МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА
Национальный университет кораблестроения
имени адмирала Макарова

А. Н. КУЗНЕЦОВ, А. Л. ЧОРНЫЙ

ПРАКТИКУМ
ПО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛАМ

*Рекомендовано Методическим советом НУК
в качестве учебного пособия*

Электронное издание комбинированного
использования на DVD-ROM

НИКОЛАЕВ • НУК • 2011

УДК 517:618.3
ББК 22.172
К 89

Авторський колектив:
А. М. Кузнецов, кандидат фізико-математичних наук, професор Національного університету кораблебудування;
О. Л. Чорний, викладач

Рецензент Р. І. Зароський, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кузнецов А. М.
К 89 Практикум з визначених інтегралів : навчальний посібник / А. М. Кузнецов, О. Л. Чорний. – Миколаїв : Видавництво НУК, 2011. – 110 с.

Практикум містить близько 200 задач із визначених інтегралів і ставить за мету полегшити навчання, спонукати студентів до самостійних досліджень, що особливо важливо при переході на кредитно-модульну систему навчання.

Призначено для студентів-іноземців, а також буде корисним для всіх студентів і молодих викладачів.

УДК 517:618.3
ББК 22.172

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович
ЧОРНИЙ Олександр Леонідович

ПРАКТИКУМ З ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Навчальний посібник
(*російською мовою*)

Редактор *Л.О. Бєляєва*
Комп'ютерне складання та верстання *В.Г. Мазанко*
Коректор *М.О. Паненко*

© Кузнецов А. М., Чорний О. Л., 2011
© Видавництво НУК, 2011

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 6,5. Обсяг даних 2214 кб.
Тираж 14. Вид. № 5. Зам. № 478.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54025, м. Миколаїв, просп. Героїв Сталінграда, 9
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для будущего инженера очень важно уметь применять определенные интегралы для решения задач геометрии, физики, механики и техники.

В пособии рассматриваются основные свойства определенного интеграла и умение их применять на практике; способы точного применения формулы Ньютона–Лейбница, а также методика вывода рекуррентных формул; при нахождении приближенных значений интегралов по формуле Симпсона приведены программы расчетов на языке Pascal; рассматриваются способы нахождения несобственных интегралов.

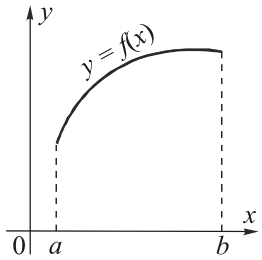
Данный практикум серии РЕШЕБНИК содержит решение почти 200 задач, взятых в основном из известного "Сборника задач по курсу математического анализа" Г.Н. Бермана.

Каждому разделу предшествуют краткие теоретические положения. Это дает возможность студенту решать столько задач, сколько ему необходимо, чтобы приобрести устойчивые навыки по указанной тематике.

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

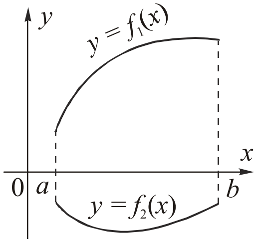
1.1. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с точки зрения геометрии есть



площадь криволинейной трапеции, заключенной между кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$ и $x = b$: $S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$

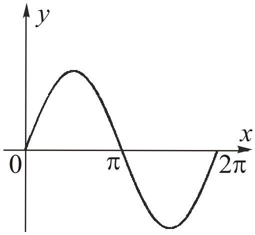
Если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, а также двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \geq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$, то $S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx.$



При вычислении определенного интеграла пользуемся формулой Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

1. Выразить при помощи интеграла площадь фигуры, ограниченной дугой синусоиды, которая соответствует интервалу $0 \leq x \leq 2\pi$, и осью абсцисс.



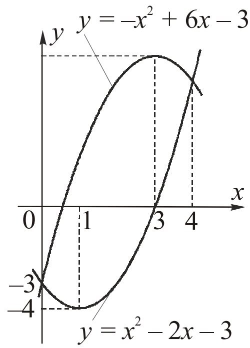
Решение

$$S = \int\limits_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = 2\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = -x^2 + 6x - 3$.

Решение

Ищем точки пересечения кривых:



$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y = -x^2 + 6x - 3 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0, \quad x_1 = 0,$$

$x_2 = 4.$

Строим кривые

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

и $y = -x^2 + 6x - 3 = -(x-3)^2 + 6.$

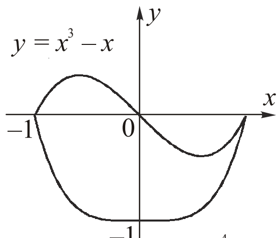
Площадь $S = \int\limits_0^4 ((-x^2 + 6x - 3) - (x^2 - 2x - 3))\,dx = \int\limits_0^4 (-2x^2 + 8x)\,dx =$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 \right]_0^4 = -\frac{2}{3} \cdot 4^3 + 4^3 = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^3 - x$ и $y = x^4 - 1$.

Решение

Ищем точки пересечения кривых:



$$\begin{cases} y = x^3 - x, \\ y = x^4 - 1 \end{cases} \Rightarrow x^3 - x = x^4 - 1 \text{ или}$$

$x(x-1)(x+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1) \Rightarrow x_1 = -1,$
$x_2 = -1.$

Строим кривые. Площадь $S=\int\limits_{-1}^{1}((x^3-x)-(x^4-1))\,dx=$

$$=\int\limits_{-1}^{1}(x^3-x-x^4+1)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}+x\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+1-$$

$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+1=\underline{\underline{\frac{8}{5}}}.$$

1.2. Оценка интеграла

Если $f(x)\le\varphi(x)$ при $a\le x\le b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\le\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx\,.$$

Если $f(x)$ непрерывна при $a\le x\le b$, m – наименьшее, а M – наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)\,dx\le M(b-a).$$

4. Доказать, что $\int\limits_0^{10}\frac{x\ dx}{x^3+16}$ меньше, чем $\frac{5}{6}$.

Доказательство

$f(x)=\frac{x}{x^3+16}$; $f'(x)=\frac{16-2x^3}{(x^3+16)^2}$; $f'(x)=0$ при $x=2$.

$f(0)=0$; $f(10)=\dfrac{10}{1016}$; $f(2)=\dfrac{1}{12} \Rightarrow M=\dfrac{1}{12}$, тогда

$\displaystyle\int_0^{10} \frac{x\,dx}{x^3+16} \le \frac{1}{12}\cdot 10=\frac{5}{6}$, что и требовалось доказать.

5. Доказать, что $I=\displaystyle\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx$ заключен между $\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}$ и $2e^2$.

Доказательство

$f(x)=e^{x^2-x}$; $f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$; $f'(x)=0$ при $x=\dfrac{1}{2}$;

$f(0)=1$; $f(2)=e^2$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e^{-1/4} \Rightarrow m=\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$; $M=e^2$.

$\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}} \le I \le 2e^2$, что и требовалось доказать.

В задачах **6–11** оценить интеграл.

6. $\displaystyle\int_{1,5}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx=I.$

Решение

$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$; $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $f'(x)=0$ при $x=0 \notin [1,5; 3,5]$ и $x=2$.

$f(1,5)=\dfrac{2,25}{0,5}=4,5$; $f(3,5)=\dfrac{12,25}{2,5}=4,9$;

$f(2)=4 \Rightarrow m=4$; $M=4,9$. $4\cdot 2 \le I \le 4,9\cdot 2$ или $\underline{\underline{8 \le I \le 9,8}}$.

7. $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx = I.$

Решение

$f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+2}$; $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2+2)^2}$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$.

$f(0) = 2{,}5; f(2) = 1{,}5 \Rightarrow m = 1{,}5;\ M = 2{,}5.$

$1{,}5 \cdot 2 \le I \le 2{,}5 \cdot 2$ или $\underline{\underline{3 \le I \le 5}}$.

8. $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} (1+\sin^2 x)\,dx = I.$

Решение

$f(x) = 1 + \sin^2 x$; $f'(x) = \sin 2x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$,

$2x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} n \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$

$x = \frac{\pi}{2}$, $\pi \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$;

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1 + \sin^2\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$; $f(\pi) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow m = 1$; $M = 2$. $\underline{\underline{\pi \le I \le 2\pi}}$.

9. $\int\limits_{1/2}^{5/2} \frac{x}{1+x^2}\,dx = I.$

Решение

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2};\quad f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};$$

$f'(x)=0$ при $x=1\in\left[\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}\right]$ и $x=-1$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}4;\quad f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{29};\quad f(1)=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ m=\frac{10}{29};$$

$$M=\frac{1}{2}.\quad \frac{10}{29}\cdot 2\le I\le\frac{1}{2}\cdot 2 \text{ или } \underline{\underline{\frac{20}{29}\le I\le 1}}.$$

10. $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}x\ dx=I.$

Решение

$f(x)=x\operatorname{arctg}x;\ f'(x)=\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{1+x^2};\ f'(x)=0$ при

$$x=0\notin\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3}\right].$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18};\quad f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$$

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\le I\le\frac{\sqrt{3}\pi}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ или } \underline{\underline{\frac{\pi}{9}\le I\le\frac{2}{3}\pi}}.$$

11. $\int\limits_{1/e}^{e} x^2 e^{-x^2}\,dx = I.$

Решение

$f(x) = x^2 e^{-x^2}$; $f'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x^3 e^{-x^2}$; $f'(0) = 0$

при $x = 0 \notin \left[\frac{1}{e};\ e\right]$, при $x = -1 \notin \left[\frac{1}{e};\ e\right]$ и при $x = 1 \in \left[\frac{1}{e};\ e\right]$.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e^2}}{e^2} = e^{-2-1/e^2};\ \ f(e) = e^2 \cdot e^{-e^2} = e^{2-x^2} = e^{2-e^2};\ \ f(1) = e^{-1}.$$

$-1 > -2 - \frac{1}{e^2} > 2 - e^2$, значит $\underbrace{e^{-1}}_{=M} > e^{-2-1/e^2} > \underbrace{e^{2-e^2}}_{=m}$, тогда

$e^{2-e^2}\left(e - \frac{1}{e}\right) < I < \left(e - \frac{1}{e}\right)e^{-1}$ или $\underline{\underline{\frac{e^2 - 1}{e^{e^2-1}} < I < \frac{e^2 - 1}{e^2}}}.$

12. Выяснить, какой из интегралов больше:

1) $I_1 = \int\limits_0^1 2^{x^2}\,dx$ или $I_3 = \int\limits_0^1 2^{x^3}\,dx$.

Решение

$2^{x^2} \geq 2^{x^3}$ $\forall x \in [0;\ 1]$, поэтому $I_1 \geq I_2$.

2) $I_1 = \int\limits_1^2 2^{x^2}\,dx$ или $I_2 = \int\limits_1^2 2^{x^3}\,dx$.

Решение

$2^{x^2} \leq 2^{x^3}$ $\forall x \in [1;\ 2]$, поэтому $I_1 \leq I_2$.

3) $I_1 = \int\limits_1^2 \ln x \; dx$ или $I_2 = \int\limits_1^2 (\ln x)^2 \, dx$.

Решение

$\ln x \ge (\ln x)^2 \quad \forall x \in [1;\ 2]$, поэтому $I_1 \ge I_2$.

4) $I_1 = \int\limits_3^4 \ln x \; dx$ или $I_2 = \int\limits_3^4 (\ln x)^2 \, dx.$

Решение

$\ln x \le (\ln x)^2 \quad \forall x \in [3;\ 4]$, поэтому $\underline{\underline{I_1 \le I_2}}$.

13. Доказать, что $0 < \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx < \frac{\sqrt{5}}{2}$, воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского:

$$\left| \int\limits_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx \right| \le \sqrt{\int\limits_a^b (f_1(x))^2\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_a^b (f_2(x))^2\, dx}.$$

Убедиться в том, что применение общего правила дает менее точную оценку.

Решение

Пусть $f_1(x) = \sqrt{1+x^3}$; $f_2(x) = 1$. Тогда

$$\left| \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\; dx \right| \le \sqrt{\int\limits_0^1 (1+x^3)\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_0^1 dx} = \sqrt{\left[x + \frac{x^4}{4} \right]_0^1} \cdot \sqrt{x\Big|_0^1} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\sqrt{1+x^3} > 0 \quad \forall x \in [0;\ 1] \;\Rightarrow\; \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx > 0 \text{ и } \left| \int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx \right| =$$

$= \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$ и данное неравенство справедливо:

$$0 < \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Применим общее правило оценки интеграла:

$$f_1'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}; \quad f'(x) = 0 \text{ при } x = 0 \in [0;\ 1].$$

$$f_1(0) = 1; \quad f_1(1) = \sqrt{2} \Rightarrow m = 1; \quad M = \sqrt{2}.$$

$$1 \le \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \le \sqrt{2}.$$

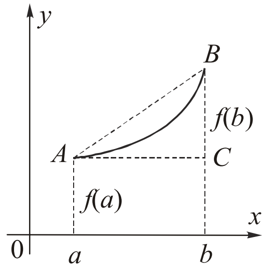
$\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}118$; $\sqrt{2} \approx 1{,}414$; $0 < 1$ и $\frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{2}$ и, как видим, применение общего правила дает менее точную оценку.

14. Доказать, исходя из геометрических соображений, следующие предложения:

1) если функция $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ возрастает и имеет вогнутый график, то

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Доказательство



$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{\text{крив.трап.}};$$

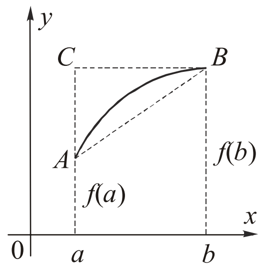
$$(b-a)f(a) = S_{aACb};$$

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = S_{aABb}.$$

Как видно из рисунка, $S_{aACb} < S_{\text{крив.трап.}} < S_{aABb}$, что и требовалось доказать;

2) если функция на отрезке $[a; b]$ возрастает и имеет выпуклый график, то $(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2} < \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx < (b-a)f(b)$.

Доказательство



$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{\text{крив.трап.}};$$

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = S_{aABb};$$

$$(b-a)f(b) = S_{aCBb}.$$

Как видно из рисунка, $S_{aABb} < S_{\text{крив.трап.}} < S_{aCBb}$, что и требовалось доказать.

15. Оценить интеграл $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$, пользуясь результатом задачи **14**.

Решение

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}; \quad b - a = 1; \quad f(2) = \frac{4}{1+4} = 0{,}8; \quad f(3) = \frac{9}{1+9} = 0{,}9.$$

$$f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2};$$

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(1+x^2)^2 - 2(1+x^2) \cdot 2x \cdot x}{(1+x^2)^4} = 2 \cdot \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} < 0$$

$\forall x \in [2;\ 3]$, то есть функция на $[2; 3]$ возрастает и имеет выпуклый график.

Применяем пункт 2 задачи **14**:

$$\frac{0{,}8 + 0{,}9}{2} < \underbrace{\int\limits_2^3 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}}_{I} < 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{0{,}85 < I < 0{,}90}}.$$

16. Оценить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$, пользуясь:

а) основной теоремой об оценке интегралов;
б) результатом задачи **14**;
в) неравенством Коши–Буняковского.

Решение

а) $f(x) = \sqrt{1+x^4}$; $f'(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$; $f'(x) = 0$

при $x = 0 \in [0;\ 1]$; $f(0) = 1$; $f(1) = \sqrt{2}$.

$$\underline{\underline{1 < I < \sqrt{2} \approx 1{,}414}}.$$

б) $$f''(x) = 2\cdot\frac{3x^2\sqrt{1+x^4} - \dfrac{x^3\cdot 4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} = 12x^2\,\frac{3-2x^4}{(1+x^4)^{3/2}};$$

$f''(x) > 0\ \ \forall x \in [0;\ 1]$ – кривая вогнута на $[0;\ 1]$.

$$1 < I < \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \text{или} \quad \underline{\underline{1 < I < 1{,}207}}.$$

в) $f_1(x) = \sqrt{1+x^4};\quad f_2(x) = 1.$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \le \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)\,dx}\cdot\sqrt{\int_0^1 dx} = \sqrt{\left[x + \frac{x^5}{5}\right]_0^1}\cdot\sqrt{x\Big|_0^1} = \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}095$$

тогда $\underline{\underline{1 < I < 1{,}095}}$.

1.3. Среднее значение функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$, то найдется такая точка $\xi \in (a;\ b)$, что

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}. \qquad (1)$$

$f(\xi)$ называется *средним значением функции* на промежутке $[a;\ b]$.

17. Вычислить среднее значение линейной функции $y = kx + b$ на отрезке $[x_1;\ x_2]$. Найти точку, в которой функция принимает это значение.

Решение

Согласно (1) $f(\xi)=\dfrac{\int\limits_{x_1}^{x_2}(kx+b)\,dx}{x_2-x_1}=\dfrac{\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=$

$=\underline{\underline{\dfrac{k}{2}(x_2-x_1)+b}}$, с другой стороны $k\xi+b=\dfrac{k}{2}(x_2-x_1)+b\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \underline{\underline{\xi=\dfrac{x_1+x_2}{2}}}.$

18. Вычислить среднее значение квадратной функции $y = ax^2$ на отрезке $[x_1; x_2]$. В скольких точках интервала функция принимает это значение?

Решение

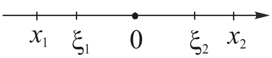
$$f(\xi)=\frac{\int\limits_{x_1}^{x_2}x^2\,dx}{x_2-x_1}=\frac{\frac{a}{3}(x_2^3-x_1^3)}{x_2-x_1}=\underline{\underline{\frac{a}{3}(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)}}.$$

$$a\xi^2=\frac{a}{3}(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\ \Rightarrow\ \xi_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{x_2^2+x_1x_2+x_1^2}{3}}.$$

а) Если $x_1x_2\ge 0$, то есть x_1 и x_2 одного знака, то тогда либо $\xi_1\in(x_1; x_2)$, либо $\xi_2\in(x_1; x_2)$. Значит, функция принимает среднее значение в *одной* точке.

б) Пусть $x_1<0$ и $x_2>0$. Выясним, при каких условиях $\xi_1<0$ и $\xi_2>0$ попадают в интервал $(x_1; x_2)$.

Из рисунка видно, что



$$x_1\le\xi_1<\xi_2\le x_2.$$

1) $x_1\le\xi_1$ или

$$x_1\le-\sqrt{\frac{x_2^2+x_1x_2+x_1^2}{3}}\ \Rightarrow\ 2x_2^2-x_1x_2-x_1^2\ge 0. \qquad (2)$$

В случае равенства $x_2 = \dfrac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 8x_1^2}}{4} = \dfrac{x_1 \pm 3x_1}{4}$ $\quad x_2' = x_1$ (не подходит); $x_2'' = -\dfrac{1}{2}x_1$. Неравенство (2) справедливо при $\underline{\underline{x_2 \ge -\dfrac{1}{2}x_1}}$.

2) $\xi_2 \le x_2$ или $\sqrt{\dfrac{x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2}{3}} \le x_2 \;\Rightarrow\; x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1^2 \ge 0.$ (3)

В случае равенства $x_2 = \dfrac{-x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + 8x_1^2}}{2} = \dfrac{-x_1 \pm 3x_1}{2}$ $\quad x_2' = -2x_1$, $x_2 = x_1$ (не подходит). Неравенство (3) справедливо при $\underline{\underline{x_2 \le -2x_1}}$.

Итак, если $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$, то при соблюдении неравенства $\underline{\underline{-\dfrac{x_1}{2} \le x_2 \le -2x_1}}$ функция принимает среднее значение в двух точках, в противном случае – в одной.

19. Вычислить среднее значение функции $y = 2x^2 + 3x + 3$ на отрезке [1; 4].

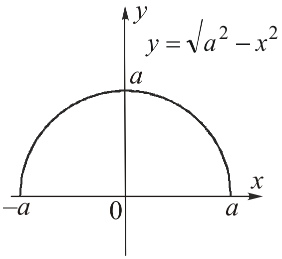
Решение

$$f(\xi) = \frac{\int_1^4 (2x^2 + 3x + 3)\,dx}{3} = \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\right]_1^4 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}(64-1) + \frac{3}{2}(16-1) + 3\cdot 3\right) = \frac{1}{3}\left(42 + \frac{45}{2} + 9\right) = \underline{\underline{24{,}5}}.$$

20. Исходя из геометрических соображений, вычислить среднее значение функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ на отрезке $[-a;\, a]$.

Решение



$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x=a\sin t, \\ dx=a\cos t\,dt, \end{array}\quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ a & \pi/2 \end{array}\right]=2a^2\int_{0}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=$$

$$=a^2\int_{0}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=a^2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\xi)=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{2a}=\underline{\underline{\frac{\pi a}{4}}}.$$

21. Исходя из геометрических соображений, указать среднее значение непрерывной нечетной функции на интервале, симметричном относительно начала координат.

Решение

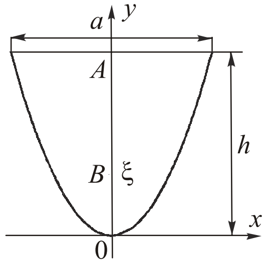
$f(\xi)=0$, так как $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$ ($f(x)$ – нечетная функция).

22. Сечение желоба имеет форму параболического сегмента. Основание его $a = 1$ м, глубина $h = 1{,}5$ м (см. рис.). Найти среднюю глубину желоба.

Решение

$y=kx^2;\ \ h=k\frac{a^2}{4}\ \Rightarrow\ k=\frac{4h}{a^2}=\frac{6}{1}=6.$ Поскольку $y = 6x^2$, то

$$f(\xi)=\frac{6\int\limits_{-0,5}^{0,5} x^2\,dx}{1}=6\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-0,5}^{0,5}=2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}\ \text{(м)},$$



то есть средняя глубина желоба $\underline{\underline{AB=\frac{2}{3}h}}$.

23. Напряжение электрической цепи в течении минуты равномерно увеличивается от $E_0 = 100$ В до $E_1 = 120$ В. Найти среднюю силу тока за это время. Сопротивление цепи 10 Ом.

Решение

$E = kt + E_0$, $120 = k_1 + 100 \Rightarrow \underline{\underline{k = 20}}$ и $\underline{\underline{E = 20t + 100}}$. Для постоянного тока $I=\dfrac{E}{R}$.

$$I_{\text{ср}}=\frac{\int\limits_0^1 (20t+100)\,dt}{R\cdot 1}=\frac{[10t^2+100t]_0^1}{10}=\frac{110}{10}=\underline{\underline{11\ (A)}}.$$

24. Напряжение электрической цепи равномерно падает, убывая на 0,4 В в минуту. Начальное напряжение в цепи 100 В. Сопротивление цепи 5 Ом. Найти среднюю мощность в течении первого часа работы.

Решение

Напряжение по условию задачи $E = 100 - 0{,}4t$. Для постоянного тока мощность тока $W=\dfrac{E^2}{R}$. $W_{\text{ср}}=\dfrac{\int\limits_0^t E^2\,dt}{R\cdot T}=\dfrac{\int\limits_0^{60}(100-0{,}4t)^2\,dt}{5\cdot 60}=$

$$=-\frac{1}{0{,}4\cdot 3\cdot 60}\Big[(100-0{,}4t)^3\Big]_0^{60}=\frac{1}{360}(100^3-76^3)\approx\underline{\underline{1558\ \text{Вт}}}.$$

1.4. Интеграл с переменным пределом

Пусть функция $f(x)$ интегрирована на отрезке $[a;\,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a;\,b]$. В этом случае функцию $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ называют *интегралом с переменным верхним пределом*, а производная от нее в точке x_0 $F'(x_0)=f(x_0)$. При выполнении этих условий функция $F(x)=\int\limits_x^b f(x)\,dt$ дифференцирована в точке x_0 и $F'(x_0)=-f(x_0)$.

25. Вычислить интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_1^x \left(\frac{x^3}{5}-\frac{x^4}{4}\right)dx$.

Решение

$$F(x)=\left[\frac{x^4}{20}-\frac{x^5}{20}\right]_1^x=\underline{\underline{\frac{x^4-x^5}{20}}}.$$

26. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти зависимость между пройденным расстоянием S и временем t, если известно, что за первые 3 с тело прошло 18 см, а движение началось в момент $t = 0$.

Решение

Скорость $v=\frac{ds}{dt}=kt^2$; $S(t)=\int\limits_0^t kt^2\ dt=\frac{kt^3}{3}$.

$$18=\frac{k\cdot 27}{3} \Rightarrow k=2 \text{ и } \underline{\underline{S(t)=\frac{2}{3}t^3}}.$$

27. Сила, действующая на материальную точку, меняется равномерно относительно пройденного пути. В начале пути она равнялась 100 Н, а когда точка переместилась на 10 м, сила возросла до 600 Н. Найти функцию, определяющую зависимость работы от пути.

Решение

Сила $F = kS + F_0$, $100 = k \cdot 0 + F_0 \Rightarrow F_0 = 100$; $F = 100 + kS$, $600 = 100 + k \cdot 10 \Rightarrow k = 50$. Итак, $F = 100 + 50S$. Если A – работа, то

$$dA = F \cdot dS \text{ и } A = \int_0^S F \cdot dS = \int_0^S (100 + 50S)\,dS = \underline{\underline{100S + 25S^2 \text{ (Дж)}}}.$$

28. Напряжение электрической цепи равномерно меняется. При $t = t_1$ оно равно E_1; при $t = t_2$ оно равно E_2. Сопротивление R постоянно, самоиндукцией и емкостью пренебрегаем. Выразить работу тока как функцию времени t, прошедшего от начала опыта.

Решение

$$E = \alpha t + \beta \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \alpha t_1 + \beta, \\ E_2 = \alpha t_2 + \beta \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1}}}, \quad \underline{\underline{\beta = \frac{E_1 t_2 - E_1 t_2}{t_2 - t_1}}}.$$

Элементарная работа тока $dA = \dfrac{E^2}{R}\,dt$, $A = \dfrac{1}{R}\displaystyle\int_0^t (\alpha t + \beta)^2\,dt$

и $\underline{\underline{A = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\alpha t^3}{3} + \alpha\beta t^2 + \beta t\right)}}$.

29. Теплоемкость тела зависит от температуры так: $C = C_0 + \alpha t + \beta t^2$. Найти функцию, определяющую зависимость количества тепла, полученного телом при нагревании от нуля до t, от температуры t.

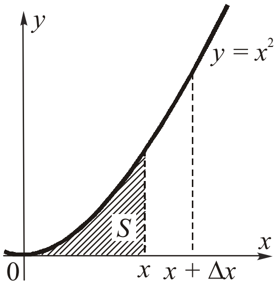
Решение

Теплоемкостью данного тела называется количество теплоты, необходимое для нагревания этого тела на 1°С. Если тело массы dm, то при нагревании его за промежуток времени dt будет израсходовано количество тепла $dQ = C\,dt$, тогда

$$Q = \int_0^t C\,dt = \int_0^t (C_0 + \alpha t + \beta t^2)\,dt = \underline{\underline{C_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \frac{\beta}{3}t^3}}.$$

30. Криволинейная трапеция ограничена параболой $y = x^2$, осью абсцисс и подвижной ординатой. Найти значение приращения ΔS и дифференциала dS площади трапеции при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Решение



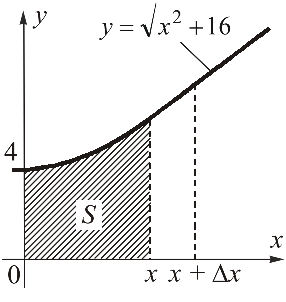
$S = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Приращение

$\Delta S = \frac{1}{3}(10{,}1^3 - 10^3) = \underline{\underline{10{,}10033}}$. Дифференциал

$dS = x^2\,dx = x^2 \Delta x = 100 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{10}}$.

31. Криволинейная трапеция ограничена линией $y = \sqrt{x^2 + 16}$, осями координат и подвижной ординатой. Найти значение дифференциала dS площади трапеции при $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}2$.

Решение



$$S = \int_0^x \sqrt{x^2 + 16}\,dx = \left(\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2}\,dx = \right.$$

$$\left. = \frac{x\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b}\ln\left|bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}\right| \right) =$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}+8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|\right]_0^x=\frac{x\sqrt{x^2+16}}{2}+8\ln\left|x+\sqrt{x^2+16}\right|-$$

$-2\ln 4$.

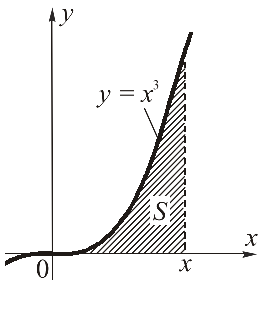
$$S'_x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+16}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\right)+8\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}}{x+\sqrt{x^2+16}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+16}+\right.$$

$$\left.+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}\right)+\frac{8}{\sqrt{x^2+16}};$$

$$S'_x\big|_{x=3}=\frac{1}{2}\left(5+\frac{9}{5}\right)+\frac{8}{5}=5.\quad dS=S'_x\cdot\Delta x=5\cdot 0{,}2=\underline{\underline{1}}.$$

32. Криволинейная трапеция ограничена линией $y=x^3$, осью абсцисс и подвижной ординатой. Найти значение приращения ΔS площади, ее дифференциал dS, абсолютную (α) и относительную $\left(\delta=\dfrac{\alpha}{\Delta S}\right)$ погрешности, возникающие при замене приращения дифференциалом, если $x=4$, а Δx принимает значения 1; 0,1 и 0,01.

Решение



$S=\int\limits_0^x x^3dx=\dfrac{x^4}{4}$. Приращение

$$\Delta S=\frac{1}{4}((x+\Delta x)^4-x^4)=(4x^3\Delta x+6x^2(\Delta x)^2+$$

$$+4x(\Delta x)^3+(\Delta x)^4)\frac{1}{4}.$$

$$dS=x^3\cdot\Delta x.$$

1) $x = 4$; $\Delta x = 1$: $\Delta S = (4\cdot 64 + 6\cdot 16 + 16 + 1)\dfrac{1}{4} = \underline{\underline{92{,}25}}$;

$dS = 4^3 \cdot 1 = 64$. $\alpha = \underline{\underline{28{,}25}}$; $\delta = \dfrac{28{,}25}{92{,}25} = \underline{\underline{0{,}306}}$.

2) $x = 4$; $2x = \pi n$: $\Delta S = \left(4\cdot 64\cdot 0{,}1 + 6\cdot 16\cdot 0{,}01 + 4\cdot 4\cdot 0{,}001\right)\dfrac{1}{4} =$

$= (25{,}6 + +0{,}96 + 0{,}016) = \underline{\underline{6{,}644}}$; $dS = 4^3 \cdot 0{,}1 = 6{,}4$; $\alpha = \underline{\underline{0{,}244}}$;

$\delta = \dfrac{0{,}244}{6{,}664} = \underline{\underline{0{,}037}}$.

3) $x = 4$, $\Delta x = 0{,}01$: $\Delta S = (4\cdot 64\cdot 0{,}01 + 6\cdot 16\cdot 0{,}0001 +$

$+ 4\cdot 4\cdot 0{,}000001) = 0{,}6424$; $dS = 4^3 \cdot 0{,}01 = 0{,}64$; $\alpha = \underline{\underline{0{,}0024}}$;

$\delta = \dfrac{0{,}0024}{0{,}6424} = \underline{\underline{0{,}004}}$.

33. Найти производную от функции $y = \displaystyle\int_0^x \frac{1 - t + t^2}{1 + t + t^2}\,dt$ при $x = 1$.

Решение

$y'(1) = \dfrac{1 - 1 + 1}{1 + 1 + 1} = \dfrac{1}{\underline{\underline{3}}}$.

34. Найти производную от функции $y = \displaystyle\int_0^x \sin x\,dx$ при $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$

и $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение

$y'(0) = \sin 0 = \underline{\underline{0}}$;

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$;

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{1}}$.

35. Чему равна производная от интеграла с переменным нижним и постоянным верхним пределом по нижнему пределу?

Решение

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x);$$

$$\left(\int_x^a f(t)\,dt\right)'_x = \left(-\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = \underline{\underline{-f(x)}}.$$

36. Найти производную от функции $y = \int_x^5 \sqrt{1+x^2}\,dx$ при $x=0$ и $x = \frac{3}{4}$.

Решение

$y'(0) = -\sqrt{1+0} = \underline{\underline{-1}}$; $y'\left(\frac{3}{4}\right) = -\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \underline{\underline{-\frac{5}{4}}}$.

37. Найти производную по x от функции $y = \int_0^{2x} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение

Пусть $2x = z$, тогда $y = \int\limits_0^z \frac{\sin x}{x} dx = y(z)$; $\underline{\underline{y'_x}} = y'_z \cdot z'_x = \frac{2\sin z}{z} =$

$$= \frac{2\sin 2x}{2x} = \underline{\underline{\frac{\sin 2x}{x}}}.$$

38. Найти производную по x от следующих функций:

1) $\int\limits_2^{e^x} \frac{\ln z}{z} dz$; 2) $\int\limits_{x^2}^1 \ln x \, dx$.

Решение

1) $\int\limits_1^{e^x} \frac{\ln z}{z} dz = e^x \frac{\ln e^x}{e^x} = \underline{\underline{x}}$;

2) $\int\limits_{x^2}^1 \ln x \, dx = -2x \ln x^2 = \underline{\underline{-4x \ln x}}$.

39. Найти производную по x от функции $\int\limits_{x^2}^{2x} \ln^2 x \, dx$.

Решение

$$\int\limits_x^{2x} \ln^2 x \, dx = \int\limits_x^a \ln^2 x \, dx + \int\limits_a^{2x} \ln^2 x \, dx = F(x) \quad (a \neq 0,\ a > 0).$$

$$F'(x) = -\ln^2 x + 2\ln^2 2x = \underline{\underline{2\ln^2 2x - \ln^2 x}}.$$

40. Найти производную по x от функции y, заданной неявно:

$$\int_0^y e^t\, dt + \int_0^x \cos t\, dt = 0.$$

Решение

$$e^y \cdot y'_x + \cos x = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y'_x = -\frac{\cos x}{e^y}}}.$$

41. Найти производную по x от функции y, заданной параметрически:

1) $x = \int_0^t \sin t\, dt$, $y = \int_0^t \cos t\, dt$. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t$.

2) $x = \int_1^{t^2} t \ln t\, dt$, $y = \int_{t^2}^1 t^2 \ln t\, dt$. $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = -\dfrac{2t(t^4 \ln t^2)}{2t(t^2 \ln t^2)} = \underline{\underline{-t^2}}$.

42. Найти значение второй производной по z от функции $y = \int_0^{z^2} \dfrac{dx}{1+x^3}$ при $z = 1$.

Решение

$$y'_z = 2z\frac{1}{1+z^6}; \quad y''_{zz} = 2 \cdot \frac{1-5z^6}{(1+z^6)^2}. \quad (y''_{zz})_{z=1} = \underline{\underline{-2}}.$$

43. При каком значении x функция $I(x) = \int_0^x x\, e^{-x^2}\, dx$ имеет экстремум? Чему он равен?

Решение

$I'_x(x) = x\,e^{-x^2}$; $I'(x) = 0$ при $x = 0$.

$I''(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$;

$I''(0) > 0 \Rightarrow$ минимум функции будет при $x = 0$, $\underline{\underline{I(0) = 0}}$.

44. Найти кривизну в точке (0; 0) линии, заданной условием

$$y = \int_0^x (1+t)\ln(1+t)\,dt.$$

Решение

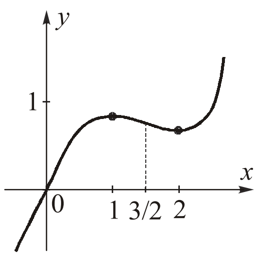
$y'_x = (1+x)\ln(1+x)$; $y''_x = \ln(1+x) + 1$. Кривизна $k = \dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$.

При $x = 0$ $\quad k = \dfrac{1}{(1+0)^{3/2}} = \underline{\underline{1}}$.

45,*а*. Найти экстремум и точки перегиба графика функции

$y = \int_0^x (x^2 - 3x + 2)\,dx$. Построить график этой функции.

Решение



$$y = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_0^x = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x}};$$

$y'_x = x^2 - 3x + 2$; $y'_x = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2};\quad x_1 = 2;\quad x_2 = 1.$$

$$y''_x = 2x - 3;\ y''(2) > 0;\ y''(1) < 1 \Rightarrow y_{\min} = y(2) = \frac{2}{3};$$

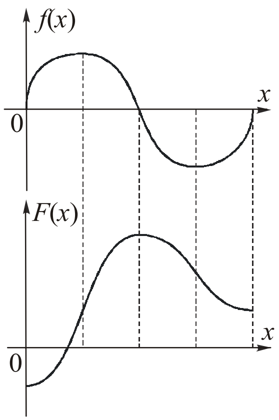
$$y_{\max} = y(1) = \frac{5}{6}.\ y''_x = 0 \text{ при } x = \frac{3}{2}.$$

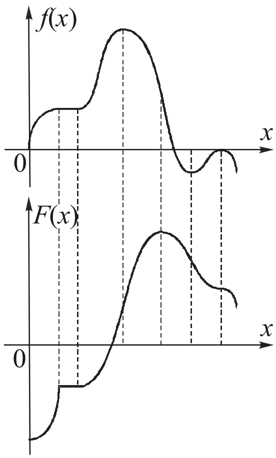
x	$x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
y''_x	–	0	+
y	$\cap$	$\frac{3}{4}$	$\cup$

По этим данным строим график функции (см. рис.).

45,*б*. По графикам функций, данным на рисунках, выяснить вид графиков первообразных.

Решение





1.5. Формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F'(x) = f(x).$$

46. Функция $f(x)$ имеет равные значения в точках $x = a$ и $x = b$ и непрерывную производную. Чему равен $\int\limits_a^b f'(x)\,dx$?

Решение

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = \underline{\underline{0}}.$$

47. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ составляет с осью абсцисс угол $\dfrac{\pi}{3}$ и в точке с абсциссой $x = b$ – угол $\dfrac{\pi}{4}$.

Вычислить $\int\limits_a^b f''(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b f'(x)\cdot f''(x)\,dx$; $f''(x)$ предполагается непрерывной.

Решение

а) $$\int\limits_a^b f''(x)\,dx = f'(b) - f'(a) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \underline{\underline{1-\sqrt{3}}}.$$

б) $$\int\limits_a^b f'(x)f''(x)\,dx = \int\limits_a^b f'(x)\,d(f'(x)) = \frac{1}{2}(f'(x))^2\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\left((f'(b))^2 - (f'(a))^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{2}(1-3) = \underline{\underline{-1}}.$$

§ 2. СПОСОБЫ ТОЧНОГО ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

2.1. Непосредственное применение формулы Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) = F(a).$$

48. $$\int_{1/2}^{\sqrt{3/2}} \frac{x^3\,dx}{\left(\frac{5}{8} - x^4\right)\sqrt{\frac{5}{8} - x^4}} = -\frac{1}{4}\int_{1/2}^{\sqrt{3/2}} \left(\frac{5}{8} - x^4\right)^{-3/2} d\left(\frac{5}{8} - x^4\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{8} - x^4}}\Bigg|_{1/2}^{\sqrt{3/2}} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

49. $$\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}} = \int_{-0,5}^{1} \frac{d(x-1)}{\sqrt{9 - (x-1)^2}} = \arcsin\frac{x-1}{3}\Bigg|_{-0,5}^{1} =$$

$$= \arcsin 0 - \arcsin(-0{,}5) = \arcsin 0{,}5 = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$

50. $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t \sin 2t - \cos t \cos 2t)\ dt =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}(\sin 3t+\sin t)-\frac{1}{2}(\cos 3t+\cos t)\right)dt=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos 3t-\right.$$

$$\left.-\cos t-\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi-\cos\frac{\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\sin\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

В задачах **51–60** интегрированием по частям найти интегралы:

51. $$\int_0^1 xe^{-x}\,dx=\begin{bmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=e^{-x}\,dx, & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=-\left.xe^{-x}\right|_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx=$$

$$=\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^1=-2e^{-1}+1=1-\frac{2}{e}.$$

52. $$\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx=\begin{bmatrix} u=x, & du=dx, \\ \cos x\,dx=dv, & v=\sin x\end{bmatrix}=\left.x\sin x\right|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=$$

$$=\left[x\sin x+\cos x\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1.$$

53. $$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{x\,dx}{\sin^2 x}=\left[\begin{matrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}, & v=-\operatorname{ctg} x\end{matrix}\right]=-x\operatorname{ctg}x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\operatorname{ctg}x\,dx=$$

$$=\left[-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=-\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}+\ln\sin\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\ln\sin\frac{\pi}{4}=$$

$$=-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{4}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\underline{\underline{\frac{\pi}{36}\left(9-4\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}}.$$

54. $$\int\limits_{0}^{\pi}x^3\sin x\,dx=I.$$

Рассмотрим $$\int x^3\sin x\,dx=\left[\begin{matrix} u=x^3, & du=3x^2\,dx, \\ dv=\sin x\,dx, & v=-\cos x\end{matrix}\right]=$$

$$=-x^3\cos x+3\int x^2\cos x\,dx=\left[\begin{matrix} u=x^2, & du=2x\,dx, \\ dv=\cos x\,dx, & v=\sin x\end{matrix}\right]=$$

$$=-x^3\cos x+3\left(x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx\right)=\left[\begin{matrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\sin x\,dx, & v=-\cos x\end{matrix}\right]=$$

$$=-x^3\cos x+3x^2\sin x-6\left(-x\cos x+\int\cos x\,dx\right)=$$

$$=-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x.$$

$$I=\left[-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x\right]_0^{\pi}=\underline{\underline{\pi^3-6\pi}}.$$

55. $$\int_1^2 x\log_2 x\ dx=\left[\begin{array}{ll} u=\log_2 x, & du=\dfrac{dx}{x\ln 2}, \\ dv=x\ dx, & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}\log_2 x\Big|_1^2-\frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 x\ dx=2-\frac{x^2}{4\ln 2}\Big|_1^2=\underline{\underline{2-\frac{3}{4\ln 2}}}.$$

56. $$\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx=\left[\begin{array}{ll} u=\ln(x+1), & du=\dfrac{dx}{x+1}, \\ dv=dx, & v=x \end{array}\right]=$$

$$=x\ln(x+1)\,\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{x\,dx}{x+1}=\Big[x\ln(x+1)-x+\ln|x+1|\Big]_0^{e-1}=$$

$$=(e-1)\ln e-e+1+\ln e=e-1-e+1+1=\underline{\underline{1}}.$$

57. $$\int_0^{a\sqrt{7}}\frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}=\left[\begin{array}{ll} u=x^2, & du=2x\ dx, \\ dv=\dfrac{x\ dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}, & v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d(a^2+x^2)}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}=\frac{3}{4}(a^2+x^2)^{2/3} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{3x^2}{4}(a^2+x^2)^{2/3}\Big|_0^{a\sqrt{7}}-\frac{3}{4}\int_0^{a\sqrt{7}}2x\,(a^2+x^2)^{2/3}\,dx=\frac{3x^2}{4}(a^2+x^2)^{2/3}\Big|_0^{a\sqrt{7}}-$$

$$-\frac{3}{4}\int_0^{a\sqrt{7}}(a^2+x^2)^{2/3}\,d(a^2+x^2)=\left[\frac{3}{4}x^2(a^2+x^2)^{2/3}-\frac{9}{20}(a^2+x^2)^{5/3}\right]_0^{a\sqrt{7}}=$$

$$=\frac{3}{4}(a^2+x^2)^{2/3}\left[x^2-\frac{3}{5}(a^2+x^2)\right]_0^{a\sqrt{7}}=\frac{3}{4}(8a^2)^{2/3}\left(7a^2-\frac{3}{5}\cdot 8a^2\right)+$$

$$+\frac{3}{4}(a^2)^{3/4}\cdot\frac{3}{5}a^2=\frac{33}{5}a^3\cdot\sqrt[3]{a}+\frac{9}{20}a^3\cdot\sqrt[3]{a}=\underline{\underline{\frac{141}{20}a^3\cdot\sqrt[3]{a}}}.$$

58. $$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx=\left[\begin{matrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}dx, \\ dv=\cos x\,dx, & v=\sin x\end{matrix}\right]=$$

$$=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\;dx=\left[\begin{matrix} u=e^{2x}, & du=2e^{2x}\,dx, \\ dv=\sin x\;dx, & v=-\cos x\end{matrix}\right]=$$

$$=e^{2x}\sin x+2\left(-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\pi/2}+2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\;dx\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\;dx=\frac{1}{5}\left[e^{2x}(2\cos x+\sin x)\right]_0^{\pi/2}=\underline{\underline{\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)}}.$$

59. $$\int_1^{e}\ln^3 x\;dx=\left[\begin{matrix} u=\ln^3 x, & du=\dfrac{3\ln^2 x}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right]=$$

$$=x\ln^3 x\Big|_1^e-3\int_1^e\ln^2 x\;dx=\left[\begin{matrix} u=\ln^2 x, & du=2\dfrac{\ln x}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right]=$$

$$=x\ln^3 x\Big|_1^e-3\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e\ln x\;dx\right)=\left[\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right]=$$

$$=\left[x\ln^3 x-3x\ln^2 x\right]_1^e+6\left(x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e dx\right)=\left[x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x-6x\right]_1^e=$$

$$=e-3e+e-6e+6=\underline{\underline{6-2e}}.$$

60. Составить рекуррентные формулы для вычисления интегралов $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ и $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ (n – целое положительное число или нуль) и вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2}\cos^8 x\,dx$; в) $\int_0^{\pi/2}\sin^{11} x\,dx$.

Решение

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos^{n-1}x\,d(\sin x)=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\cos^{n-1}x, & du=(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)\;dx, \\ dv=d(\sin x), & v=\sin x \end{bmatrix}=\cos^{n-1}x\sin x\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx=(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx.$$

$$I_n=I_{n-2}(n-1)-I_n(n-1)\quad\Rightarrow\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \sin^{n-1}, & du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\ dx, \\ dv = d(-\cos x), & v = -\cos x \end{array}\right] = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\ dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x)\ dx =$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\ dx - \int_0^{\pi/2} \sin^n x\ dx\right)(n-1).$$

$$I_n = I_{n-2}(n-1) - I_n(n-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}}. \qquad (1)$$

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\ dx = I_5.$

Согласно формуле (2) $\displaystyle I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} I_1 = \frac{8}{15}\int_0^{\pi/2} \sin x\ dx =$

$$= \frac{8}{15}[-\cos x]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{8}{15}}}.$$

б) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\ dx = I_8.$

Согласно выражению (1) $I_8 = \frac{7}{8} I_6 = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} I_4 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4} I_2 =$

$$= \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} I_0 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \approx \underline{\underline{0{,}429}}.$$

в) $\int_0^{\pi/2} \sin^{11} x \, dx = I_{11}$.

Согласно выражению (1) $I_{11} = \frac{10}{11} I_9 = \frac{10 \cdot 8}{11 \cdot 9} I_7 = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6}{11 \cdot 9 \cdot 7} I_5 =$

$$= \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5} I_3 = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} I_1 = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx =$$

$$= \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} (-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{256}{693}}}.$$

61. Составить рекуррентную формулу для вычисления интеграла $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$ (m и n – целые положительные числа или нули; исследовать частные случаи четных и нечетных значений m и n).

Решение

Пусть вообще m и n – рациональные числа. Подстановка $z = \sin^2 x$, $dz = 2 \sin x \cos x \, dx$ даст $\sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{1}{2} \sin^{m-1} x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \times$

$\times 2\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}(1-z)^{\frac{n-1}{2}} z^{\frac{m-1}{2}}\,dz$. Операция свелась к интегрированию дифференциального бинома:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-z)^{\frac{n-1}{2}} z^{\frac{m-1}{2}}\,dx = \frac{1}{2} I_{\frac{n-1}{2},\frac{m-1}{2}}.$$

Интеграл берется в конечном виде, если:

1) $\frac{n-1}{2}$ или $\frac{m-1}{2}$ – целое число, то есть если n или m есть нечетное число;

2) $\frac{n+m}{2}$ – целое число, то есть если $m + n$ есть четное число.

Для нашего случая, когда m и n – целые положительные числа или нули, можно поступить иначе.

Возьмем данный интеграл по частям, положив $u = \sin^{m-1}x$, $dv = \cos^n x\sin x\,dx$, тогда $du = (m-1)\sin^{m-2} x\cos x\,dx$, $v = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x$.

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x\;dx = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-n} x\cos^{n+1} x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x\cos^{n+2} x\;dx = \frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)\cos^n x\;dx =$$

$$= \frac{m-1}{n+1}\left[\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x\cos^n x\;dx - \underbrace{\int \sin^m x\cos^n x\;dx}_{I_{m,n}}\right] \Rightarrow \frac{m+n}{n+1} I_{m,n} =$$

$=\dfrac{m-1}{n+1}I_{m-2,n} \Rightarrow I_{m,n}=\dfrac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$; аналогично доказывается, что $I_{m,n}=\dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$. Итак,

$$I_{m,n}=\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}=\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}.$$

Рассмотрим отдельные случаи.

Если n – *нечетное*, тогда $I_{m,n}=\dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}=$

$$=\frac{(n-1)(n-3)}{(m+n)(m+12-2)}I_{m,n-4}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+3)}I_{m,1}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+3)}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^m x\,d\sin x=$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+3)}\cdot\left.\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\right|_0^{\pi/2}\Rightarrow$$

$$I_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+3)(m+1)}.$$

Аналогично, при m *нечетном* имеем

$$I_{m,n}=\frac{(m-1)(m-3)\cdots4\cdot2}{(m+n)(m+n-2)\cdots(n+3)(n+1)}.$$

Если m – *четное*, n – *четное*, то

$$I_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1(m-1)(m-3)\cdots3\cdot1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

62. Составить рекуррентную формулу и вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{0} x^n e^x dx$ (n – целое положительное число).

Решение

$$\int\limits_{-1}^{0} x^n e^x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^n, & du = nx^{n-1}\, dx, \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{bmatrix} = x^n e^x \Big|_{-1}^{0} - n\int\limits_{-1}^{0} x^{n-1} e^x\, dx =$$

$$= -\frac{(-1)^n}{e} - n\int\limits_{-1}^{0} x^{n-1} e^x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^{n-1}, & du = (n-1)x^{n-2}\, dx, \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{(-1)^n}{e} - n\left(x^{n-1} e^x \Big|_{-1}^{0} - (n-1)\int\limits_{-1}^{0} x^{n-2} e^x\, dx \right) = -\frac{(-1)^n}{e} + n\frac{(-1)^{n-1}}{e} +$$

$$+ n(n-1)\int\limits_{-1}^{0} x^{n-2} e^x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^{n-2}, & du = (n-2)x^{n-3}\, dx, \\ dv = e^x\, dx, & v = e^x \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{(-1)^n}{e} + n\frac{(-1)^{n-1}}{e} + n(n-1)\left(x^{n-2} e^x \Big|_{-1}^{0} - (n-2)\int\limits_{-1}^{0} x^{n-3} e^x\, dx \right) =$$

$$= -\frac{(-1)^n}{e} + n\frac{(-1)^{n-1}}{e} - n(n-1)\frac{(-1)^{n-2}}{e} - n(n-1)(n-2)\int\limits_{-1}^{0} x^{n-3} e^x\, dx \Rightarrow$$

$$I_n = -\frac{(-1)^n}{e} + n\frac{(-1)^{n-1}}{e} - n(n-1)\frac{(-1)^{n-2}}{e} - n(n-1)(n-2)I_{n-3} + \cdots + (-1)^n n! I_0,$$

где $I_0 = \int\limits_{-1}^{0} e^x\, dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = 1 - \dfrac{1}{e}.$

Таким образом, $I_n = -\frac{(-1)^n}{e} + n\frac{(-1)^{n-1}}{e} - n(n-1)\frac{(-1)^{n-2}}{e} +$

$$+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}n!}{e} + (-1)^n n! = \underline{\underline{(-1)^n n!\left[1 - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{1}{1!} + 1\right)\right]}}.$$

63. Доказать рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

(n – целое положительное число) и вычислить с ее помощью интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4}.$$

Решение

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^n} =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx, \\ dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^n}, & v = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)(1+x^2)^{n-1}} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} =$$

$= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$, что и требовалось доказать.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{x}{6(1+x^2)^3}\Bigg|_0^1 + \frac{5}{6}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{6(1+x^2)^3}\Bigg|_0^1 +$$

$$+\frac{5}{6}\left(\frac{x}{4(1+x^2)^2}\Bigg|_0^1 + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{x}{6(1+x^2)^3}\Bigg|_0^1 + \frac{5x}{24(1+x^2)^2}\Bigg|_0^1 +$$

$$+\frac{5}{8}\left(\frac{x}{2(1+x^2)}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) = \left[\frac{x}{6(1+x^2)^3} + \frac{5x}{24(1+x^2)^2} +\right.$$

$$\left.+\frac{5x}{16(1+x^2)} + \frac{5}{16}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{1}{48} + \frac{5}{24\cdot 4} + \frac{5}{16\cdot 2} + \frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}}}.$$

64. Доказать, что если $I_m = \int_1^e \ln^m x\,dx$, то $I_m = e - mI_{m-1}$ (m – целое положительное число).

Доказательство

$$I_m = \int_1^e \ln^m x\ dx = \begin{bmatrix} u = \ln^m x & dv = dx, \\ du = \dfrac{m\ln^{m-1} x}{x}dx, & v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x\ln^m x\Big|_1^e - \int_1^e \ln^{m-1} x\ dx = e - m\int_1^e \ln^{m-1} x\ dx = e - mI_{m-1},$$ что и требовалось доказать.

65. Найти $\int\limits_0^1 x^p (1-x)^q \, dx$ (p и q – целые положительные числа).

Решение

Обозначим интеграл от дифференциального бинома:

$$I_{q,p} = \int (a+bx)^q x^p dx.$$

Можно доказать [3, 54], что

$$I_{q,p} = \frac{(a+bx)^q x^{p+1}}{p+q+1} + \frac{aq}{p+q+1} I_{q-1,p}. \qquad (2)$$

В нашем случае $a = 1$, $b = -1$, тогда

$$\int\limits_0^1 (1-x)^q x^p \, dx = \left.\frac{(1-x)^q x^{p+1}}{p+q+1}\right|_0^1 + \frac{q}{p+q+1} \int\limits_0^1 (1-x)^{q-1} x^p \, dx.$$

Последовательно применяя формулу (2), получаем

$$\int\limits_0^1 (1-x)^q x^p \, dx = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+q+1)(p+q)\cdots(p+2)} \int\limits_0^1 x \, dx.$$

Окончательно $\int\limits_0^1 (1-x)^q x^p \, dx = \dfrac{q!}{(p+q+1)(p+q)\cdots(p+2)(p+1)} =$

$$= \frac{q!\, p(p-1)\cdots 1}{(p+q+1)(p+q)\cdots(p+2)(p+1)p(p-1)\cdots 1} = \frac{q!\, p!}{(p+q+1)!}.$$

Замечание. Подстановкой $x = \sin 2\, t$ можно свести интеграл к задаче **62**.

2.2. Замена переменной в определенном интеграле

66. $$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\;dx=\left[\begin{array}{ll} x=a\sin t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 \end{array} \\ dx=a\cos t\;dt, & \\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, & \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\;dt=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\;dt=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}=\underline{\underline{\frac{\pi a^2}{4}}}.$$

67. $$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\;dx=\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}=t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 2 \\ 9 & 3 \end{array} \\ x=t^2, & \\ dx=2t\,dt, & \end{array}\right]=\int\limits_2^3 \frac{t\cdot 2t\;dt}{\sqrt{t^2}-1}=2\int\limits_2^3\frac{t^2\;dt}{\sqrt{t^2}-1}=$$

$$=2\int\limits_2^3\frac{t^2\;dt}{t-1}=2\int\limits_2^3\frac{(t^2-1)+1}{t-1}\;dt=2\left(\int\limits_2^3(t+1)\;dt+\int\frac{dt}{t-1}\right)=$$

$$=2\left[\frac{(t+1)^2}{2}+\ln|t-1|\right]_2^3=2\left(8-\frac{9}{2}+\ln 2-\underbrace{\ln 1}_{=0}\right)=\underline{\underline{7+2\ln 2}}.$$

68. $$\int\limits_0^1\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}=\left[\begin{array}{ll} \sqrt{x}=t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \\ x=t^2, & \\ dx=2t\;dt, & \end{array}\right]=\int\limits_0^1\frac{2t^2\;dt}{1+t^2}=$$

$$=2\int\limits_0^1\frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt=2\left(\int\limits_0^1 dt-\int\limits_0^1\frac{dt}{1+t^2}\right)=2\left[t-\operatorname{arctg} t\right]_0^1=\underline{\underline{2-\frac{\pi}{2}}}.$$

69. $$\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}} = \left[\begin{matrix} \sqrt{1+x}=t, & 1+x=t^2, \\ x=t^2-1, & dx=2t\,dt, \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{array}\right] = \int_2^3 \frac{2(t^2-1)t\,dt}{t} =$$

$$= 2\int_2^3 (t^2-1)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_2^3 = 2\left(9-\frac{8}{3}-1\right) = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}.$$

70. $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{matrix} \sqrt{x}=t, \\ x=t^2, \\ dx=2t\,dt, \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right] = \int_0^1 \frac{2t^3\,dt}{1+t} = 2\int_0^1 \frac{(t^3+1)-1}{t+1}\,dt =$$

$$= 2\left(\int_0^1 (t^2-t+1)\,dt - \int_0^1 \frac{dt}{t+1}\right) = 2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right]_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right) = \underline{\underline{\frac{5}{3}-2\ln 2}}.$$

71. $$\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}\,dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} = \int_0^1 \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \left[\begin{matrix} e^x=t, \\ e^x dx=dt, \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & e \end{array}\right] = \int_1^e \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\Big|_1^e = \ln\left|e+\sqrt{1+e^2}\right| - \ln\left|1+\sqrt{2}\right| = \underline{\underline{\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}}}.$$

72. $$\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx = \left[\begin{array}{ll|l} \sqrt[3]{x-2}=t, & x & t \\ \hline x-2=t^2, & 3 & 1 \\ dx=3t^2\,dt, & 29 & 3 \end{array}\right] = 3\int_1^3 \frac{t^4\;dt}{3+t^2} =$$

$$= \int_1^3 \frac{3(t^4-9)+3\cdot 9}{t^2+3}\;dt = 3\int_1^3 (t^2-3)\;dt + 27\int_1^3 \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= 3\left[\frac{t^3}{3} - 3t + \frac{27}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^3 = 3\left(9 - \frac{1}{3} - 9 + 3 + \frac{27}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{27}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{8}{3} + \frac{27}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}/3}{1+1}\right) = 8 + \sqrt{3}\cdot 27\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot 3} =$$

$$= 8 + 27\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = 8 + \frac{27\sqrt{3}}{6}\pi = \underline{\underline{8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi}}.$$

73. $$\int_0^{\pi} \sin^6\frac{6\pi}{2}\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1 - 3\cos x + 3\cos^2 x - \cos^3 x)\;dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\left(1 - 3\cos x + 3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} - \cos^3 x\right)dx =$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{5}{2}x-3\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1-\sin^2 x)\ d(\sin x)=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{5}{2}x-4\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x+\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi}=\underline{\underline{\frac{5}{16}}}\pi.$$

74. $$\int_0^{\pi/4}\cos^7 2x\ dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-\sin^2 2x)^3\ d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1-3\sin^2 2x+3\sin^4 2x-\sin^6 2x)\ d(\sin 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin 2x-\sin^3 2x+\frac{3}{5}\sin^5 2x-\frac{1}{7}\sin^7 2x\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(1-1+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right)=\underline{\underline{\frac{8}{35}}}.$$

75. $$\int_0^1\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}=\left[\begin{array}{ll} u=x, & du=dx, \\ dv=\dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^3}, & v=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^3}=-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{x}{4(1+x^2)^2}\Bigg|_0^1+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\left[\text{согласно задания } \mathbf{70}\right]=$$

$$=-\frac{x}{4(1+x^2)^2}\Bigg|_0^1+\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{2(1+x^2)}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{4}=\underline{\underline{\frac{\pi}{32}}}.$$

76. $$\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx = \left[\begin{array}{ll} x=\operatorname{tg} t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & \pi/4 \\ \sqrt{3} & \pi/3 \end{array} \\ dx=\dfrac{\operatorname{tg} t}{\cos^2 t}, & \end{array}\right] = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\;dt}{\operatorname{tg}^2 t\cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t\sin^2 t} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(\cos^2 t+\sin^2 t)\;dt}{\cos t\sin^2 t} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos t} =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} + \int\limits_{\pi/3}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)} = \left[-\frac{1}{\sin t} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right|\right]_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi\right| - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right| = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{5}{12}\pi}{\operatorname{tg}\frac{3}{8}\pi}\right| =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\left|\frac{\operatorname{tg}75^\circ}{\operatorname{tg}67{,}5^\circ}\right| = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{150^\circ}{2}}{\operatorname{tg}\frac{135^\circ}{2}}\right| =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\left|\frac{\dfrac{1-\cos150^\circ}{\sin150^\circ}}{\dfrac{1-\cos135^\circ}{\sin135^\circ}}\right| = \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\left|\frac{\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right| =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}}}.$$

77. $$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}\,dx = \left[\begin{array}{l} x=\sin t, \\ dx=\cos t\;dt, \end{array}\quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \sqrt{2}/2 & \pi/4 \\ 1 & \pi/2 \end{array}\right] = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t\;dt}{\sin^6 t} =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1\cdot\cos^2 t\;dt}{\sin^6 t} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^4 t+\cos^2 t\sin^2 t}{\sin^6 t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^4 t\,\frac{dt}{\sin^2 t} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 t\,\frac{dt}{\sin^2 t} = -\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^4 t\;d(\operatorname{ctg} t) -$$

$$- \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^2 t\;d(\operatorname{ctg} t) = \left[-\frac{\operatorname{ctg}^5 t}{5} - \frac{\operatorname{ctg}^3 t}{e}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{5}+\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{15}}}.$$

78. $$\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x} = \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\cos t}, \\ dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \end{array}\quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 0 \\ 2 & \pi/3 \end{array}\right] = \int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\sin t\cos t\sin t}{\cos t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos^2 t} - \int\limits_{0}^{\pi/3} dt = [\operatorname{tg} t - t]_0^{\pi/3} = \underline{\underline{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}}.$$

79. $$\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{\cos t}, \\ dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \end{array}\quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \sqrt{2} & \pi/4 \\ 2 & \pi/3 \end{array}\right] = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin t\cos^5 t\cos t}{\cos^2 t\sin t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^4 t\;dt = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1+\cos 2t)^2}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{8}\sin\pi\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)=\underline{\underline{\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)}}.$$

80. $$\int\limits_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\,dx=\left[\begin{array}{ll} x=\sin t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \pi/2 \end{array} \\ dx=\cos t\,dt, & \end{array}\right]=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)^2\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\underline{\underline{\frac{3\pi}{16}}}.$$

81. $$\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{ll} x=\sin t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \pi/2 \end{array} \\ dx=\cos t\,dt, & \end{array}\right]=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{1}{8}\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\pi/2}=\underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$

82. $$\int_0^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx=\left[\begin{array}{ll} e^x=t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 1 \\ -\ln 2 & 1/2 \end{array} \\ e^x dx=dt, & \\ dx=\dfrac{dt}{t}, & \end{array}\right]=\int_1^{1/2}\sqrt{1-t^2}\,\frac{dt}{t}=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} t=\sin z, & \begin{array}{c|c} t & z \\ \hline 1 & \pi/2 \\ 1/2 & \pi/6 \end{array} \\ dt=\cos z\;dz, & \end{array}\right]=\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{\cos^2 z\;dz}{\sin z}=\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{1-\sin^2 z}{\sin z}\,dz=$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi/6}\frac{dz}{\sin z}-\int_{\pi/2}^{\pi/6}\sin z\;dz=\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right|+\cos z\right]_{\pi/2}^{\pi/6}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right|+$$

$$+\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{2}=\ln\operatorname{tg}15^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}=\ln\frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\ln\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(2-\sqrt{3}\right).}}$$

83. $$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{ll} x=\sin t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ a & \pi/2 \end{array} \\ dx=a\cos t\,dt, & \end{array}\right]=\int_0^{\pi/2}\frac{a\cos t\;dt}{a\sin t+a\cos t}=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\;dt}{\sin t+\cos t}=\left[\begin{array}{c}\text{разделим числитель и}\\ \text{знаменатель на }\cos t\end{array}\right]=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\operatorname{tg} t+1}=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} \operatorname{tg} t=z, & \begin{array}{c|c} t & z \\ \hline 0 & 0 \\ \pi/2 & \infty \end{array} \\ t=\operatorname{arctg} z, & \\ dt=\dfrac{dz}{1+z^2}, & \end{array}\right]=\int_0^{\infty}\frac{dz}{(1+z^2)(z+1)}=I.$$

$$\frac{1}{(1+z^2)(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz+C}{z^2+1};$$

$$1 = Az^2 + A + Bz^2 + Cz + Bz + C;$$

$$\left.\begin{array}{c|l} z^2 & A+B=0 \\ z^1 & C+B=0 \\ z^0 & A+C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = C = -\frac{1}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{z+1} - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z-1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\left[\ln|z+1| - \frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right| + \operatorname{arctg} z\right]_0^\infty =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{\sqrt{z^2+1}} + \operatorname{arctg} z\right]_0^\infty = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

84. $$\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}} = \left[\begin{array}{ll} x = \sqrt{3}\,\operatorname{tg} t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 3 & \pi/3 \end{array} \\ dx = \dfrac{\sqrt{3}\,dt}{\cos^2 t}, & \end{array}\right] = \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{3}\,dt}{\cos^2 t\left(\dfrac{3}{\cos^2 t}\right)^{5/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 9}\int_0^{\pi/3}\cos^3 t\,dt = \frac{1}{9}\int_0^{\pi/3}(1-\sin^2 t)\,d\sin t = \frac{1}{9}\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{24}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{24}}}.$$

85. $$\int\limits_{2,5}^{5}\frac{\left(\sqrt{25-x^2}\right)^3}{x^4}\,dx=\left[\begin{array}{ll} x=5\sin t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 2,5 & \pi/6 \\ 5 & \pi/2 \end{array} \\ dx=5\cos t\;dt, & \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{5\cdot125\cos^4 t\;dt}{5^4\sin^4 t}=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{(1-\sin^2 t)^2}{\sin^4 t}\,dt=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1-2\sin^2 t+\sin^4 t}{\sin^4 t}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^4 t}-\frac{2}{\sin^2 t}+1\right)dt=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^4 t}-\frac{2}{\sin^2 t}+1\right)dt=$$

$$=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}+\operatorname{ctg}^2 t\,\frac{1}{\sin^2 t}+1\right)dt=\left[\operatorname{ctg} t-\frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3}+t\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=-\sqrt{3}+\sqrt{3}+$$

$$+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}.$$

86. $$\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}}\frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\left[\begin{array}{ll} \operatorname{tg} t=x, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & \pi/6 \end{array} \\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}, & \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{dt}{(2\operatorname{tg}^2 t+1)\dfrac{1}{\cos t}\cos^2 t}=\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{\cos^2 t\;dt}{(2\sin^2 t+\cos^2 t)\cos t}=\int\limits_{0}^{\pi/6}\frac{d(\sin t)}{\sin^2 t+1}=$$

$$=\left[\sin t=z,\quad \begin{array}{c|c} t & z \\ \hline 0 & 0 \\ \pi/6 & 1/2 \end{array}\right]=\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dz}{z^2+1}=\operatorname{arctg} z\Big|_0^{1/2}=\underline{\underline{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}.$$

87. $$\int\limits_{\sqrt{8/3}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}} = \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos t}, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \sqrt{8/3} & \pi/6 \end{array} \\ dx = \dfrac{\sqrt{2}\sin t}{\cos^2 t}\,dt, & \begin{array}{c|c} 2\sqrt{2} & \pi/3 \end{array} \end{array} \right] =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sqrt{2}\sin t\cos t\cos^5 t\ dt}{\cos^2 t\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\sin^5 t} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}\,dt = [\text{см. задачу } \mathbf{85}] =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\operatorname{ctg} t - \frac{\operatorname{ctg}^3 t}{3} + t \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{27} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\frac{8\sqrt{3}}{27} + \frac{\pi}{6} \right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{48}}}.$$

2.3. Разные задачи

Теорема о среднем: если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(\xi),$$

из которого следует, что среднее значение

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

88. Вычислить среднее значение функции $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке [1; 4].

Решение

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 + 4 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{14}{3} + 2 = \frac{20}{3},$$

$$f(\xi) = \frac{20}{3\cdot 3} = \underline{\underline{\frac{20}{9}}}.$$

89. Вычислить среднее значение функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$ на отрезке [1; 1,5].

Решение

$$\int_1^{1,5} \frac{dx}{x^2 + x} = \int_1^{1,5} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^{1,5} = \ln\frac{6}{5},$$

$$f(\xi) = 2\ln\frac{6}{5} \approx \underline{\underline{0{,}365}}.$$

90. Вычислить среднее значение функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \sin^2 x$ на отрезке $[0; \pi]$.

Решение

$$1)\ \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2, \quad f_1(\xi) = \frac{2}{\pi}.$$

$$2)\ \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}, \quad f_2(\xi) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

91. Найти среднее значение функции $f(x)=\dfrac{2}{e^x+1}$ на отрезке [0; 2].

Решение

$$2\int\limits_0^2 \frac{dx}{e^x+1}=\left[\begin{array}{ll} e^x+1=t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 2 \\ 2 & e^2+1 \end{array} \\ x=\ln(t-1), & \\ dx=\dfrac{dt}{t-1}, & \end{array}\right]=2\int\limits_2^{e^2+1}\frac{dt}{(t-1)t}=2\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|_2^{e^2+1}=$$

$$=2\ln\frac{2e^2}{e^2+1},\quad f(\xi)=\ln\frac{2e^2}{e^2+1}=\underline{\underline{2+\ln\frac{2}{e^2+1}}}.$$

92. При каком a среднее значение функции $y=\ln x$ на отрезке [1; a] равно средней скорости изменения функции на этом отрезке.

Решение

$$\int\limits_1^a \ln x\ dx=\left[\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=dx, & v=x \end{array}\right]=x\ln x\Big|_1^a-\int\limits_1^a dx=x(\ln x-1)\Big|_1^a=$$

$$=a(\ln a-1)+1.$$

Среднее значение функции $f(\xi)=\dfrac{a(\ln a-1)+1}{a-1}$. Средняя скорость изменения реакции на [1; a]: $v_{\text{ср}}=\dfrac{\ln a}{a-1}$. Тогда $\dfrac{a(\ln a-1)}{a-1}=\dfrac{\ln a}{a-1}\Rightarrow$

$(a-1)(\ln a-1)=0$ и при $a\neq 1$ $\underline{\underline{a=e}}$.

В задачах **93–94** вычислить интегралы.

93. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3} = I.$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & C=0 \\ x^0 & A=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1, \\ B=-1, \\ C=0. \end{array}$$

$$I = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\bigg|_1^2 = \ln\frac{2}{\sqrt{5}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{8}{5}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}}}.$$

94. $\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9\,dx}{(1+x^5)^3} = \frac{1}{5}\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^5\,d(x^5+1)}{(1+x^5)^3} = \frac{1}{5}\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{(1+x^5)-1}{(1+x^5)^3}\,d(x^5+1) =$

$$= \frac{1}{5}\left(\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{d(x^5+1)}{(1+x^5)^2} - \int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{d(x^5+1)}{(1+x^5)^3}\right) = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{1+x^5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x^5)^2}\right]_0^{\sqrt[5]{2}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{45}}}.$$

2.4. Приближенное вычисление интегралов

В задачах **95–100** вычислить приближенно, пользуясь формулой Симпсона, интегралы, которые не могут быть найдены в конечном виде с помощью элементарных функций. Число n частичных интервалов задается в скобках.

95. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx \quad (n=10).$

Программа на языке Pascal:

```
program Pr1;
function fun(x:real):real;
  begin
        fun:=sqrt(1-x*x*x);
  end;
var
  a,b,S:real;
  n,i:integer;
begin
  a:=0;
  b:=1;
  n:=10;
  S:=fun(a)+fun(b);
  for i:=1 to n-1 do
        if i mod 2 = 1
              then S:=S+4*fun(a+i*(b-a)/n)
              else S:=S+2*fun(a+i*(b-a)/n);
  writeln('Integral = ',S*(b-a)/(3*n):0:5);
  readln;
end.
```

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx \approx \underline{\underline{0{,}84131}}.$$

96. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \quad (n=10).$

```
program Pr2;
function f(x:real):real;
  begin
        f:=sqrt(1+x*x*x*x);
  end;
var
  a,b,S:real;
  n,i:integer;
begin
  a:=0;
  b:=1;
  n:=10;
  S:=f(a)+f(b);
  for i:=1 to n-1 do
        if i mod 2 = 1
              then S:=S+4*f(a+i*(b-a)/n)
              else S:=S+2*f(a+i*(b-a)/n);
  writeln('Integral = ',S*(b-a)/(3*n):0:6);
  readln;
end.
```

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx \underline{\underline{1{,}089429}}.$$

97. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{\ln x} \quad (n=6).$

```
program Pr3;
function f(x:real):real;
  begin
        f:=1/ln(x);
  end;
```

```
var
  a,b,S:real;
  n,i:integer;
begin
  a:=2;
  b:=5;
  n:=6;
  S:=f(a)+f(b);
  for i:=1 to n-1 do
       if i mod 2 = 1
            then  S:=S+4*f(a+i*(b-a)/n)
            else  S:=S+2*f(a+i*(b-a)/n);
  writeln('Integral = ',S*(b-a)/(3*n):0:6);
  readln;
end.
```

$$\int_2^5 \frac{dx}{\ln x} \approx \underline{\underline{2{,}589425}}.$$

98. $\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos\varphi}\, d\varphi \quad (n = 10).$

```
program Pr4;
function f(x:real):real;
  begin
       f:=sqrt(cos(x));
  end;
var
  a,b,S:real;
  n,i:integer;
begin
  a:=0;
  b:=pi/3;
  n:=10;
  S:=f(a)+f(b);
```

```
  for i:=1 to n-1 do
        if i mod 2 = 1
              then S:=S+4*f(a+i*(b-a)/n)
              else S:=S+2*f(a+i*(b-a)/n);
  writeln('Integral = ',S*(b-a)/(3*n):0:6);
  readln;
end.
```

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos\varphi}\, d\varphi \approx \underline{\underline{0{,}948025}}.$$

99. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\sin^2\varphi}\, d\varphi \quad (n=6).$

```
program Pr5;
function f(x:real):real;
  begin
        f:=sqrt(1-0.1*sin(x)*sin(x));
  end;
var
  a,b,S:real;
  n,i:integer;
begin
  a:=0;
  b:=pi/2;
  n:=6;
  S:=f(a)+f(b);
  for i:=1 to n-1 do
        if i mod 2 = 1
              then S:=S+4*f(a+i*(b-a)/n)
              else S:=S+2*f(a+i*(b-a)/n);
  writeln('Integral = ',S*(b-a)/(3*n):0:6);
```

```
  readln;
end.
```

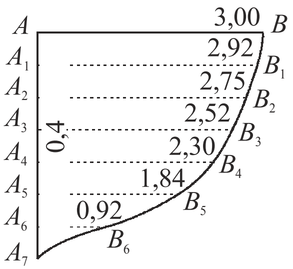
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\sin^2\varphi}\, d\varphi \approx \underline{\underline{1{,}530758}}.$$

100. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad (n=10).$

```
program Pr6;
function f(x:real):real;
  begin
        f:=sin(x)/x;
  end;
var
  a,b,S:real;
  n,i:integer;
begin
  a:=0,0001;
  b:=pi/3;
  n:=10;
  S:=f(a)+f(b);
  for i:=1 to n-1 do
        if i mod 2 = 1
              then S:=S+4*f(a+i*(b-a)/n)
              else S:=S+2*f(a+i*(b-a)/n);
  writeln('Integral = ',S*(b-a)/(3*n):0:6);
  readln;
end.
```

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{x}\, dx \approx \underline{\underline{0{,}985459}}.$$

101. Вычислить площадь поперечного сечения судна при следующих данных (см. рис.):



$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4 \text{ м},$$

$$AB = 3 \text{ м}, \quad A_1B_1 = 2{,}92 \text{ м}, \quad A_2B_2 = 2{,}75 \text{ м},$$

$$A_3B_3 = 2{,}52 \text{ м}, \quad A_4B_4 = 2{,}30 \text{ м}, \quad A_5B_5 = 1{,}84 \text{ м},$$

$$A_6B_6 = 0{,}92 \text{ м}.$$

Решение

По формуле трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + +y_2 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

В нашем случае площадь сечения

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_7}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6\right) =$$

$$= 0{,}4 \cdot (1{,}5 + 2{,}92 + 2{,}75 + 2{,}52 + 2{,}30 + 1{,}84 + 0{,}92) = 5{,}9 \text{ м}^2.$$

По более точной формуле Симпсона $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\big(y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\big)$ с учетом площади последнего треугольника имеем, что $S \approx \frac{0{,}4}{3}\big(3 + 0{,}92 + 2(2{,}75 + 2{,}30) + 4(2{,}92 + 2{,}52 + 1{,}84)\big) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}92 \approx 5{,}936 \text{ м}^2.$

§ 3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассматриваются интегралы с бесконечными пределами, интегралы от разрывных функций и разные задачи, требующие, как правило, специальных приемов решения.

Рассмотрим основные теоретические положения, на основании которых решаются задачи **102–198**.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty]$, или $(-\infty;+\infty)$, или $(-\infty;b]$. Примем по определению:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx;$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\,dx, \quad c\in(-\infty;+\infty). \tag{1}$$

Если существуют конечные пределы в правых частях равенств (1), то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае – расходящимися.

На основании этих определений решаются задачи **102–121**, **129**.

Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках отрезка $[a;\ b]$ за исключением точки a, или точки b, или точки c $(a<c<b)$, или точек a и b, в окрестности которых она не ограничена.

Для этих случаев примем по определению:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^b f(x)\,dx; \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to c-0}\int_a^\beta f(x)\,dx + \lim_{\alpha\to c+0}\int_\alpha^b f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^d f(x)\,dx + \lim_{\beta\to b-0}\int_d^\beta f(x)\,dx \ \ (a<d<b).$$

На основании этих определений решаются задачи **130–147**.

Вопрос о сходимости или расходимости несобственных интегралов в задачах **122–126**, **128** решается на основании следующего признака сравнения: если для $\forall x \in [a; +\infty)$ функции $f(x) \geq 0$ и $\varphi(x) \geq 0$, и $f(x) \leq \varphi(x)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если сходится $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится, если расходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Признаки сходимости или расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны вышеуказанным.

Можно применить предельный признак сравнения: если в промежутке $[a; +\infty)$ или $[a; b)$ функции $\varphi(x) > 0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k$ или $\lim\limits_{x\to b-0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k_1$, где k_1 и $k \neq 0$, то несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ или $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx$, $\int\limits_a^{b} \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Функцию $f(x)$ назовем бесконечно малой порядка λ по сравнению с $\dfrac{1}{x}$, если отношение $f(x) : \dfrac{1}{x^\lambda} = f(x) \cdot x^\lambda$ при $x \to \infty$ стремится к конечному и отличному от нуля пределу.

Сформируем удобный на практике частный признак сравнения: если при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\lambda > 0$ по сравнению с $\dfrac{1}{x}$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \leq 1$.

Этот признак применим к задачам **127**, **155**, **156**, **159**.

Если при нахождении несобственного интеграла II рода $\int_a^b f(x)\,dx$ первообразная $F(x)$ непрерывна в особой точке функции $f(x)$ (это может быть либо точка a, либо точка b, либо точка внутри промежутка), то для нахождения несобственного интеграла имеем обычную формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

На основании этого свойства следует решать задачи **142**–**144**.

Замена переменной может привести к тому, что несобственный интеграл становится собственным (задачи **140**, **141**, **145**).

В задачах **148**–**153**, **160**, **161** следует применить следующий практический признак: если при $x \to b$ (или $x \to a$) функция $f(x)$ является бесконечно большой порядка $\lambda > 0$ по сравнению с $\dfrac{1}{b-x}$ (или $\dfrac{1}{x-a}$), то $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится при $\lambda < 1$ и расходится при $\lambda \geq 1$.

Заметим, что функция $f(x)$ называется бесконечно большой порядка $\lambda > 0$ по сравнению с $\dfrac{1}{b-x}$ или $\dfrac{1}{x-a}$, если отношение $f(x) : \dfrac{1}{(b-x)^\lambda} = f(x)\cdot(b-x)^\lambda$ или $f(x)(x-a)^\lambda$ при $x \to b$ $(x \to a)$ стремится к конечному и отличному от нуля пределу.

3.1. Интегралы с бесконечными пределами

В задачах **102–121** вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

102. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-4}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-3}}{-3}\right|_1^b=-\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^3}-1\right)=\frac{1}{3}$

(интеграл сходится).

103. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-1/2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^b=2\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b}-1\right)=\infty$

(интеграл расходится).

104. $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-ax}\,dx=I\quad(a>0).$

$\displaystyle I=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-ax}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{e^{-ax}}{-a}\right|_0^b=-\frac{1}{a}\lim_{b\to+\infty}(e^{-ab}-1)=\frac{1}{a}$ (интеграл сходится).

105. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\int_{-\infty}^{0}\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\int_0^{+\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\underbrace{\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}}_{I_1}+$

$\displaystyle+\underbrace{\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}}_{I_2}.$

Рассмотрим каждый интеграл:

$$I_1 = \lim_{a\to-\infty}(\ln 1 - \ln(a^2+1)) = -\infty \text{ (расходится)},$$

$$I_2 = \lim_{b\to-\infty}(\ln(b^2+1) - \ln 1) = +\infty \text{ (расходится)}.$$

Данный интеграл расходится.

106. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+1)^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_0^b = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(a+1)\right) +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}1\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \pi \text{ (интеграл сходится)}.$$

Можно было бы вести запись так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_{-\infty}^0 +$$

$$+ \left[\operatorname{arctg}(x+1)\right]_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \pi.$$

107. $$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_2^a \ln x\, d(\ln x) = \lim_{a\to+\infty}\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_2^a =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}(\ln^2 a - \ln^2 2) = \infty \text{ (интеграл расходится)}.$$

108. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} = I.$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1};\quad 1 = Ax^2 + Bx + Ax + B + Cx^2 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + C = 0, \\ x^1 & A + B = 0, \\ x^0 & B = 1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} 1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = -1, \\ B = 1, \\ C = 1. \end{array}$$

$$I = -\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\Bigg|_1^{+\infty} - \frac{1}{x}\Bigg|_1^{+\infty} = 1 - \ln 2$$ (интеграл сходится).

109. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x+1)^3} = \int_0^{+\infty} \frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3} =$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$ (интеграл сходится).

110. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{\cos t},\ dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline \sqrt{2} & \pi/4 \\ \infty & \pi/2 \end{array} \\ t = \arccos\dfrac{1}{x} & \end{array}\right] =$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t \cos t}{\cos^2 t \sin t}\,dt = t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$ (интеграл сходится).

111. $\int\limits_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = I.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \begin{bmatrix} x = \operatorname{tg} t, \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \operatorname{tg} t \cdot \dfrac{1}{\cos t}} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| =$$

$$= \left[\operatorname{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}} = \frac{\operatorname{tg} t}{1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} \right] = \ln\left|\frac{\operatorname{tg} t}{1+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|.$$

$I = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|\Bigg|_{a^2}^{+\infty} = -\ln\frac{a^2}{1+\sqrt{a^4+1}} = \ln\frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$ (интеграл сходится).

112. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ (интеграл сходится).

113. $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx = I.$

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2, & du = 2x\,dx, \\ dv = xe^{-x^2}\,dx, & v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{bmatrix} = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\,dx.$$

$$I=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{2e^{x^2}}\Bigg|_0^b+\int_0^b xe^{-x^2}dx\right)=\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{x^2}{2e^{x^2}}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b^2}{2e^{b^2}}-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ \text{(интеграл сходится).}$$

Замечание. При нахождении $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\dfrac{b^2}{2e^{b^2}}\right)$ дважды применяем правило Лопиталя.

114. $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\sin x\,dx=\lim_{b\to+\infty}[\sin x-x\cos x]_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\sin b-b\cos b)$ – не существует, т. к. при $b\to+\infty$ $\sin b$ и $\cos b$ не стремятся ни к какому пределу. Интеграл расходится.

115. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,dx=I.$

$$\int e^{-\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x}=t,\ \ x=t^2,\\ dx=2t\,dt\end{bmatrix}=2\int te^{-t}dt=\begin{bmatrix}u=t, & du=dt,\\ dv=e^{-t}\,dt, & v=-e^{-t}\end{bmatrix}=$$

$$=2\left(-te^{-t}+\int e^{-t}dt\right)=-2(te^{-t}+e^{-t}).$$

$$I=-2\left[\frac{t}{e^t}+\frac{1}{e^t}\right]_0^{+\infty}=2\ \text{(интеграл сходится).}$$

116. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{\sin x+\cos x}{2}e^{-x}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}$ (интеграл сходится).

117. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \dfrac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\Bigg|_0^{+\infty} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$, интеграл сходится, если $a > 0$, и расходится, если $a \le 0$.

118. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx = I.$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = \dfrac{dx}{x^2}, & v = -\dfrac{1}{x} \end{bmatrix} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}.$$

$$I = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} - \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\operatorname{arctg} b}{b} - \ln\sqrt{1+\frac{1}{b^2}} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arctg} 1 + \ln\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 \ \text{ (интеграл сходится).}$$

119. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^3} = I.$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1};$$

$$1 = Ax^2 - Ax + A + Bx + C + Bx^2 + Cx$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} A=1/3, \\ B=-1/3, \\ C=2/3. \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+x}-\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{(2x-1)\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$I=\left[\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}(+\infty)+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$ (интеграл сходится).

120. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=I.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx=\operatorname{arctg}x-\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} u=x, & du=dx, \\ dv=\dfrac{x\ dx}{(x^2+1)^2}, & v=-\dfrac{1}{2(x^2+1)} \end{array}\right]=\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}.$$

$$I=\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(x^2+1)}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{2}\big(\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(-\infty)\big)=\frac{\pi}{2}$$ (интеграл сходится).

121. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx=I.$

$$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=t,\ \ x=t^2, \\ dx=2t\,dt\end{array}\right]=2\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}=2\int\frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^2}dt=$$

$$=2\left(\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}\right)=2\left(\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t-\frac{t}{2(t^2+1)}\right)=$$

$$=\operatorname{arctg}t-\frac{t}{t^2+1}=\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$ (см. задачу **120**).

$$I=\left[\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right]_1^{+\infty}=\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}1+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

(интеграл сходится).

В задачах **122–129** исследовать сходимость интегралов.

122. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx.$

$$\frac{x}{x^3+1} < \frac{x+1}{x^3+1} = \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ для } \forall x \in [0;+\infty).$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$ Интеграл сходится, значит, сходится и данный интеграл.

123. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\,dx.$

$$\frac{x^3+1}{x^4} > \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x} \text{ для } \forall x \in [1;+\infty).$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|b| - \ln 1\right) = \infty.$$ Интеграл расходится, значит, расходится и данный интеграл.

124. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{13}\,dx}{(x^5+x^3+1)^3}$.

$$\frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3} < \frac{x^{13}}{(x^5+x^3)^3} = \frac{x^{13}}{x^9(x^2+1)^3} = \frac{x^4}{(x^2+1)^3} < \frac{x^4}{x^6+3x^4} <$$

$< \frac{x^4}{x^6+x^4} = \frac{1}{1+x^2}$ для $\forall x \in [0; +\infty)$; $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) -$ $- \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. Интеграл сходится, значит, сходится и данный интеграл.

125. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}\,dx$.

$\frac{\ln(x^2+1)}{x} > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$ $\forall x \in [1; +\infty)$; $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} = \infty$. Интеграл расходится, значит, расходится и данный интеграл.

126. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^{1} \sqrt{x}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$.

$\frac{\sqrt{x}}{e^x} \le \frac{x}{e^x}$ $\forall x \in [-1; +\infty)$. $\int\limits_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-x}\,dx, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$

$= -\frac{x}{e^x}\Big|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1} + e^{-1} = \frac{2}{e}$. Интеграл сходится; $\int\limits_0^{1} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$ конечен. Значит, сходится и данный интеграл.

127. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx = \int\limits_0^2 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx + \int\limits_2^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx.$

$\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^4}} > \frac{1}{x}$ или $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} > \frac{1}{x^2}$. Действительно: $\sqrt[3]{1+x^4} < x^2$, ибо $1 + x^2 < x^6$ для $\forall x \ge 2$. Значит, $\frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} > \frac{\operatorname{arctg} x}{x} > \frac{1}{x}$ для $\forall x \ge 2$; $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, следовательно, расходится и данный интеграл.

128. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln\ln x} = \int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln\ln x} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{dz}{\ln z}$, где $z = \ln x$. $\frac{1}{\ln z} > \frac{1}{z}$ $\forall z \in [2; +\infty)$;

$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dz}{z} = \infty$ – расходится, значит, расходится и данный интеграл.

129. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} = \int\limits_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^{3/2}} = -2(\ln x)^{-1/2}\Big|_e^{+\infty} = -\frac{2}{\sqrt{\ln x}}\Bigg|_e^{+\infty} = \underline{\underline{2}}.$

Интеграл сходится.

3.2. Интегралы от функций с бесконечными разрывами

В задачах **130–147** вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость).

130. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\beta \to 1-0} \int\limits_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\beta \to 1-0} (\arcsin x)\Big|_0^{\beta} =$

$= \lim\limits_{\beta \to 1-0} (\arcsin \beta - \arcsin 0) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$ (интеграл сходится).

131. $$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+3}+\int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}=$$

$$=\lim_{\beta\to 1-0}\int_0^{\beta}\frac{dx}{(x-2)^2-1}+\lim_{\alpha\to 1+0}\int_{\alpha}^{2}\frac{dx}{(x-2)^2-1}=-\frac{1}{2}\lim_{\beta\to 1-0}\ln\left|\frac{1+x-2}{1-x+2}\right|\Bigg|_0^{\beta}-$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 1+0}\ln\left|\frac{1+x-2}{1-x+2}\right|\Bigg|_{\alpha}^{2}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to 1-0}\ln\left|\frac{\beta-1}{3-\beta}\right|+\frac{1}{2}\lim_{\beta\to 1+0}\ln\left|\frac{\alpha-1}{3-\alpha}\right|.$$ Указанные пределы существуют, так как логарифмы неограниченно растут по абсолютной величине при $\beta\to 1$. Следовательно, интеграл расходится.

132. $$\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}=\left[\begin{array}{l|l|l} x-1=t^2, & x & t\\ \hline x=t^2+1, & 1 & 0\\ dx=2t\,dt, & 2 & 1\end{array}\right]=2\int_0^1 t\cdot\frac{t^2+1}{t}\,dt=$$

$$=2\left(\int_0^1 t^2\,dt+\int_0^1 dt\right)=2\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$ (интеграл сходится).

133. $$\int_0^1 x\ln x\,dx=\lim_{\alpha\to 0+0}\int_{\alpha}^{1}x\ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x},\\ dv=x\,dx, & v=\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0+0}\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Bigg|_{\alpha}^{1}-\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{1}x\,dx\right)=\lim_{\alpha\to 0+0}\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_{\alpha}^{1}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0+0} x^2(2\ln x-1)\Big|_{\alpha}^{1}=\frac{1}{4}\lim_{\alpha\to 0+0}(2\ln 1-1-2\alpha^2\ln\alpha+\alpha^2)=\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

(интеграл сходится).

$$\lim_{\alpha\to 0+0} 2\alpha^2\ln\alpha=2\lim_{\alpha\to 0+0}\frac{\ln\alpha}{\alpha^{-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2\lim_{\alpha\to 0+0}\frac{1}{\alpha(-2\alpha^{-3})}=-\lim_{\alpha\to 0+0}\frac{\alpha^3}{\alpha}=0.$$

134. $\displaystyle\int_0^{1/e}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_0^{1/e}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_0^{1/e}=-\frac{1}{\ln\frac{1}{e}}=\underline{\underline{1}}$ (интеграл сходится).

135. $\displaystyle\int_1^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_1^{2}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|\Big|_1^{2}=\underline{\underline{-\infty}}$ (интеграл расходится).

136. $\displaystyle\int_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{\alpha\to 1+0}\int_\alpha^{e}\frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{\alpha\to 1+0}2\sqrt{\ln x}\Big|_\alpha^{e}=$

$$=2\lim_{\alpha\to 1+0}\left(\sqrt{\ln e}-\sqrt{\ln\alpha}\right)=\underline{\underline{2}}$$ (интеграл сходится).

137. $\displaystyle\int_a^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=I \quad (a<b).$

$$(x-a)(b-x)=-x^2+(a+b)x-ab=-\left(x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{(a+b)^2}{4}-ab=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

$$x-\frac{a+b}{2}=z,\quad dx=dz,\quad \frac{b-a}{2}=c,\quad \begin{array}{c|c} x & z \\ \hline a & \dfrac{a-b}{2}=-c \\ b & \dfrac{b-a}{2}=c \end{array}.$$

$$I=\int\limits_{-c}^{c}\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}}=\int\limits_{-c}^{0}\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}}+\int\limits_{0}^{c}\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}}=\lim_{\alpha\to -c+0}\int\limits_{\alpha}^{0}\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}}+$$

$$+\lim_{\beta\to c-0}\int\limits_{0}^{\beta}\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}}=\lim_{\alpha\to -c+0}\arcsin\frac{z}{c}\bigg|_{\alpha}^{0}+\lim_{\beta\to c-0}\arcsin\frac{z}{c}\bigg|_{0}^{\beta}=$$

$$=-\lim_{\alpha\to -c+0}\arcsin\frac{\alpha}{c}+\lim_{\beta\to c-0}\arcsin\frac{\beta}{c}=-\arcsin(-1)+\arcsin 1=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\underline{\underline{\pi}}$$

(сходится).

138. $$I=\int\limits_{a}^{b}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}=\int\limits_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{\left(z+\frac{a+b}{2}\right)dz}{\sqrt{c^2-z^2}}=$$

$$=\underbrace{\int\limits_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{z\;dz}{\sqrt{c^2-z^2}}}_{I_1}+\frac{a+b}{2}\int\limits_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}};$$

$$I_1=-\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\frac{a-b}{2}}^{0}\frac{d(c^2-z^2)}{\sqrt{c^2-z^2}}+\int\limits_{0}^{\frac{b-a}{2}}\frac{d(c^2-z^2)}{\sqrt{c^2-z^2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\lim_{\alpha\to\frac{a+b}{2}+0}2\sqrt{c^2-z^2}\bigg|_{\alpha}^{0}+\lim_{\beta\to\frac{b-a}{2}-0}2\sqrt{c^2-z^2}\bigg|_{0}^{\beta}\right)=0.$$

$$I=I_2=\underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}\pi\ \text{(сходится).}$$

139. $\displaystyle\int_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(x-5)}} = I.$

$(x-3)(x-5) = 1-(x-4)^2, \quad x-4 = z, \quad dx = dz, \quad x = z+4,$

$$x^2 = z^2 + 8z + 16 \quad \begin{array}{c|c} x & z \\ \hline 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{array}.$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{z^2+8z+16}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = \int_{-1}^{0} \frac{z^2+8z+16}{\sqrt{1-z^2}}\,dz + \int_{0}^{1} \frac{z^2+8z+16}{\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

а) $\displaystyle\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = \left[\begin{array}{ll} u = z, & du = dz, \\ dv = \dfrac{z\;dz}{\sqrt{1-z^2}}, & v = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}} = -\sqrt{1-z^2} \end{array}\right] =$

$$= -z\sqrt{1-z^2} + \int \sqrt{1-z^2}\,dz = \left[\begin{array}{l} \sin t = z, \\ dz = \cos t\,dt \end{array}\right] = -z\sqrt{1-z^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = -z\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t) = -z\sqrt{1-z^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\arcsin z + z\sqrt{1-z^2}\right).$$

б) $\displaystyle 8\int \frac{z\;dz}{\sqrt{1-z^2}} = -4\int \frac{d(1-z^2)}{\sqrt{1-z^2}} = -8\sqrt{1-z^2}.$

в) $\displaystyle\int \frac{16\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 16\arcsin z.$

$$I=\lim_{\alpha\to-1+0}\left[-z\sqrt{1-z^2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin z+z\sqrt{1-z^2}\right)-8\sqrt{1-z^2}+\right.$$

$$\left.+16\arcsin z\right]_{\alpha}^{0}+\lim_{\beta\to1-0}\left[-z\sqrt{1-z^2}+\frac{1}{2}\left(\arcsin z+z\sqrt{1-z^2}\right)-8\sqrt{1-z^2}+\right.$$

$$\left.+16\arcsin z\right]_{0}^{\beta}=\lim_{\alpha\to-1+0}\left[-\frac{1}{2}z\sqrt{1-z^2}+\frac{33}{2}\arcsin z-8\sqrt{1-z^2}\right]_{\alpha}^{0}+$$

$$+\lim_{\beta\to1-0}\left[-\frac{1}{2}z\sqrt{1-z^2}+\frac{33}{2}\arcsin z\;-8\sqrt{1-z^2}\right]_{0}^{\beta}=$$

$$=\lim_{\alpha\to-1-0}\left(-8-\frac{33}{2}\arcsin\alpha\right)+\lim_{\beta\to1-0}\left(8+\frac{33}{2}\arcsin\beta\right)=\underline{\underline{\frac{33}{2}\pi}}$$ (интеграл сходится).

140. $$\int_0^1\frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{ll}x=\sin t, & \begin{array}{c|c}x & t\\\hline 0 & 0\\ 1 & \pi/2\end{array}\\ dx=\cos t\,dt, & \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t\,dt}{\cos t(\cos t+2)}=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\cos t+2}=\left[\begin{array}{lll}\operatorname{tg}\frac{t}{2}=z, & \cos t=\frac{1-z^2}{1+z^2}, & \begin{array}{c|c}t & z\\\hline 0 & 0\\ \pi/2 & 1\end{array}\\ dt=\frac{2\,dz}{1+z^2}, & & \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^1\frac{2\,dz}{(1+z^2)\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}+2\right)}=2\int_0^1\frac{dz}{z^2+3}=\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt3}\Bigg|_0^1=\underline{\underline{\frac{\pi}{3\sqrt3}}}$$ (интеграл сходится).

141. $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{ll} x=\sin t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline -1 & -\pi/2 \\ 1 & \pi/2 \end{array} \\ dx=\cos t\,dt, & \end{array}\right]=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos t\,dt}{(2-\sin t)\cos t}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dt}{2-\sin t}=\left[\begin{array}{lll} \mathrm{tg}\frac{t}{2}=z, & \sin t=\frac{2z}{1+z^2}, & \begin{array}{c|c} t & z \\ \hline -\pi/2 & -1 \\ \pi/2 & 1 \end{array} \\ dt=\frac{2\,dz}{1+z^2}, & & \end{array}\right]=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{2\;dz}{\left(2-\frac{2z}{1+z^2}\right)(1+z^2)}=\int_{-1}^{1}\frac{dz}{z^2-z+1}=\int_{-1}^{1}\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{arctg}\sqrt{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}}.$$

142. $$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}(3x^{4/3}+2x^{-2/3})\,dx=\left[\frac{9}{7}x^{7/3}+6x^{1/3}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{9}{7}+6+\frac{9}{7}+6=\underline{\underline{14\frac{4}{7}}}.$$

143. $$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx=\int_{-1}^{1}(x^{2/5}+x^{-3/5})\,dx=\left[\frac{5}{7}x^{7/5}+\frac{5}{2}x^{2/5}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{5}{7}+\frac{5}{2}+\frac{5}{7}-\frac{5}{2}=\underline{\underline{\frac{10}{7}}}.$$

144. $$\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{x-1}{x^{5/3}}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x-1}{x^{5/3}}\,dx=\int_{-1}^{0}x^{-2/3}\,dx-\int_{-1}^{0}x^{-5/3}\,dx+$$

$$+\int_{0}^{1}x^{-2/3}\,dx-\int_{0}^{1}x^{-5/3}\,dx=3x^{1/3}\Big|_{-1}^{0}+\frac{3}{2}\lim_{\beta\to 0-0}x^{-2/3}\Big|_{-1}^{\beta}+3x^{1/3}\Big|_{0}^{1}+$$

$$+\frac{3}{2}\lim_{x\to 0+0}x^{-2/3}=3+\infty-\frac{3}{2}+3+\frac{3}{2}-\infty=\underline{\underline{6+\infty-\infty}}$$ (интеграл расходится).

145. $$\int_{-1}^{1}\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\left[\begin{array}{ll|l} \sqrt[3]{x}=t, & x & t \\ x=t^3, & -1 & -1 \\ dx=3t^2\,dt, & 1 & 1 \end{array}\right]=\int_{-1}^{1}\frac{\ln(2+t)\,3t^2}{t}\,dt=$$

$$=3\int_{-1}^{1}t\ln(2+t)\,dt=\left[\begin{array}{ll} u=\ln(2+t), & du=\dfrac{dt}{2+t}, \\ dv=t\,dt, & v=\dfrac{t^2}{2} \end{array}\right]=$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}\ln(2+t)\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{t^2\,dt}{2\,(2+t)}\right)=3\left(\frac{t^2}{2}\ln|2+t|\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(t^2-4)+4}{2+t}\,dt\right)=$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}\ln|2+t|\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-2)\,dt-2\ln|2+t|\Big|_{-1}^{1}\right)=$$

$$=3\left[\frac{t^2}{2}\ln|2+t|+\frac{1}{4}(t-2)^2-2\ln|2+t|\right]_{-1}^{1}=\underline{\underline{6-\frac{9}{2}\ln 3}}.$$

$$\textbf{146.}\ \int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx=\left[\begin{array}{ll}\frac{1}{x}=t, & \begin{array}{c|c} x & t\\ \hline -1 & -1\\ 0 & -\infty\end{array}\\ -\frac{dx}{x^2}=dt, & \end{array}\right]=-\int_{-1}^{-\infty}te^t\,dt=\int_{-\infty}^{-1}te^t\,dt=$$

$$=\left[\begin{array}{ll}u=t, & du=dt,\\ dv=e^t\,dt, & v=e^t\end{array}\right]=te^t\Big|_{-\infty}^{-1}-e^t\Big|_{-\infty}^{-1}=\underline{\underline{-\frac{2}{e}}}.$$

$$\textbf{147.}\ \int_{0}^{1}\frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx=\left[\begin{array}{ll}\frac{1}{x}=t, & \begin{array}{c|c} x & t\\ \hline 0 & \infty\\ 1 & 1\end{array}\\ -\frac{dx}{x^2}=dt, & \end{array}\right]=-\int_{0}^{\infty}te^t\,dt=$$

$$=-te^t\Big|_0^{\infty}+e^t\Big|_0^{\infty}=\underline{\underline{-\infty+\infty}}\ \text{(расходится).}$$

В задачах **148–153** исследовать сходимость интегралов.

$$\textbf{148.}\ \int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

$x = 1$ – точка разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}$.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}:\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{x}{x^3+x^2+x+1}}=\frac{1}{2};\quad \lambda=\frac{1}{2}<1.\ \text{Интеграл сходится.}$$

149. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

$x = 1$ – точка разрыва функции $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}:\dfrac{1}{(1-x)^{5/3}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{(1+x)^{5/3}}=\dfrac{1}{2^{5/3}}$; $\lambda=\dfrac{5}{3}>1$. Интеграл расходится.

150. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

$x = 0$ – точка разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}:\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}}=1$; $\lambda=\dfrac{1}{2}<1$. Интеграл сходится.

151. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$.

$x = 0$ – точка разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}:\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}}=1;$$

$\lambda=\dfrac{1}{2}<1$. Интеграл сходится.

152. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$.

$x = 0$ – точка разрыва функции $f(x) = \dfrac{1}{e^x - \cos x}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x - \cos x} : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{e^x - 1}{x} + \dfrac{1-\cos x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}}\cdot\dfrac{x}{4}} = 1;\ \lambda = 1.$$ Интеграл расходится.

153. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

$x = 0$ – точка разрыва функции $f(x) = \dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} : \frac{1}{x^\lambda}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \begin{bmatrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ctg} x}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x^{-\lambda-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}-\lambda} = 0$$ при $\dfrac{1}{2} < \lambda < 1$. Интеграл сходится.

3.3. Разные задачи

154. Функция $f(x)$ в полуинтервале $[a;+\infty)$ непрерывна и $f(x)\to A\neq 0$ при $x\to+\infty$. Может ли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится?

Нет. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = A\int\limits_a^{+\infty} dx=\infty$.

155. При каких значениях k интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^k\,\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}\,dx$ будет сходится?

$\lim\limits_{x\to\infty} x^k\,\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}\cdot x^{-k}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1.$ Интеграл сходится при $-k>1$, то есть $k<-1$ и расходится при $-k\le 1$, то есть $k\ge -1$.

156. При каких значениях k сходятся интегралы:

а) $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^k\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k\ln x}x^k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$. Интеграл сходится, если $k>1$.

б) $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x(\ln x)^k}=\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{d(\ln x)}{(\ln x)^k}=\left.\dfrac{(\ln x)^{1-k}}{1-k}\right|_2^{+\infty}=$

$$=\frac{1}{1-k}\left(\left.\frac{1}{(\ln x)^{k-1}}\right|_{x=+\infty}-\frac{1}{(\ln 2)^{k-1}}\right)=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}\ \text{при } k>1.$$

При $k\le 1$ интеграл расходится.

157. При каких значениях k сходится интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(b < a)$?

$$k \neq 1:\ \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \lim_{\beta\to b-0} \int\limits_a^{\beta} \frac{dx}{(b-x)^k} = -\lim_{\beta\to b-0} \int\limits_a^{\beta} (b-x)^{-k}\, d(b-x) =$$

$$= -\lim_{\beta\to b-0} \left.\frac{(b-x)^{1-k}}{1-k}\right|_a^{\beta} = \frac{1}{k-1} \lim_{\beta\to b-0} \left((b-\beta)^{1-k} - (b-a)^{1-k}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-k}(b-a)^{1-k}, & \text{если} \quad k < 1; \\ \infty, & \text{если} \quad k > 1. \end{cases}$$

$$k = 1:\ \int\limits_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\beta\to b-0} \ln|b-x|\,\Big|_a^{\beta} = \infty.$$

158. Можно ли найти такое k, чтобы интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^k\, dx$ сходился?

Нет.

159. При каких значениях k и t интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^t}\, dx$ сходится?

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^k}{1+x^t} \cdot x^{-k} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1+x^t} = 1. \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^k}{1+x^t} \cdot x^{t-k} =$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^t}{1+x^t} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^t}+1} = 1$. Интеграл сходится, если $-k < 1$, $t-k > 1$,

то есть $k > -1$, $t - k > 1$.

160. При каких значениях m интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{1-\cos x}{x^m}\,dx$ сходится?

$\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1-\cos x}{x^m} x^{m-2} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{2\cdot x^2}{4\cdot x^2} = \dfrac{1}{2}$. Интеграл сходится, если $m-2<1$, то есть $m<3$; расходится при $m \ge 3$.

161. При каких значениях k интеграл $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{dx}{\sin^k x}$ сходится?

$\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{\sin^k x} x^k = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^k} = 1$. Интеграл сходится, если $k<1$, и расходится при $k \ge 1$.

В задачах **162–170** вычислить несобственные интегралы.

$$\textbf{162.}\quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left[\begin{array}{ll} x-1=t^2, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 0 \\ \infty & \infty \end{array} \\ x=1+t^2, & \\ dx=2t\,dt, & \end{array}\right] = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{t\ dt}{(1+t^2)\,t} = 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= 2\big(\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg} 0\big) = \underline{\underline{\pi}}.$$

$$\textbf{163.}\quad \int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{ll} x=\cos t, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline -1 & \pi \\ 1 & 0 \end{array} \\ dx=-\sin t\,dt, & \end{array}\right] =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi} \ln\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\cos^3 t\ dt = \left[\begin{array}{ll} u=\ln\operatorname{ctg}^2\dfrac{t}{2}, & du=-\dfrac{2\ dt}{\sin t}, \\ dv=\cos^3 t\ dt, & v=\sin t-\dfrac{\sin^3 t}{3} \end{array}\right] =$$

$$=\ln\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{t}\right)\Bigg|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin^2 t}{3}\right)dt=$$

$$=\frac{\ln\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}{\dfrac{1}{\left(\sin t-\dfrac{\sin^2 t}{3}\right)^2}}\Bigg|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1-\cos 2t}{6}\right)dt=I.$$

Первое слагаемое при $t=\pi$ и $t=0$ превращается в неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, которая при использовании правила Лопиталя обращается в 0.

Второе слагаемое: $2\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{1-\cos 2t}{6}\right)dt=2\left[\frac{5}{6}t+\frac{\sin 2t}{12}\right]_0^{\pi}=\frac{5}{3}\pi.$

Итак, $\underline{\underline{I=\frac{5}{3}\pi.}}$

164. $$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(x-1)\,dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}=\left[\begin{array}{l|c|c} x-1=t, & x & t \\ & 0 & -1 \\ dx=dt, & +\infty & +\infty \end{array}\right]=\int_{-1}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} t\,dt}{t^{4/3}}=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg} t, & du=\dfrac{dt}{1+t^2}, \\ dv=\dfrac{dt}{t^{4/3}}, & v=-\dfrac{3}{\sqrt[3]{t}} \end{array}\right]=-\frac{3\operatorname{arctg} t}{\sqrt[3]{t}}\Bigg|_{-1}^{+\infty}+3\int_{-1}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}(1+t^2)}=$$

$$=\frac{3\pi}{4}+3\int_{-1}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}(1+t^2)}=\left[\begin{array}{ll} t=p^3, & \begin{array}{c|c} t & p \\ \hline -1 & -1 \\ +\infty & +\infty \end{array} \\ dt=3p^2\,dp, & \end{array}\right]=\frac{3}{4}\pi+9\int_{-1}^{+\infty}\frac{p^2\,dp}{p(1+p^6)}=$$

$$=\frac{3}{4}\pi+9\int_{-1}^{+\infty}\frac{p\,dp}{1+p^6}=\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{2}\int_{-1}^{+\infty}\frac{dp^2}{1+(p^2)^3}=\left[\begin{array}{ll} p^2=z, & \begin{array}{c|c} p & z \\ \hline -1 & 1 \\ +\infty & +\infty \end{array} \\ dp^2=dz, & \end{array}\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{dz}{1+z^3}=I.$$

$$\frac{1}{1+z^3}=\frac{1}{(1+z)(1-z+z^2)}=\frac{A}{1+z}+\frac{Bz+C}{1-z+z^2};$$

$$A-Az+Az^2+Bz+C+Bz^2+Cz=1;$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0, \\ -A+B+C=0, \\ A+C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1/3, \\ B=-1/3, \\ C=2/3. \end{array}$$

$$\int\frac{dz}{1+z^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+z}-\frac{1}{3}\int\frac{z-2}{1-z+z^2}\,dz=\frac{1}{3}\ln|1+z|-\frac{1}{6}\int\frac{2z-1-3}{1-z+z^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+z|-\frac{1}{6}\int\frac{2z-1}{1-z+z^2}\,dz+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-2\cdot\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ln|1+z|-$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{d(1-z+z^2)}{1-z+z^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{3}\ln|1+z|-\frac{1}{6}\ln\left|1-z+z^2\right|+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}.$$

$$I=\frac{3}{4}\pi+\frac{9}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right]_1^{\infty}=\frac{3}{4}\pi+$$

$$+\frac{9}{2}\left[-\frac{1}{6}\ln 4+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}\right]=\frac{3}{4}\pi-\frac{3}{2}\ln 2+\frac{1}{3\sqrt{3}}\pi\cdot\frac{9}{2}=$$

$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{3}{2}\ln 2=\underline{\underline{\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\pi-\frac{3}{2}\ln 2}}.$$

165. $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (n – целое положительное число).

Обозначим

$$I_n=\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx=\begin{bmatrix} u=x^n, & du=nx^{n-1}\,dx, \\ dv=e^{-x}dx, & v=-e^{-x} \end{bmatrix}=\underbrace{-\left.\frac{x^n}{e^x}\right|_0^{+\infty}}_{=0}+$$

$$+n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx=nI_{n-1}.$$

$$I_0=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=-\left.e^{-x}\right|_0^{+\infty}=1;\quad I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=$$

$$=\ldots=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=\underline{\underline{n!}}.$$

166. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx$ (n – целое положительное число).

$$I_n=\int_0^{+\infty} x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx=\begin{bmatrix} u=x^{2n}, & du=2nx^{2n-1}\,dx, \\ dv=xe^{-x^2}\,dx, & v=-\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{2}e^{-x^2}\cdot x^{2n}\Big|_0^{+\infty}}_{=0}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}2nx^{2n-1}e^{-x^2}\,dx=n\int_0^{+\infty}x^{2n-1}e^{-x^2}\,dx=nI_{n-1}.$$

$$I_{n-1}=\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}\,dx=\begin{bmatrix} u=x^{2n-2}, & du=2(n-1)x^{2n-3}dx, \\ dv=xe^{-x^2}\,dx, & v=-\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{bmatrix}=$$

$$=\underbrace{-\frac{x^{2n-2}}{2e^{-x^2}}\Big|_0^{+\infty}}_{=0}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}2(n-1)x^{2n-3}e^{-x^2}dx=(n-1)\int_0^{+\infty}x^{2n-3}e^{-x^2}\,dx=(n-1)I_{n-2}.$$

....

$$I_0=\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,d(-x^2)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

$$I_n=n(n-1)(n-2)\ldots2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{n!}{2}}}.$$

167. $\displaystyle\int_0^1(\ln x)^n\,dx=I_n.$

$$I_n=\begin{bmatrix} u=(\ln x)^n, & du=n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx, \\ dv=dx, & v=x \end{bmatrix}=x(\ln x)^n\Big|_0^1-n\int_0^1(\ln x)^{n-1}\,dx.$$

$$\lim_{x\to 0+0} x(\ln x)^n = \lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)^n}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0+0} \frac{n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -n\lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)^{n-1}}{\frac{1}{x}} = n(n-1)\lim_{x\to 0+0} \frac{(\ln x)^{n-2}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \ldots = (-1)^n n! \lim_{x\to 0+0} x = 0.$$

$$\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\,dx = I_{n-1} \quad \Rightarrow \quad I_n = -nI_{n-1}.$$ Поскольку $I_0 = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$,

то $I_n = (-1)^n n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = \underline{\underline{(-1)^n n!}}$.

168. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при m: а) четном; б) нечетном ($m > 0$).

$$\int_0^1 \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l|c|c} x=\sin t, & x & t \\ & 0 & 0 \\ dx = \cos t\,dt, & 1 & \pi/2 \end{array}\right] = \int_0^{\pi/2} \sin^m t\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^m t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} t\cdot\sin t\,dt = -\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^{m-1} t}_{u}\cdot\underbrace{d\cos t}_{dv} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} du = (m-1)\sin^{m-2} t\cos t\,dt, \\ v = \cos t \end{array}\right] = -\sin^{m-1} t\cdot\cos t\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}t\cos^2 t\,dt=(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}t\cdot(1-\sin^2 t)\;dx=$$

$$=(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}t\,dt-(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^m t\,dt. \qquad (1)$$

Равенство (1) запишется: $J_m=(m-1)J_{m-2}-(m-1)J_m \quad\Rightarrow$ $J_m=\dfrac{m-1}{m}J_{m-2}$; аналогично $J_{m-2}=\dfrac{m-3}{m-2}J_{m-4}$. Поэтому

$$J_m=\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-3}{m-2}J_{m-4}.$$

Продолжая таким же образом далее, дойдем либо до J_0, либо до J_1, в зависимости от m. Пусть

а) $m = 2n$ (четное). Тогда

$$J_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}J_0=\int_0^{\pi/2}\sin^0 x\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

Итак, $\underline{\underline{J_m=\dfrac{m-1}{m}\cdot\dfrac{m-3}{m-2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}}}$ ($m = 2n$).

б) $m = 2n + 1$ (нечетное). Тогда

$$J_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}J_1;\quad J_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1.$$

Итак, $\underline{\underline{J_m=\dfrac{m-1}{m}\cdot\dfrac{m-3}{m-2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}}}$ ($m = 2n + 1$).

169. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx$ (n – целое положительное число).

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} x=\sin^2 t,\ dx = 2\sin t\cos t\ dt, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \end{array} \\ \sqrt{x}=\sin t,\ (1-\sin^2 t)^n = \cos^{2n} t, & \begin{array}{c|c} 1 & \pi/2 \end{array} \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n} t\cdot 2\sin t\cos t}{\sin t}\,dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\ dt = 2\underline{\underline{\frac{2n\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}}}$$

(см. решение задачи **178**).

170. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $(0 < \alpha < 2\pi)$.

$\alpha = \pi$, $\cos\pi = -1$: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} =$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{1}{\cos t}, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 0 \end{array} \\ dx = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, & \begin{array}{c|c} +\infty & \pi/2 \end{array} \end{array}\right] = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin t\cos t\ dt}{\cos^2 t\,\dfrac{\sin t}{\cos t}(1+\cos t)} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{2\cos^2\dfrac{t}{2}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \underline{\underline{1}}.$$

171. Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

$$\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}}_{I_1} = \left[\begin{array}{ll} x = \frac{1}{z}, & \begin{array}{c|c} x & z \\ \hline 0 & \infty \end{array} \\ dx = -\frac{dz}{z^2}, & \begin{array}{c|c} \infty & 0 \end{array} \end{array}\right] = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{z^2\left(1+\frac{1}{z^4}\right)} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{z^2\,dz}{1+z^4} =$$

$$= \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}}_{I_2}.$$

$$I_1 + I_2 = \int\limits_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2+x\sqrt{2}} + \frac{1}{1+x^2-x\sqrt{2}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}.$$

172. Доказать, что $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cdot\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=0$.

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=\left[\begin{array}{cc} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=\dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2}, & v=-\dfrac{1}{2(1+x^2)}\end{array}\right]=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}.$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},\ Ax2+Bx2+Cx+A=1,\ A=1,\ B=-1,\ C=0.$$

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+$$

$$+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}}\int\limits_\alpha^\beta\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}}\left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right]_\alpha^\beta=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0+0}\left(-\frac{\ln\alpha}{2(1+\alpha^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0+0}\left(-\frac{\ln\alpha}{2(1+\alpha^2)}+\frac{1}{2}\ln\alpha-\frac{1}{4}\ln(1+\alpha^2)\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{при верхнем пределе интегрирования каждое}\\ \text{из слагаемых равно 0 по правилу Лопиталя}\end{array}\right]=$$

$$= \lim_{\alpha\to 0+0}\left(\frac{\alpha^2\ln\alpha}{2(1+\alpha^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{1+\alpha^2}\right)=0, \text{ так как } \lim_{\alpha\to 0+0}\alpha^2\ln\alpha=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln\alpha}{\frac{1}{\alpha^2}}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{(\ln\alpha)'}{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)'}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}}{-\frac{2}{\alpha^3}}=0.$$

173. $$\int_1^{+\infty}\frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx=\left[\begin{array}{cc} x=\dfrac{1}{\cos t}, & \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 0 \\ +\infty & \pi/2 \end{array} \\ dx=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}dt, & \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 t}-2\right)\sin t\ dt}{\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}\cdot\frac{\sin t}{\cos t}}=\int_0^{\pi/2}(1-2\cos^2 t)\,dt=-\int_0^{\pi/2}\cos 2t\ dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}=\underline{\underline{0}}.$$

В задачах **174–183** вычислить интегралы, пользуясь формулами:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (интеграл Пуассона);}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \text{ (интеграл Дирихле).}$$

174. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \left[\begin{array}{l}\sqrt{a}x = y,\\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\,dy\end{array}\right] = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}} \quad (a>0).$

175. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\sqrt{x} = y,\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dy,\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dy\right] = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \underline{\underline{\sqrt{\pi}}}.$

176. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx,\\ dv = xe^{-x^2}\,dx, & v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\end{array}\right] =$

$$= -\frac{x}{2e^{x^2}}\bigg|_0^{\infty} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4};\quad \frac{x}{2e^{x^2}}\bigg|_0^{\infty} = \lim_{b\to+\infty}\frac{x}{2e^{x^2}}\bigg|_0^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{2e^{b^2}} - 0\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2be^{b^2}} = \underline{\underline{0}}$$ (применили правило Лопиталя).

177. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx$ (n – целое положительное число).

$$I = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^{2n-1}, & du = (2n-1)x^{2n-2}dx,\\ dv = xe^{-x^2}dx, & v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\end{array}\right] =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{2n-1}}{e^{x^2}}\bigg|_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{2n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-2} e^{-x^2}\,dx =$$

$$=\left[\begin{array}{ll} u=x^{2n-3}, & du=(2n-3)x^{2n-4}\,dx, \\ dv=xe^{-x^2}\,dx, & v=-\frac{1}{2}e^{-x^2} \end{array}\right]=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{x^{2n-3}}{e^{x^2}}\right|_0^{+\infty}}_{=0}+$$

$$+\frac{(2n-3)(2n-1)}{2^2}\int\limits_0^{+\infty}x^{2n-4}e^{-x^2}\,dx=\ldots=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=$$

$$=\underline{\underline{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}}.$$

178. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\,d(2x)=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$

179. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\,dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{ax}\,d(ax)=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$, если $a>0$; 0, если $a=0$;

$\underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$, если $a<0$.

180. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}\,dx=I \quad (a>0,\ b>0).$

$I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(a+b)x+\sin(a-b)x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$, если $a>b$; $\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$, если $a=b$; 0, если $a<b$.

181. $$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u=\sin^2 x, & du = 2\sin x\cos x\,dx, \\ dv=\dfrac{dx}{x^2}, & v=-\dfrac{1}{x} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} + \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{2x}\,d(2x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

182. $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\,dx = I.$$

$$\sin^3 x = \sin^2 x\cdot\sin x = \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\sin x = \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos 2x\sin x}{2} =$$

$$= \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x);$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{x}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{3}{4}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx -$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin 3x}{3x}\,d(3x) = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

183. $$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx = \begin{bmatrix} u=\sin^4 x, & du = 4\sin^3 x\cos x\,dx, \\ dv=\dfrac{dx}{x^2}, & v=-\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{\sin^4 x}{x}\bigg|_0^\infty + 4\int_0^\infty \frac{\sin^3 x\cdot\cos x}{x}\,dx = 4\int_0^\infty \frac{\left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)\cos x}{x}\,dx =$$

$$=3\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\cos x}{x}\,dx-\int_0^\infty \frac{\sin 3x\cdot\cos x}{x}\,dx=\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{2x}\,d(2x)-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 4x}{x}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}\,dx=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

184. Положим $\varphi(x)=-\int\limits_0^x \ln\cos y\;dy$ (этот интеграл называется интегралом Лобачевского). Доказать соотношение

$$\varphi(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2.$$

С помощью найденного соотношения вычислить величину

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\int_0^{\pi/2}\ln\cos y\;dy,$$

впервые вычисленную Эйлером.

$$\varphi(x)=\left[\begin{array}{ll} y=\dfrac{\pi}{2}-z, & \begin{array}{c|c} y & z \\ \hline 0 & \pi/2 \\ x & \pi/2-x \end{array} \\ dy=dz, & \end{array}\right]=\int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\ln\sin z\;dz=$$

$$=\left[\sin z=2\sin\frac{z}{2}\cdot\cos\frac{z}{2},\quad \ln\sin z=\ln 2+\ln\sin\frac{z}{2}+\ln\cos\frac{z}{2}\right]=\ln 2\int_{\pi/2}^{\pi/2-x}dz+$$

$$+\int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\ln\sin\frac{z}{2}\;dz+\int_{\pi/2}^{\pi/2-x}\ln\cos\frac{z}{2}\;dz=-x\ln 2+I_1+I_2\;;$$

$$I_1+I_2=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{z}{2}=p, & \begin{array}{c|cc} z & \pi/2 & \pi/2-x \\ \hline p & \pi/4 & \pi/4-x/2\end{array} \\ dz=2\ dp, & \end{array}\right]=2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/4-x/2}\ln\sin p\ dp+$$

$$+2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/4-x/2}\ln\cos p\ dp=\left[\begin{array}{ll} p=\pi/2-q, & \begin{array}{c|c} p & q \\ \hline \pi/4 & \pi/4 \\ \pi/4-x/2 & \pi/4+x/2\end{array} \\ dp=-dq, & \\ \ln\sin q=\ln\cos q, & \end{array}\right]=$$

$$=-2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/4+x/2}\ln\cos q\ dq+2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/4-x/2}\ln\cos p\ dp=-2\left(\int\limits_{0}^{\pi/4+x/2}\ln\cos q\ dq-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{0}^{\pi/4}\ln\cos q\ dq\right)+2\left(\int\limits_{0}^{\pi/4-x/2}\ln\cos p\ dp-\int\limits_{0}^{\pi/4}\ln\cos p\ dp\right)=$$

$$=-2\int\limits_{0}^{\pi/4+x/2}\ln\cos q\ dq+2\int\limits_{0}^{\pi/4-x/2}\ln\cos p\ dp=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right).$$

$$\varphi(x)=2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-x\ln 2.$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\varphi(0)-\frac{\pi}{2}\ln 2,\quad \varphi(0)=0,\quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln 2}}.$$

В задачах **185–188** вычислить интегралы.

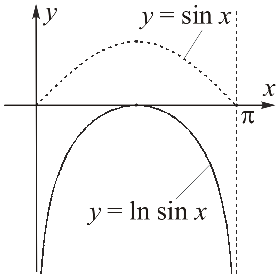
185. $$\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x\ dx=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\left[\begin{array}{ll}\dfrac{\pi}{2}-x=y, & \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & \pi/2 \\ \pi/2 & 0\end{array} \\ -dx=dy, & \end{array}\right]=$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \ln\cos y\, dy = \int_{0}^{\pi/2} \ln\cos y\ dy = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}\ln 2}}$$ (воспользовались решением задачи **184**).

186. $$\int_0^{\pi} x\ln\sin x\ dx = \left[\begin{array}{l|c|c} x=\pi-t, & x & t \\ & 0 & \pi \\ dx=-dt, & \pi & 0 \end{array}\right] = -\int_{\pi}^{0} (\pi-t)\ln\sin(\pi-t)\,dt =$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \ln\sin t\,dt - \int_0^{\pi} t\ln\sin t\,dt = 2\pi\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt - \int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx.$$

$$\int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$$



Используя решение задачи **185**, имеем:

$$\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx = 2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) - \int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx.$$

$$2\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,dx = -\pi^2\ln 2 \quad \Rightarrow \quad I = \underline{\underline{-\frac{\pi^2}{2}\ln 2}}.$$

187. $$\int_0^{\pi/2} x\cdot \operatorname{ctg} x\ dx = \left[\begin{array}{ll} u=x, & du=dx, \\ dv=\operatorname{ctg} x\ dx, & v=\ln|\sin x| \end{array}\right] = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$-\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\ dx = \frac{\pi}{2}\cdot 0 - \lim_{\alpha\to 0+0} \frac{\ln\sin\alpha}{\frac{1}{\alpha}} - \int_0^{\pi/2} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx =$$

$$=\left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2}-x=y, & \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & \pi/2 \\ \pi/2 & 0 \end{array} \\ dx=-dy, & \end{array}\right]=\lim_{\alpha\to 0+0}\frac{\alpha^2\cos\alpha}{\sin\alpha}+\int_{\pi/2}^{0}\ln\cos y\;dy=$$

$$=-\int_{0}^{\pi/2}\ln\cos y\;dy=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln 2}}\ \text{(см. решение задачи } \mathbf{184}\text{)}.$$

188. $$\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\,dx=\left[\begin{array}{ll} x=\sin y, & \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & \pi/2 \end{array} \\ \arcsin x=y, & \\ dx=\cos y\;dy, & \end{array}\right]=\int_0^{\pi/2}y\operatorname{ctg}y\;dy=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}\ln 2}}$$

(см. решение задачи **187**).

189. $$\int_0^1\frac{\ln x\;dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left[\begin{array}{ll} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v=\arcsin x \end{array}\right]=\underbrace{\ln x\cdot\arcsin x\Big|_0^1}_{=0}-$$

$$-\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\,dx=\underline{\underline{-\frac{\pi}{2}\ln 2}}\ \text{(см. задачу } \mathbf{188}\text{)}.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\ln x\cdot\arcsin x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\arcsin x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{(\arcsin x)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0+0}\frac{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}{x}=-\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{x}=0\ (\arcsin x\sim x,\ x\to 0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Берман, Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / Г. Н. Берман. – С.Пб : Профессия, 2002. – 432 с.

2. Математический анализ в примерах и задачах [Текст] : в 2 ч. / И. И. Ляшко и др. – К. : Вища школа, 1979. – Ч. 1. – 680 с.

3. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – Т. 2. – 800 с.

СОДЕРЖАНИЕ