

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**Д. Ю. ШАРЕЙКО, І. С. БІЛЮК,
О. В. САВЧЕНКО, А. М. ФОМЕНКО**

**ПРАКТИКУМ З КУРСУ
«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»**

У двох частинах

Частина 1

ПЕРЕДАТОЧНА ФУНКЦІЯ

Рекомендовано Методичною радою НУК



ВИДАВНИЦТВО
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМ. АДМІРАЛА МАКАРОВА

2021

УДК 681.5(076.5)

П69

Автори:

Д. Ю. Шарейко, кандидат технічних наук, доцент;

І. С. Білюк, кандидат технічних наук, доцент, зав. каф. автоматики;

О. В. Савченко, зав. лабораторіями каф. автоматики;

А. М. Фоменко, доцент НУК

Рецензент Р. А. Ставинський, кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано Методичною радою НУК

Практикум з курсу «Теорія автоматичного керування» : у 2 ч. Ч. 1.
П69 Передаточна функція / Д. Ю. Шарейко, І. С. Білюк, О. В. Савченко,
А. М. Фоменко. – Миколаїв : НУК, 2021. – 28 с.

У практикумі наведені приклади отримання передаточних функцій для активних та пасивних чотириполіусників. Розглянуто алгебру передаточної функції з прикладами для отримання її для складних схем на підставі розвинення цих схем на окремі чотириполіусники та згортання структурної схеми. Також додаються від 18 до 24 варіантів різних задач, які можна використовувати як для модульного контролю, так і для самостійного опрацювання.

Призначено для студентів спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

УДК 681.5(076.5)

© Шарейко Д. Ю., Білюк І. С.,

Савченко О. В., Фоменко А. М., 2021

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2021

ЗМІСТ

1 Отримання передаточних функцій активних та пасивних чотириполіусників	4
1.1 Приклад знаходження передаточної функції пасивного чотириполіусника	7
1.2 Приклад знаходження передаточної функції активного чотириполіусника	9
2 Алгебра передаточної функції	14
2.1 Приклад застосування алгебри передаточної функції	20
Список літератури	25

1 ОТРИМАННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ФУНКЦІЙ АКТИВНИХ ТА ПАСИВНИХ ЧОТИРИПОЛЮСНИКІВ

Після складання диференційного рівняння (д. р.) системи з урахуванням вилучення всіх проміжних координат та формалізації цього рівняння [1–4] отримаємо наступне:

$$\begin{aligned} a_0 \cdot \frac{d^n X_{\text{вих}}}{dt^n} + a_1 \cdot \frac{d^{n-1} X_{\text{вих}}}{dt^{n-1}} + a_2 \cdot \frac{d^{n-2} X_{\text{вих}}}{dt^{n-2}} + \dots + a_n \cdot X_{\text{вих}} = \\ = b_0 \cdot \frac{d^m X_{\text{вх}}}{dt^m} + b_1 \cdot \frac{d^{m-1} X_{\text{вх}}}{dt^{m-1}} + b_2 \cdot \frac{d^{m-2} X_{\text{вх}}}{dt^{m-2}} + \dots + b_m \cdot X_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $a_0 - a_n, b_0 - b_m$, динамічні коефіцієнти, отримані в результаті формалізації.

Ліва частина рівняння відповідає внутрішнім властивостям системи, права частина – зовнішнім впливам. Враховуючи теореми диференціювання та інтегрування оригіналу з розділу математики «Операційне обчислення», отримуємо:

$$x(t) \rightarrow X(p),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow p \cdot X(p) + c,$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \rightarrow p^n \cdot X(p) + c,$$

$$\int x(t) dt \rightarrow \frac{1}{p} \cdot X(p) + c,$$

де $x(t)$ – оригінал; $X(p)$ – зображення.

Перетворимо за Лапласом д. р. (1) при нульових початкових умовах, коли відсутня стала інтегрування с:

$$\begin{aligned} X_{\text{вх}}(p) & (a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \dots + a_n) = \\ & = (b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + b_2 \cdot p^{m-2} + \dots + b_m) \cdot X_{\text{вих}}(p); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{X_{\text{вих}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + b_2 \cdot p^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \dots + a_n}. \quad (3)$$

Рівняння (3) є передаточною функцією $W(p)$.

Передаточна функція – це відношення вихідної координати, що перетворена за Лапласом при початкових нульових умовах, до вхідної координати, що перетворена за Лапласом при початкових нульових умовах [1].

Властивості передаточної функції:

1. Передаточна функція завжди дрібно раціональна, відносно оператора p . Це стосується реальних систем: $n \geq m$.
2. Коефіцієнтами передаточної функції є дійсні величини, тому що вони є комбінаціями реальних параметрів елементів схеми.

3. Корені характеристичного рівняння, тобто знаменника передаточної функції, завжди або комплексно спряжені з від'ємними дійсними частинами, або дійсні від'ємні.

Пропонується знаходити передаточні функції на прикладі електричних схем чотириполюсників. Адже будь-яку електричну, електромеханічну схеми можна розвинути на окремі чотириполюсники. Для знаходження передаточної функції складної схеми можна використовувати алгебру передаточної функції.

Пасивні чотириполюсники – це технічні елементи, що зв'язують вхідну та вихідну координати, вони не потребують залучення зовнішньої додаткової енергії (рис. 1).

Активні чотириполіусники – містять хоча б один елемент, що потребує присутності джерела живлення. На рис. 2 наведений активний чотириполіусник, на якому контакти живлення операційного підсилювача не вказані.

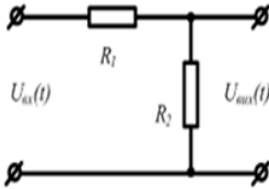


Рис. 1 – Пасивний чотириполіусник

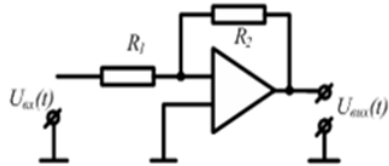


Рис. 2 – Активний чотириполіусник

При отриманні передаточної функції електричних схем необхідно враховувати наступні визначення падіння напруг на реактивних елементах (рис. 3, 4):

$$U_L = L \frac{di}{dt} .$$

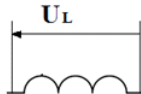


Рис. 3 – Падіння напруги на індуктивності

$$U_c = 1/C \int i dt$$

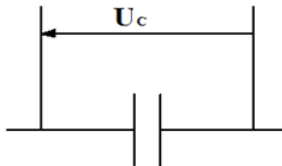


Рис. 4 – Падіння напруги на ємності

Зв'язок вхідної та вихідної координати чотириполюсника повинен відбуватися за допомогою фізичних параметрів схеми. Ніяких проміжних координат не може бути.

1.1 Приклад знаходження передаточної функції пасивного чотириполюсника

На рис. 5 наведено пасивний чотириполюсник, на прикладі якого буде знайдена передаточна функція.

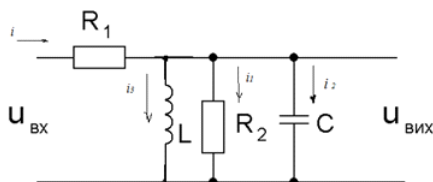


Рис. 5 – Схема прикладу на основі пасивного чотириполюсника

$$i = i_1 + i_2 + i_3. \quad (4)$$

$$i = (U_{\text{ВХ}} - U_{\text{ВІХ}})/R_1. \quad (5)$$

$$U_{\text{ВІХ}} = \frac{1}{C} \int i_2 dt; \quad i_2 = C \frac{dU_{\text{ВІХ}}}{dt}. \quad (6)$$

$$U_{\text{ВІХ}} = L \frac{di_3}{dt}; \quad i_3 = \frac{1}{L} \int U_{\text{ВІХ}} dt. \quad (7)$$

Підставимо рівняння (5–7) у (4).

$$\frac{U_{\text{ВХ}} - U_{\text{ВІХ}}}{R_1} = \frac{U_{\text{ВІХ}}}{R_2} + C \frac{dU_{\text{ВІХ}}}{dt} + \frac{1}{L} \int U_{\text{ВІХ}} dt. \quad (8)$$

Враховуючи, що передаточну функцію отримують при початкових нульових умовах, позбудемося інтегралу у рівнянні (8) за рахунок диференціювання:

$$\frac{1}{R_1} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} - \frac{1}{R_1} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} = \frac{1}{R_2} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + C \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{1}{L} U_{\text{вих}}. \quad (9)$$

Застосовуємо разом два етапи формалізації диференційного рівняння (9), а саме: перший – розділення змінних, ліворуч розташовуємо всі вихідні координати з їх похідними, праворуч – вхідні координати з їх похідними; другий – розташування координат за порядком більшості похідних:

$$C \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + \frac{1}{L} U_{\text{вих}} = \frac{1}{R_1} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}. \quad (10)$$

Третій етап формалізації – позбуваємося коефіцієнта, який знаходиться біля нульової похідної вихідної координати $U_{\text{вих}}$:

$$LC \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{L}{R_1} \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + U_{\text{вих}} = \frac{L}{R_1} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}. \quad (11)$$

Четвертий етап формалізації д. р. – заміна фізичних параметрів динамічними коефіцієнтами:

$$T_1 = L/R_1 [c]; \quad T_2 = CR_1 [c]; \quad k = (R_1 + R_2)/R_2.$$

Характерно, що наприкінці формалізації д. р. розмірності правої його частини має відповідати розмірності лівої частини. Отже, маємо:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + T_1 k \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + U_{\text{вих}} = T_1 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}. \quad (12)$$

Перетворюємо диференційне рівняння (12) за Лапласом при початкових нульових умовах, враховуючи теорему диференціювання оригіналу:

$$(T_1 T_2 p^2 + T_1 k p + 1) U_{\text{вих}}(p) = T_1 p U_{\text{вх}}(p).$$

Нарешті знаходимо передаточну функцію:

$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{T_1 p}{T_1 T_2 p^2 + T_1 k p + 1}.$$

1.2 Приклад знаходження передаточної функції активного чотириполосника

На рис. 6 наведено активний чотириполосник, на прикладі якого буде знайдена передаточна функція.

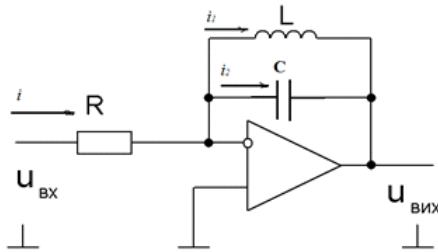


Рис. 6 – Схема прикладу на основі активного чотириполосника

$$i = i_1 + i_2. \quad (13)$$

$$i = U_{\text{вх}}/R. \quad (14)$$

$$U_{\text{вих}} = \frac{1}{C} \int i_2 dt; \quad i_2 = C \frac{dU_{\text{вих}}}{dt}. \quad (15)$$

$$U_{\text{вих}} = L \frac{di_1}{dt}; \quad i_1 = \frac{1}{L} \int U_{\text{вих}} dt. \quad (16)$$

Підставимо рівняння (16), (15), (14) у (13):

$$\frac{U_{\text{вх}}}{R} = C \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} + \frac{1}{L} \int U_{\text{вих}} dt. \quad (17)$$

Позбудемося інтегралу аналогічно рівнянню (9). Також аналогічно проведемо два перших етапи формалізації:

$$\frac{1}{R} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} = C \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{1}{L} U_{\text{вих}}; \quad (18)$$

$$C \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{1}{L} U_{\text{вих}} = \frac{1}{R} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}. \quad (19)$$

Позбуваємося коефіцієнта, який знаходиться біля нульової похідної вихідної координати $U_{\text{вих}}$:

$$LC \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + U_{\text{вих}} = \frac{L}{R_1} \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}. \quad (20)$$

Заміняємо фізичні параметри динамічними коефіцієнтами:

$$T_1 = L/R_1 [\text{с}]; T_2 = CR_1 [\text{с}];$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}}{dt^2} + U_{\text{вих}} = T_1 \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}. \quad (21)$$

Перетворюємо диференційне рівняння (21) за Лапласом при початкових нульових умовах, враховуючи теорему диференціювання оригіналу:

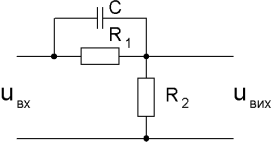
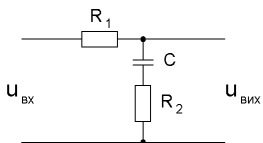
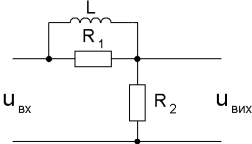
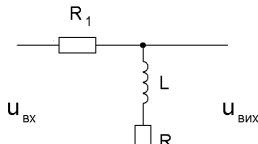
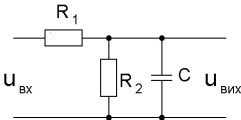
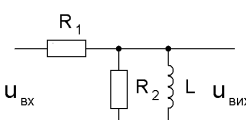
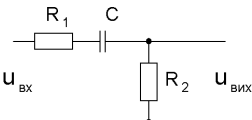
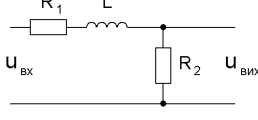
$$(T_1 T_2 p^2 + 1) U_{\text{вих}}(p) = T_1 p U_{\text{вх}}(p).$$

Знаходимо передаточну функцію:

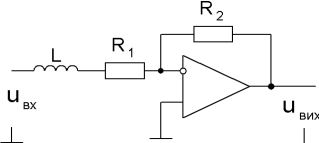
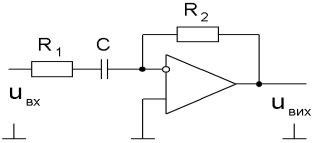
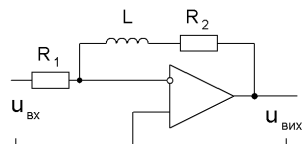
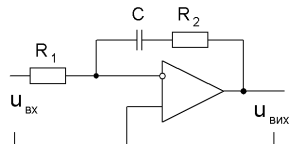
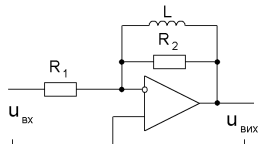
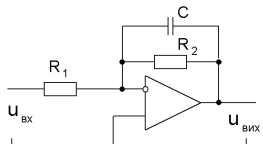
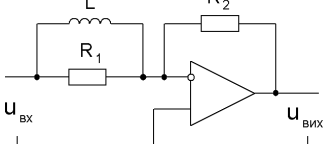
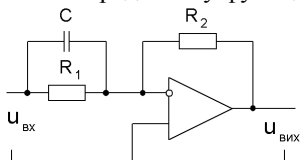
$$W(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{T_1 p}{T_1 T_2 p^2 + 1}.$$

У табл. 1 наведені початкові умови 18 варіантів пасивних та активних чотириполіусників для знаходження передаточної функції.

Таблиця 1 – Варіанти для самостійної роботи

Варіант № 1 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 2 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 
Варіант № 3 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 4 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 
Варіант № 5 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 6 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 
Варіант № 7 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 8 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 

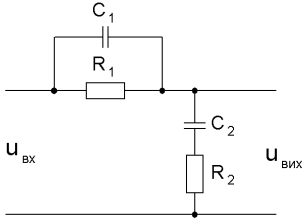
Продовж. табл. 1

Варіант № 9 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 10 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 
Варіант № 11 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 12 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 
Варіант № 13 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 14 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 
Варіант № 15 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 	Варіант № 16 Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію. 

Продовж. табл. 1

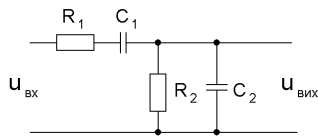
Варіант № 17

Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію.



Варіант № 18

Скласти диференціальне рівняння, формалізувати його та отримати передаточну функцію.



2 АЛГЕБРА ПЕРЕДАТОЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Алгебра передаточної функції дозволяє розвинути схему на окремі чотириполюсники, знайти їх передаточні функції, а потім знайти передаточну функцію з'єднання [1–4]. Вона основана на двох складових: згортання та структурні перетворення. Для згортання існують 3 правила:

1. *Елементи з'єднані послідовно* (рис. 7, 8):

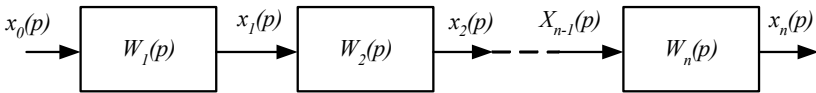


Рис. 7 – Структурна схема елементів, що з'єднані послідовно

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$$

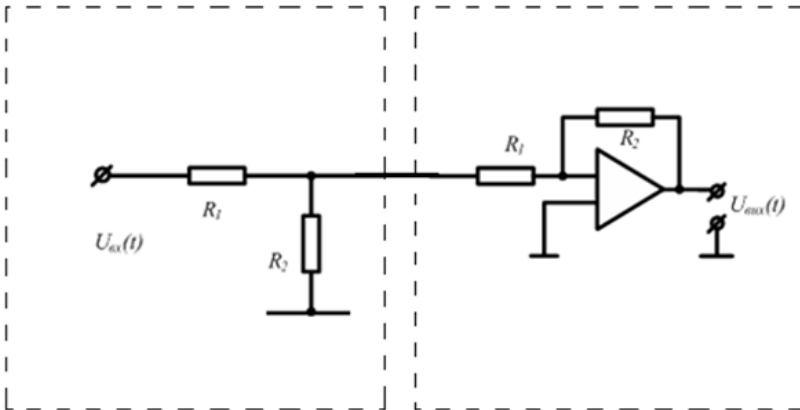


Рис. 8 – Приклад електричної схеми елементів, що з'єднані послідовно

2. Елементи з'єднані паралельно (рис. 9, 10):

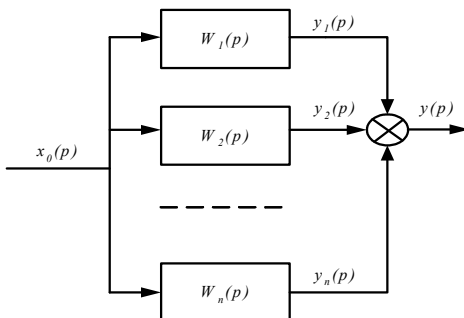


Рис. 9 – Структурна схема елементів, що з'єднані паралельно

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$$

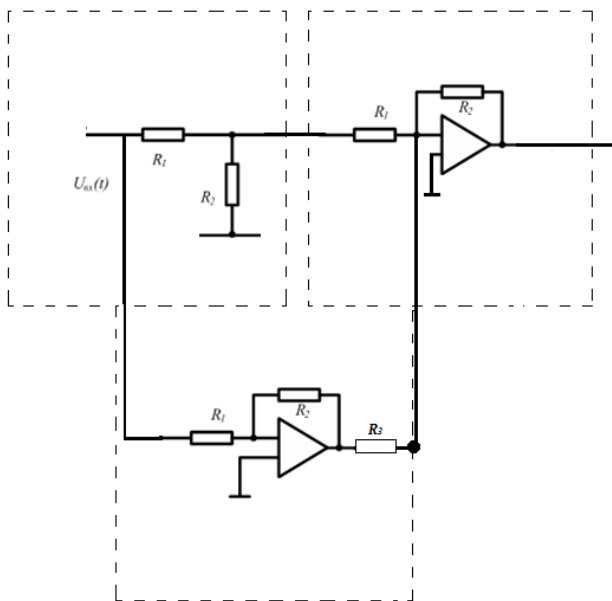


Рис. 10 – Приклад електричної схеми елементів, що з'єднані паралельно

3. Схема зворотного зв'язку (рис. 11, 12):

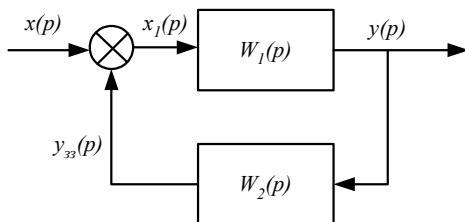


Рис. 11 – Структурна схема елементів, що з'єднані зворотним зв'язком

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p)W_{33}(p)}, \text{ де } W_{33}(p) = W_2(p)$$

У знаменнику передаточної функції знак «+» або «-» залежить від характеру зворотного зв'язку. Якщо зворотний зв'язок негативний, ставиться «+», позитивний – «-».

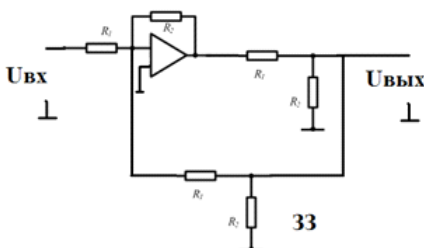


Рис. 12 – Приклад електричної схеми елементів, що з'єднані зворотним зв'язком

За допомогою алгебри передаточної функції можна дістати остаточну передаточну функцію будь-якої схеми, розклавши її на окремі чотириполіусники. Знайдені передаточні функції чотириполіусників складають передаточну функцію всієї системи. Проте у низці випадків не можна для знахо-

дження передаточної функції всієї системи безпосередньо застосувати правила згортання, наприклад схема, що наведена на рис. 13.

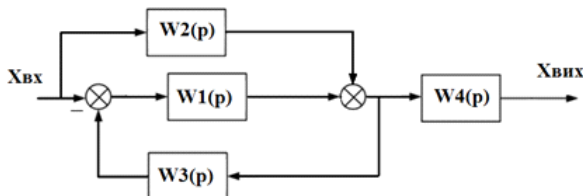


Рис. 13 – Приклад для розв’язку

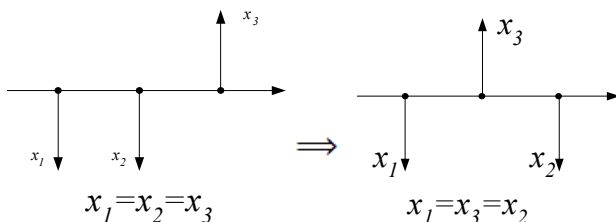
Постає необхідність спочатку цю схему перетворити, підготувати її за допомогою певних правил для подальшого перетворення. Ці правила мають назву – **Правила структурних перетворень**.

Ці правила мають підґрунтям два твердження:

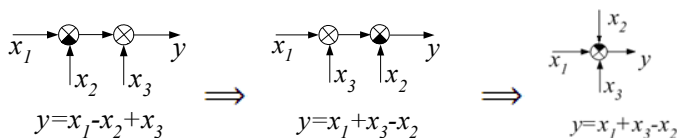
1. Зі структурною схемою можна робити будь-які перетворення, але вхідні і вихідні координати від цього не повинні змінюватися.
2. Відносно ускладнення структурної схеми від перетворень впливає з математичних підстановок замість проміжної координати певного виразу.

Правила структурних перетворень

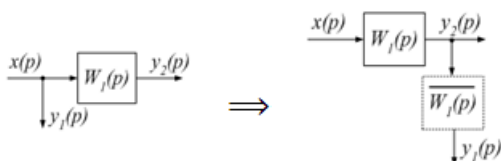
1. Вузли у структурних схемах можна об’єднувати, роз’єднувати і міняти місцями:



2. Суматори у структурних схемах можна об'єднувати, роз'єднувати і міняти місцями:

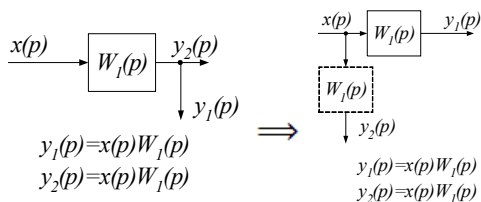


3. Перенесення вузла через ланку:

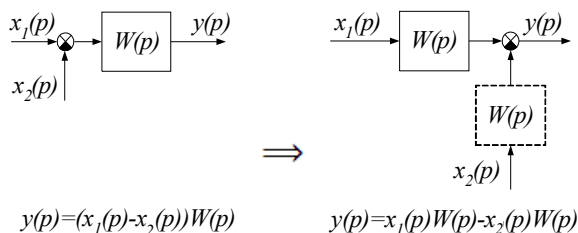


$$\text{де } \overline{W_1(p)} = \frac{1}{W_1(p)};$$

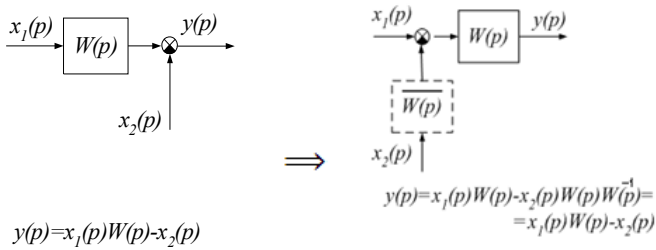
4. Перенесення ланки через вузол:



5. Перенесення суматора через ланку:



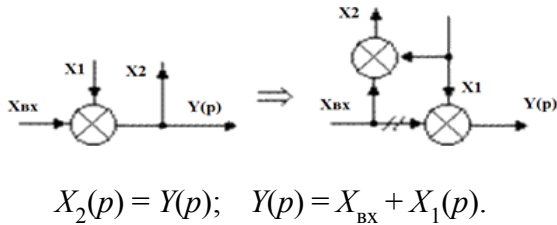
6. Перенесення ланки через суматор:



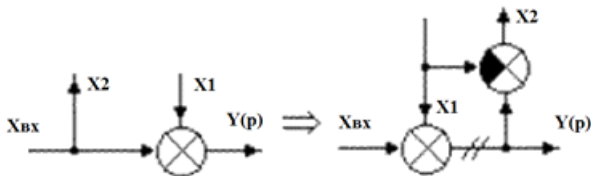
де $\overline{W_1(p)} = \frac{1}{W_1(p)}$.

Небажані перенесення:

7. Перенесення суматора через вузол:



8. Перенесення вузла через суматор:



2.1 Приклад застосування алгебри передаточної функції

Розглянемо приклад спрощення структурної схеми за допомогою правил структурних перетворень (рис. 14):

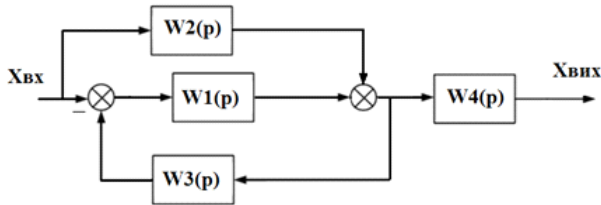


Рис. 14 – Вихідна схема для розв’язку

Переносимо перший суматор через ланку $W_1(p)$ і об’єднуємо суматори (рис. 15):

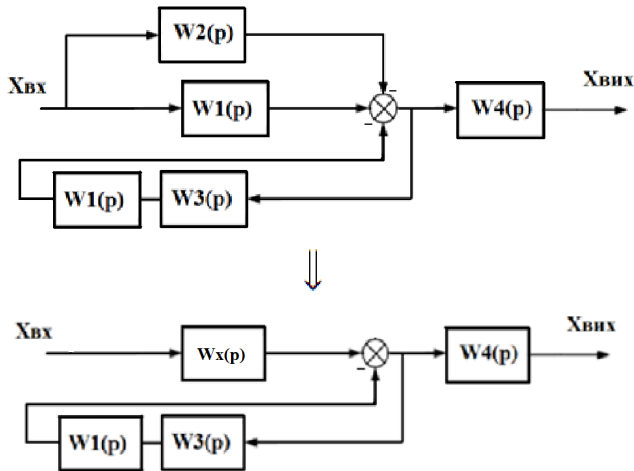


Рис. 15 – Перенесення першого суматора через ланку та згоргання паралельного з’єднання, де $W_x(p) = W_1(p) + W_2(p)$

Застосування правила послідовного з'єднання (рис. 16):

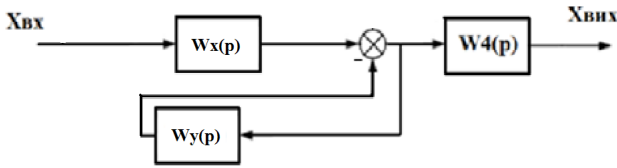


Рис. 16 – Згорання послідовного з'єднання,
де $W_y(p) = W_1(p) W_3(p)$

Застосування правила згорання зворотного зв'язку (рис. 17).



Рис. 17 – Згорання зворотного зв'язку,

$$\text{де } W_z(p) = \frac{1}{1 + W_y(p)}$$

Остаточний результат, що впливає із застосування правила згорання послідовного з'єднання (рис. 18):

$$W(p) = W_x(p) \cdot W_z(p) \cdot W_4(p).$$

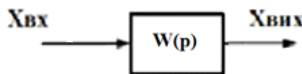


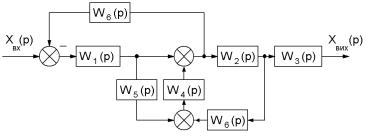
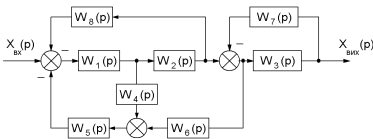
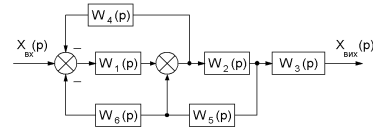
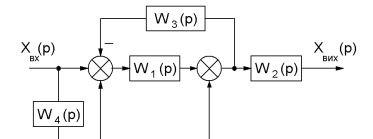
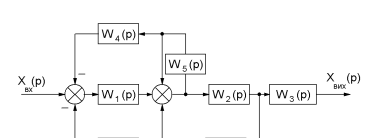
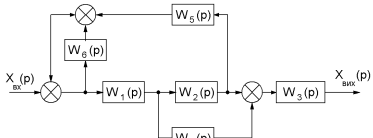
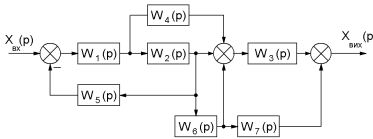
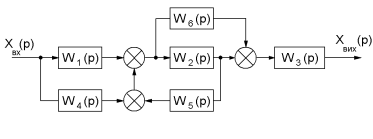
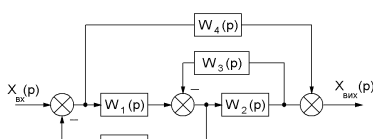
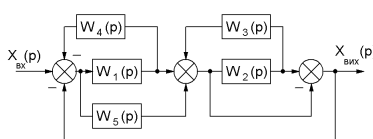
Рис. 18 – Остаточний результат

У табл. 2 наведені початкові умови 24 варіантів структурних схем для застосування правил алгебри передаточної функції та знаходження остаточного її виразу.

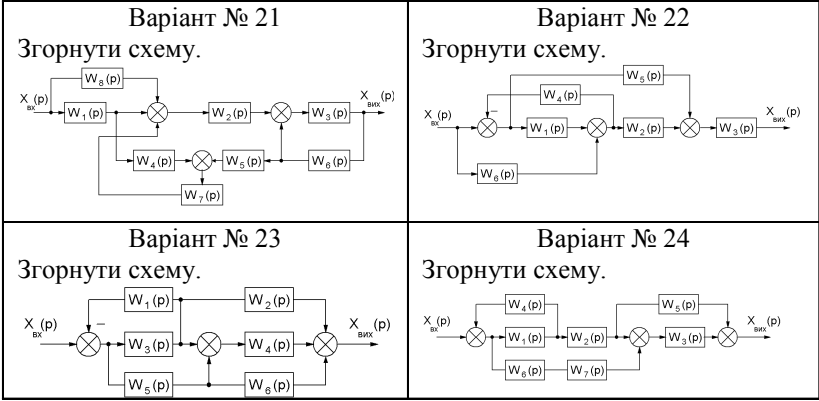
Таблиця 2 – Варіанти для самостійної роботи

Варіант № 1 Згорнути схему.	Варіант № 2 Згорнути схему.
Варіант № 3 Згорнути схему.	Варіант № 4 Згорнути схему.
Варіант № 5 Згорнути схему.	Варіант № 6 Згорнути схему.
Варіант № 7 Згорнути схему.	Варіант № 8 Згорнути схему.
Варіант № 9 Згорнути схему.	Варіант № 10 Згорнути схему.

Продовж. табл. 2

Варіант № 11 Згорнути схему. 	Варіант № 12 Згорнути схему. 
Варіант № 13 Згорнути схему. 	Варіант № 14 Згорнути схему. 
Варіант № 15 Згорнути схему. 	Варіант № 16 Згорнути схему. 
Варіант № 17 Згорнути схему. 	Варіант № 18 Згорнути схему. 
Варіант № 19 Згорнути схему. 	Варіант № 20 Згорнути схему. 

Продовж. табл. 2



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Попович, М. Г.** Теорія автоматичного керування [Текст] : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2007. – 656 с.
2. **Певзнер, Л. Д.** Практикум по теории автоматического управления [Текст] : учеб. пособие / Л. Д. Певзнер. – М. : Высш. шк., 2006. – 590 с.
3. Практикум по автоматике. Математическое моделирование систем автоматического регулирования [Текст] / под ред. Б. А. Карташова. – М. : Колос, 2006. – 184 с.
4. **Попович, М. Г.** Електромеханічні системи автоматичного керування та електроприводи [Текст] : навч. посібник / М. Г. Попович, О. Ю. Лозинський, В. Б. Клепиков та ін. ; за ред. М. Г. Поповича, О. Ю. Лозинського. – К. : Либідь, 2005. – 680 с.

ДЛЯ ЗАДАТОК

ДЛЯ ЗАДАТОК

Навчальне видання

ШАРЕЙКО Дмитро Юрійович
БІЛЮК Іван Сергійович
САВЧЕНКО Олег Валерійович
ФОМЕНКО Андрій Миколайович

**ПРАКТИКУМ З КУРСУ
«ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»**

У двох частинах

Частина 1

ПЕРЕДАТОЧНА ФУНКЦІЯ

Комп'ютерне верстання *В. В. Москаленко*
Комп'ютерна правка *М. О. Паненко*
Коректор *О. Є. Вакула*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 1,6. Тираж 100 прим. Вид. № 35. Зам. № 1608-64.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025

E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.