

ISSN 2078-4481

Міністерство освіти і науки України
Херсонський національний технічний університет

ВІСНИК

**Херсонського національного
технічного університету**



Рекомендовано до друку Вченою радою
Херсонського національного технічного університету
(протокол № 7 від 30 червня 2016 року)

Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України
(Наказ МОН України № 820 від 11.07.2016 р.),
у яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів
доктора та кандидата технічних наук

Журнал включено до наукометричних баз, електронних бібліотек та репозитаріїв:
Національна бібліотека імені В.І. Вернадського, Google Scholar, РИНЦ (российский индекс
научного цитирования)

Херсон 2016

Бабічев С.А. Модель системи фільтрації профілів експресії генів нуклеотидів ДНК	304
Белінський І.В., Лемешко В.А. Фізичне моделювання процесу поширення збурень в двовимірному гранульованому середовищі в залежності від різних упаковок його структурних елементів	309
Бердник М.Г. Математичне моделювання температурних полів в порожнистому циліндрі, який обертається	314
Блажевський С.Г. Задача дифузії в тришаровому неоднорідному необмеженому середовищі з м'якими межами	319
Бразалук Ю.В., Евдокимов Д.В., Шульга Р.А. Сравнение эффективности методов конечных разностей и граничных элементов при решении эллиптических краевых задач в кольцевых областях	325
Воцелка С.А., Рожков С.А. Метод восстановления неизмеряемых координат ирригационного канала	331
Гоман О.Г., Катан В.А. Математическое моделирование ударного взаимодействия тела и жидкости со свободной поверхностью с использованием интегралов в смысле конечной части по Адамару	337
Горovenko А.П. Дифракція хвилі тиску на пружному включенні в рідині	342
Карасв А.О., Стрельникова О.О. Моделювання стадії гідродинамічного розширення центрального зіткнення важких йонів	347
Кныш Л.И., Гоман О.Г. Особенности моделирования энергомассопереноса в системе приёма тепла солнечной параболоцилиндрической станции	352
Лазурик В.Т., Попов Г.Ф., Саван Салах, Зісек З. Апробація методів диференціювання глибинного розподілу дози випромінювання, вимірюного методом дозиметричного клину	357
Ляшенко В.П., Кобильская Е.Б., Демьяненко О.П. Моделирование процесса распространения тепла в сферической области под действием импульсных источников	361
Макаренков Е.А., Сясев А.В., Клим В.Ю. Решение задачи теплопроводности для полого цилиндра	366
Мачулянський О.В., Бабич Б.Б., Мачулянський В.О., Тарасовська Н.П. Моделювання наноструктурних металодіелектричних систем для використання в якості оптичних фільтрів	371
Меньшиков Ю.Л. Синтез адекватной математической модели процесса выплавки стали	376
Миргород В.Ф., Гвоздева И.М., Деренг Е.В. Аналитическое решение систем интегральных уравнений Вольтерры с сепарабельными ядрами	380
Петрик М.Р., Михалик Д.М., Петрик О.Ю., Шинкарик М.І. Математичне моделювання двокомпонентної десорбції в нанопористому середовищі	384
Поливода В.В., Литвинчук Д.Г., Гавриленко В.О. Моделювання процесу вимірювання вологості в зерновій масі	388
Поляков В.А., Хачапуридзе Н.М. Модель тяги линейного синхронного двигателя	393
Редчиц Д.А., Моисеенко С.В. Численное моделирование обтекания турбулентным потоком транспортного средства вблизи экрана	398
Рудакова А.В., Поливода О.В., Омельчук А.А. Процедура идентификации параметров модели процесса перемещения крупногабаритного объекта	403
Сметанкіна Н.В., Угрімов С.В., Шупіков О.М. Математичне моделювання процесу нестационарного деформування багатопарового оскління при розподілених та локалізованих силових навантаженнях	408
Тарасов С.В., Тарасов А.С. Моделирование динамики консольных фрагментов упругих лопастей Н-роторов Дарье в потоке воздуха	414
Топчий Д.О., Хомченко А.Н. Компьютерное тестирование нестационарного температурного поля квадратной пластины с двенадцатью термоэлементами. Обзор результатов	421
Тулученко Г.Я., Старун Н.В., Селуянова Т.А. Про еквівалентність двох задач МСЕ	427
Удовенко В.В., Стрельникова Е.А. Сравнение экспериментальных аэродинамических характеристик профилей с результатами численного моделирования для режимов трансзвукового обтекания	433
Фильштинський Л.А., Носов Д.Н., Еременко А.А. Краевая задача механики разрушения новых магнитоэлектрoупругих материалов, ослабленных трещинами	438
Хомченко А.Н., Астионенко И.А. Гауссова кривизна серендиповых поверхностей или как прогнуть коноид	444
Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И. Нематричные схемы конденсации на серендиповых элементах ...	448
Шермет Г.П., Венгрович Д.Б., Губар І.Н. Моделювання еволюції поля напружень в неоднорідному геофізичному середовищі	452
Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Стрельникова Е.А. Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах	455

УДК 519.3

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморський національний університет імені Петра Могили

Е.И. ЛИТВИНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

НЕМАТРИЧНЫЕ СХЕМЫ КОНДЕНСАЦИИ НА СЕРЕНДИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

В работе на примере конечного элемента бикубической интерполяции конструируются математически обоснованные и физически адекватные серендиповы базисы путем исключения «внутренних» функций бикубического лагранжева базиса. Предложенная мультимодальная схема редукции позволяет устранить внутренние узлы, сохранив неузловые параметры в интерполяционном полиноме. Именно неузловые параметры позволяют управлять интегральными характеристиками конечноэлементных моделей.

Ключевые слова: конечный элемент, базисные функции, интерполяционный полином, нематричные схемы конденсации.

А.Н. ХОМЧЕНКО

Черноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

НЕМАТРИЧНІ СХЕМИ КОНДЕНСАЦІЇ НА СЕРЕНДИПОВИХ ЕЛЕМЕНТАХ

У роботі на прикладі скінченного елемента бікубічної інтерполяції побудовані математично обґрунтовані і фізично адекватні серендипові базиси шляхом виключення «внутрішніх» функцій бікубічного лагранжева базису. Запропонована мультимодальна схема редукції дозволяє виключити внутрішні вузли, при цьому зберігаючи невузлові параметри в інтерполяційному поліномі. Саме невузлові параметри дозволяють керувати інтегральними характеристиками скінченноелементних моделей.

Ключові слова: скінченний елемент, базисні функції, інтерполяційний поліном, нематричні схеми конденсації.

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

Ye.I. LITVINENKO

Kherson National Technical University

NON-MATRIX SCHEMES OF CONDENSATION ON SERENDIPITY ELEMENTS

In the research by the example of finite element of biquadratic interpolation the mathematically proved and physically adequate serendipity bases are built by means of excluding of “internal” functions of bicubic Lagrange bases. The suggested multimodal scheme of reduction allows to eliminate internal nodes keeping non-nodal parameters in the interpolation polynomial. These are non-nodal parameters which allow to control integral characteristics of finite element models.

Key words: finite element, basis functions, interpolation polynomial, non-matrix schemes of condensation

Введение

Термин «конденсация» в методе конечных элементов (МКЭ) означает снижение размерности системы уравнений при помощи исключения некоторых степеней свободы. Чтобы сократить общее число исходных степеней свободы, редуцированная система уравнений должна быть выражена в терминах заранее выбранных степеней свободы, которые хотят оставить. На конечных элементах высших порядков обычно избавляются от внутренних степеней свободы. Правда, матричный подход, как правило, приводит к физически неадекватным моделям. Поэтому лучше начинать с интегральных характеристик базисных функций. Речь идет о спектре узловых нагрузок, вызванных силой тяжести элемента. Понятно, что это обратная задача, когда по заказному спектру находят базис, реализующий такой спектр. Как известно, обратные задачи решаются неоднозначно, так что у пользователя появляется возможность выбирать. В статье на примере элемента бикубической интерполяции (12 узлов) конструируются математически обоснованные и физически адекватные серендиповы базисы путем исключения «внутренних» функций лагранжева базиса (12 узлов).

Анализ предшествующих результатов, цель работы

Матричная конденсация (редукция) описана в [1, 2]. Нематричные подходы описаны в [3, 4]. В работе [3] преобразование лагранжевых моделей в серендиповы выполнено в терминах узловых нагрузок. Процедура распределения внутренних нагрузок по граничным узлам основана на линейной комбинации вкладов отдельных внутренних узлов. В настоящей работе предложены более простые и понятные схемы конденсации. В статье [4] все внутренние нагрузки сконцентрированы в барицентре элемента. Такая унимодальная схема порождает семейство 13-параметрических моделей. Ниже мы используем мультимодальную схему, позволяющую увеличить число параметров, управляющих формообразованием базисных функций. Цель работы – привлечь внимание разработчиков математического обеспечения к нематричным схемам конденсации.

Основная часть

На рис. 1 показаны схемы исключения внутренних узлов лагранжева КЭ бикубической интерполяции (16 узлов).

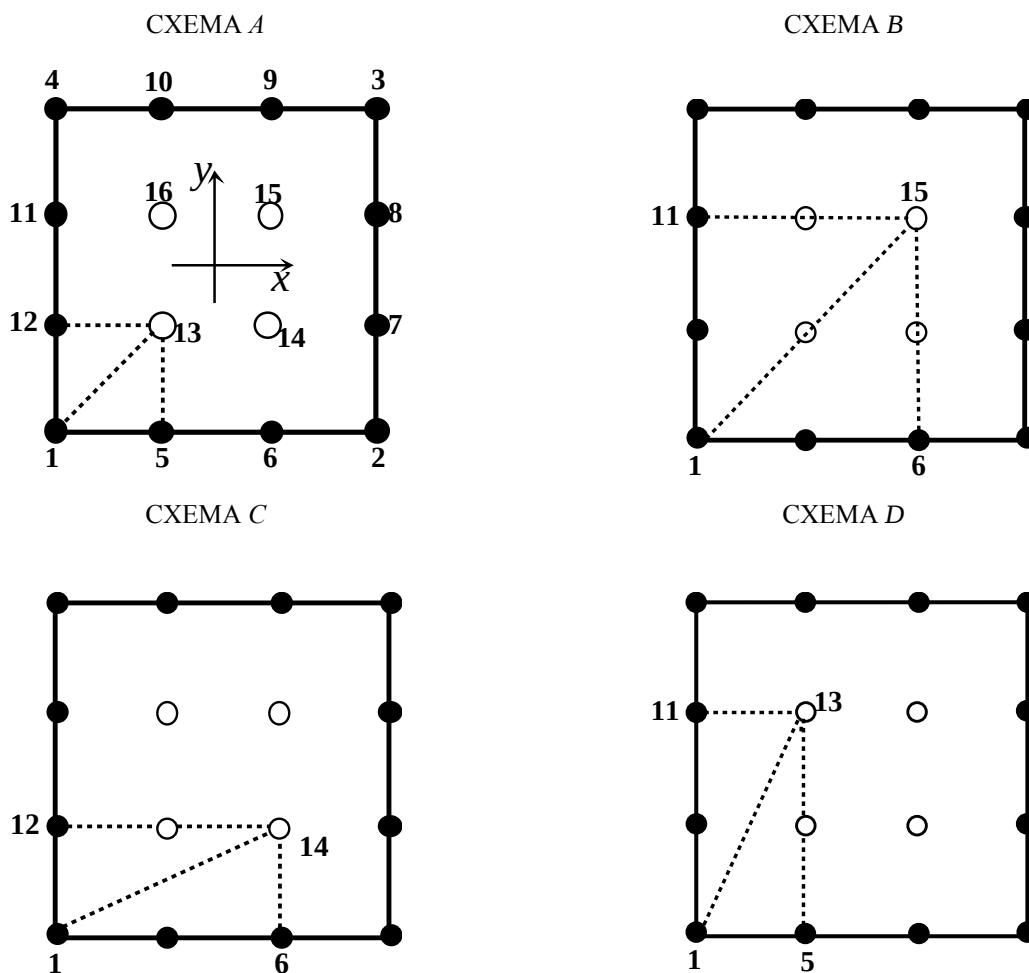


Рис. 1. Схемы исключения внутренних узлов лагранжева КЭ

Для получения серендипова базиса (12 полиномов) мы используем следующие функции лагранжева базиса:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{256} (1-x)(1-y)(1-9x^2)(1-9y^2), \\
 N_5(x, y) &= -\frac{9}{256} (1-x^2)(1-3x)(1-y)(1-9y^2), \\
 N_{13}(x, y) &= \frac{81}{256} (1-x^2)(1-y^2)(1-3x)(1-3y).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Остальные функции $N_i(x, y)$ лагранжева базиса генерируются функциями (1). Достаточно применить осевую и центральную симметрию и перестановку x и y . Все «угловые» функции получаются из

$N_1(x, y)$, «промежуточные» функции – из $N_5(x, y)$, «внутренние» – из $N_{13}(x, y)$. Интерполянт записывают так:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{16} N_i(x, y) \cdot f_i, \quad (2)$$

где f_i – известные значения функции $f(x, y)$ на границе КЭ и его внутренних узлах. Базисные функции удовлетворяют гипотезе Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{16} N_i(x, y) = 1. \quad (3)$$

В данном случае интерполянт (2) на границах квадрата $x = \pm 1, y = \pm 1$ изменяется по закону кубической параболы (бикубическая интерполяция).

Спектр узловых нагрузок от силы тяжести КЭ, как обычно, определяется по правилу интегрального усреднения:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad (4)$$

где D – область интегрирования ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$), S – площадь области D , γ_i – нагрузка в узле i . Вычисления по формуле (4) дают:

$$\gamma_i = \frac{1}{64}, i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{3}{64}, i = 5, 6, \dots, 12; \quad \gamma_i = \frac{9}{64}, i = 13, 14, 15, 16.$$

Заметим, что классическая задача лагранжевой интерполяции функции одного аргумента легко обобщается на функции двух аргументов путем прямого перемножения коэффициентов Лагранжа (1). В отличие от лагранжевых, серендиповы КЭ не имеют одномерных аналогов. Эта специфическая особенность серендипова семейства вызывает определенные трудности и привлекает внимание заинтересованных специалистов.

Предлагаемые схемы (рис. 1) исключают появление физически неадекватных спектров узловых нагрузок типа модели Зенкевича [5]. Моделирование серендипова базиса почти не нуждается в пояснениях. Каждая внутренняя функция корректирует три граничных функции. Получение функций $\bar{N}_1(x, y)$, $\bar{N}_5(x, y)$ и $\bar{N}_{12}(x, y)$ покажем на модели A .

Выберем физически естественный спектр узловых нагрузок. Например, $\gamma_i = 0, i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{8}, i = 5, \dots, 12$. Узловые нагрузки серендипова и лагранжева базисов связаны следующей корректирующей зависимостью:

$$\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + \alpha \cdot \gamma_{13}; \quad \bar{\gamma}_5 = \gamma_5 + \beta \cdot \gamma_{13}; \quad \bar{\gamma}_{12} = \gamma_{12} + \beta \cdot \gamma_{13}. \quad (5)$$

В данном случае $\alpha = -\frac{1}{9}; \beta = \frac{5}{9}$.

Заметим, что $\alpha + 2\beta = 1$.

Из (5) следует:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(x, y) &= N_1(x, y) - \frac{1}{9} N_{13}(x, y); \quad \bar{N}_5(x, y) = N_5(x, y) + \frac{5}{9} \cdot N_{13}(x, y), \\ \bar{N}_{12}(x, y) &= N_{12}(x, y) + \frac{5}{9} \cdot N_{13}(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка полиномов (1) в (6) дает:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(x, y) &= \frac{1}{128} (1-x)(1-y)(1-3x)(1-3y)(-4-3x-3y), \\ \bar{N}_5(x, y) &= \frac{9}{64} (1-x^2)(1-y)(-6x-y+1), \\ \bar{N}_{12}(x, y) &= \frac{9}{64} (1-y^2)(1-x)(-x-6y+1). \end{aligned} \quad (7)$$

Этих функций достаточно, чтобы получить весь базис модели A .

Если воспользоваться схемой C , получим новый базис с тем же спектром узловых нагрузок:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1(x, y) &= \frac{1}{128} (1-x)(1-y)(1+3x)(1-3y)(-4-6x-3y-9xy), \\ \bar{N}_6(x, y) &= \frac{9}{128} (1-x^2)(1-y)(1+3x)(1-3y)(2+y), \\ \bar{N}_{12}(x, y) &= \frac{9}{64} (1-y^2)(1-x)(1+3x)(1-3y)(1+2x).\end{aligned}\tag{8}$$

Этих функций достаточно, чтобы получить весь базис модели *C*. Аналогично получается модели *B* и *D*. Во всех случаях удовлетворяется интерполяционная гипотеза (3), а интерполянт (2) имеет теперь 12 слагаемых. Интересно отметить, что «угловые» поверхности всех моделей в центре КЭ имеют одинаковые аппликаты $\bar{N}_i(0; 0) = -\frac{1}{32}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Такое же свойство имеют все «промежуточные» поверхности

$\bar{N}_i(0; 0) = \frac{9}{64}$, $i = 5, \dots, 12$. Вдоль границ КЭ все функции изменяются одинаково по закону кубической параболы так, что сохраняется межэлементная непрерывность. Внутри КЭ рельеф поверхности $N_i(x, y)$ существенно зависит от схемы конденсации. Деформация квадратного шаблона в прямоугольный (рис. 1) вызывает нарушения геометрической изотропии базисной функции. Однако это не имеет нежелательных последствий, так как аномалии сглаживаются под действием других функций базиса.

Выводы

Мультимодальная схема редукции позволяет устранить внутренние узлы, сохранив неузловые параметры. Именно неузловые параметры позволяют управлять интегральными характеристиками моделей. При алгебраическом подходе такая возможность исключена.

Список использованной литературы

1. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 482 с.
3. Литвиненко Е. И. Внутренние моды конечных элементов: преобразование лагранжевых моделей в серендиповы / Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. Вып. 2 (45). – Херсон: ХНТУ, 2012. – С. 205-210.
4. Астионенко И. А. Конечные элементы высших порядков и барицентрическая конденсация / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Вестник Херс. нац. техн. ун-та. Вып. 3 (50). – Херсон: ХНТУ, 2014. – С. 208-212.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.