МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

С. Д. Титов

Індивідуальні завдання з курсу

"МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ"

В двох частинах

Частина 1

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2007

УДК 517.8

Титов С.Д. Індивідуальні завдання з курсу "Математичне програмування": В 2 ч. – Миколаїв: НУК, 2007. – 52 с.

Кафедра вищої математики

Індивідуальні завдання містять типові задачі до розділів математичного програмування. Включають в себе алгебраїчний вступ, геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування, математичні моделі економічних задач, методи переходу до еквівалентних форм запису задач, основні теореми двоїстості в задачах лінійного програму-вання.

Рецензент канд. техн. наук, доц. О.О. Щеглов

Навчальне видання

ТИТОВ Сергій Дмитрович

Індивідуальні завдання з курсу

"МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ"

В двох частинах

Частина 1

(українською мовою)

Редактор *В.А. Стєкольщикова*
Комп'ютерна правка та верстка *О.М. Черевата*
Коректор *М.О. Паненко*

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2005 р.

Підписано до друку 01.03.07. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 3,1. Обл.-вид. арк. 3,3.
Тираж 100 прим. Вид. № 16. Зам. № 36. Ціна договірна.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5

ПЕРЕДМОВА

Кафедра вищої математики забезпечує викладання спеціального курсу математики для економістів "Математичне програмування". Робоча навчальна програма курсу акцентує увагу на поняттях, визначеннях та методах дисципліни з метою використання їх в практичній економічній діяльності.

Основні принципи "мистецтва" оптимізації економіко-математичних моделей та використання їх у розв'язуванні економічних задач подаються у лекційному та практичному курсах. Особливе значення має практичний курс, важливою складовою якого є типові розрахунки або індивідуальні завдання. За навчальною програмою університету вони об'єднані у лабораторний практикум і виконуються кожен другий тиждень четвертого семестру. Лабораторна робота включає в себе дві типові задачі. Згідно з номером групи (2 групи) та варіантам (30 варіантів) студент отримує поточне завдання, на виконання якого виділено два тижні. Виконання та захист робіт сприяють поглибленню знань та повторенню розділів курсу.

Лабораторний практикум включає в себе алгебраїчний вступ до математичного програмування та основні теореми і методи розв'язування задач лінійного програмування.

Видання представляє собою першу спробу забезпечення навчального процесу друкованим матеріалом з системи типових розрахунків з курсу математичного програмування для економічних спеціальностей.

Завдання № 1. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1. Метод повного виключення Жордана–Гаусса для розв'язування неквадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язати методом повного виключення у табличній формі методом Жордана–Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 + a_{16}x_6 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 + a_{36}x_6 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + a_{46}x_6 = b_4. \end{cases}$$

Знайти загальний розв'язок $X_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, обравши за базисні невідомі довільну їх комбінацію.

Записати частинний розв'язок X_0, надавши вільним невідомим нульові значення.

Вихідні дані задано розширеною матрицею коефіцієнтів

$$A^{\text{розш}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & b_4 \end{pmatrix}.$$

Вихідні дані завдання № 1.1

Група 1

Варіант № 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 & 1 & 15 \\ 2 & 1 & -1 & 10 & 13 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 & 6 & 0 & 22 \\ 2 & 1 & -2 & 14 & 14 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -6 & -5 & -2 & -12 \\ 2 & -2 & 3 & -12 & -3 & -3 & 33 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -8 & -9 & -3 & 11 \\ 2 & 1 & 3 & -6 & 9 & 0 & 36 \\ 1 & -2 & 1 & -6 & -5 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 3 & -10 & 1 & -2 & 34 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 & 6 & 10 & 22 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 10 & 11 & 29 \\ -3 & 2 & 1 & -6 & -5 & 3 & -12 \\ 2 & -2 & 3 & -12 & -3 & 12 & 33 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 12 & 10 & -6 & -6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 10 & 11 & 29 \\ -3 & -2 & 1 & -14 & -21 & -1 & -16 \\ 2 & -2 & 3 & -12 & -3 & 12 & 33 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 6

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 11 & 2 & 10 \\ -1 & 2 & 2 & -6 & 2 & -1 & 15 \\ 2 & -2 & 1 & -4 & -1 & -1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 & 6 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & -2 & 14 & 14 & 5 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & -6 & -5 & -2 & 12 \\ 2 & -2 & 3 & -12 & -3 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 8

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & -9 & -1 & -16 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 9 & 6 & 21 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -5 & 0 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 9

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -10 & 4 & -3 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 20 & 1 & 11 \\ -3 & -2 & 1 & -14 & -16 & -6 & 12 \\ 2 & -2 & -4 & 16 & -16 & 4 & -16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 & 16 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 20 & 1 & 11 \\ -3 & 2 & 1 & -6 & 0 & -2 & 12 \\ 2 & -2 & 3 & -12 & 12 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 14 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 11 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 7 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 8 & 7 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 13 \\ 2 & 2 & -1 & 6 & 15 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 13

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 9 & 20 & 5 & 26 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & 16 & 4 & 19 \\ 2 & 2 & -1 & 7 & 12 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 9 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 14 \\ 1 & 2 & -1 & 7 & 11 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 15

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 7 & 5 & -10 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 7 & 17 & 8 & 17 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5 & 5 & 14 \\ 3 & 2 & -1 & 11 & 19 & 1 & 22 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 16

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 & 12 & 8 & 14 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 8 & -3 & -9 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 10 & 28 \\ 2 & -1 & 2 & 9 & 20 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 17

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 & 24 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 4 & -4 & -16 \\ -3 & 2 & -1 & -10 & -24 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 & 0 & 4 & -9 & -27 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 18

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 & 12 & -12 & -18 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 23 \\ 4 & -2 & 1 & 12 & 28 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 16 & 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 19

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -7 & -8 & 1 & -23 \\ 2 & 1 & 2 & 7 & 20 & 8 & 20 \\ -3 & -2 & 1 & -2 & -16 & -10 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & 8 & 28 & 13 & 31 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 21 & 15 & 27 \\ -2 & 1 & -2 & -9 & -13 & 0 & -12 \\ -3 & 2 & 2 & -4 & 2 & 7 & 19 \\ 2 & 2 & 3 & 8 & 26 & 13 & 31 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 21

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 6 & 11 & 2 & 14 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 22

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & 13 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 & 7 & 7 \\ -3 & 2 & 1 & 6 & 9 & -9 & 12 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 23

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 & -7 & -3 & -19 \\ 2 & 1 & 3 & 10 & 18 & 2 & 12 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 & -2 & -12 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 10 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 24

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & 13 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 14 & 11 & 11 \\ -3 & 2 & 1 & 6 & 9 & -9 & 12 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 25

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & -3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 14 & 11 & 11 \\ -3 & -2 & 1 & -2 & -7 & -13 & -16 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 26

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 12 & 3 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 8 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 8 & 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 27

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 13 \\ 2 & 3 & -1 & 9 & 16 & 4 & 10 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & 12 & 3 & 27 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 28

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 & 20 & 5 & 29 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 16 & 4 & 22 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 12 & 3 & 27 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 29

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 12 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & -1 & 5 & 8 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 8 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 8 & 2 & 20 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 30

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -5 & -8 & -2 & 10 \\ -4 & 1 & 2 & 2 & -4 & -1 & -13 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вихідні дані завдання № 1.1

Група 2

Варіант № 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 & 9 & 6 & 13 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 7 & 1 & 15 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 9 & 3 & 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 10 & 7 & 9 & 16 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 7 & -2 & 12 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & -9 & 4 & -17 \\ 2 & -2 & 3 & 9 & 9 & 7 & 21 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 19 & 13 & 27 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 15 & 9 & 23 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 10 & 7 & 9 & 16 \\ 2 & 1 & 2 & 12 & 11 & 10 & 24 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & -9 & 4 & -17 \\ 2 & -2 & 3 & 9 & 9 & 7 & 21 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 & 9 & 3 & 13 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 7 & 2 & 15 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 9 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 10 & 12 & 9 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 4 & -2 & 15 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & -5 & 4 & -21 \\ 2 & -2 & 3 & 9 & 13 & 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 7

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 12 & 6 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 9 & 4 & 15 \\ 2 & 1 & 2 & 7 & 13 & 5 & 23 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & -5 & 0 & -19 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 23 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 6 & 4 & 13 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 8 & 3 & 15 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 8 & 1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 9 & 7 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 5 & 0 & 15 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & -8 & 3 & -21 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 11

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 8 & 16 & 10 & 20 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 6 & 12 & 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & 7 & 6 & 12 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 11 & 7 & 20 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & -9 & 1 & -19 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 9 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 13

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 7 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 4 & 1 & 11 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 9 & 2 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 4 & 3 & 10 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 6 & -1 & 13 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & -3 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 15

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -4 & -10 & 0 & -23 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 10 & 9 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & -6 & 1 & -15 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 16

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 8 & 7 & 10 \\ -3 & 2 & 1 & 3 & 10 & 1 & 13 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & -2 & 6 & -14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 17

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 & 7 & 4 & 11 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 4 & 7 & 11 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 9 & -1 & 15 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 18

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 4 & 5 & 10 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & 6 & -4 & 13 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & -3 & 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 19

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & -10 & 0 & -23 \\ 2 & 1 & 3 & 11 & 10 & 9 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -6 & 1 & -15 \\ 2 & -1 & 3 & 7 & 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 8 & 6 & 11 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 8 & 7 & 14 \\ -3 & 2 & 1 & 3 & 10 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & -2 & 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 21

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 & 8 & 6 & 11 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 2 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 6 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 22

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 & 12 & 6 & 20 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -2 & 4 & -10 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 6 & 12 & 3 & 24 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 23

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 12 & 17 & 7 & 30 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 8 & 15 & 3 & 26 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 24

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 & 13 & 7 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & 10 & 15 & 10 & 22 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 4 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 6 & 10 & 5 & 24 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 25

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 26

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & 11 & 4 & 20 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -4 & 1 & -10 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 6 & 10 & 3 & 24 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 27

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 9 & 16 & 11 & 30 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 7 & 12 & 7 & 26 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 28

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 & 13 & 7 & 20 \\ 2 & 1 & 2 & 7 & 15 & 10 & 22 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 4 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 3 & 6 & 10 & 5 & 24 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 29

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 0 & 13 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & -4 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 30

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 & 11 & 4 & 15 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 & 1 & -20 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 5 & 0 & 21 \\ 2 & -2 & 3 & 8 & 10 & 3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Модельний розв'язок завдання № 1.1

Нехай маємо вихідні дані

$$A^{\text{розш}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка відповідає умові, має вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 + 4x_6 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 + 0x_5 + 4x_6 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 4x_5 + x_6 = 6, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 4x_6 = 4. \end{cases}$$

Для розв'язку системи методом Жордана-Гаусса зображуємо її у табличному вигляді.

Таблиця 1.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Σ
[1]	1	1	1	8	4	5	21
2	–1	1	0	7	4	0	13
–1	2	1	0	4	1	6	13
2	1	–1	4	5	4	4	19

Результати розв'язування подано в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Σ	Формула
	1	1	1	1	8	4	5	21	
	0	–3	–1	–2	–9	–4	–10	–29	II–2·I
	0	3	2	1	12	5	11	34	III+I
	0	[–1]	–3	2	–11	–4	–6	–23	IV–2·I
	1	0	–2	3	–3	0	–1	–2	I–IV_{new}
	0	0	[8]	–8	24	8	8	40	II+3·IV_{new}
	0	0	–7	7	–21	–7	–7	–35	III–3·IV_{new}
IV_{new}	0	1	3	–2	11	4	6	23	IV·(–1)

Продовж. табл. 1.2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Σ	Формула
	1	0	0	1	3	2	1	8	I+2·II$_{new}$
II$_{new}$	0	0	1	–1	3	1	1	5	II/8
	0	0	0	0	0	0	0	0	III+7·II$_{new}$
	0	1	0	1	2	1	3	8	IV–3·II$_{new}$

Алгебраїчна форма запису розв'язаної системи має такий вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 1, \\ x_3 - x_4 + 3x_5 + x_6 = 1, \\ x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_4 - 3x_5 - 2x_6, \\ x_3 = 1 + x_4 - 3x_5 - x_6, \\ x_2 = 3 - x_4 - 2x_5 - x_6, \end{cases}$$

де x_1, x_2, x_3 – базисні невідомі; x_4, x_5, x_6 – вільні невідомі.

Система сумісна і невизначена.

Відповідь: загальний розв'язок системи дорівнює

$$X = \{1 - x_4 - 3x_5 - 2x_6,\ 3 - x_4 - 2x_5 - x_6,\ 1 + x_4 - 3x_5 - x_6,\ |\ x_4,\ x_5,\ x_6\},$$

$$\forall\, x_4,\ x_5,\ x_6 \in R.$$

Частинний розв'язок системи за умови $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ дорівнює $X_0 = \{1, 3, 1, \mid 0, 0, 0\}$.

1.2. Геометрична інтерпретація множини розв'язків невизначеної системи у вигляді поліедру

Методом виключення змінних знайти поліедр Ω (многокутник розв'язків), заданий системою лінійних алгебраїчних рівнянь та зобразити його графічно

$$\Omega: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3, \end{cases}$$

$$x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Знайти координати всіх вершин поліедру Ω.

Вихідні дані задано розширеною матрицею коефіцієнтів

$$A^{\text{розш}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Вихідні дані завдання № 1.2

Група 1

Варіант № 1

$$\begin{pmatrix} 11 & 25 & -1 & 2 & 0 & 135 \\ 13 & 23 & 0 & 2 & 1 & 169 \\ 11 & 7 & 0 & 1 & -1 & 71 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 2

$$\begin{pmatrix} -12 & -5 & -1 & -1 & 0 & -83 \\ 17 & 15 & 0 & 2 & -1 & 117 \\ 4 & 12 & 0 & 1 & 1 & 72 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 3

$$\begin{pmatrix} 8 & 22 & -1 & 2 & 0 & 82 \\ 7 & 20 & 0 & 2 & 1 & 96 \\ 1 & -13 & 0 & -1 & -2 & -57 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 4

$$\begin{pmatrix} 14 & 23 & -1 & 2 & 0 & 134 \\ 10 & 27 & 0 & 2 & 3 & 162 \\ -4 & -15 & 0 & -1 & -2 & -84 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 5

$$\begin{pmatrix} -17 & -12 & -1 & -2 & 0 & -144 \\ 11 & 20 & 0 & 2 & 1 & 132 \\ 10 & 7 & 0 & 1 & -1 & 57 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 6

$$\begin{pmatrix} 10 & 26 & -1 & 2 & 0 & 116 \\ 12 & 22 & 0 & 2 & 1 & 144 \\ 9 & 8 & 0 & 1 & -1 & 66 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 7

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 1 & 2 & 0 & 150 \\ 11 & 21 & 0 & 2 & 1 & 135 \\ 10 & 6 & 0 & 1 & -1 & 54 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 8

$$\begin{pmatrix} 14 & 10 & 1 & 2 & 0 & 108 \\ 9 & 19 & 0 & 2 & 1 & 105 \\ 3 & 11 & 0 & 1 & 1 & 57 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 9

$$\begin{pmatrix} 9 & 24 & -1 & 2 & 0 & 108 \\ 9 & 22 & 0 & 2 & 1 & 126 \\ 9 & 8 & 0 & 1 & -1 & 54 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 10

$$\begin{pmatrix} 11 & 22 & -1 & 2 & 0 & 94 \\ 16 & 14 & 0 & 2 & -1 & 108 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & -1 & 52 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 11

$$\begin{pmatrix} 14 & 20 & -1 & 2 & 0 & 120 \\ 13 & 18 & 0 & 2 & 1 & 134 \\ 11 & 6 & 0 & 1 & -1 & 58 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 12

$$\begin{pmatrix} 24 & 20 & 1 & 3 & 0 & 180 \\ 11 & 19 & 0 & 2 & 1 & 121 \\ 10 & 5 & 0 & 1 & -1 & 47 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 13

$$\begin{pmatrix} 6 & 25 & -1 & 2 & 0 & 80 \\ 8 & 22 & 0 & 2 & 1 & 104 \\ 7 & 8 & 0 & 1 & -1 & 46 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 14

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & -1 & -1 & 0 & -90 \\ 17 & 17 & 0 & 2 & -1 & 157 \\ 7 & 13 & 0 & 1 & 1 & 83 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 15

$$\begin{pmatrix} 11 & 22 & -1 & 2 & 0 & 114 \\ 11 & 21 & 0 & 2 & 1 & 135 \\ -1 & -15 & 0 & -1 & -2 & -81 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 16

$$\begin{pmatrix} 5 & 20 & -1 & 2 & 0 & 60 \\ 4 & 25 & 0 & 2 & 3 & 98 \\ -1 & -14 & 0 & -1 & -2 & -52 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 17

$$\begin{pmatrix} 8 & 22 & -1 & 2 & 0 & 68 \\ 8 & 18 & 0 & 2 & 1 & 84 \\ 7 & 6 & 0 & 1 & -1 & 36 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 18

$$\begin{pmatrix} 10 & 23 & -1 & 2 & 0 & 106 \\ 15 & 15 & 0 & 2 & -1 & 123 \\ 8 & 6 & 0 & 1 & -1 & 60 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 19

$$\begin{pmatrix} 12 & 25 & -1 & 2 & 0 & 140 \\ 15 & 23 & 0 & 2 & 1 & 163 \\ 9 & 7 & 0 & 1 & -1 & 77 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 20

$$\begin{pmatrix} 28 & 26 & 1 & 3 & 0 & 256 \\ 14 & 23 & 0 & 2 & 1 & 166 \\ 10 & 7 & 0 & 1 & -1 & 74 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 21

$$\begin{pmatrix} 7 & 22 & -1 & 2 & 0 & 88 \\ 9 & 21 & 0 & 2 & 1 & 117 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & -1 & 45 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 22

$$\begin{pmatrix} -9 & -5 & -1 & -1 & 0 & -71 \\ 17 & 16 & 0 & 2 & -1 & 120 \\ 4 & 11 & 0 & 1 & 1 & 69 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 23

$$\begin{pmatrix} 7 & 25 & -1 & 2 & 0 & 85 \\ 7 & 23 & 0 & 2 & 1 & 109 \\ 1 & -16 & 0 & -1 & -2 & -68 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 24

$$\begin{pmatrix} 6 & 23 & -1 & 2 & 0 & 70 \\ 7 & 24 & 0 & 2 & 3 & 96 \\ -3 & -13 & 0 & -1 & -2 & -49 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 25

$$\begin{pmatrix} -13 & -15 & -1 & -2 & 0 & -115 \\ 8 & 23 & 0 & 2 & 1 & 106 \\ 7 & 7 & 0 & 1 & -1 & 44 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 26

$$\begin{pmatrix} 9 & 22 & -1 & 2 & 0 & 106 \\ 12 & 20 & 0 & 2 & 1 & 130 \\ 9 & 7 & 0 & 1 & -1 & 59 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 27

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 1 & 2 & 0 & 112 \\ 8 & 22 & 0 & 2 & 1 & 104 \\ 7 & 8 & 0 & 1 & -1 & 46 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 28

$$\begin{pmatrix} 21 & 16 & 1 & 2 & 0 & 180 \\ 13 & 23 & 0 & 2 & 1 & 169 \\ 5 & 13 & 0 & 1 & 1 & 89 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 29

$$\begin{pmatrix} 10 & 23 & -1 & 2 & 0 & 106 \\ 11 & 20 & 0 & 2 & 1 & 132 \\ 10 & 7 & 0 & 1 & -1 & 57 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 30

$$\begin{pmatrix} 11 & 26 & -1 & 2 & 0 & 130 \\ 19 & 18 & 0 & 2 & -1 & 154 \\ 11 & 8 & 0 & 1 & -1 & 74 \end{pmatrix} \cdot$$

Вихідні дані завдання № 1.2

Група 2

Варіант № 1

$$\begin{pmatrix} 8 & 22 & -1 & 2 & 0 & 68 \\ 9 & 18 & 0 & 2 & 1 & 82 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & -1 & 38 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 2

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & -1 & -1 & 0 & -90 \\ 15 & 17 & 0 & 2 & -1 & 137 \\ 6 & 13 & 0 & 1 & 1 & 73 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 3

$$\begin{pmatrix} 12 & 20 & -1 & 2 & 0 & 104 \\ 13 & 19 & 0 & 2 & 1 & 115 \\ -5 & -14 & 0 & -1 & -2 & -62 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 4

$$\begin{pmatrix} 9 & 22 & -1 & 2 & 0 & 96 \\ 3 & 27 & 0 & 2 & 3 & 135 \\ 0 & -15 & 0 & -1 & -2 & -72 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 5

$$\begin{pmatrix} -18 & -14 & -1 & -2 & 0 & -172 \\ 13 & 23 & 0 & 2 & 1 & 169 \\ 11 & 7 & 0 & 1 & -1 & 71 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 6

$$\begin{pmatrix} 9 & 24 & -1 & 2 & 0 & 96 \\ 13 & 20 & 0 & 2 & 1 & 128 \\ 8 & 7 & 0 & 1 & -1 & 61 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 7

$$\begin{pmatrix} 18 & 15 & 1 & 2 & 0 & 160 \\ 12 & 23 & 0 & 2 & 1 & 146 \\ 9 & 7 & 0 & 1 & -1 & 64 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 8

$$\begin{pmatrix} 16 & 10 & 1 & 2 & 0 & 120 \\ 10 & 19 & 0 & 2 & 1 & 102 \\ 4 & 11 & 0 & 1 & 1 & 54 \end{pmatrix} \cdot$$

Варіант № 9

$$\begin{pmatrix} 10 & 21 & -1 & 2 & 0 & 86 \\ 11 & 19 & 0 & 2 & 1 & 99 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & -1 & 45 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 10

$$\begin{pmatrix} 7 & 24 & -1 & 2 & 0 & 88 \\ 13 & 18 & 0 & 2 & -1 & 94 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & -1 & 44 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 11

$$\begin{pmatrix} 12 & 22 & -1 & 2 & 0 & 100 \\ 11 & 19 & 0 & 2 & 1 & 121 \\ 10 & 5 & 0 & 1 & -1 & 47 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 12

$$\begin{pmatrix} 22 & 19 & 1 & 3 & 0 & 164 \\ 9 & 18 & 0 & 2 & 1 & 102 \\ 9 & 6 & 0 & 1 & -1 & 42 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 13

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 & -1 & 2 & 0 & 60 \\ 9 & 19 & 0 & 2 & 1 & 83 \\ 6 & 5 & 0 & 1 & -1 & 37 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 14

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & -1 & -1 & 0 & -75 \\ 13 & 17 & 0 & 2 & -1 & 91 \\ 2 & 13 & 0 & 1 & 1 & 59 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 15

$$\begin{pmatrix} 8 & 20 & -1 & 2 & 0 & 72 \\ 7 & 18 & 0 & 2 & 1 & 86 \\ 1 & -12 & 0 & -1 & -2 & -52 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 16

$$\begin{pmatrix} 11 & 24 & -1 & 2 & 0 & 108 \\ 5 & 24 & 0 & 2 & 3 & 144 \\ -1 & -13 & 0 & -1 & -2 & -75 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 17

$$\begin{pmatrix} 8 & 24 & -1 & 2 & 0 & 92 \\ 8 & 22 & 0 & 2 & 1 & 104 \\ 7 & 8 & 0 & 1 & -1 & 46 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 18

$$\begin{pmatrix} 12 & 20 & -1 & 2 & 0 & 104 \\ 17 & 13 & 0 & 2 & -1 & 103 \\ 10 & 5 & 0 & 1 & -1 & 47 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 19

$$\begin{pmatrix} 5 & 25 & -1 & 2 & 0 & 75 \\ 7 & 22 & 0 & 2 & 1 & 106 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & -1 & 44 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 20

$$\begin{pmatrix} 24 & 18 & 1 & 3 & 0 & 186 \\ 11 & 18 & 0 & 2 & 1 & 118 \\ 10 & 6 & 0 & 1 & -1 & 50 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 21

$$\begin{pmatrix} 10 & 26 & -1 & 2 & 0 & 116 \\ 13 & 22 & 0 & 2 & 1 & 142 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & -1 & 68 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 22

$$\begin{pmatrix} -9 & -4 & -1 & -1 & 0 & -69 \\ 14 & 16 & 0 & 2 & -1 & 104 \\ 4 & 11 & 0 & 1 & 1 & 58 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 23

$$\begin{pmatrix} 9 & 24 & -1 & 2 & 0 & 108 \\ 10 & 22 & 0 & 2 & 1 & 124 \\ -2 & -14 & 0 & -1 & -2 & -68 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 24

$$\begin{pmatrix} 5 & 21 & -1 & 2 & 0 & 55 \\ 1 & 25 & 0 & 2 & 3 & 107 \\ 1 & -14 & 0 & -1 & -2 & -58 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 25

$$\begin{pmatrix} -13 & -12 & -1 & -2 & 0 & -108 \\ 9 & 21 & 0 & 2 & 1 & 93 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & -1 & 42 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 26

$$\begin{pmatrix} 5 & 24 & -1 & 2 & 0 & 60 \\ 7 & 20 & 0 & 2 & 1 & 96 \\ 8 & 7 & 0 & 1 & -1 & 39 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 27

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 1 & 2 & 0 & 136 \\ 13 & 18 & 0 & 2 & 1 & 134 \\ 11 & 6 & 0 & 1 & -1 & 58 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 28

$$\begin{pmatrix} 12 & 11 & 1 & 2 & 0 & 90 \\ 9 & 19 & 0 & 2 & 1 & 83 \\ 4 & 11 & 0 & 1 & 1 & 43 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 29

$$\begin{pmatrix} 10 & 26 & -1 & 2 & 0 & 108 \\ 10 & 23 & 0 & 2 & 1 & 126 \\ 8 & 7 & 0 & 1 & -1 & 54 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 30

$$\begin{pmatrix} 8 & 20 & -1 & 2 & 0 & 80 \\ 13 & 14 & 0 & 2 & -1 & 94 \\ 7 & 6 & 0 & 1 & -1 & 46 \end{pmatrix}.$$

Модельний розв'язок завдання № 1.2

Нехай маємо вихідні дані

$$A^{\text{розш}} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & -1 & -1 & 0 & 75 \\ 16 & 15 & 0 & 2 & -1 & 120 \\ 5 & 12 & 0 & 1 & 1 & 69 \end{pmatrix}.$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка відповідає вихідним даним має вигляд

$$\Omega: \begin{cases} -9x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -75, \\ 16x_1 + 15x_2 + 2x_4 - x_5 = 120, \\ 5x_1 + 12x_2 + x_4 + x_5 = 69, \\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Виключаємо невід'ємні невідомі методом Жордана–Гаусса. Для розв'язку системи зображуємо її у вигляді таблиці.

Таблиця 1.3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
–9	–3	–1	–1	0	–75	–89
16	15	0	2	–1	120	152
5	12	0	**1**	1	69	88

Результати розв'язку подано в табл. 1.4

Таблиця 1.4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Формула
	–4	9	–1	0	**1**	–6	–1	II+III
	6	–9	0	0	–3	–18	–24	II–2·III
	5	12	0	1	1	69	88	III+I
	–4	9	–1	0	1	–6	–1	
	–6	18	**–3**	0	0	–36	–27	II+3·I
	9	3	1	1	0	75	89	III+I
	–2	3	0	0	1	6	8	I+II_{new}
II_{new}	2	–6	1	0	0	12	9	II/(–3)
	7	9	0	1	0	63	80	III–II_{new}

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–2	3	0	0	1	6
2	–6	1	0	0	12
7	9	0	1	0	63

Алгебраїчна форма запису розв'язаної системи має такий вигляд

$$\begin{cases} (x_5) - 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ (x_3) + 2x_1 - 6x_2 = 12, \\ (x_4) + 7x_1 + 9x_2 = 63. \end{cases}$$

Відкидаємо базисні невід'ємні невідомі x_3, x_4, x_5, забезпечуючи перехід від обмежень–рівнянь до обмежень–нерівностей

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 12, \\ 7x_1 + 9x_2 \le 63. \end{cases}$$

Геометричною інтерпретацією системи лінійних нерівностей є опукла множина, обмежена прямими лініями – поліедр Ω (многокутник розв'язків).

Межі поліедру дорівнюють

$$\omega_1 : \frac{x_1}{-3}+\frac{x_2}{2}=1,\quad \omega_2 : \frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{-2}=1,\quad \omega_3 : \frac{x_1}{9}+\frac{x_2}{6}=1.$$

Зображуємо їх графічно і встановлюємо орієнтацію півплощин, які відповідають кожній нерівності (рис. 1).

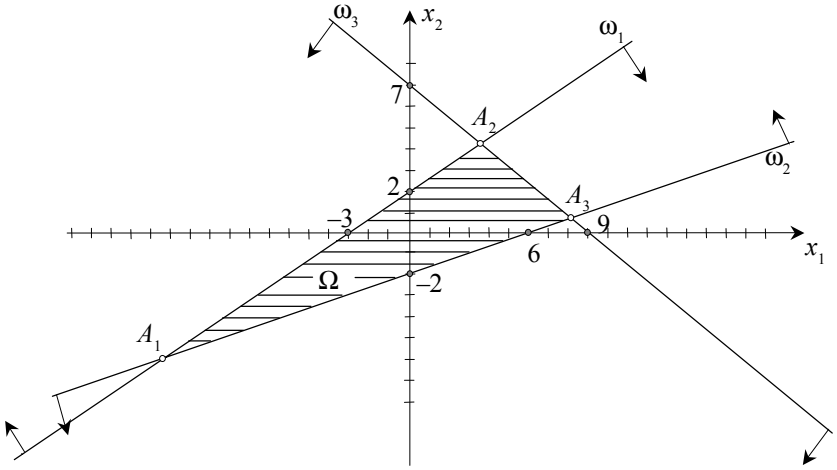

Рис. 1. Поліедр Ω

Знаходимо координати вершин Ω:

$$A_1 : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1+3x_2=6, \\ 2x_1-6x_2=12, \end{cases} \Leftrightarrow (-12;\ -6);$$

$$A_3 : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-6x_2=12, \\ 7x_1+9x_2=63, \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{81}{10};\ \frac{7}{10}\right).$$

Координати вершин поліедру дорівнюють $A_1(-12; -6)$, $A_2\left(\frac{45}{13}; \frac{56}{13}\right)$, $A_3\left(\frac{81}{10}; \frac{7}{10}\right)$.

Завдання № 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ І МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Еквівалентність форм запису задач лінійного програмування. Правила переходу від однієї форми запису задач до інших

Виконати зведення наступної загальної задачі лінійного програмування до основної, стандартної та канонічної форм запису задачі:

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 \to \text{opt};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \ ?_1 \ 1, \\ a_{21}x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \ ?_2 \ 3, \\ a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + x_4 + 4x_5 \ ?_3 \ 1, \\ x_i \geq 0, \ x_j \geq 0, \ x_k \geq 0. \end{cases}$$

Вихідні дані завдання № 2.1

Група 1

Таблиця 2.1

номер	$?_1$	$?_2$	$?_3$	opt	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	i	j	k
1	≤	≤	=	max	–1	4	1	4	1	1	2	–
2	≥	≥	≥	min	–3	–5	–3	5	1	2	3	5
3	=	≤	≤	max	4	6	–4	4	4	–	2	–
4	=	≥	≤	min	–5	4	–5	7	4	–	–	–
5	≤	=	≥	max	–4	3	4	–6	–3	2	3	4
6	≤	=	=	min	–4	4	–3	5	4	1	–	–
7	≥	≤	=	min	4	–4	4	6	–4	1	2	3
8	≥	≤	≤	max	2	5	–4	7	–4	2	–	5
9	=	≥	≤	min	4	6	3	8	5	1	2	4
10	≥	≥	≥	max	–5	–7	2	1	–5	3	–	4
11	=	=	≥	min	6	–8	2	1	–4	2	5	–
12	≤	≥	=	max	7	7	–1	4	–4	3	–	5
13	=	≤	≥	min	8	7	–3	4	4	1	2	4
14	≥	≥	≤	max	7	–6	4	–3	2	1	3	4
15	≤	=	≤	min	6	5	–5	4	2	–	1	3
16	≥	=	≥	max	5	6	–4	–4	–1	–	4	–
17	=	≤	=	min	6	7	–3	–4	–3	–	2	–
18	=	=	≤	max	7	8	4	5	7	1	4	–

19	≤	≤	≥	min	–8	9	4	6	–6	2	–	3
20	≤	=	=	max	1	8	3	2	5	3	–	–
21	≥	≤	=	min	1	7	1	3	6	1	5	–
22	≥	≥	≤	max	4	6	1	1	1	–	–	4
23	=	=	≤	min	4	5	1	–2	1	2	–	4
24	≥	=	≥	max	–3	1	4	4	4	–	1	3
25	≤	≤	≥	min	4	–2	4	2	4	3	–	5
26	≤	≤	=	max	–4	3	–3	6	–3	1	5	–
27	≥	≥	≥	min	–4	2	4	–7	4	1	2	–
28	=	≥	≤	max	5	–1	–4	5	–4	4	5	–
29	=	=	=	min	3	–2	–4	9	–4	1	–	4
30	≥	≥	≤	max	2	4	5	3	5	–	2	–

Вихідні дані завдання № 2.1

Група 2

Таблиця 2.2

номер	$?_1$	$?_2$	$?_3$	opt	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	i	j	k
1	≥	≤	=	min	2	4	1	3	1	1	–	4
2	=	≥	≥	min	2	–5	–3	4	1	–	3	5
3	=	≤	≥	max	–1	6	–4	–4	4	–	–	–
4	≤	≥	=	min	–3	4	–5	5	4	–	4	–
5	≤	=	=	max	4	3	4	6	–3	–	3	4

Продовж. табл. 2.2

номер	?1	?2	?3	opt	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	i	j	k
6	≥	=	≤	min	–5	4	–3	–7	4	1	–	–
7	≥	≥	≤	max	–4	–4	4	–8	–4	1	–	3
8	=	=	≥	min	–3	5	–4	7	–4	–	–	5
9	≥	=	≥	max	4	6	3	7	5	1	–	4
10	≤	≤	=	min	4	–7	2	–6	–5	3	–	4
11	≥	≤	≥	max	3	–8	2	3	–4	–	5	–
12	=	≥	≤	mun	1	7	–1	4	–4	3	–	5
13	=	≥	≥	max	1	7	–3	–4	4	1	–	4
14	≤	=	≥	min	1	–6	4	5	2	1	3	4
15	=	≥	=	max	4	5	–5	6	2	–	1	4
16	≤	≤	=	min	4	6	3	–7	–1	2	4	–
17	=	≥	≤	min	6	7	4	–8	–3	–	2	3
18	=	=	≤	max	7	8	–4	7	7	3	4	–
19	≤	=	≥	min	–8	9	5	7	–6	–	–	4
20	≤	≤	≥	max	1	8	6	–6	5	3	4	–
21	≥	=	=	min	1	7	–7	5	6	1	2	–
22	≥	≤	≥	max	4	6	–8	6	1	–	2	4
23	=	=	≤	min	4	5	7	7	1	2	3	4
24	≥	=	≥	max	–3	1	7	4	4	–	1	–
25	≤	≤	=	min	4	–2	–6	2	4	3	–	5

26	≤	≥	=	max	–4	3	5	6	–3	1	3	5	2	–
27	≤	≥	=	min	–4	2	6	–7	4	–	1	4	1	–
28	=	≥	≥	max	5	–1	7	5	–4	2	5	–	5	–
29	=	=	≤	min	3	–2	–4	9	–4	1	–	1	4	4
30	≥	≥	=	max	2	4	5	3	5	3	4	4	–	–

Модельний розв'язок завдання № 2.1

Нехай маємо вихідні дані

$$W_I = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 4, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_4 + x_5 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Для забезпечення переходу від загальної форми запису задачі до основної змінюємо знак нерівності та виключаємо одну з невід'ємних невідомих у рівнянні. Розрахунки подано у табл. 2.3

Таблиця 2.3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ
	2	1	2	1	4	4	14
	7	–2	[1]	2	1	2	11
	–3	4	–8	–1	–1	–1	–10
W_1	2	4	4	7	0	0	17

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Формула
	–12	5	0	–3	2	0	–8	I–2·II
	7	–2	1	2	1	2	11	
	53	–12	0	15	7	15	78	III+8·II
W_1	–26	12	0	–1	–4	–8	–27	IV–4·II

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
–12	5	0	–3	2	0
7	–2	1	2	1	2
53	–12	0	15	7	15

Задача приймає вигляд

$$W_I = -26x_1 + 12x_2 - x_4 - 4x_5 + 8 \to \min;$$

$$\begin{cases} -12x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5 \geq 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + (x_3) + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 53x_1 - 12x_2 + 15x_4 + 7x_5 \geq 15, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Відкидаємо базисну невід'ємну невідому x_3, що забезпечує остаточний перехід до основної форми задачі лінійного програмування

$$W_I = -26x_1 + 12x_2 - x_4 - 4x_5 + 8 \to \min;$$
$$\begin{cases} -12x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5 \ \ge\ 0, \\ -7x_1 + 2x_2 - 2x_4 - x_5 \ \ge\ -2, \\ 53x_1 - 12x_2 + 15x_4 + 7x_5 \ \ge\ 15, \end{cases} \qquad \text{(основна форма задачі)}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Для переходу до стандартної форми запису довільні за знаком невідомі представляємо як різницю двох невід'ємних невідомих

$$x_4 = u_4 - v_4, \quad x_5 = u_5 - v_5.$$

Маємо

$$W_I = -26x_1 + 12x_2 - (u_4 - v_4) - 4(u_5 - v_5) + 8 \to \min;$$
$$\begin{cases} -12x_1 + 5x_2 - 3(u_4 - v_4) + 2(u_5 - v_5) \ \ge\ 0, \\ -7x_1 + 2x_2 - 2(u_4 - v_4) - (u_5 - v_5) \ \ge\ -2, \\ 53x_1 - 12x_2 + 15(u_4 - v_4) + 7(u_5 - v_5) \ \ge\ 15, \end{cases} \qquad \text{(стандартна форма)}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ u_4 \ge 0,\ \ u_5 \ge 0,\ \ v_4 \ge 0,\ \ v_5 \ge 0.$$

Для переходу до канонічної форми віднімаємо в кожній нерівності балансову невідому.

Маємо канонічну форму запису задачі

$$W_I = -26x_1 + 12x_2 - (u_4 - v_4) - 4(u_5 - v_5) + 8 \to \min;$$
$$\begin{cases} -12x_1 + 5x_2 - 3(u_4 - v_4) + 2(u_5 - v_5) - x_6 = 0, \\ -7x_1 + 2x_2 - 2(u_4 - v_4) - (u_5 - v_5) - x_7 = -2, \\ 53x_1 - 12x_2 + 15(u_4 - v_4) + 7(u_5 - v_5) - x_8 = 15, \end{cases} \qquad \text{(канонічна форма)}$$
$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ u_4 \ge 0,\ \ u_5 \ge 0,\ \ v_4 \ge 0,\ \ v_5 \ge 0,$$
$$x_6 \ge 0,\ \ x_7 \ge 0,\ \ x_8 \ge 0.$$

2.2. Графічний метод розв'язування двовимірних задач лінійного програмування

1. Зобразити графічно поліедр Ω, який задано лінійною системою нерівностей

$$\Omega: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq a_{11} \cdot a_{12}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq a_{21} \cdot a_{22}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq a_{31} \cdot a_{32}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq a_{41} \cdot a_{42}, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 \geq a_{51} \cdot a_{52}, \end{cases}$$

За наступних умов:

а) невід'ємності, накладеної на невідомі – Ω;

б) $x_1 \geq 0 - \Omega_{x_1 \geq 0}$;

в) $x_2 \geq 0 - \Omega_{x_2 \geq 0}$;

г) $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 - \Omega_{\oplus}$.

Для кожного з варіантів виконати окремий рисунок.

2. Знайти координати всіх вершин Ω.

3. Знайти розв'язки (min, max) задачі лінійного програмування для цільових функцій на множині Ω:

а) $W_I = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \rightarrow$ opt(max, min) – графічним методом з застосуванням вектора градієнту $\text{grad}W_I$;

б) $W_I = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \rightarrow$ opt(max, min) – методом повного перебору всіх вершин. Для випадку альтернативного оптимуму знайти всі розв'язки задачі лінійного програмування.

Вихідні дані завдання наступні:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & a_{52} \\ c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Вихідні дані завдання № 2.2

Група 1

Варіант № 1

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \\ -11 & 4 \\ -3 & -8 \\ -10 & -4 \\ 6 & 3 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 2

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 6 \\ -11 & 3 \\ -2 & -7 \\ -10 & -4 \\ 7 & 7 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 9 \\ -9 & 3 \\ -3 & -4 \\ -7 & -1 \\ 2 & 6 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 4

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 7 \\ -11 & 3 \\ -2 & -6 \\ -9 & -2 \\ 7 & 5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 5

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 6 \\ -12 & 5 \\ -3 & -8 \\ -11 & -4 \\ 6 & 5 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 6

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \\ -13 & 3 \\ -3 & -8 \\ -11 & -4 \\ 4 & 3 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 7

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \\ -8 & 5 \\ -3 & -5 \\ -7 & -1 \\ 4 & 3 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 8

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 9 \\ -10 & 3 \\ -2 & -6 \\ -8 & -2 \\ 4 & 7 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 9

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 6 \\ -9 & 3 \\ -3 & -5 \\ -8 & -1 \\ 8 & 4 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 10

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 7 \\ -11 & 3 \\ -3 & -7 \\ -10 & -4 \\ 5 & 4 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 11

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 6 \\ -10 & 4 \\ -3 & -7 \\ -9 & -3 \\ 6 & 5 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 12

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 8 \\ -9 & 3 \\ -4 & -5 \\ -7 & -2 \\ 6 & 3 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 13

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 8 \\ -9 & 5 \\ -2 & -5 \\ -7 & -2 \\ 6 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 14

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 7 \\ -12 & 5 \\ -4 & -8 \\ -11 & -4 \\ 2 & 6 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 15

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \\ -7 & 3 \\ -2 & -4 \\ -6 & -1 \\ 7 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 16

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 8 \\ -11 & 4 \\ -2 & -7 \\ -9 & -3 \\ 8 & 5 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 17

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 9 \\ -10 & 5 \\ -2 & -6 \\ -8 & -3 \\ 6 & 3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 18

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \\ -10 & 3 \\ -2 & -6 \\ -9 & -2 \\ 3 & 5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 19

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 6 \\ -11 & 5 \\ -2 & -6 \\ -9 & -3 \\ 4 & 2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 20

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \\ -12 & 5 \\ -3 & -7 \\ -10 & -3 \\ 7 & 2 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 21

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 6 \\ -10 & 3 \\ -3 & -5 \\ -8 & -1 \\ 6 & 5 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 22

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \\ -11 & 5 \\ -4 & -7 \\ -10 & -4 \\ 7 & 5 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 23

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 7 \\ -9 & 5 \\ -4 & -5 \\ -7 & -1 \\ 7 & 4 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 24

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 6 \\ -11 & 5 \\ -4 & -7 \\ -10 & -3 \\ 6 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 25

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 9 \\ -10 & 4 \\ -2 & -7 \\ -9 & -4 \\ 3 & 3 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 26

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 9 \\ -9 & 5 \\ -3 & -5 \\ -8 & -2 \\ 2 & 5 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 27

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 7 \\ -11 & 5 \\ -2 & -7 \\ -9 & -4 \\ 6 & 2 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 28

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 9 \\ -10 & 5 \\ -4 & -6 \\ -8 & -3 \\ 8 & 7 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 29

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 9 \\ -13 & 4 \\ -2 & -8 \\ -11 & -4 \\ 4 & 5 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 30

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 7 \\ -9 & 3 \\ -3 & -5 \\ -8 & -2 \\ 7 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 31

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \\ -9 & 4 \\ -4 & -5 \\ -8 & -1 \\ 4 & 8 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 32

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \\ -9 & 4 \\ -3 & -5 \\ -7 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вихідні дані завдання № 2.2

Група 2

Варіант № 1

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 6 \\ -11 & 4 \\ -4 & -6 \\ -9 & -3 \\ 3 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 2

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 8 \\ -8 & 4 \\ -3 & -5 \\ -7 & -1 \\ 2 & 7 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 3

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 6 \\ -11 & 5 \\ -2 & -8 \\ -10 & -4 \\ 2 & 7 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 4

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 9 \\ -11 & 3 \\ -3 & -8 \\ -10 & -4 \\ 3 & 7 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 5

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 6 \\ -10 & 5 \\ -2 & -6 \\ -8 & -2 \\ 8 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 6

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 8 \\ -10 & 3 \\ -4 & -6 \\ -8 & -3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 7

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 7 \\ -7 & 4 \\ -4 & -4 \\ -6 & -1 \\ 2 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 8

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \\ -9 & 3 \\ -2 & -4 \\ -7 & -1 \\ 6 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 9

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 8 \\ -11 & 4 \\ -3 & -7 \\ -10 & -3 \\ 5 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 10

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 7 \\ -10 & 4 \\ -4 & -6 \\ -9 & -3 \\ 7 & 3 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 11

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \\ -12 & 4 \\ -3 & -8 \\ -10 & -4 \\ 8 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 12

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 9 \\ -11 & 5 \\ -2 & -7 \\ -9 & -4 \\ 2 & 7 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 13

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 7 \\ -10 & 3 \\ -3 & -7 \\ -9 & -3 \\ 3 & 2 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 14

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 8 \\ -9 & 4 \\ -2 & -6 \\ -8 & -3 \\ 6 & 4 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 15

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \\ -10 & 3 \\ -4 & -7 \\ -9 & -3 \\ 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 16

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & 7 \\ -9 & 5 \\ -4 & -6 \\ -8 & -2 \\ 4 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 17

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 9 \\ -9 & 4 \\ -4 & -5 \\ -7 & -1 \\ 5 & 7 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 18

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 8 \\ -10 & 3 \\ -2 & -6 \\ -9 & -3 \\ 5 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 19

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \\ -10 & 4 \\ -2 & -6 \\ -9 & -2 \\ 4 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 20

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 9 \\ -10 & 4 \\ -4 & -6 \\ -9 & -2 \\ 4 & 7 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 21

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \\ -10 & 5 \\ -4 & -6 \\ -9 & -2 \\ 6 & 3 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 22

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 9 \\ -9 & 3 \\ -4 & -5 \\ -8 & -1 \\ 4 & 3 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 23

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 6 \\ -8 & 5 \\ -4 & -5 \\ -7 & -1 \\ 2 & 3 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 24

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 6 \\ -8 & 4 \\ -2 & -4 \\ -7 & -1 \\ 7 & 8 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 25

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 7 \\ -10 & 3 \\ -4 & -7 \\ -9 & -4 \\ 8 & 5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 26

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 8 \\ -10 & 3 \\ -3 & -7 \\ -9 & -3 \\ 6 & 5 \\ 10 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 27

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 7 \\ -8 & 4 \\ -3 & -5 \\ -7 & -2 \\ 7 & 7 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 28

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \\ -9 & 3 \\ -3 & -6 \\ -8 & -2 \\ 7 & 4 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 29

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \\ -9 & 3 \\ -3 & -6 \\ -8 & -2 \\ 7 & 4 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 30

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 9 \\ -7 & 5 \\ -3 & -4 \\ -6 & -1 \\ 6 & 4 \\ 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 31

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 8 \\ -8 & 5 \\ -3 & -5 \\ -7 & -1 \\ 7 & 4 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант № 32

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 8 \\ -9 & 5 \\ -4 & -5 \\ -8 & -1 \\ 2 & 2 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Модельний розв'язок завдання № 2.2

Нехай маємо вихідні дані

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 6 \\ -11 & 5 \\ -4 & -7 \\ -10 & -3 \\ 6 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Система лінійних алгебраїчних нерівностей, яка відповідає вихідним даним має такий вигляд:

$$\Omega: \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \geq -8, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24, \\ -11x_1 + 5x_2 \geq -55, \\ -4x_1 + -7x_2 \leq 28, \\ -10x_1 - 3x_2 \geq 30. \end{cases}$$

Для побудови Ω знаходимо його межі:

$$\omega_1: \frac{x_1}{-4} + \frac{x_2}{2} = 1; \quad \omega_2: \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} = 1; \quad \omega_3: \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{-11} = 1; \quad \omega_4: \frac{x_1}{-7} + \frac{x_2}{-4} = 1;$$

$$\omega_5: \frac{x_1}{-3} + \frac{x_2}{-10} = 1.$$

Зображуємо їх графічно і встановлюємо вигляд поліедру Ω (рис. 2–5).

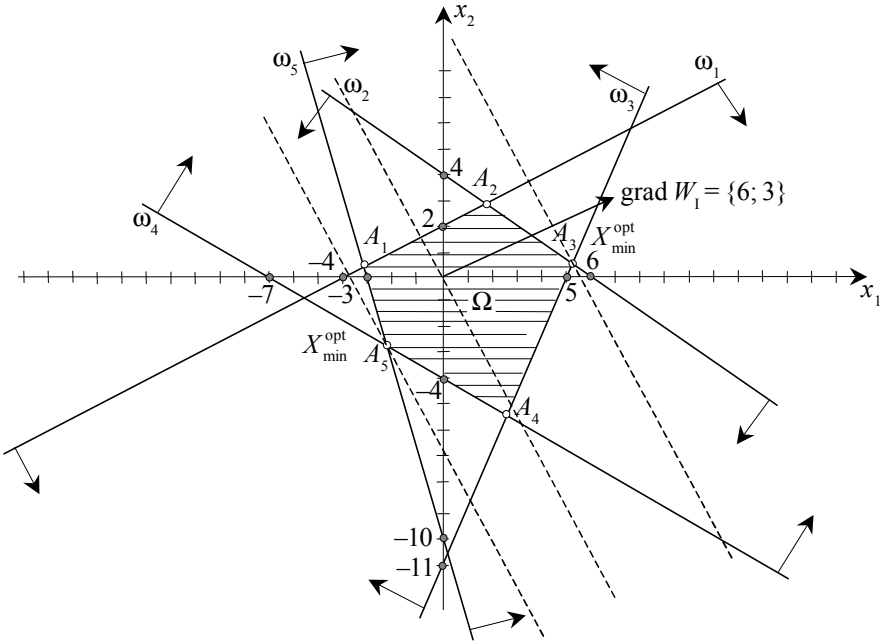

Рис. 2. Поліедр Ω

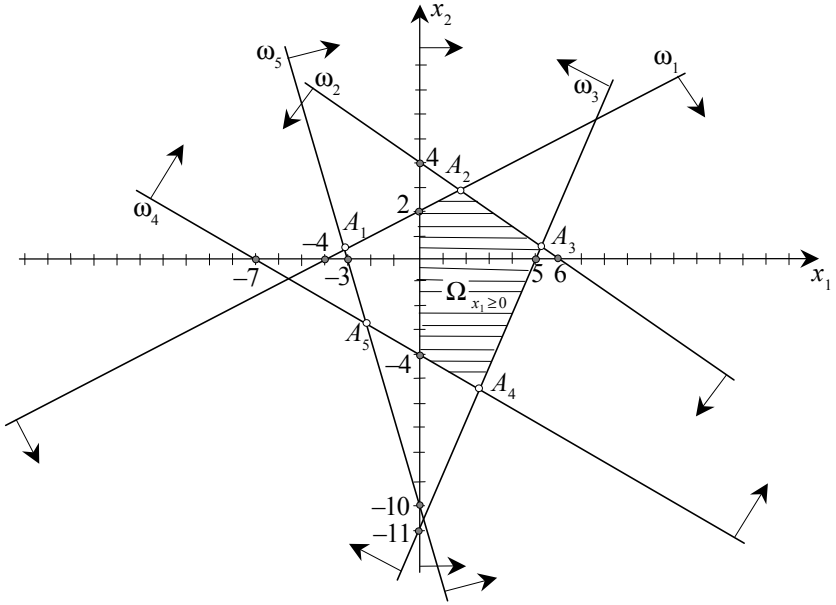

Рис. 3. Поліедр $\Omega_{x_1 \geq 0}$ за умови $x_1 \geq 0$

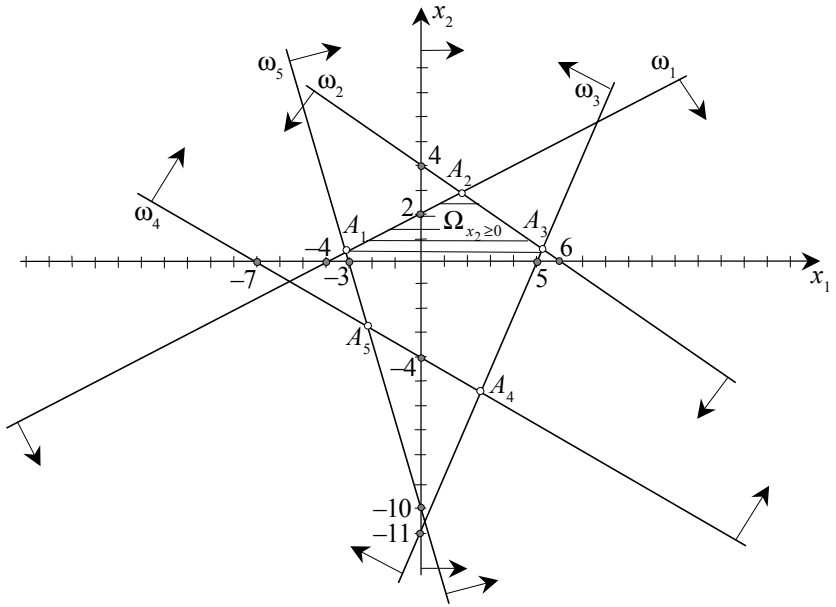

Рис. 4. Поліедр $\Omega_{x_2 \geq 0}$ за умови $x_2 \geq 0$

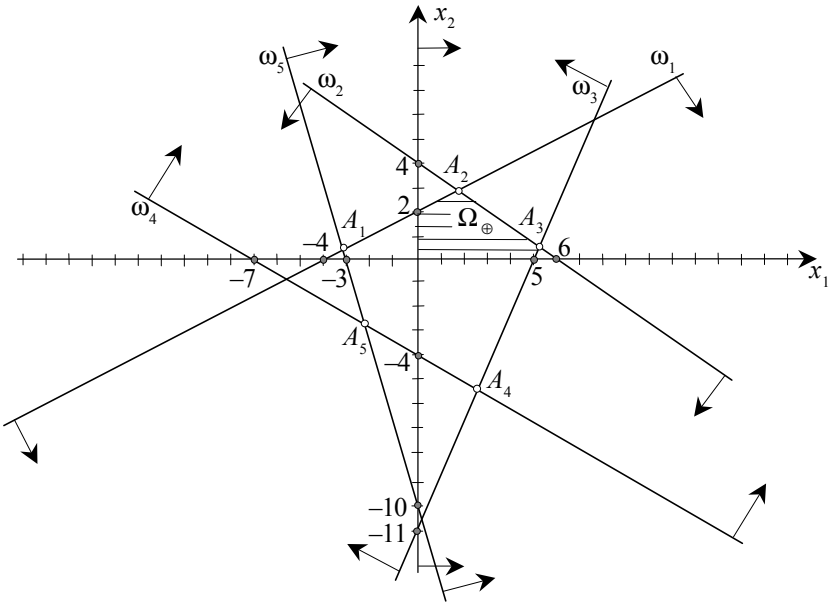

Рис. 5. Поліедр $\Omega_\oplus$ за умови $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2. Знаходимо координати вершин поліедру Ω:

$$A_1 : \omega_1 \times \omega_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -8, \\ -10x_1 - 3x_2 = 30, \end{cases} \Leftrightarrow A_1\left(\frac{-72}{23}; \frac{10}{23}\right);$$

$$A_2 : \omega_1 \times \omega_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -8, \\ 4x_1 + 6x_2 = 24, \end{cases} \Leftrightarrow A_2\left(\frac{12}{7}; \frac{20}{7}\right);$$

$$A_3 : \omega_2 \times \omega_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 24, \\ -11x_1 + 5x_2 = -55, \end{cases} \Leftrightarrow A_3\left(\frac{225}{43}; \frac{22}{43}\right);$$

$$A_4 : \omega_3 \times \omega_4 \Leftrightarrow \begin{cases} -11x_1 + 5x_2 = -55, \\ -4x_1 + -7x_2 = 28, \end{cases} \Leftrightarrow A_4\left(\frac{245}{97}; -\frac{528}{97}\right);$$

$$A_5 : \omega_4 \times \omega_5 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 + -7x_2 = 28, \\ -10x_1 - 3x_2 \geq 30, \end{cases} \Leftrightarrow A_5\left(-\frac{63}{29}; -\frac{80}{29}\right).$$

Відповідь: $A_1\left(\frac{-72}{23};\frac{10}{23}\right)$; $A_2\left(\frac{12}{7};\frac{20}{7}\right)$; $A_3\left(\frac{225}{43};\frac{22}{43}\right)$; $A_4\left(\frac{245}{97};-\frac{528}{97}\right)$; $A_5\left(-\frac{63}{29};-\frac{80}{29}\right)$.

3. Вектор градієнту (напрям максимального зростання) цільової функції $W_I = 6x_1 + 3x_2 \to \text{opt(max, min)}$ дорівнює $\text{grad}W_I = \{6; 3\}$. Зображуємо градієнт (див. рис. 2) і проводимо одну з ліній рівня W_I, яка перпендикулярна до вектора (пунктирна лінія). Зміщуючи лінію рівня паралельно в напрямку градієнта, знаходимо опорну вершину Ω, яка є точкою максимуму $X_{\max}^{\text{opt}}$ цільової функції. Аналогічно в протилежному напряму знаходимо точку мінімуму $X_{\min}^{\text{opt}}$. Точка максимуму збігається з вершиною A_3 поліедру Ω, а мінімуму з A_5.

Відповідь: $X_{\max}^{\text{opt}} = \left\{\frac{225}{43};\ \frac{22}{43}\right\}$, $W_{\text{I}}^{\max} = \frac{6\cdot 225 + 3\cdot 22}{43} = \frac{1416}{43}$.

$X_{\min}^{\text{opt}} = \left\{-\frac{63}{29};\ -\frac{80}{29}\right\}$, $W_{\text{I}}^{\min} = \frac{6\cdot(-63) + 3\cdot(-80)}{13} = -\frac{618}{29}$.

Згідно з методом повного перебору вершин, необхідно знайти значення цільової функції $W_I = 8x_1 + 12x_2 \to \text{opt(max, min)}$ в усіх вершинах обмеженого поліедру Ω і вилучити найбільше та найменше значення. Для знайдених вище вершин поліедру маємо

$$A_1\left(-\frac{72}{23};\frac{10}{23}\right): W_I(A_1) = \frac{8\cdot(-72) + 12\cdot 10}{23} = -\frac{402}{23},$$

$$A_2\left(\frac{12}{7};\frac{20}{7}\right): W_I(A_2) = \frac{8\cdot 12 + 12\cdot 20}{7} = 48 \to \max,$$

$$A_3\left(\frac{225}{43};\frac{22}{43}\right): W_{\text{I}}(A_3) = \frac{8\cdot 225 + 12\cdot 22}{43} = 48 \to \max,$$

$$A_4\left(\frac{245}{97};-\frac{528}{97}\right): W_{\text{I}}(A_4) = \frac{8\cdot 245 + 12\cdot(-528)}{97} = -\frac{4376}{97},$$

$$A_5\left(-\frac{63}{29};-\frac{80}{29}\right): W_{\text{I}}(A_4) = \frac{8\cdot(-63) + 12\cdot(-80)}{29} = -\frac{1464}{29} \to \min.$$

Примітка: Набуття цільовою функцією оптимальних значень в двох вершинах поліедру, в нашому випадку, у вершинах $A_2\left(\frac{12}{7};\ \frac{20}{7}\right)$ та $A_3\left(\frac{225}{43};\ \frac{22}{43}\right)$ максимального значення, є ознакою т.з. *альтернативного оптимуму*. Таким чином задача лінійного програмування має безліч розв'язків на максимум, кожне з яких є опуклою лінійною комбінацією координат вершин. З геометричної точки зору всі точки відрізка $[A_2A_3]$ також є оптимальні. Алгебраїчно альтернативний розв'язок записується у такому вигляді:

$$X_{\max}^{\text{opt}} = \lambda \cdot A_2 + (1-\lambda)\cdot A_2 \cdot \forall\lambda \in [0;1].$$

Відповідь:

$$X_{\max}^{\text{opt}} = \lambda \cdot A_2 + (1-\lambda)\cdot A_2 = \left\{\frac{225}{43} - \frac{1059}{301}\lambda;\ \frac{22}{43} + \frac{706}{301}\lambda\right\},\quad \lambda \in [0;1];$$

$$W_{\text{I}}^{\max} = 48;\quad X_{\min}^{\text{opt}} = \left\{-\frac{63}{29};\ -\frac{80}{29}\right\};\quad W_{\text{I}}^{\min} = -\frac{1464}{29}.$$

Завдання № 3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Математична модель економічної задачі. Економічний аналіз на підставі графічного розв'язку. Симетрична двоїста задача. Застосування основних теорем двоїстості

Фірма виготовляє два види продукції P_1 та P_2. Для їх виготовлення використовується три типи ресурсів S_1, S_2, S_3. Норми витрат ресурсу S_i на виготовлення одиниці продукції P_j складають a_{ij} одиниць. Загальні запаси ресурсів дорівнюють b_1, b_2, b_3 відповідно для S_1, S_2, S_3. Ціна реалізації одиниці $P_1 - c_1$, а P_2 становить c_2 грошових одиниць.

Вихідні дані наведено у вигляді табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Ресурси (продукція)	Норми витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції		Запаси ресурсів
S_1	a_{11}	a_{12}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	b_2

Продовж. табл. 3.1

Ресурси (продукція)	Норми витрат ресурсів на виробництво одиниці продукції		Запаси ресурсів
S_3	a_{31}	a_{32}	b_3
Ціна реалізації	c_1	c_2	–

1. Скласти математичну модель економічної задачі. Навести ґрунтовні коментарі.

2. Знайти план виробництва $X_{\max}^{opt} = \left\{ x_1^{\max};\ x_2^{\max} \right\}$, який забезпечує максимальний прибуток $W_{\text{I}}^{\max}$ від реалізації виготовленої продукції. Задачу розв'язати графічно. Навести ґрунтовну відповідь.

3. Скласти двоїсту задачу. Навести ґрунтовні коментарі. Знайти розв'язок двоїстої $Y_{\min}^{\text{opt}} = \left\{ y_1^{\min};\ y_2^{\min};\ y_3^{\min} \right\}$, $W_{\text{II}}^{\min}$ за допомогою розв'язку прямої. Навести ґрунтовну відповідь.

Вихідні дані завдання № 3.1

Група 1

Варіант № 1

S/P	P_1	P_2	b_i
S_1	7	10	70
S_2	11	6	66
S_3	8	7	56
c_i	2	3	#

Варіант № 2

S/P	P_1	P_2	b_i
S_1	6	8	48
S_2	10	4	40
S_3	7	5	35
c_i	4	5	#

Варіант № 3

S/P	P_1	P_2	b_i
S_1	7	10	70
S_2	11	6	66
S_3	8	7	56
c_i	2	3	#

Варіант № 4

S/P	P_1	P_2	b_i
S_1	6	6	36
S_2	10	2	20
S_3	7	3	21
c_i	4	4	#

Варіант № 5

S/P	P_1	P_2	b_i
S_1	5	6	30
S_2	9	2	18
S_3	6	3	18
c_i	4	6	#

Варіант № 6

S/P	P_1	P_2	b_i
S_1	6	9	54
S_2	10	5	50
S_3	7	6	42
c_i	3	4	#

Варіант № 7

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	11	66
S_2	10	7	70
S_3	7	8	56
c_i	3	5	#

Варіант № 8

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	5	25
S_2	9	1	9
S_3	6	2	12
c_i	3	2	#

Варіант № 9

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	5	30
S_2	10	1	10
S_3	7	2	14
c_i	4	4	#

Варіант № 10

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	5	35
S_2	11	1	11
S_3	8	2	16
c_i	4	2	#

Варіант № 11

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	6	42
S_2	11	2	22
S_3	8	3	24
c_i	2	5	#

Варіант № 12

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	5	35
S_2	11	1	11
S_3	8	2	16
c_i	3	5	#

Варіант № 13

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	6	42
S_2	11	2	22
S_3	8	3	24
c_i	4	4	#

Варіант № 14

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	6	36
S_2	10	2	20
S_3	7	3	21
c_i	3	6	#

Варіант № 15

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	11	66
S_2	10	7	70
S_3	7	8	56
c_i	2	3	#

Варіант № 16

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	11	55
S_2	9	7	63
S_3	6	8	48
c_i	4	3	#

Варіант № 17

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	5	25
S_2	9	1	9
S_3	6	2	12
c_i	3	3	#

Варіант № 18

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	9	54
S_2	10	5	50
S_3	7	6	42
c_i	3	6	#

Варіант № 19

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	8	40
S_2	9	4	36
S_3	6	5	30
c_i	3	5	#

Варіант № 20

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	9	54
S_2	10	5	50
S_3	7	6	42
c_i	3	4	#

Варіант № 21

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	8	56
S_2	11	4	44
S_3	8	5	40
c_i	2	2	#

Варіант № 22

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	5	25
S_2	9	1	9
S_3	6	2	12
c_i	2	2	#

Варіант № 23

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	5	30
S_2	10	1	10
S_3	7	2	14
c_i	2	3	#

Варіант № 24

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	10	70
S_2	11	6	66
S_3	8	7	56
c_i	2	6	#

Варіант № 25

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	10	50
S_2	9	6	54
S_3	6	7	42
c_i	3	2	#

Варіант № 26

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	10	50
S_2	9	6	54
S_3	6	7	42
c_i	4	2	#

Варіант № 27

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	7	49
S_2	11	3	33
S_3	8	4	32
c_i	3	2	#

Варіант № 28

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	10	70
S_2	11	6	66
S_3	8	7	56
c_i	2	4	#

Варіант № 29

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	11	77
S_2	11	7	77
S_3	8	8	64
c_i	3	6	#

Варіант № 30

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	10	60
S_2	10	6	60
S_3	7	7	49
c_i	4	3	#

Вихідні дані завдання № 3.1

Група 2

Варіант № 1

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	6	30
S_2	9	2	18
S_3	6	3	18
c_i	4	5	#

Варіант № 2

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	6	30
S_2	9	2	18
S_3	6	3	18
c_i	4	6	#

Варіант № 3

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	8	48
S_2	10	4	40
S_3	7	5	35
c_i	4	6	#

Варіант № 4

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	6	36
S_2	10	2	20
S_3	7	3	21
c_i	4	5	#

Варіант № 5

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	6	30
S_2	9	2	18
S_3	6	3	18
c_i	4	6	#

Варіант № 6

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	5	25
S_2	9	1	9
S_3	6	2	12
c_i	2	6	#

Варіант № 7

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	7	42
S_2	10	3	30
S_3	7	4	28
c_i	3	5	#

Варіант № 8

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	5	25
S_2	9	1	9
S_3	6	2	12
c_i	3	2	#

Варіант № 9

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	10	70
S_2	11	6	66
S_3	8	7	56
c_i	2	6	#

Варіант № 10

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	6	30
S_2	9	2	18
S_3	6	3	18
c_i	4	4	#

Варіант № 11

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	5	30
S_2	10	1	10
S_3	7	2	14
c_i	3	3	#

Варіант № 12

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	10	70
S_2	11	6	66
S_3	8	7	56
c_i	3	4	#

Варіант № 13

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	5	25
S_2	9	1	9
S_3	6	2	12
c_i	3	2	#

Варіант № 14

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	6	42
S_2	11	2	22
S_3	8	3	24
c_i	3	3	#

Варіант № 15

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	7	42
S_2	10	3	30
S_3	7	4	28
c_i	3	6	#

Варіант № 16

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	8	56
S_2	11	4	44
S_3	8	5	40
c_i	2	6	#

Варіант № 17

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	6	42
S_2	11	2	22
S_3	8	3	24
c_i	3	4	#

Варіант № 18

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	10	50
S_2	9	6	54
S_3	6	7	42
c_i	2	2	#

Варіант № 19

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	6	36
S_2	10	2	20
S_3	7	3	21
c_i	3	5	#

Варіант № 20

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	11	77
S_2	11	7	77
S_3	8	8	64
c_i	2	4	#

Варіант № 21

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	6	30
S_2	9	2	18
S_3	6	3	18
c_i	2	2	#

Варіант № 22

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	6	36
S_2	10	2	20
S_3	7	3	21
c_i	4	5	#

Варіант № 23

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	7	42
S_2	10	3	30
S_3	7	4	28
c_i	2	3	#

Варіант № 24

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	9	54
S_2	10	5	50
S_3	7	6	42
c_i	2	3	#

Варіант № 25

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	10	70
S_2	11	6	66
S_3	8	7	56
c_i	3	2	#

Варіант № 26

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	9	63
S_2	11	5	55
S_3	8	6	48
c_i	3	3	#

Варіант № 27

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	10	50
S_2	9	6	54
S_3	6	7	42
c_i	3	6	#

Варіант № 28

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	5	30
S_2	10	1	10
S_3	7	2	14
c_i	2	5	#

Варіант № 29

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	7	6	42
S_2	11	2	22
S_3	8	3	24
c_i	4	5	#

Варіант № 30

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	5	11	55
S_2	9	7	63
S_3	6	8	48
c_i	2	4	#

Модельний розв'язок завдання № 3.1(І)

Нехай маємо вихідні дані

S/P	P_1	P_2	b_j
S_1	6	15	90
S_2	10	11	110
S_3	7	12	84
c_i	3	2	#

1. Введемо $X = \{x_1, x_2\}$ – вектор плану виробництва, де x_1 – кількість виготовленої продукції P_1; x_2 – кількість виготовленої продукції P_2.

Задача зі знаходження оптимального плану зводиться до задачі

лінійного програмування

$$W_{\text{I}} = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$$

$$\Omega: \begin{cases} 6x_1 + 15x_2 \le 90, \\ 10x_1 + 11x_2 \le 110, \\ 7x_1 + 12x_2 \le 84, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Задача двовимірна, тому можливо розв'язати її графічно (рис. 6). Межі поліедру Ω наступні:

$$\omega_1 : \frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{6} = 1;\quad \omega_2 : \frac{x_1}{11} + \frac{x_2}{10} = 1;\quad \omega_3 : \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{7} = 1;\quad \omega_4 : x_1 = 0;\quad \omega_5 : x_2 = 0;$$

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x_1 + 11x_2 = 110, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow (11; 0).$$

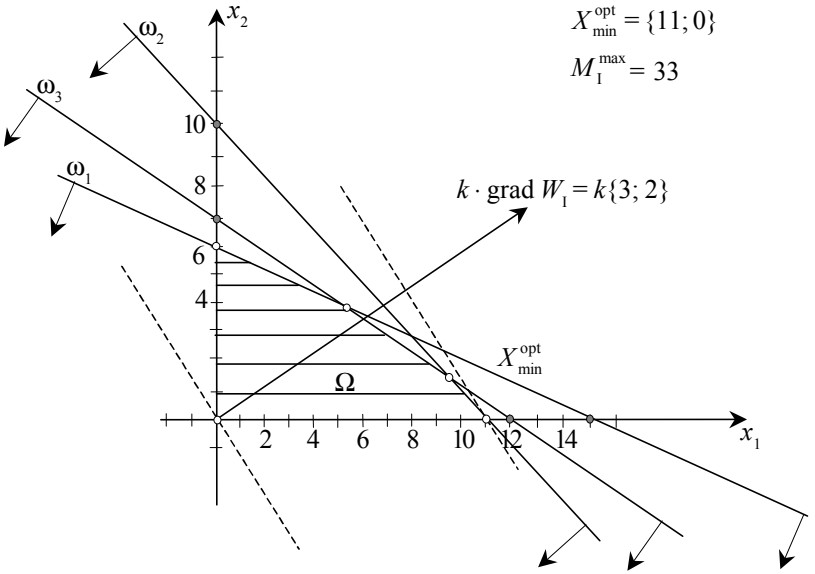

Рис. 6. Графічний розв'язок модельного прикладу задачі 3.1(I)

Оптимальний розв'язок прямої задачі $X_{\max}^{\text{opt}} = \{11;\ 0\}$, $W_{\text{I}}^{\max} = 33$.

Відповідь: для отримання максимального прибутку $W_{\text{I}}^{\max} = 33$ гр. од. необхідно виготовляти продукції P_1 у кількості $x_1 = 11$ од., а від виготовлення другого виду продукції P_2 відмовитись $x_2 = 0$.

2. Нехай $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ – маргінальні ціни одиниць ресурсів S_1, S_2, S_3 відповідно. Двоїста задача з мінімізації витрат має вигляд

$$W_{\text{II}} = 90y_1 + 110y_2 + 84y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 6y_1 + 10y_2 + 7y_3 \geq 3, \\ 15y_1 + 11y_2 + 12y_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Оскільки відомий розв'язок прямої задачі $W_{\text{I}}^{\max} = 33,\ X_{\max}^{\text{opt}} = \{11;\ 0\}$, то, використовуючи теорему двоїстості про доповнюючу нежорсткість, маємо

$$\begin{cases} \left(6x_1^{\text{opt}} + 15x_2^{\text{opt}} - 90\right) y_1^{\text{opt}} = 0, \\ \left(10x_1^{\text{opt}} + 11x_2^{\text{opt}} - 110\right) y_2^{\text{opt}} = 0, \\ \left(7x_1^{\text{opt}} + 12x_2^{\text{opt}} - 84\right) y_3^{\text{opt}} = 0, \\ \left(6y_1^{\text{opt}} + 10y_2^{\text{opt}} + 7y_3^{\text{opt}} - 3\right) x_1^{\text{opt}} = 0, \\ \left(15y_1^{\text{opt}} + 11y_2^{\text{opt}} + 12y_3^{\text{opt}} - 2\right) x_2^{\text{opt}} = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння системи $\left(6 \cdot 11 + 15 \cdot 0 - 90\right) y_1^{\text{opt}} = 0 \Leftrightarrow y_1^{\text{opt}} = 0;$

друге рівняння $\left(10 \cdot 11 + 11 \cdot 0 - 110\right) y_2^{\text{opt}} = 0 \Leftrightarrow y_2^{\text{opt}} \geq 0;$

третє рівняння $\left(7 \cdot 11 + 12 \cdot 0 - 84\right) y_3^{\text{opt}} = 0 \Leftrightarrow y_3^{\text{opt}} = 0;$

четверте $\left(6y_1^{\text{opt}} + 10y_2^{\text{opt}} + 7y_3^{\text{opt}} - 3\right) \cdot 11 = 0 \Leftrightarrow 6y_1^{\text{opt}} + 10y_2^{\text{opt}} + 7y_3^{\text{opt}} - 3 = 0;$

п'яте рівняння $\left(15y_1^{\text{opt}} + 11y_2^{\text{opt}} + 12y_3^{\text{opt}} - 2\right) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 15y_1^{\text{opt}} + 11y_2^{\text{opt}} +$ $+ 12y_3^{\text{opt}} - 2 \geq 0;$

Таким чином $y_1^{\text{opt}} = 0,\ y_3^{\text{opt}} = 0,\ 6 \cdot 0 + 10y_2^{\text{opt}} + 7 \cdot 0 - 3 = 0 \Leftrightarrow y_2^{\text{opt}} = \frac{3}{10}.$

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y_{\max}^{\text{opt}} = \left\{ 0;\ \frac{3}{10},\ 0 \right\},\ W_{\text{I}}^{\min} = 33.$

Збіжність оптимальних значень цільових функцій пари задач (прямої і двоїстої) підтверджує правильність розв'язку.

Відповідь: для забезпечення мінімальних витрат у розмірі $W_{\text{I}}^{\min} = 33$ гр. од. необхідно закупати другий ресурс за ціною не вище $\frac{3}{10}$ гр. од., оскільки $y_2^{\text{opt}} = \frac{3}{10}$. Перший та третій ресурси недефіцитні $y_1^{\text{opt}} = 0$, $y_3^{\text{opt}} = 0$. Залишки їх становлять 24 та 7 од. відповідно.

Модельний розв'язок завдання № 3.1(II)

Нехай маємо вихідні дані

S/P	P_1	P_2	b_i
S_1	8	9	72
S_2	12	5	60
S_3	9	6	54
c_i	4	2	#

1. Введемо $X = \{x_1, x_2\}$ – вектор плану виробництва, де x_1 – кількість виготовленої продукції P_1; x_2 – кількість виготовленої продукції P_2.

Задача зі знаходження оптимального плану зводиться до задачі лінійного програмування

$$W_{\text{I}} = 4x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$\Omega: \begin{cases} 8x_1 + 9x_2 \le 72, \\ 12x_1 + 5x_2 \le 60, \\ 9x_1 + 6x_2 \le 54, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Задача двовимірна, тому можна розв'язати її графічно (рис. 7). Межі поліедру Ω наступні:

$$\omega_1 : \frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{8} = 1;\quad \omega_2 : \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{12} = 1;\quad \omega_3 : \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{9} = 1;\quad \omega_4 : x_1 = 0;\quad \omega_5 : x_2 = 0;$$

$$X_{\max}^{\text{opt}} : \omega_2 \times \omega_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x_1 + 5x_2 = 60, \\ 9x_1 + 6x_2 = 54, \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{10}{3};\ 4 \right).$$

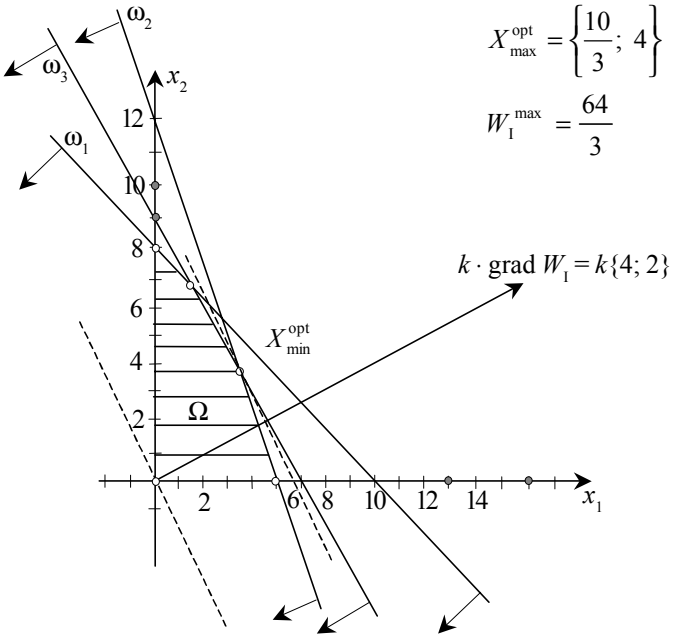

Рис. 7. Графічний розв'язок модельного прикладу задачі 3.1(II)

Оптимальний розв'язок прямої задачі $X_{\max}^{\text{opt}} = \left\{ \frac{10}{3};\ 4 \right\}$, $W_{\text{I}}^{\max} = \frac{64}{3}$.

Відповідь: Для отримання максимального прибутку $W_{\text{I}}^{\max} = \frac{64}{3}$ гр. од. необхідно виготовляти P_1 у кількості $x_1^{\text{opt}} = \frac{10}{3}$ од., а другий вид продукції P_2 $x_2^{\text{opt}} = 4$ од.

2. Нехай $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ – маргінальні ціни одиниць ресурсів S_1, S_2, S_3 відповідно. Двоїста задача з мінімізації витрат має вигляд

$$W_{II} = 72y_1 + 60y_2 + 54y_3 \to \min;$$
$$\begin{cases} 8y_1 + 12y_2 + 9y_3 \geq 4, \\ 9y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Оскільки відомий розв'язок прямої задачі $X_{\max}^{\text{opt}} = \left\{ \frac{10}{3};\ 4 \right\}$, то використовуючи теорему двоїстості про доповнюючу нежорсткість маємо

$$\begin{cases} \left(8x_1^{\text{opt}} + 9x_2^{\text{opt}} - 72\right) y_1^{\text{opt}} = 0, \\ \left(12x_1^{\text{opt}} + 5x_2^{\text{opt}} - 60\right) y_2^{\text{opt}} = 0, \\ \left(9x_1^{\text{opt}} + 6x_2^{\text{opt}} - 54\right) y_3^{\text{opt}} = 0, \\ \left(8y_1^{\text{opt}} + 12y_2^{\text{opt}} + 9y_3^{\text{opt}} - 4\right) x_1^{\text{opt}} = 0, \\ \left(9y_1^{\text{opt}} + 5y_2^{\text{opt}} + 6y_3^{\text{opt}} - 2\right) x_2^{\text{opt}} = 0. \end{cases}$$

Послідовно з рівнянь системи маємо

$$\left(8 \cdot \frac{10}{3} + 9 \cdot 4 - 72\right) y_1^{\text{opt}} = 0 \Leftrightarrow y_1^{\text{opt}} = 0;$$

$$\left(12 \cdot \frac{10}{3} + 5 \cdot 4 - 60\right) y_2^{\text{opt}} = 0 \Leftrightarrow y_2^{\text{opt}} \geq 0;$$

$$\left(9 \cdot \frac{10}{3} + 6 \cdot 4 - 54\right) y_3^{\text{opt}} = 0 \Leftrightarrow y_3^{\text{opt}} \geq 0;$$

$$\left(8y_1^{\text{opt}} + 12y_2^{\text{opt}} + 9y_3^{\text{opt}} - 4\right) \cdot \frac{10}{3} = 0 \Leftrightarrow 8y_1^{\text{opt}} + 12y_2^{\text{opt}} + 9y_3^{\text{opt}} - 4 = 0;$$

$$\left(9y_1^{\text{opt}} + 5y_2^{\text{opt}} + 6y_3^{\text{opt}} - 2\right) \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow 9y_1^{\text{opt}} + 5y_2^{\text{opt}} + 6y_3^{\text{opt}} - 2 = 0.$$

Таким чином $y_1^{opt} = 0$, $Y_{\min}^{opt}: \begin{cases} 12y_2^{opt} + 9y_3^{opt} = 4, \\ 5y_2^{opt} + 6y_3^{opt} = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \frac{2}{9};\ \frac{4}{27} \right\}$.

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y_{\max}^{\text{opt}} = \left\{ 0;\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{27} \right\}$, $W_{\text{II}}^{\min} = \frac{64}{3}$.

Збіжність оптимальних значень цільових функцій пари задач (прямої і двоїстої) підтверджує правильність розв'язку.

Відповідь: для забезпечення мінімальних витрат у розмірі

$W_{\text{II}}^{\min} = \frac{64}{3}$ гр. од. необхідно закупати другий ресурс за ціною не вище $\frac{2}{9}$ гр. од., оскільки $y_2^{\text{opt}} = \frac{2}{9}$, третій за ціною не більше $\frac{4}{27}$ гр. од., $y_3^{\text{opt}} = \frac{4}{27}$. Перший ресурс недефіцитний $y_1^{\text{opt}} = 0$. Залишки його становлять $\frac{28}{3}$ од.

3.2. Двоїстість в задачах лінійного програмування. Загальні правила переходу до двоїстих задач

До наведеної прямої задачі лінійного програмування скласти двоїсту, навести ґрунтовні пояснення, виконаних правил переходу:

$$W_1 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \to \text{opt};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 7x_5 \;?_1\; 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - a_{23}x_3 + x_4 - 5x_5 \;?_2\; 4, \\ a_{31}x_1 + 4x_2 - a_{33}x_3 - x_4 \;?_3\; 1, \\ x_1 - a_{42}x_2 - x_3 + 6x_4 - 3x_5 \;?_4\; 1, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ x_j \geq 0,\ x_k \geq 0.$$

Вихідні дані завдання № 3.2

Група 1

Таблиця 3.2

номер	$?_1$	$?_2$	$?_3$	$?_4$	opt	a_{11}	a_{23}	a_{31}	a_{33}	a_{42}	i	j	k
1	=	≤	≤	≥	min	2	–3	1	4	–3	–	1	3
2	≤	=	≥	=	max	1	4	–3	5	4	–	3	4
3	=	=	≥	=	min	–3	5	–4	4	–4	1	3	–
4	≥	≤	=	=	max	4	4	–5	3	3	1	2	3
5	≤	=	≤	≤	min	–5	3	4	4	2	2	–	–
6	≤	≥	=	=	max	4	4	–3	–4	2	1	2	–
7	≥	≤	≥	≥	min	–3	–4	4	5	–1	–	1	2
8	=	≤	≤	≤	max	4	5	–4	6	–3	2	–	3
9	=	≥	≤	≤	min	4	6	3	1	4	–	1	2
10	≤	=	≥	≥	max	–5	–7	2	1	–5	1	2	5
11	=	=	≥	=	min	6	–8	2	1	–4	4	5	–
12	≤	≥	=	=	max	7	7	–1	4	–4	1	3	4
13	=	=	≥	≥	min	8	7	–3	5	4	4	–	–
14	≥	≤	≤	=	max	7	–6	4	4	2	3	–	4
15	≤	=	≤	≤	min	6	5	–5	3	2	–	–	–
16	≤	≥	≥	=	max	5	6	–4	4	–1	–	2	3
17	≥	≤	=	=	min	6	7	–3	–4	–3	–	3	5
18	=	≤	≤	≤	max	7	8	4	5	4	1	3	–

20	≥	=	≥	≥	max	9	8	3	2	–4	2	–	–
21	≤	=	=	≤	min	8	7	1	3	–3	1	2	–
22	≤	≥	≤	≤	max	–7	6	2	1	4	–	–	5
23	≥	≤	≥	≥	min	–6	5	2	–2	4	2	–	3
24	=	≤	=	=	max	5	1	2	4	7	–	1	2
25	≤	≥	≤	=	min	6	–2	1	2	8	1	–	5
26	≤	=	≤	≥	max	7	3	–2	6	9	4	5	–
27	≥	=	≥	=	min	5	2	4	–7	8	1	4	–
28	=	≥	=	≤	max	4	–1	1	5	–7	5	–	–
29	=	=	≥	≥	min	3	–2	2	9	6	2	–	4
30	≥	≥	=	=	max	2	4	–2	3	–2	–	5	–

Вихідні дані завдання № 3.2

Група 2

Таблиця 3.3

номер	$?_1$	$?_2$	$?_3$	$?_4$	opt	a_{11}	a_{23}	a_{31}	a_{33}	a_{42}	i	j	k
1	=	≤	=	≥	max	5	4	1	4	4	–	2	4
2	≤	≥	≥	=	min	4	–5	–3	5	–3	–	4	5
3	=	≤	≤	≤	max	3	6	–4	4	4	2	4	–
4	≥	≤	≤	≥	min	4	4	–5	7	–4	2	3	4
5	≤	≥	≥	=	max	–4	3	4	–6	2	3	–	–
6	≤	=	=	=	min	5	4	–3	5	2	2	3	–

Продовж. табл. 3.3

номер	$?_1$	$?_2$	$?_3$	$?_4$	opt	a_{11}	a_{23}	a_{31}	a_{33}	a_{42}	i	j	k
7	≥	≤	=	≤	min	6	–4	4	6	–1	–	2	3
8	=	≤	≤	=	max	4	5	–4	7	–3	3	–	4
9	=	≥	≤	≤	min	4	6	3	8	4	–	1	5
10	≤	=	≥	≥	max	–5	–7	2	1	–5	1	4	5
11	=	=	≥	=	min	6	–8	2	1	–4	2	5	–
12	≤	≥	=	=	max	7	7	–1	4	–4	1	3	5
13	=	≤	≥	≥	min	8	7	–3	4	4	3	–	–
14	≥	≤	≤	=	max	7	–6	4	–3	2	1	–	4
15	≤	=	≤	≤	min	6	5	–5	4	2	–	–	–
16	≤	=	≥	≥	max	5	6	–4	–4	–1	–	1	3
17	≥	≤	=	=	min	6	7	–3	–4	–3	–	2	5
18	=	=	≤	=	max	7	8	4	5	7	1	4	–
19	=	≤	≤	≤	min	–8	9	4	6	–6	2	–	3
20	≥	=	≥	=	max	9	8	3	2	5	3	–	–
21	≤	=	=	≤	min	8	7	1	3	6	1	5	–
22	≤	≤	≤	≤	max	–7	6	2	1	7	–	–	4
23	≥	≥	≥	≥	min	–6	5	2	–2	8	2	–	4
24	=	=	≤	=	max	5	1	7	4	7	–	1	3
25	≤	=	≥	=	min	6	–2	–6	2	8	3	–	5
26	≤	≤	=	≥	max	7	3	5	6	9	1	5	–

27	≥	=	=	min	5	2	6	–7	8	1	2	–
28	=	≤	≤	max	4	–1	7	5	–7	4	5	–
29	=	=	≥	min	3	–2	8	9	6	1	3	4
30	≥	≥	=	max	2	4	–2	3	–2	–	2	–

Модельний розв'язок завдання № 3.2

Нехай маємо пряму задачу лінійного програмування у такому вигляді:

$$W_{\text{I}} = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 \geq 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 4, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 3, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Складаємо таблицю переходу до двоїстої задачі, використовуючи наступні правила:

для задачі на мінімум нерівності повинні мати відношення типу "≥";

тип оптимуму двоїстої задачі протилежний прямій;

кожному обмеженню прямої задачі ставиться у відповідність двоїста невідома. Обмеженню–рівнянню відповідає довільна за знаком невідома, обмеженню–нерівності ставиться у відповідність невід'ємна двоїста невідома;

кожній невідомій прямої задачі ставиться у відповідність обмеження спряженої задачі. Довільній за знаком невідомій відповідає обмеженню–рівнянню, а невід'ємній – обмеженню–нерівності протилежного смислу типу нерівностей прямій задачі;

коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі є правими частинами системи обмежень прямої задачі.

Враховуючи основні правила переходу заповнюємо табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Y	X						
	x_1	$x_2 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	x_4	x_5	I signum	B
$y_1 \geq 0$	1	–1	4	–3	4	≥	2
y_2	4	3	–3	2	–7	=	4
$y_3 \geq 0$	4	–3	–2	1	0	≥	–3
y_4	1	–4	–1	1	–3	=	1
II signum	=	≤	≤	=	=	#	#
C	2	4	3	1	0	#	#

За рядками прописана пряма задача, а за стовпчиками обернена. Алгебраїчна форма двоїстої задачі має вигляд

$$W_{\text{II}} = 2y_1 + 4y_2 - 3y_3 + y_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + 4y_3 + y_4 = 2, \\ -y_1 + 3y_2 - 3y_3 - 4y_4 \leq 4, \\ 4y_1 - 3y_2 - 2y_3 - y_4 \leq 3, \\ -3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ 4y_1 - 7y_2 - 3y_4 = 0, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0;\ y_3 \geq 0.$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 525 с.

2. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. *Бугір М.К.* Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі. – К.: Академія, 1998. – 272 с.

4. *Гетьманцев В.Д.* Лінійна алгебра і лінійне програмування. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.