

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМЕНІ АДМІРАЛА МАКАРОВА
ХЕРСОНСЬКА ФІЛІЯ

О.М. Дудченко,
М.Б. Літвінова,
О.Д. Штанько

КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ТА АЛГОРИТМІЗАЦІЇ ЗАДАЧ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Херсон
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

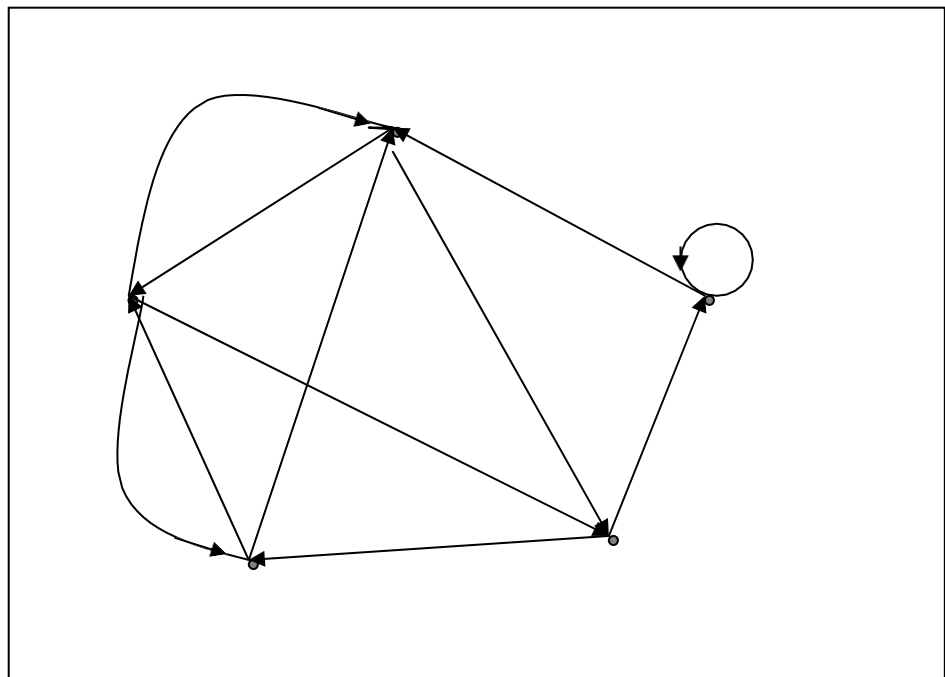
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМЕНІ АДМІРАЛА МАКАРОВА

ХЕРСОНСЬКА ФІЛІЯ

О.М. Дудченко, М.Б. Літвінова, О.Д. Штанько

КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ТА АЛГОРИТМІЗАЦІЇ ЗАДАЧ

Навчальний посібник



Херсон 2020

УДК 519.15

Д 17

ISBN 978-617-7917-01-3

Рецензенти:

Гучек П.Й., доктор технічн. наук, доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова

Коваленко В.Ф., доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри інформатики і комп'ютерних наук Херсонського національного технічного університету

Савченко О.Г., доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри прикладної математики та економічної кібернетики Херсонського державного аграрно-економічного університету

Посібник містить матеріал практичного вивчення основ сучасної дискретної математики. Наведено основні поняття з теорії графів і мереж. Розглядаються питання різних способів опису графів, операції над графами, завдання зв'язності й досяжності в графах. Особлива увага надається машинним методам представлення інформації та комп'ютерним алгоритмам розв'язання задач. Значне місце приділено вирішенню оптимізаційних задач на графах, таких як пошук найкоротших шляхів у графах і розбиття графів на максимальні сильно зв'язані підграфи.

Навчальний посібник складається із вступу, шести розділів (два перших розділи склав Дудченко О.М., третій та четвертий – Штанько О.Д., вступ, п'ятий та шостий розділи складені Літвіною М.Б.), які є важливою частиною курсу "Комп'ютерна дискретна математика". У посібнику підібрано задачі, що є найбільш актуальними для подальшого вивчення професійно-орієнтованих курсів майбутніми програмістами. Наприкінці наведено список навчально-методичної літератури та додатки, що містять комп'ютерні алгоритми і програми аналізу графів.

Навчальний посібник дозволяє значно полегшити процес оволодіння необхідними елементами сучасної дискретної математики. Він призначений для студентів спеціальності 121 "Інженерія програмного забезпечення" та інших спеціальностей, які вивчають дисципліни "Дискретна математика" і "Прикладна математика".

© Дудченко О.М. Літвінова М.Б., Штанько О.Д.

© ХФ НУК, 2020

ЗМІСТ

	<i>Стор.</i>
ВСТУП	6
1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН	10
1.1 Поняття множини. Способи задання і структурні характеристики множин	10
1.2 Операції над множинами	17
1.3 Відношення	21
1.4 Відповідності та відображення	27
2. ГРАФИ ТА СПОСОБИ ЇХ ПРЕДСТАВЛЕННЯ	37
2.2 Основні визначення	37
2.2 Деякі спеціальні види графів	42
2.3 Способи опису графів	47
2.3.1 Теоретико-множинне представлення графів	47
2.3.2 Завдання графів відповідністю	47
2.3.3 Матричне представлення графів	48
2.4 Тривіальні дії на графах	52
3 ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ	56
3.1 Багатозначні відображення	56
3.1.1 Прямі відображення	56
3.1.2 Зворотні відображення	57
3.2 Створення маршрутів у графах	60
3.2.1 Маршрути, зв'язані вершини, компоненти зв'язності	60
3.2.2 Якісні ознаки зв'язності	65
3.2.3 Точки зчленування, мости	66
3.2.4 Кількісні ознаки зв'язності	68
3.2.5 Відстань між вершинами. Екстремальні маршрути	70

3.2.6 Властивості максимальних простих ланцюгів	77
3.3 Транзитивні замикання	81
3.3.1 Пряме транзитивне замикання	81
3.3.2 Зворотнє транзитивне замикання	81
3.3 Досяжність і контрдосяжність	83
3.4 Ізоморфізм і самодоповнювальність графів	88
4 ГРАФИ ТА ПІДГРАФИ	95
4.1 Симетричні та антисиметричні графи	95
4.2 Графи типу "дерево"	96
4.3 Планарні графи	106
4.3.1 Визначення та умови планарності графів	106
4.3.2 Властивості планарних графів	111
4.3.3 Критерії планарності	112
4.3.4 Максимально плоский граф.	
Тріангуляція	115
4.4 Дводольні графи	119
4.5 Види підграфів	127
4.6 Сильно зв'язані графи та компоненти графа	130
4.7 Матричний метод розбиття графів на максимально сильно зв'язані підграфи	136
5 СПЕЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ ТА ОРГРАФАМИ	140
5.1 Розфарбування графів	140
5.1.1 Хроматичне число графа	140
5.1.2 Гіпотеза чотирьох фарб та теорема про п'ять фарб для планарних графів	141
5.2 Перетворення орграфів	146
5.2.1 Модель орієнтованого графа	146
5.2.2 Обернений орграф. Принцип орієнтованої двоїстості	148

5.3 Шляхи та цикли в орграфах	149
5.4 Досяжність і класифікація вершин в орграфі	153
5.5 Типи зв'язності	155
5.6 Безконтурні орграфи, орієнтація графів і турніри	159
5.7 Матричний метод знаходження шляхів у графах	163
5.8 Вага і довжина шляху	167
5.9 Алгоритм Дейкстри пошуку найкоротших шляхів у графі	170
5.10 Орцикли та цикли	188
6 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	191
6.1 Абстрактні автомати	191
6.2 Способи математичного опису автоматів	193
6.2.1 Табличний спосіб задання автомата Мілі	193
6.2.2 Графічний спосіб задання автомата Мілі	195
6.2.3 Табличний спосіб задання автомата Мура	196
6.2.4 Графічний спосіб задання автомата Мура	196
6.3 Мінімізація повністю визначених абстрактних автоматів	203
6.4 Мінімізація орієнтованих детермінованих графів з ациклічними підграфами	212
6.4.1. Постановка задачі	212
6.4.2 Метод і алгоритм знаходження еквівалентних вершин	215
СЛОВНИК ТЕРМІНІВ	221
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	234
ДОДАТКИ	235

ВСТУП

В останні роки особливу важливість набувають ті розділи математики, що мають відношення до розвитку цифрових пристроїв, цифрового зв'язку та цифрових обчислювальних машин. Базою для викладання цих дисциплін поряд з класичними методами аналізу фізичних моделей стали алгебраїчні, логічні та комбінаторні методи дослідження різних моделей дискретної математики.

Значно зросла популярність теорії графів - гілки дискретної математики. Графи зустрічаються в багатьох інженерних та суміжних областях під різними назвами: "структури" в будівництві, "мережі" - в електроніці, "соціограма" - в соціології та економіці, "молекулярні структури" - в хімії, "дорожні карти", "електричні або газові розподільні мережі" та ін.

Народившись підчас вирішення головоломок та ігор (наприклад, завдання про кенігсберзькі мости та гра Гамільтона), теорія графів стала потужним засобом дослідження й вирішення багатьох завдань, що виникають при вивченні великих і складних систем. Для фахівців з обчислювальної техніки, інформаційних систем і систем цифрового зв'язку теорія графів - це зручна модель для розв'язання професійних задач.

Теорія графів незалежно "відкривалася" багато разів. Найперша згадка про неї зустрічається в роботах Ейлера, який у 1736 році розв'язав задачу про кенігсберзькі мости. У Кенігсберзі було два острови, з'єднані сімома мостами з берегами річки Прегель та один із одним (рис. 1, а). Задача полягала в пошуку маршруту проходження всіх чотирьох частин суші, що мав починатися на довільній частині суші, закінчуватися на ній же та по одному разу проходити кожен міст. Проте тривалий час всі спроби знайти маршрут були невдалими.

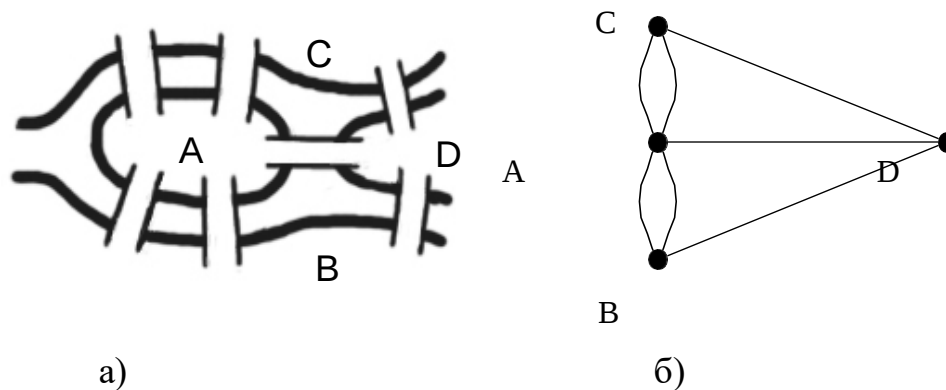


Рис. 1. Кенігсберзькі мости та граф

Щоб довести неможливість існування такого маршруту Ейлер позначив кожную частину суші точкою (вершиною, або вузлом), а кожен міст - лінією (ребром), що з'єднує відповідні точки, і одержав "граф" (рис. 1, б). Твердження про неіснування маршруту рівносильно неможливості спеціальним чином обійти граф. Виходячи з цього конкретного випадку, Ейлер узагальнив постановку задачі та знайшов критерій існування обходу.

Пізніше елементи теорії графів з'явилися в таких природничих науках, як географія, фізика, хімія, електротехніка. Взагалі, графи застосовуються в усіх галузях, де є елементи й зв'язки між ними, тому теорія графів є актуальним прикладним розділом математики.

Графічна інтерпретація різних моделей графів надана на рисунку 2. Так у вигляді орієнтованих графів можна уявити будь-яку логічну або функціонально-логічну схему (рис. 2, а). На таких графових моделях можна, наприклад, оцінити швидкодію схеми. Блок-схему алгоритма можна представити ймовірнісним графом (рис. 2, б), що дозволяє оцінити часові характеристики алгоритму, витрати процесорного часу, трудомісткість та ін. Графом типу "дерево" можна відобразити практично будь-яку структуру організації чи підприємства. У нашому

випадку (рис. 2, в) відображено структуру ХФ НУК: її факультети (суднобудівний та економічний: СБ та Е), кожний з яких містить кафедри (К) та наукові лабораторії (НЛ); допоміжний відділ (ДВ), що складається з деканатів (Д), господарчого відділу (ГВ) та навчально-організаційного відділу (НОВ). Додатково на графі можна додати будь-які інші складові гілки.

Методи теорії графів широко застосовуються підчас вирішення практичних завдань проектування й дослідження електронних засобів обробки інформації та промислової автоматики, інформаційно-управляючих систем тощо. Широке застосування теорія графів одержала при дослідженні так званої проблеми оптимізації, що виникає при конструюванні великих технічних і програмних систем (наприклад, компіляторів), і логістичної діяльності підприємств. На цей час основну увагу зосереджено на розробці й описанні комп'ютерних алгоритмів аналізу графів. У зв'язку з цим основний акцент у даному навчальному посібнику робиться на машинних способах представлення графів і на алгоритми вирішення задач на графах, що реалізуються з використанням електронно-обчислювальних засобів. Окремо розглянуто використання теорії графів у задачах автоматичного керування. Розглядається значна кількість прикладних задач за всіма розділами посібника. Наприкінці кожного з них наведені завдання для самостійного розв'язку. В найбільш складних випадках до завдань надаються відповіді та додаткові роз'яснення.

Виходячи з того, що математичною основою теорії графів є теорія множин, у першому розділі коротко викладені її основні поняття. Наприкінці навчального посібника надано словник базових термінів з теорії графів і список літератури для подальшого більш глибокого та спеціалізованого вивчення її окремих розділів.

1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Теорія множин є основою теорії графів. Навчальний матеріал усіх розділів цього навчального посібника тією чи іншою мірою базується на основних положеннях теорії множин. Зміст даного розділу переслідує мету надання можливості одержання знань, необхідних для успішного вивчення матеріалів теоретичного і прикладного характеру, викладених у наступних розділах.

1.1 Поняття множини. Способи задання і структурні характеристики множин

Характеристичною ознакою множини є те, що вона не містить однакових елементів. Належність елемента a множині A позначають символом $\in$: $a \in A$, а той факт, що елемент a не є елементом множини A , позначають $a \notin A$.

Залежно від кількості елементів множини поділяються на скінченні та нескінченні. Якщо множина містить скінчену кількість елементів, її називають скінченною. Інакше кажучи, існує натуральне число, яким визначається кількість елементів скінченної множини. Наприклад, множина вершин трикутника, множина студентів у групі тощо. Скінченну множину, яка не містить жодного елемента, називають порожньою і позначають символом $\emptyset$.

Нескінченною називається множина, яка містить нескінченну кількість елементів, тобто не існує натурального числа, що дорівнює кількості елементів даної множини. Нескінченні множини поділяються на злічені та незлічені. Елементи зліченної множини можна поставити у відповідність ряду натуральних чисел. Прикладами злічених є множини парних, непарних, раціональних чисел тощо. Елементи незліченної множини не можна підрахувати за допомогою натурального ряду.

Наприклад, незліченними є множини дійсних та ірраціональних чисел, множина точок на прямій тощо.

Загальноприйнятими є позначення основних числових множин: N – натуральних чисел, Z – цілих чисел, R – дійсних чисел, Q – раціональних чисел, C – комплексних чисел.

Можливі такі способи задання множин:

- списком елементів у фігурних дужках. Наприклад, $A = \{x, y, z\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

- процедурою визначення повного набору елементів. Наприклад, $M = \{2^n, n \in N\}$ – множина чисел виду $2^n, n \in N$;

- описом характеристичних властивостей елементів. Множина елементів x , які мають властивість $P(x)$, зазвичай позначається $\{x | P(x)\}$ або $\{x: P(x)\}$. Наприклад, множина натуральних чисел, що є степенями числа 2, може бути записана як $A = \{x | x = 2^n, n \in N\}$.

Приклад 1. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Позначимо через B множину, елементами якої є квадрати елементів множини A . Опис множини B можемо зробити двома способами:

$$B = \{x^2 | x \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \text{ або } B = \{1, 4, 9, 16, 25\}.$$

Приклад 2. Зробимо опис множин точок площини, координати x і y яких задовольняють такі умови:

- а) $A = \{(x, y) | y = x, x \in R\}$. Множина A нескінченна, зображається всіма точками (x, y) прямої $y = x$ на площині в декартових координатах x, y ;

- б) $A = \{(x, y) | y > x, x \in R\}$. Множина A нескінченна, зображається точками (x, y) площини над прямою $y = x$ в декартових координатах x, y (без точок на прямій);

- в) $A = \{(x, y) | y < x, x \in R\}$. Множина A нескінченна, зображається точками (x, y) площини нижче прямої $y = x$ у декартових координатах x, y (без точок на прямій);

г) $A = \{(x, y) \mid y > x + 1, x \in \mathbb{R}\}$. Множина A нескінченна, зображається точками (x, y) площини над прямою $y = x + 1$ у декартових координатах x, y (без точок на прямій);

д) $A = \{(x, y) \mid y \leq 4 - x, x \in \mathbb{R}\}$. Множина A нескінченна, зображається точками (x, y) площини нижче прямої $y = 4 - x$ у декартових координатах x, y і точками на цій прямій;

е) $A = \{(x, y) \mid |y| \leq 1 - |x|, x \in \mathbb{R}, |x| \leq 1\}$. Множина A нескінченна, зображається точками (x, y) площини квадрата, обмеженого прямими лініями $y = 1 - x, y = x - 1, y = x + 1, y = -x - 1$ у декартових координатах x, y , з включенням точок сторін квадрата;

ж) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, x \in \mathbb{R}\}$. Множина A нескінченна, зображається всіма точками (x, y) площини, за винятком внутрішньої частини круга радіусом 1, у декартових координатах x, y із включенням точок кола.

Приклад 3. Які з наведених визначень множин $A = \{1, 3, 5\}, B = \{4, 7, 11\}, F = \{x \mid x \in A\}, D = \{A, B\}$ є коректними? Чи належить число 5 множині D ?

Отримуємо:

а) визначення множини A перерахуванням елементів коректне;

б) згідно з означенням множини її елементи повинні бути різні, тому в списку елементів не можна зазначати той самий елемент кілька разів. Коректне визначення множини B буде таким: $B = \{4, 7, 11\}$;

в) визначення множини F шляхом опису характеристичної властивості її елементів коректне;

г) визначення множини D коректне. Елементами множини D є множини A і B , тобто $D = \{\{1, 3, 5\}, \{4, 7, 11\}\}$. Однак $5 \notin D$, тому що цей елемент не перелічений у списку.

Множина A є підмножиною множини B , якщо кожний елемент x множини A належить і множині B ; що позначається так: $A \subseteq B$. Таке відношення між множинами називають нестрогим включенням.

Очевидно, будь-яка множина A містить порожню підмножину: $\emptyset \subseteq A$.

Якщо множина B містить, крім підмножини A , іншу непорожню підмножину, то має місце строге включення A в B , що позначається так: $A \subset B$. Будь-яка непорожня множина A має принаймні дві підмножини: $A \subset A$ і $\emptyset \subset A$.

Різницю понять належності елементів до множини і включення можна пояснити таким чином. Якщо $A = \{2, 4, 6, 8\}$, то $2 \in A$, $4 \in A$, але $\{2, 4\} \notin A$, у той час як $\{2, 4\} \subset A$. Якщо ж $A = \{\{2, 4\}, 6, 8\}$, то $2 \notin A$, $4 \notin A$, але $\{2, 4\} \in A$ і в той же час $\{2, 4\} \subset A$.

Приклад 4. Які з наведених тверджень правильні?

- а) якщо $A \subset B$ і $B \subset D$, то $A \subset D$;
- б) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;
- в) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq D$, то $A \subseteq D$.

Відповідь: усі твердження правильні.

Приклад 5. Дана множина $D = \{7, 13, 25, 34, 101, 112\}$. Які з наведених нижче множин є підмножинами множини D :

- а) $\{1, 7, 13\}$; б) $\{0, 1, 12\}$; в) $\{25, 112, 34\}$; г) $\{a, b, c, n\}$;
- д) $\{7, 13, 25, 34, 101, 112\}$; е) $\emptyset$?

Отримуємо: в) $\{25, 112, 34\}$; д) $\{7, 13, 25, 34, 101, 112\}$; е) $\emptyset$.

Множину $P(A)$ всіх підмножин, що складаються з елементів скінченної множини A , враховуючи включення $\emptyset \subset A$ і $A \subseteq A$, називають *булеаном* множини A . Наприклад, булеан множини $A = \{a, b, c, d\}$ має такий вигляд: $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$. Булеан будь-якої n -елементної множини містить 2^n елементів (підмножин).

Потужність множини визначається як кількість її елементів. Наприклад, потужність множини $A = \{a, b, c, d\}$ дорівнює 4. Наведений вище булеан $P(A)$ містить $2^4 = 16$ елементів (підмножин). Отже, його потужність $|P(A)| = 16$.

Множини A і B вважаються рівними, якщо будь-який елемент множини A є елементом множини B і навпаки. Рівність множин A і B позначають $A = B$, а їх нерівність – $A \neq B$.

З наведеного означення рівності множин випливає, що множина повністю визначається її елементами, і при заданні скінченної неупорядкованої множини порядок, в якому перелічені її елементи, не має значення.

Для будь-яких множин A, B, D виконуються умови: $A=A, B=B, D=D$; якщо $A=B$, то $B=A$, (з використанням символів впливу $A=B \Rightarrow B=A$ і $A=B \Leftrightarrow B=A$); якщо $A=B$ і $B=D$, то $A=D$.

Із рівності множин випливає рівність їх потужностей: якщо $A=B$, то $|A|=|B|$ ($A=B \Rightarrow |A|=|B|$), однак твердження $|A|=|B| \Rightarrow A=B$ у загальному випадку неправильне.

Скінченні множини з однакою кількістю елементів, тобто з однакою потужністю, називають рівночисельними, або рівнопотужними.

Оскільки всі злічені множини мають однакову потужність, що дорівнює потужності $\aleph_0$ (читається “алеф-нуль”) множини N натуральних чисел, то всі вони є рівночисельними. Потужність булеану множини натуральних чисел називають *потужністю континуума*. Потужність континуума вважають константою (з позначенням $\aleph$) та використовують для порівняння за потужністю нескінченних злічених множин.

Приклад 6. Множина $\{\emptyset\}$ непорожня, тому що $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Вона є одноелементною, єдиним її елементом є порожня множина $\emptyset$.

Приклад 7. Визначити, які з наведених тверджень справедливі:

- а) $|\{\emptyset\}| = 1$; б) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\{\emptyset\}\}\}$;
- в) $|\{\{\emptyset\}\}| = 2$; г) $x \in \{x\}$, д) $\{x\} \subseteq \{x\}$,
- е) $\{x\} \in \{x\}$, ж) $\{x\} \in \{\{x\}\}$.

Отримуємо, що справедливі:

- а) $|\{\emptyset\}| = 1$ – потужність одноелементної множини $\{\emptyset\}$;

б) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ – елемент одноелементної множини $\{\{\{\emptyset\}\}\}$;

г) $x \in \{x\}$; д) $\{x\} \subseteq \{x\}$;

ж) $\{x\} \in \{\{x\}\}$, множина $\{x\}$ є елементом множини $\{\{x\}\}$.

Несправедливі: в) $|\{\{\emptyset\}\}| = 2$, $|\{\{\emptyset\}\}|$ – потужність одноелементної множини $\{\{\emptyset\}\}$; е) $\{x\} \in \{x\}$, множина $\{x\}$ не містить елемента $\{x\}$.

Приклад 8. Визначте, скільки елементів містять такі множини: $\{x\}$, $\{\{x\}\}$; $\{x, \{x\}\}$; $\{\{x\}, x, \{\{x, \{x\}\}\}\}$.

Відповідь: множини $\{x\}$ та $\{\{x\}\}$ містять по 1 елементу, множина $\{x, \{x\}\}$ – 2 елементи, множина $\{\{x\}, x, \{\{x, \{x\}\}\}\}$ – 3 елементи.

Приклад 9. Визначити, які з наведених множин дорівнюють одна одній:

а) $A = \{x \mid x=2y, y \in \mathbb{N}\}$; б) $C = \{1, 2, 3\}$;

в) $D = \{0, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$; г) $E = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Отримаємо: $D = E$.

Приклад 10. Побудувати булеан для множин A, B, C, D , якщо:

а) $A = \{\{\emptyset\}\}$; б) $B = \{1, 2, 3, 4\}$; в) $C = \{\text{день, ніч}\}$; г) $D = \{1, \{2, 3\}, 4\}$.

Будь-яка впорядкована скінченна множина має екстремальні елементи: мажоранту, міноранту, максимальний та мінімальний елементи, верхню та нижню грані.

Мажоранта (міноранта) деякої підмножини X упорядкованої множини M – це елемент $y \in M$ такий, що для будь-якого $x \in X$ справедливе $y \sqsupseteq x$ ($y \sqsubset x$). Якщо мажоранта (міноранта) $y \in M$ належить підмножині X упорядкованої множини M , тоді вона називається максимальним (мінімальним) елементом множини $X \subseteq M$. Якщо множина мажорант (мінорант) множини $X \subseteq M$ має мінімальні(максимальні) елементи, то множину цих елементів називають верхньою (нижньою) гранню множини $X \subseteq M$, із умовним позначенням $\sup X$ ($\inf X$). Очевидно, якщо множина M є строго впорядкованою (будь-які $y_i, y_j \in M$ пов'язані відношенням порядку y_i

x_j або $y_j \not\leq y_i$), то будь-яка множина $X \subseteq M$ має один мінімальний та один максимальний елементи, що одночасно є відповідно її верхньою та нижньою гранями.

Декартовим (прямим) добутком множин A і B називається третя множина $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$, елементами якої є всі можливі упорядковані пари (a, b) елементів цих множин. У загальному випадку декартів добуток $A \times A \times \dots \times A$ n однакових підмножників має назву “множина-ступінь” і позначається A^n . Елементами множини A^n є впорядковані n -вимірні кортежі виду $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, де $a_i, i = 1, \dots, n$ – елементи множини A , складені з використанням правила формування елементів добутку двох множин: $(\dots((A \times A) \times A) \times \dots \times A)$. Із цього правила, зокрема, випливає, що потужність множини-степеня $|A^n| = |A|^n$.

Елементи $a_1, a_2, \dots, a_n$ n -вимірного вектора (кортежа) називають його координатами (в n -вимірному просторі). Прикладом використання добутку множин є множина $R \times R = R^2$, де R – множина дійсних чисел. Множина $\{(x,y) \mid x \in R, y \in R\}$ уявляє собою множину всіх точок площини (або двовимірних векторів) у декартових координатах x, y .

Приклад 11. Визначити добуток множин $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Отримаємо: $X \times Y = Z = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$.

Приклад 12. Який геометричний об’єкт описує множина $A = \{(x,y) \mid y^2 + x^2 = 1, x \in R, y \in R\}$?

Отримаємо: множина A є множиною всіх точок $(x,y) \in R^2$ кола радіусом 1 з центром у початку координат.

Завдання до розділу 1.1

1. На прикладі 5-елементної множини поясніть “технологію” побудови її булеану. Скільки елементів містить булеан n -елементної множини?

.....

2. За яких умов дві множини вважаються рівними? Чи є рівність потужностей множин наслідком їх рівності?

.....

3. Поясніть поняття екстремальних елементів упорядкованої скінченної множини: мажоранти, міноранти, максимального та мінімального елементів, верхньої та нижньої граней.

.....

4. Нехай A і B різні множини. Доведіть, чому $A \times B \neq B \times A$?

.....

5. Який об'єкт теорії множин має назву “множина-ступінь”? Які об'єкти є елементами множини-степеня A^n ?

.....

6. В якому співвідношенні знаходяться потужності множини-степеня A^n і самої множини A ?

.....

1.2 Операції над множинами

У багатьох розділах математики і, зокрема, в теорії ймовірностей розглядаються лише множини, що є підмножинами однієї й тієї самої множини, яку називають *універсальною множиною (універсумом)*. Для універсуму будемо використовувати позначення U . Над множинами, які є елементами деякого універсуму U , можна здійснювати певні операції, утворюючи з кількох множин іншу. Основними операціями над множинами є бінарні (коли з двох множин утворюється третя).

Означення 1. Об'єднанням $A \cup B$ множин A і B називається множина всіх елементів, що належать принаймні одній із множин A або B (“або” невиключне):

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Означення 2. Перетином $A \cap B$ множин A і B називається множина всіх елементів, які належать як A , так і B :

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Означення 3. Різницею $A \setminus B$ множин A і B називається множина всіх елементів, які належать A і не належать B :

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Множину $A \setminus B$ називають також *доповненням B до A* .

Означення 4. Нехай $A \subseteq U$, де U – універсум. Доповненням A до універсуму називається множина

$U \setminus A = \{x | x \in U \text{ і } x \notin A\} = \bar{A}$ (верхнє підкреслення означає заперечення). Операція доповнення до універсуму є унарною (з однієї множини утво-рюється інша).

Означення 5. Симетричною різницею $A \oplus B$ множин A і B називається множина всіх елементів, які належать A або B і не належать множині $A \cap B$:

$$A \oplus B = \{x | (x \in A \text{ або } x \in B), \text{ але } x \notin A \cap B\}.$$

Приклад 13. Нехай $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, A – множина парних чисел із U , B – множина тих самих чисел із U , що кратні 3. Тоді $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}$.

Схематичне зображення універсальної множини та її підмножин можна робити за допомогою діаграм Венна (Ейлера – Венна). На цих діаграмах універсальна множина зображається множиною точок прямокутника, а її підмножини – у вигляді кругів або іншими областями у цьому прямокутнику. Застосування діаграм Венна над множинами ілюструє рисунок 3, де заштрихованими ділянками прямокутника U відображені результати виконання операцій.

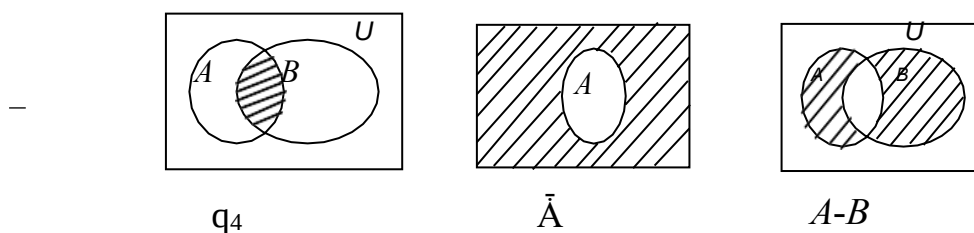


Рис. 3. Приклад діаграм Венна операцій над множинами

За допомогою діаграм Венна неважко переконатися також у правильності таких тверджень:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C); A \setminus B = A \cap \bar{B};$$

$$A - B = B - A; A - B = (A \cup B) \setminus (A \cap B); (A - B) - C = A - (B - C);$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C); A - U = \bar{A}; A - \emptyset = A.$$

Поєднання множини із заданими на ній операціями називають алгеброю. Множину в алгебрі називають носієм, а сукупність операцій – сигнатурою.

Алгебру Кантора $\langle P(U), \cap, \cup, \bar{}, \rangle$, носієм якої є булеан $P(U)$ універсальної множини U , сигнатурою – операції об'єднання $\cup$, перетину $\cap$ та доповнення $\bar{}$, називають *алгеброю множин*. Множини U і $\emptyset$ у цій алгебрі є відповідно одиничним та нульовим елементами. За допомогою діаграм Венна можна переконатися, що операції над множинами володіють властивостями, які називають законами алгебри множин.

В алгебрі множин існує принцип двоїстості: для будь-якого твердження з використанням порожньої та універсальної множин і операцій $\cup$ та $\cap$ можна скласти двоїсте до нього твердження шляхом заміни $\emptyset$ на U , U на $\emptyset$, $\cup$ на $\cap$, $\cap$ на $\cup$, яке також буде правильним. Наприклад, двоїстими є твердження $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ і $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Базуючись на поняттях вищезазначених операцій над множинами, розглянемо поняття розбиття множини.

Означення 6. Система множин $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ називається розбиттям множини M , якщо вона задовольняє такі умови:

- будь-яка множина X_i , $i = \overline{1, n}$ є підмножиною M , тобто $X_i \subset M$;
- будь-які дві множини X_i та X_j , $i \neq j$, не перетинаються, тобто $X_i \cap X_j = \emptyset$;
- об'єднання всіх множин, що входять у розбиття, дає множину

$$M = \bigcup_{j=1}^n X_j;$$

– для будь-якого $i, i = 1, \dots, n$, множина X_i є непорожньою, тобто $X_i \neq \emptyset$.

Отже, розбиття множини M – це така система непорожніх та різних її підмножин, коли кожен елемент множини M одночасно є елементом тільки однієї з цих підмножин. Наприклад, $\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ є розбиттям множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Приклад 14. Задані: універсальна множина $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, її підмножини $A = \{3x | x \in U\}$, $B = \{5x | x \in U\}$. Знайти $A \cap B$.

Отримаємо:

$$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots\} = \{3x | x \in U\};$$

$$B = \{0, 5, 10, 15, 20, 30, \dots\} = \{5x | x \in U\};$$

$$A \cap B = \{0, 15, 30, 45, \dots\} = \{15x | x \in U\}.$$

Приклад 15. Нехай універсальна множина U складається з чисел 1, 2, 3, ..., 9 і 33 букв українського алфавіту а, б, в, ..., я.

Якщо $A = \{1, 3, 5, \text{а, в, д}\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5, \text{а, б, г, д, е}\}$, знайти:

а) $\bar{B}$, б) $A \cap B$, в) $A \cup B$, г) $A \cap \bar{B}$.

Отримаємо:

$$\text{а) } \bar{B} = \{6, 7, 8, 9, \text{в, ж, з, ..., я}\}; \text{ б) } A \cap B = \{1, 3, 5, \text{а, д}\};$$

$$\text{в) } A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \text{а, б, в, г, д, е}\}; \text{ г) } A \cap \bar{B} = \{\text{в}\}.$$

Приклад 16. Розв'яжемо систему двох рівнянь:

$$A \setminus C = B \quad \text{та} \quad A \setminus B = C$$

де A, B, C - задані множини за умови, що $B \subset A \subset C$.

Отримаємо:

$$X = C \setminus B = (C \setminus A) \cup (C \cap A), \text{ як показано на діаграмі Венна (рис. 4).}$$

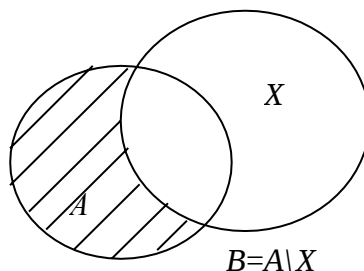


Рис. 4. Діаграма Венна до прикладу 16

При створенні або спрощенні складних алгебраїчних виразів слід керуватись пріоритетом операцій. В алгебрі множин існує наступний пріоритет операцій:

$$\bar{A}, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, A - B.$$

Поясненням пріоритету операцій є наступний приклад, в якому парами дужок визначено послідовність виконання операцій для спрощення складного виразу:

$$Q = (E \setminus D \cup \bar{A} \cap B \cup C) \setminus F = (E \setminus (D \cup (((\bar{A}) \cap B) \cup C))) \setminus F.$$

Завдання до розділу 1.2

1. Запишіть парами тотожності алгебри множин, які пов'язані відношенням двоїстості.

.....

2. Запишіть формулу операції об'єднання n множин ($n > 2$).

.....

3. Запишіть формулу операції перетину n множин ($n > 2$).

.....

4. Запишіть формули, за якими використовуються закони де Моргана для n множин ($n > 2$).

.....

5. Поясніть пріоритет операцій алгебри множин при побудові або спрощенні складних виразів.

.....

1.3 Відношення

Поняття відношення застосовуються у математиці для характеристики зв'язків між об'єктами. З деякими видами відношень ми вже зустрічалися, це відношення належності, включення, рівності, порядку, двоїстості.

Унарні (одномісні) відношення віддзеркалюють певну ознаку (властивість) елементів множини: всі елементи x множини X , що мають ознаку $P(x)$, утворюють підмножину $A \subseteq X$, яку називають відношенням на множині X .

Відношення між парами об'єктів називаються бінарними (двомісними). Розглянемо дві множини X та Y , елементи яких складають упорядковані пари (x, y) . Якщо спосіб складання упорядкованих пар визначений, то між множинами X і Y існує бінарне відношення. Елемент x називають першою, а елемент y – другою координатами впорядкованої пари, або двовимірною кортежем (x, y) .

Відношення може бути n -арним, яким пов'язуються елементи n множин (приклад – множина-ступінь A^n). Як бінарне відношення породжує двовимірні кортежі, так і n -арне породжує n -вимірні кортежі (вектори). Наприклад, декартів добуток $R^3 = R \times R \times R$ визначає 3-арне відношення, що породжує множину тривимірних кортежів виду (x, y, z) , де x, y, z – дійсні числа, в тривимірному лінійному (декартовому) просторі.

Основну увагу ми будемо приділяти бінарним відношенням як таким, що є предметом дискретного аналізу.

Означення. Відношенням Q множин A і B називається довільна підмножина $Q \subseteq A \times B$ декартового добутку цих множин.

В іншій термінології Q є відношенням на добутку $A \times B$.

Якщо впорядкована пара $(a, b) \in Q$, то говорять, що a і b знаходяться у відношенні Q , з позначним записом bQa .

Якщо $Q \subseteq A \times A$, то відношення Q називають бінарним відношенням на множині A або на добутку A^2 . В подальшому замість терміна “бінарне відношення” будемо застосовувати термін “відношення”.

Приклад 17. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$. Тоді декартів добуток $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$. Множина $Q \subset A \times B$, наприклад, $Q = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ є відношенням на $A \times B$.

Приклад 18. Якщо R – множина дійсних чисел, то множина $Q = \{(x,y) \in R^2: x^2+y^2=16\}$ є бінарним відношенням на R^2 .

Означення. Областю відправлення відношення $Q \subseteq A \times B$ називається множина A , елементи якої беруть участь у відношенні Q як перші елементи упорядкованих пар $(a,b) \in Q$.

Означення. Областю прибуття відношення $Q \subseteq A \times B$ називається множина B , елементи якої беруть участь у відношенні Q як другі елементи упорядкованих пар $(a,b) \in Q$.

Означення. Відношенням, оберненим до відношення $Q \subseteq A \times B$, називається таке відношення $Q^{-1} \subseteq B \times A$, що $Q^{-1} = \{(b,a): (a,b) \in Q\}$.

Іншими словами, $(b,a) \in Q^{-1}$ лише тоді, коли $(a,b) \in Q$ або, що рівносильно, $aQ^{-1}b$ лише тоді, коли bQa .

Приклад 19. Нехай $Q = \{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_5)\}$. Тоді $Q^{-1} = \{(b_2, a_1), (b_3, a_1), (b_4, a_2), (b_5, a_3)\}$.

Задання відношення може бути здійснене наступними способами.

1. Перерахуванням упорядкованих пар, як у прикладах 17 – 19.

2. *Матрицею відношення*, кожен елемент a_{ij} якої дорівнює одиниці, якщо $y_j Q x_i$, і нулю у протилежному випадку. Наприклад, відношення $Q = \{(a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_5), (a_4, b_3)\}$ на добутку $A \times B$ подається такою матрицею:

$(A, B, Q) /$						
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
	0	1	1	0	0	a_1
	0	0	0	1	0	a_2
	0	0	0	0	1	a_3
	0	0	1	0	0	a_4

Стрілковою діаграмою (графом). Елементи x , y множин X , Y зображаються точками на площині. Якщо $y_j Q x_i$, точки x_i і y_j з'єднуються лініями (не обов'язково прямими) зі стрілками, спрямованими від x_i до y_j .

Зробивши таку операцію для всіх пар, що належать відношенню, можна одержати його стрілкову діаграму, приклади яких, безпосередньо, будуть розглядатися у наступних розділах з теорії графів.

Якщо ми маємо два заданих відношення, то з них можна побудувати третє, на підставі натуного означення.

Означення. Нехай $Q \subseteq A \times B$ – відношення на $A \times B$, а $T \subseteq B \times D$ – відношення на $B \times D$. *Композицією* відношень Q і T називається відношення $M \subseteq A \times D$, визначене таким чином: $M = \{(a, d) : \text{існує такий елемент } b \text{ із } B, \text{ що } (a, b) \in Q \text{ і } (b, d) \in T\}$. Операцію композиції позначають так: $M = T \circ Q$.

Приклад 20. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, $D = \{\text{я, ти, він, вона}\}$, відношення $Q \subseteq A \times B$ і $T \subseteq B \times D$ задані у вигляді $Q = \{(1, a), (1, b), (3, b)\}$, $T = \{(a, \text{я}), (a, \text{ти}), (b, \text{він}), (b, \text{вона})\}$.

Тоді $T \circ Q = \{(1, \text{я}), (1, \text{ти}), (1, \text{він}), (1, \text{вона}), (3, \text{він}), (3, \text{вона})\}$.

Операція композиції відношень у загальному випадку некомутативна: $T \circ Q \neq Q \circ T$, однак володіє властивістю асоціативності, як це випливає з наступної теореми.

Теорема. Композиція відношень асоціативна, тобто якщо A, B, D, E – множини, $Q \subseteq A \times B$, $T \subseteq B \times D$ і $M \subseteq D \times E$ – від-повідні відношення, то $M \circ (T \circ Q) = (M \circ T) \circ Q$.

Доказ. Рівність множин $M \circ (T \circ Q) = (M \circ T) \circ Q$ має місце, якщо $M \circ (T \circ Q) \subseteq (M \circ T) \circ Q$ і $(M \circ T) \circ Q \subseteq M \circ (T \circ Q)$. Доведемо перше з цих нестрогих включень. Покажемо, що $M \circ (T \circ Q) \subseteq (M \circ T) \circ Q$. Нехай $(a, e) \in M \circ (T \circ Q)$. Тоді існує такий елемент d із D , що $(a, d) \in T \circ Q$ і $(d, e) \in M$. Оскільки $(a, d) \in T \circ Q$, існує таке $b \in B$, що $(a, b) \in Q$ і $(b, d) \in T$. Оскільки $(b, d) \in T$ і $(d, e) \in M$, то $(b, e) \in M \circ T$. Оскільки $(b, e) \in M \circ T$ і

$(a, b) \in Q$, то $(a, e) \in (M \circ T) \circ Q$. Таким чином, $M \circ (T \circ Q) \subseteq (M \circ T) \circ Q$.

Включення $(M \circ T) \circ Q \subseteq M \circ (T \circ Q)$ доводиться аналогічно.

Відношення на множині, тобто виду $Q \subseteq A^2$, може володіти спеціальними властивостями, які випливають із наведених нижче означень.

Означення. Відношення $Q \subseteq A^2$ на множині A називається *рефлексивним*, якщо $(a, a) \in Q$ для всіх $a \in A$, що беруть участь у відношенні Q .

Це означає, що кожний елемент $a \in A$ перебуває у відношенні до самого себе (і, можливо, до інших елементів множини A). Матриця такого відношення буде мати діагональ, заповнену одиницями, а на стрілковій діаграмі кожна точка $a \in A$ буде мати петлю (a, a) .

Означення. Відношення $Q \subseteq A^2$ називається *антирефлексивним*, якщо для всіх $(a, b) \in Q$ має місце нерівність $a \neq b$ (при цьому, очевидно, $a = b \Rightarrow (a, b) \notin Q$).

Матриця такого відношення має діагональ, заповнену нулями, і жодна точка стрілкової діаграми не буде мати петлі.

Означення. Відношення $Q \subseteq A^2$ називається *антисиметричним*, якщо для всіх $a \in A$ і $b \in A$ із $(a, b) \in Q$ і $(b, a) \in Q$ виходить $a = b$.

Означення. Відношення $Q \subseteq A^2$ називається *транзитивним*, якщо для всіх $a \in A$, $b \in A$ і $c \in A$ при $a \neq b \neq c$ з того, що $(a, b) \in Q$ і $(b, c) \in Q$, виходить $(a, c) \in Q$.

Приклад 21. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Q = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 1), (4, 2)\}$. Відношення $Q \subseteq A^2$ рефлексивне, оскільки для кожного (без винятку) $a \in A$ існує пара $(a, a) \in Q$. Для кожної пари $(a, b) \in Q$, де $a \neq b$, існує пара $(b, a) \in Q$, а це означає, що відношення $Q \subseteq A^2$ симетричне. Простим перебором можемо переконатися, що для кожного сполучення пар $(a, b) \in Q$ і $(b, c) \in Q$ у

множині Q існує пара $(a, c) \in Q$, а це означає, що відношення $Q \subseteq A^2$ транзитивне. Відношення $Q \subseteq A^2$ не є антисиметричним, оскільки не для всіх сполучень двох пар $(a, b) \in Q$ і $(b, a) \in Q$ має місце $a=b$. Зокрема, $(1, 2) \in Q$ і $(2, 1) \in Q$, але $1 \neq 2$.

Означення. Відношення $Q \subseteq A^2$ називається *відношенням еквівалентності*, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Відношення Q на множині A , тобто $Q \subseteq A^2$, формується за деяким зазначеним принципом (правилом). Відношення $Q \subseteq A^2$ з прикладу 1.21 є відношенням еквівалентності на множині A , оскільки воно відповідає цьому означенню. Класи еквівалентності у відношенні Q визначені для кожного $a \in A$ заданням відношень $Q = \{\{x: xQa_i, x \in A, a_i \in A\}: i = \overline{1,6}\}$. Для елемента $a_1=1$ маємо клас еквівалентності $[a_1] = \{1, 2, 4\}$. Аналогічно для елементів $a_2 - a_6$: $[a_2] = \{2, 1, 4\}$, $[a_3] = \{3, 5\}$, $[a_4] = \{4, 1, 2\}$, $[a_5] = \{5, 3\}$, $[a_6] = \{6\}$. Кількість різних класів еквівалентності дорівнює 3, це класи $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{6\}$.

Таким чином, заданням відношення еквівалентності $Q \subseteq A^2$ на множині A здійснюється *розбиття* цієї множини на підмножини, елементи яких еквівалентні один одному за певною ознакою і не еквівалентні елементам інших підмножин. Розбиття множин на класи еквівалентності використовується в задачах управління реляційними базами даних.

Можливі три окремі випадки бінарних відношень на множині: тотожне, повне і порожнє. Якщо відношення $Q \subseteq A^2$ містить лише пари $(a, a) \in Q$ і ніяких інших, воно називається *тотожним*. Якщо $Q = A^2$, то відношення Q називається *повним*. Якщо $Q = \emptyset$, таке відношення називається *порожнім*. Надаємо читачеві можливість самостійно виявити особливості матриць і стрілкових діаграм таких відношень.

Поняття відношення і декартового добутку скінченних упорядкованих множин відіграють велику роль в теорії множин і

математичних теоріях прикладного характеру. Розглянуті тут відношення на множинах мають узагальнений характер у тому сенсі, що в практичних застосуваннях зазвичай об'єктами дослідження є спеціальні форми відношень, такі як відповідності та відображення.

Завдання до розділу 1.3

1. Поясніть поняття композиції відношень. Задайте композицію двох бінарних відношень за допомогою стрілкової діаграми.

.....

2. Чи має операція композиції відношень властивості комутативності та асоціативності?

.....

3. Сформулюйте означення властивостей відношень: рефлексивності, антирефлексивності, симетричності, антисиметричності, транзитивності. Які особливості мають матриці та стрілкові діаграми рефлексивного, антирефлексивного та симетричного відношень?

.....

4. Яким чином пов'язані поняття класів еквівалентності та розбиття множини?

.....

5. Якими особливостями відрізняються матриці та стрілкові діаграми тотожного, повного та порожнього відношень?

.....

1.4 Відповідності та відображення

Одним із видів відношень, дуже важливим в аспекті практичного застосування, є відповідність.

Означення. Відповідністю q називається трійка множин (X, Y, Q) , в якій X – область відправлення відповідності, Y – область прибуття відповідності, Q – множина, яку називають графіком відповідності.

Серед елементів множин X і Y можуть бути такі, що не входять ні до жодної з пар (x, y) відповідності q . Тому з кожною відповідністю пов'язані ще дві множини: область визначення та область значень.

Означення. Область визначення відповідності – це елементи множини X (позначення $\text{Pr}1Q$), які беруть участь у відповідності (X, Y, Q) .

Означення. Область значень відповідності – це елементи множини Y (позначення $\text{Pr}2Q$), які беруть участь у відповідності (X, Y, Q) .

Позначення $\text{Pr}1Q$ та $\text{Pr}2Q$ областей визначення та значень відповідності мають сенс проєкцій множини Q на множини X та Y відповідно. Тому очевидно, що область визначення є підмножиною області відправлення, а область значень є підмножиною області прибуття:

$$\text{Pr}1Q \subseteq X, \text{Pr}2Q \subseteq Y.$$

Якщо $(x, y) \in Q$, то говорять, що елемент y відповідає елементу x (позначення yQx). Графічну ілюстрацію відношення відповідності наведено на рисунку 5.

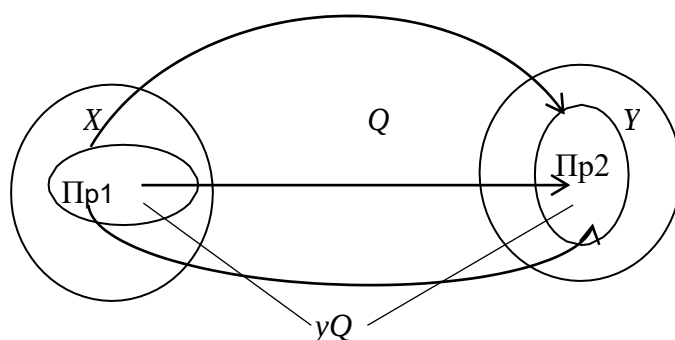


Рис. 5. Ілюстрація відповідності $q=(X, Y, Q)$

Оскільки графіком Q відповідності q визначаються упорядковані пари (x, y) , то очевидно, що останні є елементами декартового добутку

множин $X \times Y$, тобто $Q \subseteq (X \times Y)$. Тому часто графік Q відповідності q також називають відповідністю. Прикладом відповідності є декартів добуток $A \times B$ множин A і B , якщо відповідністю охоплені всі можливі пари (a, b) : $Q = A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Приклад 22. Нехай $X = \{1, 2\}$, $Y = \{10, 20\}$. Добуток цих множин $X \times Y = \{(1, 10), (1, 20), (2, 10), (2, 20)\}$.

Маємо можливість отримати такі відповідності:

$Q_1 = \{(1, 10)\}$, $\text{Pr}_1 Q_1 = \{1\} \subseteq X$, $\text{Pr}_2 Q_1 = \{10\} \subseteq Y$;

$Q_2 = \{(1, 10), (1, 20)\}$, $\text{Pr}_1 Q_2 = \{1\} \subseteq X$, $\text{Pr}_2 Q_2 = \{10, 20\} = Y$.

Приклад 23. Знайти області визначення і значень відповідності $Q = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2), (c, 4), (c, 9), (d, 16)\}$.

Відповідь. Область визначення відповідності $\text{Pr}_1 Q = \{a, b, c, d\}$, а область значень $\text{Pr}_2 Q = \{1, 2, 4, 9, 16\}$.

Для задання відповідності можуть бути використані будь-які способи задання відношень: переліченням упорядкованих пар, пов'язаних відношенням відповідності, як у прикладах 1.22, 1.23; графіком Q відповідності (X, Y, Q) у вигляді матриці, кожен елемент a_{ij} якої дорівнює 1, якщо $y_j Q x_i$, і 0 – у протилежному разі.

Наприклад, графік відповідності $Q = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2), (c, 4), (c, 9), (d, 16)\}$ подається показаною нижче матрицею.

$(A, B, Q) /$ 1 2 4 9 16

1	1	0	0	0	a
1	0	0	0	0	b
0	1	1	1	0	c
0	0	0	0	1	e

Якщо області визначення та значень відповідності є підмножинами однієї множини, то має місце відповідність на множині. Очевидно, що у такому разі відповідність $Q \subseteq A^2$ є підмножиною (в загальному випадку нестрогою) декартового добутку A^2 .

Приклад 24. Побудуємо матрицю відповідності $Q = \{(1, 2), (3, 1)\}$ на множині $A = \{1, 2, 3\}$.

Маємо окремий випадок відповідності виду $Q \subseteq A^2$, областями визначення і значень якої є множини $\text{Pr}1Q = \{1, 3\} \subset A$ та $\text{Pr}2Q = \{1, 2\} \subset A$. Матриця відповідності має такий вигляд:

$$(A, A, Q) \begin{array}{c} / 1 \quad 2 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Відповідності на множинах мають ті ж самі властивості, як і бінарні відношення, тобто відповідність $Q \subseteq A^2$ є:

рефлексивною, якщо $(a, a) \in Q$ (або aQa) для всіх $a \in A$, що беруть участь у відповідності;

антирефлексивною, якщо для всіх $(a, b) \in Q$ має місце нерівність $a \neq b$;

симетричною, якщо для всіх пар $(a, b) \in Q$ при $a \neq b$ існують пари $(b, a) \in Q$;

антисиметричною, якщо для всіх $a \in A$ і $b \in A$ із $(a, b) \in Q$ і $(b, a) \in Q$ випливає $a = b$;

транзитивною, якщо для всіх $a \in A$, $b \in A$ і $c \in A$ з того що $(a, b) \in Q$ і $(b, c) \in Q$ випливає $(a, c) \in Q$.

Для кожної відповідності $q = (X, Y, Q)$, $Q \subseteq X \times Y$ існує *обернена відповідність*, яку одержують, якщо відповідність q розглядають у зворотному напрямку, тобто визначають елементи $x \in X$, що відповідають елементам $y \in Y$. Відповідність, обернена до відповідності q , позначається так: $q^{-1} = (Y, X, Q^{-1})$, де $Q^{-1} \subseteq Y \times X$, причому $(Q^{-1})^{-1} = Q$. Зрозуміло, що перехід від Q до Q^{-1} здійснюється взаємною перестановкою координат кожної впорядкованої пари. Необхідно зазначити, що при переході від Q до Q^{-1} область визначення стає областю значень і навпаки. Матриця графіка відповідності Q^{-1} – це транспонована матриця графіка Q .

Означення. Якщо матриця графіка Q прямої відповідності (X, Y, Q) збігається зі своєю транспонованою відносно головної діагоналі матрицею, то відповідність (X, Y, Q) називається *взаємно однозначною*. При цьому транспонована матриця є матрицею графіка Q^{-1} відповідності (Y, X, Q^{-1}) , оберненої до прямої відповідності (X, Y, Q) .

Означення. *Композицією відповіностей* (як і будь-яких відношень) називається послідовне застосування двох відповіностей, тобто композиція $p \circ q$ відповіностей q і p – це операція над трьома множинами X, Y, Z , на яких визначені дві відповідності: $q = (X, Y, Q)$, $Q \subseteq X \times Y$; $p = (Y, Z, P)$, $P \subseteq Y \times Z$, причому область значень першої відповідності (q) збігається з областю визначення другої відповідності (p): $\text{Pr}2Q = \text{Pr}1P$.

Приклад 25. Множини $X = \{x_1, \dots, x_5\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_4\}$ і $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ пов'язані відповідностями $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_3), (x_3, y_4), (x_4, y_4), (x_5, y_2), (x_5, y_3), (x_5, y_4)\}$ і $B = \{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3), (y_4, z_3)\}$. Композиція відповідності A з відповідністю B має вигляд: $C = B \circ A = \{(x_1, z_2), (x_2, z_2), (x_2, z_1), (x_2, z_3), (x_3, z_3), (x_4, z_3), (x_5, z_1), (x_5, z_2), (x_5, z_3)\}$.

Для опису відповістей між множинами використовують поняття *відображення* однієї множини в іншу як окремий випадок відповідності. Для задання відображення потрібно вказати: множину, яка відображається, тобто *область визначення* відображення; множину, в яку відображається область визначення, тобто *область значень* відображення; закон відповідності, за яким для елементів першої множини вибираються елементи із другої множини.

Означення. *Відображенням* множини A в множину B називається відповідність $\varphi: A \rightarrow B$, згідно з якою кожному елементу множини A ставиться у відповідність один і не більше ніж один елемент множини B . Елемент $b \in B$ називається *образом* елемента $a \in A$, а останній, у свою чергу, називається *прообразом* елемента $b \in B$.

Запис $\varphi: A \rightarrow B$ означає, що множина B містить образи всіх елементів множини A (позначення образу $b\varphi a$), тобто відображення є *повним*. Згідно з

означенням 1.21 кожному елементу $b \in B$ (образу відповідних елементів $a \in A$) може відповідати один або більше елементів $a \in A$ (прообразів відповідного елемента $b \in B$), а кожному елементу $a \in A$ може відповідати не більше ніж один елемент $b \in B$, тобто відображення є *однозначним*. Цим клас відображень виділяється із загального класу відповідностей як окремий випадок. Відзначимо, що так само, як і відповідність загального виду, відображення не передбачає обов'язкової участі у відповідності $A \rightarrow B$ всіх елементів $b \in B$, а однозначність відображення не означає, що для будь-яких пар $(a_1, b_1) \in \varphi$ та $(a_2, b_2) \in \varphi$ із $a_1 = a_2$ випливає $b_1 = b_2$.

Кількість можливих відображень множини A в множину B визначити нескладно. Припустимо, що потужності множин A і B дорівнюють n і m відповідно. Побудувавши матрицю відображення (A, B, F) розмірністю $n \times m$, дійдемо до висновку, що кількість можливих відображень дорівнює m^n .

Означення. Відображення множини A в множину B називається *сюр'єкцією*, якщо для кожного $b \in B$ існує елемент $a \in A$ такий, що має місце відповідність $b \varphi a$.

Якщо відображення $\varphi: A \rightarrow B$ є сюр'єкцією, то на його стрілковій діаграмі в кожному рядку, що позначає елемент $b \in B$, входить принаймні одна стрілка і всі $b \in B$ беруть участь у відображенні. Очевидно, що сюр'єкція множини A в множину B можлива тільки в тому випадку, якщо потужності цих множин перебувають у співвідношенні $|A| \geq |B|$.

Означення. Відображення множини A в множину B називається *ін'єкцією*, якщо різним елементам $a \in A$ відповідають різні елементи $b \in B$, тобто для $a_i, a_j \in A$, $a_i \neq a_j$ мають місце відповідності $b_i \varphi a_i$ та $b_j \varphi a_j$ такі, що $b_i \neq b_j$.

Якщо відображення $\varphi: A \rightarrow B$ є ін'єкцією, то на його стрілковій діаграмі в кожному рядку, що позначає елемент $b \in B$, що бере участь у відображенні, входить в точності одна стрілка, а із кожної точки, що

позначає елемент $a \in A$, виходить в точності одна стрілка. Очевидно, що ін'єкція множини A в множину B можлива тільки в тому випадку, якщо потужності цих множин знаходяться у співвідношенні $|A| \leq |B|$.

Означення. Якщо відображення $\varphi: A \rightarrow B$ є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним, то воно називається *взаємнооднозначним* відображенням множини A на множину B , або *бієкцією* A на B .

Для бієкції повинна виконуватися рівність $|A| = |B|$.

Означення. Повне однозначне відображення $f: X \rightarrow Y$ називається *функціональним*, або *функцією*.

Для функції можна записати таке визначення:

$f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$, тобто функцією є множина, елементами якої є пари (x, y) , які беруть участь у функціональному відображенні. Значення $y = f(x)$ для будь-якої пари $(x, y) \in f$ називається функцією від x . Елемент $x \in X$ називають *аргументом* функції $y = f(x)$. Символічне позначення функціональної залежності y від x може бути й одним з таких: $x \rightarrow y, y \leftarrow x$.

Якщо область визначення функції f містить тільки один елемент, то її називають *функцією-константою*.

Для задання функції використовуються такі способи:

- переліченням всіх пар (x, y) елементів множин X і Y ;
- формулою $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, якщо X та Y – множини чисел (натуральних, цілих, дійсних, комплексних тощо);
- у вигляді графіка $(x, y) \in f$, $x \in X$, $y \in Y$, якщо X та Y – множини дійсних чисел.

Кількість аргументів функції (їх називають ще незалежними змінними) може бути більшою від одиниці. Наприклад, функція двох змінних $f = f(x, y)$, де $x \in X$, $y \in Y$, має областю визначення декартів добуток $X \times Y$. Формально таку функцію можна означити так:

$$f = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid z = f(x, y)\}.$$

Аналогічно означаються функції більшого числа змінних. Додавання, віднімання, множення і ділення є двомісними (бінарними) функціями на R (множині дійсних чисел), тобто функціями виду $f: R^2 \rightarrow R$, або $z = f(x, y)$, де $x, y, z \in R$.

Оскільки функції належать до класу відображень, то їм притаманні всі властивості останніх. Зокрема, функції можуть бути сюр'єктивними, ін'єктивними та бієктивними, а в останньому випадку функціональна залежність є *взаємно однозначною*, тобто функція $f^{-1}: Y \rightarrow X$, обернена до функції $f: X \rightarrow Y$, буде також однозначною.

Композиція функцій $f: X \rightarrow Y$ і $g: Y \rightarrow Z$ визначає множину значень $z \in Z$, що відповідають за послідовно застосованими законами f і g елементам $x \in X$: $z = (g \circ f)x = g(f(x))$. Функцію f , отриману з функцій $g, q, \dots$, і підстановкою їх одне в одне з перейменуванням аргументів, називають *суперпозицією функцій* $g, q, \dots$, u . Наприклад, суперпозицією є функція $p = f(z)$, де $z = g(y)$, $y = q(x)$, тобто $p = f(g(q(x)))$. Вираз, що описує суперпозицію з використання символів аргументів та знаків математичних операцій, називається *формулою*.

Більш загальним видом відображення, ніж функція, є *функціонал*, який встановлює залежність між множиною чисел та множиною функцій (іншими словами – числові оцінки функцій). Приклад функціонала:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

За допомогою функціоналів визначають, зокрема, цільові функції (мінімізації, максимізації функціонала) в задачах оптимального управління динамічними системами.

Ще більш загальним видом відображення є *оператор*, ним встановлюється така відповідність між двома множинами функцій, що кожній функції з однієї множини відповідає певна функція з іншої. Наприклад, інтеграл Лапласа:

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = F(p)$$

є оператором, який здійснює інтегральне перетворення множини функцій $f(t)$ дійсної перемінної t , $0 < t < \infty$ у множину функцій $F(p)$ комплексної змінної p . Інтегральні перетворення Лапласа широко використовуються в теорії автоматичного керування.

Завдання до розділу 1.4

1. Які підмножини визначаються поняттями областей відправлення, прибуття, визначення та значень відповідності? Яким чином пов'язані між собою: області значень і прибуття відповідності; упорядковані пари (x, y) і елементи декартового добутку $X \times Y$; упорядковані пари (x, y) і графік відповідності?

.....

2. У чому полягає відмінність понять “відношення” і “відповідність”? Якими способами можна здійснювати задання відповідності множин?

.....

3. У чому полягає відмінність стрілкових діаграм відповідності та відношення? За яких умов має місце відповідність на множині? Якими властивостями володіють відповідності на множинах?

.....

4. Наведіть приклад рефлексивної (антирефлексивної, симетричної, антисиметричної, транзитивної) відповідності, зробіть її задання описом складу елементів, матрицею, стрілковою діаграмою.

.....

5. Яку відповідність називають оберненою? Як її отримують із прямої відповідності? За яких умов відповідність є взаємно однозначною? Поясніть поняття композиції відповідей.

.....

6. Поясніть поняття “відображення множини в множину”. За яких умов відповідність є відображенням?

7. Поясніть поняття образу і прообразу відображення. В якому співвідносяться кількості образів і прообразів відображення? Чому відображення на множині є однозначним?

.....

8. За яких умов відображення на множині є: сюр'єкцією, ін'єкцією, бієкцією? За яких умов відображення на множині є взаємно однозначним?

.....

Яке відображення називається функцією? Якими способами можна здійснювати задання функції? За яких умов функція є взаємно однозначною?

.....

2. ГРАФИ ТА СПОСОБИ ЇХ ПРЕДСТАВЛЕННЯ

2.2 Основні визначення

Граф задається множиною точок або вершин $x_1, x_2, \dots, x_n$ і множиною ліній або ребер $a_1, a_2, \dots, a_m$, що з'єднують між собою всі або частину точок. Формальне визначення графа може бути дано наступним чином:

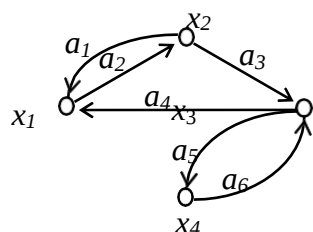
Графом називається двійка виду

$$G = (X, A),$$

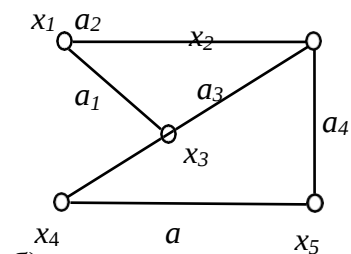
де $X = \{x_i\}, i = 1, 2, \dots, n$ - множина вершин графа,

$A = \{a_i\}, i = 1, 2, \dots, m$ - множина ребер графа.

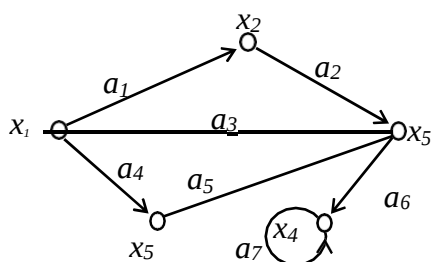
Графи можуть бути орієнтованими, неорієнтованими і змішаними (рис. 6). Якщо ребра у множині A є орієнтованими (це зазвичай показується стрілкою), то вони називаються дугами, а граф з такими ребрами називається **орієнтованим** графом або **орграфом** (рис. 6, а).



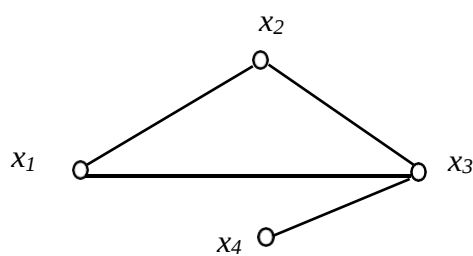
а)



б)



в)



г)

Рис. 6. Види графів: а) орієнтований граф;
б) неорієнтовані граф G ; в) змішаний граф;
г) неорієнтовний дублікат графа G

Якщо ребра не мають орієнтації, то граф називається **неорієнтованим** (рис. 6, б). Граф, в якому присутні ребра та дуги називається **змішаним** (рис. 6, в). У разі, якщо $G = (X, A)$ є орграфом, а ми хочемо знехтувати спрямованістю дуг з множини значень A , то неорієнтований граф, що відповідає G , буде позначатися $\bar{G} = (X, \bar{A})$ і називатися **неорієнтованим дублікатом** або **неорієнтованим двійником** (рис. 6, г).

Дуга a_i може бути представленою впорядкованою парою вершин (x_n, x_k) , що складається з початкової x_n і кінцевої x_k вершин. Наприклад, для графа G_1 (рис. 6, а) дуга a_1 задається парою вершин (x_1, x_2) , а дуга a_3 парою (x_2, x_3) .

Якщо x_n, x_k є кінцевими вершинами дуги a_i , то кажуть, що вершини x_n і x_k **інцидентні** дузі a_i , або дуга a_i є інцидентною вершинам x_n і x_k .

Дуга, у якій початкова і кінцева вершини збігаються, називається **петлею**. У графі G_3 (рис. 6, в) дуга a_7 є петлею.

Якщо V - непорожня скінченна множина; $V^{(2)}$ - множина всіх двохелементних підмножин множини V ; E - довільна підмножина $V^{(2)}$, тоді пара (V, E) є **неорієнтованим графом**, елементи множини V - **вершинами** (**вузлами**), а елементи множини E - **ребрами**. Незважаючи на те, що кожне ребро $e \in E$ являє собою двохелементну множину $e = \{v, w\}$, в теорії графів його позначають (v, w) і називають **неупорядкованою парою** вершин.

Представимо графом знайомства між студентами. Кожного студента подамо вершиною графа, а ребрами з'єднаємо пари вершин, відповідних парам знайомих між собою (рис. 7).

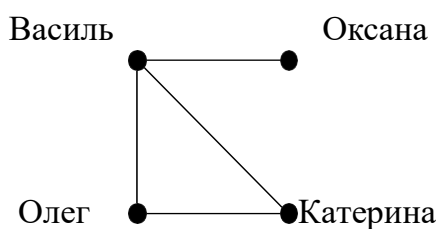


Рис. 7. Граф знайомств

Розглянемо переходи між діаграмами (без кратних ребер і петель) та графами в їх формальному поданні. Вершинам діаграми відповідають вершини графа, а кожній парі вершин, з'єднаних ребром - ребро графа (неупорядкована пара). Таким чином, діаграмі на рисунку 7 відповідає формальний об'єкт (V, E) , де $V = \{\text{Василь, Олег, Оксана, Катерина}\}$, $E = \{(\text{Василь, Олег}), (\text{Василь, Оксана}), (\text{Василь, Катерина}), (\text{Олег, Катерина})\}$. Аналогічно для переходу від формального подання графа до діаграми треба точками зобразити вершини та з'єднати лініями всі пари точок, відповідних ребрам графа.

Ребра та дуги мультиграфа не можна вважати двохелементними підмножинами множини вершин або їх парами. Один спосіб формального подання мультиграфа ґрунтується на тому, що його ребра - це абстрактні елементи, а мультиграф є трійкою виду (V, E, F) , де F відображає E у $V(2)$ (або у $V \times V$), тобто задає інцидентність вершин та ребер (дуг). За іншим способом мультиграф є парою (V, E) , але ребра графа є трійками вигляду $(\{u, v\}, k)$, де k - номер, причому різні паралельні ребра мають різні номери. Аналогічно означаються й дуги в орієнтованих мультиграфах.

Довільне бінарне відношення R на множині V можна подати у вигляді орієнтованого графа (V, E) , де дуга (v, w) належить множині ребер E тоді й тільки тоді, коли vRw , тобто $E = R$. І навпаки, кожний орієнтований граф визначає бінарне відношення на множині вершин.

Умова симетричності відношення означає, що для кожної дуги є симетрична. Умова антисиметричності - що граф не має симетричних дуг, тобто є направленим. Рефлексивність відношення гарантує, що з кожної вершини графа виходить петля. Таким чином, якщо відношення є симетричним та антирефлексивним, то для його подання достатньо неорієнтованого графа. І, навпаки, неорієнтований граф визначає симетрич- не й антирефлексивне відношення.

Кожна вершина орграфа x_i може також характеризуватися *напівстепенем результату* $d_0(x_i)$ і *напівстепенем заходу* $d_t(x_i)$.

Напівстепенем результату вершини x_i - $d_0(x_i)$ називається кількість дуг, що виходять з цієї вершини. Наприклад, для орграфа G_1 (рис. 6, а)

характеристики напівстепеня результату наступні: $d_0(x_1) = 1$, $d_0(x_2) = 2$, $d_0(x_3) = 2$, $d_0(x_4) = 1$.

Напівстепенем заходу вершини x_i - $d_t(x_i)$ називається кількість дуг, що входять в цю вершину. Наприклад, для орграфа G_1 : $d_t(x_1) = 2$, $d_t(x_2) = 1$, $d_t(x_3) = 2$, $d_t(x_4) = 1$.

Очевидно, що сума напівстепеня результату всіх вершин графа, а також сума напівстепеня заходу всіх вершин графа дорівнює загальному числу дуг графа, тобто

$$\sum_{i=1} d_0(x_i) = \sum_{i=1} d_t(x_i) = m, \quad \text{де } m - \text{число дуг графа.}$$

$$i=1 \quad i=1$$

Кожна вершина неорієнтованного графа x_i може характеризуватися степенем вершини $d(x_i)$.

Степенем вершини x_i - $d(x_i)$ називається кількість ребер, інцидентних цій вершині. Наприклад, для орграфа G_1 (рис. 6, б) характеристики степенів є такими: $d(x_1) = 2$, $d(x_2) = 3$, $d(x_3) = 2$, $d(x_4) = 2$.

Алгоритм і програма визначення характеристик графа наведені в додатку1.

У графі з n вершинами степінь вершини може мати значення від 0 до $(n-1)$. Вершина степеня 0 називається *ізолюваною* (вона не має інцидентних ребер та суміжних вершин), а степеня 1 - *кінцевою*, або *вісячею* (має тільки одне інцидентне ребро). Якщо вершина має степінь $(n-1)$, то вона суміжна з усіма іншими вершинами, й у графі немає ізолюваних вершин. Аналогічно, якщо в графі є ізолювана вершина, то немає вершини степеня $(n-1)$, тобто суміжної з усіма іншими. Отже, справджується наступне твердження.

Теорема 1. У будь-якому графі з n вершинами одночасно не можуть існувати вершини степенів 0 і $n-1$.

Теорема 2. У будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) є принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Як вже позначалося, степені вершин можуть бути цілими значеннями від 0 до $n-1$. Але за теоремою 1 вершини степенів 0 і $n-1$ у графі одночасно існувати не можуть, тобто степенями вершин графа можуть бути лише $n-1$ різних чисел. Але вершин n , тому за принципом Діріхле обов'язково є принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Задача Рамсея. Довести, що серед довільних шести осіб знайдуться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих.

Переклавши задачу на мову теорії графів, одержимо твердження: у довільному графі $G = (V, E)$ з шістьма вершинами існують три вершини, які є або попарно суміжними, або попарно несуміжними.

Візьмемо довільну вершину $v \in V$ та відносно неї розділимо решту вершин на дві множини, що не перетинаються: $V_1 = \{w \mid w \in V \wedge (v, w) \in E\}$ - множина вершин, суміжних із v , і $V_2 = \{w \mid w \in V \wedge (v, w) \notin E\}$ - несуміжних. $V = V_1 \cup V_2 \cup \{v\}$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V| = 6$, тому $|V_1| + |V_2| = 5$, і хоча б одна з цих множин містить принаймні три вершини.

Перший випадок: $|V_1| \geq 3$. Якщо в множині V_1 є дві суміжні вершини, то разом з v вони утворюють три попарно суміжні вершини. Якщо жодні дві вершини несуміжні, то множина V_1 містить три попарно несуміжні вершини (рис. 7).

Другий випадок: $|V_2| \geq 3$. Якщо в множині V_2 є дві несуміжні вершини, то разом з v вони утворюють три попарно несуміжні вершини. Якщо кожні дві вершини суміжні, то множина V_2 містить три попарно суміжні вершини (рис. 8).

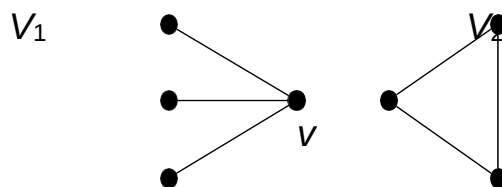


Рис. 8. Попарно несуміжні й попарно суміжні вершини

В обох випадках існують три вершини, що задовольняють умові задачі

Завдання до розділу 2.1

1. Охарактеризувати відношення, відповідні орієнтованим графам без петель. Неформально охарактеризувати графи, відповідні транзитивним відношенням.

.....

2. Що можна сказати про рефлексивно-транзитивне замикання відношення, відповідного ациклічному направленому графу? Чи можна стверджувати, що направлені графи відповідають відношенням часткового порядку?

.....

3. Кілька осіб (більше двох) проводять шаховий турнір в одне коло. У деякий момент виявилось, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії.

Довести, що для довільного $n \geq 3$ існує граф із n вершинами, в якому $n-1$ вершина мають попарно різні степені, причому ізольованих вершин немає.

.....

4. Граф якого типу зображено на рисунку?

.....

5. Які вершини інцидентні дузі f ?

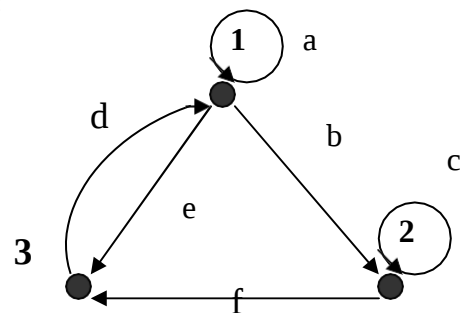
.....

6. Які дуги інцидентні вершині 3?

.....

7. Перерахуйте дуги, що є петлями?

.....



8. Знайти напівступені ісходу і заходу для всіх вершин графа, тобто значення: $d_0(x_1) = \dots$, $d_0(x_2) = \dots$, $d_0(x_3) = \dots$, $d_t(x_1) = \dots$, $d_t(x_2) = \dots$, $d_t(x_3) = \dots$

2.2 Деякі спеціальні види графів

Розглянемо графи з деякими структурними особливостями. *Порожнім* називається граф з порожньою множиною ребер, *тривіальним* - з однією вершиною й без ребер. Протилежними до таких графів є повні. Граф, у якому кожна вершина суміжна з усіма іншими, називається *повним*.

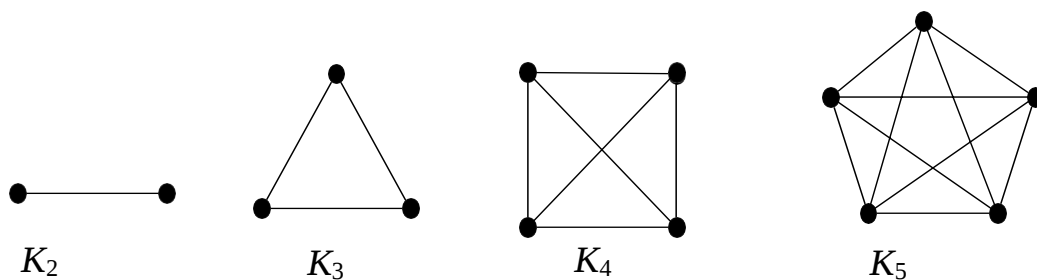


Рис. 9. Приклади повних графів

Повний граф з n вершинами позначається K_n ; кожна його вершина має степінь $n-1$ (рис. 9). Якщо граф $G = (V, E)$ є повним, то за означенням $E = V^{(2)}$.

Граф, усі вершини якого мають степінь r , називається *регулярним* (однорідним) степеня r . Регулярні графи степеня 0, 1 та 2 за своїми структурними властивостями є досить простими. Перші цікаві регулярні графи мають степінь 3; вони називаються *кубічними*.

Окремий клас графів утворюють двочасткові графи. Граф $G = (V, E)$ називається *двочастковим*, якщо множину його вершин V можна так розбити на дві підмножини V_1 і V_2 (*частки*), що кожне ребро графа з'єднує вершини з різних часток, тобто $E \subseteq V^{(2)} \setminus (V_1^{(2)} \cup V_2^{(2)})$.

Двочастковий граф називається повним двочастковим, якщо будь-які дві вершини з різних часток суміжні. Якщо частки повного двочасткового графа мають n і m вершин відповідно, він позначається $K_{n,m}$. Повний двочастковий граф $K_{1,n}$ називається *зірковим* графом, або зіркою (рис. 10).

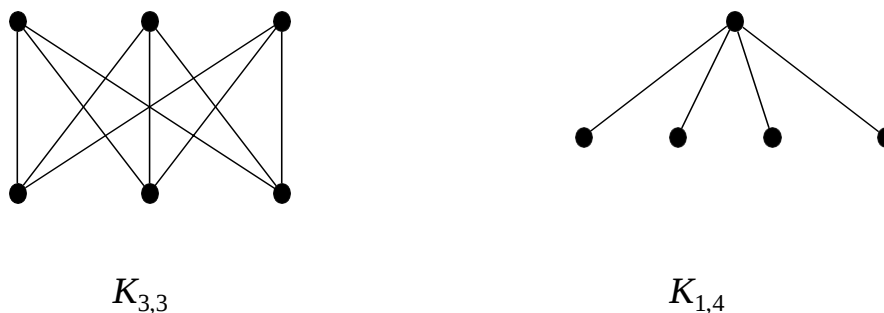


Рис. 10. Приклади повного двочасткового $K_{3,3}$ та зіркового $K_{1,4}$ графів

Повний двочастковий граф $K_{3,3}$ є моделлю задачі про "три будинки та три колодязі". Три сусіди, що посварилися, спільно користуються трьома колодязями. Чи можна провести доріжки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоб доріжки не перетиналися, тобто сусіди не зустрічалися на шляхах до колодязів? Відповідь на це питання буде розглянута далі.

Двочасткові графи виникають у багатьох відомих задачах. Наприклад, у задачі про одруження є множина юнаків, і кожен з них знайомий з кількома дівчатами. Питання в тому, чи може кожний юнак одружитися зі знайомою йому дівчиною. Ця задача (звичайно, в іншій формі) відіграє важливу роль при вивченні потоків у мережах.

"Лема про рукостискання"

У довільному графі кожне ребро інцидентне рівно двом вершинам, тому до суми степенів вершин графа кожне ребро додає двійку. Таким чином, справджується твердження, яке було встановлено Ейлером і є історично першою теоремою теорії графів.

Теорема 3. Сума степенів вершин графа $G = (V, E)$ дорівнює подвоєній кількості його ребер:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Цю теорему інколи називають "лемою про рукостискання". Вершини графа подають людей, а ребра - рукостискання, якими люди обмінялися при зустрічі. Оскільки кожне рукостискання має дві діючі особи, число потиснутих рук удвічі більше кількості рукостискань. Але число потиснутих рук - це сума степенів вершин графа, а кількість рукостискань - це кількість ребер.

Висновок 3.1. Повний граф з n вершинами має $n(n-1)/2$ ребер.

Дійсно, степінь кожної з n вершин дорівнює $n-1$, тому за теоремою 3 маємо

$$2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) = n(n-1),$$

звідки кількість ребер дорівнює $n(n-1)/2$.

Нехай дано граф $G = (V, E)$. Множину вершин графа V можна розбити на дві підмножини, що не перетинаються: множина вершин парного степеня V_n та множина вершин непарного степеня V_n ;

$$V_n \cup V_n = V, V_n \cap V_n = \emptyset. \text{ Тоді } 2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_n} \delta(v) + \sum_{v \in V_n} \delta(v), \text{ звідки}$$

$$\sum_{v \in V_n} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V_n} \delta(v).$$

Тоді V_n завжди парна, оскільки її складають вершини парного степеня. Тому сума степенів вершин з непарними степенями є парною як різниця двох парних чисел. Але якщо сума непарних чисел є парною, то вона має парну кількість доданків, тобто кількість вершин непарного степеня парна.

Розглянемо задачу: при яких натуральних n і m існує кубічний граф з n вершинами і m ребрами?

Для існування вершин степеня 3 граф повинен мати принаймні 4 вершини, тому $n \geq 4$. У кубічному графі кожна вершина має степінь 3 - непарне число. Число вершин непарного степеня повинно бути парним, тому n парне, $n = 2k$ при деякому натуральному k . Обчислимо кількість ребер. За теоремою 3 маємо $2m = 3n$, звідки $m = 3k$. Таким чином, необхідними умовами існування кубічного графа з n вершинами та m ребрами є $n = 2k$ та $m = 3k$ при деякому натуральному $k \geq 2$.

Слід зауважити наступне. Щоб стверджувати, що при $n = 2k$ та $m = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) існує кубічний граф з n вершинами і m ребрами, необхідно довести його існування. Зробимо це.

Розташуємо вершини по колу в кутах правильного $2k$ -кутника й проведемо всі ребра між сусідніми вершинами та діаметри, що виходять з вершин. Очевидно, що це можна зробити при $k \geq 2$. При цьому одержимо кубічний граф з $2k$ вершинами та $3k$ ребрами. Цій діаграмі відповідає формальний граф (V, E) з множиною вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$ та множиною ребер $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{2k-1}, v_{2k}), (v_{2k}, v_1)\} \cup \{(v_1, v_{k+1}), (v_2, v_{k+2}), \dots, (v_k, v_{2k})\}$.

Завдання до розділу 2.2

Одержали: кубічний граф з n вершинами та m ребрами існує тоді й тільки тоді, коли $n = 2k$ і $m = 3k$ при деякому натуральному $k \geq 2$.

1. Чи існує повний граф, кількість ребер якого дорівнює:

- а) 15; в) $199\dots900\dots0$ (n дев'яток і n нулів);
б) 18; г) $8k^2+2k, k \in N?$

• • • • •

2. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t , а решта вершин мають степінь $t+1$. Довести, що $p = (t+1)n - 2m$.

• • • • •

3. 29 команд проводять футбольний турнір в одне коло. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

• • • • •

4. Чи існує граф із n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо:

- a) $n = 2k-1$ ($k \in \mathbb{N}$); б) $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)?

• • • • •

5. Чи можна з повного графа K_{17} вилучити деякі ребра так, щоб степінь кожної вершини дорівнював:

- a) 15; б) 2; в) 1 ?

• • • • •

6. У товаристві з n осіб кожен знайомий з k і тільки k іншими особами. Чи можливе таке товариство при:

- а) $n = 5, k = 2$; в) $n = 2m, k = 1$;
б) $n = 5, k = 3$; г) $n = 2m, k = 3$?

• • • • •

7. Чи існує кубічний граф із n вершинами, якщо:

- а) $n = 100$; б) $n = 101$; в) $n = 102$; г) $n = 2k-1$; д) $n = 2k$?

2.3 Способи опису графів

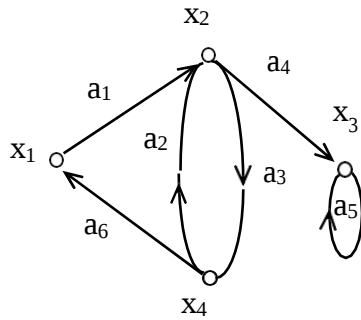


Рис. 11. Орграф G_4

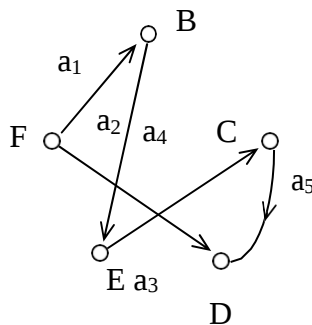


Рис. 12. Орграф G_5

2.3.1 Теоретико-множинне представлення графів

Граф описується перерахуванням множин вершин і дуг. Приклади опису наведені для орграфів на рисунках 11 і 12.

$$G_4 = (X, A),$$

де $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ - множина вершин;

$A = \{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 6$ - множина дуг,

причому $A = \{(x_1, x_2), (x_4, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_3), (x_4, x_1)\}$.

$$G_5 = (X, A),$$

де $X = \{B, C, D, E, F\}$ - множина вершин графа

$A = \{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 5$ - множина дуг графа,

причому $a_1 = (F, B)$, $a_2 = (B, E)$,

$a_3 = (F, D)$, $a_4 = (E, C)$, $a_5 = (C, D)$.

2.3.2 Завдання графів відповідності

Опис графів полягає в завданні множини вершин X і відповідності Γ , що показує, як між собою пов'язані вершини.

Відповідністю Γ називається відображення множини X в X , а граф в цьому випадку позначається парою $G = (X, \Gamma)$.

Відображенням вершини $x_i - \Gamma(x_i)$ є множина вершин, в якій існують дуги з вершини x_i , тобто $\Gamma(x_i) = \{x_j : \exists \text{ дуга } (x_i, x_j) \in A\}$.

Так для орграфа на рисунку 11 опис завдання множини вершин і відповідності виглядає наступним чином: $G_4 = (X, \Gamma)$, де $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 4$ - множина вершин, $\Gamma(x_1) = \{x_2\}$, $\Gamma(x_2) = \{x_3, x_4\}$, $\Gamma(x_3) = \{x_3\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_1, x_2\}$ - відображення.

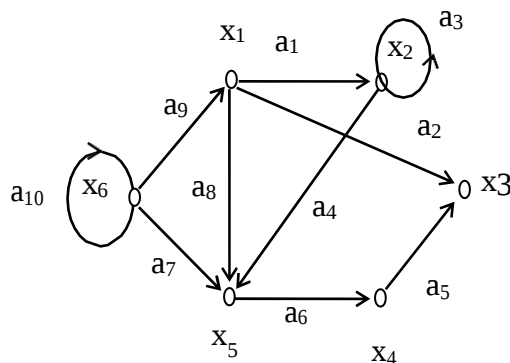
Для неорієнтованого або змішаного графів передбачається, що відповідність Γ задає такий еквівалентний орієнтований граф, який виходить з вихідного графа заміною кожного орієнтованого ребра двома протилежно спрямованими дугами, що з'єднують ті ж самі вершини. Наприклад, для графа на рисунку 5, б $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3, x_5\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_3, x_5\}$ та ін.

2.3.3 Матричне представлення графів

Для обробки на ЕОМ графи зручно представляти у вигляді матриць суміжності та інцидентів.

Матриця суміжності - це квадратна матриця розмірністю $n \times n$ (n - число вершин графа), однозначно представляє його структуру.

$A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, а кожен елемент матриці визначається наступним чином: $a_{ij} = 1$, якщо $\exists$ дуга (x_i, x_j) , $a_{ij} = 0$, якщо немає дуги (x_i, x_j) .



а)

$A =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

б)

$B =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0
x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	-1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

в)

Рис. 13. Орграф і його матричне представлення: а) орграф; б) матриця суміжності; в) матриця інцидентів

Матриця інцидентій є прямокутною матрицею розміром $n \times m$, де n - кількість вершин графа, а m - кількість дуг графа. Позначається матриця інцидентій $B = \{ b_{ij} \}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Кожен елемент матриці визначається наступним чином:

$b_{ij} = 1$, якщо x_i є початковою вершиною дуги a_j ,

$b_{ij} = -1$, якщо x_i є кінцевою вершиною дуги a_j ,

$b_{ij} = 0$, якщо x_i не є кінцевою вершиною дуги a_j або якщо a_j є петлею.

На рисунку 13, а, б наведені граф і його матриця суміжності, за якою можна знайти характеристики вершин. Так сума елементів i -го рядка матриці дає напівстепені результату вершини x_i , а сума елементів i -го стовпця дає напівстепені заходу вершини x_i . За матрицею суміжності можна знайти прямі й зворотні відображення. Розглянемо i -й рядок матриці. Якщо елемент $a_{ij} = 1$, то елемент графа x_j входить до відображення $\Gamma(x_i)$. Наприклад, у 2-му рядку матриці A (рис. 13, б) одиниці стоять у 2-му і 5-му стовпцях, отже, $\Gamma(x_2) = \{ x_2, x_5 \}$.

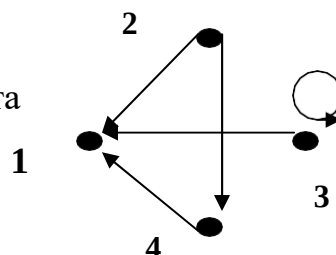
Для графа, наданого на рисунку 13, а, матрицю інцидентій наведено на рисунку 13, в. Оскільки кожна дуга інцидентна двом різним вершинам, за винятком того випадку, коли дуга утворює петлю, то кожен стовець або містить один елемент, що дорівнює 1 і один, - що дорівнює (-1), або всі елементи стовпця дорівнюють 0.

Для неорієнтованого графа, матриця інцидентій визначається так само, за винятком того, що всі елементи, що дорівнюють (-1), замінюються на 1.

Завдання до розділу 2.3 (з відповідями)

- Для графа, зображеного на рисунку, надати опис за допомогою перерахувань та за допомогою відображень.

Відповідь: $G=(X, A)$,



де $X = \{ x_i \}$, $i=1, 2, 3, 4$ - множина вершин;

$A = \{ a_i \}$, $i=1, 2, \dots, 5$ - множина дуг, причому

$A = \{ (x_2, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4), (x_4, x_1) \}$.

$G = (X, \Gamma)$, де $X = \{ x_i \}$, $i=1, 2, \dots, 4$ - множина вершин,

$\Gamma = \{ \Gamma(x_i) \}$ – множина відображень, $\Gamma(x_1) = \{ \dots \}$, $\Gamma(x_2) = \{ \dots \}$,

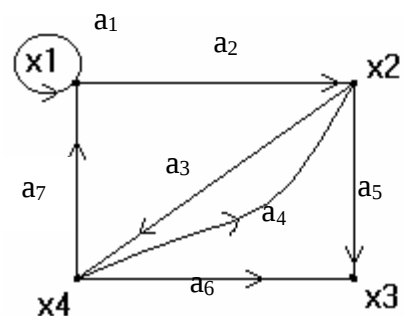
$\Gamma(x_3) = \{ \dots \}$, $\Gamma(x_4) = \{ \dots \}$ - відображення.

.....

2. Для графа, наданого на рисунку, побудувати матриці суміжності та інцидентів.

Відповідь: Матриця суміжності

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1				
x_2				
x_3				
x_4				



Матриця інцидентів

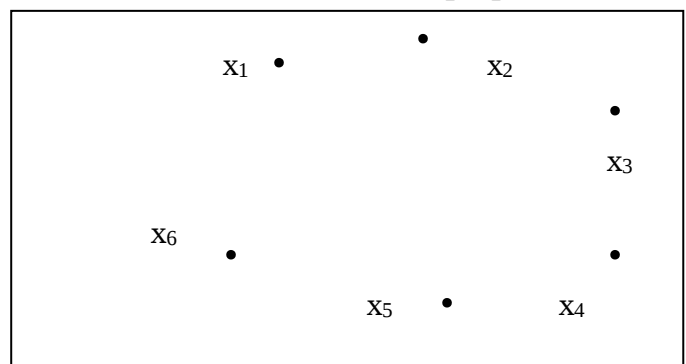
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1							
x_2							
x_3							
x_4							

.....

Відповідь до завдання 3: граф

3. Побудувати граф, що задано матрицею суміжності.

1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1



4. За матрицею суміжності, наданої в попередній задачі, підрахувати:

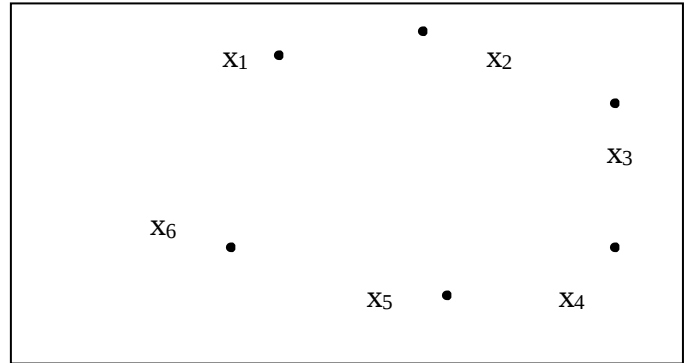
а) кількість петель графа - ,

б) напівстепені результату другої вершини $d_0(x_2) = \dots$,

в) полуступень заходу другий вершини $d_t(x_2) = \dots$

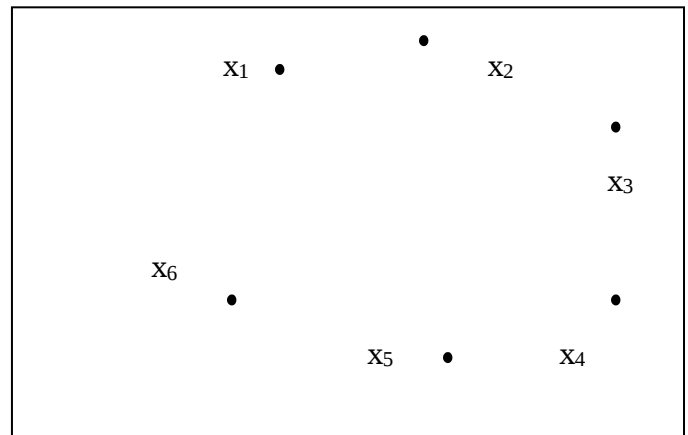
Відповідь до завдання 5: побудувати граф

5. Побудувати граф $G = (X, A)$,
де
 $X = \{x_i\}$, $i=1, 2, \dots, 5$,
 $A = \{a_i\}$, $i=1, 2, \dots, 8$,
 $a_1 = (x_1, x_2)$, $a_2 = (x_2, x_3)$
 $a_3 = (x_1, x_2)$,
 $a_4 = (x_3, x_5)$, $a_5 = (x_3, x_1)$, $a_6 = (x_4, x_5)$,
 $a_7 = (x_4, x_1)$, $a_8 = (x_5, x_1)$.
.....

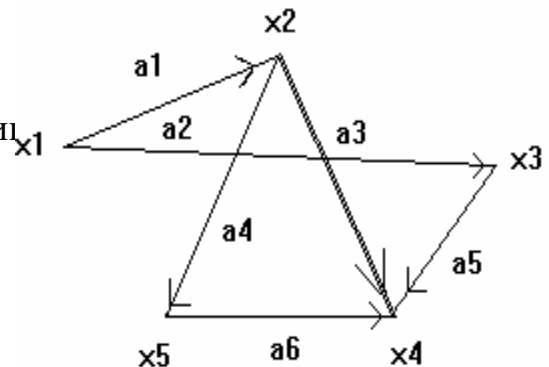


Відповідь до завдання 6: побудувати граф

6. Побудувати граф $G = (X, \Gamma)$,
де $X = \{x_i\}$, $i=1, 2, \dots, 6$,
 $\Gamma = \{ \Gamma(x_i) \}$ – множина
відображень,
 $\Gamma(x_1) = \{x_1, x_3, x_4\}$
 $\Gamma(x_2) = \{x_2, x_4, x_6\}$,
 $\Gamma(x_3) = \{x_3, x_6\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_5, x_6\}$,
 $\Gamma(x_5) = \{x_2, x_6\}$, $\Gamma(x_6) = \{x_1, x_3\}$.
.....



7. Для графа, зображеного на рисунку,
надати можливі варіанти його опису з ви-
та інцидентів.



Відповідь:

Матриця суміжності

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1					
x_2					
x_3					
x_4					
x_5					

Матриця інцидентів

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1						
x_2						
x_3						
x_4						
x_5						

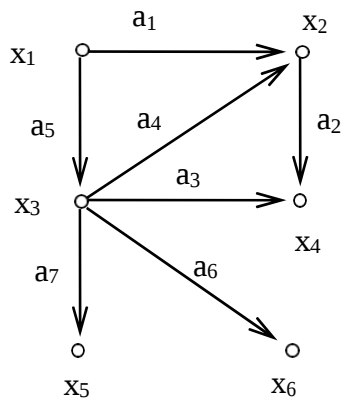
2.4 Тривіальні дії на графах

Якщо для двох графів $G = (V, E)$ і $G' = (V', E')$ виконуються включення $V' \subseteq V$ і $E' \subseteq E$, то граф G' називається *підграфом* графа G ; це позначається $G' \subseteq G$. Граф G у цьому випадку називається *надграфом* графа G' . Якщо $G' \subseteq G$ і $V' = V$, то G' називається *суграфом* графа G . Якщо $V_0 \subseteq V$, то граф $G(V_0) = (V_0, E \cap V^{(2)})$ називається *підграфом* графа G , визначеним множиною вершин V_0 .

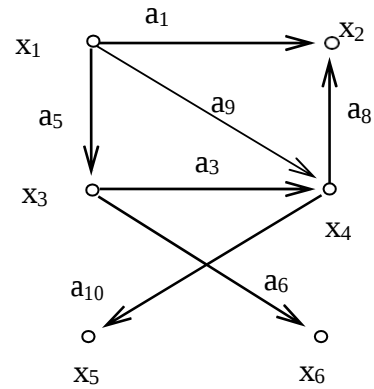
Об'єднанням $G_1 \cup G_2$ графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф з множиною вершин $V_1 \cup V_2$ і множиною ребер $E_1 \cup E_2$, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Об'єднання $G_1 \cup G_2$ називається *прямою сумою* графів G_1 і G_2 , якщо множини вершин V_1 і V_2 не перетинаються. Для графів $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ аналогічно означається їх *перетин* $G_1 \cap G_2 = (V, E_1 \cap E_2)$ та *різниця* $G_1 \setminus G_2 = (V, E_1 \setminus E_2)$.

Для графів означаються також дві специфічні тривіальні дії - *вилучення ребра* та *вилучення вершини*. Нехай дано граф $G = (V, E)$, $v \in V$, $e \in E$. Результатом застосування вилучення ребра e до графа G є граф $G - e = (V, E \setminus \{e\})$. Результатом застосування вилучення вершини v до графа G є граф $G - v = (V \setminus \{v\}, E \cap (V \setminus \{v\})^{(2)})$, тобто з G вилучається вершина v та всі інцидентні їй ребра.

Розглянемо більш докладно сім основних тривіальних дій з графами, три з яких є бінарними, що включають два графа, а інші чотири - унарні, тобто визначені на одному графі. Вихідні графи надані на рисунку 14, а, б: $G_1 = (X_1, A_1)$, де $X_1 = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 6$, $A = \{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 7$; $G_2 = (X_2, A_2)$, де $X_2 = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 6$, $A = \{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{10}\}$. Матриці суміжності графів показані на рисунку 14, в та г, відповідно. (Щоб не захарашувати рисунок, нулі не показані). На рисунку 14, д, показано об'єднання графів G_1 і G_2 , $(G_1 \cup G_2)$. Його результатом є граф $G_3 = (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, множина вершин котрого є об'єднанням X_1 і X_2 , а множина ребер - об'єднанням A_1 і A_2 . Матрицю суміжності графа G_3 , показано на рисунку 14, е.



а)



б)

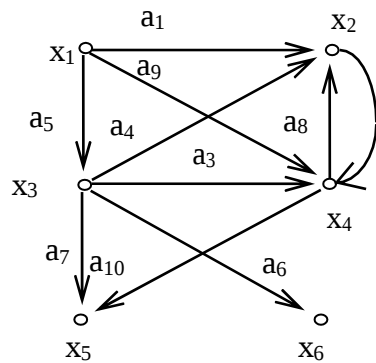
$$A_1 =$$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1		1	1			
x2				1		
x3		1		1	1	1
x4						
x5						
x6						

$$A_2 =$$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1		1	1	1		
x2						
x3				1		1
x4		1			1	
x5						
x6						

г)



д)

$$A_3 =$$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1		1	1	1		
x2				1		
x3		1		1	1	1
x4		1			1	
x5						
x6						

е)

Рис. 14. Об'єднання графів:

а) граф G_1 ; б) граф G_2 ; в) матриця суміжності графа G_1 ;

г) матриця суміжності графа G_2 ; д) $G_1 \cup G_2$; е) матриця суміжності графа G_3

Перетином графів G_1 і G_2 , $(G_1 \cap G_2)$ є граф $G_4 = (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$. Таким чином, множина вершин графа G_4 складається з вершин, що одночасно є в графах G_1 і G_2 . Результат перетину графів $G_1 \cap G_2$ показано на рисунку 15, а.

Кільцевою сумою двох графів G_1 і G_2 , що позначається як $G_1 \oplus G_2$ є граф G_5 , породжений на множині ребер $A_1 \oplus A_2$. Іншими словами, граф G_5 не має ізольованих вершин і складається тільки з ребер, присутніх або в G_1 , або в G_2 , але не в обох одночасно. Кільцева сума графів G_1 і G_2 показана на рисунку 15, б.

Легко переконатися в тому, що розглянуті вище дії є комутативними, тобто:

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1, G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1, G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1.$$

Вони також є багатомісними, тобто:

$$G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap \dots, G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup \dots \text{ і так далі.}$$

Розглянемо унарні дії на графі.

Видалення вершини. Якщо x_i - вершина графа $G = (X, A)$, то $G - x_i$ - породжений підграф графа G на множині вершин $X - x_i$. Тобто $G - x_i$ є графом, отриманим після видалення з графа G всіх вершини x_i і всіх ребер,

інцидентних цієї вершини. Видалення вершини x_3 показано на рисунку 15, б (для вихідного графа, зображеного на рисунку 15, а).

Видалення ребра або видалення дуги. Якщо a_i - дуга графа $G = (X, A)$, то $G - a_i$ - підграф графа G , отриманого після видалення з графа G дуги a_i . Зауважимо, що кінцеві вершини дуги a_i будуть збережені. Видалення з графа множини вершин або дуг визначаються як послідовне видалення певних вершин або дуг. Видалення дуг a_4 і a_7 показано на рисунку 15, в.

Замикання або ототожнення. Кажуть, що пара вершин x_i і x_j у графі G замикається (або ототожнюється), якщо вони замикаються такої

новою вершиною, що всі дуги в графі G , що є інцидентними x_i і x_j , стають інцидентними новій вершині. Наприклад, результат замикання вершини x_1 і x_6 показано на рисунку 15, г для графа G (рис.15, а).

Стягування. Під стяганням мають на увазі дію видалення дуги або ребра і ототожнення його кінцевих вершин. Граф, зображений на рисунку 15, д отриманий шляхом стягування дуги a_1 , а на рисунку 15, е - стягуванням дуг a_1 , a_6 і a_7 .

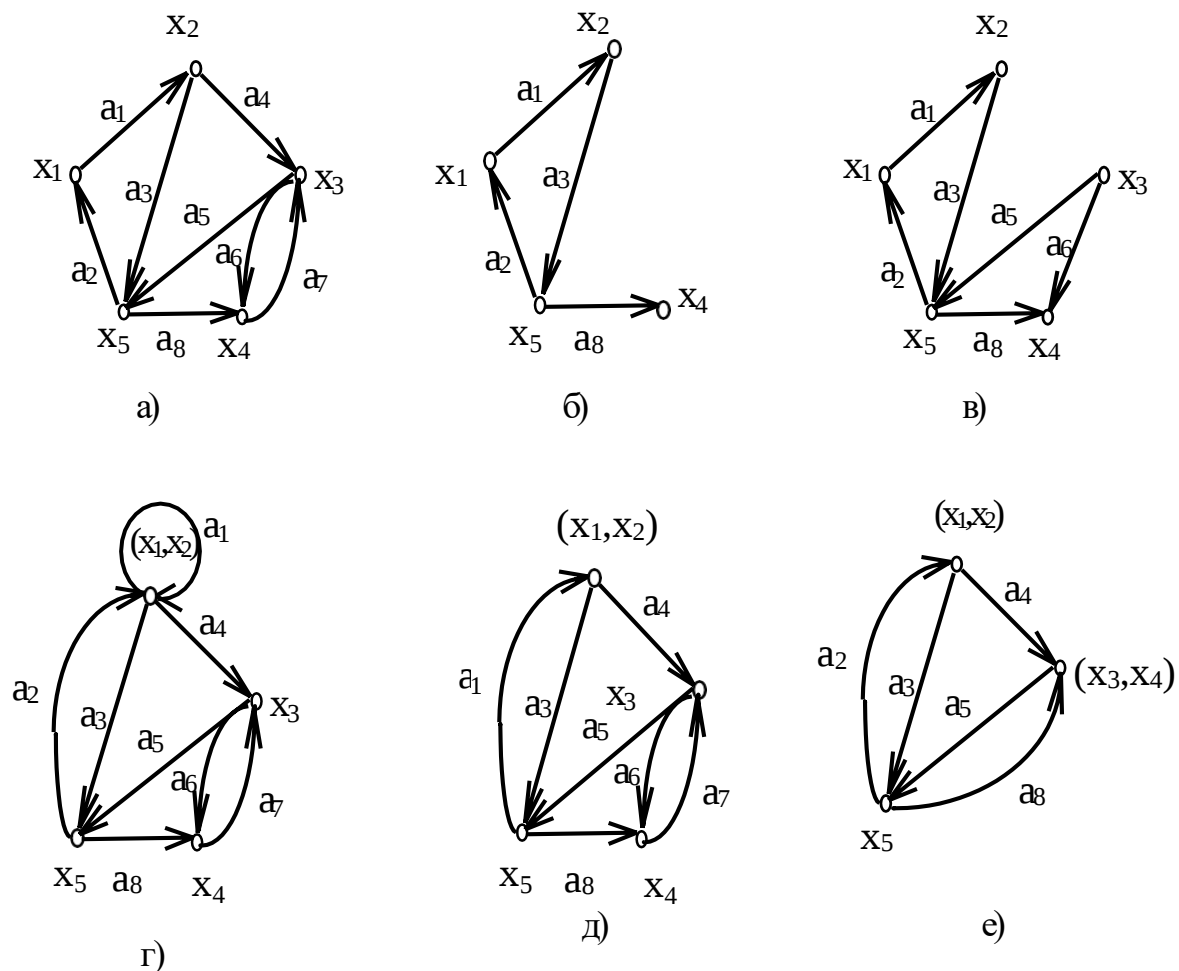


Рис. 15. Унарні дії на графі:

- а) вихідний граф G_1 ; б) видалення вершини G - x_3 ;
- в) видалення ребер $G \{a_4, a_7\}$; г) ототожнення вершин x_1, x_2 ;
- д) стягування дуги a_1 ; е) стягування дуги a_6 і a_7

3 ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

3.1 Багатозначні відображення

3.1.1 Прямі відображення

Прямим відображенням 1-го порядку вершини x_i є множина таких вершин графа, для яких існує дуга (x_i, x_j) , тобто

$$\Gamma^{+1}(x_i) = \{x_j : \exists \text{ дуга } (x_i, x_j) \in A\} \text{ для графа } G = (X, A), \text{ де } X = \{x_i\},$$

$i = 1, 2, \dots, n$ - множина вершин, а $A = \{a_i\}, i = 1, 2, \dots, m$ - множина дуг.

Прямим відображенням 2-го порядку вершини x_i є пряме відображення від прямого відображення 1-го порядку, тобто

$$\Gamma^{+2}(x_i) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+1}(x_i)).$$

Аналогічно можна записати для прямого відображення 3-го і т.д. n -ого порядку.

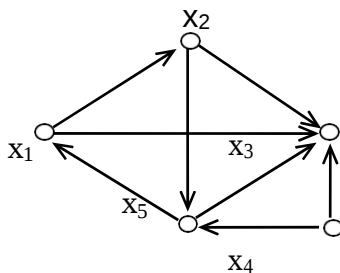


Рис. 16. Граф G

$$\Gamma^{+3}(x_i) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+2}(x_i)) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+}(\Gamma^{+1}(x_i)))$$

.....

$$\Gamma^{+n}(x_i) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+(n-1)}(x_i))$$

Наприклад, прямі багатозначні відображення для графа G на рисунку 16 знаходяться наступним чином:

$$\Gamma^{+1}(x) = \{x, x\},$$

$$\Gamma^{+2}(x_1) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+1}(x_1)) = \Gamma^{+}(x_2, x_3) = \{x_3, x_5\}$$

$$\Gamma^{+3}(x_1) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+2}(x_1)) = \Gamma^{+}(x_3, x_5) = \{x_3, x_1\} \text{ та ін.}$$

3.1.2 Зворотні відображення

Зворотним відображенням 1-го порядку для вершини x_i є множина елементів x_j таких, що існує дуга (x_j, x_i) , що належить множині дуг графа, тобто $\Gamma^{-1}(x_i) = \{x_j : \exists \text{ дуга } (x_j, x_i) \in A\}$

Зворотні відображення 2-го, 3-го та n -го порядку визначаються наступним чином:

$$\Gamma^{-2}(x_i) = P^{-}(\Gamma^{-1}(x_i))$$

$$\Gamma^{-3}(x_i) = P^{-}(\Gamma^{-2}(x_i))$$

...

$$\Gamma^{-n}(x_i) = P^{-}(\Gamma^{-(n-1)}(x_i))$$

Для графа на рисунку 16 зворотні багатозначні відображення вершини x_1 знаходяться наступним чином:

$$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_5\}$$

$$\Gamma^{-2}(x_1) = P^{-}(\Gamma^{-1}(x_1)) = P^{-}(x_5) = \{x_2, x_4\}$$

$$\Gamma^{-3}(x_1) = P^{-}(\Gamma^{-2}(x_1)) = P^{-}(x_2, x_4) = \{x_1\}$$

$$\Gamma^{-4}(x_1) = P^{-}(\Gamma^{-3}(x_1)) = P^{-}(x_1) = \{x_5\} \text{ та ін.}$$

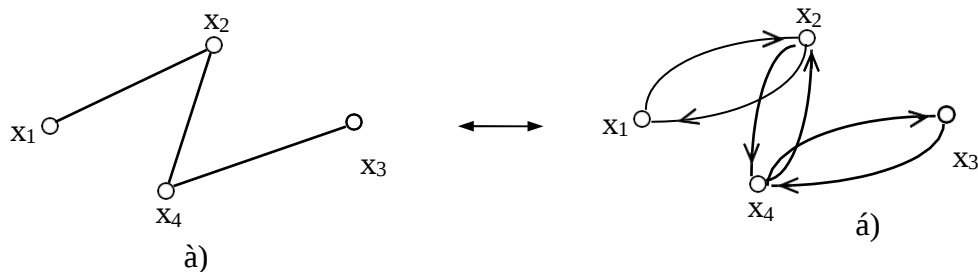


Рис. 17. Граф: а) неорієнтований;

б) тотожний йому орієнтований граф

Додатково слід відміти:

1) Коли відображення діє не на одну вершину, а на множина вершин $X_q = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$, то під $\Gamma(X_q)$ розуміють об'єднання.

$$\Gamma(x_1) \cup \Gamma(x_2) \cup \dots \cup \Gamma(x_q).$$

2) Багатозначне відображення для неорієнтованого графа будується, якщо уявити кожне ребро двома протилежно спрямованими дугами (рис.17).

1. Знайти прямі багатозначні відображення для всіх вершин графа, наданого на рисунку.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } \Gamma^{+1}(x_1) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \\ \Gamma^{+2}(x_1) &= \Gamma^+(\Gamma^{+1}(x_1)) = \Gamma^+(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \\ \Gamma^{+3}(x_1) &= \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_1)) = \Gamma^+(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \\ &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \end{aligned}$$

$$\Gamma^{+4}(x_1) = \Gamma^{+5}(x_1) = \Gamma^{+6}(x_1) \text{ і так далі.}$$

$$\Gamma^{+1}(x_2) = \{x_1, x_3\},$$

$$\Gamma^{+2}(x_2) = \Gamma^+(\Gamma^{+1}(x_2)) = \Gamma^+(x_1, x_3) = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+3}(x_2) = \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_2)) = \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \}$$

$$\Gamma^{+4}(x_2) = \dots$$

.....

$$\Gamma^{+1}(x_3) = \{x_4, x_6\},$$

$$\Gamma^{+2}(x_3) = \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+3}(x_3) = \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_3)) = \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \}$$

$$\Gamma^{+4}(x_3) = \dots$$

$$\Gamma^{+1}(x_4) = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+2}(x_4) = \Gamma^+(\Gamma^{+1}(x_4)) = \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+3}(x_4) = \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_4)) = \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \}$$

$$\Gamma^{+4}(x_4) = \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+5}(x_4) = \dots$$

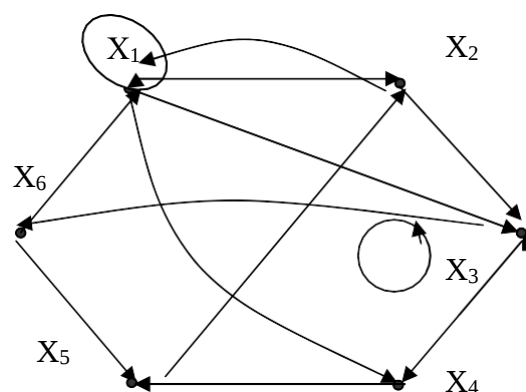
$$\Gamma^{+1}(x_5) = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+2}(x_5) = \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+3}(x_5) = \dots = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+4}(x_5) = \dots = \{ \dots \},$$

$$\Gamma^{+5}(x_5) = \dots$$

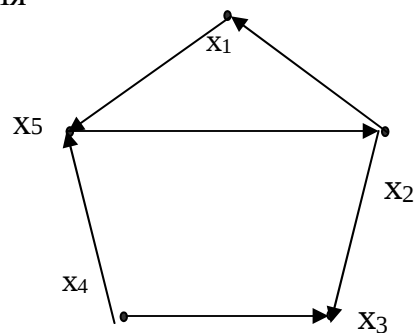


$$\begin{aligned}\Gamma^{+1}(x_6) &= \{ \dots \}, \\ \Gamma^{+2}(x_6) &= \dots = \{ \dots \}, \\ \Gamma^{+3}(x_6) &= \Gamma^+(\dots) = \{ \dots \}, \\ \Gamma^{+4}(x_6) &= \dots \\ &\dots\end{aligned}$$

2. Знайти зворотні багатозначні відображення для всіх вершин графа, показаного на рисунку.

Відповідь :

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(x_1) &= \{x_2\}, \\ \Gamma^{-2}(x_1) &= \Gamma^-(\Gamma^{-1}(x_1)) = \Gamma^-(x_2) = \{x_5\}, \\ \Gamma^{-3}(x_1) &= \Gamma^-(\Gamma^{-2}(x_1)) = \Gamma^-(x_5) = \{x_1, x_4\}, \\ \Gamma^{-4}(x_1) &= \Gamma^-(x_1, x_4) = \{x_2\}, \Gamma^{-5}(x_1) = \Gamma^-(x_2) = \{x_5\}, \Gamma^{-6}(x_1) = \Gamma^-(x_5) = \{x_1, x_4\}, \text{ тощо.}\end{aligned}$$



$$\Gamma^{-1}(x_2) = \{x_5\}, \quad \Gamma^{-2}(x_2) = \Gamma^-(x_5) = \{x_1, x_4\}, \quad \Gamma^{-3}(x_2) = \Gamma^-(x_1, x_4) = \{x_2\}, \quad \Gamma^{-4}(x_2) = \{x_5\}, \text{ и т. д.}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(x_3) &= \{x_4, x_2\}, \Gamma^{-2}(x_3) = \Gamma^-(x_2, x_4) = \{x_1, x_3, x_5\}, \Gamma^{-3}(x_3) = \{x_2, x_5\}, \Gamma^{-4}(x_3) \\ &= \{x_1, x_3, x_2\}, \Gamma^{-5}(x_3) = \{x_1, x_3, x_5\}, \Gamma^{-6}(x_3) = \{x_2, x_5\}, \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(x_4) &= \{ \dots \}, \\ \Gamma^{-2}(x_4) &= \Gamma^-(\dots) = \{ \dots \}, \\ \Gamma^{-3}(x_4) &= \dots \\ \Gamma^{-1}(x_5) &= \{ \dots \}, \\ \Gamma^{-2}(x_5) &= \Gamma^-(\dots) = \{ \dots \}, \\ \Gamma^{-3}(x_5) &= \dots = \dots = \{ \dots \}, \\ \Gamma^{-4}(x_5) &= \dots = \{ \dots \}, \\ \Gamma^{-5}(x_5) &= \dots\end{aligned}$$

3.2 Створення маршрутів у графах

3.2.1 Маршрути, зв'язані вершини, компоненти зв'язності

Маршрутом у графі $G = (V, E)$ називається послідовність вершин і ребер $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \dots, v_n$ — вершини, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $1 \leq i \leq n$, — ребра. Ребра e_i та e_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$) є *сусідніми* ребрами маршруту й мають принаймні одну спільну вершину. Вказаний маршрут з'єднує вершини v_0 і v_n , або *веде* з v_0 у v_n . Цей маршрут можна позначити $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, не вказуючи ребер. Число n називається *довжиною маршруту*. Для систематичності міркувань вводиться *тривіальний*, або *нуль-маршрут* — маршрут, що складається з єдиної вершини й має довжину 0. Інші маршрути вважаються нетривіальними.

Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра попарно різні, і *простим ланцюгом*, якщо всі його вершини попарно різні.

Якщо $v_0 = v_n$, то маршрут називається *замкненим*, або *циклічним*. Його останнє та перше ребро вважаються сусідніми. Нетривіальний замкнений ланцюг називається *циклом*. Цикл $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ називається *простим*, якщо його вершини $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Відмітимо, що кожний простий цикл є циклом, а довжина будь-якого нетривіального замкненого маршруту $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, де $v_0 = v_n$, з попарно різними ребрами не менше 3, оскільки треба вийти з вершини та повернутися в неї, але по різних ребрах. Отже, цикл і простий цикл повинні проходити принаймні через три вершини.

Зауважимо, що за принципом Діріхле довжина довільного простого циклу в графі завжди не більше числа вершин n , а простого ланцюга — менше n .

Якщо $Z_1 = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)$ і $Z_2 = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$ — маршрути, то під $Z_1 \cdot Z_2$ будемо розуміти маршрут $(v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i^1, v_{i+1}, \dots, v_n)$, а під Z^{-1} — маршрут $(v_i, v_{i-1}, \dots, v_1, v_0)$.

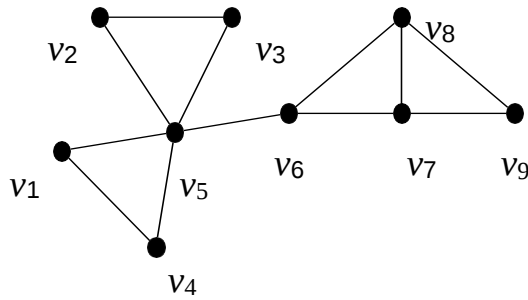


Рис. 18. Приклади маршрутів

На рисунку 18 маршрути (v_1, v_5, v_4, v_1) , (v_2, v_3, v_5, v_2) та $(v_6, v_8, v_9, v_7, v_6)$ є простими циклами, $(v_5, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1, v_5)$ - циклом, але не простим, $(v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)$ - простим ланцюгом, $(v_7, v_6, v_8, v_7, v_9)$ – ланцюгом, але не простим, а $(v_8, v_6, v_7, v_8, v_7, v_9)$ не є ланцюгом.

Через C_n позначається граф, утворений одним простим циклом з n вершин, P_n – простим ланцюгом з n вершин. Граф C_3 часто називається *трикутником*. Це цикл і простий цикл з найменшою кількістю вершин.

Граф, що не має циклів, називається *ациклічним*.

Граф, довільні дві вершини якого можуть бути з'єднані деяким маршрутом (є *зв'язаними*), називається *зв'язним*. Інакше граф називається *незв'язним*.

Максимальний за відношенням $\subseteq$ зв'язний підграф графа називається *компонентою зв'язності* (чи *зв'язною компонентою*). На рисунку 19 наведено приклад графа з двома компонентами зв'язності K_3 і K_2 .

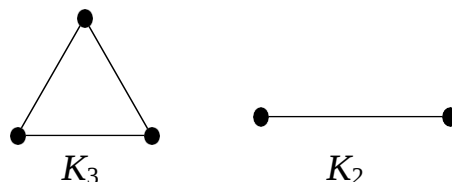


Рис. 19. Приклади компонент зв'язності

Відношення зв'язності на множині вершин графа $G = (V, E)$ є

еквівалентністю; позначимо її R . vRw має місце тоді й тільки тоді, коли вершини v і w є зв'язаними в графі. За еквівалентністю R побудуємо фактор-множину $V/R = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, яка є розбиттям множини вершин. Неважко переконатися, що підграфи $G(V_i)$, $1 \leq i \leq n$, є компонентами зв'язності графа G (максимальними зв'язними підграфами), а сам граф можна подати як пряму суму його зв'язних компонент:

$$G = \bigcup_{i=1}^n G(V_i). \text{ Отже, одержуємо наступну теорему.}$$

Теорема. Кожний граф можна однозначно подати як пряму суму зв'язних компонент.

Ця теорема дозволяє зводити більшість задач, пов'язаних із графами, до випадку зв'язних графів.

Питання зв'язності графа виникає у багатьох практичних задачах, наприклад, коли граф подає схему руху транспорту, і треба визначити, чи можна проїхати з одного пункту в інший.

Розглянемо деякі властивості маршрутів.

Теорема. Будь-який маршрут, що веде з вершини v у вершину w ($v \neq w$), містить простий ланцюг, що веде з v в w .

Доказ. Нехай є маршрут $Z = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, де $v_0 = v$, $v_n = w$. Побудуємо за ним простий ланцюг, що веде з v у w . Якщо всі вершини маршруту Z різні, то він є простим ланцюгом. Інакше, нехай $v_i = v_j$ при деяких i та j , $0 \leq i < j \leq n$. Вилучивши частину маршруту Z між v_i та v_j , одержимо маршрут $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$, довжина якого менше довжини Z . Умова $v \neq w$ гарантує, що $i \neq 0$ або $j \neq n$, тому новий маршрут з'єднує v і w . Якщо він не є простим ланцюгом, то застосуємо до нього таке саме скорочення. Кількість вершин графа та початковий маршрут Z скінченні, і на кожному кроці зменшується довжина маршруту, тому на деякому скінченному кроці буде одержано маршрут, що з'єднує вершини v та w і має попарно різні вершини, тобто є простим ланцюгом.

Висновок 1. Будь-який найкоротший маршрут, що веде з вершини v у вершину w ($v \neq w$), є простим ланцюгом. (З доведення попередньої теореми випливає, що, як тільки маршрут веде з вершини v у вершину w і не є простим, його можна скоротити. Отже, він не є найкоротшим).

У графі може існувати кілька найкоротших простих ланцюгів, що ведуть з вершини v у вершину w ($v \neq w$). Так, у графі, наведеному на рисунку 18, є два простих ланцюги найменшої довжини 2, що ведуть з v_6 у v_9 - (v_6, v_7, v_9) та (v_6, v_8, v_9) . Але не кожний простий ланцюг з однієї вершини в іншу є найкоротшим маршрутом, що з'єднує ці дві вершини (наприклад, простий ланцюг (v_6, v_7, v_8, v_9) довжини 3).

Висновок 2. Довільний цикл містить простий цикл. (Нехай дано цикл $Z = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, де $n \geq 3$. Нехай $v_0 = v_n = v$. Тоді маршрут $(v_1, e_1, \dots, e_n, v_n)$ не містить ребра (v_1, v_n) і $v_1 \neq v_n$, оскільки $v_0 \neq v_1$. За теоремою 8 він містить простий ланцюг, що веде з v_1 у v_n . Нехай це простий ланцюг $L = (v_1, v_{i2}, \dots, v_{ik}, v_n)$; за побудовою він не містить ребра $(v_1, v_n) = (v_0, v_1)$. Тоді маршрут $(v_0, v_1, v_{i2}, \dots, v_{ik}, v_n)$ за означенням є простим циклом й за побудовою міститься в Z).

Теорема. Якщо в графі для деяких трьох різних вершин v , u і w є ланцюги, один з яких веде з v в u , а другий - з u в w , то існує простий ланцюг, що веде з v в w .

Доказ. Нехай існують маршрути $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ та $(v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, \dots, e_{n+m}, v_{n+m})$, де $v_0 = v$, $v_n = u$, $v_{n+m} = w$. Маршрут $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, \dots, e_{n+m}, v_{n+m})$ є маршрутом, що веде з v в w , причому за умовою $v \neq w$. За теоремою 8 він містить простий ланцюг, що веде з v до w .

Взагалі ж, якщо в графі існує ланцюг, що веде з вершини v у вершину w і проходить через u , то простого ланцюга між v і w , який проходить через u , може не існувати. Також, якщо в графі є прості ланцюги, що ведуть з v в u та з u в w , то простого ланцюга, що веде з v у w й проходить через u , може не існувати (див. приклад на рис. 20).

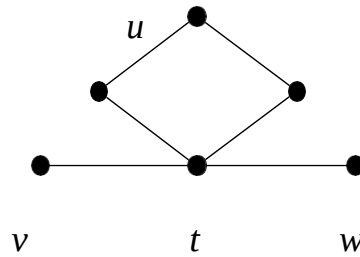


Рис. 20. Ланцюг з v у w через u не є простим

Теорема. Якщо в нетривіальному замкненому маршруті всі сусідні ребра різні, то він містить цикл.

Доказ. Нехай дано замкнений маршрут $Z = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, де $v_0 = v_n = v$, з різними сусідніми ребрами. Це означає, що для довільних двох сусідніх ребер e_i та e_{i+1} , $1 \leq i < n$, $e_i \neq e_{i+1}$, а також $e_1 \neq e_n$. Якщо всі його ребра попарно різні, то за означенням він є циклом. Інакше в ньому є принаймні два однакових ребра. Серед усіх пар однакових ребер маршруту є пара ребер $e_i = e_j$, $1 \leq i < j \leq n$, таких, що всі ребра $e_{i+1}, \dots, e_j$ попарно різні. Але сусідні ребра попарно різні, тому $e_{i+1} \neq e_j$, і маршрут $(v_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, v_{j-1})$ містить принаймні одне ребро.

Нехай $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $e_j = (v_{j-1}, v_j)$. Якщо $v_{i-1} = v_{j-1}$, то $v_i = v_j$. Тоді маршрут $(v_i, e_{i+1}, \dots, e_j, v_j)$ є нетривіальним замкненим маршрутом з попарно різними ребрами, тобто циклом. Якщо $v_{i-1} = v_j$, то $v_i = v_{j-1}$, і циклом є маршрут $(v_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, v_{j-1})$.

Зауваження. У доведенні теореми 10 ми фактично побудували розклад маршруту $Z = Z_1 \cdot Z_0 \cdot Z_2$ такий, що Z_0 є циклом, а $Z_1 \cdot Z_2$ — замкненим маршрутом.

Теорема. Довільний цикл Z , що не є простим, можна подати у вигляді $Z = Z_1 \cdot Z_0 \cdot Z_2$ так, що Z_0 є простим циклом, а $Z_1 \cdot Z_2$ - циклом.

Доказ. Нехай дано цикл $Z = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, де $v_0 = v_n = v$. Серед ланцюгів $L_i = (v_0, v_1, \dots, v_i)$, $1 \leq i \leq n-1$, виберемо ланцюг з найбільшим

індексом, скажімо, j , що є простим. Очевидно, що L_1 і L_2 є простими ланцюгами, а L_{n-1} — ні, оскільки Z не є простим. Звідси $3 \leq j \leq n-2$. L_{j+1} вже не є простим ланцюгом, тому вершина v_{j+1} входить до складу L_j , тобто $v_i = v_j$ при деякому i , $0 < i < j-1$. Оскільки ланцюг L_j простий, то цикл $Z_0 = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$ також є простим. Вилучивши його з Z , одержимо замкнений нетривіальний маршрут (цикл) $(v_0, v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$, у якому покладемо $Z_1 = (v_0, v_1, \dots, v_i)$ та $Z_2 = (v_i, v_{j+1}, \dots, v_n)$.

3.2.2 Якісні ознаки зв'язності

Розглянемо наступну теорему.

Теорема. Нехай G - це граф, який одержано після вилучення зі зв'язного графа $G = (V, E)$ деякого ребра $e \in E$. Тоді:

- а) граф G зв'язний, якщо ребро e належить циклу в графі G ;
- б) граф G незв'язний, і має тільки дві компоненти зв'язності, якщо ребро e не входить у жодний цикл у графі G .

Доказ. а) Нехай ребро e належить циклу $Z = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, де $w_n = w_1$. Без обмеження загальності можна вважати, що $e = (w_1, w_2)$. Через Z позначимо маршрут $(w_2, \dots, w_n)$. Z є циклом, тому Z не містить ребра e й є маршрутом в графі G .

Доведемо, що дві довільні різні вершини v і w графа G зв'язані. Очевидно, що вони зв'язані в G . Можливі два випадки: маршрут від v до w у G містив ребро e або не містив. Якщо не містив, то маршрут від v до w у G збігається з маршрутом у G . Якщо маршрут у G містив e , то він мав вигляд $(v, \dots, w_1, w_2, \dots, w)$ чи $(v, \dots, w_2, w_1, \dots, w)$. Замінімо в ньому ребро (w_1, w_2) маршрутом $(Z)^{-1}$ чи Z , відповідно, і одержимо маршрут у G . Отже, довільні дві вершини графа G зв'язані, тобто він зв'язний.

- б) Припустимо, що ребро $e = (v, w)$, $v \neq w$, не належить жодному циклу графа G , але при його вилученні вершини v та w зв'язані між собою в графі $G = G - e$. Тоді в графі G існує маршрут $M = (v, v_2,$

$\dots, v_n, w)$. Без обмеження загальності можна вважати, що M є простим ланцюгом, який не містить ребра e . Тоді в графі G існує маршрут $M \cdot (v, w)$, який не містить однакових ребер, а тому є циклом, і до того ж містить ребро e . Отримана суперечність доводить хибність припущення. Отже, вершини v та w незв'язані в графі G , тому G - незв'язний граф.

Доведемо, що він має рівно дві компоненти зв'язності. Розглянемо дві непорожні підмножини $V_1 = \{v\} \cup \{x \mid \text{існує маршрут з } v \text{ в } x, \text{ що не містить ребра } e\}$ та $V_2 = \{w\} \cup \{x \mid \text{існує маршрут з } w \text{ в } x, \text{ що не містить ребра } e\}$. Доведемо, що вони утворюють розбиття множини вершин графа G . Оскільки вершини v та w є незв'язними в графі G , то множини V_1 і V_2 не перетинаються.

Доведемо, що кожна вершина графа належить одній з множин V_1 або V_2 . Розглянемо довільну вершину u графа G , відмінну від v та w . Оскільки граф G є зв'язним, у ньому є маршрут $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$, де $v_0 = u, v_n = v$. Якщо він не містить e , то вершина u належить підмножині V_1 . Нехай $i, 1 \leq i \leq n$, є таким, що маршрут $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_i, v_i)$ не містить ребра e , і $e_{i+1} = e$. Тоді v_i - це v або w , тобто для вершини u існує маршрут, що не містить ребра e й веде в v або w . Звідси кожна вершина графа належить одній з множин V_1 та V_2 , тобто $V_1 \cup V_2 = V$.

В графі G кожні дві вершини з V_1 зв'язані між собою, як і кожні дві вершини з V_2 . У G вершини v та w незв'язані, тому підграфи $G(V_1)$ та $G(V_2)$ є двома компонентами зв'язності графа G , тобто $G = G(V_1) \cup G(V_2)$.

3.2.3 Точки зчленування, мости

У розв'язанні практичних задач з графами досить часто застосовуються методи типу "розділяй та володарюй", коли задача розв'язується для окремих частин графа, а потім результати об'єднуються. Розклад графа на окремі структурні частини дозволяє

зменшувати розмірність розв'язуваних підзадач і досягати ефективнішого розв'язання всієї задачі.

Найпростіший спосіб розкладу графа - у пряму суму його компонент зв'язності. Проте існують класи зв'язних графів, які можна піддавати структурній декомпозиції, тобто розкласти на компоненти зв'язності в результаті вилучення однієї вершини чи ребра. Виявлення таких вершин та ребер допомагає вивчати структуру зв'язного графа.

Точкою зчленування графа, або *розділовою вершиною* називається вершина, вилучення якої збільшує кількість компонент зв'язності; ребро з такою ж властивістю називається *мостом*. Таким чином, якщо v — точка зчленування зв'язного графа G , то граф $G-v$ незв'язний.

Нероздільним називається нетривіальний зв'язний граф, що не має точок зчленування. *Блок* графа - це його максимальний (за відношенням включення) нероздільний підграф. Нероздільний граф сам є блоком. Так, на рисунку 21 вершини v_5, v_6 є точками зчленування, а ребро (v_5, v_6) є мостом.

Теорема. Нехай v — вершина зв'язного графа $G = (V, E)$. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) v - точка зчленування графа G ;
- 2) існують вершини u і w , не рівні v , для яких v належить кожному простому ланцюгу, що з'єднує u і w ;
- 3) існує розбиття множини вершин $V-\{v\}$ на такі дві підмножини U і W , що для довільних двох вершин $u \in U$ і $w \in W$ вершина v належить кожному простому ланцюгу, який з'єднує вершини u і w .

Теорема. Нехай e - ребро графа $G = (V, E)$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

- 1) e - міст графа G ;
- 2) e не належить жодному простому циклу графа G ;
- 3) в G існують такі вершини v і u , що ребро e належить кожному простому ланцюгу, що веде з v в u ;

4) існує розбиття множини вершин $V - \{v\}$ на такі дві підмножини U і W , що для довільних двох вершин $u \in U$ і $v \in W$ ребро e належить кожному простому ланцюгу, який з'єднує вершини u і w .

Теорема. Нехай G - зв'язний граф, що має не менше ніж три вершини. Наступні твердження еквівалентні:

- 1) G - блок;
- 2) довільні дві вершини графа G належать деякому спільному простому циклу;
- 3) довільна вершина і довільне ребро графа G належать деякому спільному простому циклу;
- 4) довільні два ребра графа G належать деякому спільному простому циклу;
- 5) для довільних двох вершин і довільного ребра графа G існує простий ланцюг, що з'єднує ці вершини і містить дане ребро;
- 6) для довільних трьох різних вершин графа G існує простий ланцюг, що з'єднує дві з них і проходить через третю;
- 7) для довільних трьох різних вершин графа G існує простий ланцюг, що з'єднує дві з них і не проходить через третю.

3.2.4 Кількісні ознаки зв'язності

Теорема. В довільному графі з n вершинами, k компонентами зв'язності і кількістю ребер m задовольняються нерівності $n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$, причому ці оцінки є досяжними.

Доказ. Нижню оцінку $m \geq n - k$ доведемо індукцією за кількістю ребер у графі G . Якщо $m = 0$, то $n = k$, $n - k = 0$ і $m \geq n - k$, тобто нерівність виконується.

Припустимо, що для всіх графів з кількістю ребер $m \leq t$ ($t \geq 0$) нерівність $m \geq n - k$ виконується. Розглянемо граф G з n вершинами, k

компонентами зв'язності, у якому $t+1$ ребро. Вилучимо з графа G довільне ребро. Згідно з теоремою 12 одержимо граф G' , у якому k чи $k+1$ компонента зв'язності. За припущенням індукції, у цих випадках $t \geq n-k$ та $t \geq n-(k+1)$, звідки $t+1 \geq n-(k+1)+1 = n-k$. Отже, нерівність для графа G також виконується, і за принципом індукції твердження доведено. Нижня оцінка досягається, наприклад, на будь-якому графі, що є прямою сумою k простих ланцюгів.

Доведемо верхню оцінку $m \leq (n-k)(n-k+1)/2$. Розглянемо довільний граф G , що має n вершин, k компонент зв'язності та максимально можливу кількість ребер m . Тоді всі його зв'язні компоненти є повними графами. Нехай у графі є дві повні компоненти зв'язності, що містять t і s вершин, причому $t \geq s \geq 2$. Разом ці дві компоненти мають $(t(t-1)+s(s-1))/2$ ребер. Кількість ребер у двох повних компонентах зв'язності з $t+1$ та $s-1$ вершинами дорівнює

$$((t+1)t+(s-1)(s-2))/2 = (t(t-1)+s(s-1))/2+(t-s+1) > (t(t-1)+s(s-1))/2.$$

Звідси найбільша кількість ребер можлива в графі, який має $k-1$ ізольовану точку (тривіальну компоненту зв'язності) та одну повну $(n-k+1)$ -вершинну компоненту, кількість ребер у якій дорівнює $(n-k)(n-k+1)/2$.

Висновок 1. Якщо в графі з n вершинами кількість ребер більше ніж

$$(n-1)(n-2)/2,$$

то граф зв'язний. (Якщо граф має k компонент зв'язності та m ребер, то $m \leq (n-k)(n-k+1)/2$, звідки $(n-1)(n-2) \leq (n-k)(n-k+1)$, що можливо лише при $k = 1$, тобто граф зв'язний).

Висновок.2. Якщо $m < n-1$, то граф з n вершинами та m ребрами незв'язний. (Зв'язний граф має одну компоненту зв'язності і за теоремою 16 $m \geq n-1$, що суперечить умові. Тому граф не є зв'язним).

Висновок 3. Якщо граф з n вершинами незв'язний, то кількість його ребер не більше, ніж $(n-1)(n-2)/2$.

3.2.5 Відстань між вершинами. Екстремальні маршрути

Довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w зв'язного графа, називається *відстанню* між вершинами v і w та позначається $d(v, w)$.

Задача пошуку найкоротшого маршруту або відстані між двома вершинами графа виникає дуже часто, коли граф виступає моделлю, наприклад, якоїсь транспортної системи.

Теорема. У довільному зв'язному графі $G = (V, E)$ функція відстані $d(v, w)$ задовольняє трьом аксіомам метрики, тобто за будь-яких вершин $v, w, u \in V$ виконується:

1) $d(v, w) \geq 0$; $d(v, w) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $v = w$; 2) $d(v, w) = d(w, v)$;

3) $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$.

Доказ. 1. Відстань між вершинами невід'ємна за означенням та дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли між ними існує нуль-маршрут, тобто вони збігаються.

2. Якщо відстань досягається на простому ланцюзі L , що веде з v в w , то L^{-1} буде простим ланцюгом тієї ж самої довжини, що веде з w в v .

3. Якщо $v = w$, то $d(v, u) + d(u, w) \geq 0 = d(v, w)$. Якщо $v \neq w$, і простий ланцюг L_1 довжини $d(v, u)$ веде з v в u , а простий ланцюг L_2 довжини $d(u, w)$ - з u в w , то маршрут $L_1 \cdot L_2$ довжини $d(v, u) + d(u, w)$ веде з v в w . За теоремою 8 він містить простий ланцюг, що з'єднує v та w і має довжину, не більшу ніж довжина $L_1 \cdot L_2$. Звідси за означенням відстані $d(v, u) + d(u, w) \geq d(v, w)$.

Розглянемо делілька додаткових означень для зв'язного графа: ексцентриситет, радіус, діаметр, центр

Ексцентриситетом вершини $v \in V$ зв'язного графа $G = (V, E)$ називається величина $e(v) = \max\{d(v, w) \mid w \in V\}$, тобто найбільша з

відстаней між v та іншими вершинами графа.

Діаметром зв'язного графа G називається найбільший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $D(G)$. Жодна відстань в графі не перевищує його діаметр.

Радіусом зв'язного графа G називається найменший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $R(G)$.

Якщо $e(v) = R(G)$, то вершина v називається *центральною*. *Центром* графа називається множина всіх його центральних вершин.

За означенням $D(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\} = \max\{d(v, w) \mid v, w \in V\}$ і $R(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$.

У графі, наведеному на рисунку 18, $e(v_1) = e(v_2) = e(v_3) = e(v_4) = e(v_9) = 4$, $e(v_5) = e(v_7) = e(v_8) = 3$, $e(v_6) = 2$, відповідно діаметр дорівнює 4, радіус — 2, а центр складається з єдиної вершини v_6 .

На рисунку 21 наведено приклади графів, центр яких складається: а) з однієї вершини;

б) з двох вершин;

в) з трьох вершин і не збігається з множиною всіх вершин. Центри обведено пунктирною лінією.

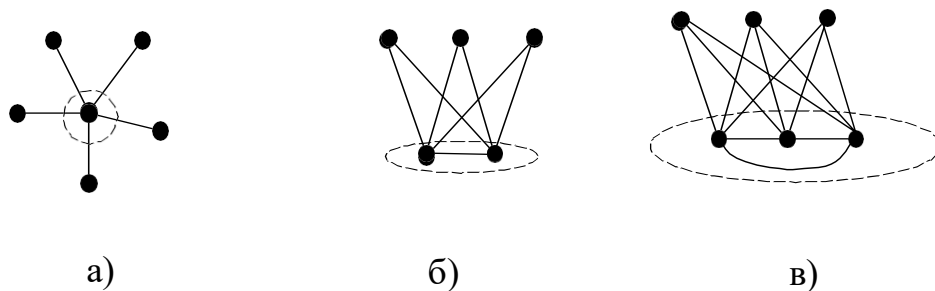


Рис. 21. Приклади центрів

Теорема. Діаметр графа дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли граф повний.

Доказ. Необхідна умова. Якщо діаметр графа дорівнює 1, то відстань між довільними двома різними вершинами не перевищує 1, тобто вони суміжні, і граф повний.

Достатня умова. Якщо граф повний, то ексцентриситети всіх вершин дорівнюють 1. Тоді й діаметр дорівнює 1.

У повному графі ексцентриситети всіх вершин рівні, тому його центр збігається з множиною всіх вершин. Крім того, $D(K_n) = R(K_n)$ у довільному повному графі K_n . У зірковому графі $K_{1,n}$ при $n \geq 2$ маємо $D(K_{1,n}) = 2$, $R(K_{1,n}) = 1$, тобто $D(K_{1,n}) = 2R(K_{1,n})$.

Теорема. Для довільного зв'язного графа G виконується $R(G) \leq D(G) \leq 2R(G)$.

Доказ. Перша нерівність випливає з означень радіуса та діаметра:

$$R(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\} \leq \max\{e(v) \mid v \in V\} = D(G).$$

Доведемо другу нерівність. Нехай z — центральна вершина.

Візьмемо дві довільні вершини v і w . За теоремою 17 $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w) = 2R(G)$. Тоді $D(G) = \max\{d(v, w) \mid v, w \in V\} \leq 2R(G)$.

Ейлерові графи. Цикл, що містить усі ребра графа, називається *ейлеровим*. Граф називається *ейлеровим*, якщо в ньому є ейлерів цикл. *Ейлеровим ланцюгом* називається ланцюг, що проходить через усі ребра графа.

Наприклад, у графі K_5 з множиною вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ існує ейлерів цикл

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1$.

Ейлерові цикли виникають у практичних задачах, пов'язаних з обходом усіх ребер графа по одному разу. Наприклад, є система шляхів, які треба ремонтувати. Ремонтна бригада має проїхати через усі ці шляхи, починаючи від своєї бази. Бригада має спеціальну техніку, яка рухається дуже повільно, тому бажано двічі тим самим шляхом не проїжджати. Виходить, що найкращим маршрутом бригади буде саме ейлерів цикл, який починається й закінчується в її базі.

Теорема. Для зв'язного нетривіального графа G наступні

твердження еквівалентні:

- (1) G - ейлерів граф (існує цикл, що містить усі ребра графа по одному разу);
- (2) кожна вершина графа має парний степінь;
- (3) множину ребер графа можна розбити на прості цикли, які не перетинаються по ребрах.

Доказ. Необхідна умова. Нехай у графі G існує ейлерів цикл. Спочатку вилучимо всі ребра, а далі додаватимемо їх по одному у порядку проходження циклу. Якщо в цьому циклі ми приходимо до вершини, то ми повинні вийти з неї (з початкової вершини циклу ми виходимо, а в кінці приходимо до неї). Тому кожне проходження вершини додає 2 до її степеня. Коли додано всі ребра, одержано граф G , кожна вершина якого має парний степінь.

Достатня умова. Кожна вершина графа має парний степінь і граф зв'язний (ізолюваних вершин немає), тому степінь кожної вершини не менше 2. Тоді у графі можна знайти простий цикл. Вилучимо ребра цього циклу. Степінь кожної вершини або зменшується на 2, або не зменшується, і в обох випадках залишається парним. Якщо в графі залишаються ребра, продовжуємо процедуру вилучення простих циклів доти, поки існує хоча б одна нетривіальна зв'язна компонента. З описаної процедури очевидно, що граф є сумою вилучених простих циклів, причому ці прості цикли не мають спільних ребер.

Нехай M_1 - один з простих циклів розбиття. З нього почнемо будувати ейлерів цикл. Нехай на деякому кроці побудовано цикл M_k і залишаються прості цикли розбиття, що не увійшли до складу M_k . За зв'язністю графа існує простий цикл Z , який має спільну вершину v з M_k . Зауважимо, що цю спільну вершину можна без обмеження загальності вважати початковою вершиною обох маршрутів, тобто $M_k = (v) \cdot M'_k \cdot (v)$ і $Z = (v) \cdot Z' \cdot (v)$. Побудуємо маршрут $M_{k+1} =$

$(v) \cdot M_k' \cdot (v) \cdot Z' \cdot (v)$. Він є циклом, який об'єднує M_k з обраним простим циклом Z . Оскільки граф скінченний, продовження цього процесу на деякому кроці вичерпає всі прості цикли, і побудований цикл міститиме всі ребра графа, тобто граф є ейлеровим.

Зауважимо, що ця теорема справджується і для мультиграфів.

Висновок . Нетривіальний зв'язний граф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має тільки дві вершини з непарними степенями.

Доказ. Необхідна умова. Нехай вершини $v, w, v \neq w$, є кінцями ейлерового ланцюга. Додамо до графа нову вершину u та ребра $(v, u), (w, u)$; при цьому зміняться степені лише вершин v та w (збільшаться на 1). В новому графі ці два ребра разом з ейлеровим ланцюгом утворюють ейлерів цикл, і за теоремою 20 усі вершини мають парний степінь. Кінці ейлерового ланцюга у початковому графі мали степені на 1 менше, ніж у новому, тому ці степені були непарними.

Достатня умова. Якщо граф має рівно дві вершини непарного степеня $v, w, v \neq w$, то додамо до графа нову вершину u та ребра $(v, u), (w, u)$. В отриманому графі всі вершини первинного графа будуть мати парний степінь, додана вершина буде мати степінь 2 - також парний, звідки граф буде ейлеровим, тоді в ньому існує ейлеров цикл. Цей цикл проходить через вершину u рівно один раз, без обмеження загальності можна вважати, що вона є початком та кінцем ейлерового циклу. Тепер вилучимо з графа цю вершину та суміжні з нею ребра. При цьому з ейлерового циклу ми отримаємо ейлеров ланцюг.

Представимо спосіб побудови ейлерового циклу в ейлеревім графі з використанням алгоритму Фльорі.

Алгоритм Фльорі. Починаючи з довільної вершини u , присвоїмо довільному ребру (u, v) номер 1. Потім викреслимо ребро (u, v) та перейдемо до вершини v . Нехай на попередньому кроці ми перейшли до вершини w і присвоїли ребру номер k . На черговому кроці вибираємо довільне ребро,

інцидентне w , причому ребро, що не входить до складу жодного циклу в графі, який залишився, обираємо тільки тоді, коли інших немає; присвоюємо обраному ребру номер $k+1$ та викреслюємо його.

Теорема. Алгоритм Фльорі є коректним.

Доказ. Коректність алгоритму Фльорі полягає в тім, що для ейлерового графа алгоритм приводить до побудови ейлерового циклу.

Нехай граф $G = (V, E)$ є ейлеровим. За теоремою 22 степені всіх його вершин парні, тому алгоритм може закінчити роботу тільки в тій вершині, з якої починав працювати. Тоді він буде деякий цикл C з множиною ребер E_C , і треба лише довести, що $E_C = E$. Припустимо, що це не так: нехай G' - нетривіальна зв'язна компонента графа $G - E_C$. Аналогічно доведенню теореми 20 можна показати, що степені всіх вершин в графі $G - E_C$ парні, оскільки з G вилучено ребра циклу, а тоді множину ребер кожної зв'язної компоненти графа $G - E_C$ можна розбити на прості цикли. Розглянемо множину A ребер циклу C , які були викреслені алгоритмом, коли поточна вершина належала графу G' . Очевидно, що $A \neq \emptyset$ (інакше початковий граф незв'язний). Нехай $a \in A$ - ребро, що одержало найбільший номер в процесі роботи алгоритму (викреслене останнім). Тоді ребро a у момент викреслювання не входило до складу жодного циклу в графі, але кожна вершина графа G входить до складу деякого простого циклу. А це суперечить правилу вибору наступного ребра. Отже, припущення про існування нетривіальної зв'язної компоненти G' є хибним, тому $E_C = E$.

Гамільтонові графи. Ейлерові цикли характеризуються властивістю проходити по одному разу через кожне ребро графа, а гамільтонові цикли - через кожну вершину. Гамільтоновим називається простий цикл, який проходить через кожну вершину графа. Граф, у якому є гамільтонів цикл, називається *гамільтоновим*. Простий ланцюг, що проходить через кожну вершину графа, називається *гамільтоновим*.

Уперше задача пошуку простого циклу, що містить усі вершини графа, з'явилася у вигляді головоломки, яку в 1859 році запропонував сер Вільям Гамільтон. Суть її полягала в побудові маршруту, який проходив би по одному разу через кожне з 20 міст та повертався у початкову вершину маршруту.

Задачу про гамільтонові цикли можна інтерпретувати наступним чином. Серед лицарів деякі є друзями. Як їх можна розсадити за круглим столом, щоб по обидва боки кожного з присутніх сиділи його друзі?

До задач про гамільтонові цикли відносять і задачу про комівояжера. Він має відвідати кілька міст, відстані між якими відомі. Необхідно знайти найкоротший маршрут, що проходить через усі міста й повертається в початкове. Ця задача має низку застосувань у дослідженні операцій, наприклад, у зв'язку з ефективним використанням обладнання. Приклади гамільтонових графів наведено на рисунку 22.



Рис. 22. Приклади гамільтонових графів

Очевидно, що в довільному повному графі $K_n = (V, V^{(2)})$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $n \geq 3$, існує гамільтонів цикл $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Для двочасткового графа $K_{n,n}$ з частками $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V_2 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n}\}$, $n \geq 2$, також існує гамільтонів цикл $(v_1, v_{n+1}, v_2, v_{n+2}, \dots, v_{n-1}, v_{2n-1}, v_n, v_{2n}, v_1)$.

Незважаючи на схожість означень ейлерових і гамільтонових циклів, вони мають цілком різні властивості. Зокрема, існують гамільтонові графи, що не є ейлеровими, і навпаки. Їх відмінність виявляється також у тім, що задача побудови ейлерового циклу розв'язується дуже просто (див.

алгоритм Флорі), а задача побудови гамільтонова циклу (як і задача комівояжера) належить до так званих важкорозв'язуваних задач.

Відмітимо також, що в гамільтоновому графі всі вершини зв'язані між собою гамільтоновим циклом. Крім того, цей цикл проходить через кожну вершину, тому степені всіх вершин гамільтонового графа не менше 2.

3.2.6 Властивості максимальних простих ланцюгів

У даному розділі розглядаються достатні умови гамільтоновості графа. Вони пов'язані з поняттям простого ланцюга максимальної довжини. Окрім цього поняття, розглянемо також поняття повного ланцюга та ланцюга, що має тип циклу, потрібні у подальшому.

Простий ланцюг називається *повним*, якщо його не можна продовжити, додаючи ребра до якого-небудь з його кінців і отримуючи при цьому простий ланцюг.

Безпосередньо з означення випливає наступне твердження.

Теорема. Кінці повного простого ланцюга не мають суміжних вершин серед вершин, що не входять до складу цього ланцюга.

Висновок. Степені кінців повного простого ланцюга довжини k не більше k . Простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ у графі $G = (V, E)$ має тип циклу, якщо підграф $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ має гамільтонів цикл. У цьому випадку L є гамільтоновим ланцюгом у графі G_0 .

Теорема. Повний простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ довжини k ($k \geq 2$) має тип циклу в графі $G = (V, E)$, якщо $\delta(v_0) + \delta(v_k) \geq k+1$.

Доказ. Якщо v_0 і v_k суміжні, то в графі $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ існує гамільтонів цикл $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_0)$. Нехай вершини v_0 і v_k несуміжні. Доведемо, що в G_0 є інший гамільтонів цикл, довівши спочатку, що існує вершина v_i , для якої $(v_0, v_i) \in E$ і $(v_k, v_{i-1}) \in E$.

Завдання до розділу 3.2

1. Довести: якщо два різних цикли графа містять ребро e , то в графі є цикл, серед ребер якого немає e . Довести, що в графі, степені всіх вершин якого більші 1, є цикл.

.....

2. Довести, що будь-який замкнений маршрут непарної довжини містить простий цикл. Чи справджується аналогічне твердження для замкнених маршрутів парної довжини?

.....

3. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного циклу непарної довжини. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного замкненого маршруту непарної довжини.

.....

4. Довести, що в зв'язному графі будь-які два простих ланцюги максимальної довжини мають принаймні одну спільну вершину. Чи завжди вони мають спільне ребро?

.....

5. Довести, що граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

.....

6. Довести, що граф $G = (V, E)$ є зв'язним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого розбиття множини вершин V на дві підмножини V_1 і V_2 існує таке ребро $(v, w) \in E$, що вершина v належить одній з підмножин розбиття, а вершина w - іншій.

.....

7. Нехай $G = (V, E)$ - неповний зв'язний граф. Довести, що в G існують три такі вершини u, v та w , що $(u, v) \in E$ і $(v, w) \in E$, проте $(u, w) \notin E$.

.....

8. Довести: якщо в графі G тільки дві вершини v і w мають непарні степені, то ці вершини зв'язані в графі G .

.....

9. Нехай у графі з n вершинами степінь кожної вершини не менше $(n-1)/2$. Довести, що граф зв'язний. Чи можна в цьому твердженні замінити $(n-1)/2$ на $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$?

.....

10. Довести, що при будь-якому $n \geq 2$ існує незв'язний граф, який має n вершин і $(n-1)(n-2)/2$ ребер. Довести, що зв'язний граф із n вершинами містить не менше ніж $n-1$ ребро.

.....

11. Визначити для зв'язного двочасткового графа з n вершинами найменшу та найбільшу можливу кількість ребер.

.....

12. Довести, що граф G з n вершинами не є двочастковим, якщо кількість його ребер більша від $n^2/4$.

.....

13. Довести, що вершина u належить найкоротшому простому ланцюгу між вершинами v і w тоді й тільки тоді, коли $d(v, w) = d(v, u) + d(u, w)$.

.....

14. Чому дорівнюють діаметр і радіус повного двочасткового графа $K_{n,m}$? Скільки центральних вершин має повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

.....

15. Довести, що для будь-якого графа або він сам, або його доповнення є зв'язним графом.

.....

16. Які з повних графів K_n є ейлеровими? Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є ейлеровим?

.....

17. Довести, що кожна неізолювана вершина ейлерового графа належить деякому простому циклу цього графа. Чи існує в графі K_5 цикл довжини 9?

.....

18. Довести, що множину ребер зв'язного графа, який має $2k$ вершин ($k \geq 1$) із непарними степенями, можна розбити на k ланцюгів.

.....

19. Довести, що у довільному зв'язному графі існує замкнений маршрут, що починається з будь-якої вершини і містить усі ребра графа, причому кожне з них двічі.

.....

20. Довести, що якщо в графі існує замкнений маршрут, який містить кожне ребро графа непарну кількість разів, то степені вершин графа парні.

.....

21. Дано підмножину кісток доміно, серед яких відсутні дублі. Указати умови, за яких з цих кісток можна скласти єдиний неперервний ланцюжок за правилами гри в доміно. Чи відрізняється відповідь, якщо кістки можуть повторюватися?

.....

22. Довести, що граф $K_{n,m}$ не є гамільтоновим, якщо $n \neq m$. Довести, що граф, має дві несуміжні вершини степеня 3, а всі інші вершини степеня не більше 2, не має гамільтонового циклу.

.....

23. Довести, що у зв'язному негамільтоновому графі G , степені всіх вершин якого не менше k ($k \geq 2$), існує простий ланцюг довжини не менше $2k$.

.....

24. Довести, що коли в графі G степені всіх вершин не менше k і $k \geq 2$, тоді в G є простий цикл довжини не менше $k+1$.

3.3 Транзитивні замикання

3.3.1 Пряме транзитивне замикання

Прямим транзитивним замиканням деякої вершини $x_i - T^+(x_i)$ є об'єднання самої вершини x_i з прямими відображеннями 1-го порядку, другого порядку і т.д., тобто

$$T^+(x_i) = x_i \cup \Gamma^+(x_i) \cup \Gamma^{+2}(x_i) \cup \dots$$

При цьому багатозначні відображення знаходяться до тих пір, поки в них додаються нові вершини. Так для графа на рисунку 23 одержимо:

$$\Gamma^+(x_1) = \{x_2, x_3\}$$

$$\Gamma^{+2}(x_1) = \{x_3, x_5\}$$

$$\Gamma^{+3}(x_1) = \{x_3, x_1\}$$

$$\Gamma^{+4}(x_1) = \{x_2, x_3\}$$

Відображення четвертого порядку містить ті ж елементи, що й відображення 1-го порядку, отже інших елементів у наступних відображеннях не з'явиться. Транзитивне замикання для вершини x_1 отримують у такий спосіб:

$$T^+(x_1) = x_1 \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_3, x_5\} \cup \{x_3, x_1\} = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$$

Проаналізувавши множину вершин, що входять в $T^+(x_i)$, можна зробити висновок: пряме транзитивне замикання містить вершини, в які є шляхи з вершини x_i . Таким чином, можна дати друге визначення $T^+(x_i)$.

Пряме транзитивне замикання деякої вершини $x_i - T^+(x_i)$ - це множина вершин, досяжних з вершини x_i , тобто $T^+(x_i) = \{x_j \mid \exists \text{ шлях з } x_i \text{ до } x_j\}$.

3.3.2 Зворотне транзитивне замикання

Зворотним транзитивним замиканням деякої вершини $x_i - T^-(x_i)$ є об'єднання цієї вершини із зворотними відображеннями 1-го, 2-го n -го порядку, тобто $T^-(x_i) = x_i \cup \Gamma^-(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots$

Інакше, зворотне транзитивне замикання для деякої вершини x_i - $T^-(x_i) = \{x_j \mid \exists \text{ шлях з } x_j \text{ до } x_i\}$

Розглянемо побудову зворотного транзитивного замикання для графа на рисунку 23:

$$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_5\}$$

$$\Gamma^{-2}(x_1) = \{x_2, x_4\}$$

$$\Gamma^{-3}(x_1) = \{x_1\}$$

$$\Gamma^{-4}(x_1) = \{x_5\}$$

$$T^-(x_1) = x_1 \cup \{x_5\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_1\} \cup \{x_5\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$$

Алгоритм побудови транзитивних замикань наведено в додатку 2.

Завдання до розділу 3.3 (з відповідями)

- Знайти пряме та зворотне транзитивні замикання для вершин x_1 та x_3 на рисунку.

Відповідь матиме вигляд:

$$T^+(x_1) = x_1 \cup \Gamma^{+1}(x_1) \cup \Gamma^{+2}(x_1) \cup \dots = \{ \dots \},$$

$$T^-(x_1) = x_1 \cup \Gamma^{-1}(x_1) \cup \Gamma^{-2}(x_1) \cup \dots = \{ \dots \},$$

$$T^+(x_3) = x_3 \cup \Gamma^{+1}(x_3) \cup \Gamma^{+2}(x_3) \cup \dots = \{ \dots \},$$

$$T^-(x_3) = x_3 \cup \Gamma^{-1}(x_3) \cup \Gamma^{-2}(x_3) \cup \dots = \{ \dots \}.$$

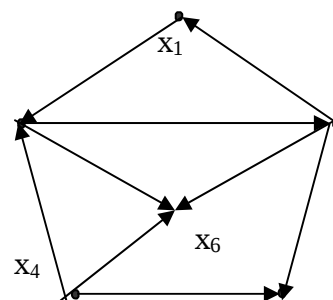
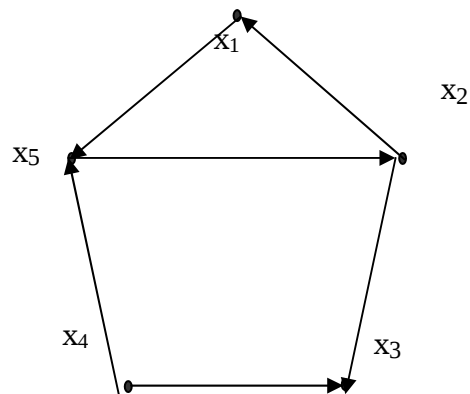
.....

- За матрицею сусідності графа знайти прямі та зворотні транзитивні замикання всіх вершин на рисунку.

Відповідь матиме вигляд:

$$T^+(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\},$$

$$T^-(x_2) = \{ \dots \},$$



$$T^+(x_3) = \{ \dots \},$$

$$T^+(x_4) = \{ \dots \},$$

x3

$$T^+(x_5) = \{ \dots \},$$

$$T^+(x_6) = \{ \dots \},$$

Матриця суміжності

X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆		T ⁺ (x ₁)	T ⁺ (x ₂)	T ⁺ (x ₃)	T ⁺ (x ₄)	T ⁺ (x ₅)	T ⁺ (x ₆)
0	0	0	0	1	0	X	0					
1	0	1	0	0	1	1	2					
0	0	0	0	0	0	X	3					
0		1	0	1	1	2						
	0					X						
0	1	0	0	0	1	3	1					
0	0	0	0	0	0							

0	1		3	2		T ⁺ (x ₁) = { x ₁ , x ₂ , x ₄ , x ₅ }
						T ⁺ (x ₂) = { }
						T ⁺ (x ₃) = { }
						T ⁺ (x ₄) = { }
						T ⁺ (x ₅) = { }
						T ⁺ (x ₆) = { }

3.3 Досяжність і контрдосяжність

Задач, в яких використовується поняття досяжності досить багато. Розглянемо одну з них. Граф може бути моделлю якийсь організації, в якій люди представлені вершинами, а дуги інтерпритують канали зв'язку. При розгляді такої моделі можна поставити питання, чи може інформація від однієї особи x_i бути передана іншій особі x_j , тобто чи існує шлях, що йде від вершини x_i до вершини x_j . Якщо такий шлях існує, то говорять, що вершина x_j досяжна з вершини x_i . Можна цікавитися досяжністю вершини x_j з вершини x_i лише на таких шляхах, довжини яких не перевищують заданої величини або довжина яких менше найбільшого числа вершин у графі, й тому подібні завдання.

Досяжність у графі описується матрицею досяжностей $R = [r_{ij}]$. При цьому $i, j = 1, 2, \dots, n$, де n - число вершин графа, а кожен елемент визначається наступним чином: $r_{ij} = 1$, якщо вершина x_j є досяжною з x_i , і $r_{ij} = 0$, в іншому випадку.

Множина вершин $R(x_i)$ графа G , досяжних з заданої вершини x_i , складається з таких елементів x_j , для яких (i, j) -й елемент у матриці досяжностей дорівнює 1. Очевидно, що всі діагональні елементи в матриці R дорівнюють 1, оскільки кожна вершина є досяжною себе самої шляхом довжини 0. Оскільки пряме відображення 1-го порядку $\Gamma^+(x_i)$ є множиною таких вершин x_j , які досяжні з x_i з використанням шляхів довжини 1, то множина $\Gamma^+(\Gamma^+(x_i)) = \Gamma^{+2}(x_i)$ складається з вершин, що можна досягти з вершини x_i із використанням шляхів довжини 2. Аналогічно $\Gamma^{+p}(x_i)$ є множиною вершин, які досяжні з x_i за допомогою шляхів довжини p .

Тому що будь-яка вершина графа, яка досяжна з x_i , має бути досяжною з використанням шляху (або шляхів) довжини 0, або 1, або 2, ..., або p , то множину вершин, досяжних для вершини x_i , можна надати у вигляді:

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^+(x_i) \cup \Gamma^{+2}(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^{+p}(x_i).$$

Як бачимо, множина досяжних вершин $R(x_i)$ є прямим транзитивним замиканням вершини x_i , тобто $R(x_i) = T^+(x_i)$. Отже, для побудови матриці досяжності знаходимо досяжні множини $R(x_i)$ для всіх вершин $x_i \in X$. Уважаємо, що $r_{ij} = 1$, якщо $x_j \in R(x_i)$ і $r_{ij} = 0$ в іншому випадку.

Для графа, наведеного на рисунку 24, а множини досяжності знаходяться наступним чином:

$$\begin{aligned} R(x_1) &= \{x_1\} \cup \{x_2, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}, \\ R(x_2) &= \{x_2\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \{x_2, x_4, x_5\}, \\ R(x_3) &= \{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_3, x_4, x_5\}, R(x_4) = \{x_4\} \cup \\ &\{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_4, x_5\}, \\ R(x_5) &= \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_5\}, \\ R(x_6) &= \{x_6\} \cup \{x_3, x_7\} \cup \{x_4, x_6\} \cup \{x_3, x_5, x_7\} \cup \{x_4, x_5, x_6\} = \\ &= \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\} \\ R(x_7) &= \{x_7\} \cup \{x_4, x_6\} \cup \{x_3, x_5, x_7\} \cup \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}. \end{aligned}$$

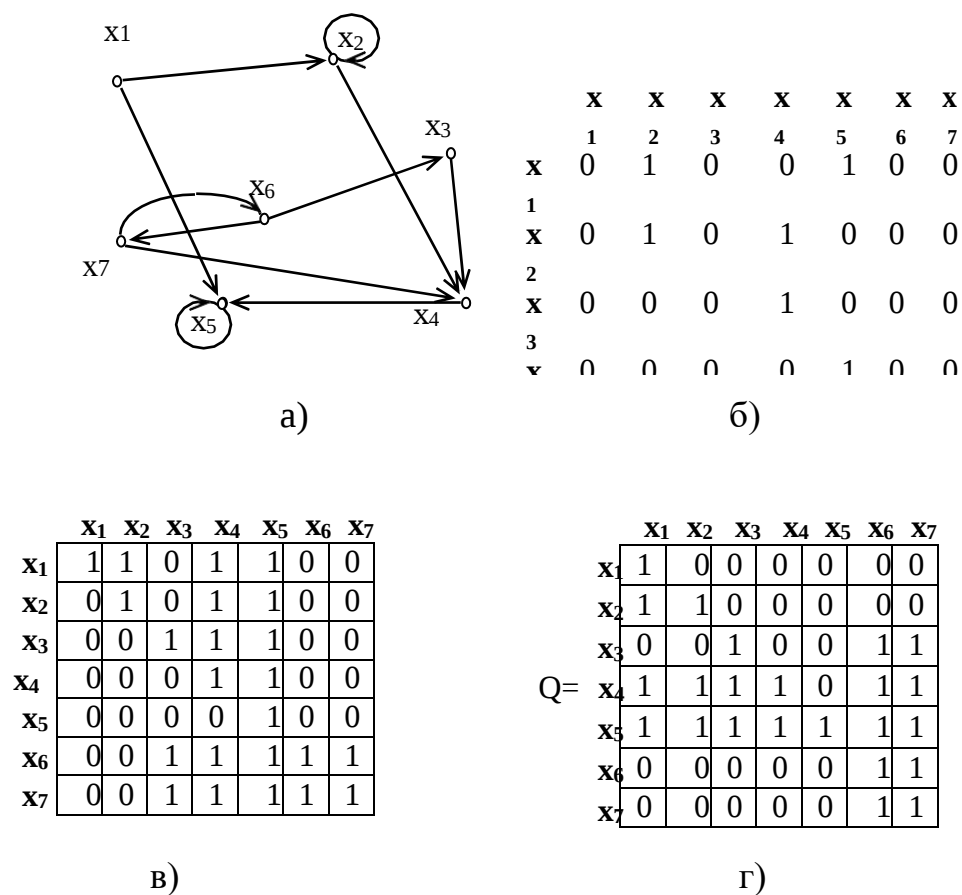


Рис. 24. а) граф; б) матриця суміжності;
в) матриця досяжності R; г) матриця контрдосяжності Q

Матриця досяжності R має вид, як показано на рисунку 24, в. Матрицю досяжності можна побудувати за матрицею суміжності (рис. 24, б), формуючи множини $T^+(x_i)$ за методом, описаним у розділі 2.2.3, для кожної вершини x_i .

Матриця контрдосяжностей $Q = [q_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, де n - число вершин графа, визначається наступним чином: $q_{ij} = 1$, якщо з вершини x_j можна досягти вершину x_i . У іншому випадку $q_{ij} = 0$,

Контрдосяжною множиною $Q(x_i)$ є множина таких вершин, що з будь-якої вершини цієї множини можна досягти вершину x_i . Аналогічно до побудови досяжної множини $R(x_i)$, для $Q(x_i)$ можна записати вираз:

$$Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^{-p}(x_i).$$

Таким чином видно, що $Q(x_i)$ є не що інше, як зворотне транзитивне замикання вершини x_i , тобто $Q(x_i) = T^-(x_i)$. З визначень очевидно, що стовпець x_i матриці Q (в якому $q_{ij} = 1$, якщо $x_j \in Q(x_i)$, в іншому випадку $q_{ij} = 0$) збігається з рядком x_i матриці R , тобто $Q = R^T$, де R^T - матриця, що є транспонованою матрицею досяжності R .

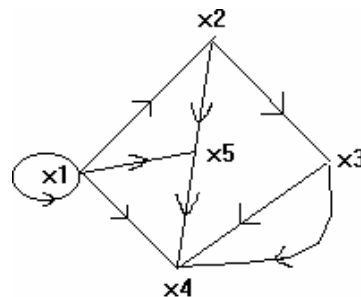
Матрицю контрдосяжностей показано на рисунку 24, г.

Слід зазначити, що оскільки всі елементи матриць R і Q дорівнюють 1 або 0, то кожен рядок можна зберігати в двійковій формі, економлячи витрати пам'яті ЕОМ. Матриці R і Q є зручними для обробки на ЕОМ, так як з обчислювальної точки зору основними операціями є швидкодіючі логічні операції.

Алгоритми побудови матриць досяжності й контрдосяжності наведені в додатку 3.

Завдання до розділу 3.3 (з відповідями)

1. Для графа на рисунку побудувати матрицу досяжності R и контрдосяжності Q .



Відповідь:

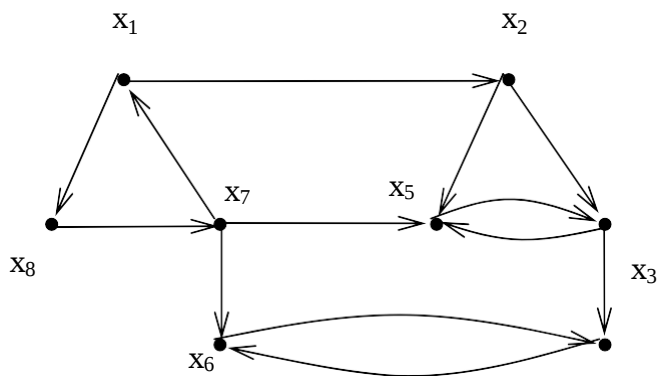
Матриця досяжності

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$R=$	x_1					
	x_2					
	x_3					
	x_4					
	x_5					

Матриця контрдосяжності

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$Q=$	x_1					
	x_2					
	x_3					
	x_4					
	x_5					

2. Для графа, наведеного на
 рисунку, знайти матриці
 досяжності й
 контрдосяжності.



Відповідь:

Матриця суміжності

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1	0	1	0	0	0	0	0	1
X2	0	0	1	0	1	0	0	0
X3	0	0	0	1	1	0	0	0
X4	0	0	0	0	0	1	0	0
X5	0	0	1	0	0	0	0	0
X6	0	0	0	1	0	0	0	0
X7	1	0	0	0	1	1	0	0
X8	0	0	0	0	0	0	1	0

Матриця досяжності R

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1								
X2								
X3								
X4								
X5								
X6								
X7								
X8								

Матриця контрдосяжності Q

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1								
X2								
X3								
X4								
X5								
X6								
X7								
X8								

3.4 Ізоморфізм і самодоповнювальність графів

Буквальним перекладом слова “ізоморфізм” є “однаковість форми”. Форма графа — це його структура. Таким чином, ізоморфізм графів означає однаковість їх структури. Зробимо необхідні уточнення.

Два графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються *ізоморфними* (це позначається $G_1 \cong G_2$), якщо між множинами їх вершин існує взаємно однозначне відображення $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$, яке зберігає суміжність, тобто для довільних вершин v і w $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$. При цьому φ називається *ізоморфним відображенням* або *ізоморфізмом* графа G_1 на граф G_2 . На рисунку 25 наведені пари ізоморфних (рис. 25, а) і неізоморфних (рис. 25, б) графів. Пари неізоморфних графів тако наведені на рисунку 26.

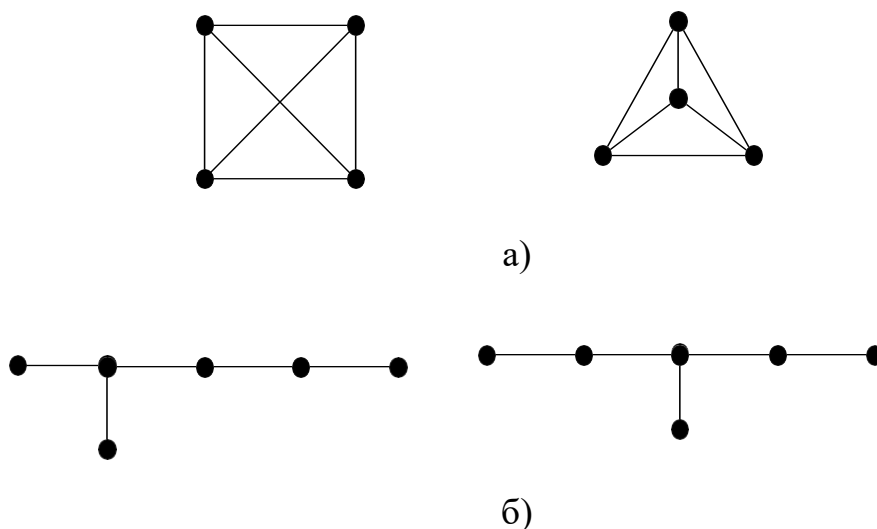


Рис. 25. Пари графів:

а) ізоморфні графи; б) неізоморфні графи

Про ізоморфні графи кажуть, що вони рівні з точністю до ізоморфізму. Ізоморфізм графа на себе називається *автоморфізмом*. Очевидно, що тотожне відображення множини вершин графа є автоморфізмом (цей автоморфізм називається *тривіальним*). Неважко також переконатися, що якщо φ є ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2 , то

відображення φ^{-1} є ізоморфізмом G_2 на G_1 . Крім того, якщо φ ізоморфізм графа G_1 на граф G_2 і ізоморфізм γ графа G_2 на G_3 , то їх композиція $\varphi \circ \gamma$ буде ізоморфізмом G_1 на G_3 . Доведемо наступну теорему.

Теорема. Якщо φ - ізоморфізм графа G_1 на G_2 , то вершини v у графі G_1 і $\varphi(v)$ у G_2 мають однакові степені.

Доказ. Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ і $v \in V_1$. Якщо v не має суміжних вершин, то і $\varphi(v)$ не може мати таких, тобто $\delta(v) = \delta(\varphi(v)) = 0$. Якщо v має суміжні вершини, то, за означенням ізоморфізму, для будь-якої вершини w маємо: $w \in O(v)$ тоді й тільки тоді, коли $\varphi(w) \in O(\varphi(v))$. Отже, $|O(v)| = |O(\varphi(v))|$, тобто $\delta(v) = \delta(\varphi(v))$.

Інваріанти ізоморфних графів. Під інваріантом графа G розуміють числовий параметр, пов'язаний з G , значення якого однакові для всіх графів, ізоморфних G . Деякі найпростіші інваріанти представлено в наступних теоремах.

Теорема. Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин.

Доказ. Це випливає з існування взаємно однозначної відповідності між множинами вершин.

Ізоморфізм φ можна продовжити на множину ребер наступним чином: покладемо $\varphi'((v, w)) = (\varphi(v), \varphi(w))$. З властивостей φ випливає, що відображення $\varphi' : E_1 \rightarrow E_2$ є взаємно однозначним. Звідси маємо наступні теореми.

Теорема. Ізоморфні графи мають однакову кількість ребер.

Теорема. Ізоморфні графи для довільного k ($k \geq 0$) мають однакову кількість вершин степеня k .

Доказ. Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ - ізоморфізм графа G_1 на граф G_2 , $v \in V_1$ і $\delta(v) = k$. За попередньою теоремою $\delta(\varphi(v)) = k$, тому ізоморфізм взаємно однозначно відображає множину вершин степеня k графа G_1 на множину вершин степеня k графа G_2 . Тоді ізоморфні графи G_1 і G_2 мають однакову кількість вершин степеня k .

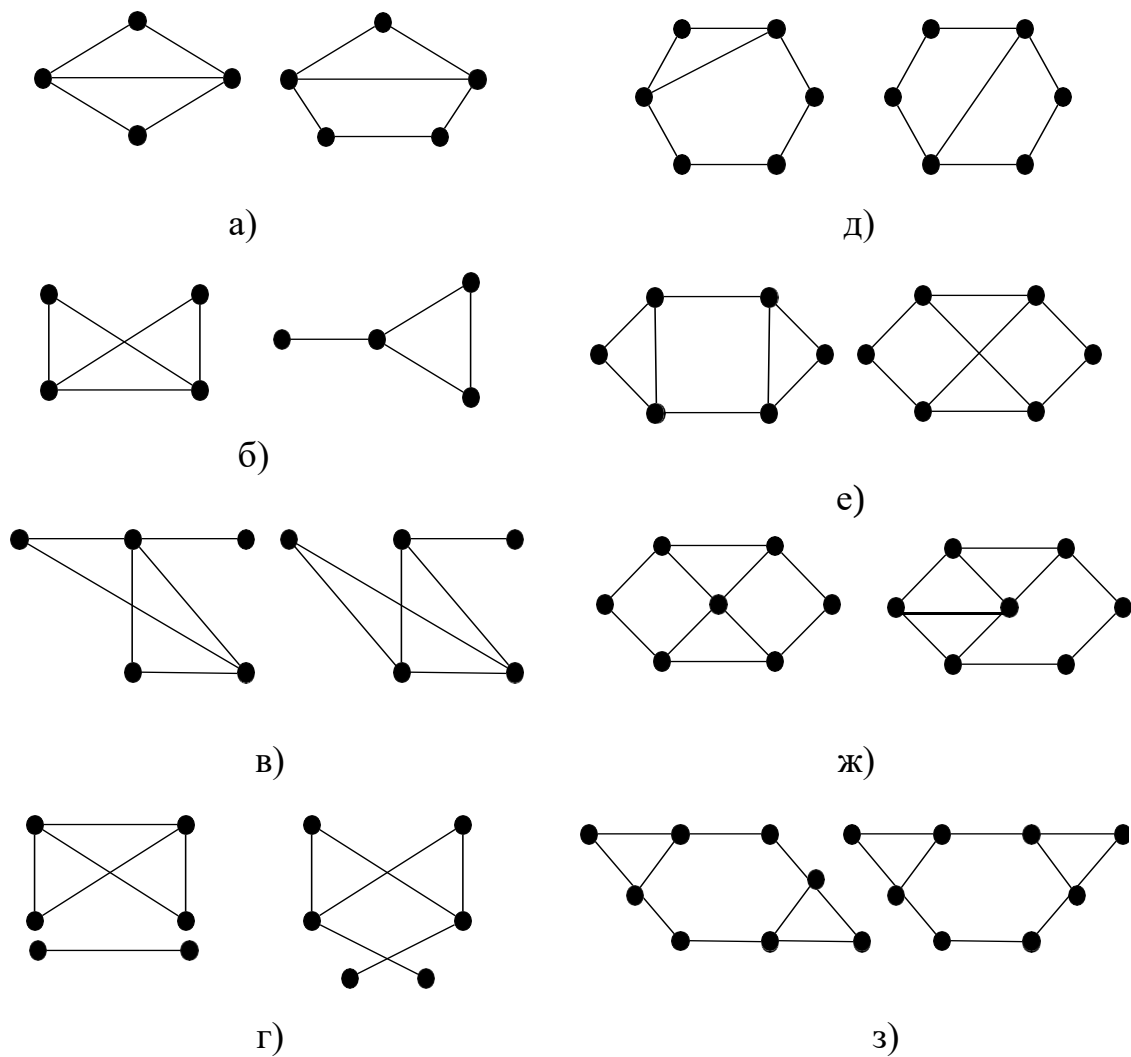


Рис. 26. Пари неізоморфних графів

Ізоморфізм можна продовжити на множину маршрутів графа аналогічно тому, як його було продовжено на множину ребер. Маршруту $S = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ у графі G_1 поставимо у відповідність маршрут $\varphi''(S) = (\varphi(v_0), \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k))$ у графі G_2 . Оскільки φ - ізоморфізм, вказане відображення φ'' буде взаємно однозначним відображенням множини маршрутів G_1 на множину маршрутів G_2 . Воно зберігає довжину маршруту, а також властивості маршруту бути простим ланцюгом, повним простим ланцюгом, максимальним простим ланцюгом, циклом, простим циклом. З цих міркувань випливає наступна теорема.

Теорема. В ізоморфних графах для довільного k ($k \geq 0$) існує взаємно

однозначна відповідність:

- 1) між множинами простих ланцюгів довжини k ;
- 2) між множинами простих циклів довжини k .

Висновок 1. Ізоморфізм зберігає відстань між вершинами графа.

Висновок 2. Для зв'язного графа ексцентриситет вершин, діаметр та радіус є інваріантами.

Рівність інваріантів є необхідною умовою ізоморфності графів, проте не є достатньою, тобто графи з однаковими значеннями деяких інваріантів не обов'язково ізоморфні. Наприклад, графи на рисунку 25, б для довільного $k \geq 0$ мають однакові кількості вершин степеня k та однакові кількості простих циклів довжини k , але не є ізоморфними. Проте вершини степеня 3 в них мають різні ексцентриситети.

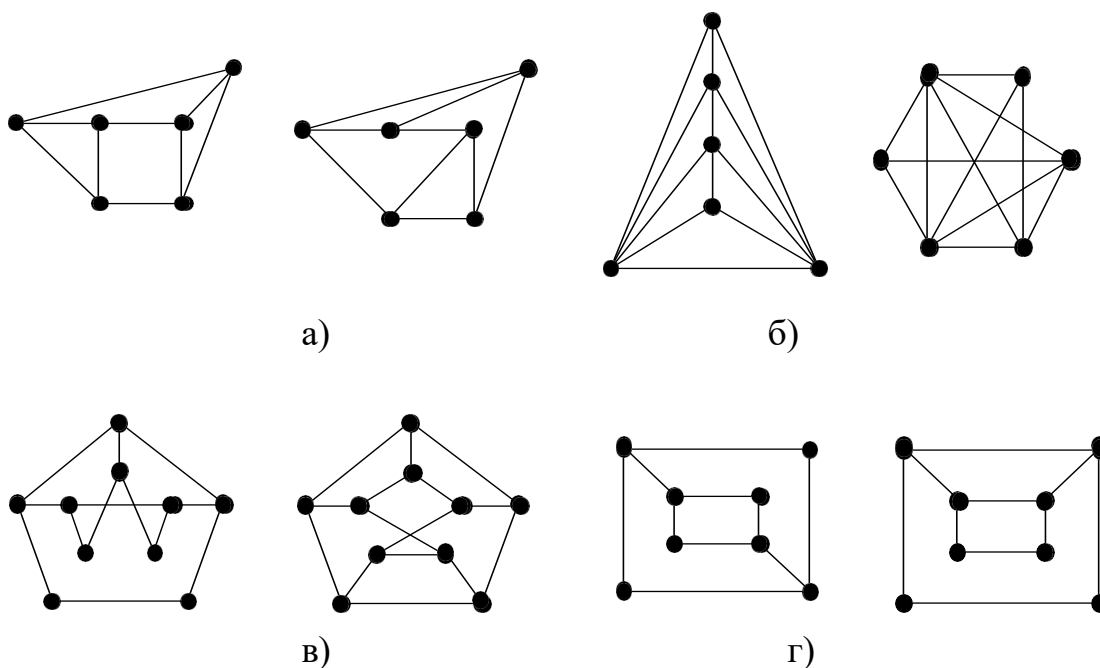


Рис. 27. Пари графів

Самодоповнювальним називається граф, ізоморфний своєму доповненню. Наприклад, самодоповнювальними є графи, зображені на рисунку 28. Самодоповнювальним також є тривіальний граф.

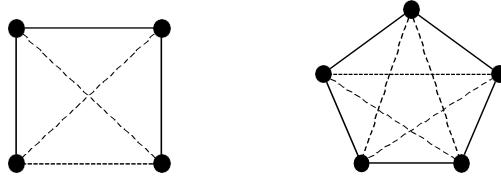


Рис. 28. Самодоповнювальні графи

Теорема. Кількість вершин будь-якого нетривіального самодоповнювального графа дорівнює або $4k$, або $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказ. Нехай самодоповнювальний граф $G = (V, E)$ має n вершин. $G \cong \bar{G}$, тому граф і його доповнення мають однакові кількості ребер. Тоді з того, що $G \cup \bar{G} = K_n$ випливає, що $|E| = n(n-1)/4$. Це число буде цілим, якщо n чи $n-1$ ділиться на 4 без остачі, тобто $n = 4k$ чи $n-1 = 4k$, або $n = 4k+1$, при деякому натуральному k . При $n = 4k+3$ або $n = 4k+2$ число $n(n-1)/4$ не є цілим і не може виражати кількість ребер.

Висновок. Довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2-k$, або $4k^2+k$ ребер, $k \in \mathbb{N}$. Для тривіального графа це твердження є очевидним. Якщо $n = 4k$, то

$|E| = n(n-1)/4 = k(4k-1) = 4k^2-k$. Якщо $n = 4k+1$, то $|E| = n(n-1)/4 = (4k+1)k = 4k^2+k$.

Завдання до розділу 3.4

1. Довести, що графи неізоморфні, якщо при деякому k ($k \geq 0$) кількості вершин степеня k в графах різні.

.....

2. Довести, що в ізоморфних графів кількості простих циклів довжини k однакові за будь-якого k .

.....

3. Довести, що ізоморфні графи мають однакові кількості компонент зв'язності.

.....

4. Пояснити, чому пари графів, зображені на рис. 26, не є ізоморфними.

.....

5. Серед пар графів, зображених на рис. 27, визначити пари ізоморфних і пари неізоморфних графів. Відповіді обґрунтувати.

.....

6. Довести, що для довільного $n \geq 2$ з точністю до ізоморфізму існують лише два графи з n вершинами, в яких $n-1$ вершина має попарно різні степені, причому з цих двох графів рівно один є зв'язним.

.....

7. Побудувати нетривіальний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

.....

8. Побудувати нетривіальний ациклічний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

.....

9. Побудувати всі попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 3, 3, 3, 5.

.....

10. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:

а) 7 вершин і 18 ребер;

б) 8 вершин, сума степенів яких не менше 53;

в) 10 вершин і 43 ребра;

г) n вершин і $n(n-1)/22$ ребер?

11. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість вершин дорівнює: а) 6; б) 7; в) $4k-1$, $k \in \mathbb{N}$?

Описати всі дерева, які є самодоповнювальними графами.

.....

12. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість ребер дорівнює: (а) 5; (б) 7; (в) $4k^2-2$, $k \in \mathbb{N}$?

Довести, що самодоповнювальний граф завжди зв'язний.

.....

13. Довести, що в нетривіальному самодоповнювальному графі немає ізольованих вершин та вершин, суміжних з усіма іншими.

.....

14. Довести, що в самодоповнювальному графі з n вершинами кількості вершин степеня k та степеня $n-k-1$ однакові ($0 \leq k \leq n-1$).

.....

15. Довести, що існує тільки один самодоповнювальний граф із чотирма вершинами.

.....

16. Довести, що існують тільки два самодоповнювальних графи з п'ятьма вершинами.

.....

17. Довести, що діаметр нетривіального самодоповнювального графа дорівнює або 2, або 3.

4 ГРАФИ ТА ПІДГРАФИ

4.1 Симетричні та антисиметричні графи

Граф $G = (X, A)$ називається *повним*, якщо для будь-якої пари вершин x_i і x_j в X існує ребро (x_i, x_j) у неорієнтованому графі $\bar{G} = (X, \tilde{A})$, тобто для кожної пари вершин графа G має існувати принаймні одна дуга, що їх з'єднує (рис. 29, а).

Граф $G = (X, A)$ називається *симетричним*, якщо в множині дуг A для будь-якої дуги (x_i, x_j) існує також протилежно орієнтована дуга (x_j, x_i) (рис. 29, б).

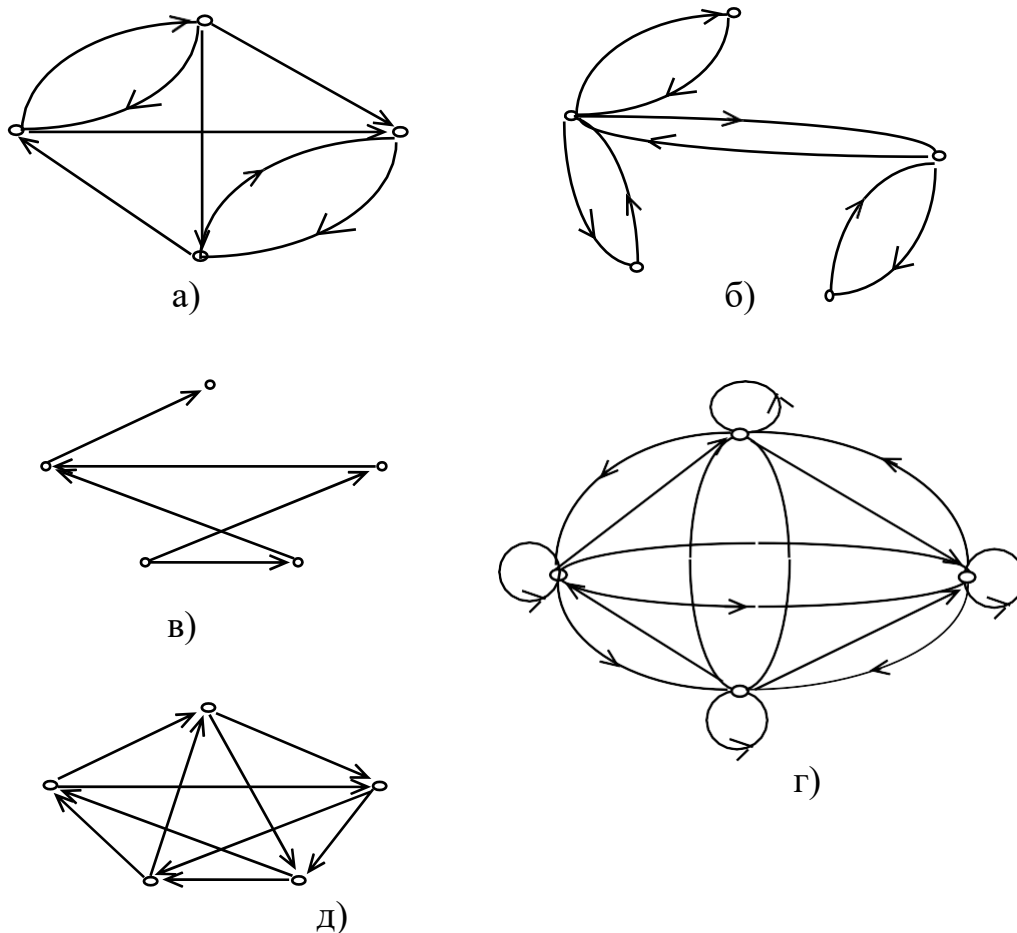


Рис. 29. Види графів: а) повний граф, б) симетричний граф, в) антисиметричний граф, г) повний симетричний граф, д) повний антсиметричний граф

Антисиметричним називається такий граф, для якого справедливою є наступна умова: якщо дуга $(x_i, x_j) \in A$, то в множині A немає протилежно орієнтованої дуги, тобто $(x_j, x_i) \notin A$ (рис. 16, в.). Очевидно, що в антисиметричному графі немає петель.

Як приклад можна розглянути граф, який є моделлю деякої групи людей: вершини графа інтерпретують людей, а дуги - їх взаємини. Таким чином, якщо в графі дуга, яка намальована від вершини x_i до вершини x_j , означає, що x_i є другом або родичем x_j , тоді даний граф має бути симетричним. Якщо дуга, спрямована від x_i до x_j , означає, що вершина x_j підпорядкована вершині x_i , то такий граф має бути антисиметричним.

Комбінуючи визначення повного і симметричного графів та повного і антисиметричного графів, одержимо наступні визначення:

- Граф $G = (X, A)$, в якому будь-яка пара вершин (x_i, x_j) з'єднана двонаправленими дугами називається *повним симетричним* (рис. 29, г).
- Граф $G = (X, A)$, що має для кожної пари вершин (x_i, x_j) тільки одну дугу, називається *повним антисиметричним* (рис. 29, д) або *турніром*.

4.2 Графи типу "дерево"

Зв'язний граф, який не має циклів, або граф, в якому кожна пара вершин з'єднана одним, і тільки одним, простим ланцюгом, називається *деревом* (рис. 30, а, б)

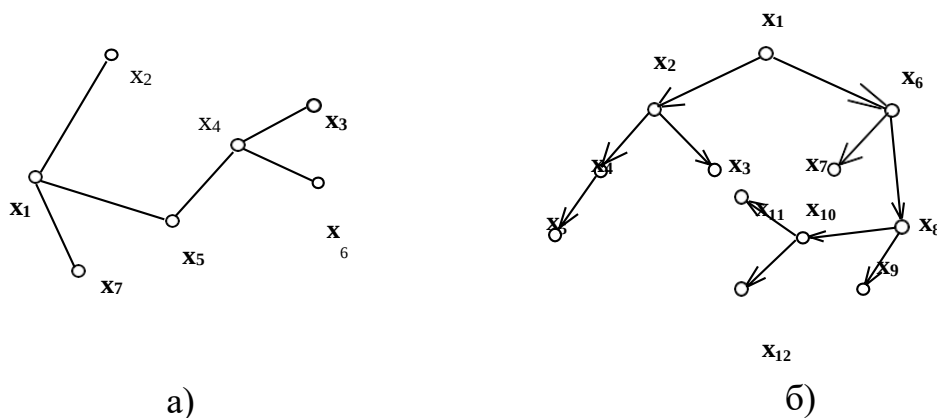


Рис. 30. Граф типу "дерево":

а) неорієнтоване дерево; б) орієнтоване дерево

Орієнтоване дерево - це орієнтований граф без циклів, у якому напівстепені заходу кожної вершини, за винятком однієї (наприклад, вершини x_1), дорівнюють 1, а напівстепені заходу вершини x_1 , (її називають коренем цього дерева) дорівнюють 0 (рис. 30, б).

Кістяковим деревом графа називається такий його суграф (підграф, що містить всі вершини графа), що є деревом. Ациклічний граф називається *лісом*. Відповідно, кістяковим лісом графа називається пряма сума кістякових дерев усіх компонент зв'язності графа. Кістяковий ліс зв'язного графа складається з єдиного дерева.

Кістякові дерева з'явилися в роботах Кірхгофа, який у 1847 р. розробив теорію дерев для визначення сили струму в кожному провіднику та кожному контурі електричної схеми. Пізніше, в 1857 р. Келі розглядав дерева як модель насичених вуглеводнів та розв'язав задачі перерахування дерев.

Дерева (головним чином, кореневі орієнтовані з навантаженими вузлами та дугами) широко використовуються в обробці інформації. Досить назвати такі, як пошук та сортування, трансляція, стискання даних та штучний інтелект.

Основні властивості дерев. Розглянемо теорему.

Теорема. Для довільного графа $T = (V, E)$ з n вершинами і m ребрами наступні твердження рівносильні:

- 1) T - дерево (ациклічний зв'язний граф);
- 2) T - зв'язний граф і $m = n-1$;
- 3) T - ациклічний граф і $m = n-1$.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2): За означенням дерева достатньо довести, що $m = n-1$. Зробимо це індукцією за кількістю вершин n . При $n = 1$ та $n = 2$ деревами є K_1 і K_2 , в яких $m = n-1$. Нехай твердження виконується для всіх дерев з кількістю вершин не більше t ($t \geq 2$). Розглянемо довільне дерево з $t+1$ вершиною й вилучимо з нього довільне ребро. Граф ациклічний, тому за одержимо граф з двома компонентами зв'язності.

Кількості вершин t_1 і t_2 у цих компонентах не більше t , тому для них виконується припущення індукції, тобто загальна кількість ребер в одержаному графі дорівнює $(t_1-1) + (t_2-1)$, причому $t_1+t_2 = t+1$. З урахуванням вилюченого ребра загальна їх кількість у дереві з $t+1$ вершиною дорівнює $(t_1-1) + (t_2-1) + 1 = t$. Отже, за індукцією твердження доведено.

(2) $\Rightarrow$ (3): Достатньо довести ациклічність. Припустимо супротивне: зв'язний граф з $n-1$ ребрами має цикл. Тоді будь-яке ребро, що входить до складу цього циклу, можна вилючити і за теоремою 12 одержати зв'язний граф. У цьому графі залишиться $n-2$ ребра, а це неможливо за теоремою 16 (зв'язний n -вершинний граф повинен мати принаймні $n-1$ ребро). Суперечність.

(3) $\Rightarrow$ (1): Достатньо довести зв'язність графа. Припустимо супротивне: нехай він має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \dots, n_k$; $n_1+n_2+\dots+n_k = n$. Граф ациклічний, тому кожна його компонента зв'язності є деревом, і за переходом (1) $\Rightarrow$ (2) i -а компонента має n_i-1 ребро. Тоді граф має $(n_1-1)+(n_2-1)+\dots+(n_k-1) = n-k$ ребер. За умовою кількість ребер дорівнює $n-1$, тому $k = 1$, тобто граф зв'язний.

Центральні вершини в деревах. Центральні вершини графів за означенням мають найменший ексцентриситет, тобто максимальну з відстаней від інших вершин. Кажучи неформально, до окраїни від центра завжди ближче, ніж від протилежної окраїни. Таким чином, виникає задача визначення центра графа і, зокрема, центра дерева. Розглянемо на неформальному рівні один досить ефективний алгоритм визначення центра дерева. З дерева одночасно вилучаються всі його кінцеві вершини. Оскільки при цьому не порушується зв'язність і не з'являються цикли, граф залишається деревом. При цьому відстань між найбільш віддаленими вершинами зменшується на 2, тобто парність діаметра не змінюється. Далі ця операція повторюється доти, поки не залишиться одна вершина (якщо діаметр початкового дерева парний) або дві суміжні (якщо непарний). Це й є центр.

У даному розділі доводяться твердження, які обґрунтовують наведений алгоритм і уточнюють властивості дерев. Спочатку доведемо два допоміжних твердження.

Лема 1. Ексцентриситет вершини дерева досягається на кінцевій вершині.

Нехай вершина u має ексцентриситет $e(u)$. Якщо вершина v , для якої $d(u, v) = e(u)$, не кінцева, то простий ланцюг з u в v можна продовжити принаймні на 1.

Лема 2. Нехай $D(T_1) \geq 2$, з T_1 вилучено всі кінцеві вершини й одержано дерево T_2 . Тоді:

- а) ексцентриситет довільної вершини в T_2 на 1 менше, ніж у T_1 ;
 - б) центри дерев збігаються збігаються;
 - в) $R(T_2) = R(T_1) - 1$;
 - г) якщо $L = (v_1, v, \dots, w, w_1)$ є максимальним ланцюгом у T_1 , то $L_2 = (v, \dots, w)$ - максимальний ланцюг у T_2 ;
 - д) $D(T_2) = D(T_1) - 2$.
- а) Нехай u — довільна вершина. Якщо $L = (u, \dots, v_2, v)$ - простий ланцюг у T_1 , на якому досягається відстань $e_{T_1}(u)$, то ексцентриситет вершини u в T_2 не менше $d_{T_2}(u, v_2) = e_{T_1}(u) - 1$.

Нехай $L = (u, \dots, v)$ — простий ланцюг у T_2 , на якому досягається відстань $e_{T_2}(u)$. За лемою 1 вершина v є кінцевою в T_2 . Тоді вона не кінцева в T_1 , і в T_1 існує ребро (v, w) , де w — кінцева вершина в T_1 , яка не належить L . Отже, ексцентриситет вершини в T_1 більше ніж в T_2 . Поєднуючи оцінки, маємо $e_{T_2}(u) = e_{T_1}(u) - 1$.

б) Ексцентриситет кожної вершини в T_2 рівно на 1 менше, ніж у T_1 , тому кожна вершина з найменшим ексцентриситетом у T_2 , тобто центральна, є центральною й у T_1 . З іншого боку, за лемою 1 та з урахуванням того, що $D(T_1) \geq 2$, усі центральні вершини T_1 не є кінцевими, тому є центральними й у T_2 .

- в) З а) за означенням радіуса маємо $R(T_2) = R(T_1) - 1$.

г) Кожний повний ланцюг у дереві T_1 починається й закінчується в кінцевих вершинах. При їх вилученні довжина ланцюга зменшується на 2, тому найбільша довжина буде в ланцюгів дерева T_2 , що є “залишками” максимальних у T_1 . Звідси ланцюг $L_2 = (v, \dots, w)$ є максимальним у T_2 , оскільки на 2 коротший за L .

д) Оскільки в дереві діаметр дорівнює довжині максимального ланцюга, з г) маємо $D(T_2) = D(T_1) - 2$.

Наступне твердження (теорема, яку розглянемо без доказу) обґрунтовує правильність наведеного вище алгоритму визначення центра дерева.

Теорема . У довільному дереві T центр складається з однієї вершини, якщо $D(T)$ — парне число, і з двох суміжних вершин, якщо непарне.

Кістякові дерева й ліси. Щоб отримати кістякове дерево зв'язного графа $G = (V, E)$, можна послідовно вилучати з нього ребра, що входять до складу хоча б одного циклу. Тому кожного разу одержується зв'язний граф. Граф скінченний, тому на деякому кроці залишиться ациклічний зв'язний граф, який буде кістяковим деревом графа. При цьому ми вилучимо $|E| - |V| + 1$ ребер. Зауважимо, що ребро зв'язного графа, інцидентне кінцевій вершині, входить в усі зв'язні суграфи графа, оскільки вилучення такого ребра робить відповідну вершину ізольованою.

Для побудови кістякового ліса для незв'язного графа слід побудувати кістякове дерево для кожної його компоненти зв'язності. Ця операція потребує вилучення $|E| - |V| + k$ ребер, де k - кількість компонент зв'язності графа. З наведеного алгоритму випливає наступне твердження.

Теорема. Зв'язний граф має кістякове дерево.

Ациклічний граф називається *лісом*. Відповідно, кістяковим лісом графа називається пряма сума кістякових дерев усіх компонент зв'язності графа. Кістяковий ліс зв'язного графа складається з єдиного дерева.

Нехай граф $G = (V, E)$ має k компонент зв'язності. Кількість $v(G) = |E| - |V| + k$ ребер, які необхідно вилучити з графа для одержання його

кістякового лісу, називається *цикломатичним числом* графа G . У довільному графі G воно дорівнює сумі цикломатичних чисел його зв'язних компонент, які є невід'ємними. Отже, справджується наступна теорема.

Теорема. Граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 0$.

Доказ. Доведемо, що для довільного графа $G = (V, E)$ з k компонентами зв'язності виконується рівність

$$\sum_{v \in V} \left(\frac{\delta(v)}{2} - 1 \right) = \nu(G) - k.$$

Нехай $\nu(G)$ — цикломатичне число графа G . Довести, що:

а) $\nu(G) = 1$ тоді й тільки тоді, коли граф G має лише один простий цикл;

б) $\nu(G) = 1$ тоді й тільки тоді, коли в графі G є ребро, після вилучення якого одержується ліс і при цьому кількість компонент зв'язності графа не змінюється.

Кількість циклів у графі G не менше $\nu(G)$.

Побудова кістяків

У даному розділі розглядаються переходи між різними кістяковими деревами того самого зв'язного графа та побудова кістякового дерева з найменшим радіусом. Спочатку розглянемо твердження, які обґрунтовують можливість указаних переходів та здійснемо доказ відповідних теорем.

Теорема. Будь-який ациклічний підграф довільного графа G є підграфом деякого кістякового лісу графа G .

Доказ. Відмітимо всі ребра, що складають ациклічний підграф. Якщо в графі є цикли, то будь-який простий цикл складається не лише з відмічених ребер. Будемо послідовно вилучати невідмічені ребра, що входять у прості цикли. Це не збільшує кількості зв'язних компонент. Зрештою буде одержано кістяковий ліс, що містить даний ациклічний підграф.

Теорема. Нехай $T_1 = (V, E_1)$ і $T_2 = (V, E_2)$ - кістякові дерева зв'язного графа $G = (V, E)$. Для будь-якого ребра $e \in E_1$ дерева T_1 існує ребро $g \in E_2$ дерева T_2 таке, що граф $T = (V, (E_1 \setminus \{e\}) \cup \{g\})$ також є кістяковим деревом графа G .

Доказ. Якщо ребро e належить обом деревам, покладемо $g = e$, тоді $T = (V, (E_1 \setminus \{e\}) \cup \{g\}) = (V, E_1) = T_1$.

Нехай $e \notin E_2$. Множина ребер $E_1 \setminus \{e\}$ є кістяковим лісом; відмітимо ребра цієї множини й додамо до неї множину ребер E_2 . Одержаний граф G_1 зв'язний, оскільки містить кістякове дерево T_2 графа G . Він є підграфом графа G , тому кожне його кістякове дерево є кістяковим деревом графа G . Множина відмічених ребер утворює ациклічний підграф у графі G_1 , тому аналогічно до попередньої теореми, для G_1 існує кістякове дерево, що містить відмічений ациклічний підграф. Це кістякове дерево складається з $|V|-2$ відмічених ребер множини $E_1 \setminus \{e\}$ і ще одного ребра, яке необхідно належить множині E_2 , що й треба було довести.

Теорема. Для довільного зв'язного графа G існує кістякове дерево T , у якому $R(T) = R(G)$, $D(T) \leq 2R(G) \leq 2D(G)$.

Доказ. Очевидно, що радіус кістяка не менше радіуса графа. Побудуємо кістяк, на якому досягається рівність. Для цього нам знадобиться низка означень.

Простий ланцюг, що веде з вершини v в w , називається *мінімальним*, якщо його довжина дорівнює $d(v, w)$. Якщо для деяких двох різних ланцюгів Z та Y множина їх спільних вершин збігається з множиною вершин ланцюга Z , то кажуть, що ланцюг Z *включається в* Y .

Нехай граф має радіус R . Розглянемо два мінімальних ланцюги, що ведуть з вершин v й w у центральну вершину u ($v \neq w$, $v \neq u$, $w \neq u$). Нехай це ланцюги $(v = v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = u)$, де $n = d(v, u) \leq R$, та $(w = w_1, w_2, \dots, w_m, w_{m+1} = u)$, де $m = d(w, u) \leq R$. Точками збігу цих простих ланцюгів

зі спільним кінцем u називаються вершини v_i та w_j ($v_i \neq u$, $w_j \neq u$), що належать обом ланцюгам, причому частини ланцюгів після цих вершин уже не відрізняються, тобто $v_i = w_j$, $n-i = m-j$, $v_{i+d} = w_{j+d}$ при $d \in \{0, 1, \dots, n-i+1\}$. *Точками перетину* цих простих ланцюгів зі спільним кінцем u називаються вершини, відмінні від u , що належать обом ланцюгам і не є точками збігу.

Ми розглядаємо мінімальні ланцюги, тому їх частини від точок перетину до вершини u також є мінімальними ланцюгами.

Нехай ϵ множина L мінімальних ланцюгів, що ведуть в вершину u , причому жодні два з них не мають точок перетину (але можуть мати точки збігу). Для довільного мінімального ланцюга, що веде в u й не належить L , визначимо *множину точок збігу з L* як найбільшу з множин точок збігу з ланцюгами з L , а також *множину точок перетину з ланцюгами з L* як об'єднання точок перетину даного ланцюга з кожним ланцюгом з L .

Означимо *операцію додавання ланцюга Z_0 до L* .

- Якщо Z_0 не має точок перетину з L , додамо його до L .
- Якщо $Z_0 = (w = w_1, w_2, \dots, w_m, w_{m+1} = u)$, де $m = d(w, u) \leq R$, перетинається з L у k точках, то розглянемо точку перетину, що має найменший індекс у Z_0 , тобто першу точку перетину; нехай це точка $v_i = w_j$, що належить деякому ланцюгу Z з L , $Z = (v = v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = u)$, $n = d(v, u) \leq R$. Додамо до L ланцюг $Z_1 = (w = w_1, w_2, \dots, w_j = v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_{n+1} = u)$, якщо він не включається в жоден ланцюг з L . За побудовою він не перетинається з жодним ланцюгом з множини L і є мінімальним ланцюгом. Ланцюг $Z_2 = (w_{j+1}, \dots, w_m, w_{m+1} = u)$ - частина Z_0 від точки першої перетину до вершини u - також є мінімальним. Кількість точок перетину Z_2 з отриманою множиною L дорівнює $k-1$, що строго менше, ніж було в Z_0 . Застосуємо операцію додавання до Z_2 рекурсивним чином. Отже, за скінченну кількість кроків до L можна додати такі прості ланцюги, що всі вершини ланцюга Z_0 будуть присутні серед вершин ланцюгів з множини L .

Нарешті, розглянемо *алгоритм побудови кістякового дерева з*

найменшим радіусом. Для кожної вершини графа, окрім центральної вершини u , побудуємо один мінімальний ланцюг, що веде з неї в u , і сформуємо з цих ланцюгів множину LL . Довжини всіх цих ланцюгів не більше радіуса графа. Вилучимо з LL усі ланцюги, що включаються в інші ланцюги з LL . Множина L на початку роботи алгоритма порожня. Виберемо з LL один із ланцюгів найбільшої довжини та перемістимо його в множину L .

Далі на кожному кроці обираємо довільний ланцюг з LL та описаним вище алгоритмом додаємо до L так, щоб кожна вершина обраного ланцюга була присутня в деякому ланцюзі з L . Вилучаємо оброблений ланцюг з LL . Щоразу в ланцюгів множини L немає точок перетину, а їх довжини не більше радіуса графа (оскільки вони є мінімальними ланцюгами до центральної вершини u). Коли множина LL стане порожньою, L буде містити прості ланцюги, які не мають точок перетину й накривають усі вершини графа.

Об'єднання ланцюгів з L утворює дерево T . За побудовою, як тільки два ланцюги мають спільну точку, вони збігаються від неї до вершини u . Отже, об'єднання ланцюгів з L є ациклічним зв'язним підграфом, що містить усі вершини графа. Відстань у дереві T від кожної вершини графа до вершини u не більше $R(G)$, оскільки відповідає мініимальному ланцюгу. Звідси $R(T) = R(G)$ і $D(T) \leq 2R(G) \leq 2D(G)$.

Завдання до розділу 4.2

1. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами ($n \geq 2$) має не менше двох кінцевих вершин.

.....

2. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами ($n \geq 2$), у якому є хоча б одна вершина степеня s , має не менше s кінцевих вершин.

3. Довести, що в дереві з n вершинами ($n \geq 3$), в якому найбільший степінь вершини дорівнює s , кількість кінцевих вершин не більше $(n(s-2)+2)/(s-1)$.

.....

4. Довести, що кількість кінцевих вершин у дереві з n ($n \geq 2$) вершинами, серед яких немає вершин степеня 2, не менше $n/2+1$.

.....

5. Довести, що зв'язний граф з n вершинами ($n \geq 3$), кількість кінцевих вершин якого збігається з кількістю ребер, є деревом.

.....

6. Радіус $R(T)$ і діаметр $D(T)$ довільного дерева T пов'язані рівністю $R(T) = \lfloor (D(T)+1)/2 \rfloor$. Центр дерева належить кожному простому ланцюгу максимальної довжини. Довести, що в дереві з непарним діаметром будь-які два простих ланцюги максимальної довжини мають принаймні одне спільне ребро.

.....

7. Довести, що діаметр дерева T з $n+1$ вершиною ($n \geq 2$) дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли $T = K_{1,n}$.

.....

8. Довести, що будь-яке ребро зв'язного графа G є ребром деякого кістякового дерева графа G .

.....

9. Довести, що довільне кістякове дерево T_1 графа G можна перетворити в будь-яке інше кістякове дерево T_2 графа G , послідовно замінюючи одне ребро з T_1 на ребро з T_2 так, що на кожному кроці отримуємо кістякове дерево графа G .

.....

10. Для довільного k ($k > 2$) побудувати граф, діаметр якого дорівнює k , а будь-яке його кістякове дерево має діаметр $2k$.

4.3 Планарні графи

4.3.1 Визначення та умови планарності графів

Граф $G = (X, A)$, що может бути зображений на площині або сфері без перетинів називається *планарним* (рис. 31).

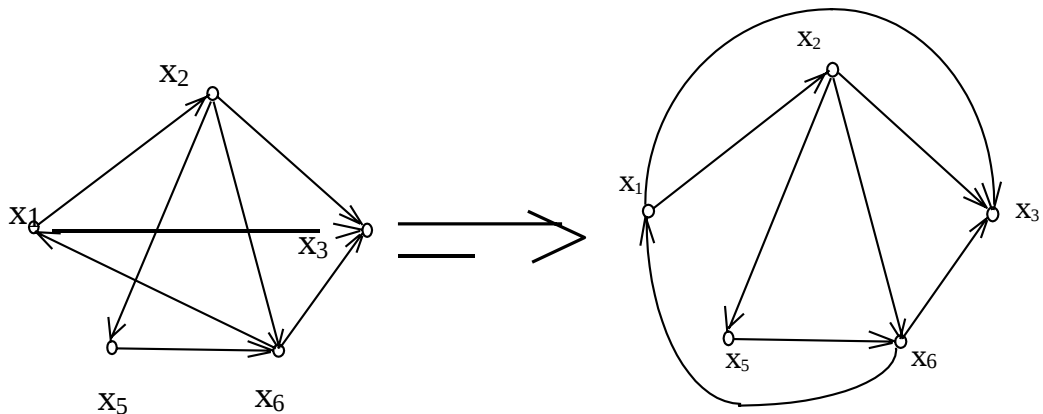


Рис. 31. Планарний граф

На рисунку 32 показано непланарні графи. Ці два графа відіграють важливу роль у теорії планарних графів і відомі як графи Куратовського.

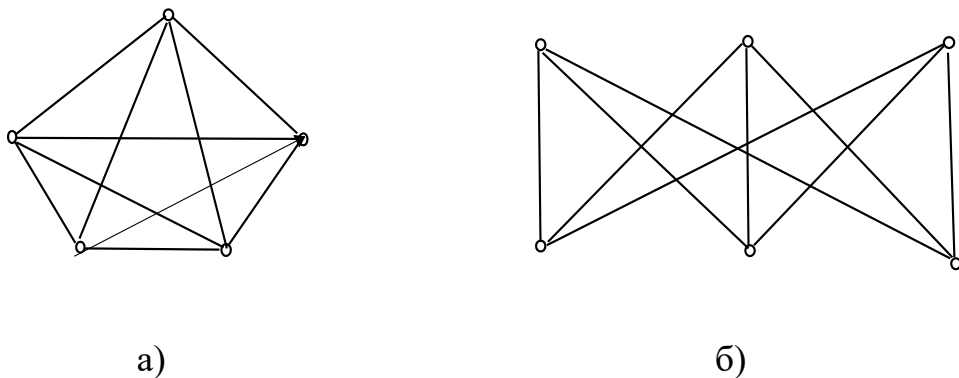


Рис. 32. Непланарні графи "зірка"

Розглянемо задачу про три будинки та три колодязі. Три сусіди, що посварилися, спільно користуються трьома колодязями. Чи можна провести доріжки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоб

доріжки не перетиналися, тобто сусіди не зустрічалися на шляхах до колодязів?

Моделлю цієї задачі є повний двочастковий граф $K_{3,3}$, зображений на рисунку 32, б. Її питання в термінах теорії графів можна сформулювати так: чи можна укласти діаграму графа $K_{3,3}$ на площині так, щоб лінії, відповідні ребрам, не мали спільних точок, крім вершини, інцидентної їм обом. Для графа $K_{3,3}$ відповідь буде “не можна” (це доводиться в розв’язанні задачі Єйлера). Взагалі, можливість укладання графа на площині важлива, коли треба знайти діаграму графа, в якій ребра перетинаються лише в інцидентних їм вершинах. Це питання постає в задачах, пов’язаних з картами доріг, електричними схемами та іншими видами об’єктів.

Уточнимо, що означає “укласти граф на поверхні”. Кажуть, що граф *укладається на поверхні*, якщо він ізоморфний графу, вершини якого є точками поверхні, а ребра — неперервними лініями поверхні без самоперетинів¹, що з’єднують відповідні вершини, причому жодні два ребра не мають спільних точок, окрім вершини, інцидентної їм обом (цей граф інколи називають *укладкою*). Аналогічним є поняття укладання графа в просторі.

Теорема. Кожний граф $G = (V, E)$ укладається в тривимірний евклідов простір E^3 .

Доказ. Вершини графа розміщуємо в різних точках осі Ox . З в’язки площин, що проходять через Ox , виберемо $|E|$ різних. Кожне ребро $(v, w) \in E$ відображаємо у відповідній площині півколом, що проходить через вершини v та w . В результаті одержимо укладання графа G в E^3 , оскільки всі ребра лежать в різних площинах і не перетинаються у внутрішніх точках.

Таким чином *планарним* є граф, який можна укласти на площині, а *плоским* - граф, який вже укладено на площині. Таким чином, планарним називається граф, ізоморфний деякому плоскому графу.

Гранню плоского графа називається максимальна за включенням множина точок площини, кожену пару яких можна з'єднати неперервною лінією без самоперетинів і перетинів ребер графа в точках, відмінних від її кінців. Кожний плоский граф має рівно одну необмежену грань, яка називається *зовнішньою*; інші грані називаються *внутрішніми*. *Межею грані* будемо вважати множину ребер, що належать грані. Множину всіх граней плоского графа позначатимемо через P .

Плоскою картою називається зв'язний плоский граф разом з усіма своїми гранями.

Приклади планарних графів та їх плоских карт наведено на рисунку 33.

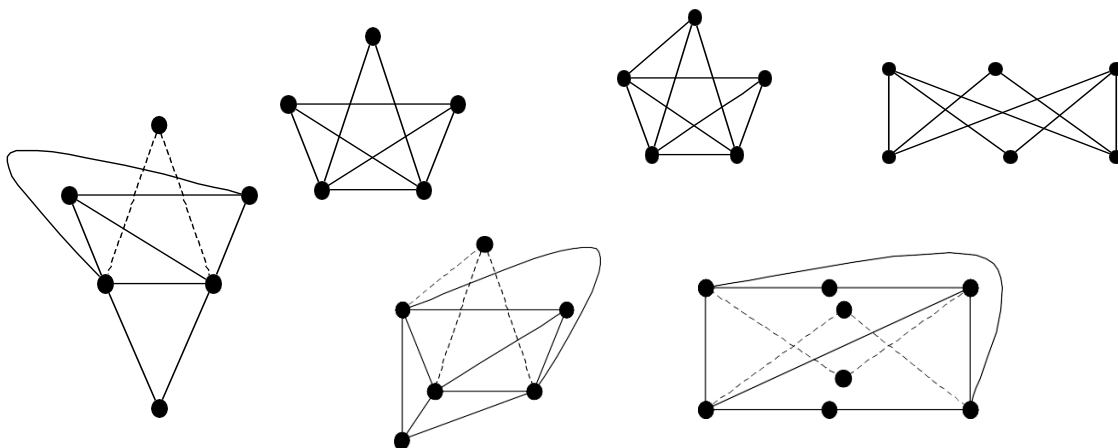


Рис. 33. Графи та їх плоскі карти.

Пунктиром показано перенесені вершини та ребра

Розглянемо умови планарності графів.

Теорема . Граф є планарним тоді й тільки тоді, коли він укладається на сфері.

Доказ. Необхідна умова. Граф скінченний, тому його можна вмістити в круг C скінченного радіуса R з центром у деякій точці O_1 (на межі круга точок графа немає). Проведемо з центра O_1 скінченний перпендикуляр O_1O_2 до площини. Нехай точка O - середина відрізка O_1O_2 . Побудуємо сферу S з центром у точці O та радіусом $r = |OO_1|$,

яка дотикається площини у точці O_1 . Для кожної точки X площини всередині кола ($|O_1X| < R$) побудуємо площину P_X , що проходить через O_1O_2 та X . Точці X поставимо у відповідність точку Y сфери, $Y \in P_X \cap S$, для якої $l/(\varphi r) = |O_1X|/R$, де l - довжина криволінійного відрізка сфери O_1Y . Позначимо цю відповідність через φ . За означенням, φ є взаємно однозначним відображенням множини внутрішніх точок круга C на множину точок сфери $S \setminus \{O_2\}$. Тоді, якщо граф був плоским, його образ на сфері є сферичним укладанням.

Достатня умова. Нехай граф укладено на сфері S . Візьмемо довільну сферичну грань графа та оберемо на ній довільну точку O_2 , що не належить графу. З обраної точки побудуємо діаметр сфери O_2O_1 та в точці O_1 проведемо площину, дотичну до сфери. Побудуємо на ній круг C з центром у точці дотику O_1 та радіусом R ($R > 0$). Зворотнє відображення φ^{-1} множини точок сфери $S \setminus \{O_2\}$ на внутрішню частину круга C також є взаємно однозначним і переводить сферичне укладання графа в плоске укладання, причому грань, яка містить точку O_2 , відображається в зовнішню грань графа.

Зауваження. При переході від плоского укладання до сферичного й навпаки в доведенні теореми кількість граней залишається незмінною.

Висновок. Для довільного ребра (довільної вершини) планарного графа знайдеться така укладка графа на площині, що це ребро (ця вершина) належить зовнішній грані. (У доведенні теореми при побудові відображення сферичного графа на площину в якості точки O_2 треба взяти внутрішню точку грані, яка містить вказане ребро чи вершину).

Неважко бачити, що кожен підграф планарного графа є планарним, а граф є планарним тоді й тільки тоді, коли планарна кожна з його зв'язних компонент.

Нехай грань $r \in P$ містить рівно k_r ребер і рівно b_r з них не входять у

жодний цикл графа. Тоді *степенем грані r* будемо називати число $\Delta_r = k_r + b_r$. Наприклад, межею зовнішньої грані на рисунку 34, а, є множина ребер $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 1)\}$, а на рисунку 34, б, в - $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (5, 6), (6, 7), (7, 5)\}$. Степені цих граней складають, відповідно, 6 і 7.

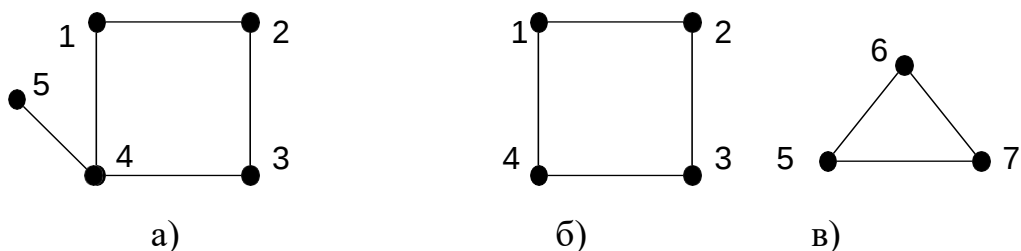


Рис. 34. Приклади плоских графів

Кожна точка площини, яка не лежить на ребрі, належить рівно одній грані. Якщо ребро не входить до складу жодного циклу графа, кожна його точка, відмінна від вершини графа, належить тільки одній грані, інакше - двом граням. Кожне ребро плоского графа або розділяє дві різні грані, або лежить усередині однієї грані. Отже, кожне ребро графа або входить у межі двох граней, або є елементом межі лише однієї грані, але при обчисленні її степеня враховується двічі. Отже, одержуємо таку теорему.

Теорема. Для довільного плоского графа $G = (V, E)$ справджується

$$\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E|.$$

Ізольована вершина графа належить одній грані графа. Вершина степеня k ($k \geq 1$) плоского графа може належати граням у кількості від 1 до k . Точніше, нехай інцидентні їй ребра входять до складу l циклів, які обмежують ззовні l граней. Якщо $l < k$, то вершина належить $l+1$ граням, а якщо $l = k$, - k граням. Наприклад, у графах на рисунку 35 усі вершини, що позначені v , мають степені 7, але належать 1, 2 та 7 граням відповідно.

Теорема. Довільний планарний граф ізоморфний деякому плоскому графу, всі ребра якого є відрізками прямих. (Без доведення.)

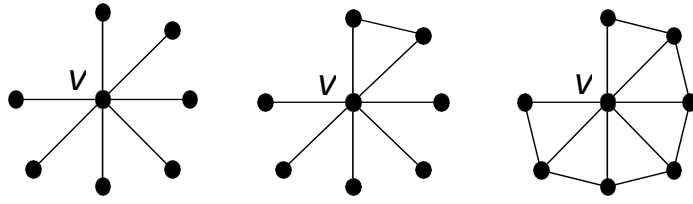


Рис. 35. Степені вершин та грані

4.3.2 Властивості планарних графів

Теорема (Ейлера). Якщо $G = (V, E)$ є зв'язним плоским графом, то $|V| - |E| + |P| = 2$.

Доказ. Для довільного плоского графа побудуємо його кістякове дерево (V, E_0) , для якого формула справджується. Це кістякове дерево є плоским графом з однією гранню, тобто $|P_0| = 1$. За попередньою теоремою для нього $|E_0| = |V| - 1$, звідки $|V| - |E_0| + |P_0| = 2$.

Далі будемо послідовно додавати ребра графа, що не увійшли до кістякового дерева. Нехай на деякому кроці утворено граф (V, E_k) ($k = 0, 1, \dots, v(G)-1$), для якого $|V| - |E_k| + |P_k| = 2$. При додаванні ребра e кількість ребер збільшується на 1, але при цьому деяка грань розділяється на дві частини, тобто кількість граней також збільшується на 1. При цьому утворюється граф (V, E_{k+1}) , де $E_{k+1} = E_k \cup \{e\}$ і

$|P_{k+1}| = |P_k| + 1$. Для нього $|V| - |E_{k+1}| + |P_{k+1}| = |V| - (|E_k| + 1) + (|P_k| + 1) = |V| - |E_k| + |P_k| = 2$. При додаванні останнього ребра утворюється граф $(V, E_{v(G)}) = (V, E)$, для якого $|V| - |E| + |P| = 2$.

Висновок 1. Якщо $G = (V, E)$ - плоский граф з k зв'язними компонентами, то $|V| - |E| + |P| = k + 1$.

Висновок 2. Кількість граней будь-якої плоскої карти для планарного графа $G = (V, E)$ є величиною сталою й дорівнює $|E| - |V| + k + 1$, де k - кількість зв'язних компонент графа G .

Зауваження. Різні плоскі карти одного й того самого планарного графа можуть мати грані з різними наборами степенів. Приклад наведено на рисунку 36.



Рис. 36. Два ізоморфних плоских графи
з різними наборами степенів граней

Висновок 3. Якщо граф має n вершин ($n \geq 3$), m ребер і є планарним, то $m \leq 3n-6$.

Висновок 4. Якщо граф має n вершин, m ребер ($m \geq 2$), k компонент зв'язності й є планарним, то $m \leq 3n - 3k - 3 \leq 3n-6$.

Висновок 5. Граф K_5 не є планарним. (K_5 має 5 вершин і 10 ребер. Оскільки $10 > 3 \cdot 5 - 6 = 9$, то планарним він бути не може).

4.3.3 Критерії планарності

Розглянемо дві необхідні й достатні умови планарності графів. У цих умовах використовуються непланарні графи $K_{3,3}$ і K_5 , а також одна з двох додаткових операцій з графами - підрозбиття ребра та стягування вершин.

Почнемо з підрозбиття. Нехай граф $G = (V, E)$ має ребро $e \in E$, $e = (v, w)$. Операція підрозбиття ребра e полягає в тому, що з графа вилучається ребро e , до множини вершин додається нова вершина u , а до множини ребер — нові ребра (v, u) і (u, w) . Таким чином, утворюється граф $G' = (V \cup \{u\}, (E \setminus \{(v, w)\}) \cup \{(v, u), (u, w)\})$. Степені всіх вершин з множини V у графі G' залишаються такими самими, як і в G , а додана вершина має ступінь 2. Відмітимо, що це перетворення зберігає різницю між кількостями ребер та вершин графа.

Графи називаються *гомеоморфними*, якщо їх можна одержати з

одного й того ж графа за допомогою підрозбиття його ребер.

Наприклад, граф Петерсена (рис. 37, а) не містить підграфа, гомеоморфного графу K_5 , оскільки число вершин степеня, не рівного 2, в гомеоморфних графах однакове, а граф Петерсена на відміну від графа K_5 не містить жодної вершини степеня 4.

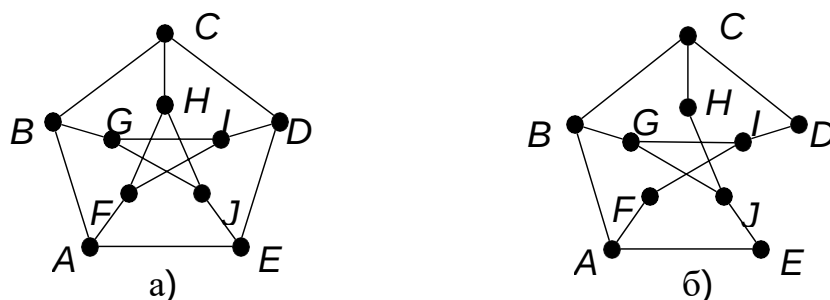


Рис. 37. Граф Петерсена та його підграф

У той же час, якщо з графа Петерсена вилучити, наприклад, ребра DE і FH , то залишиться граф, гомеоморфний непланарному графу $K_{3,3}$ (на рис. 37, б трійки вершин B, I, J та A, C, G утворюють його частки, а D, E, F, H одержуються в результаті підрозбиття його ребер).

Теорема. Операція підрозбиття ребер графа зберігає характер планарності графа.

Доказ. Операція підрозбиття ребра на рівні діаграми графа рівносильна тому, що на цьому ребрі розташовується додаткова вершина, а далі утворені частини ребра розглядаються як ребра. Таким чином, підрозбиття ребра переводить плоску карту в плоску карту. Обернена операція рівносильна тому, що додана точка розглядається не як вершина, а як проміжна точка ребра. Отже, обернена операція також переводить плоску карту в плоску карту. Звідси граф, утворений в результаті підрозбиття ребра непланарного графа, також непланарний.

Висновок 1. Гомеоморфні графи мають однаковий характер планарності.

Висновок 2 (достатня умова непланарності). Граф, що містить підграф,

гомеоморфний K_5 або $K_{3,3}$, не є планарним. (Якщо граф планарний, то кожен його підграф планарний. Але планарний підграф не може бути гомеоморфним непланарному графу, а графи K_5 і $K_{3,3}$ непланарні).

За цим висновком граф Петерсена непланарний, оскільки містить підграф, гомеоморфний непланарному $K_{3,3}$ (див. рис. 37).

Очевидно, що всі графи з 1, 2, 3 чи 4 вершинами планарні, а серед графів з 5 вершинами непланарний лише K_5 . Розглянувши графи з 6 вершинами, негомеоморфні K_5 , неважко переконатися, що найменшим (за включенням множин ребер) непланарним з них є $K_{3,3}$. І взагалі, аналіз непланарних графів з більшою кількістю вершин свідчить, що кожен з них містить підграф, гомеоморфний K_5 або $K_{3,3}$. Іншими словами, існування підграфа, гомеоморфного K_5 або $K_{3,3}$, є необхідною умовою непланарності. Отже, ці два графи є мінімальними (за відношенням “є підграфом”) непланарними графами, причому інших мінімальних не існує.

Наведені неформальні міркування приводять до наступного твердження.

Теорема (Понтрягіна-Куратовського). Граф планарний тоді й тільки тоді, коли не містить підграфа, гомеоморфного K_5 або $K_{3,3}$.

Розглянемо операцію стягування вершин. Нехай граф $G = (V, E)$ має ребро $e \in E$, $e = (v, w)$. *Операція стягування суміжних вершин v і w* полягає в тому, що з графа вилучаються вершини v і w , додається нова вершина $u \notin V$ і з'єднується ребрами з усіма вершинами, які були суміжні з вилученими. Таким чином, утворюється граф $G' = ((V \setminus \{v, w\}) \cup \{u\}, ((E \setminus (O(v) \cup O(w))) \cup \{(u, x) \mid (v, x) \in E \vee (w, x) \in E\}))$. Степені всіх вершин у графі G' з множини V , що не були суміжні хоча б з однією з вилучених вершин, залишаються без змін, а степені вершин, що були суміжні з обома вилученими вершинами, зменшуються на 1.

Існує окремий випадок, у якому стягування вершин та підрозбиття ребра є взаємно оберненими операціями (з точністю до ізоморфізму). Якщо підрозбиття ребра (v, w) утворює ребра (v, u) і (w, u) , то стягування кінців одного з них є оберненим до цього підрозбиття.

Кажуть, що *граф* G_1 *стягується до графа* G_2 , якщо G_2 можна утворити з G_1 за скінченну кількість застосувань операції стягування вершин.

Теорема. Стягування суміжних вершин планарного графа перетворює його на планарний граф.

Формальне доведення цього інтуїтивно очевидного твердження досить громіздке, хоча неважко переконатися, що стягування суміжних вершин на рівні діаграм перетворює плоску карту на плоску.

Висновок (достатня умова непланарності). Граф, що містить підграф, який за допомогою операцій стягування може бути перетворений у K_5 або $K_{3,3}$, не є планарним.

Кожен підграф планарного графа є планарним, операція стягування перетворює планарні графи на планарні. Звідси випливає, що стягування планарного графа не може утворити непланарний K_5 чи $K_{3,3}$, тому підграф і весь граф непланарні. Наприклад, якщо в графі Петерсена стягнути вершини A і F , B і G , C і H , I і D , J і E , то утвориться граф, ізоморфний непланарному графу K_5 .

Існування в графі підграфа, який стягується до K_5 чи $K_{3,3}$, також є необхідною умовою непланарності графа. Отже, іншим критерієм планарності є наступна теорема.

Теорема (Вагнера). Граф планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфа, який стягується до K_5 чи $K_{3,3}$.

Як бачимо, K_5 чи $K_{3,3}$ є мінімальними непланарними графами й за відношенням “є результатом стягування”.

4.3.4 Максимально плоский граф. Тріангуляція

Максимальним планарним графом називається планарний граф, який при додаванні до нього будь-якого ребра перестає бути планарним. Плоский зв'язний граф, кожна грань якого обмежена трикутником, називається *тріангуляцією*. Тут доводиться, що максимальними

планарними графами є триангуляції, і тільки вони.

Теорема. Для довільного $n \geq 3$ існує принаймні одна триангуляція з n вершинами. Відповідну діаграму представлено на рисунку 38.

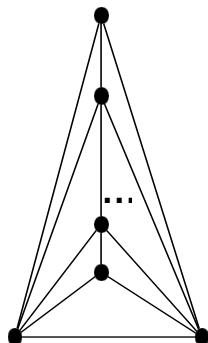


Рис. 38. Схема триангуляції

Теорема. Кожен плоский граф, який має не менше 3 вершин і не є триангуляцією, можна доповнити ребрами до триангуляції.

Доказ. Якщо плоский граф незв'язний, то його можна поповнити ребрами до плоского зв'язного графа, послідовно з'єднуючи ребрами компоненти зв'язності. Якщо отриманий зв'язний плоский граф не менше ніж з трьома вершинами не є триангуляцією, то в ньому існує грань степеня не менше 4. Нехай суміжні ребра (v, u) , (u, w) , (w, t) ($v \neq w$, $u \neq t$) входять до межі грані степеня не менше 4. Оскільки граф плоский, то в ньому немає ребра (v, w) або ребра (u, t) , нехай для визначеності немає ребра (v, w) . Оскільки (v, u) і (u, w) — сусідні ребра однієї грані, ребро (v, w) можна додати до графа так, що він залишиться плоским. Описане додавання всіх можливих ребер утворює триангуляцію.

Теорема. Будь-яка триангуляція з n вершинами ($n \geq 3$) містить $3n-6$ ребер і має $2n-4$ граней.

Доказ. Нехай граф має m ребер. Оскільки степінь кожної грані дорівнює 3, з теоремою 42 маємо $2m = 3|P|$. За теоремою Ейлера $2m = 3|P| = 3(m-n+2)$, звідки $m = 3n-6$ і $|P| = 2n-4$.

Теорема. Граф, що має не менше 3 вершин, є максимальним плоским графом тоді й тільки тоді, коли він є триангуляцією.

Доказ. Необхідна умова. Якщо плоский граф не є триангуляцією, то до нього можна додати ребра так, що він залишиться плоским.

Достатня умова. Якщо граф з n вершинами є триангуляцією, то він має $3n-6$ ребер. Якщо додати хоча б одно ребро, кількість ребер стане більше $3n-6$, що неможливо для плоского графа. Таким чином, триангуляція є максимальним плоским графом.

Висновок. Серед всіх плоских графів з n вершинами найбільшу кількість граней має триангуляція. (За теоремою Ейлера найбільші можливі кількості ребер і граней для n -вершинного плоского графа досягаються одночасно).

Завдання до розділу 4.3

1. Нехай граф G складається з двох планарних зв'язних компонент $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$. Довести, що граф G , отриманий з G злиттям двох довільних вершин $v_1 \in V_1$ і $v_2 \in V_2$ в одну вершину v , є планарним.

.....

2. Довести, що граф планарний тоді й тільки тоді, коли кожен його блок планарний.

.....

3. Довести, що будь-яке дерево є планарним графом. Скільки граней і якого степеня має дерево з n вершинами? Чи існує планарний граф, який має 7 вершин і 16 ребер?

.....

4. Довести, що графі $\bar{G}$ та G не можуть бути одночасно планарними, якщо кількість вершин у них не менше 11.

.....

5. Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не більше 5. Довести, що в будь-якому плоскому графі є вершина степеня менше 3 або грань степеня менше 6.

6. Довести, що у зв'язному плоскому графі з n вершинами і m ребрами, степені всіх граней якого дорівнюють k , виконується рівність $m(k-2) = k(n-2)$.

.....

7. Нехай зв'язний планарний граф з n вершинами і m ребрами має принаймні один цикл, і довжини всіх простих циклів не менше k . Довести, що $m(k-2) \leq k(n-2)$.

.....

8. Нехай планарний граф з n вершинами ($n \geq 3$), m ребрами не містить трикутників. Довести, що $m \leq 2n-4$.

.....

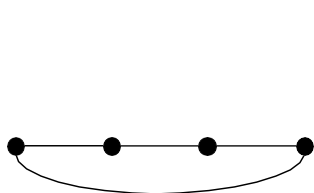
9. Довести, що повний двочастковий граф $K_{3,3}$ не є планарним. Визначити, які з повних двочасткових графів $K_{n,m}$ планарні.

.....

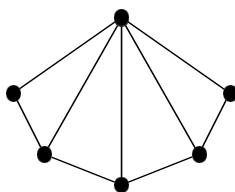
10. Яку найбільшу кількість граней може мати плоский граф із 5 вершинами? Побудувати цей граф.

.....

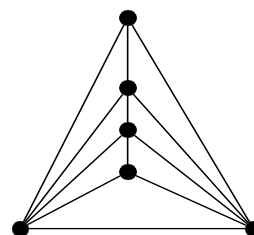
11. Чи можна до плоских графів, зображених на рисунку нижче, додати ребра так, щоб отриманий граф залишився плоским? Якщо можна, то які ребра і скільки?



а)



б)



в)

.....

12. Чи існує планарний граф, який має 8 вершин і 17 ребер? Чи існує плоский граф, який має 6 вершин і 9 граней?

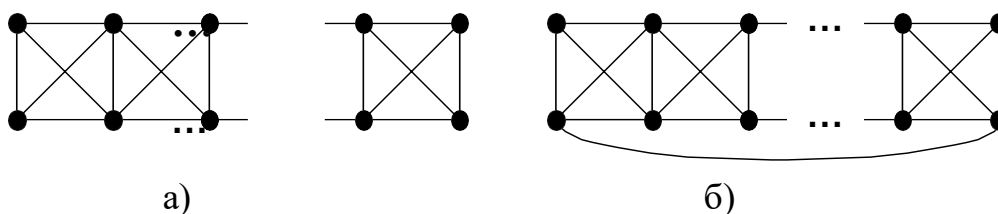
13. Довести, що в триангуляції з n вершинами при $n \geq 4$ степінь кожної вершини не менше 3.

.....

14. Довести, що в будь-якому планарному графі з n вершинами ($n \geq 4$) є принаймні чотири вершини, степені яких не більше 5. Довести, що існує тільки одна (з точністю до ізоморфізму) триангуляція з чотирьох вершин.

.....

15. Для яких n графи з $2n$ вершинами, зображені на рисунку нижче, є планарними?



.....

4.4 Дводольні графи

Неорієнтований граф $G = (X, A)$ називають *дводольним*, якщо множина його вершин X може бути розділена на такі два підмножини X^a і X^b , що кожне ребро має один кінець в X^a , а інший в X^b (рис. 39).

Орієнтований граф G називається *дводольним*, якщо його неорієнтований двійник - двочастковий граф (рис. 39, б, в).

Дводольний граф $G = (X^a \cup X^b, A)$ називають *повним*, якщо для будь-яких двох вершин $x_i \in X^a$ і $x_j \in X^b$ існує ребро (x_i, x_j) в $G = (X, A)$. (рис. 39, г).

Для доказу дводольності графа існує наступна теорема.

Теорема. Граф $G = (X, A)$ є дводольним тоді і тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

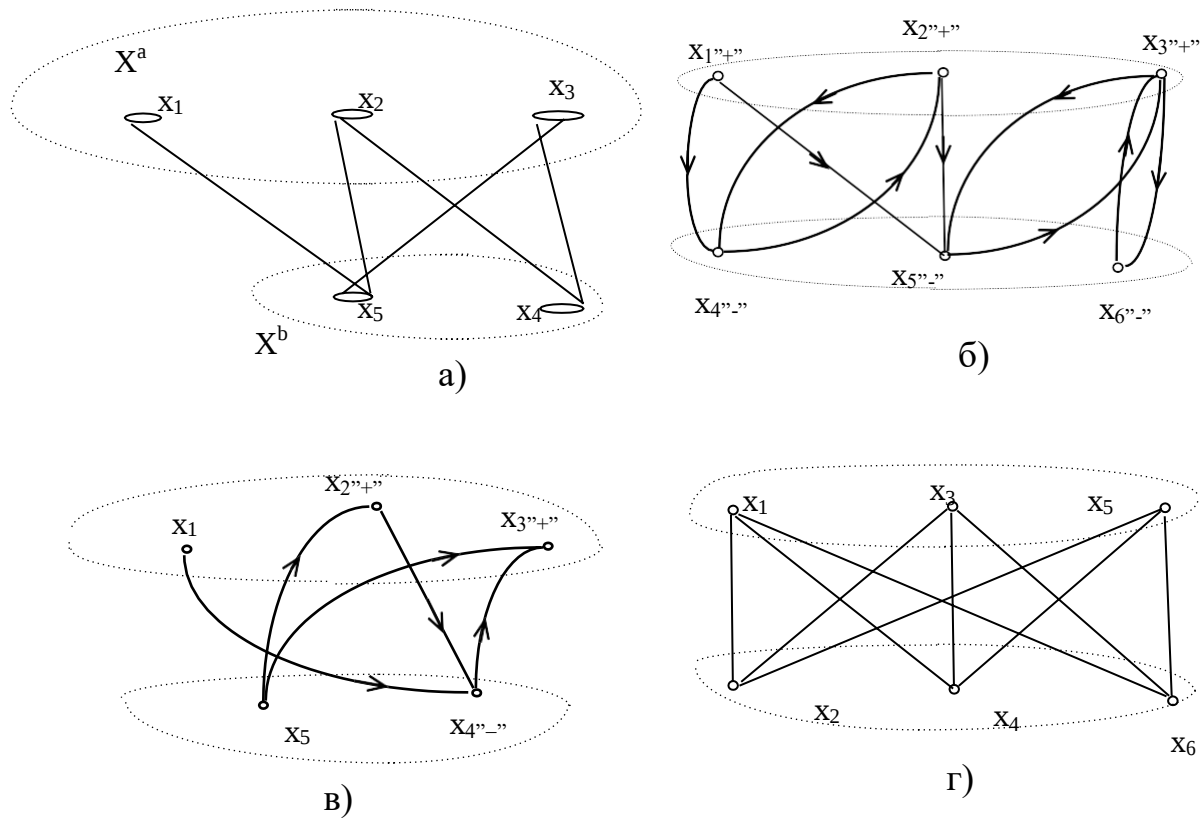


Рис. 39. Дводольні графи: а), б), в), дводольні графи;
г) повний двочастковий граф

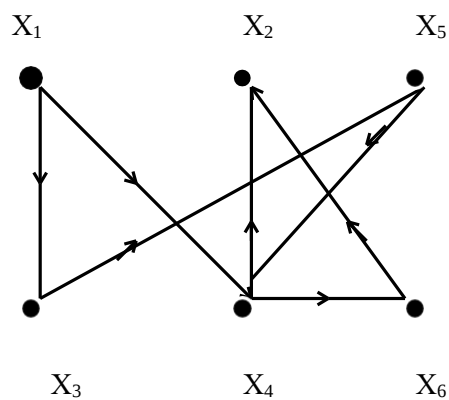


Рис. 40. Побудова циклу

Доказ. Необхідна умова. Оскільки множина X розбивається на дві частини X^a і X^b , то $X^a \cup X^b = X$ і $X^a \cap X^b = \emptyset$.

Нехай існує цикл непарної довжини $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iq}, x_{i1}$. Без втрати спільності припустимо, що $x_{i1} \in X^a$. Згідно з визначенням одна з двох послідовних одна за одною вершин цього циклу має належати множині X^a , а інша - множині X^b , тоді маємо: $x_{i2} \in X^b$, $x_{i3} \in X^a$ і так далі. Отже, $x_{ik} \in X^a$, якщо k - непарне, і $x_{ik} \in X^b$, якщо k - парне.

Ми припустили, що довжина циклу непарна. Тому із співвідношення $x_{iq} \in X^a$ випливає, що $x_{i1} \in X^b$. Це суперечить вихідній умові, оскільки $X^a \cap X^b = \emptyset$ і вершина не може належати одночасно як X^a , так і X^b .

Для більшої ясності можна розглянути цикл непарної довжини для графа зображеного на рисунку 40:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \text{---} & x_3 & \text{---} & x_5 & \text{---} & x_4 & \text{---} & x_2 & \text{---} & x_1 \\ X^a & & X^b & & X^a & & X^b & & X^a & & X^b \end{array}$$

Таким чином, за вершинами, ми бачимо протиріччя: вершина $x_1 \in X^a$ і згідно з визначенням повинна належати X^b , отже розглянутий граф не є дводольним.

Достатня умова. Припустимо, що в графі G не існує циклу непарної довжини. Оберемо одну з вершин графа, наприклад x_i , та позначимо її "+". Виконаємо ітераційну процедуру.

Беремо вже позначену вершину x_i й помічаємо усі вершини з множини $\Gamma^{+1}(x_i)$ знаком, протилежним тому, який присвоєно вершині x_i .

Будемо продовжувати цю операцію до тих пір, доки:

1. усі вершини не будуть помічені, а знаки, що приписані їм, узгоджені (іншими словами, будь-які дві вершини, з'єднані ребром, позначені протилежними знаками);

2. для кожної поміченого вершини x_i всі вершини з множини $\Gamma^{+}(x_i)$ позначені, але існують інші, ще не помічені вершини;

3. деяка вершина, наприклад x_{ik} , яку було вже позначено якимось знаком ("+" або "-"), може бути позначеною тепер (з боку іншої вершини) знаком, протилежним приписаному вершині x_{ik} .

У випадку 1 всі вершини, що помічені знаком "+", віднесемо до множини X^a , а помічені знаком "-" - до множини X^b . Оскільки всі ребра з'єднують вершини, що помічені протилежними знаками, то граф є дводольним.

Розглянемо граф на рисунку 40, б. Помітимо знаком "+", наприклад, вершину x_1 . Знайдемо відображення $\Gamma^{+}(x_1) = \{x_4, x_5\}$. Вершини x_4 і x_5 помічаємо знаком "-". Відображення $\Gamma^{+}(x_4, x_5) = \{x_2, x_3\}$. Помічаємо вершини x_2 і x_3 знаком "+". $\Gamma^{+}(x_2, x_3) = \{x_4, x_5, x_6\}$. Вершину x_6 , що залишилася непоміченою помічаємо знаком "-". Таким чином, ми отримали дві підмножини вершин $X^a = \{x_1, x_2, x_3\}$ і $X^b = \{x_4, x_5, x_6\}$ та показали, що даний граф є дводольним.

Випадок 2 означає, що між поміченою і непоміченою вершинами не існує дуги. Перейдемо до неорієнтованого графу і повторимо процедуру позначок знаками "+" і "-". Якщо залишилися непомічені вершини, то це означає, що граф розпадається на дві, або більше, частини, і кожна з цих частин може розглядатися окремо. Отже, в результаті приходимо до випадку (1).

У графі на рисунку 36, в позначки було розпочато знаком "+" з вершини x_2 . $\Gamma^{+}(x_2) = \{x_4\}$. Вершина x_4 позначається знаком "-". $\Gamma^{+}(x_4) = \{x_3\}$. Вершина x_3 позначається знаком "+". $\Gamma^{+}(x_3) = \emptyset$.

У графі залишилися непомічені вершини, але якщо перейти до неорієнтованого двійникові цього графа, то процедура позначок легко виконується і множину вершин розбиваємо на два підмножини: $X^a = \{x_1, x_2, x_3\}$ і $X^b = \{x_4, x_5, x_6\}$. Таким чином вихідний граф є дводольним.

У випадку 3 вершина x_{ik} має бути позначеною знаком "+" на деякому маршруті (наприклад, M_1), що складається з вершин $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$; причому знаки "+" і "-", що приписуються цим вершинам при русі по

маршруту M_1 , повинні утворювати послідовність, що чергується. Наприклад, для графа на рисунку 37 маршрут M_1 можна обрати таким:

$$M_1: x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_2.$$

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$$

Аналогічно знаком "-" вершина x_{ik} позначається уздовж деякого маршруту M_2 . Наприклад, $M_2: x_1 \rightarrow x \rightarrow x_6 \rightarrow x_2$.

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

Нехай x^* - це передостання (останньої є x_{ik}) загальна вершина маршрутів M_1 і M_2 . Якщо вершину x^* позначено знаком "+", то ділянка від x^* до x_{ik} за маршруту M_1 має бути парною, а ділянка від x^* до x_{ik} маршруту M_2 має бути непарною. Якщо ж вершину x^* позначено знаком "-", то ділянка маршруту M_1 буде непарною, а маршруту M_2 - парною. Отже, цикл, що складається з ділянки маршруту M_1 від x^* до x_{ik} та відповідної ділянки маршруту M_2 , від x_{ik} до x^* , має непарну довжину. Це суперечить припущенню, що граф не містить циклів непарної довжини, і, як наслідок, випадок 3 є неможливим.

У розглянутому прикладі $x^* = x_4$. У маршруті M_1 довжина ділянки від x_4 до x_2 дорівнює 1, а в маршруті M_2 довжина ділянки від x_4 до x_2 дорівнює 2, що в сумі становить непарне число, отже граф містить цикл непарної довжини і не є дводольним.

Завдання до розділу 4.4

1. Наведіть приклади графа, ізоморфного своєму лінійному графу; приклад графа, доповнення якого ізоморфно своєму лінійному графу.

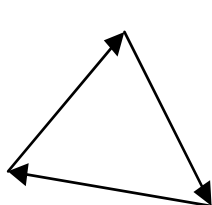
.....

2. Доведіть, що граф ізоморфний своєму лінійному графу тоді і тільки тоді, коли він є 2-регулярним, і опишіть всі такі графи.

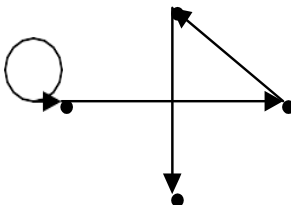
.....

Загальні завдання до розділів 4.1-4.4

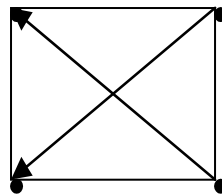
1. Які з наведених нижче графів є повними?



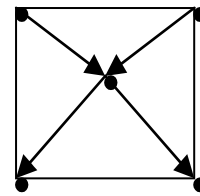
a)



b)



c)



d)

.....

2. За матрицями суміжності визначити, які з графів є повними.

1	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

a)

0	1	0	1	0
0	0	0	1	1
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0

б)

1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

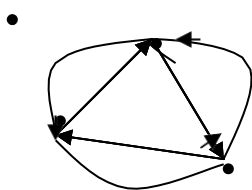
в)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

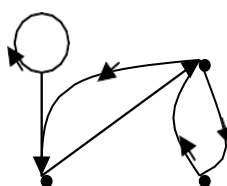
г)

.....

3. Які з наведених нижче графів є симетричними?



a)



б)

1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

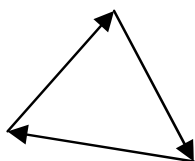
в)

0	1	0	1	0
1	1	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

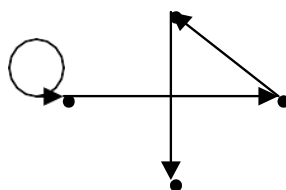
г)

.....

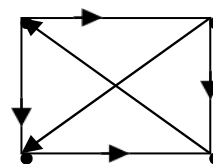
4. Які з наведених нижче графів є антисиметричними?



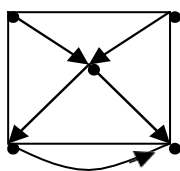
a)



б)



в)



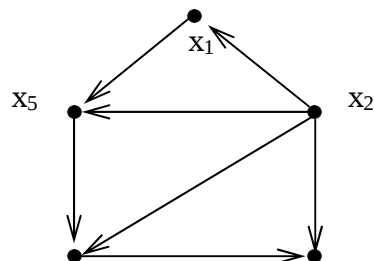
г)

0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

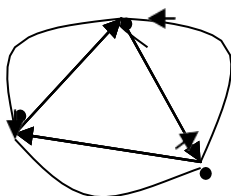
д)

5. Доповнить граф на рисунку до
повного антисиметричного.

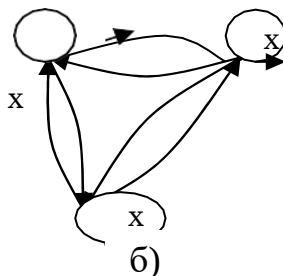
.....



6. Які з наведених нижє графів є
повними симетричними?



а)



б)

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

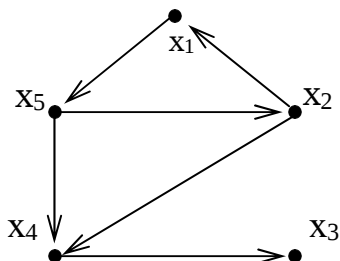
в)

1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

г)

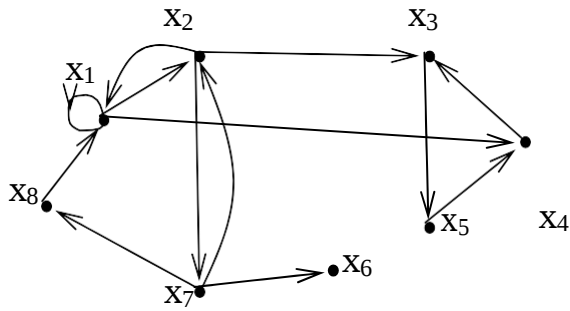
.....

7. Чи є граф на рисунку нижче дводольним? Якщо ні, то яку мінімальну
кількість дуг треба прибрати, щоб він таким став? Зобразити граф з
виділенням двох часток.



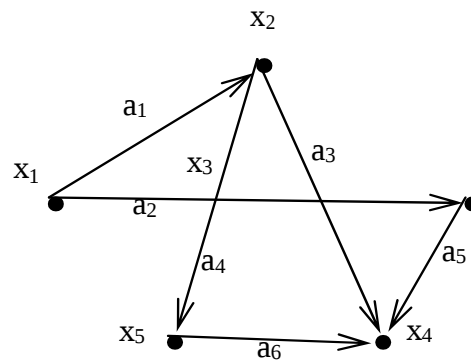
.....

8. Чи є даний граф на рисунку нижче планарними? Якщо так, то
зобразити його на площині без перетинань.



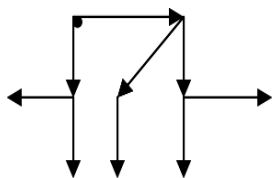
.....

9. Перетворити граф на рисунку нижче в повний.

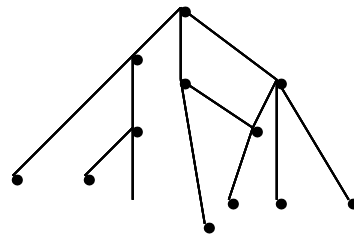


.....

10. Які з наведених графів є деревами?



а)



б)

0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

в)

0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

г)

4.5 Види підграфів

Нехай дано граф $G = (X, A)$, де $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ - множина вершин, $A = \{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ - множина дуг.

Підграфом $G' = (X', A')$ вихідного графа G називається такий граф G' , для якого $X' \subseteq X$ і $A' \subseteq A$. Приклади підграфів показано на рисунку 41, б (вихідний граф наданий на рисунку 41, а).

Остовним підграфом $G_p = (X, A_p)$ графа G називається граф, для якого $A_p \subset A$. Таким чином, остовний підграф має те ж саму множину вершин, що й вихідний граф G , але множина дуг підграфа G_p є підмножиною множини дуг вихідного графа. Приклади остовних підграфів наведені на рисунку 41, в. Для графа, що має m дуг можна побудувати k остовних підграфів:

$$k = C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} = 2^m - 1.$$

Породженим підграфом $G_s = (X_s, \Gamma_s)$ називається граф, для якого $X_s \subset X$ і для кожної вершини $x_i \in X_s$ пряме відображення $\Gamma_s(x_i) = P(x_i) \cap X_s$. Таким чином, породжений підграф складається з підмножини вершин X_s , множини вершин вихідного графа й всіх таких дуг графа G , у яких кінцеві і початкові вершини належать підмножині X_s . Приклади породжених підграфів наведені на рисунку 41, г.

Як ілюстративний приклад розглянемо граф, вершини якого представляють співробітників деякої установи, а дуги - це лінії зв'язку між співробітниками. Тоді граф, що представляє тільки найбільш важливі зв'язки або канали зв'язків даної установи, є остовним підграфом. Граф, що детально описує лінії зв'язків тільки якоїсь частини установи (наприклад, відділу) є породженим підграфом, а граф, що представляє тільки важливі лінії зв'язків у межах відділу, є просто підграфом.

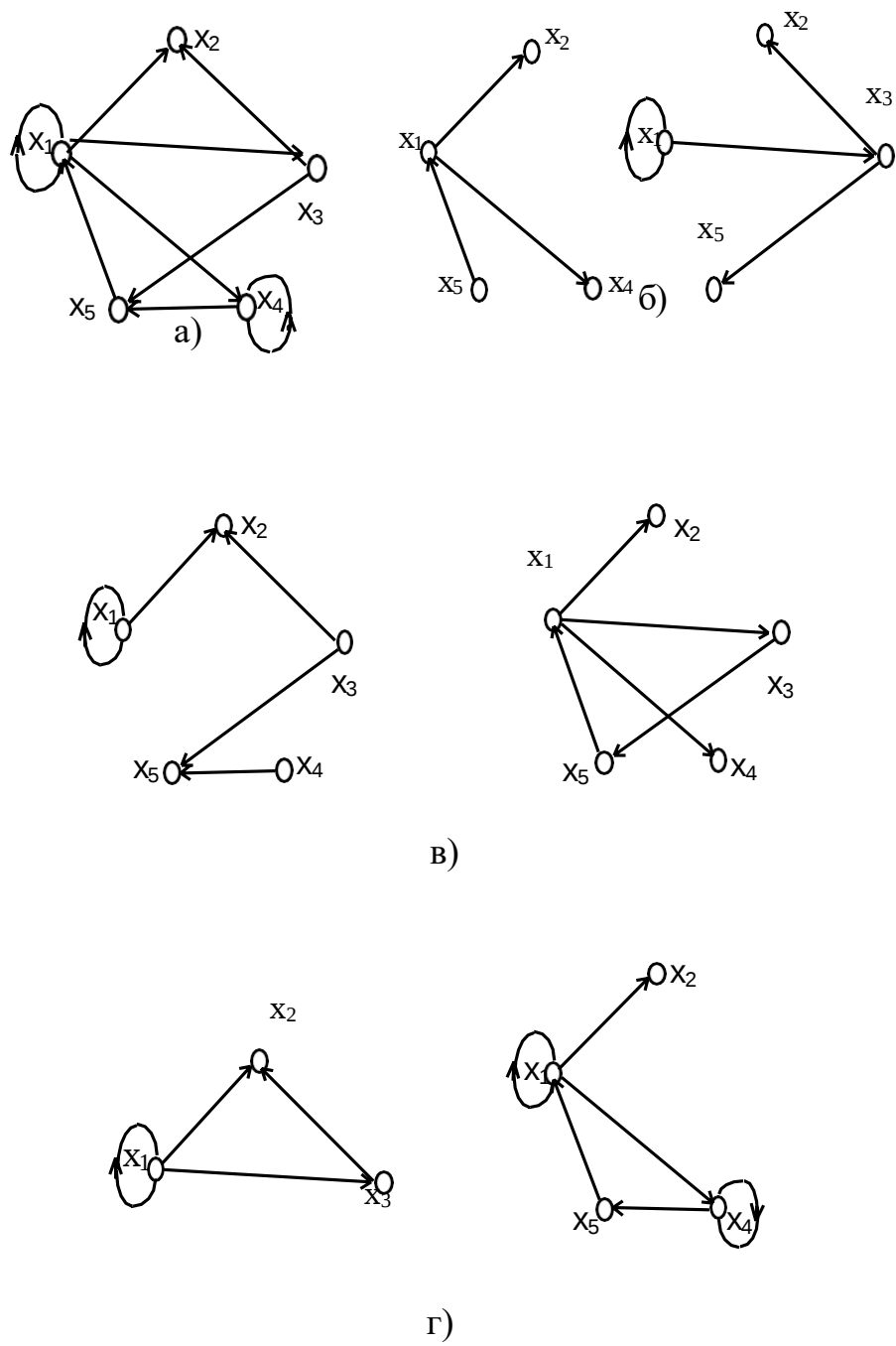


Рис. 41. Види підграфів:

а) вихідний граф; б) підграфи;

в) остовні підграфи; в) породжені підграфи

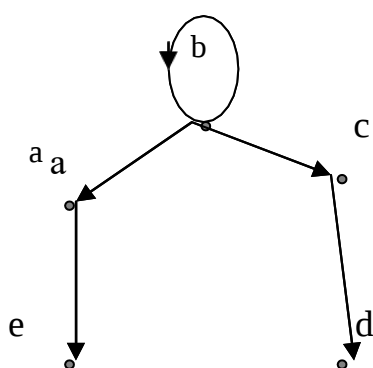
Завдання до розділу 4.5

1. На рисунку а) дано граф.

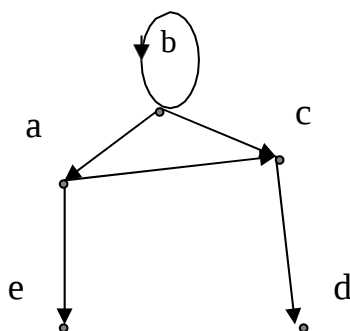
Які з наведених на рисунках б) - е) графів є його підграфами?

Які з наведених на рисунках б) - е) графів є його остовними підграфами?

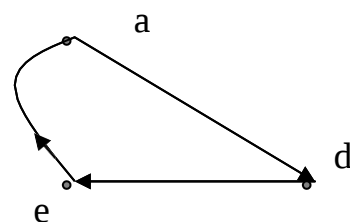
Які з наведених на рисунках (б-ж) графів є для нього породженими підграфами?



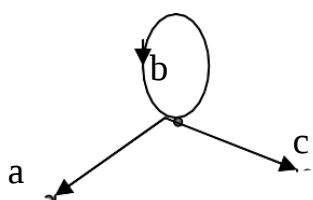
а)



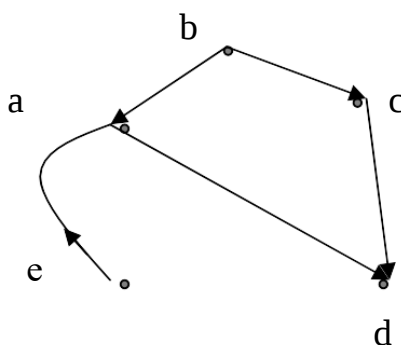
б)



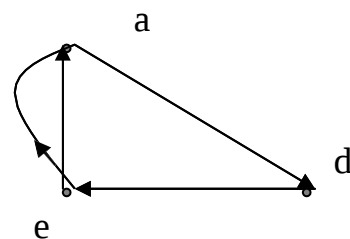
в)



г)



д)



е)

.....

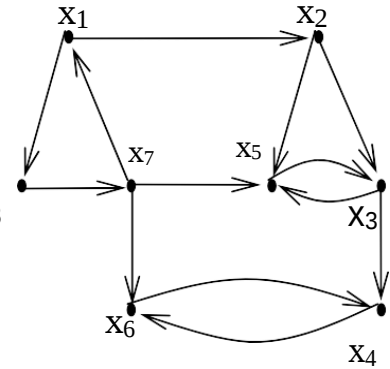
2. Для графа $G=(X, A)$, наданого на рисунку, описати матрицею суміжності:

а) породжений підграф $\langle \{x_1, x_2, x_4, x_5\} \rangle$,

б) остовний підграф (X, A') , де $(x_i, x_j) \in A'$ тоді x_8

й тільки тоді, коли $(i + j) \in \text{нечетний}$,

в) остовний підграф підграфа, одержаного за завданням пункту а) і визначений так само, як у пункті б).



Матриця суміжності вихідного графа

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
x1	0	1	0	0	0	0	0	1
x2	0	0	1	0	1	0	0	0
x3	0	0	0	1	1	0	0	0
x4	0	0	0	0	0	1	0	0
x5	0	0	1	0	0	0	0	0
x6	0	0	0	1	0	0	0	0
x7	1	0	0	0	1	1	0	0
x8	0	0	0	0	0	0	1	0

4.6 Сильно зв'язані графи та компоненти графа

Крім класифікації типів графів, яку надано в розділі 4.1, графи можуть бути класифіковані по зв'язності: сильно зв'язані, однобічно зв'язані, слабо зв'язані і незв'язні.

Орграф називається *сильно зв'язаним* або *сильним*, якщо двох будь-яких різних його вершин x_i і x_j існує принаймні один шлях, що з'єднує ці вершини. Це визначення означає також, що будь-які дві вершини сильно зв'язаного графа є взаємодосяжними. Приклад даного графа показаний на рисунку 42, а.

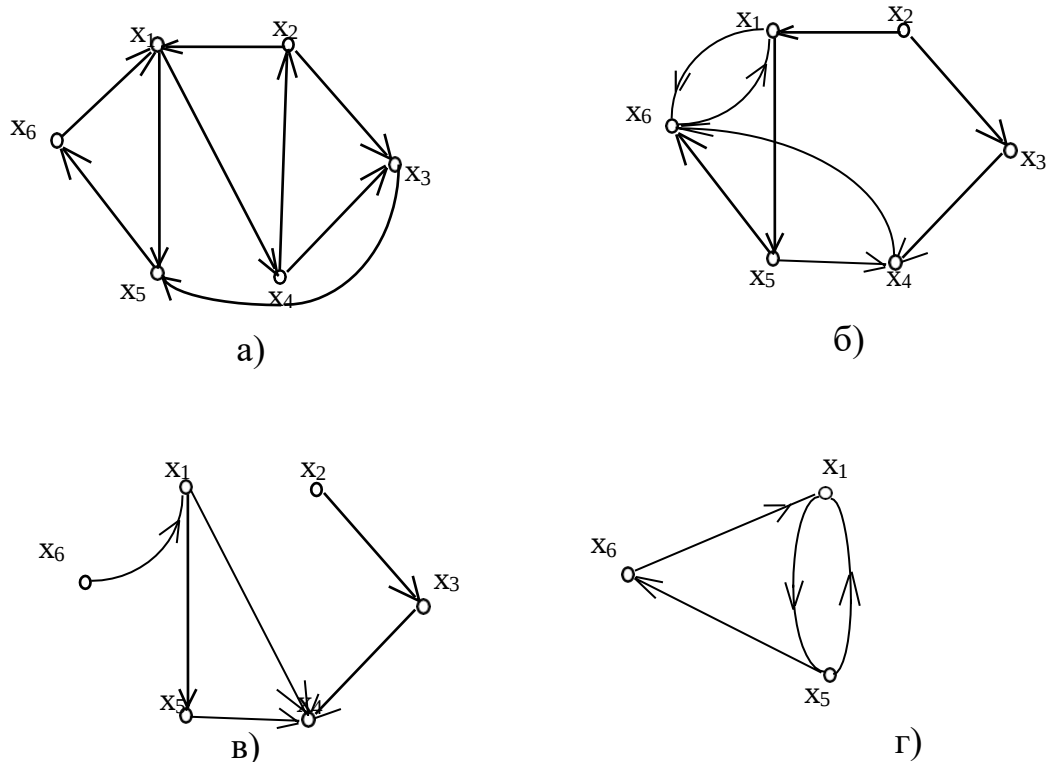


Рис. 42. Види зв'язаних графів:

- а) сильно зв'язний граф; б) однобічно зв'язний граф;
 в) слабо зв'язний граф; г) не зв'язний граф

Орграф називається *однобічно зв'язаним* або *однобічним*, якщо для будь-яких двох різних його вершин x_i і x_j існує принаймні один шлях з x_i до x_j або з x_j до x_i , або обидва шляхи існують одночасно. Граф на рисунку 42, б не є сильно зв'язним, тому що в ньому немає шляху з x_1 до x_3 . Проте він є однобічно зв'язаним.

Орграф називається *слабо зв'язаним* або *слабким*, якщо для будь-яких двох різних вершин графа існує принаймні один маршрут, що з'єднує їх. Граф, зображений на рисунку 42, в не є ані сильним, ані однобічним, оскільки в ньому не існує шляхів від x_2 до x_5 та від x_5 до x_2 . Він є слабо зв'язним.

Орграф називається *незв'язним*, якщо для деякої пари вершин орграфа не існує маршруту, що їх з'єднує (рис. 42, г).

За ознакою зв'язності можуть бути класифіковані й підграфи, але спочатку введемо поняття максимального підграфа. Нехай дана деяка властивість P , яку можуть мати графи.

Максимальним підграфом графа G щодо властивості P називається породжений підграф G_{sm} , що має таку властивість. При цьому не існує іншого породженого графа G_s , у якого $X_s \supset X_{sm}$ і який так само має властивість P . Так, наприклад, якщо в якості властивості P взято сильну зв'язаність, то максимальним сильним підграфом графа G є сильний підграф, що не міститься ні в якому іншому сильному підграфі. Такий підграф називається *сильною компонентою* графа.

Аналогічно, *однобічна компонента* є однобічним максимальним підграфом, а *слабка компонента* - максимальним слабким підграфом.

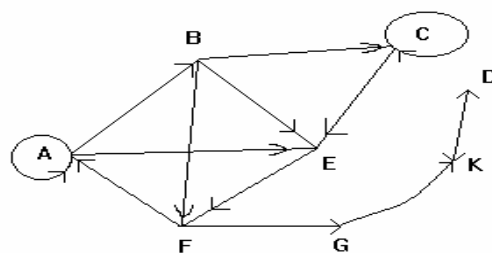
Наприклад, у графі, наведеному на рисунку 42, б, підграф, що складається з вершин $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$, є сильною компонентою графа. З іншого боку підграфи, що включають вершини $\{x_1, x_6\}$ і $\{x_1, x_5, x_6\}$, не є сильними компонентами, (хоч і є сильними підграфами), оскільки вони містяться в графі, що складається з вершин $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$ і, отже, не є максимальними. В графі, показаному на рисунку 39, в, підграф не містить вершини $\{x_1, x_4, x_5\}$ і є односторонньою компонентою.

У графі, наведеному на рисунку 42, г, обидва підграфи, що включають вершини $\{x_1, x_5, x_6\}$ і $\{x_2, x_3, x_4\}$ є слабкими компонентами, і в цього графа є тільки дві компоненти.

З визначень відразу ж випливає, що однобічні компоненти графа можуть мати загальні вершини. Сильна компонента має міститися, принаймі, в одній однобічній компоненті, а однобічна компонента міститься в деякій слабкій компоненті даного графа.

Завдання до розділу 4.6

1. Знайти максимальний сильно пов'язаний підграф, що містить вершину E для графа на рисунку.



Відповідь подається у вигляді:

	A	B	C	D	E	F	G	K	$T^+(E)$
A	1	1	0	0	1	0	0	0	
B	0	0	1	0	1	1	0	0	
C	0	0	1	0	1	0	0	0	
D	0	0	0	0	0	0	0	1	
E	0	0	0	0	0	1	0	0	
F	1	0	0	0	0	0	1	0	
G	0	0	0	0	0	0	0	1	
K	0	0	0	1	0	0	0	0	

$T^-(E)$	A	B	C	D	E	F	G	K

$T^+(E) = \{ \dots \},$
 $T^-(E) = \{ \dots \},$
 $T^+(E) \cap T^-(E) = \{ \dots \},$
 $G_{MCC} = \{ \dots \}.$

.....

2. Які з наведених на рисунках нижче графів є:

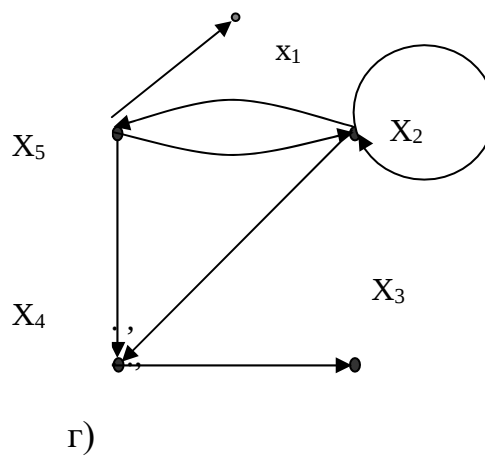
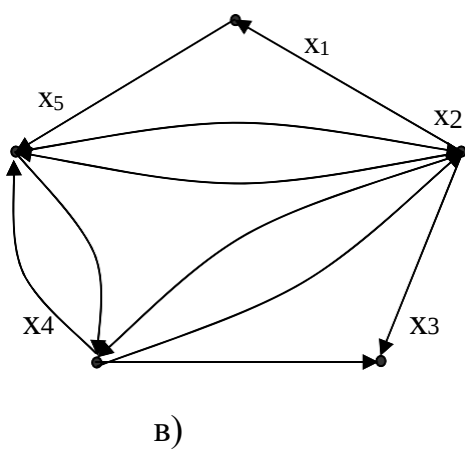
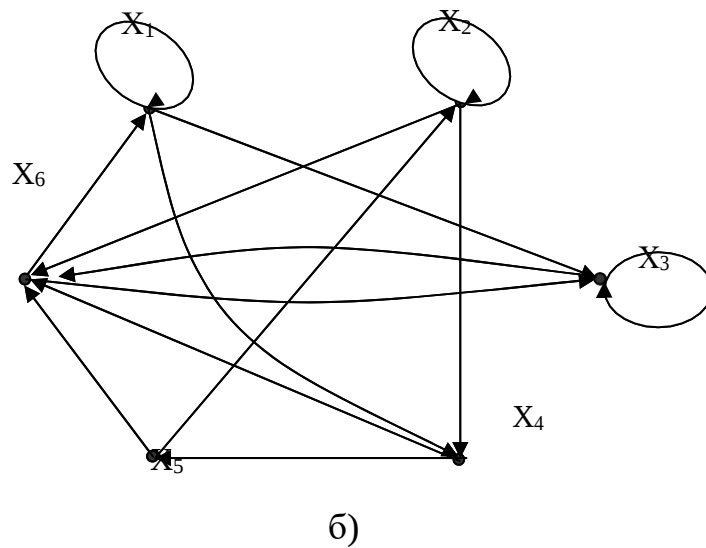
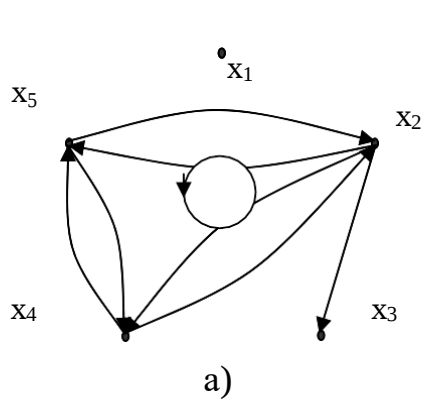
- а) сильно зв'язаними;
- б) однобічно зв'язаними;
- в) слабо зв'язаними і незв'язними?

.....

3. Виділити в представлених графах сильні компоненти, що містять максимальну кількість елементів.

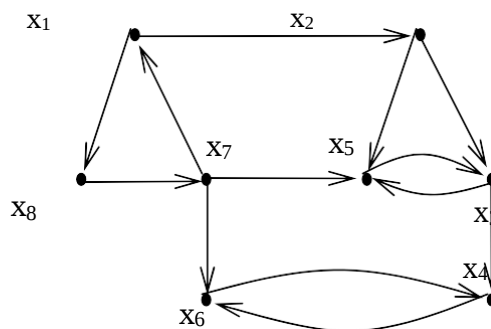
.....

4. Виділити в представлених графах однобічні компоненти, що містять максимальну кількість елементів.



.....

5. Для графа на рисунку знайти сильні компоненти, що містять x_1 та x_5 .



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1
x_2	0	0	1	0	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	1	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	1	0	0
x_5	0	0	1	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	1	0	0	0	0
x_7	1	0	0	0	1	1	0	0
x_8	0	0	0	0	0	0	1	0

Відповідь надається у вигляді:

	X 1	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6	X 7	X 8		T ⁺ (x 1)
X1	0	1	0	0	0	0	0	1		
X2	0	0	1	0	1	0	0	0		
X3	0	0	0	1	1	0	0	0		
X4	0	0	0	0	0	1	0	0		
X5	0	0	1	0	0	0	0	0		
X6	0	0	0	1	0	0	0	0		
X7	1	0	0	0	1	1	0	0		
X8	0	0	0	0	0	0	1	0		
T ⁻ (x ₁)										
	X 2	X 3	X 4	X 5	X 6		T ⁺ (x ₅)			
X2	0	1	0	1	0					
X3	0	0	1	1	0					
X4	0	0	0	0	1					
X5	0	1	0	0	0					
X6	0	0	1	0	0					
T ⁻ (x ₅)										

$$T^+(x_1) = \{ \dots \},$$

$$T^-(x_1) = \{ \dots \},$$

$$G_1 = T^+(x_1) \cap T^-(x_1) = \{ \dots \},$$

$$T^+(x_5) = \{ \dots \},$$

$$T^-(x_5) = \{ \dots \},$$

$$G_2 = T^+(x_5) \cap T^-(x_5) = \{ \dots \}.$$

4.7 Матричний метод розбиття графів на максимально сильно зв'язані підграфи

Нехай дано граф $G=(X, A)$, где $X=\{ x_i \}$, $i =1, 2, \dots, n$ – множина вершин, а $A=\{ a_i \}$, $i =1, 2, \dots, m$ – де множина дуг, описаних матрицею суміжності. Метод розбиття графа на максимально сильно зв'язані підграфи за матрицями досяжності R і контрдостіжності Q полягає в наступному.

1. За матрицею суміжності будується матриця досяжності R . Використовуючи операцію транспонування, знаходимо матрицю контрдосяжності Q .

2. Знаходимо матрицю $C = \{c_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, де n - число вершин вихідного графа, а кожен елемент $C_{ij} = r_{ij} \wedge q_{ij}$, тобто, матриця C є результатом поелементного логічного множення матриць R і Q :

$$C = R \wedge Q.$$

3. Елементи, що мають однакові рядки і стовпці в матриці C групуємо перестановкою рядків і стовпців та отримуємо блочно діагональну матрицю C_b , де кожна група елементів і є максимальним сильно зв'язним підграфом.

Розглянемо приклад розбиття вихідного графа, наданого на рисунку 43.

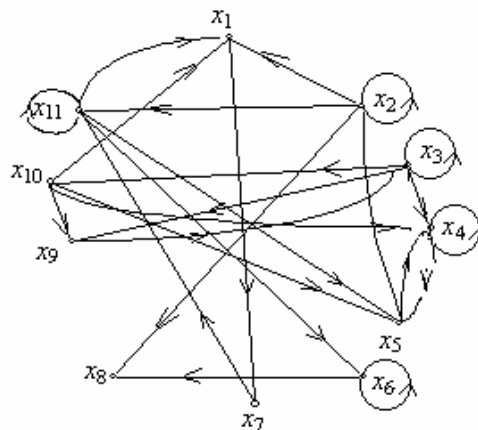


Рис. 43. Вихідний граф для розбиття на сильно зв'язані підграфи

R=

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁
x ₁	1			1	1	1	1	1			1
x ₂	1	1		1	1	1	1	1			1
x ₃			1	1	1	1	1	1	1	1	1
x ₄				1	1						
x ₅				1	1						
x ₆						1		1			
x ₇	1			1	1	1	1	1			1
x ₈								1			
x ₉	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
x ₁₀	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
x ₁₁	1			1	1	1	1	1			1

a)

Q=

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁
x ₁	1	1					1		1	1	1
x ₂		1									
x ₃			1						1	1	
x ₄	1	1	1	1	1		1		1	1	1
x ₅	1	1	1	1	1		1		1	1	1
x ₆	1	1	1			1	1		1	1	1
x ₇	1	1	1				1		1	1	1
x ₈	1	1	1			1	1	1	1	1	1
x ₉			1						1	1	
x ₁₀			1						1	1	
x ₁₁	1	1	1				1		1	1	1

б)

C=

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁
x ₁	1						1				1
x ₂		1									
x ₃			1						1	1	
x ₄				1	1						
x ₅				1	1						
x ₆						1					
x ₇	1						1				1
x ₈								1			
x ₉		1							1	1	
x ₁₀		1							1	1	
x ₁₁	1						1				1

в)

C_в=

	x ₁	x ₇	x ₁₁	x ₂	x ₃	x ₉	x ₁₀	x ₄	x ₅	x ₆	x ₈
x ₁	1	1	1								
x ₇	1	1	1								
x ₁₁	1	1	1								
x ₂				1							
x ₃					1	1	1				
x ₉					1	1	1				
x ₁₀					1	1	1				
x ₄								1	1		
x ₅								1	1		
x ₆										1	
x ₈											1

г)

Рис. 44. Приклад матричного методу розбиття

Як впливає з визначення матриці R , для її знаходження слід для кожної вершини знайти пряме транзитивне замикання. Якщо деяка x_j вершина графа входить до транзитивного замикання $T^+(x_i)$, то елемент матриці R $r_{ij}=1$. Отримані таким чином матриці R і Q показані на рисунку 44, а і б. У результаті логічного множення отримали матрицю S (рис. 44, в), в якій знаходимо однакові рядки. Наприклад, для вершини x_1 рядок збігається з сьомим і одинадцятим. Отже, вершини x_1 , x_7 , x_{11} групуємо разом і вони становлять перший виділений підграф.

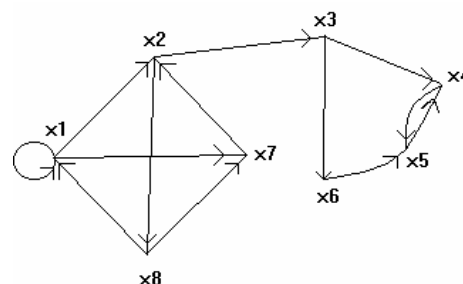
Наприкінці зазначимо, що розбиття графа необхідно для вирішення завдань, пов'язаних з обробкою графів, дані яких розподілені по декількох дисках або обчислювальних вузлів. Ця задача є розробленою, але більшість її рішень не підходить для обробки графів з мільярдами вершин на обчислювальних кластерах, тому що ці рішення призначені для суперкомп'ютерів з можливістю посилати повідомлення з мінімальними затримками.

Одним з можливих підходів, що дозволяє вирішувати задачу розбиття багатовершинного графа на кластери, є це метод *Balanced Label Propagation*, заснований на алгоритмі розповсюдження міток. Він дозволяє використовувати багаторівневу оптимізацію для поліпшення якості розбиття за допомогою ЕОМ з використанням алгоритму *Balanced Label Propagation*. Проте існує певна проблема такого підходу, пов'язана з тим, що у вихідному розбитті, використовуваному для генерації послідовності графів шляхом стягування ребер, в кожному розділі може бути забагато ізольованих вершин, що може впливати на якість результуючого розбиття.

Блок-схему алгоритму матричного методу розбиття наведено в додатку 4.

Завдання до розділу 4.7(з відповідями)

Метод розбиття графа за матрицями R і Q розглянути на прикладі графа, зображеного на рисунку.



Відповідь:

Матриця досяжності R

Матриця контрдосяжності Q

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1								
X_2								
X_3								
X_4								
X_5								
X_6								
X_7								
X_8								

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1								
X_2								
X_3								
X_4								
X_5								
X_6								
X_7								
X_8								

Помноживши поелементно матрицю контрдосяжності і матрицю досяжності, одержимо матрицю, в якій є однакові рядки. Елементи, що відповідні цим рядкам, групуємо та отримуємо блочно-діагональну матрицю.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1								
X_2								
X_3								
X_4								
X_5								
X_6								
X_7								
X_8								

	X_1	X_2	X_7	X_8	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1								
X_2								
X_7								
X_8								
X_3								
X_4								
X_5								
X_6								

Виділимо наступні максимально сильно зв'язані підграфи:

$G_{мсс1} = \{ \dots \}$, $G_{мсс2} = \{ \dots \}$,

$G_{мсс3} = \{ \dots \}$, $G_{мсс4} = \{ \dots \}$.

5 СПЕЦІАЛЬНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ ТА ОРГРАФАМИ

5.1 Розфарбування графів

5.1.1 Хроматичне число графа

Нехай $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Відображення $f : V \rightarrow N_k$ називається *розфарбуванням* графа $G = (V, E)$; для кожної $v \in V$ число $f(v)$ називається *кольором* (фарбою або номером фарби). Розфарбування f графа G називається *правильним*, якщо $(v, w) \in E \Rightarrow f(v) \neq f(w)$, тобто довільні дві суміжні вершини мають різні кольори.

Мінімальна кількість фарб, для якої існує правильне розфарбування графа G , називається (*вершинним*) *хроматичним числом* графа G і позначається $\chi(G)$. Відповідне розфарбування називається *мінімальним*. До побудови правильного розфарбування та хроматичного числа можуть бути зведені такі практичні задачі, як задача складання розкладу, задача розподілу устаткування, задача проектування трансмісії та деякі інші.

Хроматичне число порожнього графа дорівнює 1. Якщо граф має хоча б одне ребро, його хроматичне число не менше 2. Очевидно, що для довільного підграфа H графа G справджується нерівність $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Теорема. Хроматичне число графа дорівнює найбільшому з хроматичних чисел його зв'язних компонент.

Якщо для розфарбування кожної зв'язної компоненти достатньо k фарб, то й для розфарбування всіх зв'язних компонент достатньо k фарб.

Теорема. Якщо в графі G вершина v має степінь k і граф $G-v$ можна правильно розфарбувати в $k' > k$ кольорів, то граф G можна правильно розфарбувати в k' кольорів.

Доведення. Нехай вершини графа $G-v$ можна правильно

розфарбувати в k' кольорів. Вершина v має k суміжних вершин, тому серед k' кольорів є хоча б один, у який не пофарбовано вершини, суміжні з v . Пофарбуємо її в цей колір і одержимо правильне розфарбування всього графа в k' фарб.

Висновок 1. Якщо в графі G вершина v має степінь k і $\chi(G-v) > k$, то $\chi(G) = \chi(G-v)$. (За теоремою $\chi(G) \leq \chi(G-v)$. Але $G-v \subseteq G$, тому $\chi(G-v) \leq \chi(G)$, і $\chi(G) = \chi(G-v)$).

Висновок 2. Якщо $\chi(G)$ - найбільший зі степенів вершин графа G , то $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$. (Застосуємо індукцію за кількістю вершин. Якщо граф має одну чи дві вершини, твердження очевидне. Нехай для всіх графів, кількість вершин у яких дорівнює n ($n \geq 1$), твердження справджується. Розглянемо граф G з $n+1$ вершиною й вилучимо з нього довільну вершину v . Одержимо граф $G-v$, у якому $\Delta(G-v) \leq \Delta(G)$. Згідно з припущенням індукції для його розфарбування достатньо $1 + \Delta(G)$ фарб. Оскільки $\delta(v) \leq \Delta(G) < 1 + \Delta(G)$, за теоремою граф G можна правильно розфарбувати не більш як $1 + \Delta(G)$ фарбами. За принципом математичної індукції твердження доведено).

5.1.2 Гіпотеза чотирьох фарб та теорема про п'ять фарб для планарних графів

Гіпотеза чотирьох фарб пов'язана з розфарбуванням політичних географічних карт. Вважається, що територія кожної країни є зв'язною областю, а суміжні країни мають спільну межу у вигляді лінії (а не однієї спільної точки). Території суміжних країн фарбуються в різні кольори. Гіпотеза полягає в тому, що для будь-якої карти достатньо чотирьох фарб.

Ця гіпотеза має еквівалентне формулювання в термінах графів. Областям карти відповідають вершини графа, їх межах - ребра. Очевидно, що цей граф плоский. Таким чином, гіпотеза чотирьох фарб полягає в

існуванні правильного розфарбування вершин довільного планарного графа не більш ніж у чотири кольори.

Ця гіпотеза (для карт) з'явилася ще в середині 19-го століття. Її непрямо підтверджує час (більше століття), протягом якого численні спроби побудувати контрприклад залишалися марними. Гіпотезу чотирьох фарб доведено для окремих класів графів, наприклад, для графів, що мають не більше 41 вершини. В 1969 році Х.Хеєш звів проблему чотирьох красок до дослідження великої, але скінченної множини графів. Пізніше кількість графів цієї множини було зведено до 1482 і вже в 1976 році колективу математиків і програмістів під керівництвом К.Аппеля і В.Хейкена за допомогою ЕОМ вдалося розфарбувати всі ці графи. У 1996 році Н.Робертсон, Д.Сендерс, П.Сеймур, Р.Томас запропонували нове, простіше доведення гіпотези чотирьох фарб, але знову з використанням комп'ютера. Проте з повною мірою математичної строгості її не доведено, оскільки, наприклад, не доведено коректність компілятора та коректність виконання побудованого програмного коду, за допомогою якого будувалося розфарбування, крім того, і зведення загального випадку до перебору скінченної множини графів, і розфарбування останніх складно повторити.

Обмежимося більш слабким результатом (його одержав Хейвуд у 1890-му році).

Теорема (про 5 фарб). Для правильного розфарбування довільного планарного графа достатньо п'яти фарб.

Доведення. Оскільки ізоморфні графи мають однакові хроматичні числа, то твердження достатньо довести для плоских графів. Застосуємо індукцію за кількістю вершин. Будь-який плоский граф не більш ніж з 5 вершинами можна правильно розфарбувати у 5 фарб.

Припущення індукції: всі плоскі графи з n ($n \geq 5$) вершинами можна розфарбувати у 5 фарб. Нехай $G = (V, E)$ - плоский граф з $n+1$

вершиною. У будь-якому планарному графі існує вершина v степеня не більше 5 (задача 5.7). Граф $G-v$ має n вершин, тому його можна правильно розфарбувати фарбами 1, 2, 3, 4, 5.

Нехай це розфарбування задається функцією $f: V \setminus \{v\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Якщо деякий колір i (від 1 до 5) не застосовується для вершин, суміжних із v , візьмемо $f(v) = i$, що залишить розфарбування графа правильним.

Нехай $\delta(v) = 5$ і вершини v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , суміжні з v , пофарбовано в усі 5 кольорів, тобто $f(v_i) = i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Нехай вершини розташовано на площині так, як показано на рисунку 45.

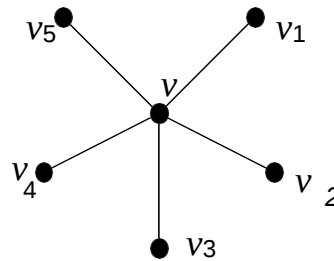


Рис. 45. Вершина v та п'ять суміжних із нею

Нехай $V_i = \{x \mid x \in V \setminus \{v\} \wedge f(x) = i\}$ - множина вершин, пофарбованих i -ю фарбою. Розглянемо $G_{13} = G(V_1 \cup V_3)$ - підграф графа G , визначений множиною вершин $V_1 \cup V_3$.

Якщо вершини v_1 і v_3 належать різним компонентам зв'язності графа G_{13} , то в компоненті, яка містить v_3 , міняємо місцями кольори 1 і 3. Отримаємо нову функцію f_1 правильного розфарбування, для якої $f_1(v_1) = f_1(v_3) = 1$, $f_1(v_i) = i$, $i = 2, 4, 5$. Покладемо $f_1(v) = 3$ і одержимо правильне розфарбування f_1 всього графа у 5 фарб.

Якщо вершини v_1 і v_3 зв'язані в G_{13} , то простий ланцюг, що їх з'єднує, складається лише з вершин кольорів 1 і 3. Цей ланцюг разом з ланцюгом (v_1, v, v_3) дає простий цикл, що обов'язково оточує одну з вершин v_2 чи v_4 . В такому разі вершини v_2 і v_4 не можна з'єднати простим

ланцюгом, що містить тільки вершини кольорів 2 і 4. Тоді в графі $G_{24} = G(V_2 \cup V_4)$ вершини v_2 і v_4 належать різним компонентам зв'язності. Тоді в компоненті графа G_{24} , що містить вершину v_4 , міняємо місцями кольори 2 і 4, утворюючи нову функцію f_1 правильного фарбування, для якої $f_1(v_2) = f_1(v_4) = 2$, $f_1(v_i) = i$, $i = 1, 3, 5$. Покладемо $f_1(v) = 4$ і одержимо правильне розфарбування f_1 всього графа у 5 фарб. За принципом індукції твердження доведено.

Окремою операцією, пов'язаною з хроматизацією графів є *створення критичних графів*. Граф G називається *критичним*, якщо в результаті вилучення будь-якої вершини з G утворюється граф G' , хроматичне число якого строго менше $\chi(G)$. Критичний граф G , для якого $\chi(G) = k$, називається *k-критичним*.

Завдання до розділу 5.1

1. Визначити хроматичне число:

- а) повного графа K_n ; б) повного двочасткового графа $K_{n,m}$;
- в) довільного двочасткового графа; г) простого циклу довжини $2k$, $k \in \mathbb{N}$;
- д) простого циклу довжини $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$; е) дерева.

.....

2. Чому дорівнює хроматичне число повного графа K_n , з якого вилучено одне ребро?

.....

3. Довести, що для кожного неповного графа існує правильне розфарбування, при якому принаймні дві вершини графа пофарбовано в один колір.

.....

4. Знайти графи, які мають різні хроматичні числа і в яких:

- а) кількість вершин степеня k однакова для всіх $k \geq 0$;
- б) кількість простих циклів довжини l однакова для всіх l ;
- в) виконуються обидві умови з пунктів а і б.

5. Довести, що хроматичне число непорожнього графа G дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли граф G не містить циклів непарної довжини.

.....

6. Довести, що хроматичне число зв'язного плоского нетривіального графа дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли степені всіх його граней парні.

7. Довести, що хроматичне число графа дорівнює найбільшому з хроматичних чисел його блоків.

.....

8. Довести, що для правильного розфарбування довільного кубічного графа достатньо чотирьох фарб.

.....

9. Довести, що довільний планарний граф можна правильно розфарбувати не більш ніж у шість кольорів.

.....

10. Нехай l - довжина максимального простого ланцюга в графі G . Довести, що $\chi(G) \leq l+1$. Довести, що якщо будь-які два цикли непарної довжини в графі G мають спільну вершину, то $\chi(G) \leq 5$.

.....

11. Довести, що довільний критичний граф є зв'язним. Довести, що будь-який повний граф є критичним.

.....

12. Довести, що простий цикл C_n є критичним графом тоді й тільки тоді, коли кількість його вершин n непарна.

.....

13. Довести, що степені всіх вершин k -критичного графа G не менше $k-1$.

.....

14. Довести, що граф 3-критичний тоді й тільки тоді, коли він є простим циклом непарної довжини.

5.2 Перетворення орграфів

5.2.1 Модель орієнтованого графа

Для повноти викладення почнемо з означень, які вже були наведені раніше в розділі 1. Нехай V - непорожня скінченна множина, а E - довільна підмножина другого декартового степеня множини вершин, тобто $E \subseteq V \times V$. Пара (V, E) називається *орієнтованим графом*, чи *орграфом*, елементи множини V - *вершинами*, або *вузлами*, а елементи множини E - *орієнтованими ребрами*, або *дугами*. Дуги (v, w) і (w, v) орграфа називаються *симетричними*. Орграф, що не має пар симетричних дуг, називається *направленим*. Кожну пару симетричних дуг між різними вершинами v та w можна розглядати як одне неорієнтоване ребро $\{v, w\}$. Дуга вигляду (v, v) називається *петлею*. Надалі під орграфом будемо розуміти орграф без петель. Таким чином, за означенням в орієнтованому графі немає петель та кратних дуг.

Повернемось тепер до нашого прикладу турніра між чотирма футбольними командами, в якому кожні дві команди зіграли між собою не більше одного матчу. Так само цей турнір можна подати орграфом, вершинами якого є команди. Якщо дві команди зіграли між собою матч, з'єднаємо відповідні вершини дугою ребром, що веде від команди-переможця до програвшої команди. Якщо дві команди зіграли у нічию, проведемо дві симетричні дуги. Так в футбольному турнірі, представленому в графі з рисунок 46, команди "Динамо" та "Шахтар" зіграли у нічию, а "Динамо" виграло у "Спартак".

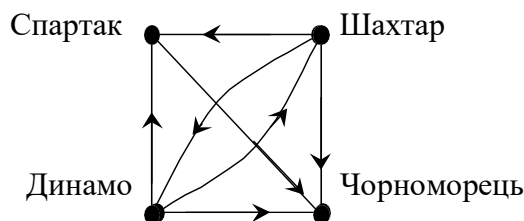


Рис. 46. Орграф для подання турніра

Означення підграфа, надграфа, суграфа, об'єднання, перетина, різниці, прямої суми, доповнення, віднімання вершини й дуги (орієнтованого ребра), а також ізоморфізму (див. попередні розділи), можуть бути поширені на оргграфи без змін.

Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, ступінь вершини. Нехай $G = (V, E)$ - оргграф, $e \in E$ дуга. Кажуть, що дуга $e = (v, w)$ веде з вершини v у вершину w , а вершини v і w є кінцевими вершинами дуги (v, w) . При цьому вершину v називають *початком* дуги (v, w) , w - *кінцем*, v - суміжною до w , а w - суміжна із v . Кожна дуга інцидентна своїм кінцевим вершинам. Дві різні дуги, інцидентні одній і тій самій вершині, називаються *суміжними*.

Півступенем виходу $\delta^+(v)$ вершини v називається кількість вершин, суміжних із v , тобто, кількість ребер, що виходять з вершини v ; *півступенем входу* $\delta^-(v)$ суміжних до v , тобто кількість ребер, які входять у v . *Ступенем* вершини v називається кількість дуг, інцидентних v , і позначається $\delta(v)$. Оскільки розглядаються оргграфи без петель, з цих означень випливає наступне твердження.

Теорема. Для будь-якої вершини v оргграфа справджується рівність $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.

В оргграфі з n вершинами півступінь вершини може мати значення від 0 до $n-1$, а ступінь - від 0 до $2(n-1)$.

Нехай є оргграф $G = (V, E)$, де $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (2, 4), (2, 7), (3, 7), (4, 6), (5, 6), (6, 7), (7, 5)\}$. Його діаграму подано на рисунку 47.

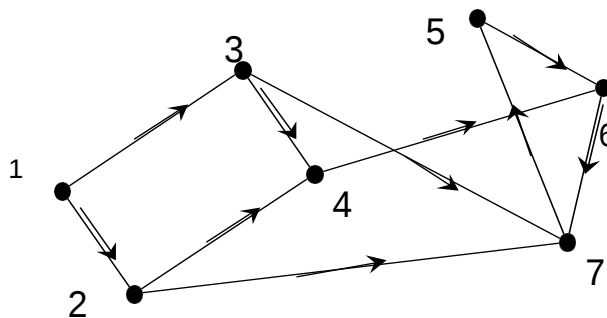


Рис. 47. Приклад оргграфа для ілюстрації означень

Для цього графа вершина 2 є суміжною із вершиною 1 та суміжною до вершини 4. Обчислимо півстепені та степені вершин:

$$\begin{aligned} \delta^+(1) &= 2, & \delta^-(1) &= 0, & \delta^+(2) &= 2, & \delta^-(2) &= 1, & \delta^+(3) &= 2, & \delta^-(3) &= 1, \\ \delta^+(4) &= 1, & \delta^-(4) &= 2, & \delta^+(5) &= 1, & \delta^-(5) &= 1, & \delta^+(6) &= 1, & \delta^-(6) &= 2, \\ \delta^+(7) &= 1, & \delta^-(7) &= 3; & \delta(1) &= 2, & \delta(2) &= 3, & \delta(3) &= 3, & \delta(4) &= 3, \\ \delta(5) &= 2, & \delta(6) &= 3, & \delta(7) &= 4. \end{aligned}$$

5.2.2 Обернений орграф. Принцип орієнтованої двоїстості

Орграфом, *оберненим* до даного орграфа $G = (V, E)$, називається оргграф $G' = (V, E')$, де $E' = \{(w, v) \mid (v, w) \in E\}$. Іншими словами, оргграф, обернений до оргграфа G , одержується зміною орієнтації кожної дуги оргграфа на протилежну (рис. 48). Для довільного оргграфа G справджується очевидна рівність $G' = G$, тобто оргграф, обернений до оберненого, збігається з початковим оргграфом.

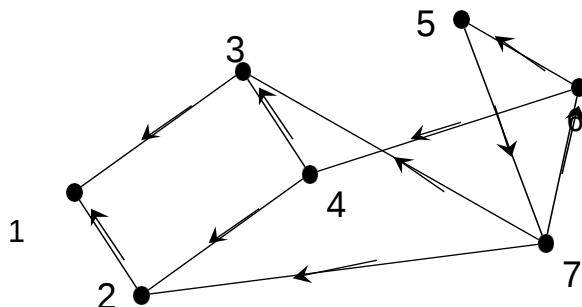


Рис. 48. Граф, обернений до графа на рисунку 47

Нам уже знайомі такі “обернені” поняття, як півстепені виходу та півстепені входу. Відносно орієнтації всі поняття пов’язані між собою достатньо потужним принципом.

Принцип орієнтованої двоїстості. Для довільної теореми про оргграфи можна сформулювати відповідну двоїсту теорему, замінивши кожне поняття на обернене до нього.

"Орлема про рукостискання". У довільному оргграфі кожна дуга має

рівно один початок та рівно один кінець, тому справджується наступне твердження.

Теорема. Для довільного орграфа $G = (V, E)$ виконується

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |E|.$$

$$v \in V \quad v \in V$$

Ця теорема є аналогом “леми про рукостискання” для неорієнтованих графів, тому її інколи називають “орлемою про рукостискання”.

Завдання до розділу 5.2

1. Довести, що для довільного орграфа $G = (V, E)$ справджується нерівність $|E| \leq |V| \cdot (|V|-1)$.

.....

2. Побудуйте граф для кожного з наведених нижче відношень на A :

а) $A = \{a, b, c, d, e\}$; $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c), (d, e), (e, d)\}$;

б) $A = \{a, b, c, d, e\}$; $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (c, a), (a, c)\}$;

в) $A = \{a, b, c, d, e\}$;

$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (d, e), (e, d), (b, e), (e, b), (b, d), (d, b)\}$;

г) $A = \{a, b, c, d\}$;

$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (d, a), (a, d), (b, d), (d, b), (a, c), (c, a)\}$.

5.3 Шляхи та цикли в орграфах

Шляхом в орграфе називається послідовність дуг, в якій кінцева вершина будь-якої дуги, крім останньої, є початковою вершиною наступної дуги. Наприклад, для графа на рисунку 49 послідовності дуг $M_1: a_6, a_5, a_9, a_8, a_4$; $M_2: a_1, a_6, a_5, a_9, a_7$; $M_3: a_1, a_6, a_5, a_9, a_{10}, a_6, a_4$ є шляхами. Шляхи можуть бути різними.

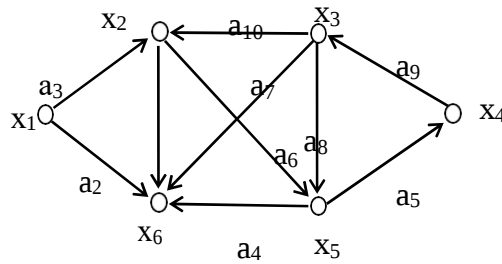


Рис. 49. Орграф

Орланцюгом (або простим шляхом) називається такий шлях, в якому кожна дуга використовується не більше одного разу. Так шляхи M_1 і M_2 є орланцюгами, а M_3 - ні, оскільки дуга a_6 використовується двічі.

Простим орланцюгом (або елементарним шляхом) називається шлях, у якому кожна вершина використовується не більше одного разу. Простим орланцюгом є шлях M_2 .

Для неорієнтованого графа поняття *маршруту*, *ланцюга* і *простого ланцюга* аналогічні поняттям шляху, орцепі та простій орцепі в орграфі. (У визначеннях слід замінити слово "дуга" на слово "ребро").

Якщо $v_0 = v_n$, то маршрут називається *замкненим*, або *циклічним*. Для замкненого маршруту його остання та перша дуги вважаються сусідніми. *Кістяковий маршрут* містить всі вершини орграфа. Нетривіальний замкнений ланцюг називається *циклом*. Цикл $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ називається *простим*, або *контуром*, якщо його вершини $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Зауважимо, що тривіальний маршрут є замкненим за означенням. На відміну від неорієнтованих графів, найменша можлива довжина контура дорівнює двом, наприклад, в орграфі $G = (\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$ існує контур $(1, 2, 1)$ довжини 2. Цикл, що містить усі дуги орграфа, називається *ейлеровим*. Ланцюг, що містить усі дуги орграфа, також називається *ейлеровим*.

Для орграфів маршрут означається аналогічно неорієнтованим графам. В орграфі $G = (V, E)$ послідовність вершин і дуг $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n,$

v_n), де $v_0, \dots, v_n$ - вершини, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $1 \leq i \leq n$, - дуги, називається (орієнтованим) маршрутом. Дуги e_i та e_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$) є сусідніми дугами маршруту й мають принаймні одну спільну вершину. Вказаний маршрут веде з v_0 у v_n . Цей маршрут можна позначити $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, не вказуючи його дуги. Число n називається довжиною маршруту. Для систематичності міркувань вводиться тривіальний, або нуль-маршрут - маршрут, що складається з єдиної вершини й має довжину 0. Інші маршрути вважаються нетривіальними.

Такими чином, маршрут називається ланцюгом, якщо всі його ребра попарно різні, і простим ланцюгом, або шляхом, якщо всі його вершини попарно різні.

Якщо $v_0 = v_n$, то маршрут називається *замкненим*, або *циклічним*. Для замкненого маршруту його остання та перша дуги вважаються сусідніми. *Кістяковий маршрут* містить всі вершини орграфа. Нетривіальний замкнений ланцюг називається *циклом*. Цикл $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ називається *простим*, або *контуром*, якщо його вершини $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Зауважимо, що тривіальний маршрут є замкненим за означенням. На відміну від неорієнтованих графів, найменша можлива довжина контура дорівнює двом, наприклад, в орграфі $G = (\{1, 2\}, \{(1, 2), (2, 1)\})$ існує контур $(1, 2, 1)$ довжини 2. Цикл, що містить усі дуги орграфа, називається *ейлеровим*. Ланцюг, що містить усі дуги орграфа, також називається *ейлеровим*.

Шлях або маршрут можна зображати також послідовністю вершин. Так шлях M_1 можна представити послідовністю вершин $x_2, x_5, x_4, x_3, x_5, x_6$ і таке уявлення часто виявляється більш корисним.

Граф, що не має контурів, називається *безконтурним*, або *ациклічним*. Зауважимо, що граф, обернений до безконтурного, є безконтурним.

Кожен маршрут є орієнтованим від своєї першої вершини до останньої. Для орграфів вводиться також поняття півмаршруту, який не

має орієнтації й є аналогічним маршруту в графі. *Півмаршрутом* в оргграфі називається послідовність вершин і дуг $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \dots, v_n$ - вершини, але дугою e_i , $1 \leq i \leq n$, може бути як (v_{i-1}, v_i) , так і (v_i, v_{i-1}) . *Півшлях, півконтур* та інші поняття означаються аналогічно.

У графі на рисунку 48 існує контур (5, 6, 7, 5), який одночасно є півконтуром, та півмаршрут¹(6, 7, 3), який не є маршрутом. Також у цьому графі існують шляхи (1, 3, 4, 6, 7) та (1, 2, 7), що ведуть з вершини 1 в вершину 7. Як і для неорієнтованих графів, якщо $Z_1 = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)$ і $Z_2 = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$ - маршрути (півмаршрути), то під $Z_1 \cdot Z_2$ розуміється маршрут (півмаршрут) $(v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$, а під Z^{-1} - півмаршрут $(v_i, v_{i-1}, \dots, v_1, v_0)$.

Завдання до розділу 5.3

1. Довести, що в оргграфі будь-який маршрут, який веде з вершини v у вершину w ($v \neq w$), містить шлях, що веде з v у w .

.....

2. Довести, що в оргграфі будь-який нетривіальний замкнений маршрут містить контур.

.....

3. Довести, що в оргграфі будь-яка дуга замкненого маршруту належить деякому контуру, що міститься в цьому маршруті.

.....

4. Навести приклад оргграфа, жоден цикл якого не є кістяковим маршрутом, але сам оргграф має кістяковий замкнений маршрут.

.....

метрики і не є метрикою. Вершини v і w називаються *взаємно досяжними*, якщо w досяжна з v , а v досяжна з w .

Вершина, з якої недосяжна жодна інша вершина орграфа, називається *тупиковою*. Згідно з означенням, з тупикової вершини не виходить жодного ребра, тому має місце наступна теорема.

Теорема. Вершина орграфа є тупиковою тоді й тільки тоді, коли вона має нульовий півстепінь виходу.

Вершина, яка не є досяжною з довільної іншої вершини орграфа, називається *недосяжною*. Поняття недосяжної та тупикової вершини також є оберненими поняттями. Згідно з принципом оберненої двоїстості маємо теорему, аналогічну попередній.

Теорема. Вершина орграфа є недосяжною тоді й тільки тоді, коли вона має нульовий півстепінь входу.

У графі на рисунку 48 вершина 1 є недосяжною, а на рисунку 49 вершина 1 є тупиковою. Існують типи вершин, протилежні до тупикових та недосяжних. *Джерелом* в орграфі називають вершину, з якої досяжна будь-яка вершина орграфа. *Стік* визначається двоїстим чином: *стоком* у орграфі називають вершину, яка досяжна з будь-якої вершини орграфа. Наприклад, у графі на рис. 47 вершина 1 є джерелом, а вершини 5, 6, 7 - стоками.

Завдання до розділу 4.4

1. Довести, що оргграф, який не містить тупикових вершин, має принаймні один контур. Довести, що в безконтурному орграфі існує хоча б одна тупикова вершина.

.....

2. Довести, що оргграф, який не містить недосяжних вершин, має принаймні один контур. Довести, що в безконтурному орграфі завжди існує хоча б одна недосяжна вершина.

3. Довести, що в безконтурному орграфі існує не більше одного джерела. Довести, що в безконтурному орграфі існує не більше одного стоку.

.....

4. Довести, що якщо в орграфі з джерелом існує недосяжна вершина, то вона збігається з джерелом. Довести, що якщо в орграфі зі стоком існує тупикова вершина, то вона збігається зі стоком.

.....

5. Довести, що тупикові та недосяжні вершини орграфа не входять до складу жодного нетривіального замкненого маршруту.

.....

6. Нехай в орграфі вершина u є досяжною з вершини v , а w - з u . Довести, що w є досяжною з v . Довести, що в орграфі вершини v і w є взаємно досяжними тоді й тільки тоді, коли вони обидві належать деякому замкненому маршруту орграфа.

.....

7. Довести, що коли в орграфі вершина u є досяжною з вершини v , а w - з u , то $d(v, u) + d(u, w) \geq d(v, w)$.

.....

5.5 Типи зв'язності

Поняття зв'язності для орграфів означається у три різних способи. Орграф називається *сильно зв'язним*, або *сильним*, якщо дві довільні його вершини є взаємно досяжними; *однобічно зв'язним*, або *однобічним*, якщо для довільних двох його вершин принаймні одна є досяжною з іншої; *слабо зв'язним*, або *слабким*, якщо довільні дві його вершини можна з'єднати півмаршрутом. Зрозуміло, що кожен сильний орграф є однобічним, а однобічний - слабким, але зворотні твердження в загальному випадку хибні. Наприклад, орграф на рисунку 50, а є сильним, на рисунку

50, б є однобічно, але не сильно зв'язним; приклад слабого, але не однобічного орграфа наведено на рис. 50, в. Орграф на рисунку 48 також є прикладом слабого, але не однобічного орграфа.

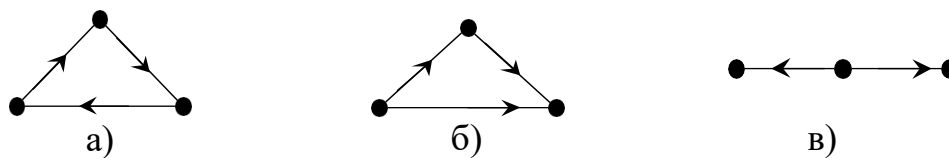


Рис. 50. Різні типи зв'язності графів

Орграф називається *незв'язним*, якщо він не є слабо зв'язним. У незв'язному орграфі не має ні стоків, ні джерел. Для орграфів означено три типи компонент зв'язності. *Сильною компонентою* орграфа називається максимальний сильно зв'язний підграф, *однобічною* — максимальний однобічний і *слабкою* — максимальний слабкий підграф.

Неорієнтований мультиграф, який отримується в результаті зняття орієнтації з дуг орграфа G , називається *основою* орграфа G . Орграф є слабо зв'язним тоді й тільки тоді, коли його основа — зв'язний мультиграф. (Поняття зв'язності для мультиграфів означається аналогічно зв'язності неорієнтованих графів.)

Завдання до розділу 5.5

1. Довести, що орграф є сильно зв'язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є кістяковий замкнений маршрут.

.....

2. Довести, що слабкий орграф є сильно зв'язним тоді й тільки тоді, коли у ньому є замкнений маршрут, що містить кожну дугу орграфа.

.....

3. Довести, що орграф є сильно зв'язним тоді і тільки тоді, коли він слабо зв'язний і кожна його дуга належить деякому циклу.

4. Довести, що граф $G = (V, E)$ є сильно зв'язним тоді й тільки тоді, коли для будь-якого розбиття множини вершин V на дві підмножини V_1 і V_2 існує хоча б одна дуга $(v, w) \in E$ така, що $v \in V_1$ і $w \in V_2$, і хоча б одна дуга $(u, z) \in E$ така, що $u \in V_2$ і $z \in V_1$.

.....

5. Довести, що в сильно зв'язному орграфі кожна вершина є джерелом. Довести, що в сильно зв'язному орграфі кожна вершина є стоком.

.....

6. Нехай оргграф є слабо зв'язним, але не є однобічно зв'язним. Довести, що в ньому не існує такої вершини, після вилучення якої утворюється сильно зв'язний оргграф.

.....

7. Довести, що оргграф є слабо зв'язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є півмаршрут, що проходить через усі вершини.

.....

8. Довести, що в однобічно зв'язному орграфі існує не більше однієї недосяжної вершини. Довести, що в однобічно зв'язному орграфі існує не більше однієї тупикової вершини.

.....

9. Довести, що оргграф є однобічно зв'язним тоді й тільки тоді, коли в ньому є маршрут, що проходить через усі його вершини.

.....

10. Довести, що слабо зв'язний оргграф є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли в будь-якої його вершини півстепінь виходу дорівнює півстепеню входу.

11. Довести, що слабо зв'язний оргграф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має дві такі вершини v і w , що $\delta^+(v) = \delta^-(v)+1$ і $\delta^+(w) = \delta^-(w)-1$, а для всіх інших вершин u оргграфа виконується $\delta^+(u) = \delta^-(u)$.

.....

12. Довести, що слабо зв'язний оргграф, в кожній вершині якого півстепінь виходу дорівнює півстепеню входу, є сильно зв'язним.

.....

13. Довести, що слабо зв'язний оргграф, який має дві такі вершини v і w , що $\delta^+(v) = \delta^-(v)+1$ і $\delta^+(w) = \delta^-(w)-1$, а для всіх інших його вершин u виконується $\delta^+(u) = \delta^-(u)$, є однобічно зв'язним.

.....

14. Довести, що слабо зв'язний оргграф з n вершинами має не менше $n-1$ дуги. Довести, що однобічно зв'язний оргграф з n вершинами має не менше $n-1$ дуги.

.....

15. Довести, що сильно зв'язний оргграф з n ($n \geq 2$) вершинами має не менше n дуг. Довести, що оргграф з n вершинами, що має більше $(n-1)^2$ дуг, є сильно зв'язним.

.....

5.6 Безконтурні оргграфи, орієнтація графів і турніри

Нумерацією оргграфа $G = (V, E)$ з n вершинами називається взаємно однозначне відображення $f : V \rightarrow N_n$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність натуральне число $f(v)$ з множини $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Нумерація f оргграфа $G = (V, E)$ називається *правильною*, або *топологічним сортуванням вершин* оргграфа G , якщо для будь-якої дуги $(v, w) \in E$ виконується $f(v) < f(w)$.

Теорема. Для оргграфа, що має принаймні один нетривіальний замкнений маршрут, правильної нумерації не існує.

Припустимо, що для оргграфа $G = (V, E)$ існує правильна нумерація f і одночасно в ньому є нетривіальний замкнений маршрут $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. За означенням правильної нумерації необхідно виконано $f(v_1) < f(v_2) < \dots < f(v_n) < f(v_1)$, звідки одержується суперечність $f(v_1) < f(v_1)$.

Теорема. Для безконтурного орграфа існує правильна нумерація.

Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для всіх безконтурних графів з 1 чи 2 вершинами твердження справджується. Нехай воно має місце для всіх безконтурних орграфів з n ($n \geq 2$) вершинами. Розглянемо довільний безконтурний граф $G = (V, E)$ з $n+1$ вершиною. Він має принаймні одну тупикову вершину; нехай це вершина v . Розглянемо оргграф $G-v$. Він має n вершин і є безконтурним. За припущенням індукції, для нього існує правильне сортування f_v . Відображення $f: V \rightarrow N_{n+1}$, для якого $f(w) = f_v(w)$ при $w \neq v$ і $f(v) = n+1$, є нумерацією орграфа G . Правильність цієї нумерації випливає з правильності нумерації f_v та того факту, що вершина v є тупиковою. Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено.

З попередніх двох теорем одержуємо наступну.

Теорема. Оргграф є безконтурним тоді й тільки тоді, коли для нього існує правильна нумерація.

Кореневим, або вихідним, деревом називається оргграф з джерелом, який не має півконтурів. Оберненим поняттям є *вхідне дерево* - оргграф зі стоком, який не має півконтурів.

Орієнтацією графа G називається оргграф, який одержується приписуванням деякої орієнтації кожному ребру графа G . При цьому граф G є основою своєї орієнтації.

Турніром, або повним оргграфом, називається направлений оргграф, у якому будь-які дві вершини інцидентні деякій дузі. Іншими словами, оргграф є турніром тоді й тільки тоді, коли його основа є повним графом. Існує єдиний (з точністю до ізоморфізму) турнір з однією вершиною (рис. 51, а), єдиний турнір з двома вершинами (рис. 51, б) і два турніри з трьома вершинами (рис. 51, в, г). Турнір на рис. 51, в називається *транзитивною трійкою*, а турнір рис. 51, г — *циклічною трійкою*.

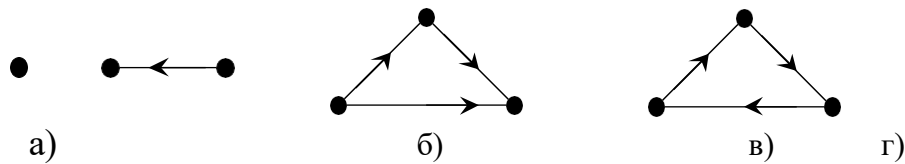


Рис. 51. Приклади турнірів

Відмітимо, що в результаті вилучення довільної вершини нетривіального турніра одержується турнір.

Теорема. Для будь-якої вершини v n -вершинного турніра $\delta^+(v) + \delta^-(v) = n - 1$.

Оскільки $\delta^+(v) + \delta^-(v) = \delta(v)$, то кожна вершина дугою з'єднана з довільною іншою вершиною турніра рівно однією дугою, тому $\delta(v) = n - 1$, звідки $\delta^+(v) + \delta^-(v) = n - 1$.

Зауважимо, що теорема 63 дає лише необхідну, але не достатню умову того, щоб оргграф був турніром. Відповідний приклад наведено на рисунку 49.

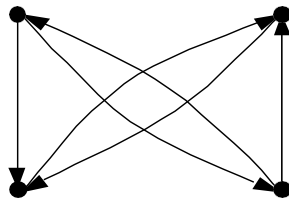


Рис. 52. Оргграф, який не є турніром

Теорема. У турнірі існує шлях, який проходить через усі вершини оргграфа.

Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для турнірів, що мають одну чи дві вершини, шлях, який проходить через усі вершини оргграфа, існує. Нехай твердження виконується для всіх турнірів, що мають n ($n \geq 2$) вершин. Розглянемо довільний турнір $G = (\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$ з $n+1$ вершиною. Оргграф $G - v_0$ є n -вершинним турніром, тому за припущенням індукції в ньому існує шлях, що

проходить через усі його вершини. Без обмеження загальності можна вважати, що це шлях $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Якщо для деякого натурального числа i , $1 \leq i \leq n-1$, виконується $(v_i, v_0), (v_0, v_{i+1}) \in E$, то $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_0, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n)$ - шлях у G . Інакше, оскільки G є турніром, виконується або $(v_0, v_1) \in E$, або $(v_1, v_0) \in E$. У першому випадку маршрут $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ є шуканим шляхом. У другому випадку виконано $(v_2, v_0) \in E, (v_3, v_0) \in E, \dots, (v_n, v_0) \in E$, але тоді маршрут $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$ є шляхом в орграфі G . Згідно з принципом математичної індукції твердження доведено.

Завдання до розділу 5.6

1. Довести, що кореневе дерево має рівно одне джерело. Довести, що вхідне дерево має рівно один стік.

.....

2. Довести, що слабо зв'язний орграф є кореневим деревом тоді й тільки тоді, коли лише одна його вершина має нульовий півстепінь входу, а в усіх інших вершин півстепінь входу дорівнює 1.

.....

3. Довести, що слабо зв'язний орграф є вхідним деревом тоді й тільки тоді, коли лише одна його вершина має нульовий півстепінь виходу, а в усіх інших вершин півстепінь виходу дорівнює 1.

.....

4. Довести, що для довільного графа існує ациклічна орієнтація. Довести, що для довільного графа існує орієнтація така, що для будь-якої її вершини v виконується нерівність $|\delta^+(v) - \delta^-(v)| \leq 1$.

5. Довести, що в турнірі завжди є джерело. Довести, що в турнірі завжди є стік.

.....

6. Довести, що в турнірі може бути не більше однієї недосяжної вершини. Довести, що в турнірі може бути не більше однієї тупикової вершини.

.....

7. Довести, що в турнірі відстань від вершини, яка має найбільший півстепінь виходу, до будь-якої іншої вершини турніра дорівнює або 1, або 2. Довести, що в будь-якому турнірі існує гамільтонів ланцюг.

.....

8. Довести, що турнір або є сильно зв'язним, або може бути перетворений у сильно зв'язний зміною орієнтації лише однієї дуги.

.....

10. Довести, що коли з турніра з n вершинами ($n \geq 4$) вилучити будь-яку вершину, отримаємо або сильно зв'язний орграф, або орграф, який може бути перетворений у сильно зв'язний після додавання лише однієї відповідної дуги.

.....

11. Довести, що коли в нетривіальному турнірі всі вершини мають попарно різні півстепені виходу, то орграф є безконтурним.

.....

12. Довести, що коли в нетривіальному турнірі є принаймні дві вершини з однаковими півстепенями виходу, то в цьому орграфі знайдуться три вершини, які є вершинами трикутника.

.....

13. Довести, що в будь-якому сильно зв'язному турнірі з n ($n \geq 3$) вершинами для довільної його вершини i кожного $k = 3, 4, \dots, n$ існує контур довжини k , який містить цю вершину.

.....

14. Довести, що у будь-якому сильно зв'язному турнірі з n ($n \geq 3$) вершинами для кожного $k = 3, 4, \dots, n$ існує контур довжини k .

.....

15. Довести, що турнір є сильним тоді й тільки тоді, коли він має контур, який проходить через усі його вершини.

.....

16. Довести, що турнір є сильним тоді й тільки тоді, коли він є гамільтоновим.

.....

17. Довести, що в сильному турнірі з n ($n \geq 4$) вершинами є принаймні дві вершини, після вилучення кожної з яких отримуємо сильно зв'язний оргграф.

.....

5.7 Матричний метод знаходження шляхів у графах

Нагадаємо, що вершини v і w називаються *суміжними*; кожна з них є інцидентною певному ребру e . Два різних ребра, інцидентних одній і тій самій вершині, також є *суміжними*.

Матриця суміжності повністю визначає структуру графа. Складемо матрицю суміжності та зведемо її в квадрат за правилами математики.

Кожен елемент матриці A^2 визначається за формулою:

$$a_{ik}^2 = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}$$

Доданок у формулі дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли обидва числа a_{ij} і a_{jk} рівні 1, в іншому випадку він дорівнює 0. Оскільки наслідком рівності $a_{ij} = a_{jk} = 1$ є існування шляху довжини 2 з вершини x_i до вершини x_k , що проходить через вершину x_j , то $(i\text{-й}, k\text{-й})$ елемент матриці A^2 дорівнює числу шляхів довжини 2, що йдуть з x_i до x_k .

На рисунку 53 представлено матрицю суміжності графа, зображеного на рисунку 49, а також результат зведення матриці суміжності до квадрату: A^2 .

		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
A=	x ₁	0	1	0	0	0	1
	x ₂	0	0	0	0	1	1
	x ₃	0	1	0	0	1	1
	x ₄	0	0	1	0	0	0
	x ₅	0	0	0	1	0	1
	x ₆	0	0	0	0	0	0

		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
A ² =	x ₁	0	0	0	0	1	1
	x ₂	0	0	0	1	0	1
	x ₃	0	0	0	1	1	2
	x ₄	0	1	0	0	1	1
	x ₅	0	0	1	0	0	0
	x ₆	0	0	0	0	0	0

		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
A ³ =	x ₁	0	0	0	1	0	1
	x ₂	0	0	1	0	0	0
	x ₃	0	0	1	1	0	1
	x ₄	0	0	0	1	1	2
	x ₅	0	1	0	0	1	1
	x ₆	0	0	0	0	0	0

		x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆
A ⁴ =	x ₁	0	0	1	0	0	0
	x ₂	0	1	0	0	1	1
	x ₃	0	1	1	0	1	1
	x ₄	0	0	0	1	1	1
	x ₅	0	0	0	1	1	2
	x ₆	0	0	0	0	0	0

Рис. 53. Знаходження шляхів

Так "1", що стоїть на перетині другого рядка і четвертого стовпця матриці A^2 , говорить про існування одного шляху довжиною 2 з вершини x_2 до вершини x_4 . Дійсно, як бачимо в графі на рисунку 49, існує такий шлях: a_6, a_5 . "2" в матриці A^2 говорить про існування двох шляхів довжиною 2 від вершини x_3 до вершини x_6 : a_8, a_4 і a_{10}, a_3 .

Аналогічно для матриці суміжності, зведеної в третю степінь - A^3 на рисунку 53, а дорівнює числу шляхів довжиною 3, що йдуть від x_i до x_j . З четвертого рядка матриці A^3 видно, що шляхи довжиною 3 існують: один з x_4 до x_4 (a_9, a_8, a_5); один з x_4 до x_5 (a_9, a_{10}, a_6); два шляхи з x_4 до x_6 (a_9, a_{10}, a_3 і a_9, a_8, a_4). Матриця A^4 на рисунку 53 показує існування шляхів довжиною 4.

Таким чином, якщо a^p є елементом матриці A^p , то a^p_{ik} дорівнює числу шляхів (не обов'язково орланцюгів або простих орланцюгів) довжини p , що йдуть від x_i до x_k .

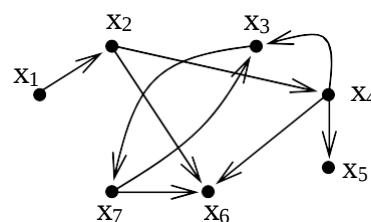
Якщо потрібно визначити не тільки наявність шляхів, а й вершини графа, що входять в ці шляхи, то слід згадати визначення прямого і зворотного транзитивних замикань. Так як $T^+(x_i)$ - це множина вершин, в яких є шляхи з вершини x_i , а $T^-(x_j)$ - множина вершин, з яких є

шляхи до x_j , то $T^+(x_i) \cap T^-(x_j)$ - множина вершин, кожна з яких належить, принаймні, одному шляху, що йде від x_i до x_j . Ці вершини називаються істотними або невід'ємними щодо двох кінцевих вершин x_i і x_j . Всі інші вершини графа називаються несуттєвими або надмірними, оскільки їх видалення не впливає на шляхи від x_i до x_j .

Завдання до розділу 5.7

1. Для графа, наданого на рисунку, знайти:

- вершини, що входять до шляху та шлях між вершинами x_1 і x_7 матричним методом;
- орланцюг максимальної довжини.



Відповідь надати у вигляді:

Матриця суміжності графа

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7		$T^+(x_1)$
x1	0	1	0	0	0	0	0		
x2	0	0	0	1	0	1	0		
x3	0	0	0	0	0	0	1		
x4	0	0	1	0	1	1	0		
x5	0	0	0	0	0	0	0		
x6	0	0	0	0	0	0	0		
x7	0	0	1	0	0	1	0		
$T^-(x_7)$									

.....

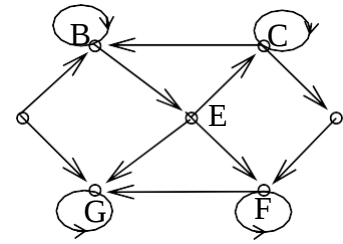
2. Для графа, наданого на рисунку, знайти та записати:

- всі шляхи довжиною 3 із вершин A і B;
- орланцюг максимальної довжини;
- між якою парою вершин A і F або C і G існує найбільше число шляхів довжиною 4;
- міжд якими вершинами існує найбільше число шляхів??в довжиною 3?

Відповідь надати з використанням матриць:

$$A =$$

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	0	0	1
B	0	1	0	0	1	0	0
C	0	1	1	1	0	0	0
D	0	0	0	0	0	1	0
E	0	0	1	0	0	1	1
F	0	0	0	0	0	1	1
G	0	0	0	0	0	0	1



$$A^2 =$$

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	0	1	1	2
B	0	2	2	1	1	2	3
C	0	3	2	1	2	3	2
D	0	0	0	0	0	1	2
E	0	2	1	1	1	2	3
F	0	0	0	0	0	1	3
G	0	0	0	0	0	0	1

$$A^3 =$$

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

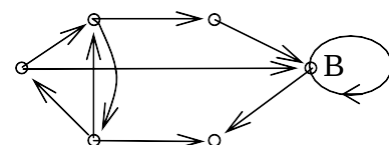
$$A^4 =$$

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

.....

2. Позначити вершини та побудувати всі можливі шляхи довжиною 2 в графі, зображеному на рисунку.

Відповідь надати з використанням матриць:



$$A =$$

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	0	1	1	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	0	1
F	1	0	0	0	0	0

$$A^2 =$$

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

.....

5.8 Вага і довжина шляху

Іноді дуг графа зіставляють числа $a_i \rightarrow c_i$, звані *вагою або довжиною, або вартістю або ціною*. У кожному конкретному випадку вибирається те слово, яке ближче підходить за змістом завдання.

Граф G , що описується трійкою виду

$$G = (X, A, C),$$

де $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ - множина вершин, $A = \{a_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ - множина дуг,

$C = \{c_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ - множина характеристик дуг, називається *графом зі зваженими дугами*.

Приклад такого графа наведений на рисунку 54, а. При розгляді шляху M , що представлений послідовністю дуг $(a_1, a_2, \dots, a_q)$, за його *вагу* (або *довжину*, або *вартість*) приймається число $L(M)$, яке дорівнює загальній кількості ваг всіх дуг, що входять до шляху, тобто

$$L(M) = \sum c_i \text{ для всіх } a_i \in M.$$

Довжиною (або *потужністю*) шляху називається число дуг, що входять до нього. Найчастіше термін "довжина" вживається, коли всі дуги, що входять до шляху, мають ваги, рівні 1 (тобто коли вага шляху збігається з його довжиною (потужністю)).

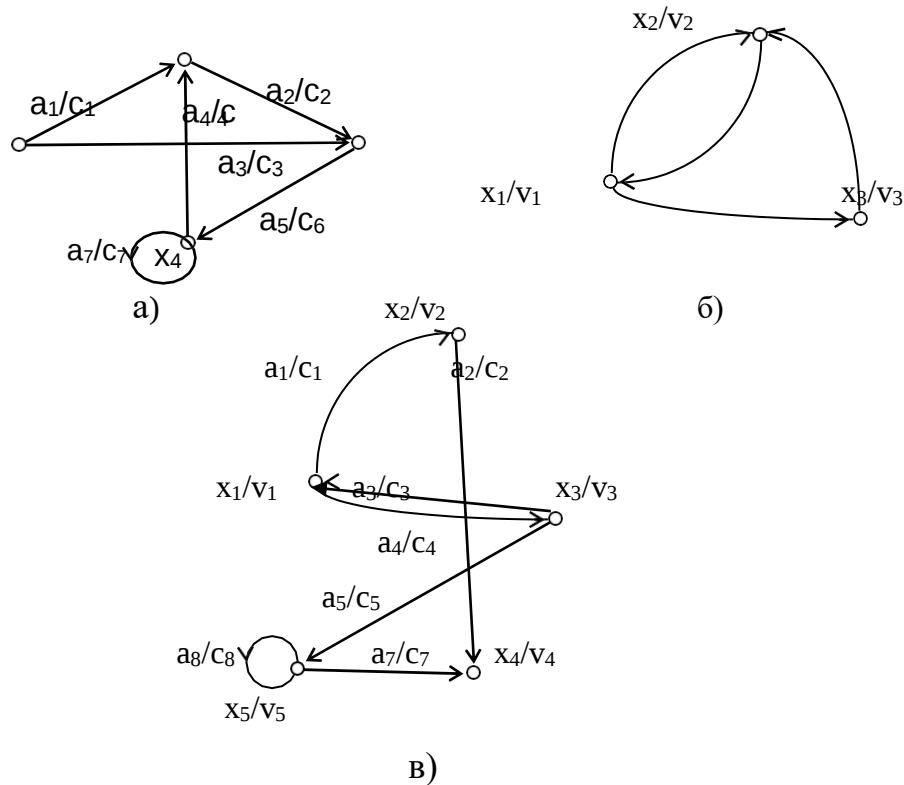


Рис. 54. Зважені графи: а) граф зі зваженими дугами;
б) граф зі зваженими вершинами; в) зважений граф

Граф зі зваженими вершинами - це граф, що описується трійкою $G = (X, A, V)$, де $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ - множина вершин графа, $A = \{a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ - множина дуг графа, $V = \{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ - множина характеристик вершин.

В якості характеристик вершин можуть виступати "вартість", "потужність", "вага" та ін. Приклад такого графа наведено на рисунку 54, б. Для графа зі зваженими вершинами в разі подання шляху послідовністю вершин, *вагою шляху* є сума ваги вершин, що входять до цього шляху.

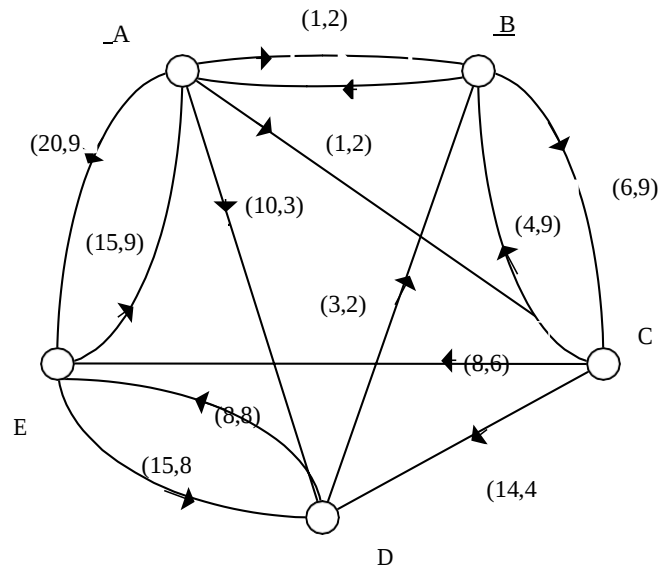
І нарешті, *зважений граф* визначається четвіркою виду $G = (X, A, V, C)$, тобто і дуги, і вершини цього графа мають певні характеристики.

Область застосування зважених графів як моделі є досить обширною: транспортні завдання, завдання оптимізації, мережі зв'язку та

системи перевезень та ін. Однією з найвідоміших оптимізаційних задач є знаходження найкоротших шляхів у графі зі зваженими дугами.

Приклад 1.

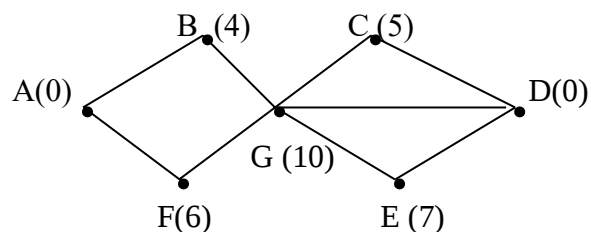
На рисунку надано граф зі зваженими дугами, що представляє мережу допустимих маршрутів для певного судна. Кожна дуга має позначку **(a, b)**, причому **a** дорівнює вигоді, одержуваної при обслуговуванні цього маршруту, а **b** - часу обслуговування маршруту. Знайти який з перерахованих шляхів є найбільш вигідним (в термінах швидкості обороту капіталу) для шляху судна.



1. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$
2. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$
3. $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$
4. $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$
-

Приклад 2. Дано граф зі зваженими вершинами, в якому в якості характеристики вершини вказується її пропускна здатність. Визначити який з перерахованих маршрутів має кращу середню пропускну здатність.

1. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$
2. $A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D$
3. $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow D$
4. $A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow D$
-



5.9 Алгоритм Дейкстри пошуку найкоротших шляхів у графі

Найбільш ефективний алгоритм вирішення задачі про найкоротший шлях спочатку дав Дейкстра. У загальному випадку цей метод заснований на приписуванні вершинам тимчасових позначок, причому позначка вершини дає верхню межу довжини шляху від деякої вершини s до вершин, що розглядається. Ці позначки поступово зменшуються за допомогою деякої ітераційної процедури, і на кожному кроці ітерації одна з тимчасових позначок стає постійною. Останнє вказує на те, що позначка вже не є верхньою межею, а дає точну довжину найкоротшого шляху від t до даної вершини. Розглянемо докладніше цей алгоритм.

Нехай дано граф $G = (X, A, C)$ зі зваженими дугами. Позначимо $L(x_i)$ позначку вершини x_i .

Розглянемо алгоритм знаходження найкоротшого шляху від вершини s до вершини t графа і більш загальний випадок: від вершини s до всіх вершин графа.

Присвоєння початкових значень

КРОК 1. Покласти $L(s) = 0$ і вважати цю позначку постійною. Для вершин, $x_i \neq s$ покласти $L(x_i) = \infty$ і вважати ці позначки тимчасовими.

За поточну розглянуту вершину з постійною позначкою візьмемо вершину p , тобто покласти $p = s$.

Оновлення позначок

КРОК 2. Для вершин, що входять в пряме відображення вершини p , тобто для всіх x_i , що належать $\Gamma(p)$, позначки яких тимчасові, змінити позначки у відповідності з наступним виразом:

$$L(x_i) \leftarrow \min [L(x_i), L(p) + c(p, x_i)].$$

Перетворення позначки в постійну

КРОК 3. Серед усіх вершин з тимчасовими позначками знайти таку, для якої:

$$L(x_i^*) = \min [L(x_i)].$$

КРОК 4. Вважати позначку вершини x_i^* постійною і покласти $p = x_i^*$.

КРОК 5 (а). { *При знаходженні шляху від s до t* }

- Якщо поточна вершина p є шуканої, тобто $p = t$, то $L(p)$ є довжиною найкоротшого шляху від S до t . Зупинка.
- Якщо $p \neq t$, перейти до кроку 2.

КРОК 5 (б) { *При знаходженні шляхів від S до всіх вершин* }

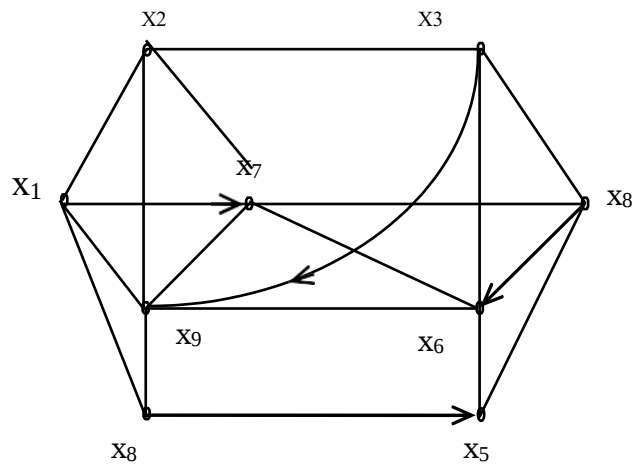
- Якщо всі вершини відзначені постійними мітками, то ці мітки дають довжини найкоротших шляхів.
- Якщо деякі мітки є тимчасовими, то слід перейти до кроку 2.

Як тільки довжини найкоротших шляхів від вершини s будуть знайдені, самі шляхи можна отримати за допомогою рекурсивної процедури (*). Так як вершина x_i^* безпосередньо передуює вершині x_i у найкоротшому шляху від s до x_i , то для будь-якої вершини x_i відповідну вершину x_i^* можна знайти як одну з вершин, що залишилися, для якої

$$L(x_i^*) + c(x_i^*, x_i) = L(x_i). \quad (*)$$

Якщо найкоротший шлях від s до будь-якої вершини x_i є єдиним, то дуги (x_i^*, x_i) цього найкоротшого шляху утворюють орієнтоване дерево з коренем s . Якщо існує декілька найкоротших шляхів від s до будь-якої іншої вершини, то при деякій фіксованій вершині x_i^* співвідношення (*) буде виконуватися для більш ніж для однієї вершини x_i . У цьому випадку вибір може бути або довільним (якщо потрібен один якийсь найкоротший шлях між s і x_i), або таким, що розглядаються всі дуги (x_i^*, x_i) , що входять в який-небудь із найкоротших шляхів, і при цьому сукупність всіх таких дуг утворює не орієнтований дерево, а загальний граф, званий *базою* щодо s .

Приклад 3. Розглянемо граф змішаного типу, зображений на рисунку 55, а, де кожне неорієнтоване ребро розглядається як пара протилежно спрямованих дуг рівного ваги. Матриця ваг наведена на рисунку 55, б. Потрібно знайти всі найкоротші шляхи від вершини x_1 до всіх інших вершин. Постійні позначки будемо позначати знаком "+".



a)

$C =$

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
X1		10					3	6	12
X2	10		18				2		13
X3		18		25		20			7
X4			25		5	16	4		
X5				5		10			
X6			20		10		14	15	9
X7		2		4		14			24
X8	6				23	15			5
X9	12	13				9	24	5	

б)

Рис. 55. Приклад пошуку найкоротшого шляху:

а) граф; б) матриця ваг дуг

КРОК 1. Надамо $L(x_1) = 0$, $L(x_i) = \infty$ для всіх x_i , крім x_1 .

Покладемо $p = x_1$.

Перша ітерація

КРОК 2. Знайдемо пряме відображення для поточної розглянутої вершини: $\Gamma(p) = P(x_1) = \{x_2, x_7, x_8, x_9\}$. Всі вершини, що входять в

пряме відображення мають тимчасові позначки, тому перерахуємо їх значення:

$$L(x_2) = \min [L(x_2), L(x_1) + c(x_1, x_2)] = \min [\infty, 0 + 10] = 10$$

$$L(x_7) = \min [\infty, 0 + 3] = 3 \quad L(x_8) = \min [\infty, 0 + 6] = 6$$

$$L(x_9) = \min [\infty, 0 + 12] = 12$$

КРОК 3. На даному етапі ітерації маємо такі тимчасові мітки вершин:

$$L(x_2) = 10, L(x_3) = \infty,$$

$$L(x_7) = 3, L(x_4) = \infty,$$

$$L(x_8) = 6, L(x_5) = \infty,$$

$$L(x_9) = 12, L(x_6) = \infty.$$

Очевидно, що мінімальну позначку, що дорівнює 3, має вершина x_7 .

КРОК 4. За наступну поточну мітку приймаємо вершину x_7 , $p = x_7$, а її мітка стає постійною, $L(x_7) = 3^+$.

КРОК 5. Так як не всі вершини графа мають постійні мітки, переходимо до кроку 2.

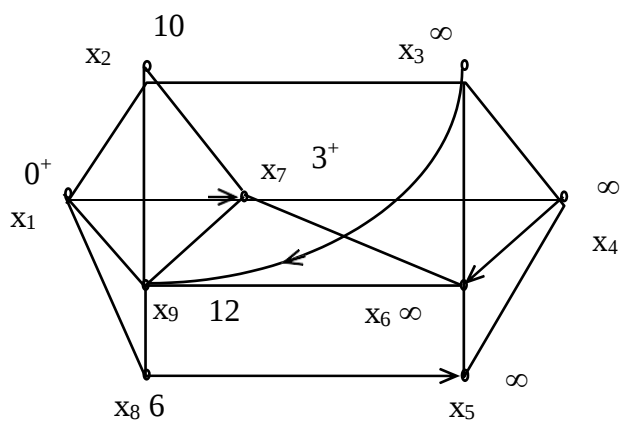


Рис. 56. Позначки в кінці першої ітерації

Друга ітерація

Граф з поточними значеннями відміток показаний на рисунку 56.

КРОК 2. Знаходимо $\Gamma(x_7) = \{x_2, x_4, x_6, x_9\}$. Мітки всіх вершин тимчасові, отже перераховуємо їх значення:

$$L(x_2) = \min [10, 3+2] = 5,$$

$$L(x_4) = \min [\infty, 3+4] = 7,$$

$$L(x_6) = \min [\infty, 3+14] = 17,$$

$$L(x_9) = \min [12, 3+24] = 12.$$

КРОК 3. На даному кроці ітерації маємо наступні часові мітки вершин:

$$L(x_2) = 5, L(x_3) = \infty,$$

$$L(x_4) = 7, L(x_5) = \infty,$$

$$L(x_6) = 17, L(x_8) = 6,$$

$$L(x_9) = 12.$$

Очевидно, що мінімальну позначку, що дорівнює 5, має вершина x_2 .

КРОК 4. За наступну поточну мітку приймаємо вершину x_2 , тобто $p = x_2$, а її мітка стає постійною, $L(x_2) = 5^+$

КРОК 5. Так як не всі вершини графа мають постійні мітки, переходимо до кроку 2.

Третя ітерація

Граф з поточними значеннями відміток показаний на рисунку 57.

КРОК 2. Знаходимо $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3, x_7, x_9\}$.

Мітки вершин x_3 і x_9 тимчасові, отже перераховуємо їх значення:

$$L(x_3) = \min [\infty, 5+18] = 23,$$

$$L(x_9) = \min [12, 5+13] = 12,$$

КРОК 3. На даному етапі ітерації маємо такі тимчасові мітки вершин:

$$L(x_3) = 23, L(x_4) = 7, L(x_5) = \infty,$$

$$L(x_6) = 17, L(x_8) = 6, L(x_9) = 12.$$

Очевидно, що мінімальну позначку, рівну 6, має вершина x_8 .

КРОК 4. За наступну поточну мітку приймаємо вершину x_8 , тобто $p = x_8$, а її мітка стає постійною, $L(x_8) = 6^+$.

КРОК 5. Не всі вершини графа мають постійні мітки, тому переходимо до кроку 2.

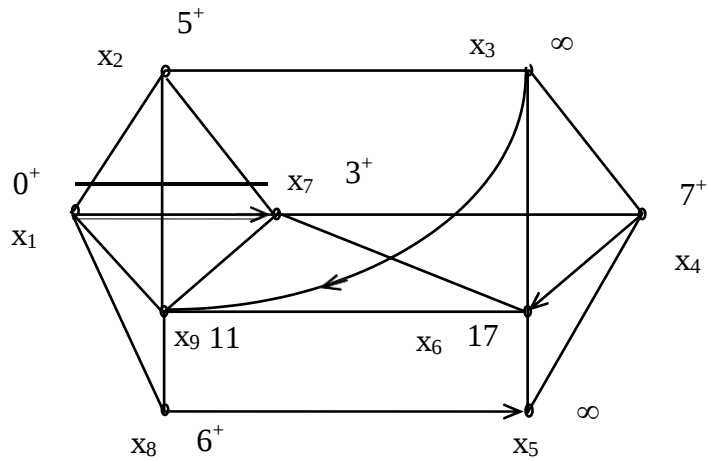


Рис. 57. Позначки в кінці другої ітерації

Четверта ітерація

КРОК 2. Знаходимо $\Gamma(x_8) = \{x_1, x_5, x_6, x_9\}$. Мітки вершин x_5, x_6 і x_9 тимчасові, отже перераховуємо їх значення:

$$L(x_5) = \min[\infty, 6 + 23] = 29,$$

$$L(x_6) = \min[17, 6 + 15] = 17,$$

$$L(x_9) = \min[12, 6 + 5] = 11.$$

КРОК 3. На даному етапі ітерації маємо такі тимчасові мітки вершин:

$$L(x_3) = 23, L(x_4) = 7,$$

$$L(x_5) = 29, L(x_6) = 17,$$

$$L(x_9) = 11.$$

Очевидно, що мінімальну позначку, рівну 7, має вершина x_4 .

КРОК 4. За наступну поточну мітку приймаємо вершину x_4 , тобто $p = x_4$, а її мітка стає постійною, $L(x_4) = 7^+$

КРОК 5. Так як не всі вершини графа мають постійні мітки, переходимо до кроку 2.

П'ята ітерація

КРОК 2. Знаходимо $\Gamma(x_4) = \{x_3, x_5, x_6, x_7\}$. Мітки вершин x_3, x_5 і x_6 тимчасові, отже перераховуємо їх значення:

$$L(x_3) = \min[23, 7 + 25] = 23,$$

$$L(x_5) = \min [29, 7 + 5] = 12,$$

$$L(x_6) = \min [17, 7 + 16] = 17.$$

КРОК 3. На даному етапі ітерації маємо такі тимчасові мітки вершин:

$$L(x_3) = 23, L(x_5) = 29,$$

$$L(x_6) = 17, L(x_9) = 11.$$

Очевидно, що мінімальну позначку, рівну 11 має вершина x_9 .

КРОК 4. За наступну поточну мітку приймаємо вершину x_9 , тобто $p = x_9$, а її мітка стає постійною, $L(x_9) = 11^+$

КРОК 5. Так як не всі вершини графа мають постійні мітки, переходимо до кроку 2.

Шоста ітерація

КРОК 2. Знаходимо $\Gamma(x_9) = \{x_1, x_2, x_6, x_7, x_8\}$. Мітка вершин x_6 тимчасова, отже перераховуємо її значення:

$$L(x_6) = \min [17, 11 + 9] = 17.$$

КРОК 3. На даному етапі ітерації маємо такі тимчасові мітки вершин:

$$L(x_3) = 23, L(x_5) = 12,$$

$$L(x_6) = 17.$$

Очевидно, що мінімальну позначку, рівну 12 має вершина x_5 .

КРОК 4. За наступну поточну мітку приймаємо вершину x_5 , тобто $p = x_5$, а її мітка стає постійною:

$$L(x_5) = 12^+$$

КРОК 5. Так як не всі вершини графа мають постійні мітки, переходимо до кроку 2.

Сьома ітерація

КРОК 2. Знаходимо $\Gamma(x_5) = \{x_4, x_6\}$. Мітка вершини x_6 тимчасова, отже перераховуємо її значення:

$$L(x_6) = \min [17, 12 + 10] = 17.$$

КРОК 3. На даному етапі ітерацій і маємо такі тимчасові мітки:

$$L(x_3) = 23, L(x_6) = 17.$$

Очевидно, що мінімальну позначку, рівну 17 має вершина x_6 .

КРОК 4. За наступну поточну мітку приймаємо вершину x_6 , тобто $p = x_6$, а її мітка стає постійною:

$$L(x_6) = 17^+.$$

КРОК 5. Так як не всі вершини графа мають постійні мітки, переходимо до кроку 2.

Восьма ітерація

КРОК 2. Знаходимо $\Gamma(x_6) = \{x_3, x_5, x_7, x_8, x_9\}$. Мітка вершини x_3 тимчасова, отже перерахуємо її значення

$$L(x_3) = \min[23, 17 + 20] = 23.$$

КРОК 3. На даному етапі ітерації маємо одну тимчасову мітку вершини:

$$L(x_3) = 23, \text{ яка стає постійною.}$$

КРОК 4. Всі вершини мають постійні мітки, тому алгоритм закінчено.

Для знаходження найкоротшого шляху між вершинами, наприклад x_2 і початковою x_1 , послідовно використовуємо співвідношення:

$$L(x_2') + c(x_2', x_2) = L(x_2) = 5, \quad (**)$$

де вершина x_2' є вершиною, що безпосередньо передуює x_2 у найкоротшому шляху від x_1 до x_2 . Єдиною такою вершиною є вершина x_7 . Далі співвідношення (**) застосовуємо вдруге:

$$L(x_7') + c(x_7', x_7) = L(x_7) = 3.$$

Єдиною такою вершиною є вершина x_1 . Тому найкоротший шлях від x_1 до x_2 є (x_1, x_7, x_2) . Вершина x_1 , що є базою, дає всі найкоротші шляхи від x_1 і представляє дерево, надане на рисунку 58.

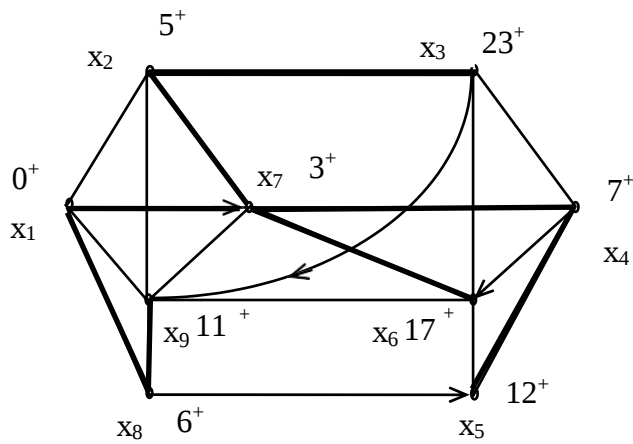
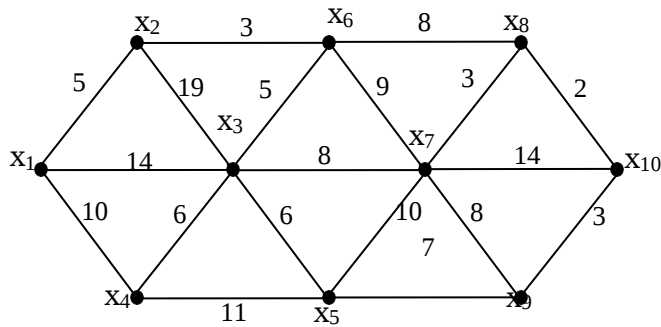


Рис. 58. Остаточні позначки після останньої ітерації, якщо x_1 - база

Приклад 4. Побудувати алгоритм для знаходження найкоротших шляхів від вершини x_1 до всіх інших вершин графа, наданого на рисунку нижче.



Роз'язок.

Побудуємо матрицю відстаней між вершинами

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
X1	0	5	14	10	0	0	0	0	0	0
X2	5	0	19	0	0	3	0	0	0	0
X3	14	19	0	6	6	5	8	0	0	0
X4	10	0	6	0	11	0	0	0	0	0
X5	0	0	6	11	0	0	10	0	7	0
X6	0	3	5	0	0	0	9	8	0	0
X7	0	0	8	0	10	9	0	3	8	14
X8	0	0	0	0	0	8	3	0	0	2
X9	0	0	0	0	7	0	8	0	0	3
X10	0	0	0	0	0	0	14	2	3	0

Перша ітерація

КРОК 1.

$$L(x_1)=0, L(x_2)=\infty,$$

$$L(x_3)=\infty, L(x_4)=\infty, L(x_5)=\infty, L(x_6)=\infty, L(x_7)=\infty, L(x_8)=\infty, L(x_9)=\infty,$$

$$L(x_{10})=\infty$$

$$x_1=p.$$

КРОК 2. $\Gamma(p)=\{x_2, x_3, x_4\}$,

$$L(x_2)=\min[\infty, 0+5]=5,$$

$$L(x_3)=\min[\infty, 0+14]=14,$$

$$L(x_4)=\min[\infty, 0+10]=10.$$

КРОК 3.

$$L(x_2)=5, \quad L(x_5)=\infty, \quad L(x_8)=\infty,$$

$$L(x_3)=14, \quad L(x_6)=\infty, \quad L(x_9)=\infty,$$

$$L(x_4)=10, \quad L(x_7)=\infty, \quad L(x_{10})=\infty.$$

КРОК 4.

$$L(x_2)=5^+.$$

КРОК 5.

$$P=x_2.$$

Друга ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p)=\{\underline{x}_1, x_3, x_6\}, L(x_3)=\min[14, 5+19]=14, L(x_6)=\min[\infty, 5+3]=8.$$

КРОК 3.

$$L(x_2)=5^+, \quad L(x_5)=\infty, \quad L(x_8)=\infty,$$

$$L(x_3)=14, \quad L(x_6)=8, \quad L(x_9)=\infty,$$

,

$$L(x_4)=10 \quad L(x_7)=\infty \quad L(x_{10})=\infty$$

, .

КРОК 4.

$$L(x_6)=8^+.$$

КРОК 5.

$$P=x_6.$$

Третя ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p)=\{\underline{x_2}, x_3, x_7, x_8\}, L(x_3)=\min[14, 8+5]=13,$$

$$L(x_4)=\infty, L(x_5)=\infty,$$

$$L(x_7)=\min[\infty, 8+9]=17,$$

$$L(x_8)=\min[\infty, 8+8]=16.$$

КРОК 3.

$$L(x_2)=5^+, \quad L(x_5)=\quad L(x_8)=16,$$

$$\infty,$$

$$L(x_3)=13 \quad L(x_6)=\quad L(x_9)=\infty,$$

$$, \quad 8^+,$$

$$L(x_4)=10 \quad L(x_7)=\quad L(x_{10})=\infty .$$

$$, \quad 17$$

КРОК 4.

$$L(x_4)=10^+.$$

КРОК 5.

$$P=x_4.$$

Четверта ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p)=\{.\},$$

$$L(x_3)=\min[.]=.,$$

$$L(x_5)=\min.]=.,$$

КРОК 3.

$$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$$

$$L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$$

$$L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots$$

КРОК 4.

$$L(x_8) = \dots,$$

КРОК 5.

$$P = \dots,$$

П'ята ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{ \dots \}.$$

$$L(x_7) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(x_{10}) = \min[\dots] = \dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$$

$$L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$$

$$L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots,$$

КРОК 4.

$$L(x_7) = \dots,$$

КРОК 2.

$$P = \dots,$$

Шоста ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{ \dots \},$$

$$L(x_5) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(x_9) = \min[\dots] = \dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$$

$L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$
 $L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots$

КРОК 4.

$L(x_{10}) = \dots$

Сёма ітерація

КРОК 2.

$\Gamma(p) = \{ \dots \},$

$L(x_9) = \min[\dots] = \dots$

КРОК 3.

$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$

$L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$

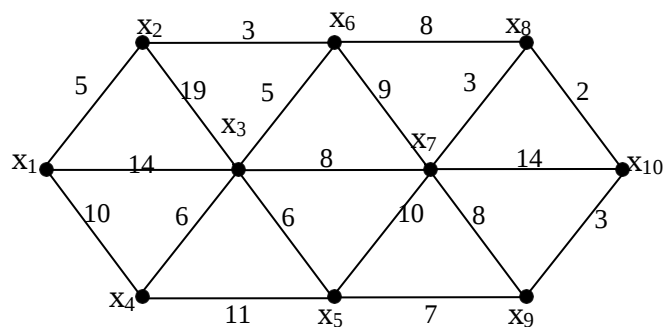
$L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots,$

КРОК 4.

$L(x_9) = \dots$

Всі вершини мають постійні мітки, тому алгоритм закінчено.

Приклад 4. Побудувати алгоритм для знаходження найкоротших шляхів від вершини x_7 до всіх інших вершин графа, наданого на рисунку нижче.



Роз'язок.

Побудуємо *матрицю відстаней між вершинами*

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
X1	0	5	14	10	0	0	0	0	0	0
X2	5	0	19	0	0	3	0	0	0	0
X3	14	19	0	6	6	5	8	0	0	0
X4	10	0	6	0	11	0	0	0	0	0
X5	0	0	6	11	0	0	10	0	7	0
X6	0	3	5	0	0	0	9	8	0	0
X7	0	0	8	0	10	9	0	3	8	14
X8	0	0	0	0	0	8	3	0	0	2
X9	0	0	0	0	7	0	8	0	0	3
X10	0	0	0	0	0	0	14	2	3	0

Перша ітерація

КРОК 1.

$$L(x_1) = \infty, L(x_2) = \infty, L(x_3) = \infty,$$

$$L(x_4) = \infty, L(x_5) = \infty, L(x_6) = \infty,$$

$$L(x_7) = \infty, L(x_8) = \infty,$$

$$L(x_9) = \infty, L(x_{10}) = \infty,$$

$$x_7 = p,$$

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{x_3, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}\},$$

$$L(x_3) = \min[\infty, 0 + \dots] = \dots,$$

$$L(x_5) = \min[\infty, 0 + \dots] = \dots,$$

$$L(x_6) = \min[\infty, 0 + \dots] = \dots$$

$$L(x_8) = \min[\infty, 0 + \dots] = \dots,$$

$$L(x_9) = \min[\infty, 0 + \dots] = \dots,$$

$$L(x_{10}) = \min[\infty, 0 + \dots] = \dots$$

КРОК 3.

$$L(x_1) = \dots \quad L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = .$$

$$L(x_3) = \dots \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$$

$$L(x_4) = \dots \quad L(x_{10}) = \dots$$

КРОК 4.

$$L(\dots) = \dots$$

КРОК 5.

$$P = \dots$$

Друга ітерація.

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{ \dots \},$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots$$

КРОК 3.

$$L(x_1) = \dots \quad L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots \quad L(x_8) = \dots$$

$$L(x_3) = \dots \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots$$

$$L(x_4) = \dots \quad L(x_{10}) = \dots$$

КРОК 4.

$$L(\dots) = \dots$$

КРОК 5.

$$P = \dots$$

Третя ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{ \dots \},$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_1) = \dots, L(x_2) = \dots,$$

$$L(x_3) = \dots, L(x_4) = \dots,$$

$$L(x_6) = \dots, L(x_9) = \dots, L(x_8) = \dots,$$

$$L(x_{10}) = \dots$$

КРОК 4.

$$L(x_4) = 10^+$$

КРОК 5.

$$P = x_4$$

Четверта ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{\dots\},$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_1) = \dots, L(x_2) = \dots, L(x_5) = \dots, L(x_8) = \dots,$$

$$L(x_3) = \dots, L(x_6) = \dots, L(x_9) = \dots,$$

$$L(x_4) = \dots, L(x_{10}) = \dots$$

КРОК 4.

$$L(x_8) = \dots$$

КРОК 5.

$$P = \dots,$$

П'ята ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{\dots\}.$$

$$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_1)=\dots, \quad L(x_2)=\dots, \quad L(x_5)=\dots, \quad L(x_8)=\dots,$$

$$L(x_3)=\dots, \quad L(x_6)=\dots, \quad L(x_9)=\dots,$$

$$L(x_4)=\dots, \quad L(x_{10})=\dots$$

КРОК 4.

$$L(\dots)=\dots,$$

КРОК 5.

$$P=\dots,$$

Шоста ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p)=\{\dots\},$$

$$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_1)=\dots, \quad L(x_2)=\dots, \quad L(x_5)=\dots, \quad L(x_8)=\dots,$$

$$L(x_3)=\dots, \quad L(x_6)=\dots, \quad L(x_9)=\dots$$

$$., L(x_4)=\dots, \quad L(x_{10})=\dots$$

КРОК 4.

$$L(\dots)=\dots$$

КРОК 5.

$$P=\dots,$$

Сёма ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p)=\{ \dots\dots\dots \},$$

$$L(\dots)=\min[\dots\dots\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots\dots\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots\dots\dots]=\dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_1)=\dots, \quad L(x_2)=\dots, \quad L(x_5)=\dots, \quad L(x_8)=\dots,$$

$$L(x_3)=\dots, \quad L(x_6)=\dots, \quad L(x_9)=\dots$$

$$., L(x_4)=\dots, \quad L(x_{10})=\dots$$

КРОК 4.

$$L(x_9)=\dots$$

Восьма ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p)=\{ \dots\dots\dots \},$$

$$L(\dots)=\min[\dots\dots\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots\dots\dots]=\dots,$$

$$L(\dots)=\min[\dots\dots\dots]=\dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_1)=\dots, \quad L(x_3)=\dots, \quad L(x_4)=\dots,$$

$$L(x_2)=\dots, \quad L(x_5)=\dots, \quad L(x_8)=\dots$$

$$L(x_6)=\dots, \quad ., \quad .,$$

$$L(x_{10})=\dots, \quad L(x_9)=\dots$$

$$., \quad .,$$

КРОК 4.

$$L(\dots)=\dots$$

КРОК 2.

$$P=\dots$$

Дев'ята ітерація

КРОК 2.

$$\Gamma(p) = \{ \dots \},$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(\dots) = \min[\dots] = \dots,$$

КРОК 3.

$$L(x_1) = \dots, L(x_3) = \dots, L(x_4) = \dots,$$

$$L(x_2) = \dots, L(x_5) = \dots, L(x_8) = \dots,$$

$$L(x_6) = \dots, \dots, \dots,$$

$$L(x_9) = \dots,$$

„

КРОК 4.

$$L(x_9) = \dots$$

..

Всі вершини мають постійні мітки, тому алгоритм закінчено.

5.10 Орцикли та цикли

Особливу групу складають замкнені шляхи. Шлях $a_1, a_2, \dots, a_q$ є замкненим, якщо в ньому початкова вершина a_1 і кінцева вершина a_q збігаються. Так, наприклад, для графа на рисунку 59 можна скласти декілька замкнених шляхів:

$$M_1: a_3, a_6, a_{11}$$

$$M_2: a_{11}, a_3, a_4, a_7, a_1, a_{12}, a_9$$

$$M_3: a_3, a_4, a_7, a_{10}, a_9, a_{11}.$$

Шляхи M_1 і M_3 є замкненими простими орланцюгами, так званими *контурами* або *простими орциклами*. Оскільки в них одна і та ж вершина використовується тільки один раз (за винятком початкової та кінцевої) шлях M_2 не є контуром, тому що вершина x_1 використовується в ньому двічі.

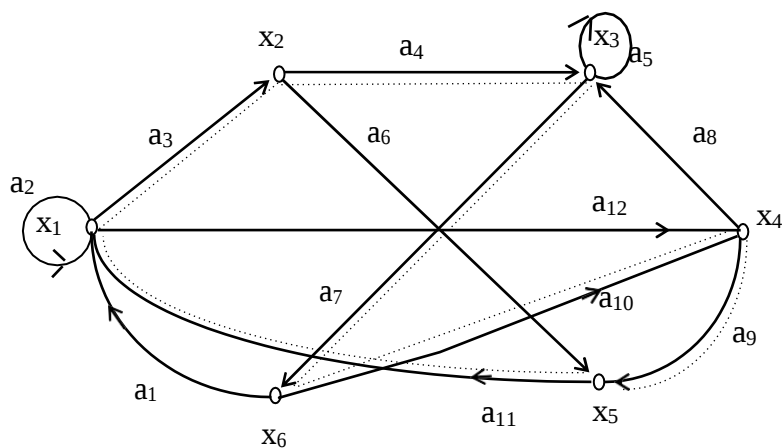


Рис. 59. Орцікли в графі

Контур, що проходить через всі вершини графа, має особливу назву - *гамільтонів контур*. Шлях M_3 є гамільтоновим контуром. Він показаний штриховою лінією на рисунку 59.

Для неорієнтованого графа *замкненим маршрутом* є неорієнтований двійник замкненого шляху, тобто замкненим маршрутом є маршрут, в якому збігаються початкові та кінцеві вершини.

Для неорієнтованого графа поняття циклу і Гамільтонова циклу аналогічні поняттям орцикла і гамільтонова контура в орграфі.

Ейлеровим циклом в графі називається цикл, що містить всі ребра графа. Граф, що містить ейлеров цикл називається *ейлеровим графом*.

Основна теорема про існування ейлерова циклу формулюється наступним чином.

Теорема. Зв'язаний неорієнтований граф G містить ейлеров цикл тоді й тільки тоді, коли число вершин непарного степеня дорівнює нулю (0 або 2).

Ейлер першим у своїй знаменитій задачі про Кенігсберзькі мости поставив питання про існування такого циклу. Умова цієї задачі розглядалася у вступі. Одержаний результат ознаменував народження теорії графів.

Завдання до розділу 5.10

1. Для графа, наведеного на рисунку, дані замкнені шляхи:

$M_1: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_7, x_2);$

$M_2: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6),$
 $x_6, x_2) (x_2, x_3), (x_3, x_7), (x_7, x_2); (x_6, x_2);$

$M_3: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6),$

$M_4: (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_3);$

$M_5: (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_6, x_1);$

$M_6: (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_6) (x_6, x_1);$

$M_7: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_6), (x_6, x_1), (x_1, x_2);$

а). Які з цих шляхів є контурами?

б) Які з цих шляхів є гамільтоновими контурами?

с). Які з цих шляхів є ейлеровими контурами?

.....

2. Побудувати гамільтонови та ейлерові цикли для графа на рисунку.

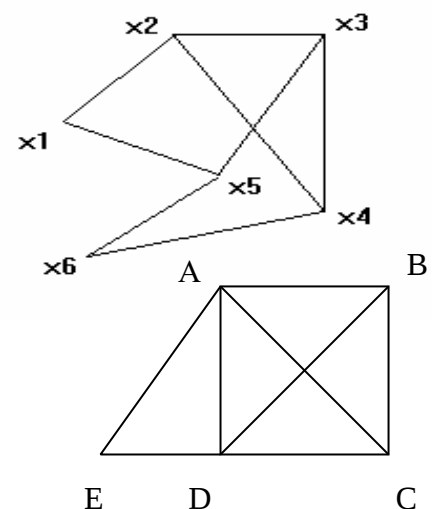
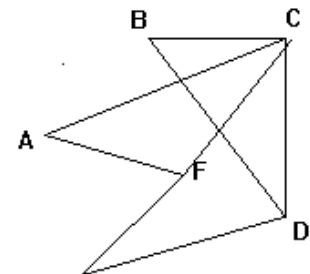
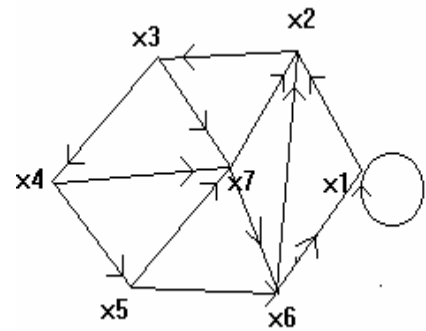
.....

3. Побудувати гамільтонови та ейлерові цикли для графа на рисунку.—

.....

4. Побудувати гамільтонови та ейлерові цикли для графа на рисунку.

.....



6 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ У ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

6.1 Абстрактні автомати

Математичну модель дискретного пристрою називають *абстрактним автоматом* згідно з наступним означенням.

Означення. Абстрактний автомат – це шестикомпонентний кортеж (множина елементів) $A = (Z, W, Q, \delta, \lambda, q_0)$, де:

$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_f, \dots, z_F\}$ – множина символів вхідного алфавіту (вхідних сигналів);

$W = \{w_1, w_2, \dots, w_g, \dots, w_G\}$ – множина символів вихідного алфавіту (вихідних сигналів);

Q – множина станів (алфавіт станів); $Q \neq \emptyset$

$Q = \{q_1, \dots, q_m, \dots, q_M\}$ – множина станів (алфавіт станів);

$\delta: Q \times Z \rightarrow Q$ – функція переходів, що деяким парам (q_m, z_f) “стан – вхідний сигнал” ставить у відповідність певні стани автомата $q_s = \delta(q_m, z_f)$;

$\lambda: Q \times Z \rightarrow W$ – функція виходів, що парам (q_m, z_f) ставить у відповідність вихідні сигнали автомата $w_s = \lambda(q_m, z_f)$, $w_s \in W$;

$q_0 \in Q$ – початковий стан автомата.

Абстрактний автомат має один вхідний і один вихідний канали (рис. 60). Абстрактний автомат, в якому виділено один із станів q_0 , називається *ініціальним*. Це стан, із якого автомат починає роботу і в який він переходить по її закінченні. У деяких задачах такий початковий стан не є необхідним, тоді абстрактний автомат описується п’ятикомпонентним кортежем $A = (Z, W, Q, \delta, \lambda)$.

Означення. Автомат $A = (Z, W, Q, \delta, \lambda, q_0)$ називається *скінченним*, якщо алфавіти Z і W входу і виходу та множина Q його станів скінченні.

Надалі ми будемо мати справу лише зі скінченними автоматами.

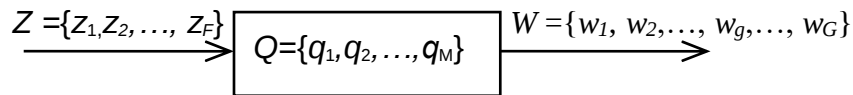


Рис. 60. Абстрактний автомат

Означення. Якщо символи вхідного і вихідного алфавітів Z і W автомата кодуються цифрами, то такий автомат називається *цифровим*.

Функціонування автомата розглядається в дискретні моменти автоматного часу $t_1, t_2, \dots, t_i$, які називаються тактовими моментами. Припускається, що поведінка автомата не залежить від інтервалу часу між t_i і t_{i+1} . Таким чином, фактично змінною є не сам час, а порядкові номери тактових моментів $t = 0, 1, 2, \dots, i, \dots$. Реальна ж тривалість тактів може бути довільною. Береться також припущення, що перехід автомата із одного стану в наступний та формування нового (а можливо, і того ж самого) символу на виході здійснюється стрибкоподібно, тобто миттєво в момент t автоматного часу. В реальних же автоматах завжди має місце кінцева тривалість перехідних процесів, тобто функції δ і λ переходів і виходів технічно реалізуються упродовж інтервалу реального часу, що відповідає даному моменту t автоматного часу.

Процес функціонування абстрактного автомата можна уявити наступним чином. На кожному такті автомат перебуває в деякому стані, а на початковому такті ($t=0$) – у початковому стані. Сприймаючи в момент автоматного часу t деякий символ вхідного алфавіту $z(t) = z_f \in Z$ на вхідному каналі, автомат видає на вихідному каналі в цей самий момент символ вихідного алфавіту $w(t) = w_g \in W$ і переключається на новий стан, який зберігатиметься протягом наступного такту часу. Вихідний сигнал і наступний стан визначають функції виходів λ і переходів δ .

Таким чином, функціонування автомата може розглядатись на рівні абстрактної теорії як процес перетворювання вхідних слів (послідовностей

вхідних символів) у вихідні слова.

Залежно від способу одержання значень вихідних сигналів є два типи автоматів – автомати Мілі та Мура. Автомат, вихідний сигнал якого залежить від його поточного стану і від сигналу на його вході - це *автомат Мілі*.

Автомат, вихідний сигнал $w(t)$ якого у такті t формується незалежно від вхідного сигналу $z(t)$, а лише залежно від його поточного внутрішнього стану, називають *автоматом Мура*.

Будь-який реальний автомат можна спроектувати за моделлю Мілі або Мура.

6.2 Способи математичного опису автоматів

Від задачі побудови реального автомата до формальної моделі переходять, описуючи насамперед алгоритм його роботи. Потім одним із способів задання автомата формують його математичну модель. Щоб задати абстрактний автомат A , з умови задачі треба описати всі елементи кортежу $A = (Z, W, Q, \delta, \lambda, q_0)$, тобто алфавіти вхідний, вихідний та станів, а також функції переходів і виходів. Задають автомат найчастіше табличним, графічним та аналітичним способами.

6.2.1 Табличний спосіб задання автомата Мілі

У разі табличного способу функції виходів λ та переходів δ , які описують роботу автомата Мілі, задають у вигляді таблиць виходів (таблиця 1) і переходів (таблиця 2). Рядки цих таблиць позначають символами вхідних сигналів з множини Z , а стовпці – символами станів з множини Q . У клітинці на перетині стовпця $q(t) = q_m$ і рядка z_f у таблиці переходів (таблиця 2) поставлено стан $q(t+1) = q_s$, в який переходить автомат із стану q_m під дією сигналу z_f . У відповідній клітинці таблиці

виходів (таблиця 1) поставлено вихідний сигнал $w(t) = w_g$, сформований під час переходу автомата із стану q_m у стан q_s .

У повністю визначеного автомата функції λ і δ визначено на всій множині пар $(q_m, z_f) \in Q \times Z$, тобто усі клітинки таблиць заповнено. Таблиці 1 та 2 повністю задають закон функціонування автомата Мілі, оскільки за ними можна довідатися про його поведінку в будь-який момент дискретного часу. Наприклад, у момент t на автомат, заданий таблицями 1 та 2, який перебуває у стані q_1 , надходить вхідний сигнал z_2 . Треба з'ясувати, як поводитиметься цей автомат. Для цього за таблицею 2 знаходимо, що автомат перейде в новий стан q_2 і на його виході з'явиться сигнал $w_3 \in W$ (див. табл. 1). Клітинки в таблицях 1 та 2, які відповідають цьому, наведені шрифтом.

Таблиця 1

$q(t) \backslash z(t)$	q_0	q_1	q_2	q_3
z_1	w_3	w_2	w_1	w_1
z_2	w_4	w_3	w_4	w_2
z_3	w_1	w_2	w_4	w_3

Таблиця 2

$q(t) \backslash z(t)$	q_0	q_1	q_2	q_3
z_1	q_1	q_2	q_0	q_3
z_2	q_3	q_2	q_0	q_0
z_3	q_2	q_1	q_2	q_3

Означення. Автомат називають частково визначеним, якщо в таблицях 1 і 2 заповнено не всі клітинки, тобто функції $\lambda=(q_m, z_f)$ та $\delta=(q_m, z_f)$ задані не для всіх пар $(q_m, z_f) \in Q \times Z$. Приклад такого автомата наведено в таблицях 3 і 4.

Таблиця 3

$q(t) \backslash z(t)$	q_0	q_1	q_2	q_3
z_1		w_2	w_1	w_1
z_2	w_4	w_3		w_2
z_3	w_1	w_2		

Таблиця 4

$q(t) \backslash z(t)$	q_0	q_1	q_2	q_3
z_1		q_2	q_0	q_3
z_2	q_3	q_2		q_0
z_3	q_2	q_1		

6.2.2 Графічний спосіб задання автомата Мілі

Графічний спосіб задання автомата Мілі передбачає подання його у вигляді орієнтованого графа, вершини якого відповідають станам автомата, а дуги – переходам між ними (рис. 61).

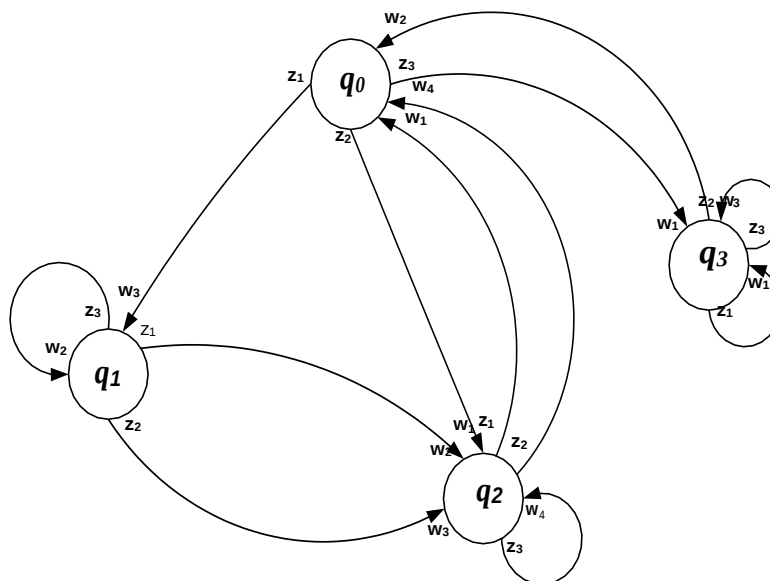


Рис. 61. Граф автомата Мілі, заданого таблицями 1 і 2

Дві вершини графа автомата та q_s (стани початковий та переходу) з'єднують дугою, спрямованою від до q_s , коли в автоматі є перехід з q_m у q_s , тобто коли $q_s = \delta(q_m, z_f)$ для деякого вхідного сигналу $z_f \in Z$.

Початок дуги (q_m, q_s) графа автомата помічають вхідним z_f , а кінець – вихідним сигналом $w_g = \lambda(q_m, z_f)$ (або рискою, коли не визначено у частково визначеному автоматі).

6.2.3 Табличний спосіб задання автомата Мура

Як і для автомата Мілі, для автомата Мура використовують табличний та графічний способи задання. Автомат Мура задають так званою позначеною таблицею переходів (таблиця 5), в якій кожен стовпець позначено станом $q(t) = q_m$ і вихідним сигналом $w(t) = w_g = \lambda(q_m)$, що відповідає цьому стану.

Таблиця 5

$w(t)$	w_1	w_2	w_3	w_3, w_4	w_3	w_3, w_4
$q(t)$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
$z(t)$						
z_1	q_1	q_0	q_3	q_1	q_5	q_0
z_2	q_2	q_4	q_3	q_1	q_5	q_0

Таблиця 5 описує одночасно і функцію переходів δ , і функцію виходів λ .

6.2.4 Графічний спосіб задання автомата Мура

Так само, як і для автомата Мілі, графічний спосіб задання автомата Мура передбачає подання його у вигляді орієнтованого графа, вершини якого відповідають станам автомата, а дуги – переходам між ними. В графі

автомата Мура його вершини також ототожнюють із станами, але значення вихідних сигналів записують біля вершин графа, а дуги позначають лише вхідними сигналами (рис. 62).

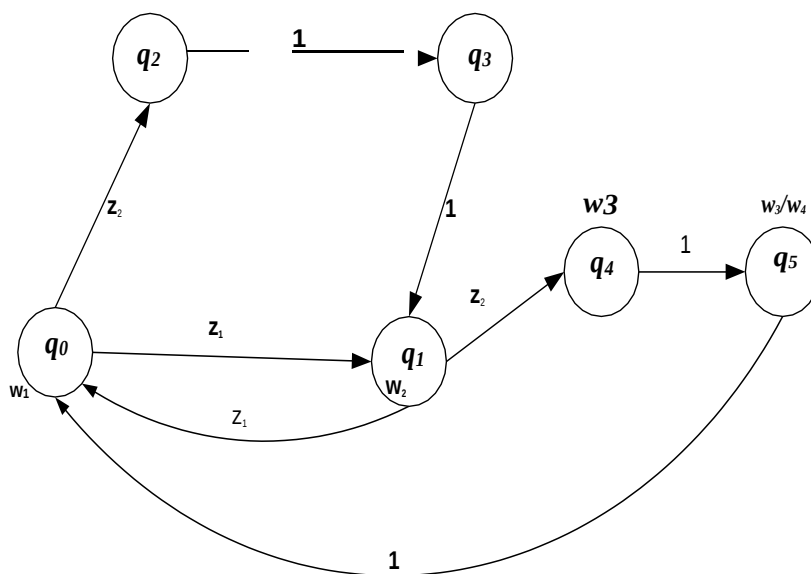


Рис. 62. Граф автомата Мура, заданого таблицею 5

Позначення дуг графа символом “1” на рисеунку 62 відповідає тому, що перехід між певними станами наявний завжди, незалежно від значень вхідних сигналів.

Для задання автомата за граф-схемою алгоритму (рис. 63) необхідно виконати розмітку граф-схеми відповідно до обраного типу автомата. Для автомата Мілі розмітка повинна здійснюватися наступним чином.

1. Усі операторні вершини повинні бути позначені символами вихідного алфавіту $w_1, w_2, \dots, w_G$. Однакові операторні вершини позначають однаковими символами w_g .

2. Усі умовні вершини позначають символами $z_1, z_2, \dots, z_F$. Однакові умовні вершини позначають однаковими символами z_f .

3. Виходи операторних вершин позначаються символами внутрішніх станів автомата $q_0, q_1, \dots, q_M$.

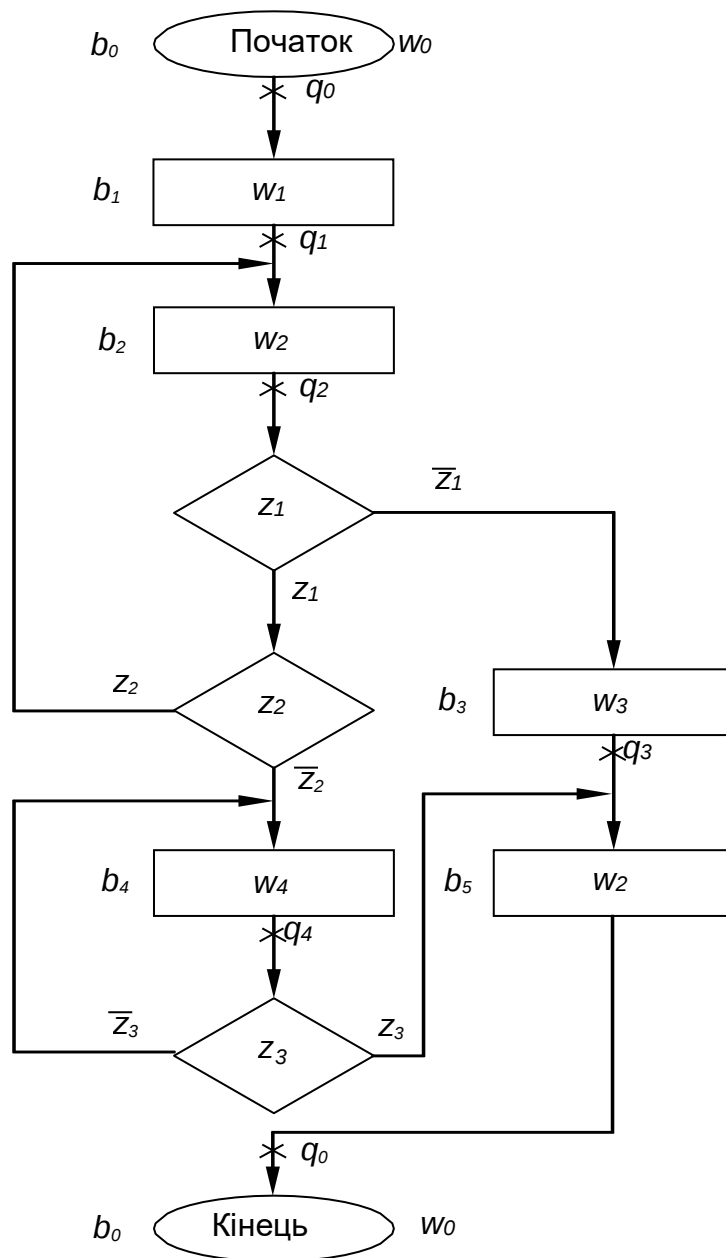


Рис. 63. Граф-схема алгоритму роботи автомата

Для автомата Мура розмітка виконується аналогічно, за винятком станів, які пропоставляються біля операторних вершин. На рисунку 63 стани автомата Мура позначені символами $b_0, b_1, \dots, b_M$ (щоб відрізнити їх від станів $q_0, q_1, \dots, q_M$, які вже були використані для розмітки автомата Мілі).

Переходи автомата зі стану в стан здійснюються під впливом вхідних сигналів, що відповідають виконанню або невиконанню умови z_f . Невиконанню умови відповідає інверсне значення змінної z_f , виконанню

умови – пряме значення змінної.

При виконанні або невиконанні кількох умов одночасно перехід здійснюється під впливом сигналу, що подаються кон'юнкцією відповідних прямих або інверсних значень змінних.

Після закінчення виконання алгоритму автомати обох типів повинні повертатися до початкового стану.

Граф-схеми алгоритмів роботи автоматів дуже часто використовуються для задання керуючих автоматів процесорів, в яких робота операційного блока з виконання деякої операції описується насамперед алгоритмом.

Граф-схема алгоритму, що показана на рисунку 63, розмічена для задання як автомата Мілі, так і автомата Мура з урахуванням зазначеної вище різниці позначень операторних вершин для цих автоматів. Відповідні цьому алгоритму графи автоматів Мілі і Мура подані на рисунках 64 і 65, відповідно.

Порівнюючи між собою ці графи, помічаємо, що в загальному випадку кількість станів в автоматі Мура більша, ніж в автоматі Мілі, що призводить до вищих затрат апаратних ресурсів на пам'ять автомата.

Одним із найпростіших прикладів розглянутих автоматів є автомат регулювання дорожнього руху на перехресті.

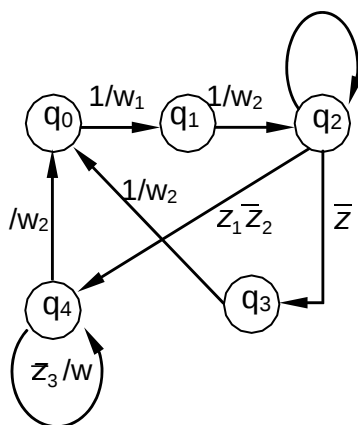


Рис. 64. Граф автомата Мілі

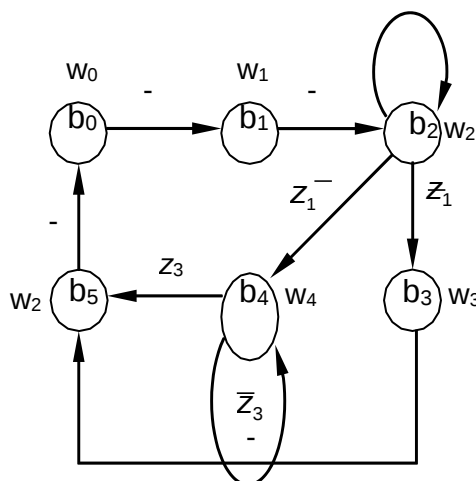


Рис. 65. Граф автомата Мура

Щоб краще зрозуміти процес формування математичної моделі автомата, розглянемо вже згадуваний дорожній автомат, трохи ускладнивши його. Припустимо, що автомат керує не лише світлофором, що регулює рух транспорту на перехресті, а й рухом пішоходів. З цією метою кнопкою виклику можна надіслати автоматові сигнал запиту z_1 , щоб рух транспорту припинився. Ця кнопка має пам'ять і повертається до початкового стану за сигналом C "Скид". Автомат завдяки генераторові тактових імпульсів працює в дискретному часі. Він виробляє сигнали D , B , Π , C – дозволи рухатися транспорту вулицями D , B , переходити пішоходам Π (вулицями D і B) та скид запиту C (заборона переходів).

Автомат працює так наступним чином. Коли немає запитів $z_1 = 1$ на припинення руху транспорту, він щохвилини перемикає сигнали D і B . Із надходженням запиту $z_1 = 1$ після закінчення поточного відрізка часу 1 хв автомат перериває послідовність сигналів D , B на 2 хв, упродовж цього часу сигналом Π засвітлює транспарант, що дозволяє пішоходам переходити, формує сигнал скиду C , після чого поновлює перервану послідовність видачі сигналів D , B .

Тепер зробимо формальний опис автомата, задавши алфавіти вхідних, вихідних сигналів та його станів, а також описавши реакцію автомата на вхідні сигнали.

На підставі часової діаграми та граф-схеми алгоритму роботи автомата дорожнього руху (рисунк 66) можна довідатися, що він має шість різних станів. Перші чотири з них відрізняються один від одного вихідними сигналами: 1 і 2 – дозволи проїжджати вулицями відповідно D і B ; Π – дозвіл переходити пішоходам; 4 – дозвіл переходити й вилучення запиту пешехлдів (Π , C).

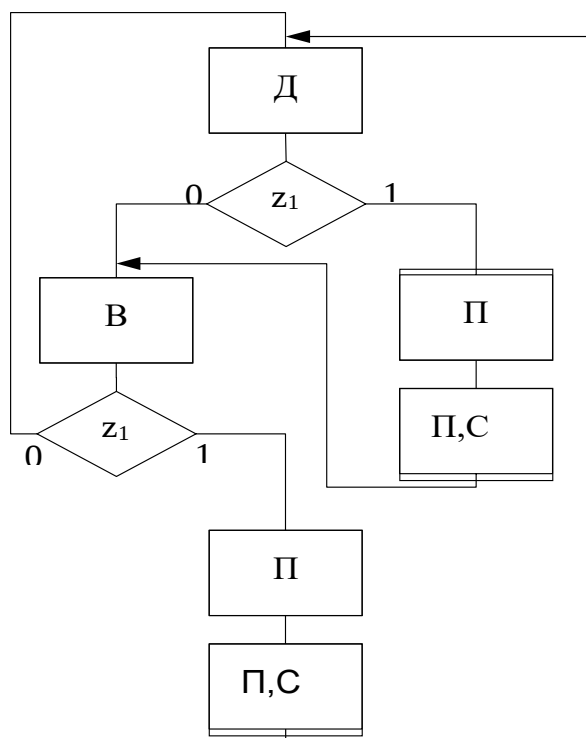


Рис. 66. Граф-схема алгоритму автомата дорожнього руху

Таким чином, за допомогою щрафів виконано першу частину процедури формування математичної моделі дорожнього автомата – задано алфавіти вхідних, вихідних сигналів і станів Z, W та Q , а також визначено початковий стан q_0 .

Завдання до розділу 6.2

1. Від яких умов залежить вибір моделі автомата (Мілі чи Мура) для його адекватного представлення?

.....

2. Із чим пов'язана доцільність переходу від автомата одного типу до автомата іншого типу? Чи можна кожному автомату Мілі поставити у відповідність еквівалентний йому автомат Мура і навпаки?

.....

3. Яким чином здійснюється перехід від автомата Мілі до автомата Мура? Чи містить одержаний у результаті перетворення еквівалентний автомат Мура однакову кількість станів з еквівалентним йому автоматом Мілі? Якщо ні, то чому?

.....

4. Опишіть за допомогою графів, як здійснюється перехід від автомата Мура до автомата Мілі.

.....

6.3 Мінімізація повністю визначених абстрактних автоматів

Еквівалентні автомати можуть мати різне число станів. У зв'язку з цим виникає задача знаходження мінімального автомата (з мінімальним числом станів) у класі еквівалентних між собою автоматів.

Означення. Два стани q_m і q_s автомата називаються *еквівалентними* ($q_m = q_s$), якщо $w(q_m, p) = w(q_s, p)$ для всіх можливих вхідних слів, тобто реакції автомата в цих станах на всі можливі вхідні слова p збігаються. Якщо q_m і q_s не еквівалентні, то вони *розрізняються*. Більш слабкою еквівалентністю є k -еквівалентність.

Означення. Стани q_m і q_s k -еквівалентні ($q_m = q_s$), якщо функції виходу λ від станів q_m і q_s однакові для всіх можливих вхідних слів p довжини k . Якщо ж стани не k -еквівалентні, то вони k – *розрізняються*.

Поняття еквівалентності і k -еквівалентності використовується для розбиття множини станів автомата на попарно розрізнявані класи еквівалентності.

Розглянемо алгоритм мінімізації абстрактного автомата, запропонований Ауфенкампом і Хоном. Основна ідея алгоритму полягає в розбитті всіх станів вихідного абстрактного автомата на класи еквівалентних станів, що попарно не перетинаються. Після розбиття відбувається заміна кожного класу еквівалентності одним станом. Одержаний у результаті мінімальний абстрактний автомат має стільки станів, на скільки класів еквівалентності розбивається стан вихідного абстрактного автомата.

Прийmemo позначення:

π – еквівалентність;

πk – k -еквівалентність.

Розбиття станів автомата на класи еквівалентності дозволяє визначити надлишкові елементи в множині станів Q .

Нехай стани q_m і q_s еквівалентні. Це означає, що з точки зору реакції автоматів на всі можливі вхідні слова не важливо, в якому стані знаходиться автомат: q_m чи q_s . Тому один з цих станів можна вилучити з алфавіту станів, наприклад q_s .

Якщо клас еквівалентності містить більше одного елемента, то всі елементи, крім одного, можуть бути виключені з цього класу еквівалентності. Якщо кожен клас еквівалентності містить лише один стан, то множина Q нескоротлива.

У результаті розбиття множини станів автомата на попарно розрізнявані класи еквівалентності отримуємо автомат з мінімальним числом станів.

Алгоритм мінімізації числа станів автомата $A = (Z, W, Q, \delta, \lambda, q_0)$ складається з наступних кроків.

1. Знаходяться послідовні розбиття $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \pi_{k+1}$ множини станів Q на класи одно-, дво-, ..., $k+1$ -еквівалентних між собою станів. Розбиття на класи проводиться до тих пір, поки на якомусь до $k+1$ кроці не виявиться, що $\pi_{k+1} = \pi_k$. Можна показати, що тоді розбиття $\pi_k = \pi$, тобто k -еквівалентні стани є еквівалентними і число кроків k , при якому $\pi_k = \pi$, не перевищує $M-1$, де M – число станів у множині

$$Q = \{q_1, \dots, q_m, \dots, q_M\}.$$

2. У кожному класі еквівалентності розбиття π вибирається за одним елементом, що утворює множину Q' станів мінімального автомата $A' = (Z, W, Q', \delta', \lambda', q_0')$, еквівалентного вихідному автомату A .

3. Функції переходів і виходів автомата S' визначаються на множині $Q' \times Z$, тобто $\delta': Q' \times Z \rightarrow Q'$, $\lambda': Q' \times Z \rightarrow W$. Для цього в таблицях переходів і виходів викреслюють стовпці, що відповідають тим станам, які не увійшли до множини Q' , а в тих стовпцях таблиці переходів, що залишилися, всі стани замінюються на еквівалентні з множини Q' .

4. Як q_0' вибирається один зі станів, еквівалентних q_0 .

Приклад 1. Заданий таблицею 6 автомат Мура має три вхідних сигнали $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, два вихідних сигнали $W = \{w_1, w_2\}$ та сім станів автомата $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_6, q_7\}$. Мінімізуємо автомат, використовуючи описаний вище алгоритм.

Таблиця 6

λ	w_1	w_1	w_2	w_2	w_1	w_2	w_1
δ	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
z_1	q_2	q_1	q_3	q_4	q_7	q_1	q_5
z_2	q_4	q_3	q_4	q_1	q_3	q_2	q_4
z_3	q_6	q_5	q_2	q_7	q_2	q_6	q_6

Розв'язування

Визначаємо класи k -еквівалентних станів. На першому кроці це 1-еквівалентні стани. Знаходимо класи 1-еквівалентних станів (за виходами w_1 таблиці 6):

$$B_1 = \{q_1, q_2, q_5, q_7\};$$

$$B_2 = \{q_3, q_4, q_6\};$$

$$\pi_1 = \{B_1, B_2\}.$$

Будуємо таблицю розбиття π_1 (на k -му кроці π_k), замінюючи стани в таблиці переходів на відповідні класи еквівалентності (див. таблицю 7).

Таблиця 7

	B_1				B_2		
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_3	q_4	q_5
z_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_2	B_2	B_2
z_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_1	B_1
z_3	B_2	B_1	B_1	B_2	B_1	B_1	B_2

Проводимо перевірку. Якщо $\pi_k = \pi_{k+1}$, то переходимо до пункту 4. Якщо π_k і π_{k+1} не збіглися, то повертаємося до пункту 2 і знаходимо відповідні класи еквівалентності, поки перевірка не буде виконана.

$$C_1 = \{q_1, q_7\};$$

$$C_2 = \{q_2, q_5\};$$

$$C_3 = \{q_3\};$$

$$C_4 = \{a_4\};$$

$$C_5 = \{q_6\};$$

$$\pi_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}.$$

Перевірка після другого кроку показує, що $\pi_1 \neq \pi_2$. Виконуємо знову пункти 2 і 3 алгоритму (див. таблицю 8).

Таблиця 8

	C_1		C_2		C_3	C_4	C_5
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_3	q_4	q_5
z_1	C_2	C_2	C_1	C_1	C_3	C_4	C_1
z_2	C_4	C_4	C_3	C_3	C_4	C_4	C_2
z_3	C_5	C_5	C_2	C_2	C_2	C_1	C_5

$$D_1 = \{q_1, q_7\};$$

$$D_2 = \{q_2, q_5\};$$

$$D_3 = \{q_3\};$$

$$D_4 = \{q_4\};$$

$$D_5 = \{q_6\};$$

$$\pi_3 = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}; \pi_2 = \pi_3;$$

$$q_1 = q_7;$$

$$q_2 = q_5.$$

Таким чином, таблиця 9 переходів мінімізованого автомата Мура матиме вигляд:

Таблиця 9

λ	w_1	w_1	w_2	w_2	w_2
δ	q_1	q_2	q_3	q_4	q_6
z_1	q_2	q_1	q_3	q_4	q_1
z_2	q_4	q_3	q_4	q_1	q_2
z_3	q_6	q_2	q_2	q_1	q_6

Приклад 2. Мінімізувати автомат Мілі (знайти еквівалентний автомат із мінімальною кількістю станів), заданий таблицями переходів 10 і виходів 11.

Таблиця 10

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
z_1	q_2	q_3	q_2	q_3	q_4	q_5
z_2	q_4	q_5	q_4	q_5	q_0	q_1

Таблиця 11

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
z_1	w_1	w_1	w_1	w_1	w_1	w_1
z_2	w_1	w_1	w_2	w_2	w_1	w_1

Розв'язування

З таблиці виходів отримуємо розбиття на класи 1-еквівалентності π_1 , об'єднуючи в еквівалентні класи B_i стани з однаковими стовпцями:

$$\pi_1 = \{B_1, B_2\}; B_1 = \{q_0, q_1, q_4, q_5\}; B_2 = \{q_2, q_3\}.$$

Для одержання 2-еквівалентних станів будуємо таблицю розбиття π_1 (таблиця 12), замінюючи в таблиці переходів стани q_i відповідними класами еквівалентності B_1 або B_2 .

Таблиця 12

	B_1				B_2		
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_3	q_4	q_5
z_1	B_1	B_1	B_1	B_1	B_2	B_2	B_2
z_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_2	B_1	B_1
z_3	B_2	B_1	B_1	B_2	B_1	B_1	B_2

З отриманої таблиці одержимо класи 2-еквівалентності C_i і розбиття $\pi_2 = \{C_1, C_2, C_3\}$, де $C_1 = \{q_0, q_1\}$, $C_2 = \{q_4, q_5\}$, $C_3 = \{q_2, q_3\}$. Порівнюючи π_2 і π_1 , зазначаємо, що ці розбиття відрізняються одне від одного, $\pi_2 \neq \pi_1$. Тому

аналогічно будуємо таблицю розбиття π_2 (таблиця 13), знову замінюючи в таблиці переходів стани q_i відповідними класами еквівалентності C_i .

Таблиця 13

	C_1		C_1		C_1	
	q_0	q_2	q_4	q_5	q_2	q_3
z_1	C_3	C_3	C_2	C_2	C_3	C_3
z_2	C_2	C_2	C_1	C_1	C_2	C_2

Порівнюючи π_2 і π_3 , помічаємо, що $D_1 = C_1$, $D_2 = C_2$, $D_3 = C_3$, отже $\pi_2 = \pi_3$. Таким чином, ми отримали розбиття Q на 3-еквівалентні класи. Оскільки таких класів усього три, то мінімальний автомат буде мати лише три стани. Вибираємо з кожного класу D_i по одному стану і отримуємо множину станів Q' мінімального автомата. Нехай, наприклад, $Q' = \{q_0, q_3, q_4\}$. Для отримання мінімального автомата із вихідних таблиць переходів і виходів (таблиці 10 і 11) викреслюємо стовпці, що відповідають “зайвим станам” q_1, q_3, q_6 . У результаті одержимо мінімальний автомат Мілі, еквівалентний вихідному автомату (таблиці 14, 15).

Таблиця 14

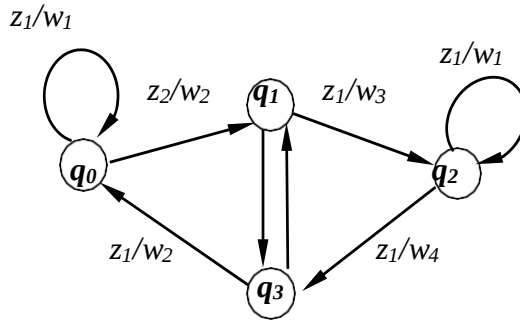
	q_0	q_3	q_4
z_1	q_3	q_3	q_2
z_2	q_4	q_4	q_0

Таблиця 15

	q_0	q_3	q_4
z_1	w_1	w_1	w_1
z_2	w_1	w_2	w_1

Завдання до розділу 6.3

1. На рисунку зображено граф автомата. Визначте тип автомата (Мура чи Мілі) і задайте його табличним способом.



.....

2. Автомат заданий таблицею. Як називається ця таблиця, автомат якого типу вона описує? Побудуйте граф цього автомата.

w	w ₁	w ₄	w ₂	w ₃	w ₅
z/q	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₆
z ₁	q ₂	q ₁	q ₃	q ₄	q ₁
z ₂	q ₄	q ₃	q ₄	q ₁	q ₂
z ₃	q ₅	q ₂	q ₂	q ₁	q ₅

.....

3. Автомат Мілі заданий суміщеною таблицею переходів/виходів. Запишіть математичну модель автомата, а також подайте його графічним методом.

	q ₀	q ₁	q ₂	q ₃
z ₁	q ₁ /w 1	q ₁ /w 1	q ₀ /w 1	q ₀ /w 1
z ₂	q ₃ /w 1	q ₃ /w 1	q ₃ /w 2	q ₂ /w 2

.....

4. Відомо, що скінченний автомат має вхідний алфавіт $Z = \{z_1, z_2\}$, вихідний алфавіт $W = \{w_1, w_2\}$ і множину станів $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$. Задайте автомат табличним і графічним способами.

.....

5. Вантажний ліфт, що обслуговує триповерховий магазин, має кнопку виклику на кожному поверсі та працює за такими правилами: якщо натиснута одна кнопка, то ліфт рухається на поверх, на якому розміщена ця кнопка; якщо натиснуті одночасно дві або три кнопки, то ліфт рухається на нижчий з усіх поверхів, на яких натиснуті кнопки. Жодна кнопка не може бути натиснута під час руху ліфта (наприклад, передбачено механічне блокування).

На підставі наведеного вербального опису автомата перейдіть до його математичної моделі у вигляді абстрактного автомата.

.....

6. Задайте автомат, описаний у завданні 5, табличним і графічним способами.

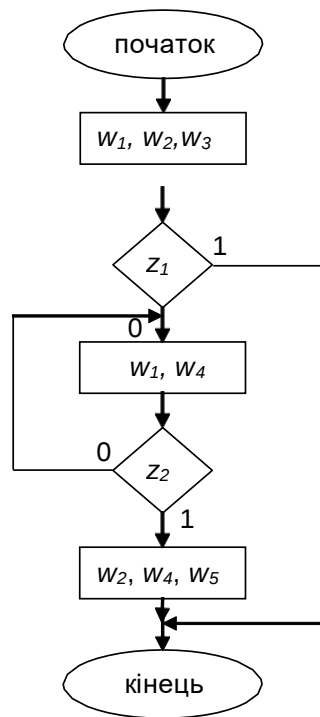
.....

7. Автомат Мура задано таблично. Перейти до автомата Мілі.

w	w ₁	w ₁	w ₃	w ₂	w ₅
z/q	q ₁	q ₂	q ₃	q ₄	q ₅
z ₁	q ₂	q ₅	q ₅	q ₃	q ₃
z ₂	q ₄	q ₂	q ₂	q ₁	q ₁

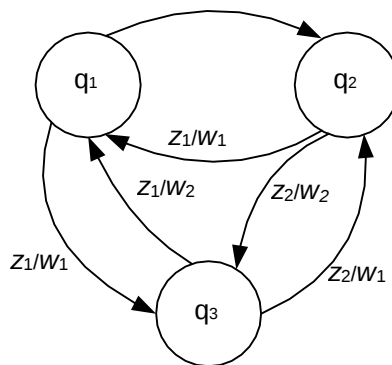
.....

8. Зробіть розмітку граф-схеми алгоритму, зображеної на рисунку, для автомата Мура. Подайте автомат у вигляді оргграфа і табличним способом. Зробіть розмітку цієї граф-схеми також для автомата Мілі і подайте його у вигляді оргграфа і табличним способом.



.....

9. Автомат задано орграфом на рисунку. Визначити, який тип цього автомата, і якщо це автомат Мура, то перейти до автомата Мілі, а якщо Мілі – то перейти до автомата Мура.



.....

11. Для автомата $U = \{Z, W, Q, \delta, \lambda\}$, де $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$, $W = \{w_1, w_2\}$, задана автоматна таблиця. Знайти мінімальний за кількістю станів автомат.

	z_1	z_2	z_3
q_1	q_1, w_3	q_4, w_3	q_3, w_5
q_2	q_2, w_1	q_1, w_3	q_3, w_4
q_3	q_4, w_3	q_3, w_3	q_4, w_3
q_4	q_5, w_7	q_2, w_1	q_2, w_4
q_5	q_7, w_8	q_2, w_3	q_3, w_5
q_6	q_8, w_3	q_6, w_1	q_3, w_2
q_7	q_4, w_9	q_3, w_7	q_4, w_3
q_8	q_5, w_2	q_2, w_5	q_2, w_6
q_9	q_8, w_1	q_2, w_1	q_9, w_7

.....

12. Дайте визначення k -еквівалентності станів автомата. Опишіть алгоритм мінімізації.

.....

6.4 Мінімізація орієнтованих детермінованих графів з ациклічними підграфами

6.4.1. Постановка задачі

Графи з поміченими вершинами є однією з основних моделей при розгляді двох напрямків. Перший — це задачі, пов'язані з аналізом операційного середовища за допомогою блукаючих по ньому агентів (мобільних роботів, автоматів, пошукових програм тощо), що відносяться до категорії традиційних завдань штучного інтелекту. Однією з центральних і актуальних як у теоретичному, так і в прикладному аспектах проблем, що виникають при дослідженнях взаємодії автоматів та операційного середовища, є проблема аналізу або розпізнавання властивостей цього

середовища при різній апіорній інформації і при різних способах взаємодії автомата та операційного середовища. У таких задачах розглядаються різні геометричні моделі середовищ.

Операційне середовище розглядається як граф з поміченими вершинами. Такі графи виникли спочатку як блок-схеми та схеми програм, а в даний час знаходять застосування в задачах навігації роботів.

Другий напрямок – це блок-схеми програм. Задача еквівалентності програм належить до числа найбільш важливих задач теорії програмування. Особливе значення задачі еквівалентності обумовлено тим, що саме до цієї проблеми еквівалентних перетворень зводиться більшість задач оптимізації, верифікації та аналізу програм. Тому розробка і впровадження ефективних алгоритмів перевірки еквівалентності програм справляє помітний вплив на підвищення продуктивності та якості багатьох інструментальних засобів аналізу і перетворення програм. В останні роки поряд із задачами підвищення ефективності та надійності програм не меншої актуальності набула задача своєчасного виявлення стороннього коду, яка включає виявлення недекларованих можливостей програмних продуктів, а також виявлення та усунення програм-вірусів.

В обох випадках такі графи можуть містити велику кількість вершин, тому виникає завдання зменшення їх кількості зі збереженням необхідних властивостей графа. Ця задача відома як задача мінімізації.

У даному розділі розглядається проблема мінімізації орієнтованих детермінованих графів з поміченими вершинами. Ця проблема дозволяє знаходити еквівалентні графи, за допомогою яких можна представити різні системи. Аналіз графів проводиться методами, аналогічними методам теорії автоматів. Ці методи створені для графових систем, які не є кінцевими автоматами, але в деякому розумінні автоматоподібними системами.

Проблема мінімізації полягає в знаходженні розбиття всіх вершин графа на класи еквівалентних. Існує алгоритм мінімізації графа часової складності $O(2^n)$ у загальному випадку і $O(n^2)$ для так званих детермінованих графів.

Розглянемо наступну задау. Нехай $G = (V, E, M, \mu)$ – кінцевий, помічений, орієнтований граф, без петель і кратних дуг, де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина дуг, M – множина номерів поміток, $\mu: S @ M$ – функція розмічування вершин, $E(v) = \{u \in V | (v, u) \in E\}$ – множина наступників вершини v і $E^{-1}(v) = \{u \in V | (u, v) \in E\}$ – множина її попередників.

Кінцеву послідовність вершин $p = g_1 \dots g_k$, таку, що $g_{i+1} \in E(g_i)$, $1 < i \leq k$, назовемо шляхом у графі G . Слово $\mu(p) = \mu(g_1) \dots \mu(g_k)$ назовемо відміткою шляху p . Позначку будь-якого шляху, що виходить з вершини $g \in V$, будемо називати словом, породженим вершиною g . Мову L_g визначимо як множину всіх слів, породжених вершиною g .

Вершини g, h – назовемо еквівалентними, якщо $L_g = L_h$, і відмінними в іншому випадку. Граф G називається приведеним, якщо всі його вершини попарно відрізняються. Послідовність вершин $g_1 \dots g_k$ називається ациклічним підграфом графа тоді і тільки тоді, коли для будь-якої g_j вершини послідовності є шлях тільки у вершини $g_{j+1} \dots g_k$.

Вершини ациклічного підграфа природно ранжуються за рівнями: 1) якщо v – лист в G , то рівень $\rho(v)$ дорівнює 0; 2) $\rho(v) = i + 1$, якщо $\rho(u) \leq i$ для всіх $u \in E(v)$ та $\rho(u) = i$ для деякої $u \in E(v)$. Число вершин в $E(v)$ назовемо ступінню вершини v та позначимо $st(v)$. Через $\mu[E(v)]$ позначимо множину всіх відміток з $E(v)$. Через $|V|$ позначимо потужність множини V .

Відношення $\pi_1 \subseteq \pi_2$ визначає, що кожний клас із π_1 повністю входить у клас з π_2 . Клас, який не може бути розбитий, назовемо остаточно розбитим.

Задача мінімізації зводиться до знаходження грубішого розбиття π , задовольняє умові:

$\pi \subseteq \pi_0$, де π_0 – так зване початкове розбиття, причому вершини a і b знаходяться в одному його класі, якщо $\mu(a) = \mu(b)$ та $|\mu[E(a)]| = |\mu[E(b)]|$, а також π є розбиттям з властивістю підстановки, якщо a, b в одному класі π , і $(a, c), (b, d) \in E$, $\mu(c) = \mu(d)$, то c, d також входять в один клас π .

6.4.2 Метод і алгоритм знаходження еквівалентних вершин

Метод рішення складається в тому, що, виходячи з π_0 , будується послідовність розбиття $\pi_1 \supseteq \pi_2, \dots, \pi_i, \dots, \pi_k \supseteq \pi_{k+1}$. Перехід від π_i до π_{i+1} відбувається наступним чином: спочатку обробляються (мінімізуються) вершини, що належать ациклічним підграфам, далі вони обробляються не будуть. Необроблені вершини мінімізуються методом, що є модифікацією алгоритму Хопкрофта. Модифікація полягає в тому, що на повторну обробку поміщаються номери класів не з меншою кількістю вершин, а з меншою кількістю попередників для класу.

Опис алгоритму

1. Будуємо початкове розбиття π_0 .
2. Мінімізуємо всі ациклічні підграфи, при цьому вершини, які належать підграфам, більше не будуть оброблятися.
3. Мінімізуємо граф, що залишився алгоритмом.

Пояснення алгоритму

Алгоритм складається з двох етапів. На початку будується розширене початкове розбиття π_0 . Номери класів, що містять вершини зі ступенем 0, помістимо в множину WAIT0, інші – в множину WAIT.

На першому етапі мінімізуються всі ациклічні підграфи. У множину WAIT0 можуть потрапити тільки остаточно розбиті класи, спочатку це класи, які містять листя графа. Так як у листя немає наступників, то їх мова складається з однієї літери, і ці класи ми отримуємо після початкового розбиття. Далі для всіх вершин $v \in B[i]$ і $i \in \text{WAIT0}$ обробляємо попередників $g \in E^{-1}(v)$ і $\text{st}(g) = \text{st}(v) - 1$, зменшуємо ступінь на 1, таким чином ми видаляємо нижній рівень ациклічних підграфів. Цикл пункту 2 виконується, поки будуть з'являтися нові вершини зі ступенем, рівним 0. Якщо таких вершин немає, тоді всі ациклічні підграфи були мінімізовані, і алгоритм переходить на другий етап, в якому не оброблені класи

мінімізуються загальним алгоритмом.

Всі номери класів, які можуть бути розбиті або можуть розбити будь-який клас, перебувають у множині WAIT. Для кожного класу з множини WAIT видаляємо номер класу з множини, будемо множину попередників $E^{-1}(B)$ для обраного класу B. Перетинаємо попередників з існуючими класами. Якщо клас K не повністю перетинається $E^{-1}(B)$, значить клас розбивається на K і KN. Якщо номер K вже міститься в WAIT, то в множину WAIT помістимо номер класу KN, інакше в множину поміщається номер того класу, у якого попередників менше. Алгоритм закінчує свою роботу, коли в множині WAIT не буде жодного класу.

Обґрунтування алгоритму

Теорема. Алгоритм коректний, тобто завершується за кінцеве число кроків і будує шукане розбиття π за $O(m \cdot n \cdot \log(n))$ кроків.

Покажемо, що алгоритм через кінцеве число кроків зупиниться. Початкове розбиття вершин виконується за n кроків, n – кількість вершин графа. У пункті 2 алгоритму вершини обробляються тільки один раз, отже, він закінчить свою роботу за кінцеве число кроків. У пункті 3 номер класу може потрапити в множину WAIT тільки при розбитті якогось класу. Так як клас еквівалентності не може містити менше 1 вершини, тоді розбиттів у графі буде не більше n . Всі етапи алгоритму виконуються за кінцеве число кроків, отже, через кінцеве число кроків алгоритм зупиниться.

Покажемо, що алгоритм працює коректно, тобто π є грубе розбиття вершин на класи еквівалентних, π має властивість підстановки. Включення $\pi \subseteq \pi_0$ виконується з побудови, так як при роботі алгоритму класи розбиваються, а не об'єднуються. π є розбиттям з властивістю підстановки, так як якщо вершини v і u належать одному класу еквівалентності, то

$$K' = E^{-1}(u) \cup E^{-1}(v)$$

не розбиває класи розбиття π , інакше вони були б розбиті раніше.

Покажемо, що розбиття π найгрубіше. Нехай існує більш грубе розбиття

π' . $\pi' \subseteq \pi$ з властивістю підстановки, кількість класів в π' буде менше ніж в π , значить існують вершини v і u , які в π належать різним класам еквівалентності, а в π' – одному. Але це неможливо, так як u та v при побудові π знаходяться у різних класах, тобто не еквівалентні, та π' не може включатися в π . Таким чином, алгоритм будує шукане розбиття π .

Оцінимо часову складність алгоритму в найгіршому випадку. Пункт 1 алгоритму виконується за N кроків. Нехай кількість вершин, які належать ациклічним підграфам, дорівнює k . Покажемо, що пункт 2 виконується за $\sum |E^{-1}(v)|$ кроків, де v – вершини, які належать ациклічним підграфам, що не перевищує $O(|E|)$. Розглянемо складність виконання всього пункту 2 алгоритму, в якому обробку проходять тільки остаточно розбиті вершини.

Це означає, що кожна вершина обробляється в пункті 2 тільки 1 раз. Для кожної вершини v оброблюваного рівня ми зменшуємо ступінь вершин $u \in E^{-1}(v)$, це вимагає числа кроків, рівного кількості дуг, що входять до v . Під обробкою рівня ациклічних підграфів розуміється зменшення ступеня попередників вершин цього рівня і побудова розбиття π_i . Після обробки цей рівень графа видаляється, значить, видаляються розглянуті дуги, тому кожна дуга обробляється в циклі лише 1 раз. У циклі пункту 2 дуги розглядаються 1 раз, і виконується константне число мінімальних операцій додавання, видалення чисел у множині, виділення пам'яті для тимчасових класів, які містять вершини. Цих класів при обробці одного рівня графа не може бути більше числа переглянутих дуг, так як клас повинен містити хоча б одну вершину. Сумарне число вершин, які можна додавати в множини, так само не перевищує числа дуг, так як одна вершина не може одночасно знаходитися в двох класах еквівалентності.

У пункті 2 виконуються операції додавання і видалення номерів класів у множину $WAIT_0$. У цій множині можуть бути тільки номери остаточно розбитих класів, це означає, що за час роботи алгоритму буде не більше k доповнень і вилучень.

На другому етапі обробляються вершини, які не належать остаточно розбитим класам. Таких вершин буде $n-k$. На другому етапі виконується 3 пункт алгоритму. Основний цикл виконується $|WAIT|$ разів. Вважаємо, що спочатку в $|WAIT| = p$.

Клас може потрапити в цю множину тільки при розбитті. Кількість розбиттів може бути не більше $n-k-p$, так як кожен клас не може містити менше 1 вершини. Отже, цикл пункту 3 буде виконуватися $(n-k-p)+p = n-k$ раз. Для всіх вершин v_j , у яких

$$\mu(v_j) = a \sum |E^{-1}(v_j)| \leq n.$$

Так як класи не можуть містити однакових вершин, тоді

$$\sum |E^{-1}(B[i])| \leq n,$$

i – номери класів з відміткою a і належать множині $WAIT$. Так як різних відміток у графі – m , тоді кількість кроків, необхідних для обробки p класів, не перевищує mp кроків. Якщо розбився клас K , номер якого вже міститься в $WAIT$, значить складність алгоритму не збільшується, так як $K = K1 \cup K2$, а отже, за властивістю детермінованих графів

$$E^{-1}(K) = E^{-1}(K1) \cup E^{-1}(K2).$$

Якщо розбивається клас вже оброблений та його номер не міститься в $WAIT$, тоді в множину поміщається клас, у якого менше попередників. Отже, клас потрапляє на обробку тільки тоді, коли попередників у ньому буде як мінімум в 2 рази менше і так далі на зменшення. Таким чином складність другого етапу дорівнює $mn \log(n)$. Загальна складність алгоритму дорівнює $O(n) = (k + nm \log(n))$ та рівняється $O(nm \log(n))$. Якщо ми будемо мінімізувати дерево, то другий етап роботи алгоритму ніколи не буде виконуватися, і тоді складність всього алгоритму буде дорівнювати $O(n)$. А для ациклічних графів – $O(mn)$. *Теорему доведено.*

Приклад

Розглянемо виконання даного алгоритму на графі (рис. 67). Початкове розбиття для графа дорівнює $\pi_0 = \{1\{1,2,9,12,14\}, 2\{7,16,10\}^*, 3\{3,4,5,13\}$

$4\{6,8,11,15\}$. Класи з * далі розбиватися не можуть. Зараз – це клас 2, в якому всі вершини є листям. В WAIT0 помістимо номери класів, що містять листя, WAIT0 = {2}.

Обробляємо активні класи та отримуємо наступний рівень графа – це вершини {6,9,15} та нове розбиття $\pi_1 = \{1\{1,2,12,14\}, 2\{7,16,10\}^*, 3\{3,4,5,13\}, 4\{8,11\}, 5\{6,15\}^*, 6\{9\}^*\}$ на класи еквівалентних вершин. Активними стають вершини першого рівня WAIT0 = {5{6,15}, 6{9}}. Оброблюємо активні класи та отримуємо новий рівень графа, це вершина {8} та нове розбиття $\pi_2 = \{1\{1,2,12,14\}, 2\{7,16,10\}^*, 3\{3,4\}, 4\{11\}, 5\{6,15\}^*, 6\{9\}^*, 7\{8\}^*, 8\{5,13\}\}$. Отримуємо вершини другого рівня WAIT0 = {7{8}}. Обробляємо активні класи, отримаємо розбиття $\pi_3 = \{1\{1,2,12,14\}, 2\{7,16,10\}^*, 3\{4\}, 4\{11\}, 5\{6,15\}^*, 6\{9\}^*, 7\{8\}^*, 8\{5,13\}, 9\{3\}\}$. Вершин нового рівня не

отримуємо, значить, оброблені всі ациклічні підграфи. Для пошуку вершин за ступінню 0 потрібно 16 кроків. А для обробки ациклічних підграфів потрібна кількість кроків, рівна кількості дуг, які входять в ациклічні вершини, що дорівнює 7.

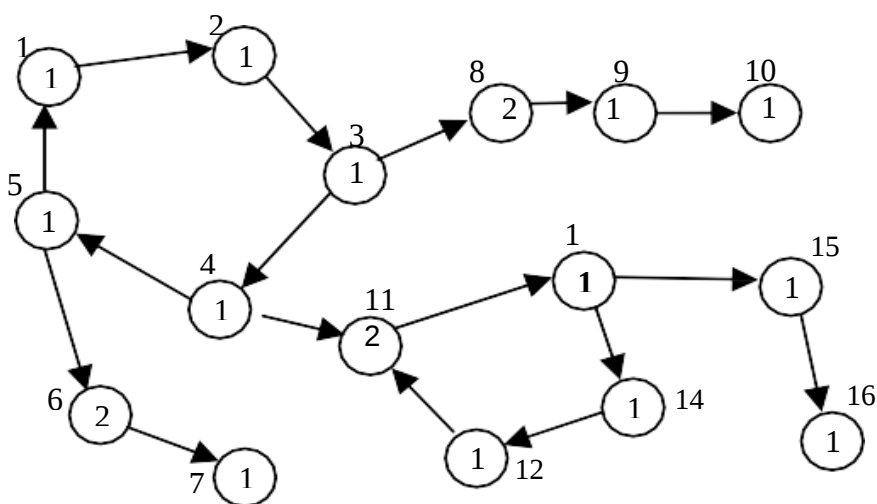


Рис. 67. Загальний вид графа

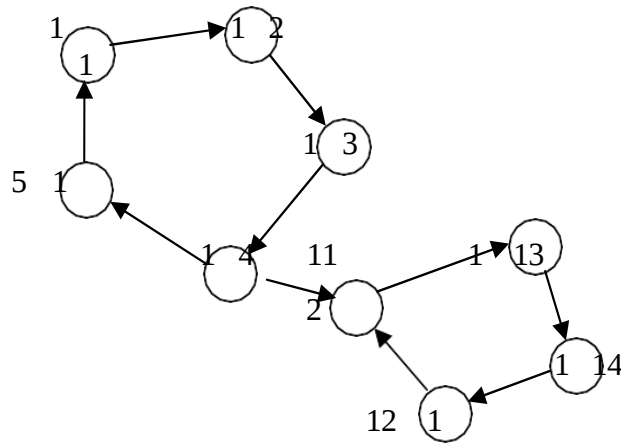


Рис. 68. Граф без ациклічних підграфів

На обробку цього етапу потрапляє граф без ациклічних підграфів (рис. 68) та у множину WAIT помістимо не остаточно розбиті класи, $WAIT = \{1\{1,2,12,14\}, 8\{5,13\}, 3\{4\}, 9\{3\}, 4\{11\}\}$. Оброблюємо класи з множини WAIT послідовно, завжди вибираємо останній клас. В результаті отримуємо розбиття $\pi = \{1\{1\}, 2\{7,16,10\}^*, 3\{4\}, 4\{11\}, 5\{6,15\}^*, 6\{9\}^*, 7\{8\}^*, 8\{5\}, 9\{3\}, 10\{12\}, 11\{14\}, 12\{13\}, 13\{2\}\}$. На виконання другого етапу потрібно 10 кроків. В сумі алгоритму потрібно $T(n) = 16+7+10 = 33$. Теоретична оцінка складності алгоритму дорівнює $O(m*n*\log n) = 16*2*4 = 128$.

Таким чином, розглянутий алгоритм для деяких видів графів дає лінійну часову складність. Це можливо у випадках, коли обробляється ациклічний граф. У цьому випадку буде виконуватися тільки перший етап алгоритму. Тимчасова складність буде залежати від виду ациклічних графів. Наприклад, для дерев – $O(n)$, для детермінованих ациклічних графів – $O(n*m)$, що загалом дозволяє досить якісно здійснити мінімізацію орієнтованих детермінованих графів із поміченими вершинами.

СЛОВНИК ТЕРМІНІВ

У словнику зібрані основні визначення термінів із теорії графів. Курсивом позначені посилання на терміни в цьому словнику.

А

- **Автоморфізм** – ізоморфізм графа із самим собою.

Б

- **Біграф** – див. *двочастковий граф*.
- **Блок-дизайн** із параметрами (v, k, λ) — покриття з кратністю λ *повного графа* на v вершинах повними графами на k вершинах.
- **Блоковий граф** – вид неорієнтованого графа, в якому кожна компонента двозв'язності (блок) є клікою.

В

- **Валентність вершини** – див. *Степінь вершини*
- **Вершина, Вузол** – базове поняття: точка, де можуть сходитися/розходитися *ребра* та/або *дуги*. Множина вершин графа G позначається $V(G)$.
- **Висяча вершина** – *вершина, степінь* якої дорівнює 1.
- **Вага ребра** – значення, поставлено у відповідність даному *ребру зваженого графа*. Зазвичай вага – дійсне число, в такому випадку його можна інтерпретувати як «довжину» ребра.
- **Відстань** між двома вершинами графа – найменша довжина *шляху*, що з'єднує ці вершини.
- **Впорядкований граф** – граф, в якому ребра, що виходять з кожної вершини, однозначно пронумеровані, починаючи з 1. Ребра вважаються впорядкованими в порядку зростання номерів. При графічному представленні часто ребра вважаються впорядкованими в порядку певного стандартного обходу (наприклад, проти годинникової стрілки).

- **Вузол** – те саме, що і *Вершина*.

Г

- **Гамільтонів граф** – граф, в якому є гамільтонів цикл.
- **Гамільтонів шлях** – *простий шлях* в графі, що містить всі *вершини* графа точно по одному разу.
- **Гамільтонів цикл** – *простий цикл* в графі, що містить всі вершини графа точно по одному разу.
- **Геометрична реалізація** – фігура, вершинам якої відповідають вершини графа, ребрам – ребра графа, і ребра у фігурі поєднують вершини, що відповідають вершинам в графі.
- **Геометричний граф** – плоска фігура з вершин – точок площини і ребер – ліній, що з'єднують деякі пари вершин. Може зображати багатьма способами будь-який граф.
- **Гіперграф** – сукупність із множини вершин і множини гіперребер (підмножина n -го евклідового степеня множини вершин, тобто гіперребра об'єднують довільну кількість вершин).
- **Гомеоморфні графи** – графи, отримані з одного графа за допомогою послідовного підрозбиття ребер.
- **Грань** – область, обмежена ребрами в *плоскому графі*, і така, що не містить всередині себе вершин і ребер графа. Зовнішня частина площини також утворює грань.
- **Граф** – базове поняття. Містить в собі множину *вершин* і множину *ребер*, що являє собою підмножину декартова добутку множини вершин (тобто кожне ребро з'єднує рівно дві вершини).
- **Граф роду g** – граф, який можна зобразити без перетинань на поверхні роду g і не можна зобразити без перетинань на жодній поверхні роду $g-1$.

Д

- **Двоїстий граф**. Граф A називається двоїстим до планарного графа B , якщо вершини графа A відповідають граням графа B , і дві

вершини графа A з'єднані ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні грані графа B мають хоча б одне спільне ребро.

- **Дводольний граф** або **двочастковий граф** (або **біграф**, або **парний граф**) – граф, такий що множина вершин V розбита на дві підмножини, що не перетинаються, при чому кожне ребро E інцидентне обом вершинам. Тобто, існує *правильне розфарбування графа* двома кольорами.

- **Дерево** – *зв'язний граф*, що не містить *циклів*.

- **Діаметр графа** – максимальна відстань між вершинами для всіх пар вершин. Відстань між вершинами — найменша кількість ребер *шляху*, що з'єднує дві вершини.

- **Довжина маршрута** – кількість ребер в маршруті (з повтореннями).

- **Довжина шляху** – кількість дуг шляху (або сума довжин його дуг, якщо останні задані). Так для шляху $v_1, v_2, \dots, v_n$ довжина дорівнює $n-1$.

- **Доповнення графа** — граф над тою самою множиною вершин, що і початковий, але вершини з'єднані ребрами тоді і тільки тоді, коли в початковому графі ребра немає.

- **Дуга** – орієнтоване *ребро*.

Е

- **Ейлерів граф** – граф, в якому існує *цикл*, що містить усі ребра графа по одному разу, вершини можуть повторюватися.

- **Ейлерів ланцюг** (або **Ейлерів цикл**) — *ланцюг (цикл)*, що містить всі ребра графа, вершини можуть повторюватися.

- **Ексцентриситет вершини** – максимальна *відстань* від заданої вершини до будь-якої іншої.

- **Елементарний шлях** – *шлях*, вершини якого, за виключенням можливо, першої і останньої, різні. Іншими словами, простий шлях не

проходить двічі через одну вершину, але може починатися і закінчуватися в тій самій вершині, в такому випадку він називається *циклом*.

- **Елементарним стягуванням** називається така процедура: беремо *ребро* (разом інцидентними йому вершинами *вершинами*, наприклад, u і v) і «стягуємо» його, тобто видаляємо ребро і ототожнюємо вершини u і v . Утворена вершина інцидентна ребрам, яким початково були інцидентні u або v крім видаленого.

З

- **Зважений граф** – граф, кожному *ребру* якого поставлено у відповідність деяке значення (*вага ребра*).

- **Зв'язність**. Дві вершини в графі **зв'язні**, якщо існує (простий) *ланцюг*, що їх з'єднує.

- **Зв'язний граф** – граф, в якому всі вершини зв'язані.

- **Граф-зірка** – повний двочастковий граф.

- **Змішаний граф** – граф, що містить як орієнтовані, так і неорієнтовані *ребра*.

І

- **Ізольована вершина** – вершина, *ступінь* якої дорівнює 0 (тобто не існують ребра *інцидентні* до неї).

- **Ізоморфізм**. Два графи називаються **ізоморфними**, якщо існує перестановка вершин, при якій вони збігаються. Іншими словами, два графи називаються **ізоморфними**, якщо існує взаємооднозначна відповідність між їх вершинами і ребрами, така що зберігається *суміжність* та *інцидентність*.

- **Індекс доступності вершини** (K) – $K_i = (\sum L)_i / (\sum L)_{\min}$, де $\sum L$ — сума найкоротших віддалей вершини.

- **Інтервальний граф** – граф, вершини якого можуть бути поставлені у відповідність відрізкам на дійсній осі таким чином, що дві вершини інцидентні одному ребру тоді і тільки тоді, коли відрізки, що відповідають цим вершинам, перетинаються.

Інцидентність – поняття, що використовується тільки для ребра і вершини: якщо x_n , x_k є кінцевими вершинами дуги a_i , то кажуть, що вершини x_n і x_k **інцидентні** дузі a_i , або дуга a_i є інцидентною вершинам x_n і x_k . Дві вершини (або два ребра) інцидентними бути не можуть. Для позначення найближчих вершин (ребер) використовується поняття *суміжності*.

К

- **Каркасний підграф** – підграф, що містить всі вершини.
- **Кінець** нескінченного графа, це клас еквівалентності променів, в якому два промені еквівалентні, якщо існує третій промінь, який містить нескінченно багато вершин цих графів.
- **Кістякове (каркасне) дерево** зв'язного графа $G=(V, E)$ це таке дерево $T=(V, E_T)$, що $E_T \subseteq E$ ^[2].
- **Кістяковим (каркасним) лісом** незв'язного графа $G=(V, E)$ називають сукупність *кістякових (каркасних) дерев компонент зв'язності графа* G ^[2].
- **Кліка** – підмножина вершин графа, повністю з'єднаних кожна з кожною, тобто підграф, що являє собою *повний граф*.
- **Клікове дерево** – див. Блоковий граф.
- **Клікове число (Clique number)** – число (G) вершин в найбільшій кліці. *Інші назви — густота, щільність*.
- **Максимальна кліка** – кліка з максимально можливою кількістю вершин графу.
- **Клітка** – *регулярний граф* найменшого обхвату для заданого степеня вершин.
- **Компонента зв'язності графа** – деяка підмножина *вершин графа* така, що для будь-яких двох вершин із цієї множини існує *шлях* із однієї в іншу, і не існує шляху з вершини цієї множини в вершину не з цієї множини.

- **Компонента сильної зв'язності графа, шар** – максимальна множина вершин орієнтованого графа така, що для будь-яких двох вершин із цієї підмножини існує *шлях* як із першої в другу, так і навпаки.

- **Конструктивний перерахунок графів** – отримання повного списку графів у заданому класі.

- **Контур** – замкнений *шлях* в *орграфі*.

- **Коцикл** – мінімальний *розріз*, мінімальна множина ребер, видалення якої робить граф незв'язним.

- **Кратні ребра** – декілька *ребер*, *інцидентних* одній і тій самій парі вершин. Зустрічаються в *мультиграфах*.

- **Кубічний граф** – регулярний граф степеня 3, тобто граф, в якому кожній вершині інцидентні рівно три ребра.

- **к-дольний граф** – граф G , у якого *хроматичне число* $c(G)=k$

Л

- **Ламанів граф** з n вершинами – такий граф G , що, по-перше, для кожного k будь-який підграф графа G , що містить k вершин, має не більше, ніж $2k - 3$ ребра і, по-друге, граф G має рівно $2n - 3$ ребра.

- **Ліс** – неорієнтований граф без циклів. *Компонентами зв'язності* лісу є *дерева*.

- **Ланцюг** в графі – *маршрут*, всі ребра якого різні. Якщо всі *вершини* (а таким чином і ребра) різні, то такий ланцюг називається **простим (елементарним)**. В ланцюзі вершини називаються **кінцями** ланцюга. Ланцюг із кінцями u і v *з'єднує* вершини u і v . Для *орграфів* ланцюг називається *орланцюгом*. В деяких джерелах **простий ланцюг** – це ланцюг, *ребра* якого різні, що є слабкою умовою.

М

- **Маршрут (теорія графів)** в графі – послідовність вершин і ребер, що чергуються, в якій будь-які два сусідні елементи *інцидентні*.

- **Матриця досяжності** *орграфа* – матриця, що містить інформацію про існування шляхів між вершинами *орграфа*.

- **Матриця інцидентності** графа – матриця, значення елементів якої характеризуються інцидентністю відповідних вершин графа (по вертикалі) та його ребер (по горизонталі). Для неорієнтованого графа елемент приймає значення **1**, якщо вершина і ребро, що відповідають йому, інцидентні. Для орієнтованого графа елемент приймає значення **1**, якщо інцидентна вершина є початок ребра, значення **-1**, якщо кінець; в інших випадках (в тому числі і для *петель*) значенню елемента присвоюється **0**.

- **Матриця суміжності** графа – матриця, значення елементів якої характеризується суміжністю вершин графа. При цьому, значенню елемента матриці присвоюється кількість ребер, які з'єднують відповідні вершини (тобто які *інцидентні* обом вершинам). *Петля* вважається одразу двома з'єднаннями для вершини, тобто до значення елемента матриці в такому випадку треба додавати **2**.

- **Мережа** – в принципі, те саме що і *граф*, хоча мережами зазвичай називають графи, вершини яких визначенням способом позначені.

- **Мінімальний каркас** (або **Каркас мінімальної ваги**, **Мінімальне остове дерево**) графа — ациклічна множина ребер в зв'язному, зваженому і неорієнтованому графі, що з'єднує між собою всі вершини даного графа, при цьому сума ваг всіх ребер в ньому мінімальна.

- **Міст** – ребро, видалення якої збільшує кількість компонент зв'язності. Рівнозначне визначення, ребро є мостом тоді і тільки тоді, коли вони не є частиною будь-якого циклу.

- **Множина домінування** – така множина вершин графа, що кожна вершина графа або належить їй, або суміжна деякій вершині, що належить множині домінування.

- **Множина суміжності** вершини v – множина вершин, суміжних із вершиною v . Позначається

- **Мультиграф** – граф, в якому існує пара вершин, що з'єднана більш ніж одним ребром (ненаправленим), або більше ніж двома дугами протилежних напрямків.

Н

- **Напівстепінь входу** в *орграфі* для вершини v – кількість дуг, що входять в вершину.

- **Напівстепінь виходу** в *орграфі* для вершини v – кількість дуг, що виходять з вершини.

- **Направлений граф** — орієнтований граф, в якому дві вершини з'єднуються не більше ніж однією дугою.

- **Направлений ациклічний граф** – орієнтований граф без *контурів*.

- **Незалежна множина вершин** – (відома також як **внутрішня стала множина**) множина вершин графа G , така, що будь-які дві вершини в ній не суміжні (жодна пара вершин не з'єднана ребром).

- Незалежна множина називається **максимальною по включенню**, коли немає іншої незалежної множини, в яку вона б входила.

- **Максимальною незалежною множиною** називається незалежна множина з найбільшою кількістю вершин. Іншими словами, якщо Q це сім'я всіх незалежних множин графа G , то число $\alpha(G) = \max |S|$ (де S належить Q) називається **числом незалежності графа G** , а множина S^* , на якій цей максимум досягається, називається **найбільшою незалежною множиною** або **максимальною незалежною множиною**.

- **Незалежна множина ребер** – множина ребер графа G , така, що будь-які два ребра в ній не суміжні (жодна пара ребер не має спільної вершини).

- **Нормований граф** – *орієнтований граф без циклів*.

- **Нуль-граф** (цілком незв'язний граф, порожній граф – регулярний граф степеня 0, тобто граф, що не містить ребер.

О

- **Обхват** – довжина найменшого *циклу* в графі.
- **Оточення** — довжина найбільшого *простого циклу* в графі.
- **Орграф, орієнтований граф** $G = (V, E)$ пара множин, в якій V – множина вершин (вузлів), E – множина дуг (орієнтованих ребер). Дуга – впорядкована пара вершин (v, w) , в якій вершину v називають початком, а w – кінцем дуги. Можна сказати, що дуга $v \rightarrow w$ веде від вершини v до вершини w , при цьому вершина w суміжна з вершиною v .

П

- **Парний граф** – те саме, що і *двочастковий граф*.
- **Петля** – ребро, початок і кінець якого знаходяться в одній і тій самій вершині.
- **Перерахунок графів** — підрахунок числа неізоморфних графів в заданому класі (із заданими характеристиками).
- **Переріз графа** – множина ребер, видалення яких ділить граф на два ізольованих підграфа, один з яких, зокрема, може бути тривіальним графом.
- **Периферійна вершина** – це вершина з максимальним ексцентриситетом. У дереві це мусить бути лист.
- **Підграф** початкового графа – граф, що містить деяку підмножину вершин даного графа і всі ребра, *інцидентні* даній підмножині.
- **Планарний граф** – граф, що може бути намальований (*укладений*) на площині без перетину ребер. *Ізоморфний* плоскому графу, тобто, є графом із перетинаннями, але таким, що допускає плоску укладку, через це може відрізнятися від *плоского графа* зображенням на площині. Таким чином, може бути різниця між плоским і планарним графом у зображенні на площині.

- **Плоский граф** – *геометричний граф*, в якому жодні два ребра не мають спільних точок крім інцидентним їм обом вершинам (не перетинаються). Є укладеним графом на площині.

- **Повним графом** називається граф, в якому кожна вершина з'єднана ребром з будь-якою іншою вершиною.

- **Повним дводольним** називається *двочастковий граф*, в якому кожна вершина одної підмножини з'єднана ребром з кожною вершиною іншої підмножини.

- **Породжений підграф** – підграф, породжений множиною вершин похідного графа.

- **Правильне розфарбування графа** – *розфарбування*, при якому кожний кольоровий клас є незалежною множиною. Інакше кажучи, в правильному розфарбуванні будь-які дві суміжні вершини повинні мати різні кольори.

- **Простий ланцюг** – *маршрут*, в якому всі вершини різні.

- **Простий граф** – *граф*, в якому немає *кратних ребер* і *петель*.

- **Простий цикл** – *цикл*, що не проходить двічі через одну вершину.

- **Псевдограф** – граф, що містить *петлі*.

- **Порожній граф** – див. *нуль-граф*.

Р

- **Радіус графа** – мінімальний з *ексцентриситетів* вершин зв'язаного графа; вершина, на якій досягається цей мінімум називається центральною вершиною.

- **Ребро графа** (дуга графа) – базове поняття. Ребро з'єднує дві *вершини* графа.

- **Регулярний граф** – граф, *степені* всіх вершин якого рівні. Степінь регулярності є інваріантом графа. Регулярні графи являють собою особливу складність для багатьох алгоритмів.

- **Регулярний граф степеня 0** (*цілком незв'язний граф, порожній граф, нуль-граф*) — граф без ребер.
- **Розгортка графа** — функція, що задана на вершинах орієнтовного графа.
- **Розмічений граф** — граф, для якого задана множина позначок S , функція розмітки вершин $f: A \rightarrow S$ і функція розмітки дуг $g: R \rightarrow S$. Графічно ці функції представляються надписуванням позначок на вершинах і дугах. Множина позначок може поділятися на дві підмножини позначок вершин і дуг, що не перетинаються.
- **Розріз** — множина *ребер*, видалення якої робить граф незв'язним.
- **Розфарбування графа** — розбиття вершин на множини, що називаються пелюстками. Якщо при цьому немає двох суміжних вершин, що належать до одної множини (тобто всі суміжні вершини завжди різного кольору), то таке розфарбування називається правильним.

С

- **Самодвоїстий граф** — граф, *ізоморфний* своєму *двоїстому графу*.
- **Сильна зв'язність**. Дві вершини в *орграфі* **сильно зв'язані**, якщо існує шлях з однієї в другу і назад.
- **Сильно зв'язаний орграф** — *орграф*, в якому всі вершини сильно зв'язані.
- **Спектр графа** — множина всіх власних значень матриці суміжності з урахуванням кратних ребер.
- **Степінь вершини** — кількість ребер графа G , що *інцидентні* вершині x .
- **Стягування ребра графа** — заміна кінців ребра однією вершиною, сусідами нової вершини стають сусіди цих кінців. Граф можна стягнути, якщо другий можна отримати послідовним стягуванням ребер першого.

- **Суграф (частковий граф)** початкового графа – граф, що містить всі вершини початкового графа і підмножину його *ребер*.

- **Суміжність** – поняття, яке використовується по відношенню тільки до двох *ребер* або двох *вершин*: Два ребра, *інцидентні* одній вершині, називаються **суміжними**; дві вершини, *інцидентні* одному ребру, також називаються суміжними.

Т

- **Тривіальний граф** – граф, що складається з однієї *вершини*.

- **Триангуляція поверхні** – укладка графа на поверхню, яка розбиває її на трикутні області; окремий випадок топологічної триангуляції.

- **Тотожний граф** – граф, у якого можливий лише один єдиний *автоморфізм* – тотожний. Образно кажучи, тотожний граф – «абсолютно несиметричний» граф.

- **Турнір** – *орієнтований граф*, в якому кожна пара вершин з'єднана одним ребром.

У

- **Укладка**: граф укладається на поверхню, якщо його можливо намалювати на цій поверхні так, щоб *ребра* графа при цьому не перетинались. (Див. *Планарний граф*, *Плоский граф*.)

Ф

- **n-фактор** графа – регулярний остовний підграф ступені .

- **n-факторизація** графа – розбиття графа на незалежні *n-фактори*.

Х

- **Хроматичне число** графа – мінімальна кількість кольорів, що необхідна для *розфарбування* вершин графа, при якому будь-які суміжні вершини розфарбовані в різні кольори.

- **Хроматичний індекс** графа – мінімальна кількість кольорів, що необхідна для *розфарбування* ребер графа, при якому будь-які суміжні ребра розфарбовані в різні кольори.

Ц

- **Цикл** – замкнений ланцюг. Для *орграфів* цикл називають контуром називають *контуром*.

- **Цикл (простий цикл)** в *орграфі* – простий шлях довжини не менш ніж 1, який починається і закінчується в одній і тій самій вершині.

- **Цикл Гамільтона** – те саме, що і *Гамільтонів цикл*.

- **Цикломатичне число графа** – число компонент зв'язності графа плюс число *ребер* мінус число *вершин* n .

- **Цілком незв'язний граф (пустий граф, нуль-граф)** – регулярний граф степеня 0, тобто граф без ребер.

Ч

- **Частковий граф** – те саме, що *субграф та остовний підграф*.

- **Число домінування** – найменша потужність множини домінування у графі.

Ш

- **Шлях** – див. *маршрут*. Шлях, в якому будь-яка вершина не зустрічається двічі, називається елементарним.

- **Шлях в орграфі** – послідовність вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$, для якої існують дуги $v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, \dots, v_{n-1} \rightarrow v_n$. Кажуть, що шлях починається у вершині v_1 , проходить через вершини $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$, і закінчується у вершині v_n .

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Теорія графів не вичерпується викладеним в навчальному посібнику матеріалом. Для тих, хто бажає продовжити вивчення теорії графів, визначимо базову навчальну та наукову літературу для читання.

1. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Дж. Андерсон – М.: Мир, 2001. – 244 с.

2. Биков М. М. Дискретний аналіз і теорія автоматів : навчальний посібник / М. М. Биков, В. Д. Черв'яков. – Суми : Сумський державний уні- верситет, 2016. – 354 с.

3. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика : підручник / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків : Компанія СМІТ, 2004. – 480 с.

4. Борисенко О. А. Лекції з дискретної математики (множини і логіка) : навч. посібник / О. А. Борисенко. – 3-тє вид., випр. і допов. – Суми : ВТД «Університетська книга», 2002. – 180 с.

5. Капітонова Ю.В. Основи дискретної математики / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський. – К.: Наукова думка, 2002. – 578с.

6. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика / Д. Кук, Г. Бейз – М.: Наука, 1990. – 287 с.

7. Курейчик В.М. Комбинаторные аппаратные модели и алгоритмы в САПР / Курейчик, Глушань В.М., Щербаков Л.И. – М.:Радио и связь,1990. – 210 с.

8. Касьянов В.Н. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В.Н. Касьянов, В.А. Евстигнеев. – БХВ – Петербург, 2003. –191 с.

9. Міхайленко В.М. Дискретна математика: Підручник / В.М. Міхайленко Н.Д. Федоренко, В.В. Демченко. – Київ: Вид-во Європ.

ун-ту, 2003. – 318с.

10. Лекции по теории графов /под ред. Емеличева Е.А. – М.: Наука, 1990. – 384с.

11. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях / Г.И. Москинова. – М.: Логос, 2002. – 238 с.

12. Назарова І.А. Дискретний аналіз: навчально-методичний посібник / І.А.Назарова. – Донецьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – 277 с.

13. Нікольський Ю.Т. Дискретна математика : підручник / Ю.Т. Нікольський, В.А. Пасічник, Ю.Р. Щербина. – Львів : Магнолія плюс, 2006. – 608 с.

14. Прикладна теорія цифрових автоматів : навч. посібник / І.В. Жабін, І.А. Жуков, І.А. Клименко, В.В. Ткаченко. – К. : Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 364 с.

15. Сапунов С.В. Анализ графов с помеченными вершинами: дисс. ... канд. физ.-мат. наук : 27.09.07. / Сапунов С.В. – Донецк, 2007. – 150 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

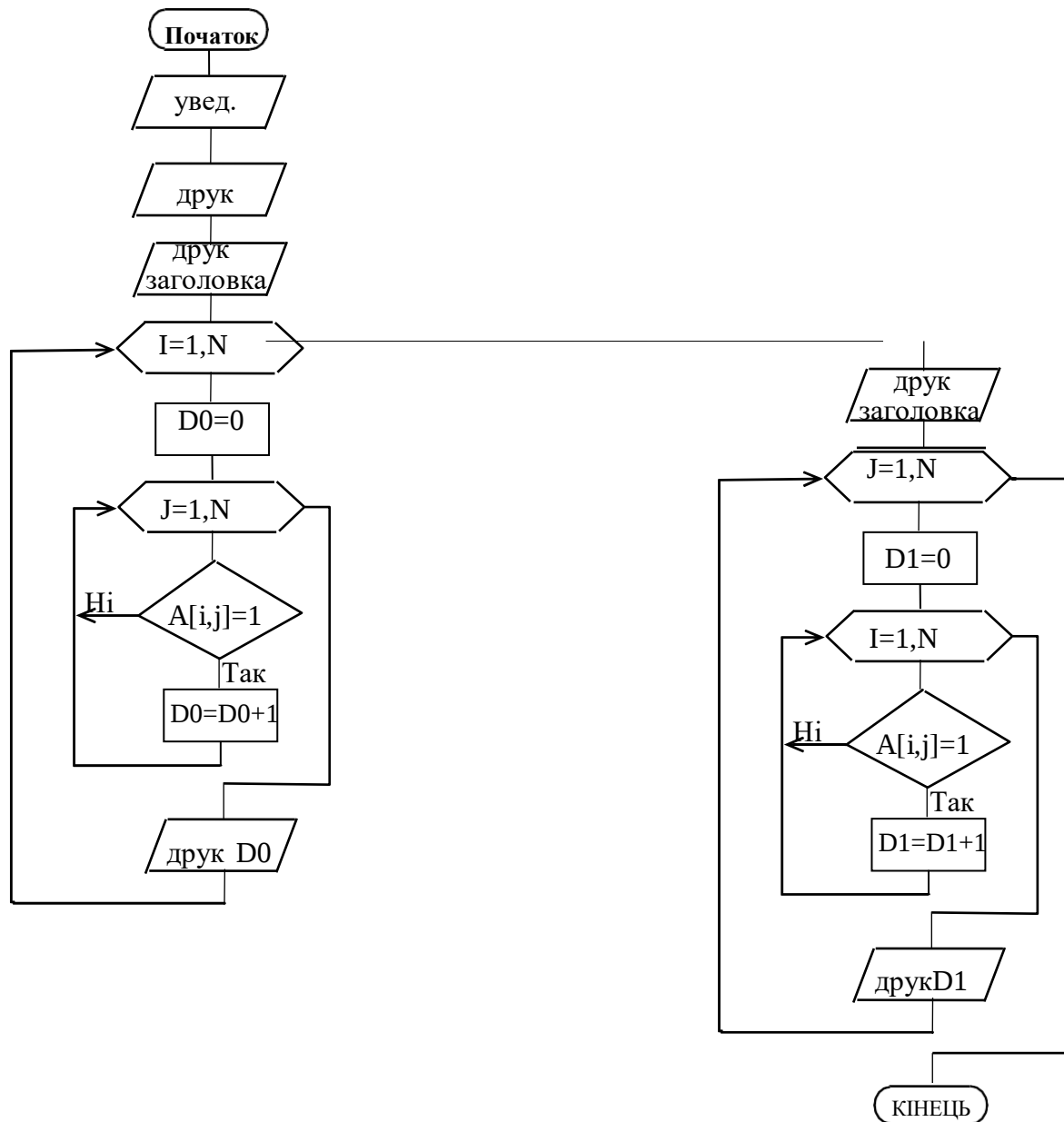
АЛГОРИТМ ПЕРЕБУВАННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕРШИН ГРАФА

Уведені позначення:

A - матриця суміжності графа, N - кількість вершин графа,

D0 - напівстепені результату вершини,

D1 - напівтепені заходу вершини.



' ЗНАХОДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕРШИН ГРАФА '

```
type
tmas=array[1..10,1..10]of integer;
var
K,i,j,d0,d1:integer;a:tmas;

Begin
writeln('enter K:');
read(K);
writeln('enter matr:');
for i:=1 to K do
for j:=1 to K do read(a[i,j]);
writeln('напівстепені ісходу вершин');
for i:=1 to K do
begin
d0:=0;
for j:=1 to K do
if a[i,j]<>0 then d0:=d0+1;
writeln('d0(x',i,')=',d0);
end;
writeln('напівстепені заходу вершин');
for j:=1 to K do
begin
d1:=0;
for i:=1 to K do
if a[i,j]<>0 then d1:=d1+1;
writeln('d1(x',j,')=',d1);
end;
end.
```

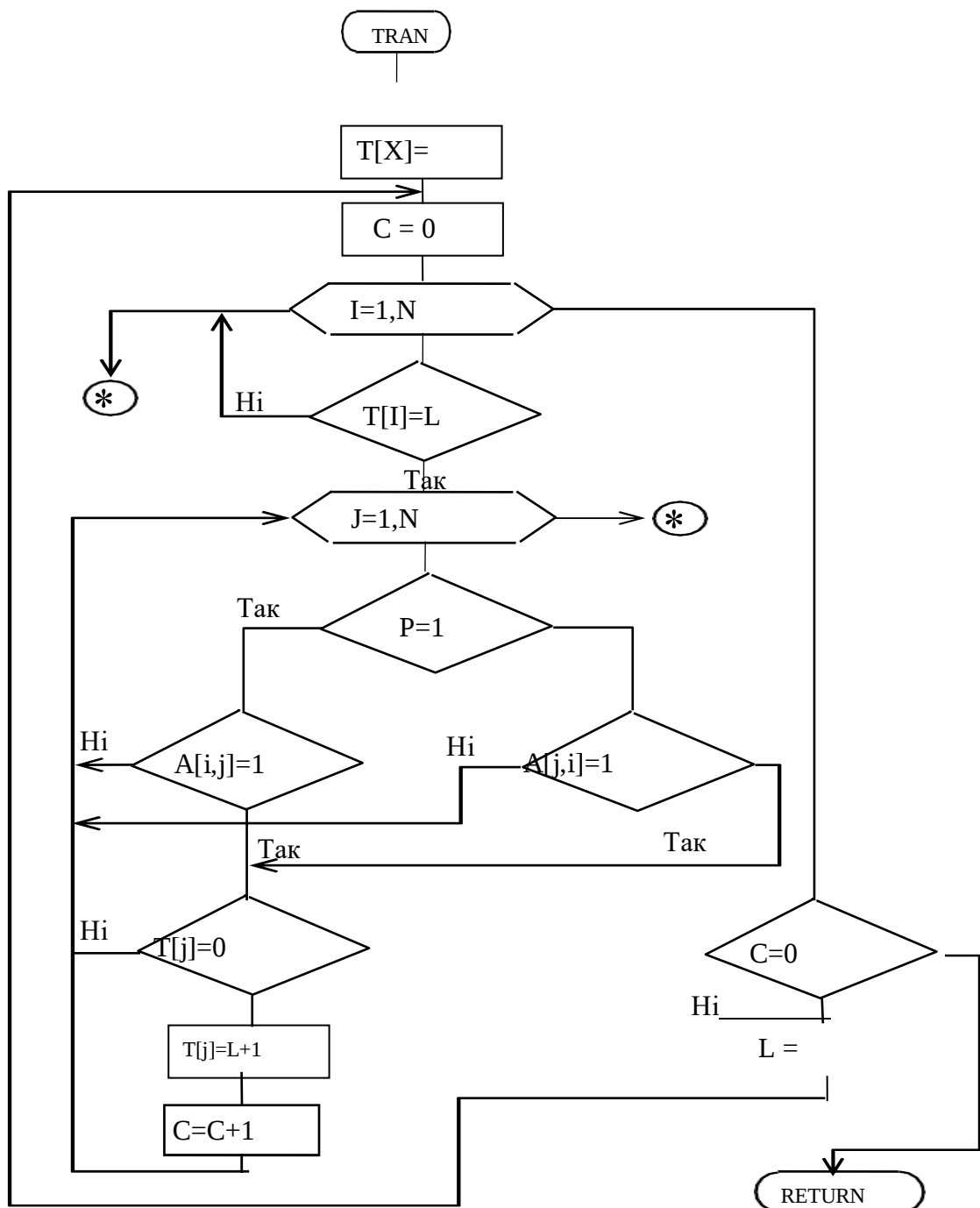
Побудова транзитивних замикань

Уведені позначення:

X - номер вершини для якої шукається транзитивне замикання;

T (N) - масив транзитивного замикання;

C - лічильник додавання вершин до транзитивне замикання;

P - ознака: P = 1 при формуванні T^+ , P = 0 при формуванні T^- .

'Знаходження відображень і транзитивних замикань'

USES CRT;

label n1,n2;

var

 A : array[1..15,1..15]of integer;

 b, t : array[1..15]of integer;

n,l,x,c,i,j : integer;

Begin

 clrscr;

 writeln('введіть кількість вершин графа n ');

 read(n);

 writeln('введіть матрицю суміжності ');

 for i:=1 to n do

 for j:=1 to n do read(A [i, j]);

 writeln('введіть номер вершини графа x ');

 read(x);

 l:=1;

 t [x]:=l;

 n1: writeln ('Пряме відображення ‘,l,’-ого порядку ');

 c:=0;

 for i:=1 to n do

 begin

 if t [i]=l then

 begin

 for j:=1 to n do

 begin

 if A[J,I]=1 then

 begin

 writeln (j, ' ');

 if t [j]=0 then

 begin t [j]:=l+1; c:=c+1; end;

 end;

 end; end; end;

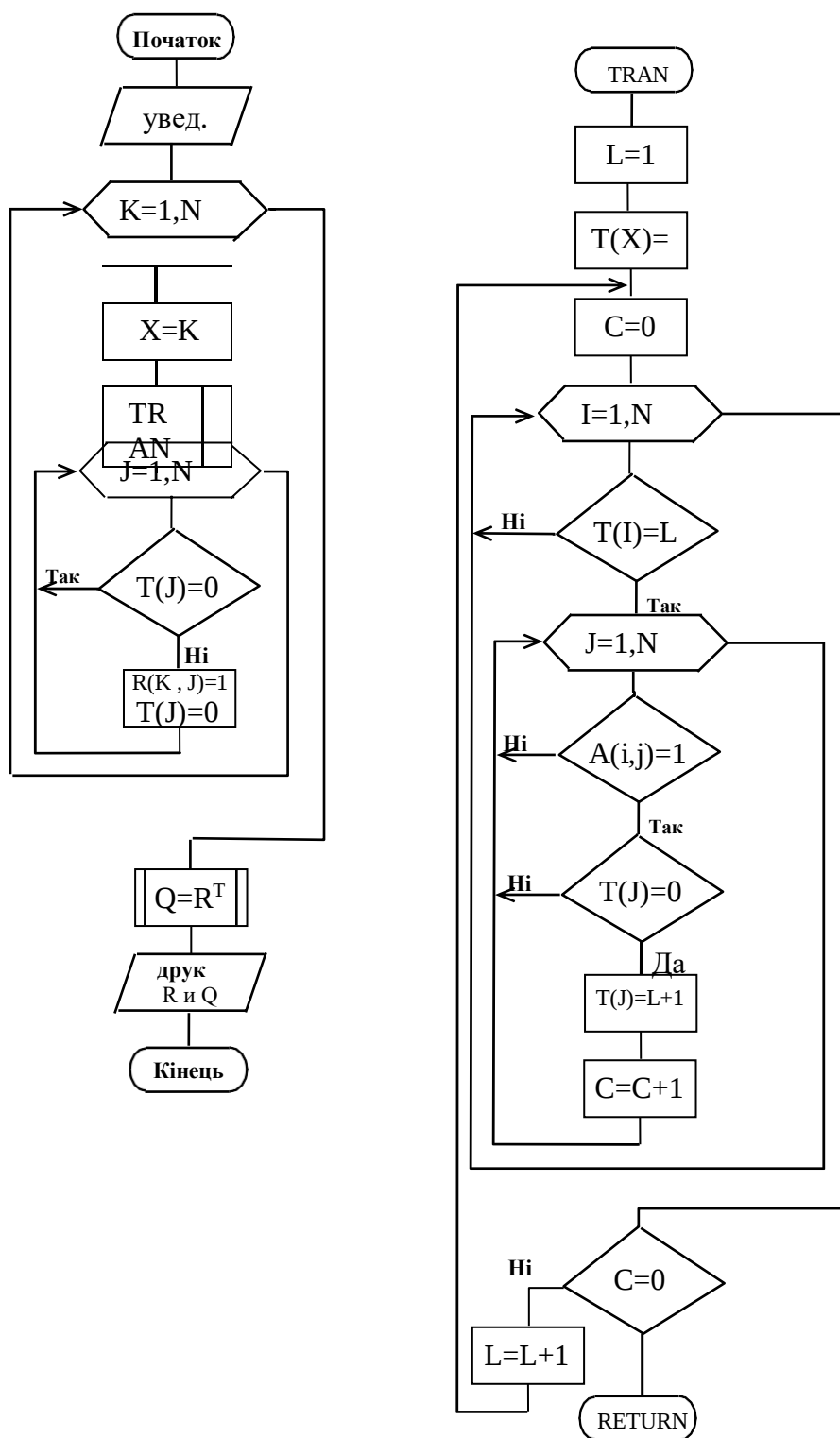
 if c<>0 then begin l:=l+1; goto n1; end;

```

    l:=1; b[ x ]:=1;
n2: writeln ('зворотне відображення ‘ ,l,’-ого порядку’);
c:=0;
    for i:=1 to n do
begin
    if b[ i ]=1 then
begin
    for j:=1 to n do
begin
    if A [ i, j ]=1 then begin    write ( ' ',j);
        if b[ j ]=0 then begin
            b[ j ]:=1+1; c:=c+1;
        end;    end;
    end;
end;
end;
if c<>0 then begin l:=l+1; goto n2;    end;
writeln('Транзитивні замикання:');
    for i:=1 to n do
begin
    for j:=1 to n do
        write ( ' ',A[ i,j ] );
    writeln ( ' ',t[ i ] );
end;
writeln ( ' ');
for i:=1 to n do write ( ' ',b[i] );
end.

```

Побудова матриць досяжності та контрдосяжності



Матричний метод розбиття

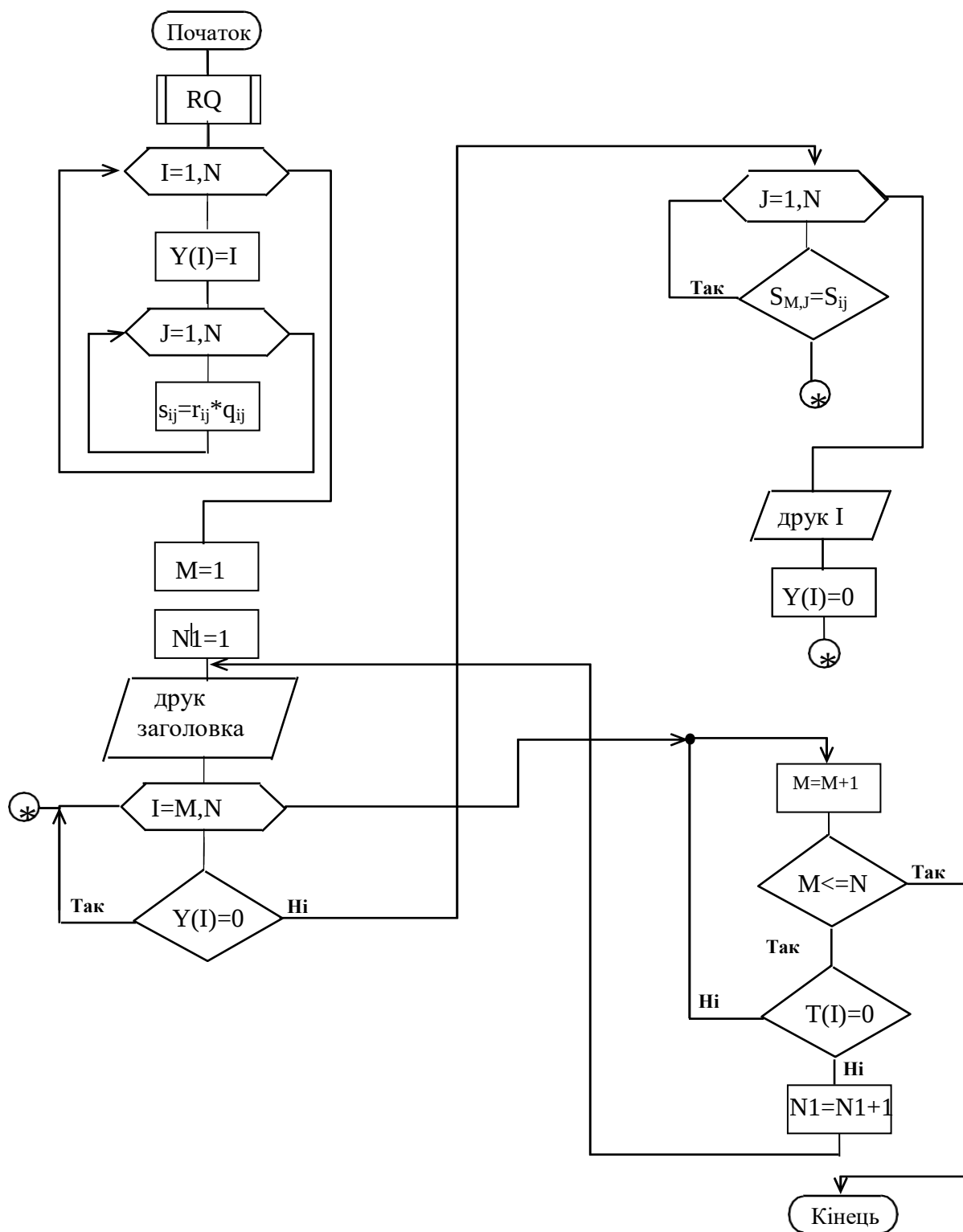
Блок-схема алгоритму розв'язання задачі розбиття графа на максимальні сільносвязний підграфи базується на вирішенні задачі знаходження матриць досяжності R і контрдосяжності Q , тому використано підпрограму " RQ " побудови матриць R і Q . Так як знаходження матриць R і Q відбувається один раз, то її не обов'язково оформлювати підпрограмою.

Крім раніше визначених позначень також уведені наступні:

$Y (N)$ - масив-показчик вершин, що досі не увійшли ні в який підграф. Від самого початку до нього записано номери всіх вершин графа;

N_1 - змінна, яка вказує номер підграфа, що виділяється;

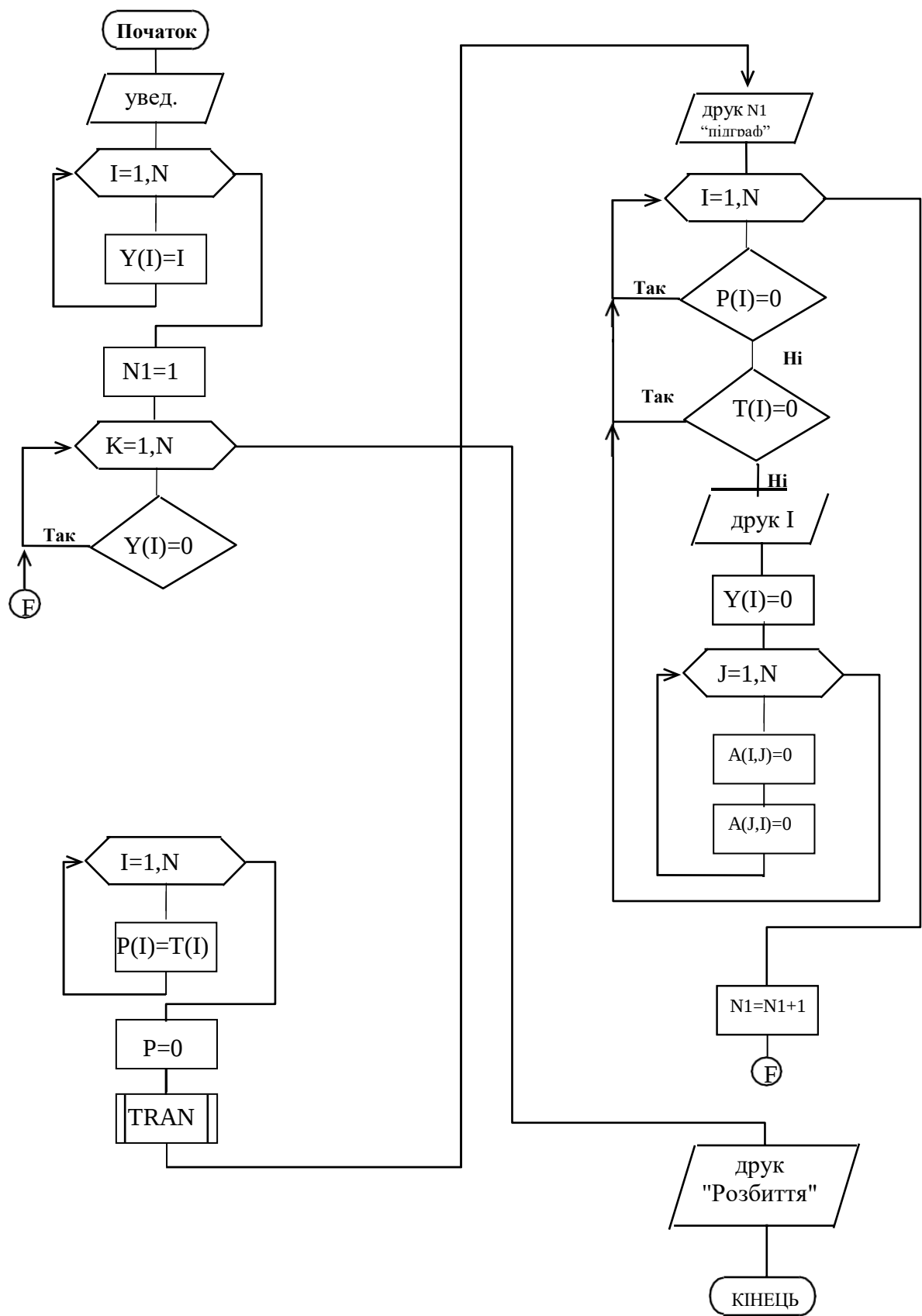
M - номер рядка, з якого починається пошук в матриці S .



Розбиття графа на підграфи за методом Мальгранжа

Вивчення методу показує, що в його основі лежить завдання знаходження прямого і зворотного транзитивного замикання для деякої вершини. Блок-схема знаходження прямого транзитивного замикання ("TRAN") показана в додатку 2. Цю підпрограму можна використовувати і для знаходження зворотного транзитивного замикання, ввівши невеликі додавання, а саме: ознака p : $P = 1$, якщо, необхідно знайти пряме транзитивне замикання, $P = 0$, якщо, шукається зворотне транзитивне замикання. Залежно від значення ознаки p будемо переглядати в матриці A рядок або стовпець.

У блок-схемі алгоритму розбиття графа на підграфи зверніть увагу, що перш, ніж викликається підпрограма "TRAN", задається значення ознаки p , а після того як пряме транзитивне замикання знайдено, вміст масиву T переписується в масив P . Усі використані позначення в блок схемі збігаються з введеними раніше. Після того, як визначено, що i -ий елемент входить в підграф, номер елемента виводиться на друк, обнуляється номер в списку елементів Y (блок 19) і обнуляються i -й рядок і i -ий стовпець у матриці A . Номер підграфа $N1$, що виділяється, збільшується на 1 (блок 23) і процес розбиття триває далі.



Навчально-методичне видання

**ДУДЧЕНКО ОЛЕГ МИКОЛАЙОВИЧ
ЛІТВІНОВА МАРИНА БОРИСІВНА
ШТАНЬКО ОЛЕКСАНДР ДМИТРОВИЧ**

**КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ТА АЛГОРИТМІЗАЦІЇ ЗАДАЧ
Навчальний посібник**

*Підписано до друку 05.05.2020 року. Формат 60х90¹/₈. Папір офсетний.
Ум. друк. арк.10,2. Наклад 300 примірників*

**Надруковано з оригінал-макету, наданого автором
у видавництві ПП «Резнік»**

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготовлювачів і
розповсюджувачів видавничої продукції:
серія ДК №6155 від 24.04.2018 р., видано Управлінням Держкомтелерадіо
73008, м. Херсон, пров. 4-й Приміський, 6*



Дудченко Олег Миколайович. У 1984 році закінчив Миколаївський кораблебудівний інститут. Кандидат технічних наук з 1991 року. Дисертацію захистив 11.10.90 р. у спеціалізованій Раді Миколаївського кораблебудівного інституту. З 1993 р. - доцент кафедри інформаційних технологій його Херсонського філіалу. З 1998 р. по теперішній час займає посаду заступника директора з навчальної роботи Херсонської філії Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. З 2003 р. по 2015 р. завідувач кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін. З 2015 р. декан суднобудівного факультету. Коло наукових інтересів: інформаційні технології в освіті



Літвінова Марина Борисівна. У 1987 році закінчила фізичний факультет Київського національного університету імені Т.Г. Шевченка. У 1997 році захистила кандидатську дисертацію з фізики твердого тіла в Інституті фізики напівпровідників імені Лашкарьова НАНУ. З 1998 року працює у Херсонській філії Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. У 2017 році одержала другу вищу освіту за спеціальністю програмне забезпечення систем. У 2018 захистила докторську дисертацію за спеціальністю 13.00.02 - теорія та методика навчання (фізика). Коло наукових інтересів: фізика, інформаційні технології в освіті



Штанько Олександр Дмитрович. У 1978 році закінчив Московський інженерно-фізичний інститут за спеціальністю "Автоматика та електроніка". У 2009 році захистив кандидатську дисертацію з фізики твердого тіла у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича. У 2011 році одержав вчене звання доцента кафедри автоматики та електроустаткування. З 2009 року працює у Херсонській філії Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова. У 2017 році одержав другу вищу освіту за спеціальністю програмне забезпечення систем. Коло наукових інтересів: інформаційні технології в освіті

