сум поруч розташованих чисел, а також останнього і першого чисел даного масиву	22	Дані дві дійсні матриці A і B з розмірами $n \times n$. Одержати наступні матриці: а) A^3B ; б) $(A - B)^2$; в) $(A + B)^3 - AB$; г) $A(A - B)$
8	Даний масив з $N \leq 30$ натуральних чисел. Знайти елемент масиву: найменший; найбільш віддалений від середнього арифметичного чисел масиву	23	Дані дві дійсні матриці A і B з розмірами $n \times n$. Одержати наступні матриці: а) A^2B ; б) $(A - AB)^2$; в) $(A^2B^2 - BA)^2$; г) $(A^3B - B^3A)^2$
9	Дана квадратна матриця 5×5 . Знайти максимальний за модулем елемент матриці та його місце в матриці (номер рядка і номер стовпця)	24	Дані дві дійсні матриці A і B з розмірами $n \times n$. Одержати наступні матриці: а) A^3 ; б) $B^2 - A$; в) $B(B^2 - A)$; г) $BA + A$
10	Дана квадратна матриця 5×5 . Обчислити добуток модулів максимального і мінімального елементів матриці	25	Дана квадратна матриця 5×5 . Знайти номер рядка матриці, сума елементів якого найменша
11	Даний масив цілих чисел. Визначити кількість чисел, не кратних 3, їх суму і середнє арифметичне	26	Дана квадратна матриця 5×5 . Замінити елементи непарних стовпців одиницями

Продовж. табл. 1.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
12	Дана квадратна матриця 5×5 . Обчислити суму елементів матриці, що лежать у діапазоні від 5 до 315	27	Знайти середнє значення найбільших (найменших) елементів трьох двовимірних дійсних масивів довільних розмірів
13	Дана квадратна матриця 5×5 . Одержати матрицю, елементи якої одержані з елементів заданої матриці множенням на її мінімальний за модулем елемент	28	Обчислити середнє арифметичне кожного рядка двовимірного масиву $A(15 \times 20)$ всього масиву
14	Дана квадратна матриця 5×5 . Підрахувати кількість парних і непарних елементів кожного стовпця	29	Обчислити середнє геометричне модулів від'ємних елементів кожного стовпця двовимірного масиву $A(20 \times 30)$
15	Даний масив цілих чисел. Обчислити середнє арифметичне всіх модулів від'ємних елементів	30	Обчислити суму квадратів елементів двовимірного масиву, розташованих на головній діагоналі для матриць $A(10 \times 10)$ і $B(15 \times 15)$

6 Таблица 1.2

№ з/п	Задания	№ з/п	Задания
1-3	$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 7 & 3 \\ 8 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$	4-6	$A = \begin{bmatrix} 15 & 4 & 7 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 30 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 7 & 60 \\ 8 & 3 & 5 & 45 & 9 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
7-9	$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 9 & 3 & 6 & 11 \\ 5 & 1 & 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$	10-12	$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 255 & 33 & 11 & 4 \\ 5 & 2 & 8 & 5 & 316 \\ 2 & 17 & 41 & 2 & 19 \\ 1 & 22 & 3 & 10 & 51 \end{bmatrix}$
13-15	$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -10 & 2 & 6 \\ 4 & 12 & 3 & -7 & -5 \\ 2 & -5 & 2 & 15 & 16 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -9 \\ 2 & 14 & -5 & -11 & 21 \end{bmatrix}$	16-18	$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 3 & 15 & 2 \\ 4 & 11 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 12 & 5 & 7 \\ 10 & 8 & 3 & 9 & 13 \\ 9 & 1 & 5 & 17 & 1 \end{bmatrix}$
19-20, 25-26	$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 & 12 & 3 \\ 4 & 9 & 10 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 113 \\ 3 & 11 & 8 & 14 & 1 \end{bmatrix}$	21-24	$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

27	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$
28–30	Вибрати числові значення елементів масиву самостійно

Завдання 1.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера і методом оберненої матриці (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 1; \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -10; \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0; \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$

∞ Продовж. табл. 1.3

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
3	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$	13	$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -7; \\ 9x_1 - 11x_2 - 14x_3 = -15; \\ 18x_1 - 22x_2 - 30x_3 = -20 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 11; \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 15; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 34x_3 = 11 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -3; \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20; \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10; \\ 5x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 4; \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9; \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 4; \\ 4x_1 - 1x_2 + 6x_3 = 2; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2; \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 5; \\ 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = -7 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 7; \\ 4x_1 - 5x_2 + 11x_3 = 40; \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$	28	$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 8; \\ 4x_1 - 6x_2 + 7x_3 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$

9	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 7; \\ 4x_1 + 9x_2 - 5x_3 = -5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 = 6x_2 - 9x_3 = 11; \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -2 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 2; \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$

Короткі теоретичні відомості

Матриця з розмірами $m \times n$ – це прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців. Матриці позначаються великими (заголовними) буквами латинського алфавіту. Числа, що складають матрицю, називаються елементами матриці і позначаються малими літерами з подвійною індексацією. Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною. Розрізняють діагональні й одиничну квадратні матриці.

У MS Excel роботу з масивами комірок (матрицями) забезпечують функції категорій "Математические", "Ссылки и массивы" і "Статистические" (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Функція	Дія
МОБР ()	Обчислення оберненої матриці
МОПРЕД ()	Обчислення визначника матриці
МУМНОЖ ()	Повертає матричний добуток двох матриць
ТРАНСП ()	Обчислення транспонованої матриці
СТОЛБЕЦ ()	Повертає номер стовпця, на який указує посилання
СТРОКА ()	Визначає номер рядка, на який указує посилання
СУММКВРАЗН ()	Сума квадратів різниць відповідних значень у двох масивах
СУММПРОИЗВ ()	Сума добутків елементів масивів
СУММРАЗНКВ ()	Сума різниць квадратів відповідних значень у двох масивах
СУММЕСЛИ ()	Підсумовування комірок за заданим критерієм
СУММКВ ()	Сума квадратів елементів
СЧЕТЕСЛИ ()	Підрахунок у заданому діапазоні непорожніх комірок за потрібним критерієм
СРЗНАЧ ()	Середнє арифметичне

Нехай дана лінійна система n рівнянь з n невідомими довільними числами, що називаються відповідно коефіцієнтами при змінних і вільними членами рівнянь:

[illegible]

Такий запис (1.1) називається системою лінійних рівнянь у нормальній формі. Розв'язком системи (1.1) є така сукупність n чисел, при підстановці яких кожне рівняння системи перетворюється на вірну рівність.

Система рівнянь *сумісна*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісна*, якщо вона не має розв'язків. Якщо сумісна система рівнянь має єдиний розв'язок, вона називається *визначеною*, і навпаки, якщо система рівнянь має більше, ніж один розв'язок, вона називається *невизначеною*.

Систему (1.1) можна записати у вигляді матричного рівняння $C * x = r$, де C – матриця коефіцієнтів при змінних, або матриця системи; x – матриця-стовпець (вектор) невідомих; r – матриця-стовпець (вектор) вільних членів. Найчастіше для розв'язання системи (1.1) користуються методами Крамера, Гаусса і оберненої матриці.

Приклад виконання роботи

Завдання 1.1. Підрахувати в заданому двовимірному масиві кількість від'ємних елементів.

Розв'язання

Для виконання завдання необхідно:

1. Заповнити комірки **A4:D6** необхідними значеннями (рис. 1.1).
2. У комірку **F4** ввести формулу **=СЧЕТЕСЛИ(A4:D6; "<0")**.

F4	=СЧЕТЕСЛИ(A4:D6; "<0")				
	A	B	C	D	E
1					
2	Подсчет отрицательных элементов				
3	Заданный массив				Количество отрицательных элементов
4	1	2	3	-9	5
5	-3	6	-7	6	
6	2	-1	3	-8	
7					

Рис. 1.1. Підрахунок від'ємних елементів масиву

Завдання 1.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера і методом оберненої матриці. Як приклад взято систему лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 10; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 6; \\ 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 17; \\ 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -4. \end{cases}$$

Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Крамера

Для виконання завдання необхідно:

1. Записати в діапазон **G4:J7** матрицю коефіцієнтів, а в діапазон **L4:L7** вільні члени (рис. 1.2). За формулами Крамера невідомі знаходяться з наступних виразів:

$$x_1 = \Delta_{x_1} / \Delta, \quad x_2 = \Delta_{x_2} / \Delta, \quad x_3 = \Delta_{x_3} / \Delta, \quad x_4 = \Delta_{x_4} / \Delta. \quad (1.2)$$

	А	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М
1	1) Решить систему по формулам Крамера											
2	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 10, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 17, \\ 6x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -4. \end{cases}$											
3	Матрица коэффициентов										Матрица свободных членов	
4			3	2	1	-5					10	
5			5	1	-3	-7					6	
6			2	4	-9	2					17	
7			6	-8	2	7					-4	

Рис. 1.2. Запис вихідних даних

Отже, перед тим як знайти x_1, x_2, x_3, x_4 , необхідно розрахувати $\Delta, \Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}, \Delta_{x_4}$.

2. Знайти Δ – визначник матриці коефіцієнтів. Для цього за допомогою "Специальной вставки" скопіювати матрицю з діапазону **G4:J7** у діапазон **B9:E12**. У комірку **F10** ввести формулу =МОПРЕД(B9:E12).

3. Аналогічно знайти визначники $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}, \Delta_{x_4}$. Для цього за допомогою "Специальной вставки" по черзі замінити стовпець відповідних x -ів стовпцем вільних членів.

4. Знайти x_1, x_2, x_3, x_4 за виразами (1.2) (рис. 1.3).

Розв'язання системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці

Для виконання завдання необхідно:

1. Записати невідомі x_1, x_2, x_3, x_4 у вигляді вектора невідомих $[x]$, а коефіцієнти системи зібрати в матрицю коефіцієнтів $[C]$. Константи, розташовані у правих частинах рівнянь системи, записати у вигляді вектора $[r]$. Таким чином, наведені три рівняння для трьох невідомих можна записати як $[C][x] = [r]$.

2. За допомогою функції масиву МОБР() знайти матрицю, обернену матриці $[C]$.

3. Помножити матрицю, обернену матриці $[C]$, на вектор $[r]$ (рис. 1.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	1) Решить систему по формулам Крамера												
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9		3	2	1	-5								
10	$\Delta =$	5	1	-3	-7	=МОПРЕД(B9:E12)	2217						
11		2	4	-9	2								
12		6	-8	2	7								
13													
14		10	2	1	-5								
15	$\Delta_1 =$	6	1	-3	-7	=МОПРЕД(B14:E17)	6011	$x_1 =$	Δ_{a1}/Δ	=G15/\$G\$10	=2,7		
16		17	4	-9	2			$x_2 =$	Δ_{a2}/Δ	=G20/\$G\$10	=3,9		
17		-4	-8	2	7			$x_3 =$	Δ_{a3}/Δ	=G25/\$G\$10	=0,7		
18								$x_4 =$	Δ_{a4}/Δ	=G30/\$G\$10	=1,3		
19		3	10	1	-5								
20	$\Delta_2 =$	5	6	-3	-7	=МОПРЕД(B19:E22)	8582						
21		2	17	-9	2								
22		6	-4	2	7								
23													
24		3	2	10	-5								
25	$\Delta_3 =$	5	1	6	-7	=МОПРЕД(B24:E27)	1613						
26		2	4	17	2								
27		6	-8	-4	7								
28													
29		3	2	1	10								
30	$\Delta_4 =$	5	1	-3	6	=МОПРЕД(B29:E32)	2928						
31		2	4	-9	17								

Рис. 1.3. Розв'язання системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	2) Решить систему с помощью обратной матрицы															
2																
3																
4																
5																
6																
7																
8		0,23	-0,06	0,07	0,08											
9	$C^{-1} =$	0,33	-0,22	0,11	-0,02											
10		0,22	-0,15	-0,03	0,02											
11		0,1	-0,2	0,08	0,05											

Рис. 1.4. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці

Контрольні питання і завдання

1. Назвіть основні математичні операції з матрицями.
2. Охарактеризуйте вбудовані функції MS Excel для роботи з матрицями.
3. Синтаксис і призначення функції масиву МОБР ().
4. Синтаксис і призначення функції масиву МОПРЕД ().
5. Синтаксис і призначення функції масиву ТРАНСП ().
6. Методи розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою MS Excel.

Робота № 2

Графічні можливості MS Excel. Побудова графіків функцій

Мета роботи: вивчити можливості MS Excel для побудови графіків; удосконалити вміння управління особливостями відображення діаграм; набути навички побудови діаграм у MS Excel.

Завдання

Завдання 2.1. Побудувати в різних системах координат при $x \in [-2; 2]$ графіки наступних функцій (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y = \cos(x-1)e^{6x};$ $z = \begin{cases} \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^4}}, & x \leq 0; \\ 2x + \frac{\sin^2(x)}{2+x}, & x > 0 \end{cases}$	2	$y = \sin(x)e^{-2x};$ $z = \begin{cases} \frac{1+x+x^2}{1+x^2}, & x < 0; \\ \sqrt{1+\frac{2x}{1+x^2}}, & x \in [0; 1); \\ 2 0,5+\sin(x) , & x \geq 1 \end{cases}$

Продовж. табл. 2.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
3	$y = 2 \sin(x) \cos(x);$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1+x^2}}, x < 0; \\ 2 \cos^2(x), x \in [0; 1]; \\ \sqrt{1 + 2 \sin(3x) ^{1/3}}, x > 1 \end{cases}$	4	$y = \frac{1 + xe^{-x}}{2 + x^2} \sin^2(x);$ $z = \begin{cases} \frac{1+5x}{3+x^2}, x < 0; \\ \sin^2(x) \sqrt{5+x}, x \in [0; 1]; \\ \sin^3(x+1) e^{0,6x}, x \geq 1 \end{cases}$
5	$y = 7 \sin(\pi x) - \cos(3\pi x) \sin(\pi x);$ $z = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+ x }}{2+ x }, x \leq 0; \\ \frac{1+x}{2+\cos^3(x)}, x > 0 \end{cases}$	6	$y = 6 \sin(3\pi x) \cos(\pi x) + \cos(2\pi x) \sin^2(\pi x),$ $z = \begin{cases} \frac{ x }{1+x^2} e^{-5x}, x < 0; \\ \sqrt{1+x^4}, x \in [0; 1]; \\ \frac{1+\cos(\pi x)}{6+x} + 3x, x \geq 1 \end{cases}$
7	$y = 5 \sin(\pi x) - \cos(3\pi x) \sin(\pi x);$ $z = \begin{cases} \frac{3x^2}{1+x}, x \leq 0; \\ \sqrt{1 + \frac{2x}{1+x^2}}, x > 0 \end{cases}$	8	$y = \frac{1 + \cos(x)}{1 + e^{4x}} \sqrt[4]{1 + e^{6x}};$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1+x^4}}, x < 0; \\ 2 \sin^3(x), x \in [0; 1]; \\ \sqrt{1 + 2 \cos(6x) ^{1/3}}, x > 1 \end{cases}$
9	$y = \cos(\pi x) - \cos(3\pi x) \sin^2(\pi x);$ $z = \begin{cases} x ^{1/3}, x < 0; \\ -2x + \frac{x}{1+x}, x \in [0; 1]; \\ \frac{ 3-x }{1+x}, x \geq 1 \end{cases}$	10	$y = \cos^2(\pi x) \sin(3\pi x);$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + 2x^2 - \sin^2(x)}, x \leq 0; \\ \frac{2+x}{\sqrt[3]{2 + e^{-0,1x}}}, x > 0 \end{cases}$

Продовж. табл. 2.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
11	$y = \frac{1 + xe^{-x}}{2 + \sqrt{x^2 + \sin^2(x)}};$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + x }, & x \leq 0; \\ \frac{1 + 3x}{2 + \sqrt[3]{1 + x}}, & x > 0 \end{cases}$	12	$y = 2 \sin(2\pi x) \cos(4\pi x);$ $z = \begin{cases} 1 + \frac{3 + x}{1 + x^2}, & x < 0; \\ \sqrt{1 + (1 - x)^2}, & x \in [0; 1); \\ \frac{1 + x}{1 + \cos^2(x)}, & x \geq 1 \end{cases}$
13	$y = \cos(3\pi x) \sin(\pi x) + 2 \sin(3\pi x) \cos(2\pi x);$ $z = \begin{cases} \frac{1 + 2x}{1 + x^2}, & x < 0; \\ \sin^2(x) \sqrt{1 + x}, & x \in [0; 1); \\ \sin^2(x) e^{0,2x}, & x \geq 1 \end{cases}$	14	$y = 2 \sin(2\pi x) \cos(\pi x) + \sin(3\pi x);$ $z = \begin{cases} \sqrt[3]{1 + x^3}, & x \leq 0; \\ \frac{1 + x^2}{3 + \sqrt[7]{1 + 3e^{-1,5x}}}, & x > 0 \end{cases}$
15	$y = \frac{1 + x}{5 + \sqrt{ x } e^{-x} + \cos(\pi x) };$ $z = \begin{cases} \sqrt[3]{6 + x^2}, & x \leq 0; \\ \sin^3(\pi x) + \frac{2 + x}{1 + \cos^2(x)}, & x > 0 \end{cases}$	16	$y = \cos(5\pi x) \sin^2(3\pi x) + 3 \sin(\pi x) \cos^3(3\pi x);$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + x^2}, & x \leq 0; \\ \frac{1 + x^3}{1 + \sqrt[5]{1 + e^{-0,5x}}}, & x > 0 \end{cases}$
17	$y = 5 \sin(x) \cos(3x + 1);$ $z = \begin{cases} \frac{1 + x }{\sqrt[3]{1 + x + x^2}}, & x \leq -1; \\ 2 \ln(1 + x^2) + \frac{1 + \cos^4(x)}{2 + x}, & x \in (-1, 0); \\ (1 + x)^{3/5}, & x \geq 0 \end{cases}$	18	$y = \frac{1 + \cos(x)}{1 + e^{2x}};$ $z = \begin{cases} \frac{1 + x}{1 + x^2}, & x < 0; \\ \sqrt{1 + \frac{x}{1 + x}}, & x \in [0; 1); \\ 2 \sin(3x) , & x \geq 1 \end{cases}$

Продовж. табл. 2.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
19	$y = \frac{2 + \sin^3(x)}{1 + x^2};$ $z = \begin{cases} \frac{5x^2}{1 + x^2}, & x \leq 0; \\ \sqrt{1 + \frac{2x}{1 + x^2}}, & x > 0 \end{cases}$	20	$y = 2 \sin(\pi x) - 3 \cos(\pi x);$ $z = \begin{cases} 3 \sin(x) - \cos^2(x), & x \leq 0; \\ 3\sqrt{1 + x^2}, & x > 0 \end{cases}$
21	$y = 3 \sin(2\pi x) \cos(\pi x) - \cos^2(3\pi x);$ $z = \begin{cases} \frac{3 + \sin^2(2x)}{1 + \cos^2(x)}, & x \leq 0; \\ 2\sqrt{1 + 2x}, & x > 0 \end{cases}$	22	$y = \frac{1 + (x + 5)^{1/3}}{1 + \sqrt{2 + x + x^2}};$ $z = \begin{cases} \frac{1 + x + x^2}{1 + x^2}, & x < 0; \\ \sqrt{1 + \frac{5x}{1 + x^3}}, & x \in [0; 1); \\ 5 0,7 \cos(x) + \sin(x) , & x \geq 1 \end{cases}$
23	$y = \frac{4 + x^2 e^{-3x}}{4 + \sqrt{x^4 + \sin^2(x)}};$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + 5x^2 - \sin^2(x)}, & x \leq 0; \\ \frac{(7 + x)^2}{\sqrt[3]{4 + e^{-0,7x}}}, & x > 0 \end{cases}$	24	$y = \cos^2(3\pi x) - \cos(\pi x) \sin(\pi x);$ $z = \begin{cases} \frac{1 + x}{\sqrt[3]{1 + x^2}}, & x \leq 0; \\ -x + 2e^{-2x}, & x \in (0; 1); \\ 2 - x ^{1/3}, & x \geq 1 \end{cases}$
25	$y = \cos^3(4\pi x) \sin(\pi x);$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + x^2}, & x \leq 0; \\ \frac{1 + x}{1 + \sqrt[3]{1 + e^{-0,2x}}}, & x > 0 \end{cases}$	26	$y = \frac{2 + \sin^2(x)}{1 + x^2};$ $z = \begin{cases} \sqrt[3]{1 + x^2}, & x \leq 0; \\ \sin^2(x) + \frac{1 + x}{1 + \cos^2(x)}, & x > 0 \end{cases}$

Продовж. табл. 2.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
27	$y = \sin(3\pi x) + 2 \sin(2\pi x)x \times$ $\times x \cos(3\pi x);$ $z = \begin{cases} \frac{ x }{1+x^2} e^{-2x}, & x < 0; \\ \sqrt{1+x^2}, & x \in [0; 1]; \\ \frac{1+\sin(x)}{1+x} + 3x, & x \geq 1 \end{cases}$	28	$y = \cos^2(\pi x) - \cos(3\pi x);$ $z = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{x^3}{1+3x^2}}, & x < 0; \\ 3 \cos^3(x), & x \in [0; 1]; \\ \sqrt{2 + 2 \sin(5x) ^{2/3}}, & x > 1 \end{cases}$
29	$y = 3 \sin(3\pi x) \cos(2\pi x);$ $z = \begin{cases} \frac{5 + \sin^3(4x)}{3 + 2 \cos^3(x)}, & x \leq 0; \\ 5\sqrt{3 + 4x^2}, & x > 0 \end{cases}$	30	$y = 3 \cos^2(2x) \sin(5x);$ $z = \begin{cases} 3x + \sqrt{1+x^2}, & x < 0; \\ 2 \cos(x) e^{-2x}, & x \in [0; 1]; \\ 2 \sin(3x), & x > 1 \end{cases}$

Завдання 2.2. Побудувати алгебраїчні і трансцендентні лінії на площині (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

№ з/п	Завдання	
1–2	Декартів листок	$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$
3–4	Цисоїда	$\rho = 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$
5–6	Строфоїда	$\rho = a \frac{(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}$
7–8	Лемніската Бернуллі	$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$
9–10	Версьєра	$x = t, \quad y = \frac{a^3}{(t^2 + a^2)}$
11–12	Овал Кассіні	$\rho = a \sqrt{\cos(2\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(2\varphi) \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)}}$
13–14	Конхоїда	$\rho = \left(\frac{a}{\sin \varphi} \right) \pm l$

Продовж. табл. 2.2

№ з/п	Завдання	
15–16	Завиток Паскаля	$\rho = 2r \cos \varphi \pm l$
17–18	Кардіоида	$\rho = 2r(1 - \cos \varphi)$
19–20	Лемніската Бернуллі	$\rho^2 = 2a^2 \sin 2\varphi$
21–22	Каппа	$\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$
23–24	Астроїда	$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$
25–26	Спіраль Галілея	$\rho = a \varphi^2$
27–28	Трипелюсткова роза	$\rho = 2a \sin(3\varphi)$
29–30	Конхоїда	$\rho = \left(-\frac{a}{\sin \varphi}\right) \pm l$

Завдання 2.3. Побудувати поверхню другого порядку (табл. 2.3).
Діапазони змінних x, y, z : $x \in [-3; 3]$ з кроком $\Delta = 0,5$; $y \in [-2; 2]$ з кроком $\Delta = 1$; $z \in [-2; 2]$ з кроком $\Delta = 0,5$.

Таблиця 2.3

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	Еліпсоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$	16	Площину, що відсікає на координатних осях відрізки $a = 3, b = 2$ і $c = 1$
2	Еліптичний параболоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z$	17	Однорозжнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$
3	Двopозжнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = -1$	18	Конус: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 0$
4	Площину, яка є паралельною площині Oxy і перетинає вісь Oz у точці $M(0; 0; -4)$	19	Площину, що проходить через точки $M_1(5; 5; 2)$, $M_2(4; 5; 4)$, $M_3(3; 3; 5)$
5	Гіперболічний параболоїд: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$	20	Двopозжнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = -1$

Продовж. табл. 2.3

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
6	Площину, що проходить через точки $M_1(4; 4; 2)$, $M_2(3; 4; 3)$, $M_3(2; 2; 4)$	21	Еліпсоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$
7	Еліптичний циліндр: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$	22	Гіперболічний циліндр: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
8	Конус: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$	23	Площину, що відсікає на координатних осях відрізки $a = 1$, $b = 5$ і $c = 3$
9	Однопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$	24	Конус: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 0$
10	Гіперболічний циліндр: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$	25	Двопорожнинний гіперболоїд: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - z^2 = -1$
11	Еліптичний параболоїд: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 2z$	26	Еліптичний циліндр: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
12	Еліпсоїд: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$	27	Конус: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 0$
13	Площину, яка є паралельною площині Oxy і перетинає вісь Oz у точці $M(0; 0; 2)$	28	Площину, що відсікає на координатних осях відрізки $a = 5$, $b = 3$ і $c = 2$
14	Гіперболічний циліндр: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	29	Гіперболічний параболоїд: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 2z$
15	Еліптичний параболоїд: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 2z$	30	Еліпсоїд: $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

Короткі теоретичні відомості

Діаграми в MS Excel дають можливість графічного зображення різних числових даних. Для побудови діаграм варто попередньо підготувати діапазон необхідних даних, а потім скористатися командою **"Вставка–Діаграма"** або відповідною кнопкою *"мастер построения диаграмм"* на панелі інструментів **"Стандартная"**. Найбільш розповсюдженими діаграмами, використовуваними в математичних та інженерних розрахунках, є графіки, пелюсткові діаграми і поверхні.

Графіки відображають залежність даних (вісь y) від величини, що змінюється з постійним кроком (вісь x). Мітки осі категорій повинні розташовуватися в порядку зростання або спадання.

Звичайно пелюсткові діаграми використовують для того, щоб показати співвідношення окремих рядів даних і всіх інших рядів. Кожна категорія пелюсткової діаграми має власну вісь координат (промінь). Точки даних розташовуються вздовж променя. Лінії, які з'єднують точки даних одного ряду, охоплюють площу, що характеризує сукупність значень у цьому ряді.

Діаграми для побудови поверхні використовуються для набору даних, який залежить від двох змінних. Поверхня показує низькі і високі точки. Діаграму можна повертати і розглядати з різних точок зору. З діаграмами можна робити наступні операції: додавати або вирізати ряди даних; змінювати (редагувати) дані в діаграмі; вставляти текст у будь-якому місці діаграми; змінювати просторову орієнтацію тривимірних діаграм; редагувати осі і вибирати шкалу; застосовувати діаграми для аналізу даних і т. д.

Робота з побудови математичних кривих (графіків, поверхонь) передбачає використання наступної методики:

1. Підготувати діапазон області визначення функції (або функцій) за допомогою маркера автозаповнення.

2. Розрахувати значення функції (функцій) на даному діапазоні, використовуючи формули і функції робочого листка MS Excel і маркер автозаповнення.

3. Виділити діапазон області визначення й області значення функції (функцій) і скористатися *"мастером построения диаграмм"*. Для побудови графіків краще використовувати типи діаграм **"График"** і **"Точечная"**.

4. Відформатувати отриманий графік (графіки).

Приклад виконання роботи

Завдання 2.1. Побудувати в різних системах координат при $x \in [-2; 2]$ графіки наступних функцій: 1) $y = \cos^3(\pi x)$;

$$2) y = \begin{cases} \frac{1+|0,2-x|}{1+x+x^2}, & x < 0,5; \\ x^{1/3}, & x \geq 0,5; \end{cases} \quad 3) y = \begin{cases} 1 + \ln(1+x), & x < 0,2; \\ \frac{1+x^{1/2}}{1+x}, & x \in [0,2; 0,8]; \\ 2e^{-2x}, & x > 0,8. \end{cases}$$

Розв'язання

Для виконання завдання необхідно:

1. Задати область визначення X введенням початкових даних 0 і 0,1; маркером автозаповнення підготувати весь діапазон **A7:A27**.
2. В комірку **B7** ввести формулу $=(\text{COS}(\text{ПИ}()*\text{A7}))^3$ і скопіювати її на діапазон **B7:B27**.
3. Побудувати графік функції за допомогою "мастера построения диаграмм".
4. Відформатувати отриманий графік (рис. 2.1).

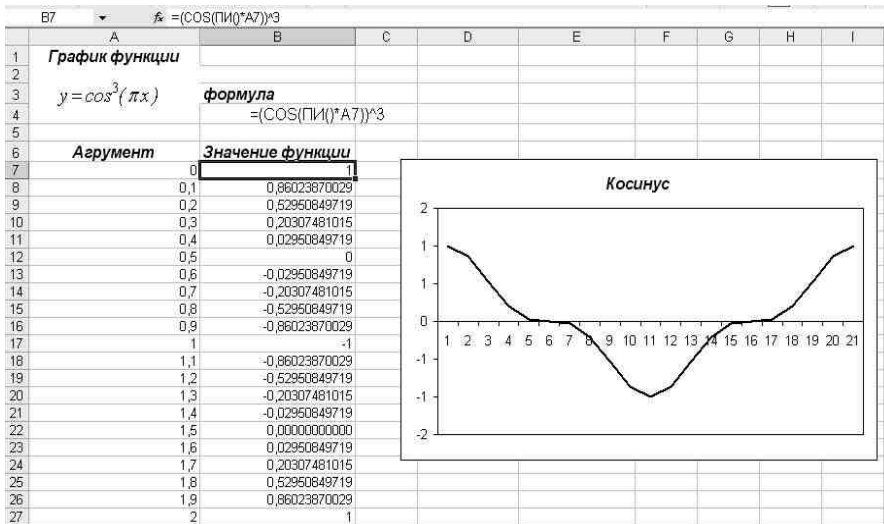


Рис. 2.1. Приклад побудови графіка функції $y = \cos^3(\pi x)$

Побудова графіка функції з одною умовою

Цей графік будується так, як на рис. 2.1, тільки в комірку **B7** вводиться формула $\text{=ЕСЛИ}(A2<0,5;(1+\text{ABS}(0,2-A2))/(1+A2+A2^2);A2^{(1/3)})$.

Побудова графіка функції з двома умовами

Графік будується так, як на рис. 2.1, тільки в комірку **B7** вводиться формула $\text{=ЕСЛИ}(A2<0,2;1+\text{LN}(1+A2);\text{ЕСЛИ}(\text{И}(A2\geq 0,2;A2\leq 0,8);(1+A2^{(1/2)})/(1+A2);2*\text{EXP}(-2*A2)))$.

Завдання 2.2. Побудувати алгебраїчну лінію (трипелносткову розу) $\rho = 2a \sin(3\phi)$ на площині.

Розв'язання

Часто різні лінії на площині задаються в полярних координатах, загальне рівняння яких $f(\rho, \phi) = 0$, де ρ, ϕ – полярні координати.

Якщо лінія задана рівнянням $\rho = \rho(\phi)$ у полярних координатах, то її рівняння в декартових координатах можна записати у вигляді

$$x = \rho(\phi)\cos\phi; \quad y = \rho(\phi)\sin(\phi).$$

Таблиця 2.4

Для виконання завдання необхідно:

1. Ввести формули для розрахунку (табл. 2.4). На рис. 2.2 наведені значення x , які змінюються від -6 до 6 з кроком $0,05$.

Координата	Комірка	Діапазон комірок	Значення
ϕ	A2	A2:A122	
ρ	B2	B2:B122	$=6*\text{SIN}(3*A2)$
x	D2	D2:D122	$=B2*\text{COS}(A2)$
y	E2	E2:E122	$=B2*\text{SIN}(A2)$

Рис. 2.2. Розраховані значення

	A	B	C	D
1	ϕ	ρ	x	y
2	0	0	0	0
3	0,05	0,8966288	0,895508	0,044813
4	0,1	1,7731212	1,764263	0,177017
5	0,15	2,6097932	2,580488	0,390003
6	0,2	3,3878548	3,320323	0,673063
7	0,25	4,0898326	3,962690	1,011841
8	0,3	4,6999615	4,490045	1,388934
9	0,35	5,2045394	4,889002	1,784625
10	0,4	5,5922345	5,160789	2,177719
11	0,45	5,8543401	5,271524	2,546436
12	0,5	5,9849699	5,252305	2,869347
13	0,55	5,9811902	5,099111	3,126292
14	0,6	5,8430858	4,822507	3,299254
15	0,65	5,5737583	4,437179	3,373163
16	0,7	5,1792562	3,961314	3,336568
17	0,75	4,6684392	3,415845	3,182189
18	0,8	4,0527791	2,823598	2,907286
19	0,85	3,3461023	2,208371	2,513861
20	0,9	2,5642793	1,593982	2,008669
21	0,95	1,7248661	1,003327	1,403034
22	1	0,8467200	0,457485	0,712490
23	1,05	-0,0504435	-0,025099	-0,043756

2. Виділити діапазон області визначення й області значення функції, тобто всі значення x і y на робочому листку, і скористатися "мастером построения диаграмм". Для побудови графіків краще використовувати типи діаграм "График" і "Точечная".

3. Відформатувати отриманий графік (рис. 2.3).

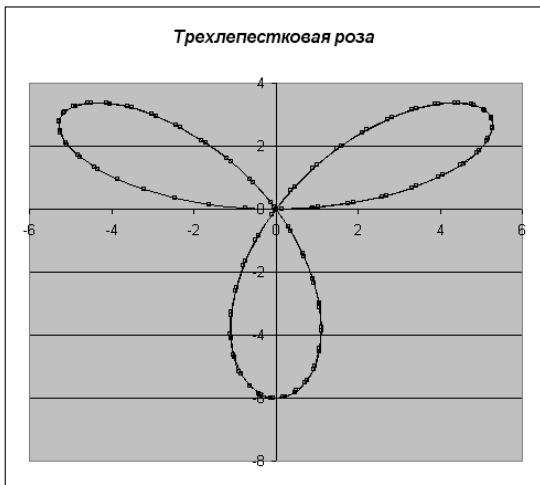


Рис. 2.3. Графік тріпелюсткової рози

Завдання 2.3. Побудувати поверхню другого порядку (сферу), задану рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Розв'язання

Для виконання завдання необхідно:

1. Підготувати діапазон області визначення функції за двома координатами: розташувати зміни однієї координати вздовж деякого стовпця вниз, а іншої – вздовж прилеглого рядка вправо. У діапазон **B5:B46** ввести значення від -1 до 1 з кроком $0,1$, причому кожне значення дублювати послідовно двічі. Аналогічно ввести значення і для діапазону **C4:AR4** (рис. 2.4).

2. У комірку **C5** ввести формулу $=КОРЕНЬ(1-В5*В5-С4*С4)*ЕСЛИ(ОСТАТ(\$A6;2)=0;1;-1)$.

3. У діапазон **A6:A47** додати повторювані числа 2 і 3 (для використання у формулі).

4. Виділити діапазон **B4:AR46** і скористатися "мастером построения диаграмм" (тип діаграми – "Поверхность").

5. Відформатувати отриману сферу (рис. 2.5).

C5	=КОРЕНЬ(1-\$B5*\$B5-C\$4*C\$4)*ЕСЛИ(ОСТАТ(\$A6;2)=0,1;-1)									
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2										
3										
4	Вспомогательные числа									
5			-1	-1	-0,9	-0,9	-0,8	-0,8	-0,7	-0,7
6	2	-1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
7	3	-0,9	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
8	2	-0,9	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
9	3	-0,8	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
10	2	-0,8	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!
11	3	-0,7	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,141421	0,141421
12	2	-0,7	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,141421	-0,141421
13	3	-0,6	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,387298	0,387298
14	2	-0,6	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,387298	-0,387298
15	3	-0,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,331662	0,331662	0,509902	0,509902
16	2	-0,5	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,331662	-0,331662	-0,509902	-0,509902
17	3	-0,4	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,173205	0,173205	0,447214	0,447214	0,591608	0,591608
18	2	-0,4	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,173205	-0,173205	-0,447214	-0,447214	-0,591608	-0,591608
19	3	-0,3	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,316228	0,316228	0,519615	0,519615	0,648074	0,648074
20	2	-0,3	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,316228	-0,316228	-0,519615	-0,519615	-0,648074	-0,648074
21	3	-0,2	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,387298	0,387298	0,565685	0,565685	0,685655	0,685655
22	2	-0,2	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,387298	-0,387298	-0,565685	-0,565685	-0,685655	-0,685655
23	3	-0,1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	0,424264	0,424264	0,591608	0,591608	0,707107	0,707107
24	2	-0,1	#ЧИСЛО!	#ЧИСЛО!	-0,424264	-0,424264	-0,591608	-0,591608	-0,707107	-0,707107
25	3	0	0	0	0,435890	0,435890	0,600000	0,600000	0,714143	0,714143

Рис. 2.4. Підготовлений діапазон визначення для побудови сфери

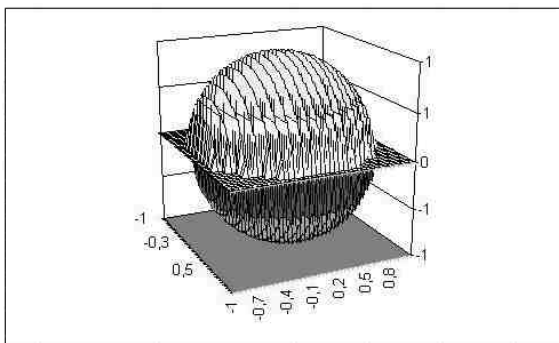


Рис. 2.5. Сфера

Контрольні питання і завдання

1. Охарактеризуйте типи діаграм у MS Excel.
2. Назвіть операції, які можна робити з діаграмами.
3. Алгоритм побудови діаграм.
4. Алгоритм побудови графіків функцій.
5. Алгоритм побудови алгебраїчних і трансцендентних ліній на площині.
6. Алгоритм побудови поверхонь.

Робота № 3

Дослідження функцій методами диференціального й інтегрального числень

Мета роботи: вивчити методи числового інтегрування; навчитися використовувати засоби MS Excel для числового диференціювання й інтегрування; набути навички роботи зі спеціальними вбудованими функціями MS Excel.

Завдання

Завдання 3.1. Знайти похідну функції на інтервалі $[-3; 6]$ з кроком дискретизації $\Delta x = 0,2$ (табл. 3.1). Побудувати в різних системах координат графіки функції та її похідної.

Таблиця 3.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$	2	$y = \ln x + \sqrt{x}$
3	$y = 2 \sin x - 3x$	4	$y = \frac{x^2}{2} - 3 \ln(x-2)$
5	$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$	6	$y = \left(\frac{2 + \cos x}{\sin x}\right)^2$
7	$y = 2x + \frac{1}{x^2} - 5x$	8	$y = \sin 3x \cos 2x$
9	$y = x^{\frac{2}{5}} \log_3 x$	10	$y = \frac{2^x}{x^2 + 1}$
11	$y = \operatorname{tg}^5(2x+1)$	12	$y = (3x+5)^4$
13	$y = \operatorname{tg}(x^2 + x + 1)$	14	$y = \sqrt[5]{x^3} \ln x$
15	$y = \frac{8x}{(2x-1)^3}$	16	$y = \frac{x+2}{x-2}$
17	$y = x^5 + x^3 + 1$	18	$y = \ln(x-2) + \ln x$
19	$y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x-1}$	20	$y = x^5 + (1-x)^5 - 16x^2$
21	$y = \left(\frac{\sqrt{81+x^2}}{8} + \frac{15-x}{10}\right)$	22	$y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

Продовж. табл. 3.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
23	$y = 0,5x + \sqrt{1-x}$	24	$y = 2 \sin x - \frac{\cos x}{3} + 5$
25	$y = 2 \cos x + \frac{1}{3} \sin x$	26	$y = x^3 - 3x^2 - 45x - 225$
27	$y = 12(3x+5)^3$	28	$y = \sqrt{\ln x} + 5x^4$
29	$y = \ln x + 3(x^4 - 7)$	30	$y = \frac{2x+1}{\cos^2(3x^2-4)}$

Завдання 3.2. Побудувати криволінійну трапецію, яка відповідає інтегралу завдання (табл. 3.2). Обчислити інтеграл числовими методами: лівих прямокутників; правих прямокутників; трапецій та методом Сімпсона. За отриманими результатами побудувати зведену таблицю і зробити висновки.

Таблиця 3.2

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}$	2	$\int_0^{0,25} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$
3	$\int_0^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2 dx}{13-6x^3+x^6}$	4	$\int_0^e \ln^2 x dx$
5	$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$	6	$\int_0^2 3\sqrt[4]{x^3} dx$
7	$\int_{0,5}^{3,5} \frac{(4+2\sqrt{x})(x^3+5)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$	8	$\int_0^3 \sqrt{x^2+6} \cdot 2x dx$
9	$\int_{0,1}^{2,2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{7+x^3}}$	10	$\int_0^3 \frac{e^x dx}{5+e^x}$

Продовж. табл. 3.2

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
11	$\int_{0,1}^{2,9} \frac{3x-2}{2x+3} dx$	12	$\int_0^2 \frac{dx}{x(1-\ln x)}$
13	$\int_{0,1}^{2,4} 2^{3x} dx$	14	$\int_0^{2,5} e^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} dx$
15	$\int_0^2 \frac{3x+2}{5x^2+7} dx$	16	$\int_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$
17	$\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$	18	$\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$
19	$\int_0^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$	20	$\int_1^3 (x^3-3x^2+5x-4) dx$
21	$\int_{0,1}^{2,5} \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$	22	$\int_{0,3}^{2,7} \sqrt[3]{x^3+8x^2} dx$
23	$\int_1^3 (2x^2+7)^3 x dx$	24	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{4+3x^3}$
25	$\int_{0,5}^{2,5} \frac{dx}{x \ln x}$	26	$\int_0^3 \frac{x^4}{x-1} dx$
27	$\int_{0,2}^{2,8} (\sqrt{2})^x dx$	28	$\int_{0,3}^{2,7} (e^x + e^{-x})^2 dx$
29	$\int_0^2 \frac{1}{x(5+\ln^2 x)} dx$	30	$\int_{0,1}^{2,4} \frac{e^{2x}}{4+e^{4x}} dx$

Короткі теоретичні відомості

До математичного аналізу відносять сукупність розділів математики, присвячених дослідженню функцій методами диференціального й інтегрального числень.

Похідна

Похідною функції $y = f(x)$ називається границя відносин приросту функції до приросту незалежної змінної при прямуванні останнього до нуля (якщо ця границя існує):

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометричний зміст похідної полягає в тому, що похідна $f'(x_0)$ є кутовий коефіцієнт (тангенс кута нахилу α) дотичної, проведеної до кривої $y = f(x)$ в точці x_0 , тобто $k = f'(x_0)$. За допомогою похідної знаходяться такі показники, як граничні витрати, граничні значення функції та граничні обмеження.

Продиференціювати функцію (знайти її похідну) можна, використовуючи таблицю похідних найпростіших функцій і правила диференціювання. Однак у ряді випадків найпростішими правилами диференціювання скористатися досить складно (наприклад, коли функція задана таблично або отримана в результаті спостережень). У цих випадках удаються до числових методів диференціювання. Числове диференціювання дуже чутливе до помилок, викликаних неточністю вихідних даних, членів ряду, що відкидаються, і т. д.

Існують різні формули числового диференціювання. З них найпростішими є явні триточкові формули, зокрема

$$y'_0 \approx \frac{1}{2\Delta x}(-y_{-1} + y_1), \quad (3.1)$$

де y_{-1} , y_0 , y_1 – три послідовні точки; Δx – досить малий крок дискретизації. Похибка обчислення похідної Δ за формулою (3.1) може бути оцінена з виразу

$$\Delta = \frac{\Delta x^2}{6} y''(\xi),$$

де $x_{-1} < \xi < x_1$. Коли експериментальні дані "зашумлені" більш сильно (мають великі похибки), використовують методи диференціювання за більшим числом точок. Прикладом може бути формула числового ди-

ференціювання поля згладжування

$$y'_k \approx \frac{1}{10\Delta x} (-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}). \quad (3.2)$$

Визначений інтеграл

У математичних розрахунках для знаходження визначеного інтеграла використовується формула Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

де $F(a)$, $F(b)$ – первісні функції для $f(x)$ в точках a і b . Первісною функцією для функції $f(x)$ на проміжку x називається функція $F(x)$, якщо в кожній точці x цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Однак застосування формули (3.2) на практиці пов'язане з певними труднощами, що виникають при знаходженні первісної у випадку ускладнення підінтегральної функції. Тому додатково використовують числові методи, що дозволяють знайти наближене значення шуканого інтеграла з необхідною точністю.

Існує значна кількість числових методів обчислення інтегралів. Вони засновані на різних способах знаходження площі під кривою $f(x)$:

як суми елементарних прямокутників – метод прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x;$$

як суми елементарних трапецій – метод трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} \Delta x;$$

а також за методом Сімпсона та ін.

Метод прямокутників є найпростішим, проте найменш точним. Похибка обчислення Δ знаходиться за формулою трапецій $S(n)$:

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x)dx - S(n) \right|.$$

Також похибка може бути оцінена з виразу

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2,$$

де M_2 – максимальне значення модуля другої похідної $f''(x)$ підінтегральної функції $y = f(x)$ на відрізок $[a, b]$.

Приклад виконання роботи

Завдання 3.1. Знайти похідну функції $y = \sin x$ на інтервалі $[-3; 6]$ з кроком дискретизації $\Delta x = 0,2$. Побудувати графік функції та її похідної.

Розв'язання

1. Ввести дані в робочу таблицю. Ввести в комірку **A1** слово "аргумент"; потім в комірку **A2** – перше значення аргументу (ліву границю діапазону); в комірку **A3** – друге значення (ліву границю плюс крок дискретизації 0,2). Скопіювати формулу в комірки **A4:A47**.

2. Ввести "значение функции". В комірку **B2** ввести формулу $=\text{SIN}(\text{A2})$ і скопіювати її в комірки **B3:Y47**. Таким чином отримане значення синуса, що відповідає значенню аргументу.

3. У комірку **C1** ввести слово "производная". В комірку **C2** ввести формулу диференціювання (3.1) $=(\text{B4}-\text{B2})/(\text{2}*0,2)$ і скопіювати її в комірки **C3:C47**.

4. За отриманими даними побудувати діаграму (рис. 3.1). Як бачимо, графік похідної на рис. 3.1 збігається з графіком косинуса, який і є точним значенням похідної від функції синуса.

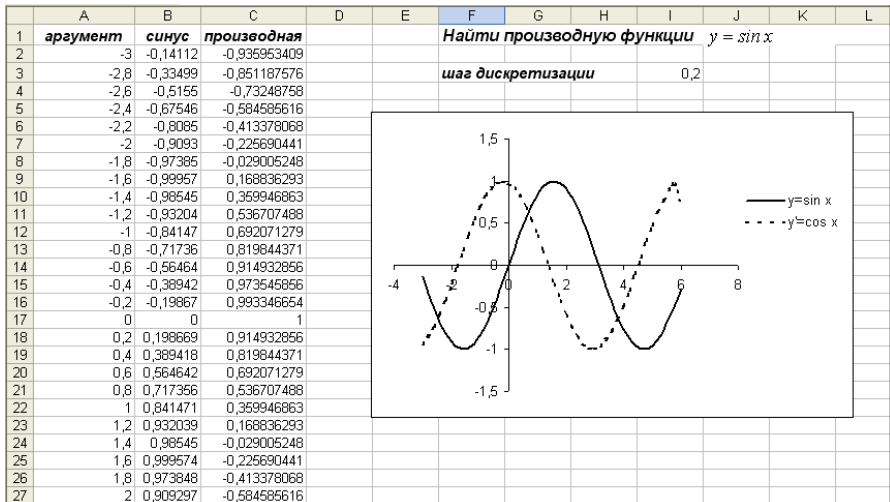


Рис. 3.1. Діаграма функції $y = \sin x$ та її похідної

Завдання 3.2. Побудувати криволінійну трапецію, що відповідає інтегралу $\int_1^3 x^2 dx$. Обчислити інтеграл числовими методами: лівих прямокутників; правих прямокутників; трапецій та методом Сімпсона.

За отриманими результатами побудувати зведену таблицю, зробити висновки.

Розв'язання

1. Аналітичний розв'язок інтеграла:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8,66667.$$

2. Побудова криволінійної трапеції заданого інтеграла. Визначений інтеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції – фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, відрізком осі абсцис $[a; b]$, прямими $x = a$ і $x = b$.

Для побудови криволінійної трапеції (рис. 3.2) необхідно побудувати графіки функцій $y = f(x)$ (підінтегральна функція), $x = a$, $x = b$.

3. Обчислення заданого інтеграла методом лівих прямокутників. Формула лівих прямокутників для знаходження наближеного значення визначеного інтеграла (рис. 3.3, 3.4) має наступний вигляд:

$$S = h(f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)).$$

Кількість точок розбиття відрізка $[a; b]$ $n = 10$. Необхідно розбити інтервал інтегрування $[a; b]$ на $n = 10$ рівних частин довжиною $h = \frac{b-a}{n}$,

де h – крок інтегрування. Таким чином визначаються точки $x_0 = a$, x_1 , x_2 , ..., x_{n-1} , $x_n = b$. Ці точки називаються вузлами інтегрування.

Формула для розрахунку значень аргументу x (комірка **B7**) =B6+\$D\$3.

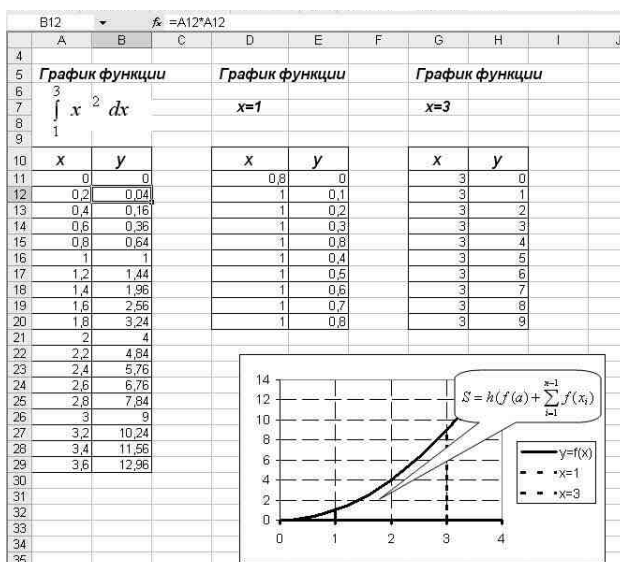


Рис. 3.2. Криволінійна трапеція, що відповідає інтегралу $\int_1^3 x^2 dx$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	a	b	n	$h=(b-a)/n$	$=(B3-A3)/C3$		
3	1	3	10	0,2			

Рис. 3.3. Знаходження наближеного значення інтеграла

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	a	b	n	$h=(b-a)/n$				
3	1	3	10	0,2				
4								
5		x		y				
6	$a=x0=$	1	$f(a)=f(x0)=$	1				
7	$x1=$	1,2	$f(x1)=$	1,44				
8	$x2=$	1,4	$f(x2)=$	1,96				
9	$x3=$	1,6	$f(x3)=$	2,56				
10	$x4=$	1,8	$f(x4)=$	3,24				
11	$x5=$	2	$f(x5)=$	4				
12	$x6=$	2,2	$f(x6)=$	4,84				
13	$x7=$	2,4	$f(x7)=$	5,76				
14	$x8=$	2,6	$f(x8)=$	6,76				
15	$x9=$	2,8	$f(x9)=$	7,84				
16	$b=x10=$	3	$f(b)=f(x10)=$	9				
17								

$S=lnnp=$ 7,88

Рис. 3.4. Обчислення інтеграла $\int_1^3 x^2 dx$ методом лівих прямокутників

4. *Обчислення заданого інтеграла методом правих прямокутників.* Обчислення проводяться аналогічно до п. 3. Необхідно змінити границі, тобто в комірку **B6** ввести значення 3, а в комірку **B16** значення 1. Формула комірки **B7** =B6-\$D\$3, числово $S_{\text{прп}} = 9,48$.

5. *Обчислення заданого інтеграла методом трапецій.* Площа трапеції

$$S_{\text{трап}} = \frac{y_{\text{л}} + y_{\text{п}}}{2}(x_{\text{п}} - x_{\text{л}}),$$

де $x_{\text{л}}, x_{\text{п}}$ – відповідно ліва і права границі одного з інтервалів розбиття; $y_{\text{л}}, y_{\text{п}}$ – значення функції на границях (рис. 3.5).

	A	B	C	D	E	F	G
18				h=			
19				0,1			
20							
21	0	1	1	0,1105			
22	1	1,1	1,21	0,1325			
23	2	1,2	1,44	0,1565			
24	3	1,3	1,69	0,1825			
25	4	1,4	1,96	0,2105			
26	5	1,5	2,25	0,2405			
27	6	1,6	2,56	0,2725			
28	7	1,7	2,89	0,3065			
29	8	1,8	3,24	0,3425			
30	9	1,9	3,61	0,3805			
31	10	2	4	0,4205	Smpap =	8,67	
32	11	2,1	4,41	0,4625			
33	12	2,2	4,84	0,5065			
34	13	2,3	5,29	0,5525			
35	14	2,4	5,76	0,6005			
36	15	2,5	6,25	0,6505			
37	16	2,6	6,76	0,7025			
38	17	2,7	7,29	0,7565			
39	18	2,8	7,84	0,8125			
40	19	2,9	8,41	0,8705			
41	20	3	9	9			

Рис. 3.5. Обчислення інтеграла $\int_1^3 x^2 dx$ методом розбиття на трапеції

Комірка **A21** – порядковий номер кроку; комірка **B21** – інтервал розбиття з прийнятим кроком $h = 0,1$; комірка **C21** – введення підінтегральної функції =B21*B21; комірка **D21** – введення формули для обчислення площі однієї трапеції =0,5*(C21+C22)*(B22-B21); комірка **G31** – введення формули для наближеного обчислення площі під кривою =СУМ(D21:D40); числово $S_{\text{трап}} = 8,67$.

6. *Обчислення заданого інтеграла методом Сімпсона.* Метод Сімпсона (рис. 3.6) має два обмеження:

кількість точок даних повинна бути непарною;

точки повинні розташовуватися на однаковій відстані по осі абсцис.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	n	2n	h=(b-a)/2n		
2							
3	1	3	10	10	0,2		
4	i	x_i	y_i		Шаг		
5	0	1	1	0,58133	1		
6	1	1,2	1,44		1		
7	2	1,4	1,96	1,02933	2		
8	3	1,6	2,56		2	Сум =	8,666667
9	4	1,8	3,24	1,60533	3		
10	5	2	4		3		
11	6	2,2	4,84	2,30933	4		
12	7	2,4	5,76		4		
13	8	2,6	6,76	3,14133	5		
14	9	2,8	7,84		5		
15	10	3	9				

Рис. 3.6. Обчислення інтеграла $\int_1^3 x^2 dx$ методом Сімпсона

Формула Сімпсона для знаходження наближеного значення визначеного інтеграла записується так:

$$S_{\text{Сим}} = \frac{h}{3} (y_{\text{л}} + 4y_{\text{ц}} + y_{\text{п}}),$$

де $y_{\text{л}}$, $y_{\text{ц}}$, $y_{\text{п}}$ – значення інтегрованої функції відповідно на лівому краї, у центрі і на правому краї інтервалу, утвореного двома інтервалами даних (ширина цього інтервалу дорівнює кроку інтегрування). У стовпець **Е** для нагадування введені номери кроків інтегрування. Кількість точок розбиття відрізка $[a; b]$ $2n = 10$. Розбити інтервал інтегрування $[a; b]$ на

$2n$ рівних частин довжиною $h = \frac{b-a}{2n}$. Формула для обчислення площі

першого елемента розбиття $= (\$E\$3) * (C5 + 4 * C6 + C7)$ зберігається в комірці **D5**. Цю формулу необхідно скопіювати в комірки, що відповідають іншим крокам інтегрування, тобто в комірки **D7**, **D9**, **D11** і **D13**.

Для обчислення суми в комірці **G8** ввести формулу $= \text{СУМ}(D5:D13)$. У процесі підсумовування порожні комірки не беруться до уваги. Число $S_{\text{Сим}} = 8,666667$. Отримані при розрахунку різними методами результати зведені в табл. 3.3.

Як видно з даних таблиці, метод прямокутників найменш точний у порівнянні з іншими методами, проте найбільш простий у реалізації. Метод Сімпсона є найбільш точним, однак складний у виконанні і, крім того, має ряд обмежень. Найбільш оптимальний у використанні варіант – метод трапецій.

Таблиця 3.3

№ з/п	Метод	Результат	Похибка, %
1	Аналітичний	8,66667	
2	Лівих прямокутників	7,88	9,0
3	Правих прямокутників	9,48	9,4
4	Трапецій	8,67	0,04
5	Сімпсона	8,66667	0

Контрольні питання і завдання

1. Похідна і її геометричний зміст.
2. Опишіть методи числового диференціювання.
3. Визначений інтеграл і його геометричний зміст.
4. Алгоритм знаходження площі під кривою.
5. Охарактеризуйте методи інтегрування за допомогою геометричних областей.
6. Дайте оцінку методу Сімпсона.

Робота № 4

Математичний аналіз. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

Мета роботи: вивчити числові методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку; набути навички знаходження коренів рівнянь будь-якого порядку за допомогою MS Excel.

Завдання

Завдання 4.1. Одержати точний і наближені (метод Ейлера, метод Рунге–Кутта) розв'язки наступних диференціальних рівнянь (табл. 4.1); прийняти $h = 0,1$. Побудувати графіки.

Таблица 4.1

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$y' = y + 3x, \quad y(0) = -1, \quad x \in [0; 0,5]$	16	$y' = x^2 + y, \quad y(0) = -4, \quad x \in [0; 1]$
2	$y' = x - 2y, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0; 1]$	17	$y' = x^3 + y, \quad y(0) = -4, \quad x \in [0; 1]$
3	$y' = 2x - y, \quad y(0) = 2, \quad x \in [0; 1]$	18	$y' = x^3 - y, \quad y(0) = -6, \quad x \in [0; 1]$
4	$y' = x + y^2, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$	19	$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$
5	$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$	20	$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$
6	$y' = x + 2y^2, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0; 1]$	21	$y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = -1, \quad x \in [0; 1]$
7	$y'x - x^2 - y = 0, \quad y(1) = 2, \quad x \in [1; 2]$	22	$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0, \quad x \in [0; 1]$
8	$y' = x^2y + x^3, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$	23	$xy' + y = y^2, \quad y(1) = 0,5, \quad x \in [0; 1]$
9	$y' - \frac{xy'}{x^2 + 1} = x, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$	24	$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$
10	$y' - \frac{y}{x-1}y = \frac{y^2}{x-1}, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$	25	$y' = 2x - y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$
11	$y'(y^2 + x) = y, \quad y(1) = 1, \quad x \in [1; 2]$	26	$y' = x - y + 2, \quad y(0) = 2, \quad x \in [0; 1]$
12	$y' = y + x, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$	27	$y' = x + y^2, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1; 2]$
13	$y' = x - y, \quad y(0) = -1, \quad x \in [0; 1]$	28	$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = -1, \quad x \in [0; 1]$
14	$y' = x - y + 2, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1; 2]$	29	$y' = x^2y - 2x^3, \quad y(0) = -1, \quad x \in [0; 1]$
15	$y' = x^2 - y, \quad y(0) = 2, \quad x \in [0; 1]$	30	$y'(y^2 - x) = 2y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1]$

Завдання 4.2. Знайти всі корені рівняння (табл. 4.2). Побудувати графіки.

Таблиця 4.2

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$x^7 + 3x^5 - 4x^2 + 10 = 0$	16	$x^3 - 2,92x^2 + 1,4355x + 0,791136 = 0$
2	$x^3 - 2,56x^2 - 1,351x + 4,395006 = 0$	17	$x^5 - 4x - 2 = 0$
3	$x^3 + 3x^2 - 3x - 14 = 0$	18	$x^3 + 2,84x^2 + 5,6064x - 14,766336 = 0$
4	$x^3 + 1,41x^2 - 5,4724x - 7,380384 = 0$	19	$x^3 - 19x - 30 = 0$
5	$x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 = 0$	20	$x^3 + 0,85x^2 - 0,4317x + 0,043911 = 0$
6	$x^3 - 0,12x^2 - 1,4775x + 0,191906 = 0$	21	$3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 = 0$
7	$x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$	22	$x^3 + 0,77x^2 - 0,2513x + 0,016995 = 0$
8	$x^3 + 0,88x^2 - 0,3999x - 0,037638 = 0$	23	$x^3 + 6x^2 - 9x - 14 = 0$
9	$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$	24	$x^3 + 0,78x^2 - 0,8269x + 0,146718 = 0$
10	$x^3 + 2,28x^2 - 1,9347x - 3,907574 = 0$	25	$x^3 + x^2 - 12x = 0$
11	$2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3 = 0$	26	$x^3 - 2,56x^2 + 1,3251x + 4,395006 = 0$
12	$x^3 + 0,93x^2 - 4,512x + 0,5778 = 0$	27	$x^5 - 60x^3 + 65x - 5 = 0$
13	$x^5 + 2x^3 - 6x^2 + 17x - 9 = 0$	28	$3x^3 + 4,23x^2 - 7,479x - 9,26514 = 0$
14	$x^3 - 6,88x^2 + 3,549x - 2,33667 = 0$	29	$2x^5 + 15x^3 - 8x - 3 = 0$
15	$2x^7 + 6x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 20x + 12 = 0$	30	$7x^5 - 17x^3 + x^2 - 4x + 7 = 0$

Короткі теоретичні відомості

Деякі наукові і технічні задачі розв'язують за допомогою диференціальних рівнянь. Проте диференціальні рівняння, які можна проінтегрувати відомими методами, зустрічаються рідко. Саме тому особливе значення мають наближені методи розв'язання таких рівнянь. До відомих належать метод Ейлера і метод Рунге–Кутта.

Математична постановка задачі

Дане диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad (4.1)$$

яке задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Необхідно знайти розв'язки цього рівняння на відрізьку $[x_0; x_1]$.

За методом Ейлера для задачі Коші розв'язки рівняння (4.1) знахо-

дяться за наступною рекурентною формулою:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),$$

де $x_0 = x_0 + hk$; $x_0 = 0$, $k = \overline{1, N-1}$.

У методі Рунге–Кутти четвертого порядку для задачі Коші розв'язок рівняння (4.1) задається рекурентною формулою

$$y_{k+1} = y_k + (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \frac{h}{6},$$

де

$$m_1 = f(x_k, y_k); \quad m_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + m_1 \frac{h}{2}); \quad m_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + m_2 \frac{h}{2});$$

$$m_4 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + m_3 \frac{h}{2}); \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Різні задачі механіки, фізики, техніки зводяться до питання про знаходження коренів багаточлена, причому іноді досить високих степенів. Точні розв'язки відомі для квадратних, кубічних (формула Кардано) і рівнянь 4-го степеня (метод Феррарі). Для рівнянь вище 5-го степеня не існує формул для вираження коренів багаточлена. Однак у додатковій технічній літературі звичайно досить знати лише наближені значення коренів з деякою попередньо заданою точністю.

У загальному вигляді рівняння n -го степеня

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

де n – деяке додатне число; $a_0, \dots, a_n$ – довільні комплексні числа, причому старший коефіцієнт a_0 не повинен дорівнювати нулю.

Вираз $f(x)$ називається *багаточленом (поліномом)* n -го степеня від невідомого x . Якщо при якомусь $x = x_0$ виконується рівність $f(x) = 0$, то x_0 називається *коренем багаточлена $f(x)$* . При знаходженні дійсних коренів багаточлена з дійсними коефіцієнтами варто враховувати наступне:

дійсними коренями багаточлена будуть абсциси точок перетину його графіка з віссю x і тільки вони;

кількість *додатних* коренів багаточлена (які рахуються разом з їх кратностями) дорівнює кількості змін знаків у системі коефіцієнтів цього багаточлена (коефіцієнти, рівні нулю, не враховуються) або менша за цю кількість на парне число;

кількість *від'ємних* коренів багаточлена (які рахуються разом з їх кратностями) дорівнює кількості збереження знаків у системі коефіцієнтів цього багаточлена або менша за цю кількість на парне число (теорема Декарта і Бюдана–Фур'є).

Приклад виконання роботи

Завдання 4.1. Одержати точний і наближені (метод Ейлера, метод Рунге–Кутта) розв'язки диференціального рівняння $y' = 2y + e^x - x$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 0,25$; прийняти $h = 0,01$. Побудувати графіки.

Розв'язання

Знайти точний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = 2y + e^x - x. \quad (4.2)$$

Точний розв'язок рівняння (4.2) у загальному вигляді записується як

$$y = uv = e^{2x} \left(-e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + C \right) = -e^x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + C e^{2x};$$

при заданих початкових умовах $y(0) = 0,25$ як

$$0,25 = -1 + \frac{1}{4} + C,$$

де $C = 1$.

Частинний розв'язок рівняння (4.2) має вигляд

$$y = -e^x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + e^{2x}.$$

Формули для обчислень, використовувані при розв'язанні рівняння (4.2), наведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.3

Введені формули для обчислень	Комірка	Формула
Величина кроку	E14	$=(\$E\$10-\$E\$8)/\$E\12
Точний розв'язок рівняння	F4	$=\text{EXP}(2*\text{H4})-\text{EXP}(\text{H4})+\text{H4}/2+\$F\$3$
Розв'язок рівняння за методом Ейлера	G4	$=\text{G3}+\$E\$14*(2*\text{G3}+\text{EXP}(\text{H4})-\text{H4})$
Значення змінної x	H4	$=\$H3+\$E\$14$

Продовж. табл. 4.3

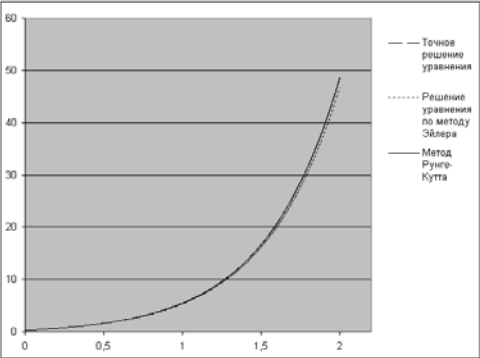
Введені формули для обчислень		Комірка	Формула
Розрахунок коефіцієнтів для методу Рунге–Кутта	m1	I4	=2*M3+EXP(H4)-H4
	m2	J4	=2*(M3+I4*\$E\$14/2)+EXP(H4+\$E\$14/2)-H4-\$E\$14/2
	m3	K4	=2*(M3+J4*\$E\$14/2)+EXP(H4+\$E\$14/2)-H4-\$E\$14/2
	m4	L4	=2*(M3+k4*\$E\$14)+EXP(H4+\$E\$14)-H4-\$E\$14
Метод Рунге–Кутта		M4	=M3+(I4+2*M4+2*K4+L4)*\$E\$14/6

Оформлене розв'язання завдання зображене на рис. 4.1 і 4.2.

I11 =2*M10+EXP(H11);H11														
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
	Дифференциальное уравнение													
						Точное решение уравнения	Решение уравнения по методу Эйлера	Значение переменной x	Расчет коэффициентов для метода Рунге-Кутта				Метод Рунге-Кутта	
2						0,25	0,25	0	m1	m2	m3	m4	0,25	
3						0,265151173	0,265000502	0,01	1,50005	1,515114	1,51526	1,53	0,265152	
4						0,280609434	0,280302525	0,02	1,53051	1,545925	1,54608	1,56	0,280613	
5						0,296382013	0,295913121	0,03	1,56168	1,577462	1,57762	1,59	0,296388	
6						0,312476293	0,311839491	0,04	1,59399	1,609740	1,60990	1,63	0,312487	
7	Начальные значения					0,25	0,328998992	0,328088992	0,05	1,62624	1,642777	1,64294	1,66	0,328916
8	Значения левой границы отрезка					0	0,345660305	0,344669137	0,06	1,65967	1,676587	1,67676	1,69	0,345683
9	Значения правой границы отрезка					1	0,362765618	0,361687602	0,07	1,69387	1,711188	1,71136	1,73	0,362796
10	Число точек отрезка (> 1)					100	0,380223803	0,378852224	0,08	1,72886	1,746597	1,74677	1,76	0,380263
11						0,398043079	0,396471012	0,09	1,7647	1,782832	1,78301	1,80	0,398093	
12						0,41623184	0,414452141	0,1	1,80136	1,819909	1,82009	1,84	0,416293	
13	Величина шага					0,01	0,43479866	0,432803965	0,11	1,83886	1,857848	1,85804	1,88	0,434873
14						0,453752299	0,451535013	0,12	1,87724	1,896666	1,89686	1,92	0,453841	
15						0,473101703	0,470653997	0,13	1,91651	1,936383	1,93658	1,96	0,473206	
16						0,492856013	0,490169815	0,14	1,95669	1,977018	1,97722	2,00	0,492978	
17						0,513024566	0,510091553	0,15	1,99779	2,018591	2,01880	2,04	0,513165	
18						0,533616893	0,530428493	0,16	2,03984	2,061121	2,06133	2,08	0,533778	
19						0,554642739	0,551190111	0,17	2,08286	2,104630	2,10485	2,13	0,554825	
20						0,576112051	0,572386087	0,18	2,12687	2,149138	2,14936	2,17	0,576318	
21						0,598034392	0,594026306	0,19	2,17189	2,194667	2,19489	2,22	0,598267	

Рис. 4.1. Числовe розв'язання диференціального рівняння

Рис. 4.2. Графіки для точного і наближених розв'язків диференціального рівняння



Завдання 4.2. Знайти всі корені рівняння $x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3 = 0$.

Розв'язання

Виконати наближене табулювання функції $f(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3$ на відрізку $[-10; 10]$. Для цього необхідно:

в комірки **A12:A32** ввести аргумент функції – значення відрізка $[-10; 10]$ з кроком 1;

в комірку **B12** ввести формулу $=A12^5+2*A12^4+5*A12^3+8*A12^2-7*A12-3$ і скопіювати її значення на весь діапазон табулювання **B12:B32**;

обчислити значення $f(x)$ на цьому діапазоні (рис. 4.3, стовпець "а) приближенное"). За результатами обчислення визначити, що значення функції $f(x)$ змінює знак на відрізку $[-3; 1]$.

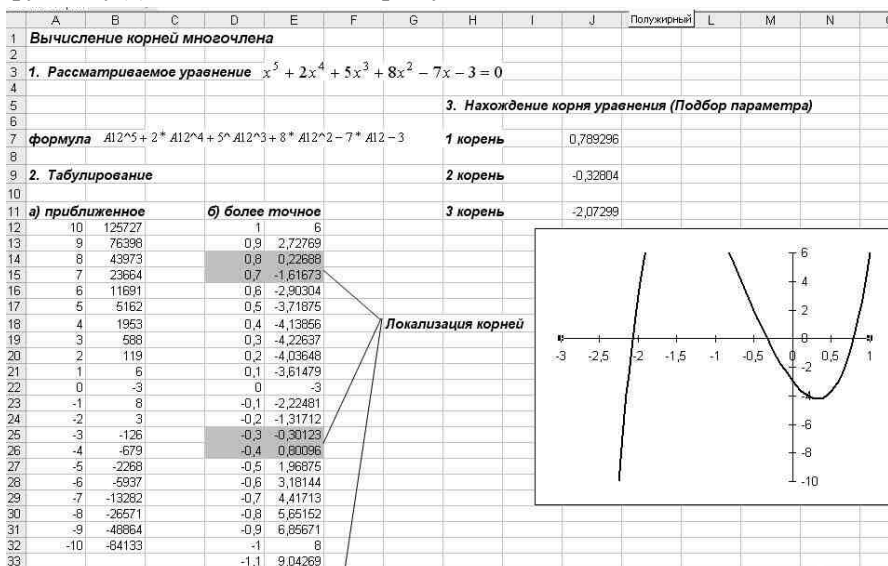


Рис. 4.3. Обчислення коренів багаточлена

2. Здійснити більш точне табулювання функції на заданому відрізку. Для цього необхідно:

в комірки **D12:D52** ввести аргумент функції $f(x)$ – значення відрізка $[-3; 1]$ з кроком 0,1;

в комірку **E12** ввести формулу, аналогічну формулі для комірки **B12**, тобто $=D12^5+2*D12^4+5*D12^3+8*D12^2-7*D12-3$, і скопіювати

її на весь діапазон значень аргументу функції;

обчислити значення $f(x)$ на цьому діапазоні (див. рис. 4.3, стовпець "б) более точное") і побудувати графік для табульованої функції (рис. 4.4).

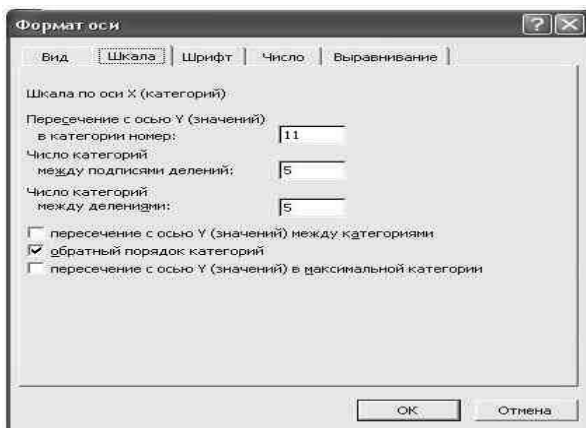


Рис. 4.4. Формат осі x при побудові графіка табульованої функції

Результати точного табулювання функції дають три зміни знака на відрізку $[-3; 1]$, що свідчить про наявність коренів рівняння $f(x) = 0$.

3. За допомогою засобу "**Подбор параметра**" визначити корені рівняння. Для обчислення першого кореня розмістити покажчик у комірці **E14** (або **E15**) і виконати команду "**Сервис–Подбор параметра**" (рис. 4.5). Одержимо перший корінь рівняння

$$x_1 = 0,78295735548989.$$

Аналогічно обчислити два корені, що залишилися:

$$x_2 = -0,328038079539342;$$

$$x_3 = -2,07299390058983.$$

Контрольні питання і завдання

1. Охарактеризуйте методи наближеного розв'язання диференціального рівняння першого порядку.

2. Назвіть методи отримання ітераційних розв'язків.

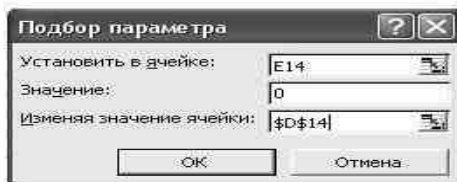


Рис. 4.5. Знаходження кореня рівняння за допомогою засобу "**Подбор параметра**"

3. Алгоритм пошуку коренів рівнянь за допомогою MS Excel.
4. Поясніть прийом табулювання функції на деякому інтервалі з метою виявлення (локалізації) коренів рівняння.
5. Поясніть спосіб пошуку коренів рівняння за допомогою засобу "Подбор параметра".

Робота № 5

Елементи регресивного аналізу. Апроксимація функції

Мета роботи: вивчити можливості різних засобів MS Excel для апроксимації функцій; навчитися обчислювати регресивну суму квадратів, коефіцієнт детермінації; набути навички побудови в одній системі координат графіків заданої й апроксимуючої функцій.

Завдання

Завдання 5.1. Знайти коефіцієнти лінійної апроксимуючої функції $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$, заданої розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Розв'язки наведені в табл. 5.1.

Знайти регресивну і залишкову суми квадратів, коефіцієнт детермінації; побудувати в одній системі координат точковий графік заданої функції $y = f(x)$ і лінійної апроксимуючої функції $y = F(x)$.

Таблиця 5.1

Варіант № 1										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	3,21	1,86	0,35	0,78	0,54	0,16	0,18	0,14	0,11	0,07
Варіант № 2										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	4,77	1,58	0,73	0,58	0,44	0,31	0,34	0,32	0,37	0,29
Варіант № 3										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	9,31	6,92	3,04	2,25	2,03	1,51	1,32	1,16	1,12	1,03
Варіант № 4										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	8,31	11,54	14,28	16,07	16,92	17,54	18,86	19,03	17,76	16,65

Продовж. табл. 5.1

Варіант № 5										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	3,78	4,43	5,47	6,79	7,67	9,38	12,05	13,19	15,47	16,47
Варіант № 6										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	14,82	10,29	4,61	3,79	3,08	2,86	2,47	2,31	2,13	1,19
Варіант № 7										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	1,79	2,19	3,25	3,49	4,27	5,19	6,28	7,19	8,39	10,73
Варіант № 8										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	0,03	0,05	0,09	0,18	0,41	0,58	0,96	1,59	1,89	2,57
Варіант № 9										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	1,07	1,19	1,51	1,88	2,17	2,69	3,85	4,76	5,89	6,58
Варіант № 10										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	3,25	4,41	5,26	5,58	5,91	6,19	6,58	6,64	6,95	7,21
Варіант № 11										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	1,86	3,67	5,36	6,09	6,72	7,14	7,91	8,13	8,64	9,31
Варіант № 12										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	4,25	3,12	2,09	1,86	1,65	1,42	1,09	1,01	0,87	0,75
Варіант № 13										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	22,57	18,46	16,95	16,46	16,24	15,96	16,93	15,77	15,63	15,11
Варіант № 14										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	5,44	4,75	1,32	0,96	0,67	0,59	0,48	0,48	0,45	0,38
Варіант № 15										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	9,79	8,97	7,65	7,36	6,85	6,24	5,65	5,53	5,51	4,52

Продовж. табл. 5.1

Варіант № 16										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	10,24	10,91	13,84	17,11	22,57	30,32	47,57	59,14	83,96	91,78
Варіант № 17										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	29,57	26,16	14,56	12,34	9,09	7,75	6,35	5,57	4,42	3,95
Варіант № 18										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	8,31	6,21	4,07	3,51	3,35	3,15	3,03	2,86	2,99	3,11
Варіант № 19										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	3,15	4,32	6,41	7,45	10,65	12,85	18,92	22,94	31,79	40,57
Варіант № 20										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	6,69	5,36	1,68	1,27	0,95	0,75	0,67	0,59	0,52	0,48
Варіант № 21										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	2,34	3,65	5,87	8,31	11,46	16,64	29,58	39,83	64,57	73,87
Варіант № 22										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	0,01	0,04	0,08	0,15	0,37	0,77	2,81	5,69	15,62	17,32
Варіант № 23										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	1,49	2,26	2,95	3,36	3,61	3,89	4,13	4,25	4,47	5,12
Варіант № 24										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	2,08	2,29	2,89	3,39	4,09	4,89	6,79	7,99	10,89	12,39
Варіант № 25										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	4,95	6,25	7,15	7,65	8,05	8,45	8,75	8,95	9,25	10,05
Варіант № 26										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	6,87	4,91	3,36	2,84	2,45	2,15	1,74	1,61	1,47	1,35

Продовж. табл. 5.1

Варіант № 27										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	7,53	6,19	5,68	5,51	5,45	5,36	5,28	5,25	5,19	5,21
Варіант № 28										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	1,0	5,0	7,0	9,0	16,0	14,0	12,0	9,0	6,0	2,0
Варіант № 29										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	0,56	0,91	1,44	2,78	3,85	5,67	4,55	3,15	2,11	1,99
Варіант № 30										
x	1,1	2,4	3,7	4,4	5,3	6,5	7,1	7,9	8,7	9,8
y	5,47	7,98	12,45	16,76	18,43	20,57	19,44	17,83	15,59	13,65

Завдання 5.2. Знайти коефіцієнти квадратичної апроксимуючої функції $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$, заданої розв'язком СЛАР (див. табл. 5.1).

Знайти регресивну і залишкову суми квадратів, коефіцієнт детермінації; побудувати в одній системі координат точковий графік заданої функції $y = f(x)$ і квадратичної апроксимуючої функції $y = F(x)$.

Завдання 5.3. Побудувати точковий графік заданої функції $y = f(x)$ і, скориставшись властивістю діаграм створювати лінії тренда, додати лінійну лінію тренда і степеневу (ступінь = 2). За отриманими результатами побудувати порівняльну таблицю і зробити висновки.

Короткі теоретичні відомості

Термін *регресія* використовується для опису будь-якого статистичного зв'язку між випадковими величинами. Функція $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що описує залежність показника від параметрів, називається *рівнянням (функцією) регресії*.

На практиці часто доводиться стикатися з задачею про згладжування експериментальних залежностей, або з задачею апроксимації. *Апроксимацією* називається процес підбору емпіричної формули $y = F(x)$ для функціональної залежності $y = f(x)$. Емпіричні формули служать для аналітичного подання дослідних даних.

Звичайно розв'язання задачі апроксимації поділяється на дві частини. Спочатку установлюють вид залежності $y = f(x)$ і, відповідно, вид емпіричної формули, тобто з'ясовують, чи є вона лінійною, квадратич-

ною, логарифмічною та ін. Після цього обчислюються чисельні значення невідомих параметрів обраної емпіричної формули, для яких наближення до заданої функції виявляється найкращим. Після вибору виду формули визначають її параметри. У багатьох випадках, особливо якщо функція $y = f(x)$ задана графіком або таблицею, для оцінки ступеня близькості розглядають різниці $f(x_i) - F(x_i)$ для точок $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Існують різні ступені і, отже, способи розв'язання цієї задачі. Зазвичай параметри при відомому виді залежності визначають за методом найменших квадратів (регресивною сумою квадратів). Функція $F(x)$ вважається найкращим наближенням до $f(x)$, якщо для неї сума квадратів відхилень "теоретичних" значень $F(x_i)$, знайдених за емпіричною формулою, від відповідних дослідних значень y_i ,

$$Z = \sum_{i=0}^n [f(x_i) - F(x_i)]^2 \rightarrow \min \quad (5.1)$$

має найменше значення в порівнянні з іншими функціями, з числа яких вибирається шукане наближення.

Базуючись на методах диференціального числення, метод найменших квадратів дозволяє сформулювати аналітичні умови досягнення сумою квадратів відхилень (5.1) свого найменшого значення. Так, якщо функція $F(x)$ повністю визначається своїми значеннями, то найкращі значення цих параметрів знаходяться з розв'язків системи рівнянь. Наприклад, у найпростішому випадку, коли функція $F(x)$ представлена лінійним рівнянням $y = Bx + A$, система має такий вигляд:

$$\begin{cases} B \sum_{i=1}^n x_i^2 + A \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ B \sum_{i=1}^n x_i + An = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (5.2)$$

Регресивна і залишкова суми квадратів

Для оцінки похибки апроксимації використовуються дві суми квадратів. Регресивна сума квадратів різниць між значенням y_i і середнім значенням y

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (y))^2. \quad (5.3)$$

Таким чином, ця величина є мірою розкиду даних щодо середнього значення.

Залишкова сума квадратів дорівнює сумі квадратів різниць між реальними і прогнозованими значеннями y :

$$\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2. \quad (5.4)$$

Ця величина є мірою розкиду даних щодо лінії регресії.

У MS Excel апроксимація експериментальних даних здійснюється шляхом побудови їх графіка або точкового графіка з наступним підбором відповідної апроксимуючої функції (лінії тренда).

Ступінь близькості апроксимації експериментальних даних обраною функцією оцінюється коефіцієнтом детермінації R^2 . Таким чином, якщо є декілька відповідних варіантів типів апроксимуючих функцій, можна вибрати функцію з великим коефіцієнтом детермінації, (таким, що прагне до 1).

Коефіцієнт детермінації

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (5.5)$$

де через $\bar{y}$ позначене середнє значення $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.

Приклад виконання роботи

Завдання 5.1. Знайти коефіцієнти лінійної апроксимуючої функції $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$, заданої розв'язком СЛАР (табл. 5.2).

Знайти регресивну та залишкову суми квадратів, коефіцієнт детермінації; побудувати в одній системі координат точковий графік заданої функції $y = f(x)$ і лінійної апроксимуючої функції $y = F(x)$.

Таблиця 5.2

x_i	1,5	2,5	4,0	4,5	5,5	6,5	7,5	8,0	9,5	10,0
y_i	1,1	2,2	3,3	4,4	5,5	4,7	3,6	2,7	1,9	1,4

Розв'язання

1. Апроксимуюча лінійна функція має вигляд $y = Bx + A$. Для знаходження невідомих коефіцієнтів A і B необхідно розв'язати СЛАР (5.2). Необхідно скласти таблицю для обчислення коефіцієнтів СЛАР; знайти матрицю коефіцієнтів системи рівнянь A_1 і стовпець правих частин рівнянь B_1 (рис. 5.1).

	A	B	C	D	E	F
1			Аппроксимация линейной функцией			
2	i	x_i	y_i	x_i²	y_ix_i	
3	1	1,5	1,1	2,25	1,65	
4	2	2,5	2,2	6,25	5,5	
5	3	4	3,3	16	13,2	
6	4	4,5	4,4	20,25	19,8	
7	5	5,5	5,5	30,25	30,25	
8	6	6,5	4,7	42,25	30,55	
9	7	7,5	3,6	56,25	27	
10	8	8	2,7	64	21,6	
11	9	9,5	1,9	90,25	18,05	
12	10	10	1,4	100	14	
13	Сумма	59,5	30,8	427,75	181,6	
14			Система линейных уравнений			
15	A1=	427,75	59,5		B1=	181,6
16		59,5	10			30,8
17						
18	A1⁻¹ =	0,013564	-0,0807053		X=	-0,022516
19		-0,08071	0,58019668			3,213971
20		y=-0,0225161x+3,213971				

Рис. 5.1. Знаходження коефіцієнтів лінійної апроксимуючої функції шляхом розв'язання СЛАР

Отримана система рівнянь

$$\begin{cases} 427,75B + 59,5A = 181,6; \\ 59,5B + 10A = 30,8 \end{cases}$$

розв'язується методом оберненої матриці. Розв'язком системи є вектор $X = \{x_1, x_2\}$, де $x_1 = B$; $x_2 = A$.

Отже, шукана формула має вигляд $y = -0,022516x + 3,213971$.

2. Регресивна і залишкова суми квадратів, коефіцієнт детермінації знаходяться з виразів (5.3)–(5.5) (рис. 5.2).

3. Побудова в одній системі координат точкового графіка заданої функції $y = f(x)$ і лінійної апроксимуючої функції $y = F(x)$ показана на рис. 5.3.

	A	B	C	D	E	F
21						
22		x_i	y_i	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$	$(y_i - \text{ср.знач. } y_i)^2$
23		1,5	1,1	3,180196677	4,327218214	3,9204
24		2,5	2,2	3,15768057	0,917152074	0,7744
25		4	3,3	3,123906409	0,031008953	0,0484
26		4,5	4,4	3,112648355	1,657274257	1,7424
27		5,5	5,5	3,090132248	5,807462581	5,8564
28		6,5	4,7	3,067616141	2,664677063	2,6244
29		7,5	3,6	3,045100034	0,307913972	0,2704
30		8	2,7	3,03384198	0,111450468	0,1444
31		9,5	1,9	3,00006782	1,210149208	1,3924
32		10	1,4	2,988809766	2,524316473	2,8224
33		Сумма			19,55862326	19,596
34					Остаточн.сумма кв.	Регресс.сумма кв
35		ср.знач. y_i =	=СРЗНАЧ(С23:С32)		3,08	
36		R^2 =	=1-ЕЗЗ/Е33	0,001097366	Коефф. детерминации	

Рис. 5.2. Знаходження регресивної та залишкової сум квадратів, коефіцієнта детермінації

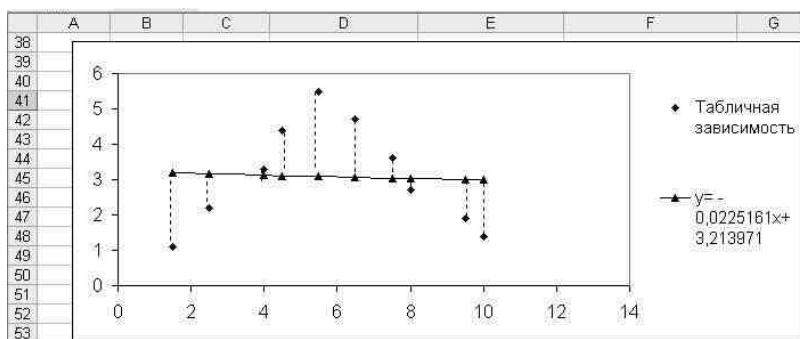


Рис. 5.3. Побудова точкового графіка функції $y = f(x)$ і лінійної апроксимуючої функції $y = F(x)$

Завдання 5.2. Знайти коефіцієнти квадратичної апроксимуючої функції $y = F(x)$ для функції $y = f(x)$, заданої розв'язком СЛАР (див. табл. 5.2).

Знайти регресивну та залишкову суми квадратів, коефіцієнт детермінації; побудувати в одній системі координат точковий графік заданої функції $y = f(x)$ і квадратичної апроксимуючої функції $y = F(x)$.

Розв'язання

1. Апроксимуюча квадратична функція $y = Cx^2 + Bx + A$. Для знаходження невідомих коефіцієнтів A і B необхідно розв'язати наступну си-

стему рівнянь:

$$\begin{cases} C \sum_{i=1}^n x_i^4 + B \sum_{i=1}^n x_i^3 + A \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i; \\ C \sum_{i=1}^n x_i^3 + B \sum_{i=1}^n x_i^2 + A \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ C \sum_{i=1}^n x_i^2 + B \sum_{i=1}^n x_i + A n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases}$$

Необхідно скласти таблицю для обчислення коефіцієнтів СЛАР; знайти матрицю коефіцієнтів системи рівнянь A_1 і стовпець правих частин рівнянь B_1 (рис. 5.4). Отримана система рівнянь розв'язується методом оберненої матриці.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Аппроксимация квадратичной функции							
2	i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
3	1	1,5	1,1	2,25	3,375	5,0625	1,65	2,475
4	2	2,5	2,2	6,25	15,625	39,0625	5,5	13,75
5	3	4	3,3	16	64	256	13,2	52,8
6	4	4,5	4,4	20,25	91,125	410,0625	19,8	89,1
7	5	5,5	5,5	30,25	166,375	915,0625	30,25	166,375
8	6	6,5	4,7	42,25	274,625	1785,0625	30,55	198,575
9	7	7,5	3,6	56,25	421,875	3164,0625	27	202,5
10	8	8	2,7	64	512	4096	21,6	172,8
11	9	9,5	1,9	90,25	857,375	8145,0625	18,05	171,475
12	10	10	1,4	100	1000	10000	14	140
13	Сумма	59,5	30,8	427,75	3406,375	28815,4375	181,6	1209,85
14	Система линейных уравнений							
15	$A1=$	28815,44	3406,375	427,75	$B1=$	1209,85		
16		3406,375	427,75	59,5		181,6		
17		427,75	59,5	10		30,8		
18								
19	$A1^{-1}=$	0,002188	-0,0255581	0,058487459	$X=$	-0,193024526		
20		-0,02556	0,31213583	-0,763961407		2,232414869		
21		0,058487	-0,7639614	2,143769335		-1,946244352		
22								
23		$y = -0,19302x^2 + 2,23422x - 1,94624$						

Рис. 5.4. Знаходження матриці коефіцієнтів системи рівнянь A_1 і стовпця правих частин рівнянь B_1

Розв'язком системи є вектор $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, де $x_1 = C$; $x_2 = B$; $x_3 = A$. Отже, шукана формула має вигляд $y = -0,19302x^2 + 2,23422x - 1,94624$.

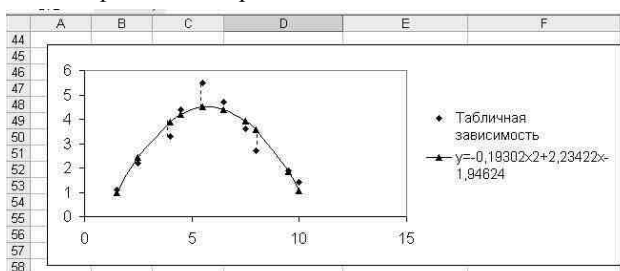
2. Регресивна і залишкова суми квадратів, коефіцієнт детермінації знаходяться з виразів (5.3)–(5.5) (рис. 5.5).

3. Побудова в одній системі координат точкового графіка заданої функції $y = f(x)$ і квадратичної апроксимуючої функції $y = F(x)$ показана на рис. 5.6.

E41	fx = CPЗНАЧ(C28:C37)				
	A	B	C	D	E
26					F
27		x_i	y_i	$y(x_i)$	$(y_i - y(x_i))^2$
28		1,5	1,1	0,968072767	0,017404795
29		2,5	2,2	2,428389531	0,052161778
30		4	3,3	3,895022701	0,354052015
31		4,5	4,4	4,190875899	0,04373289
32		5,5	5,5	4,493045503	1,013957359
33		6,5	4,7	4,409166055	0,084584384
34		7,5	3,6	3,939237553	0,115082117
35		8	2,7	3,559504908	0,738748686
36		9,5	1,9	1,841233391	0,003453514
37		10	1,4	1,075451693	0,105331604
38		Сумма			2,528509142
39				Остаточн.сумма кв.	Регресс.сумма кв.
40					
41		ср.знач. y_i	=CPЗНАЧ(C28:C37)	3,08	
42		R^2	=1-E38/F38	0,870968098	Коефф. детерминации

Рис. 5.5. Знаходження регресивної та залишкової сум квадратів і коефіцієнта детермінації

Рис. 5.6. Побудова точкового графіка функції $y = f(x)$ і квадратичної апроксимуючої функції $y = F(x)$



Завдання 5.3. Побудувати точковий графік заданої функції $y = f(x)$ і, скориставшись властивістю діаграм створювати лінії тренда, додати лінійну лінію тренда і степеневу (ступінь = 2). За отриманими результатами побудувати порівняльну таблицю і зробити висновки.

Розв'язання

1. В комірки **A2:A10** ввести задані значення x_i , в комірки **B2:B10** – значення y_i .

2. Побудувати точковий графік заданої функції $y = f(x)$.

3. Вибрати команду меню **"Діаграма–Добавить линию тренда"**. У діалоговому вікні на вкладці **"Тип"** вибрати **"Линейный"**.

4. На вкладці **"Параметры"** встановити прапорці **"показывать уравнение на диаграмме"** і **"поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации"**.

5. Вибрати команду меню **"Діаграма–Добавить линию тренда"**. У діалоговому вікні на вкладці **"Тип"** вибрати **"Полиномиальный"** і установити в полі **"Степень"** значення **"2"** (квадратична функція).

6. На вкладці **"Параметры"** встановити прапорці **"показывать уравнение на диаграмме"** і **"поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации"**.

нение на діаграмме" і "поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации" (рис. 5.7).

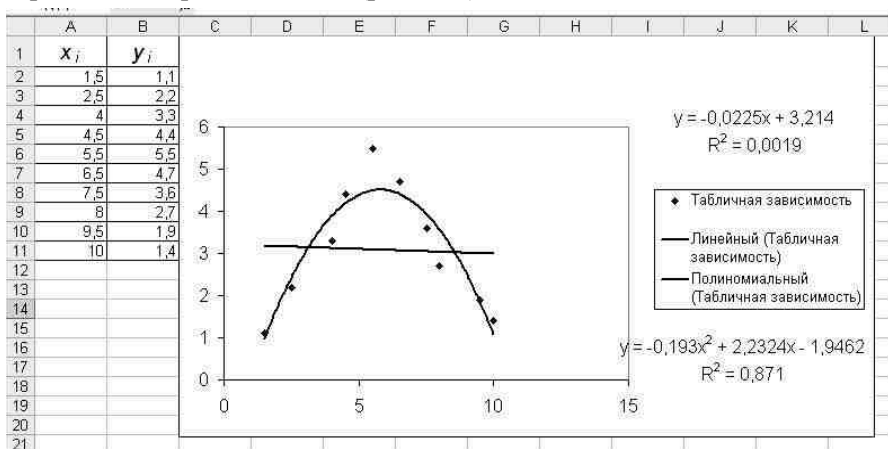


Рис. 5.7. Приклад побудови точкового графіка функції $y=f(x)$

7. Результати розрахунків звести в таблицю. За зразок взяти табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Тип функції $F(x)$	Метод	Коефіцієнт			Суми квадратів		Коефіцієнт детермінації R^2
		A	B	C	рег-ресив-на	залиш-кова	
Лінійна	СЛАР	3,21397	-0,022516		19,596	19,559	0,0011
	Лінія тренда	3,214	-0,0225				0,0019
Квадратична	СЛАР	-1,94624	2,23422	-0,19302	19,586	2,529	0,8708
	Лінія тренда	-1,9462	2,2324	-0,193			0,871

Контрольні питання і завдання

1. Задача апроксимації та її складові частини.
2. Методи визначення параметрів при відомому виді залежності.
3. Методи диференціального числення, використовувані при розв'язанні задач апроксимації.
4. Назвіть і охарактеризуйте функції апроксимації в MS Excel.
5. Ступінь близькості апроксимації даних обраною функцією.

Робота № 6

Лінійне і дискретне програмування. Розв'язання задач оптимізації за допомогою надбудови "Поиск решения"

Мета роботи: вивчити можливості засобів MS Excel для розв'язання задач оптимізації; набути навички розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Завдання

Завдання 6.1. Підприємство випускає два типи електродвигунів – *A* і *B*. Їх виробництво обмежене наявністю сировини (електротехнічної сталі) і часом збирання. Для кожного електродвигуна типу *A* потрібно 3 кг електротехнічної сталі, для типу *B* 4 кг. Підприємство може одержувати від постачальників до 1700 кг сировини на тиждень. Для кожного електродвигуна типу *A* потрібно 12 хв на збирання, для типу *B* 30 хв, а на тиждень відводиться 160 год. Скільки електродвигунів кожного типу вигідно випускати підприємству за тиждень, якщо кожен виріб типу *A* приносить 2 грн прибутку, а типу *B* 4 грн прибутку?

У табл. 6.1 наведено приклад подання зведених даних, а у табл. 6.2 записані дані для варіантів.

Таблиця 6.1

№ з/п	Найменування статті	Електродвигуни	
		Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>
1	Електротехнічна сталь, кг	3	4
2	Час збирання, хв	12	30
3	Прибуток, грн	2	4
4	Час збирання протягом тижня, год	160	
5	Кількість електротехнічної сталі за тиждень, кг	1700	

Таблиця 6.2

Варіант № 1			Варіант № 16		
№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>	№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>
1	5	6	1	10	20
2	27	46	2	90	130
3	4	7	3	7	12
4	160		4	160	
5	1900		5	3600	

Продовж. табл. 6.2

Варіант № 2			Варіант № 17		
№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>	№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>
1	40	60	1	6	16
2	25	45	2	35	65
3	12	9	3	5	9
4	130		4	120	
5	2000		5	2300	
Варіант № 3			Варіант № 18		
№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>	№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>
1	31	41	1	14	18
2	52	70	2	39	49
3	12	14	3	4	7
4	160		4	110	
5	4700		5	1900	
Варіант № 4			Варіант № 19		
№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>	№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>
1	22	33	1	19	37
2	99	127	2	75	211
3	8	13	3	11	16
4	120		4	130	
5	3100		5	4100	
Варіант № 5			Варіант № 20		
№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>	№ з/п	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>
1	13	27	1	17	42
2	85	138	2	99	265
3	16	19	3	11	32
4	130		4	160	
5	3400		5	4300	

Продовж. табл. 6.2

Варіант № 6			Варіант № 21		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	36	41	1	5	18
2	110	155	2	77	134
3	18	9	3	11	17
4	150		4	110	
5	3700		5	2800	
Варіант № 7			Варіант № 22		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	15	25	1	26	3
2	33	77	2	127	15
3	9	17	3	23	2
4	120		4	160	
5	2900		5	2100	
Варіант № 8			Варіант № 23		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	11	31	1	34	51
2	57	70	2	147	240
3	9	20	3	27	39
4	130		4	150	
5	2500		5	4200	
Варіант № 9			Варіант № 24		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	7	10	1	4	9
2	34	51	2	19	45
3	14	21	3	3	6
4	150		4	110	
5	3600		5	1100	

Продовж. табл. 6.2

Варіант № 10			Варіант № 25		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	13	14	1	25	45
2	50	20	2	120	150
3	12	14	3	40	70
4	130		4	160	
5	2700		5	7500	
Варіант № 11			Варіант № 26		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	71	94	1	8	15
2	85	120	2	55	70
3	20	47	3	17	25
4	160		4	110	
5	9000		5	2100	
Варіант № 12			Варіант № 27		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	2	15	1	37	42
2	46	62	2	23	40
3	5	9	3	11	27
4	140		4	150	
5	2300		5	5500	
Варіант № 13			Варіант № 28		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	5	9	1	20	35
2	60	20	2	55	90
3	8	12	3	31	27
4	130		4	160	
5	1100		5	4000	

Продовж. табл. 6.2

Варіант № 14			Варіант № 29		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	13	14	1	7	10
2	47	29	2	41	14
3	6	12	3	11	7
4	160		4	180	
5	1500		5	3000	
Варіант № 15			Варіант № 30		
№ з/п	Тип А	Тип В	№ з/п	Тип А	Тип В
1	10	19	1	5	9
2	33	15	2	35	50
3	6	14	3	14	25
4	150		4	140	
5	2500		5	3000	

Завдання 6.2. Розв'язати систему рівнянь (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
1	$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 = 4; \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$	11	$\begin{cases} x^4 + y^4 = 82; \\ xy = 3 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 4; \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 5x^2 + 7y^2 = 6; \\ 4x - 5y = 4 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7; \\ x + y = 5 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 5x^2 + 6y^2 = 3; \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3; \\ x + 6y = 10 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy = 12; \\ 2(x + y)^2 - y^2 = 14 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 4; \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 7x^2 + 3y^2 = 4; \\ 8x + 4y = 2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35; \\ x + y = 5 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 3; \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$
5	$\begin{cases} (\frac{x}{2} - 1)^2 + (\frac{y}{2} - 1)^2 = 16; \\ x = 4 + y \end{cases}$	15	$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 13; \\ x + y = 5 \end{cases}$	25	$\begin{cases} x + y = 7; \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$

Продовж. табл. 6.2

№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання	№ з/п	Завдання
6	$\begin{cases} \frac{1}{2x-y} + y = -5; \\ \frac{y}{2x-y} = 6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \frac{1}{x-y} + x = 1; \\ \frac{x}{x-y} = -2 \end{cases}$	26	$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}; \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 7x^2 + 5y^2 = 8; \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13; \\ x + y - \sqrt{xy} = 3 \end{cases}$	27	$\begin{cases} xy - y^3 = 1; \\ x^2 y + y = 5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} xy + x + y = 11; \\ x^2 y + xy^2 = 30 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7; \\ xy(x+y) = -2 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 2; \\ 2x + 7y = 3 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4(x-1)^2 + 5(y+1)^2 = 12; \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 3; \\ 3x + 8y = 4 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x + 2 y = 3; \\ 7x + 5y = 2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3(x-3)^2 + 5(y+5)^2 = 25; \\ x = 12 + 2y \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x^2 + 5y^2 = 3; \\ 5x + 9y = 3 \end{cases}$	30	$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0; \\ y - x - 1 \end{cases}$

Короткі теоретичні відомості

Багато проблем виробництва, проектування, прогнозування зводяться до розв'язання широкого класу задач оптимізації з використанням математичних методів. Типовими задачами такого плану є наступні: у виробництві – досягнення заданої якості суміші при найменших витратах; в управлінні підприємством – складання штатного розпису для досягнення найкращих результатів при найменших витратах коштів; інші різноманітні задачі оптимального розподілу ресурсів та оптимального проектування і т. д.

Задача оптимізації в загальному вигляді наведена у табл. 6.4.

Розв'язок задачі (пп. 1–3), що задовольняє всі обмеження і граничні умови, називається *припустимим*. Важливою характеристикою задачі оптимізації є її *розмірність*, яка визначається числом змінних n і числом обмежень m . При $n < m$ задачі розв'язків не мають.

Необхідною вимогою задач оптимізації є умова $n < m$. Систему рівнянь, для яких $n = m$, розглядають як задачу оптимізації, що має один припустимий розв'язок (її можна розв'язувати як звичайну задачу оптимізації, призначаючи як цільову функцію будь-яку змінну).

Таким чином, задача має оптимальний розв'язок, якщо вона задовольняє дві вимоги:

має більше, ніж один розв'язок, тобто існують припустимі розв'язки;

має критерій, який показує, у якому розумінні прийнятий розв'язок повинен бути оптимальним, тобто найкращим із припустимих.

Таблиця 6.4

№ з/п	Назва функції	Математичний запис	Опис
1	Цільова (критерій оптимізації)	$F = f(x_j) \rightarrow \max(\min, \text{const})$ $j = \overline{1, n}$	Показує, який розв'язок повинен бути оптимальним, тобто найкращим. Можливі три види цільової функції: максимізація, мінімізація, призначення заданого значення
2	Обмеження	$g_i(x_j) \leq (=, \geq) b_i;$ $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n};$ $x_j = \overline{1}, k \leq n$ – цілі для задач цілочислового програмування; $0 \leq x_j \leq 1, j = \overline{1, k}$ – цілі для задач з булевими змінними	Установлюють залежності (одно- і двосторонні) між змінними. При розв'язанні задач двостороннє обмеження записується у вигляді двох односторонніх
3	Граничні умови	$d_j \leq x_j \leq D_j, j = \overline{1, n}$	Показують, у яких межах можуть бути значення шуканих змінних в оптимальному розв'язку

У MS Excel існує можливість за допомогою надбудови "**Поиск решения**" знайти розв'язок, оптимальний у певному розумінні при декількох вхідних значеннях і наборі обмежень на розв'язки. Диспетчер сценаріїв здатний запам'ятати кілька розв'язків, знайдених даним засобом, і згенерувати на цій основі звіт. За допомогою надбудови "**Поиск решения**" можна розв'язувати як лінійні (задачі лінійного, цілочислового і стохастичного програмування), так і нелінійні (нелінійного програмування) задачі.

Розв'язання задач оптимізації (лінійне програмування) за допомо-

гою надбудови "**Поиск решения**" можна розділити на декілька етапів:

1. *Побудова математичної моделі.* На даному етапі аналізуються: вихідні дані (детерміновані або випадкові); шукані змінні (неперервні або дискретні); межі, у яких можуть знаходитися значення шуканих величин; залежності між змінними (лінійні або нелінійні); критерії, за якими необхідно знаходити оптимальний розв'язок. Сюди ж входить подолання несумісності, а також необмеженості цільової функції (при максимізації цільової функції область припустимих розв'язків повинна бути обмежена зверху, при мінімізації – обмежена знизу).

2. *Розв'язання задачі за допомогою надбудови "**Поиск решения**".*

3. *Аналіз розв'язання задачі оптимізації.* Звіти про пошук розв'язку бувають трьох типів:

"**Результаты**", що містить остаточні значення параметрів цільової функції й обмежень;

"**Устойчивость**", який показує результати малих змін параметрів пошуку розв'язку;

"**Пределы**", який показує зміни розв'язку при почерговій максимізації і мінімізації кожної змінної при незмінних інших змінних.

*Розв'язання системи нелінійних рівнянь із двома невідомими (нелінійне програмування) за допомогою надбудови "**Поиск решения**"*

Система нелінійних рівнянь із двома невідомими в загальному вигляді може бути представлена так:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = C_1; \\ f_2(x, y) = C_2, \end{cases} \quad (6.1)$$

де $f_i(x, y)$, $i = 1; 2$ – нелінійна функція від змінних x і y ; C_i , $i = 1; 2$ – довільна стала. Відомо, що пара (x, y) є розв'язком системи рівнянь (6.1) тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком наступного нелінійного рівняння з двома невідомими:

$$(f_1(x, y) - C_1)^2 + (f_2(x, y) - C_2)^2 = 0. \quad (6.2)$$

З іншого боку, розв'язки системи (6.1) – це точки перетину кривих $f_1(x, y) = C_1$ і $f_2(x, y) = C_2$ на площині xOy . Звідси формулюється метод знаходження коренів системи нелінійних рівнянь:

1. Визначити (хоча б приблизно) інтервал існування розв'язків системи рівняння (6.1) або (6.2). Тут необхідно враховувати вид рівнянь, що входять у систему, область визначення кожного з них та ін. Іноді застосовується підбір початкового наближеного розв'язку.

2. Протабулювати розв'язок рівняння (6.2) за змінними x і y на обраному інтервалі або побудувати графіки функцій $f_1(x, y) = C_1$ і $f_2(x, y) = C_2$ (система (6.1)).

3. Локалізувати передбачувані корені системи рівнянь – знайти декілька мінімальних значень з таблиці табулювання коренів рівняння (6.2) або визначити точки перетину кривих, що входять у систему (6.1).

4. Знайти корені системи рівнянь (6.1) за допомогою надбудови "**Поиск решения**".

Приклад виконання роботи

Завдання 6.1. Підприємство випускає два типи електродвигунів – A і B . Їх виробництво обмежене наявністю сировини (електротехнічної сталі) і часом збирання. Для кожного електродвигуна типу A потрібно 3 кг електротехнічної сталі, для типу B 4 кг. Підприємство може одержувати від постачальників до 1700 кг сировини на тиждень. Для кожного електродвигуна типу A потрібно 12 хв на збирання, для типу B 30 хв, а на тиждень відводиться 160 год. Скільки електродвигунів кожного типу вигідно випускати підприємству за тиждень, якщо кожен виріб типу A приносить 2 грн прибутку, а типу B 4 грн прибутку?

Розв'язання

1. Скласти математичну модель, де x – кількість електродвигунів типу A ; y – типу B . Прибуток від електродвигунів, який дорівнює $2x + 4y$ грн, потрібно максимізувати. Функція, для якої шукається екстремум, називається *цільовою*. Безмежному збільшенню кількості виробів перешкоджають *обмеження*. Обмежено кількість сировини (до 1700 кг) для електродвигунів, тому $2x + 4y \leq 1700$; обмежено час збирання (не більше ніж 160 год), тому $0,2x + 0,5y \leq 160$. Крім того, кількість виробів не від'ємне число, тому $x \geq 0, y \geq 0$ (рис. 6.1).

Поставлена задача оптимізації описується наступним чином:

$$\begin{cases} 2x + 4y \rightarrow \max; \\ 3x + 4y \leq 1700; \\ 0,2x + 0,5y \leq 160; \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

2. Виділити комірку, в якій обчислюється цільова функція, і викликати надбудову "**Поиск решения**" ("**Сервис–Поиск решения**").

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	Электродвигатель типа А	0 х		
3	Электродвигатель типа В	0 у		
4				
5	Целевая функция			
6	Прибыль	0 =2*х+4*у		
7				
8	Ограничения			
9	Материал	0 =3*х+4*у	<=1700	
10	Время сборки	0 =0,2*х+0,5*у	<=160	

Рис. 6.1. Подання змінних цільової функції та обмежень

У діалоговому вікні в полі введення "**Установить целевую ячейку:**" вже знаходиться адреса комірки з цільовою функцією **\$B\$6**. Встановити перемикач "**Равной максимальному значению**". Перейти до поля введення "**Изменяя ячейку:**". У нашому випадку достатньо натиснути кнопку "**Предположить**" і в полі введення з'явиться адреса блоку **\$B\$2:\$B\$3**.

3. Перейти до введення обмежень. Натиснути кнопку "**Добавить**". З'явиться діалогове вікно "**Добавление ограничения**". У полі введення "**Ссылка на ячейку:**" вказати **\$B\$9**. Праворуч розташований випадаючий список з умовними операторами. Вибрати умову "**<=**". У поле введення "**Ограничение:**" ввести число 1700. Аналогічно ввести друге обмеження. Введення обмежень закінчене, натиснути кнопку "**ОК**".

4. Натиснути кнопку "**Параметры**". Нічого не змінюючи, встановити два прапорці "*линейная модель*" і "*неотрицательные значения*" (для змінних x і y). Натиснути "**ОК**".

5. Натиснути кнопку "**Выполнить**". З'явиться діалогове вікно "**Результаты поиска решения**". У ньому можна прочитати повідомлення "**Решение найдено...**". Вибрати варіант "**Сохранить найденное решение**" і вивести такі звіти: за результатами, стійкістю та межами. Натиснути "**ОК**".

6. У комірках x і y з'являться оптимальні значення випуску електродвигунів за тиждень: типу A – 300 шт., типу B – 200 шт. Цільова функція досягне значення 1400.

7. **Звіт за результатами пошуку розв'язку.** Таблиця "**Целевая ячейка**" виводить зведення про цільову функцію; таблиця "**Изменяемые ячейки**" показує значення шуканих змінних, отриманих у результаті розв'язання задачі; таблиця "**Ограничения**" відображає результати оптимального розв'язку для обмежень і для граничних умов (рис. 6.2).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по результатам						
2	Рабочий лист: [Книга1]Лист1						
3	Отчет создан: 02.08.2006 14:01:00						
4							
5							
6	Целевая ячейка (Максимум)						
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
8	\$B\$6	Прибыль	1400	1400			
9							
10							
11	Изменяемые ячейки						
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат			
13	\$B\$2	Электродвигатель типа A	300	300			
14	\$B\$3	Электродвигатель типа B	200	200			
15							
16							
17	Ограничения						
18	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	
19	\$B\$9	Материал	1700	\$B\$9<=1700	связанное	0	
20	\$B\$10	Время сборки	160	\$B\$10<=160	связанное	0	

Рис. 6.2. Звіт за результатами пошуку розв'язку

У полі "Формула" наведені залежності, що були введені у вікно "Поиск решения", у полі "Разница" – величини використаного матеріалу. При повному використанні матеріалу в полі "Статус" зазначається "связанное", при неповному – "не связан". Для граничних умов наводяться аналогічні величини з тією лише різницею, що замість величини невикористаного продукту показана різниця між значенням змінної у знайденому оптимальному розв'язку і заданою для неї граничною умовою.

8. *Звіт за стійкістю пошуку розв'язку.* У таблиці "Изменяемые ячейки" наводиться результат розв'язання задачі. В таблиці "Ограничения" виводяться значення для обмежень, при яких зберігається оптимальний набір змінних, які входять до оптимального розв'язку (рис. 6.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Книга1]Лист1							
3	Отчет создан: 02.08.2006 14:01:00							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7								
8	Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
9	\$B\$2	Электродвигатель типа А	300	0	2	1	0,4	
10	\$B\$3	Электродвигатель типа В	200	0	4	1	1,333333333	
11								
12	Ограничения							
13								
14	Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
15	\$B\$9	Материал	1700	0,295714286	1700	700	420	
16	\$B\$10	Время сборки	160	5,714285714	160	52,5	46,66666667	
17								

Рис. 6.3. Звіт за стійкістю пошуку розв'язку

9. *Звіт за межами пошуку розв'язку.* Показує, в яких межах може змінюватися кількість матеріалів, що увійшли до оптимального розв'язку, при збереженні його структури; наводяться значення змінних в оптимальному розв'язку, а також нижні і верхні межі зміни значень змінних; указуються значення цільової функції на верхній і нижній межах при випуску даного типу продукції (рис. 6.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J																											
1	Microsoft Excel 10.0 Отчет по пределам																																				
2	Рабочий лист: [Книга1]Отчет по пределам 2																																				
3	Отчет создан: 02.08.2006 14:01:00																																				
4																																					
5																																					
6																																					
7	<table><thead><tr><th colspan="3">Целевое</th></tr><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Значение</th></tr></thead><tbody><tr><td>\$B\$6</td><td>Прибыль</td><td>1400</td></tr></tbody></table>										Целевое			Ячейка	Имя	Значение	\$B\$6	Прибыль	1400																		
Целевое																																					
Ячейка	Имя	Значение																																			
\$B\$6	Прибыль	1400																																			
8																																					
9																																					
10																																					
11																																					
12	<table><thead><tr><th colspan="3">Изменяемое</th><th>Нижний</th><th>Целевой</th><th>Верхний</th></tr><tr><th>Ячейка</th><th>Имя</th><th>Значение</th><th>предел</th><th>результат</th><th>предел</th><th>результат</th></tr></thead><tbody><tr><td>\$B\$2</td><td>Электродвигатель типа А</td><td>300</td><td>0</td><td>800</td><td>300</td><td>1400</td></tr><tr><td>\$B\$3</td><td>Электродвигатель типа В</td><td>200</td><td>0</td><td>600</td><td>200</td><td>1400</td></tr></tbody></table>										Изменяемое			Нижний	Целевой	Верхний	Ячейка	Имя	Значение	предел	результат	предел	результат	\$B\$2	Электродвигатель типа А	300	0	800	300	1400	\$B\$3	Электродвигатель типа В	200	0	600	200	1400
Изменяемое			Нижний	Целевой	Верхний																																
Ячейка	Имя	Значение	предел	результат	предел	результат																															
\$B\$2	Электродвигатель типа А	300	0	800	300	1400																															
\$B\$3	Электродвигатель типа В	200	0	600	200	1400																															
13																																					
14																																					
15																																					

Рис. 6.4. Звіт за межами пошуку розв'язку

Завдання 6.2. Розв'язати систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4; \\ 5x + 4y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Визначення цільової функції

$$F = ((x-1)^2 + (y-1)^2 - 4)^2 + (5x + 4y - 2)^2 = 0.$$

2. Виходячи з графіків рівнянь, інтервал локалізації коренів визначається в межах від -3 до 3 (рис. 6.5). Комірки **B3:B43** містять значення *x*. Формули для побудови графіків наведені у табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Комірка	Формула
C3	=-1+КОРІНЬ(4-(B3-1)^2;
D3	=-1-КОРІНЬ(4-(B3-1)^2;
E3	=(2-5*B3)/4

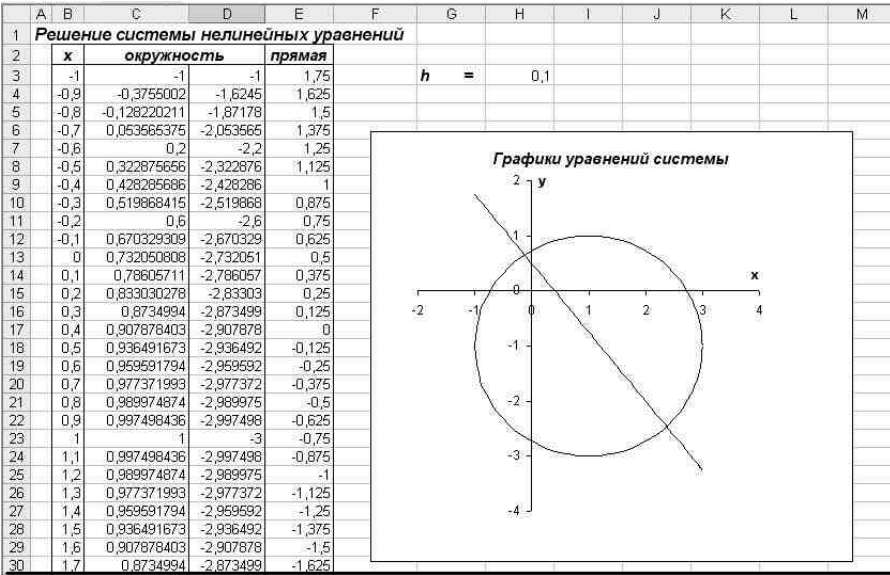


Рис. 6.5. Графічне зображення системи нелінійних рівнянь

3. Протабулювати цільову функцію на відрізку $[-3; 3]$ з кроком 0,5 (рис. 6.6).

	B47		= ((A47-1)^2+(B\$46+1)^2-4)^2+(5*A47+4*B\$46-2)^2												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
44															
45															
46			3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
47	-3	1097	932,0625	794	679,0625	585	511,0625	458	428,0625	425	454,0625	522	637,0625	809	932,0625
48	-2,5	852,3125	710,5	591,8125	492,5	410,3125	344,5	295,8125	266,5	260,3125	282,5	339,8125	440,5	594,3125	710,5
49	-2	657	536,5625	436	351,5625	281	223,5625	180	152,5625	145	162,5625	212	301,5625	441	536,5625
50	-1,5	501,3125	400,5	316,8125	246,5	187,3125	138,5	100,8125	76,5	69,3125	84,5	128,8125	210,5	339,3125	400,5
51	-1	377	294,0625	226	169,0625	121	81,0625	50	30,0625	25	40,0625	82	159,0625	281	377
52	-0,5	277,3125	210,5	156,8125	112,5	75,3125	44,5	20,8125	6,5	5,3125	22,5	64,8125	140,5	259,3125	277,3125
53	0	197	144,5625	104	71,5625	45	23,5625	8	0,5625	5	26,5625	72	149,5625	269	197
54	0,5	132,3125	92,5	63,8125	42,5	26,3125	14,5	7,8125	8,5	20,3125	48,5	99,8125	182,5	306,3125	132,3125
55	1	81	52,0625	34	23,0625	17	15,0625	18	28,0625	49	86,0625	146	237,0625	369	81
56	1,5	42,3125	22,5	13,8125	12,5	16,3125	24,5	37,8125	59,5	90,3125	138,5	209,8125	312,5	456,3125	42,3125
57	2	17	4,5625	4	11,5625	25	43,5625	68	100,5625	145	206,5625	292	409,5625	569	17
58	2,5	7,3125	0,5	6,8125	22,5	45,3125	74,5	110,8125	156,5	215,3125	292,5	394,8125	530,5	709,3125	7,3125
59	3	17	14,0625	26	49,0625	81	121,0625	170	230,0625	305	400,0625	522	679,0625	881	17
60															

Рис. 6.6. Табулювання функції для знаходження розв'язків системи рівнянь

4. Локалізація коренів цільової функції:

комірки **A47:A59** містять значення x на відрізку $[-3; 3]$ з кроком 0,5;

комірки **B46:N46** містять значення y на відрізку $[-3; 3]$ з кроком 0,5;

формула для комірки **B47** $=((\$A47-1)^2+(\$B\$46+1)^2-4)^2+(5*\$A47+4*\$B\$46-2)^2$ (копіюється на діапазон **B47:N59**);

формула для комірки **B62** $=\text{МІН}(B47:Y60)$ копіюється на діапазон **B62:N62** (рис. 6.7).

N62		= (МИН(N47:N60))													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
44															
45															
46															
47		-3	1097	932,0625	794	679,0625	585	511,0625	458	428,0625	425	454,0625	522	637,0625	809
48		-2,5	852,3125	710,5	591,8125	492,5	410,3125	344,5	295,8125	266,5	260,3125	282,5	339,8125	440,5	594,3125
49		-2	657	536,5625	436	351,5625	281	223,5625	180	152,5625	145	162,5625	212	301,5625	441
50		-1,5	501,3125	400,5	316,8125	246,5	187,3125	138,5	100,8125	76,5	69,3125	84,5	128,8125	210,5	339,3125
51		-1	377	294,0625	226	189,0625	121	81,0625	50	30,0625	25	40,0625	82	159,0625	281
52		-0,5	277,3125	210,5	158,8125	112,5	75,3125	44,5	20,8125	6,5	5,3125	22,5	64,8125	140,5	259,3125
53		0	197	144,5625	104	71,5625	45	23,5625	8	0,5625	5	26,5625	72	149,5625	269
54		0,5	132,3125	92,5	63,8125	42,5	26,3125	14,5	7,8125	8,5	20,3125	48,5	99,8125	182,5	306,3125
55		1	81	52,0625	34	23,0625	17	15,0625	18	28,0625	49	86,0625	146	237,0625	369
56		1,5	42,3125	22,5	13,8125	12,5	16,3125	24,5	37,8125	59,5	90,3125	138,5	209,8125	312,5	466,3125
57		2	17	4,5625	4	11,5625	25	43,5625	68	100,5625	145	206,5625	292	409,5625	569
58		2,5	7,3125	0,5	6,8125	22,5	45,3125	74,5	110,8125	156,5	215,3125	292,5	394,8125	530,5	709,3125
59		3	17	14,0625	26	49,0625	81	121,0625	170	230,0625	305	400,0625	522	679,0625	881
60															
61															
62		Min	7,3125	0,5	4	11,5625	16,3125	14,5	7,8125	0,5625	5	22,5	64,8125	140,5	259,3125

Рис. 6.7. Локалізація коренів системи рівнянь

Виходячи з результатів обчислень, визначаються наступні пари передбачуваних коренів рівняння: $(-2,5; -2,5)$, $(2; -2)$, $(0; 0,5)$ і $(0; 1)$.

5. Знайти корені цільової функції. Для цього необхідно помістити пари значень для передбачуваних коренів у комірки **D69:E72**, використо-

вуючи формулу $=((D69-1)^2+(E69+1)^2-4)^2+(5*D69+4*E69-2)^2$ (рис. 6.8).

G69	=((D69-1)^2+(E69+1)^2-4)^2+(5*D69+4*E69-2)^2						
	A	B	C	D	E	F	G
65							
66							
67	Предполагаемые значения корней уравнения						
68				x	y		Значения уравнения
69				2,5	-2,5		0,5
70				2	-2		4
71				0	0,5		0,5625
72				0	1		5
73							

Рис. 6.8. Підготовка листка робочої книги для знаходження коренів нелінійної системи рівнянь

6. За допомогою надбудови "**Поиск решения**" (у вікні "**Параметры поиска решения**" прапорець "*линейная модель*" повинен бути знятим) установити необхідні параметри для пошуку кореня цільової функції (рис. 6.9). Процедуру повторити для всіх наявних пар коренів.

G70	=((D70-1)^2+(E70+1)^2-4)^2+(5*D70+4*E70-2)^2						
	A	B	C	D	E	F	G
65							
66							
67	Предполагаемые значения корней уравнения						
68				x	y		Значения уравнения
69				2,367575	-2,45934		2,56434E-07
70				2,367553	-2,45933		2,42523E-07
71				-0,12356	0,654434		2,10512E-07
72				-0,12367	0,654577		6,80851E-08
73							

Рис. 6.9. Результати пошуку розв'язку для нелінійної системи рівнянь

Результати пошуку розв'язку дозволяють зробити висновок про те, що система має два розв'язки:

$(2,3675745; -2,4593424)$ і $(-0,123564; 0,65443422)$.

Контрольні питання і завдання

1. Постановка задачі оптимізації в загальному випадку.
2. Охарактеризуйте можливості MS Excel для розв'язання задач оптимізації.
3. Побудова математичної моделі задачі.
4. Розв'язання задачі за допомогою надбудови "**Поиск решения**".
5. Лінійне програмування: характеристика та області застосування.
6. Нелінійне програмування: переваги і недоліки.
7. Розв'язання системи нелінійних рівнянь із двома невідомими за допомогою засобу "**Поиск решения**".

Список використаної літератури

1. *Гарнаев А.* Использование MS Excel, VBA, Internet в экономике и финансах. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2001. – 647 с.
2. *Гельман В.Я.* Решение математических задач средствами Excel: Практикум. – С.Пб.: Питер, 2003. – 237 с.
3. *Долженков В.А., Колесников Ю.В.* Microsoft Excel 2002. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2003. – 1072 с.
4. *Лавренов С.М.* Excel: Сборник примеров и задач. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 336 с.
5. *Ларсен Рональд У.* Инженерные расчеты в Excel: Пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2002. – 544 с.
6. *Рудикова Л.В.* Microsoft Excel для студента. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2005. – 368 с.
7. *Шелест В.Д.* Программирование. – С.Пб.: БХВ-Петербург, 2002. – 592 с.

Навчальне видання

ВОЛЯНСЬКА Яна Богданівна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з курсу
"Обчислювальна техніка і програмування"

(українською мовою)

Редактор *О.Є. Вакула*
Комп'ютерна правка та верстка *О.М. Черевата*
Коректор *М.О. Паненко*

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 11.12.06. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 4,2. Обл.-вид. арк. 4,5.
Тираж 100 прим. Вид. № 33. Зам. № 327. Ціна договірна.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5



ДЛЯ НОТАТОК



ВИДАВНИЦТВО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ



Шановні панове!

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника у повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати ***підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки***, – ми до Ваших послуг.

© Національний університет кораблебудування

✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5,
видавництво НУК

☎ 8(0512) 47-83-86; 39-81-41; 39-73-39; fax 8(0512) 39-73-26;