

Базисні функції бікубічного серендипового елемента: Нестандартні випадки

Астіоненко І.О.¹⁾, Гучек П.Й.²⁾, Давиденко П.А.¹⁾, Литвиненко О.І.¹⁾

¹⁾Херсонський національний технічний університет, м.Херсон, Бериславське шосе, 24, mmkntu@gmail.com

При лагранжевій інтерполяції ставиться задача “побудувати інтерполяційний поліном як можна нижчого степеня...” [1]. Якщо зняти це обмеження при побудові серендипового інтерполяційного полінома, то на одному скінченному елементі можна побудувати безліч базисних функцій. Ще у 1959 р. Березін І.С. і Жидков М.П. у першому виданні книги [2] зауважили, що зовсім не обов’язково вимагати, щоб порядок інтерполяційного полінома був найменший, можна розглядати такі системи вузлів, для яких розв’язок поставленої задачі не буде єдиним.

За допомогою комбінованого алгебро-геометричного методу побудуємо інтерполяційний поліном бікубічного СЕ (рис. 1) з 15-ма параметрами. Для цього функції форми для вузлів 1 і 2 запишемо у вигляді:

$$N_1 = K_1(1-\xi)(1-\eta)(A\xi\eta + B\xi + C\eta + 1)(D\xi + E\eta + 1), \quad (1)$$

$$N_2 = K_2(1-\xi^2)(1-\eta)(F\xi + G\eta + 1). \quad (2)$$

Розв’язавши систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $A, B, C, D, E, F, G, K_1, K_2$ отримуємо чотири розв’язки: два “симетричні” випадки (пряма $D\xi + E\eta + 1 = 0$ проходить через вузли 2,12 або 3,11) та два “несиметричні” випадки (пряма $D\xi + E\eta + 1 = 0$ проходить через вузли 2,11 або 3,12). Розглянемо один із “несиметричних” розв’язків:

$$N_1 = \frac{1}{320}(1-\xi)(1-\eta)(3\xi + 6\eta + 5)[9(16p-3)\xi\eta + 3(48p+1)\xi + 12(24p-1)\eta + 2(72p-1)]. \quad (3)$$

$$N_2 = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1-\eta)[-6\xi - (8p+1)\eta + 1 - 8p]. \quad (4)$$

Лінії нульового рівня $N_1(\xi, \eta)$ (суцільні лінії) і $N_2(\xi, \eta)$ (пунктир) для цього випадку показані на рис. 1. Перша і друга дужки формули (3) асоціюються з протилежними першому вузлу сторонами квадрата: 4-7 та 7-10 і задають рівняння гіпара $f_1^{(1)} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$. Третя дужка – права частина рівняння прямої, яка є лінією перетину з площиною квадрата площини, що проходить через вузли 3-12 та точку $(-1, -1, 1)$: $f_1^{(3)} = -\frac{1}{4}(3\xi + 6\eta + 5)$.

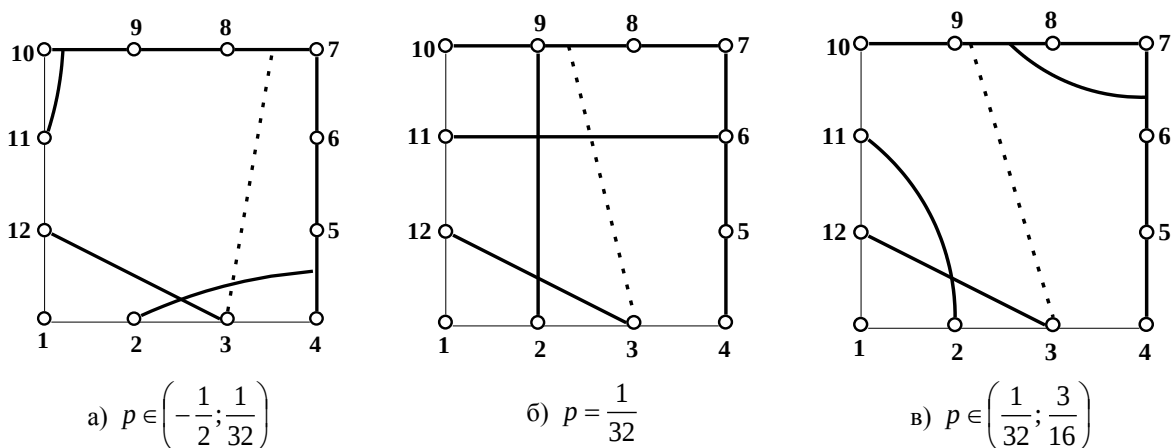


Рис.1. Лінії нульового рівня функцій N_1 та N_2 моделей з 15 параметрами

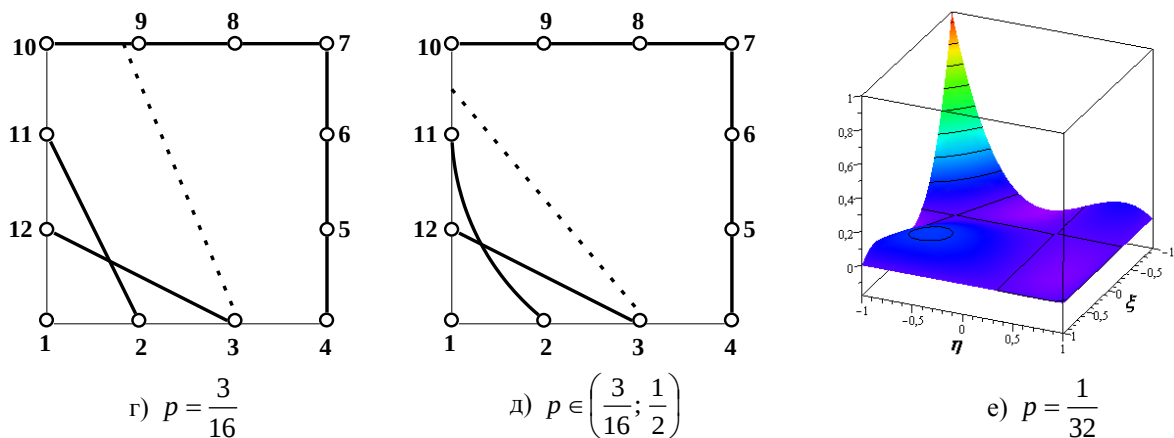


Рис.1. Лінії нульового рівня функцій N_1 та N_2 моделей з 15 параметрами (продовження)

Гіперболи на рис. 1а, в, г та прямі на рис. 1б, г – це лінії перетину площини квадрата з гіперболічним параболоїдом, який заданий останнім множителем:

$$f_1^{(4)} = -\frac{1}{20}(9(16p-3)\xi\eta + 3(48p+1)\xi + 12(24p-1)\eta + 2(72p-1)).$$

На відміну від “симетричного” випадку, в якому вісь гіпара співпадає з діагоналлю квадрата 1-7, в даному випадку вісь гіпара не співпадає з діагоналлю квадрата, звідки і виникає порушення симетрії.

На рис. 1е показана поверхня базисної функції N_1 у випадку, коли точка мінімаксу гіпара знаходиться у площині СЕ (відповідає рис. 1б).

Всі відомі раніше базиси мають кутові базисні функції, поверхні яких симетричні відносно відповідної діагоналі квадрата. Виконується одна з властивостей інтерполяційного полінома – зберігається геометрична ізотропія. Завдяки алгебро-геометричному методу *вперше* виявлено явище **порушення геометричної ізотропії** “кутової” функції всередині елемента: поверхня функції (4) не симетрична відносно діагоналі 1-7. На границях елемента геометрична ізотропія зберігається [3].

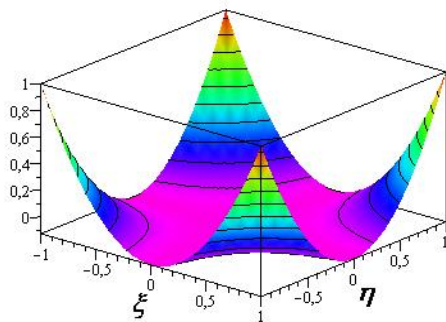


Рис. 2. Сума “кутових” функцій

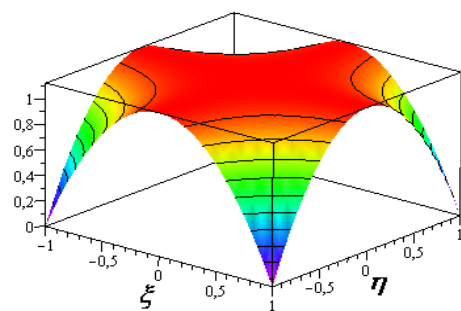


Рис. 3. Сума “проміжних” функцій

Зауважимо, що порушення геометричної ізотропії всередині елемента не приводить до небажаних наслідків, оскільки аномалії однієї базисної функції анулюються аномаліями іншої, і це демонструють суми відповідних “кутових” і “проміжних” функцій (рис.2, 3). Таким чином, геометрична ізотропія інтерполяційного полінома зберігається.

Література

1. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. — М. : Наука, 1967. — 368 с.
2. Березин И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков — М. : Физматизд., 1962. — Т.1. — 464 с.
3. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. — М. : Мир, 1981. — 304 с.