

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

М. Р. ТКАЧ, О. М. ВЛЯЛЬКО, С. О. МОРГУН, А. С. ПОЗНАНСЬКИЙ

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. ЧАСТИНА ДРУГА. КІНЕМАТИКА

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як методичні вказівки*

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2018

УДК 531.2(076)

Т 48

Укладачі:

М. Р. Ткач, д-р техн. наук, професор;
О. М. Влялько, канд. техн. наук, доцент;
С. О. Моргун, канд. техн. наук, викладач;
А. С. Познанський, канд. техн. наук, викладач

Рецензент О. І. Тарасенко, канд. техн. наук, доцент

Ткач М. Р.

Т 48

Розрахунково-графічні роботи з теоретичної механіки. Частина друга. Кінематика: методичні вказівки / М. Р. Ткач, О. М. Влялько, С. О. Моргун, А. С. Познанський. – Миколаїв : НУК, 2018. – 44 с.

Уміщено розрахунково-графічні роботи з розділу "Кінематика" і наведено ілюстровані приклади їх розв'язання.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів. Також можуть бути використані для самостійного вивчення методів і принципів розрахунку типових завдань з курсу теоретичної механіки "Кінематика".

УДК 531.2(076)

Навчальне видання

**ТКАЧ Михайло Романович
ВЛЯЛЬКО Олександр Михайлович
МОРГУН Сергій Олександрович
ПОЗНАНСЬКИЙ Андрій Станіславович**

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ. ЧАСТИНА ДРУГА. КІНЕМАТИКА

Методичні вказівки

Комп'ютерне верстання *Т. М. Чередніченко*

© Ткач М. Р., Влялько О. М., Моргун С. О., Познанський А. С., 2018
© Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, 2018

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 2,8. Обсяг даних 2820 кб.
Тираж 15 прим. Вид. № 43. Зам. № 84.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА ПЕРША - РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ

Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки по заданим рівнянням

За заданими рівняннями руху точки встановити та накреслити траєкторію її переміщення. Для моментів часу $t_0 = 0$, $t_1 = t/2$, $t_2 = t$ вказати на кресленні траєкторії положення точки. Відповідно до цих моментів часу визначити значення швидкостей, прискорень (з їх проекціями на вісі), дотичні і нормальні складові прискорень. Розрахувати шлях, що пройдено точкою, в інтервалі часу $0 \dots t$. Визначити радіуси кривини траєкторії в цих точках. Побудувати на кресленні траєкторії визначені вектори швидкостей та прискорень в відповідно вибраних масштабах. Позначити радіуси кривини траєкторії. За отриманими результатами дати уявлення про характер руху точки по траєкторії.

Варіанти завдань наведено в табл. 1.1.1.

Таблиця 1.1.1

Номер варіанту	Рівняння руху, см		t , с
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	
1	$4 \cos(t)$	$2 - 2 \sin(t)$	$\pi/4$
2	$2t^2 + 3$	$4t$	1
3	$\cos(2t)$	$4 \sin(t)$	$\pi/3$
4	$2t$	$4t^2$	1
5	$3 \sin(2t)$	$4 \cos(2t)$	$\pi/3$
6	$4 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 3$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	1
7	$4 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	0,6
8	$2t^2$	$-1/3t^3$	$\sqrt{2}$
9	$t^3 - 1$	$2 - t^2$	1

Продовж. табл. 1.1.1

Номер варіанту	Рівняння руху, см		t_1 , с
	$x = x(t)$	$y = y(t)$	
10	$\sin(\pi t^2)$	$2 \cos(\pi t^2)$	0,4
11	$2t^2$	$4t^3 - 2$	0,5
12	$4t - 3t^2$	$3t^2$	1
13	t^2	$\sin(\pi t^2)$	1
14	$2e^t$	e^{-t}	0,3
15	$2 \sin(2t)$	$\cos(2t)$	$\pi/6$
16	t^2	e^{t^2}	0,5
17	t^2	$\frac{4}{1+t^2}$	0,5
18	t^2	e^{-t^2}	0,4
19	t^2	$0,5t^2 + 2t + 1$	1
20	$t - \sin(t)$	$1 - \cos(t)$	$0,75\pi$
21	$2 \cos(t) + 2 \sin(2t)$	$2 \sin(t) + 2 \cos(t)$	$0,4\pi$
22	$0,5t^3$	t^2	1
23	$4 \frac{t^2}{1+t^2}$	$4 \frac{t^3}{1+t^2}$	1
24	$-2t^2 - 2$	$\frac{2}{t^2 + 1}$	1
25	$(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t)$	$(1 + \cos(t)) \cdot \sin(t)$	$\pi/2$
26	$\tan(t)$	$\cos^4(t)$	$\pi/4$
27	$\tan(t/2)$	$\sin(0,75t)$	$\pi/2$
28	$2t^2$	$e^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$	$\pi/2$
29	$4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) - 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{4}t^2\right) + 3$	1
30	$4 \cos(t) - 2 \cos(2t)$	$-2 \sin(t) - 2 \sin(2t)$	$\pi/10$

Завдання К-2. Дослідження параметрів поступального та обертального рухів твердого тіла

Механізм, що досліджується, складено з сукупності рухомих твердих тіл – вантажа (I) та декількох коліс (2, 3, 4). Рух вантажу I описується рівнянням:

$$x(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0,$$

де c_1, c_2, c_0 – сталі, t – час руху вантажа, с. Вважати, що рух вантажа відбувається в напрямку, що співпадає з додатним напрямком вісі x . Знайти швидкість та прискорення вантажа в момент часу t_1 . Визначити кутову швидкість та кутове прискорення всіх коліс механізму в момент часу t_1 . Відповідно до точок на ободах всіх коліс та точки M , розташованої на останньому за порядком колесі механізму, визначити вектори швидкостей, повного прискорення, дотичну та нормальну складові прискорення. Побудувати креслення механізму з позначенням його кінематичних характеристик, що визначено.

Варіанти завдань наведено в табл. 1.2.1. Схеми механізмів – на рис. 1.2.1–1.2.3.

Таблиця 1.2.1

Номер варіанту	Сталі рівняння $x(t)$			Діаметри коліс механізму, мм					Час, с
	c_0	c_1	c_2	D_2	d_2	D_3	d_3	D_4	
1	1	4	3	600	360	450	–	–	2
2	4	9	6	1000	600	750	–	–	2
3	8	13	18	800	450	600	–	–	1
4	15	8	6	600	450	580	–	–	1
5	10	21	12	500	300	450	–	–	2
6	2	10	16	450	350	1050	–	–	3
7	4	9	8	250	150	150	–	–	1
8	7	6	13	350	–	200	100	–	1
9	14	10	2	300	–	1000	600	–	2
10	30	4	7	400	–	300	150	–	3
11	15	5	3	400	250	350	–	–	3
12	9	14	20	400	200	250	–	–	2
13	14	5	26	150	100	800	–	–	2
14	2	9	5	500	400	400	–	450	2
15	7	3	12	800	150	150	–	–	1
16	3	6	11	150	100	950	–	–	4
17	2	3	12	150	–	800	200	–	3
18	7	4	12	200	150	230	–	–	1

Номер варіанту	Сталі рівняння $x(t)$			Діаметри коліс механізму, мм					Час, с
	c_0	c_1	c_2	D_2	d_2	D_3	d_3	D_4	
19	10	1	1	200	100	200	–	150	3
20	2	16	5	200	100	230	125	–	1
21	3	5	17	300	200	180	–	300	1
22	5	18	3	400	–	320	250	–	1
23	3	20	11	200	–	350	200	300	2
24	2	19	8	200	150	250	–	–	2
25	4	9	6	600	200	200	–	170	1
26	5	3	5	250	–	300	200	–	1
27	1	7	5	550	400	400	–	–	1
28	8	4	3	600	480	430	–	450	1
29	5	8	13	270	–	85	–	100	1
30	3	4	16	200	–	275	–	750	2

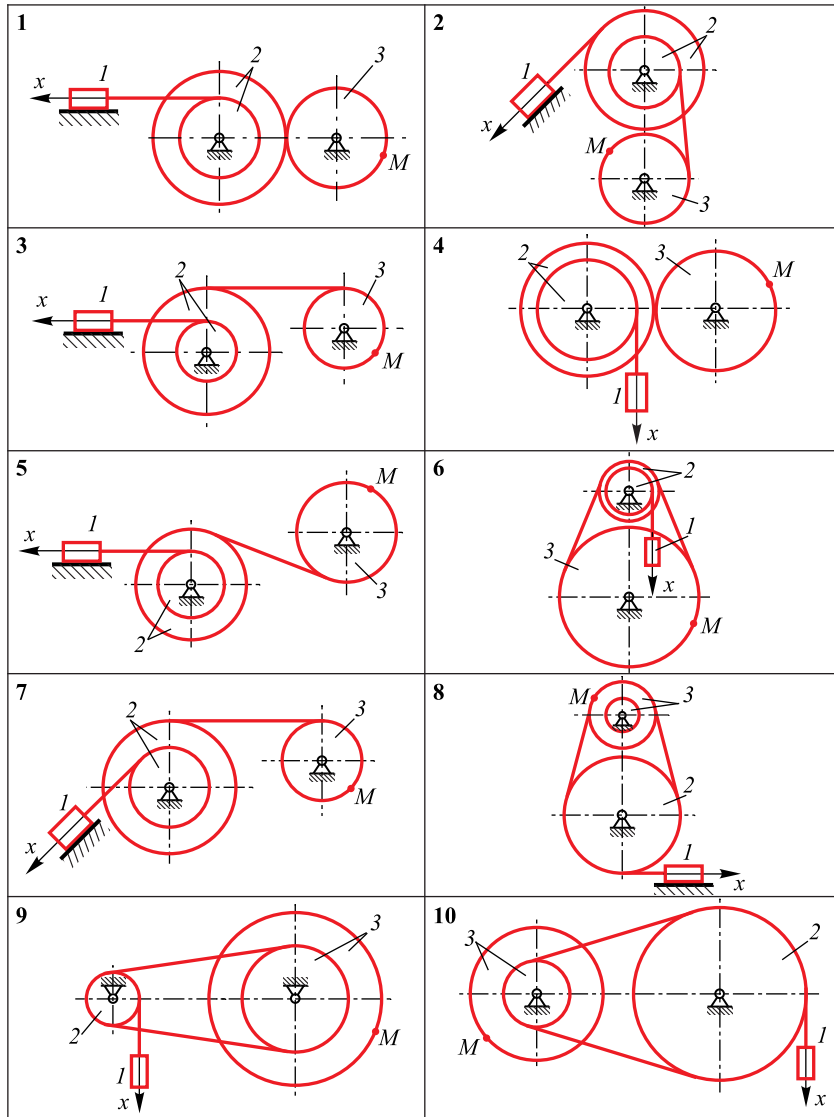


Рис. 1.2.1

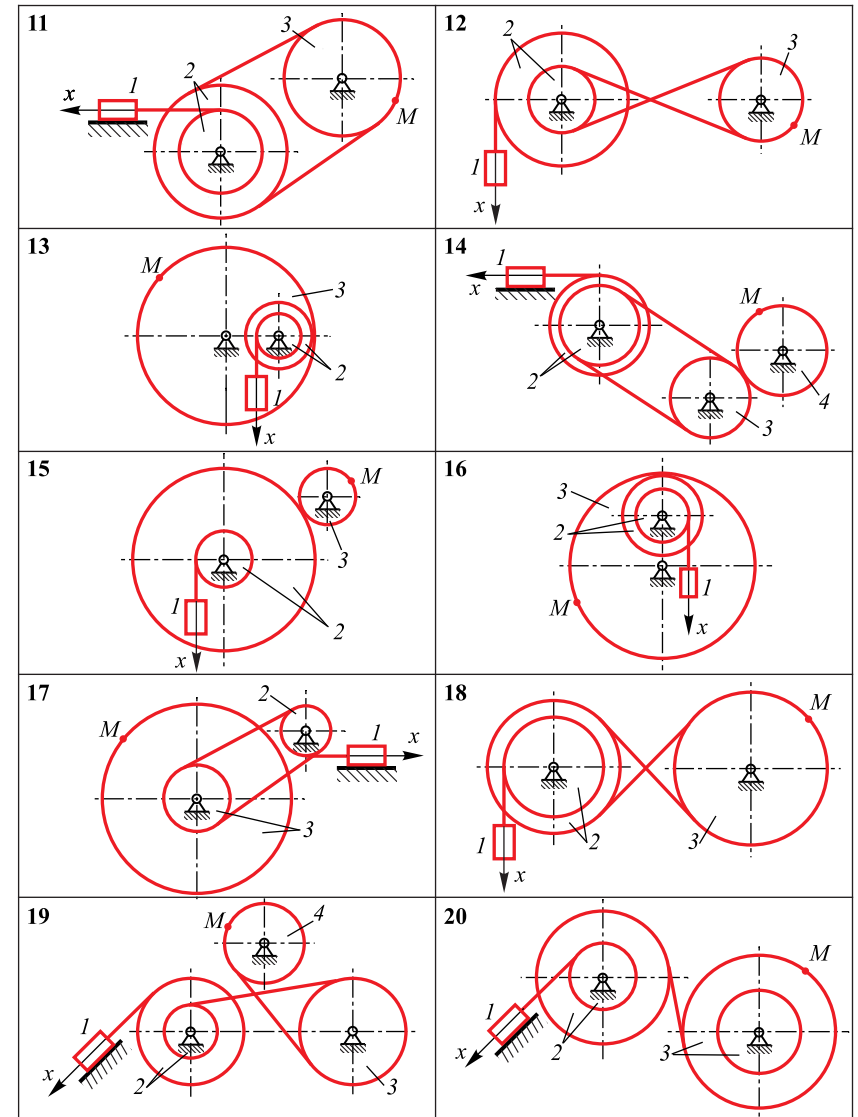


Рис. 1.2.2

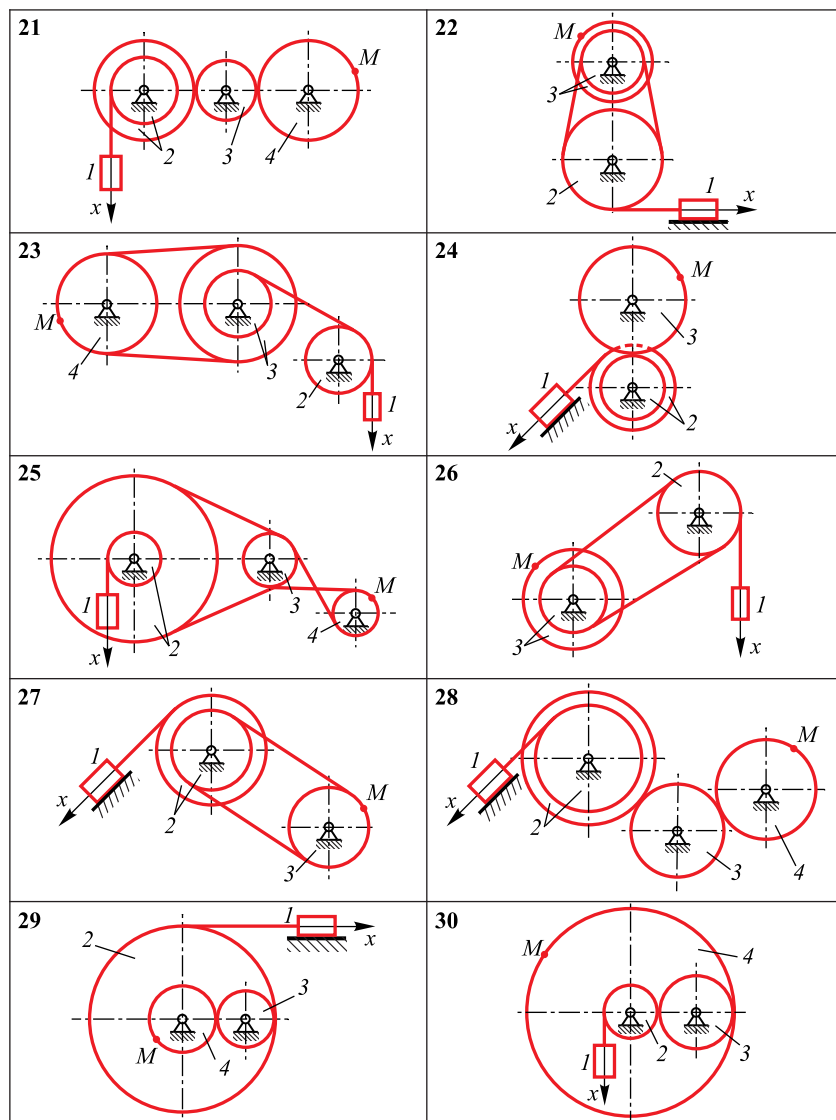


Рис. 1.2.3

Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму

Кривошип O_1A багатоланкового механізму обертається з кутовою швидкістю ω , рад/с та кутовим прискоренням $\varepsilon = 10$ рад/с². Положення механізму в даний момент часу задається величиною кута φ , який є кутом обертання кривошипа. Цей кут відкладається між кривошипом та віссю x в системі координат механізму.

Для заданого положення механізму визначити:

1. Швидкості руху усіх вузлових точок механізму.
2. Кутові швидкості руху усіх ланок механізму.
3. Повне прискорення руху усіх вузлових точок механізму.
4. Кутове прискорення усіх ланок механізму.

5. Для виконання перевірки обчислити швидкості руху точок механізму за допомогою миттєвого центру швидкостей (МЦШ) та плану швидкостей.

6. Для виконання перевірки обчислити прискорення руху точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень (МЦП) та плану прискорень.

Довжини ланок, необхідні для розрахунку розміри механізму та значення кута φ наведені в табл. 1.3.1. Схеми механізмів наведено на рис. 1.3.1–1.3.3.

Таблиця 1.3.1

Вариант	O_1A , м	AB , м	BC , м	BO_2 , м	CD , м	BD , м	CO_2 , м	a , м	φ , град	ω , с ⁻¹
1	0,06	0,20	—	—	—	—	—	0,25	210	$\pi/2$
2	0,08	0,40	0,40	0,50	—	—	—	1,00	60	$\pi/3$
3	0,08	0,50	—	—	—	—	—	0,50	45	$\pi/4$
4	0,09	—	0,24	—	—	—	—	0,20	60	$\pi/6$
5	0,10	0,40	0,80	—	—	—	—	0,20	60	$\pi/8$
6	0,30	0,10	—	—	—	—	—	0,50	60	$\pi/9$
7	0,50	—	0,25	0,20	—	—	—	0,20	45	$\pi/12$
8	0,20	0,40	—	—	—	—	—	0,10	45	$\pi/36$
9	0,20	—	0,40	—	—	—	—	0,20	30	$\pi/6$
10	0,40	—	0,50	—	—	—	—	0,20	90	$\pi/2$
11	0,40	0,08	—	—	—	0,3	0,50	0,50	60	$\pi/3$
12	0,20	0,30	0,05	—	—	0,2	—	0,20	45	$\pi/4$
13	0,10	—	—	—	—	—	—	0,10	30	$\pi/4$
14	0,10	0,20	—	0,15	0,50	—	0,15	0,20	30	$\pi/6$
15	0,20	—	0,10	—	0,25	—	0,50	0,20	60	$\pi/12$
16	—	0,35	0,20	—	—	—	—	0,20	30	$\pi/9$

Продовж. табл. 1.3.1

Варіант	O_1A , м	AB , м	BC , м	BO_2 , м	CD , м	BD , м	CO_2 , м	a , м	φ , град	ω , с^{-1}
15	0,20	—	0,10	—	0,25	—	0,50	0,20	60	$\pi/12$
16	—	0,35	0,20	—	—	—	—	0,20	30	$\pi/9$
17	0,40	0,30	—	—	—	0,3	—	0,25	330	$\pi/6$
18	0,40	0,40	0,20	0,30	0,30	—	—	0,40	45	$\pi/8$
19	0,06	0,05	0,50	—	—	—	0,40	0,25	120	$\pi/2$
20	0,10	0,70	—	0,40	—	—	0,10	0,20	45	$\pi/12$
21	0,20	1,00	1,60	0,80	—	—	—	0,20	210	$\pi/9$
22	0,20	0,80	—	0,60	—	—	—	0,20	45	$\pi/6$
23	0,30	0,50	—	0,30	—	0,5	—	0,10	60	$\pi/2$
24	0,20	0,20	—	0,20	0,20	0,2	—	0,10	60	$\pi/6$
25	0,40	0,20	0,20	—	—	—	0,40	0,20	345	$\pi/6$
26	0,20	0,50	—	0,30	0,20	—	0,50	0,20	60	$\pi/3$
27	0,40	0,70	0,30	—	0,50	—	—	0,20	150	$\pi/4$
28	0,10	0,25	0,50	—	0,25	—	0,25	0,20	120	$\pi/3$
29	0,10	0,10	0,15	—	—	0,20	—	0,10	120	$\pi/6$
30	0,08	0,08	0,10	—	—	—	0,06	0,10	120	$\pi/3$

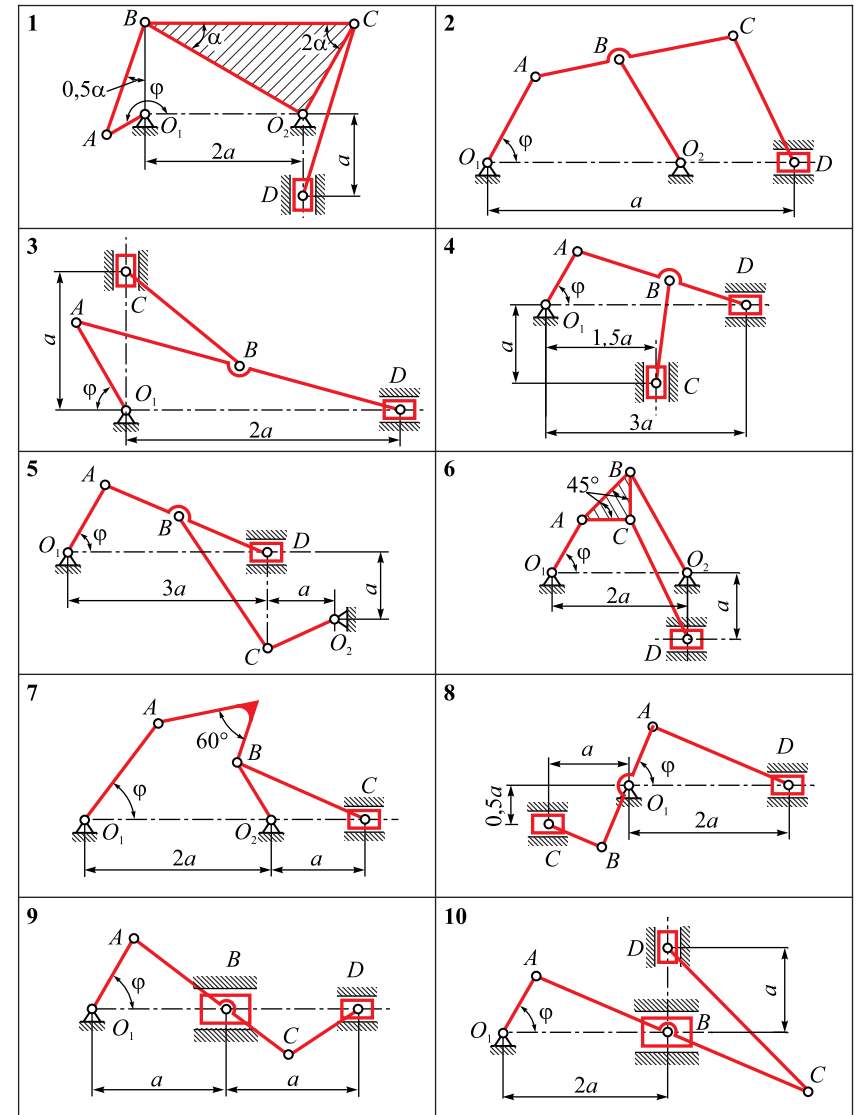
Примітка. На схемі механізму № 1 кут $\alpha = 30^\circ$.

Рис. 1.3.1

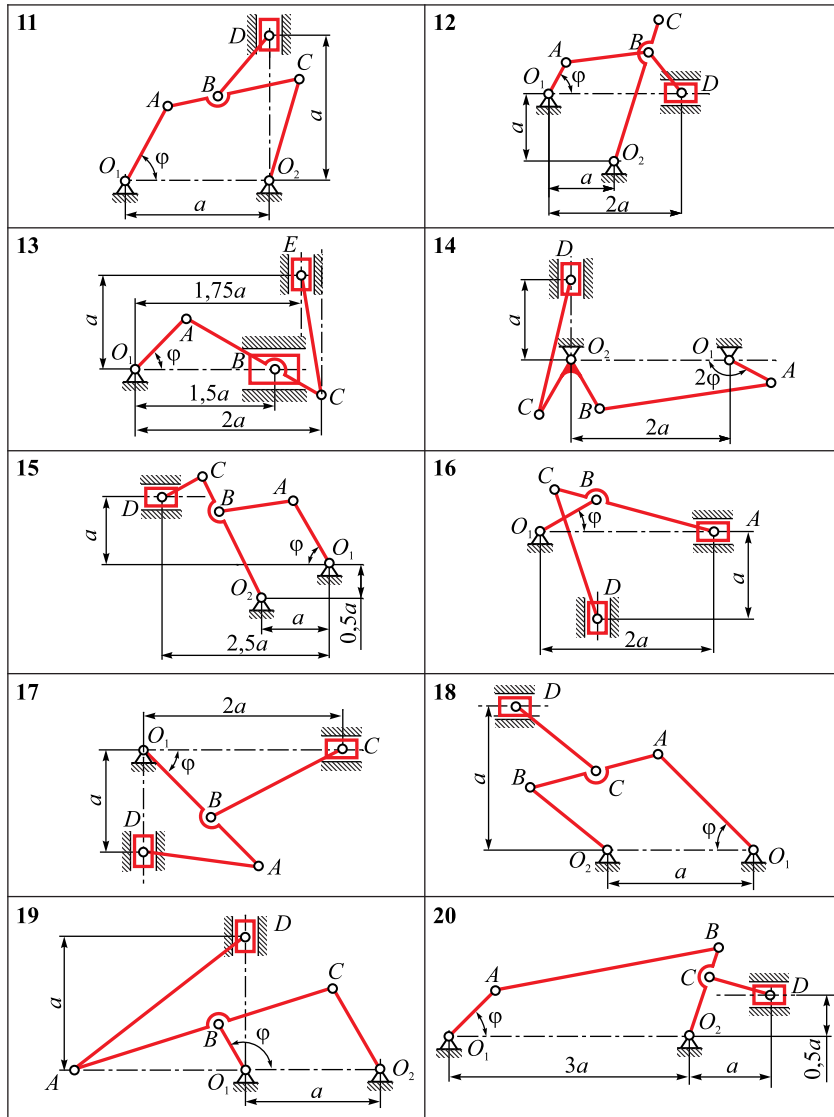


Рис. 1.3.2

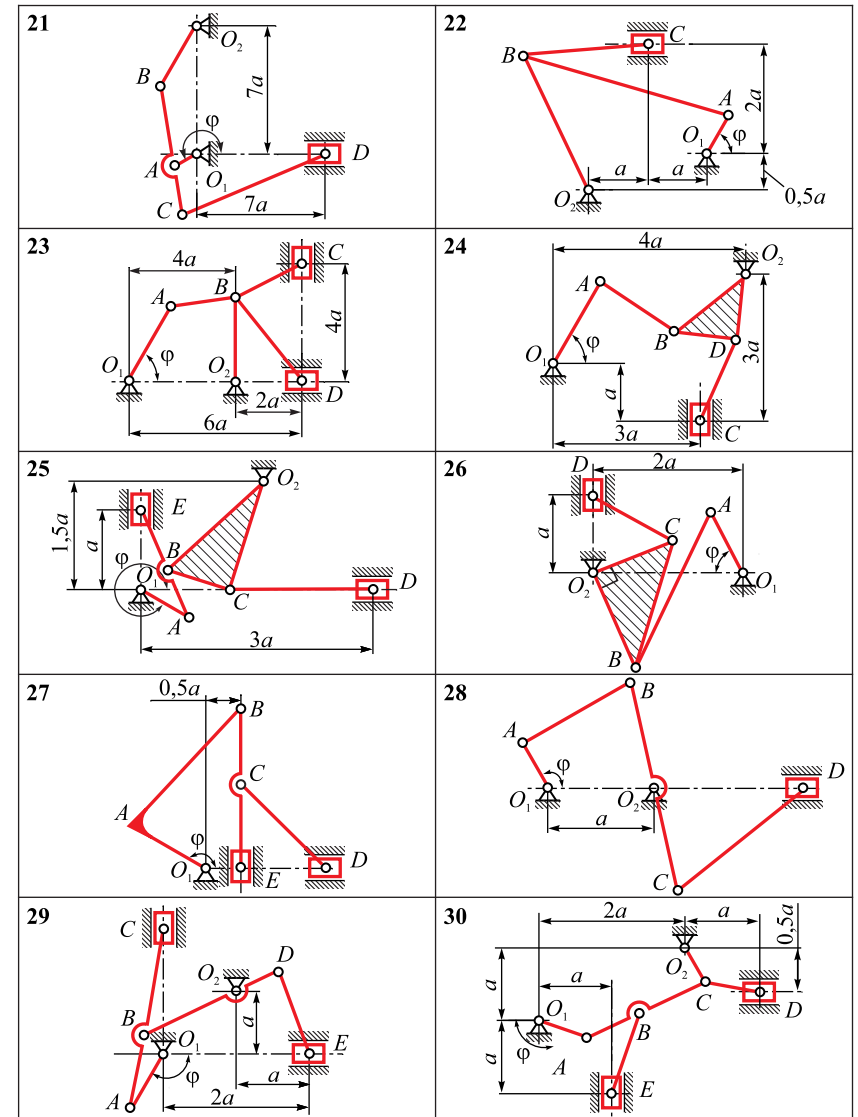


Рис. 1.3.3

ГЛАВА ДРУГА - РІШЕННЯ РГЗ АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ

Завдання К-1. Кінематичне дослідження руху точки по заданим рівнянням

За заданим рівнянням руху точки M встановити вид її траєкторії і для моменту часу t_0 , t_1 і t_2 визначити її швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії. Визначити шлях, пройдений точкою за проміжок часу $0 \dots t_2$.

Приклад виконання завдання. Вихідні данні

$$x = 10t; \quad y = 12t^2 - 2;$$

$$t_0 = 0; \quad t_1 = 0,5; \quad t_2 = 1 \quad (x \text{ і } y - \text{у см, } t, t_0, t_1 \text{ і } t_2 - \text{у с}).$$

Розв'язання. Рівняння руху можна розглядати як параметричні рівняння траєкторії точки. Підставимо в рівняння руху значення параметра t в діапазоні $0 \dots t_2$ з обраним кроком, наприклад – 0,5 с і отримаємо координати положення точки при її русі:

при		
$t_0 = 0 \text{ с}$	$x_0 = 0 \text{ см,}$	$y_0 = -2 \text{ см;}$
$t_1 = 0,5 \text{ с}$	$x_1 = 5 \text{ см,}$	$y_0 = 1 \text{ см;}$
$t_2 = 1 \text{ с}$	$x_2 = 10 \text{ см,}$	$y_0 = 10 \text{ см.}$

За отриманими значеннями координат точки накреслимо та встановимо траєкторію її переміщення.

Траєкторією точки є парабола (рис. 2.1.1).

Знайдемо координати положення точки на траєкторії при заданих моментах часу t_0 , t_1 та t_2 для точок:

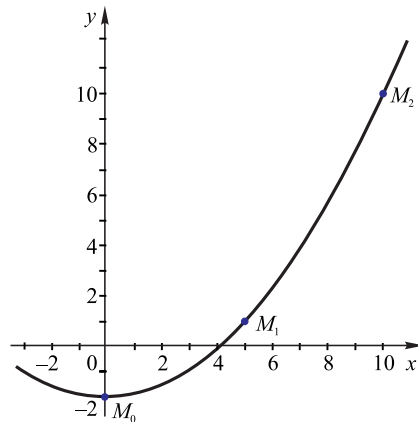


Рис. 2.1.1. Траєкторія руху точки

– M_0 при	$t_0 = 0 \text{ с,}$	$x_0 = 0 \text{ см,}$	$y_0 = -2 \text{ см;}$
– M_1 при	$t_1 = 0,5 \text{ с,}$	$x_1 = 5 \text{ см,}$	$y_0 = 1 \text{ см;}$
– M_2 при	$t_2 = 1,0 \text{ с,}$	$x_2 = 10 \text{ см,}$	$y_0 = 10 \text{ см.}$

Знайдемо швидкість точки:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}.$$

Та її прискорення

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$

Тут $\vec{i}, \vec{j}$ – орти осей x та y ; v_x, v_y, a_x, a_y – проекції швидкості та прискорення точки на вісі координат.

Спочатку визначимо проекції швидкості на осі координат

$$v_x = \dot{x} = 10; \quad v_y = \dot{y} = 12t.$$

Для заданих моментів часу в обраних точках буде:

– M_0 при	$t_0 = 0 \text{ с,}$	$v_{0x} = 10 \text{ см/с,}$	$v_{0y} = 0 \text{ см/с;}$
– M_1 при	$t_1 = 0,5 \text{ с,}$	$v_{1x} = 10 \text{ см/с,}$	$v_{1y} = 12 \text{ см/с;}$
– M_2 при	$t_2 = 1,0 \text{ с,}$	$v_{2x} = 10 \text{ см/с,}$	$v_{2y} = 24 \text{ см/с.}$

Модуль швидкості визначимо за проекціями швидкості на осі координат

$$v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 10 \text{ см/с;} \quad v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 15,6 \text{ см/с;}$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 26 \text{ см/с.}$$

Складові швидкості v_x, v_y зобразимо на рис. 2.1.2. Виберемо масштаб швидкостей $M_v = 0,4 \text{ (см/с)/мм}$.

Складові швидкості $v_{0x}, v_{0y}, v_{1x}, v_{1y}, v_{2x}, v_{2y}$ у масштабі швидкостей відкладаємо з точок M_0, M_1 та M_2 відповідно зі знаками проекцій та напрямком відліку координат. Вектор швидкості $\vec{v}$ будуємо за складовими v_{0x} та v_{0y}, v_{1x} та v_{1y} і v_{2x} та v_{2y} . Він повинен по напрямку співпадати з дотичною до траєкторії.

Знайдемо прискорення точки. Для цього використовуємо аналогічну до визначення і побудови вектора швидкості послідовність.

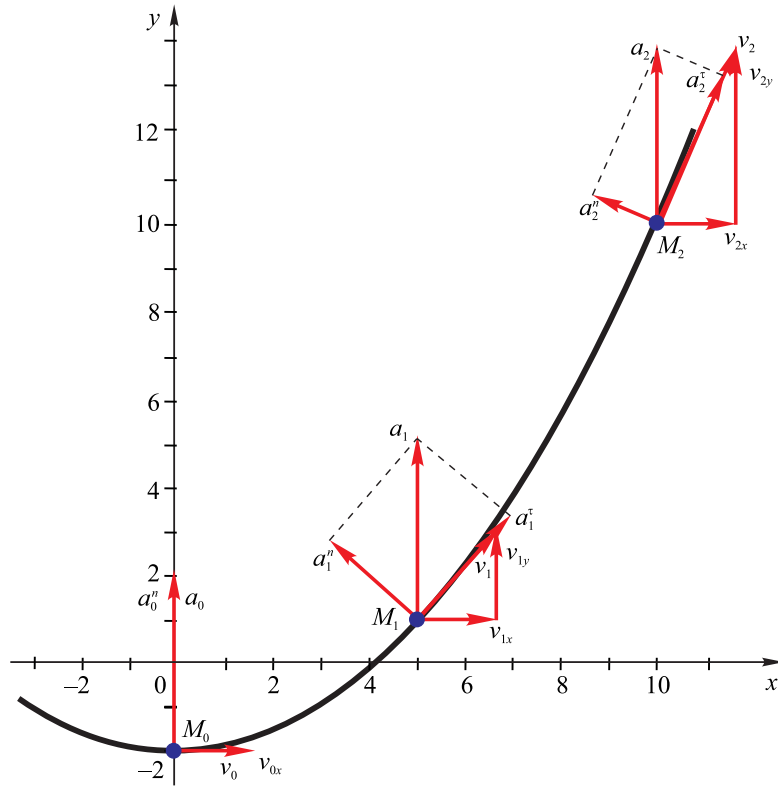


Рис. 2.1.2. Положення точки M на траєкторії, її швидкість та прискорення в задані моменти часу

Визначаємо спочатку для заданих моментів часу проекції прискорення на осі координат

$$a_x = \ddot{x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_y = \ddot{y} = 12 \text{ см/с}^2.$$

Для точок:

$$- M_0 \text{ при } t_0 = 0 \text{ с, } a_{0x} = \dot{v}_{0x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_{0y} = \dot{v}_{0y} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$- M_1 \text{ при } t_1 = 0,5 \text{ с, } a_{1x} = \dot{v}_{1x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_{1y} = \dot{v}_{1y} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$- M_2 \text{ при } t_2 = 1,0 \text{ с, } a_{2x} = \dot{v}_{2x} = 0 \text{ см/с}^2; \quad a_{2y} = \dot{v}_{2y} = 24 \text{ см/с}^2.$$

За знайденими проекціями прискорення визначаємо модуль прискорення

$$a_0 = \sqrt{a_{0x}^2 + a_{0y}^2} = 24 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = 24 \text{ см/с}^2.$$

Вибираємо масштаб прискорення $M_a = 0,6 \text{ (см/с}^2\text{)/мм}$.

Будуємо складові та сам вектор прискорення для точок M_0 , M_1 та M_2 у масштабі прискорень (див. рис 2.1.2).

У даному прикладі вектор прискорення збігається з однією з складових $a_0 = a_{0y}$; $a_1 = a_{1y}$; $a_2 = a_{2y}$.

Згідно з завданням знаходимо дотичне прискорення

$$a_\tau = |v_x a_x + v_y a_y| / v;$$

Похідна швидкості (dv/dt) виражає проекцію прискорення точки на напрямок її швидкості. Знак «+» при dv/dt означає, що точка рухається прискорено, напрямки $\bar{a}_\tau$ та $\bar{v}$ співпадають; знак «-» що рух сповільнений.

Модуль нормального прискорення точки

$$a_n = |(v_x a_y - v_y a_x) / v|.$$

Повне прискорення точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Знаходимо a , a_τ та a_n для точок:

$$- M_0 \text{ при } t_0 = 0 \text{ с, } a_0^\tau = \left| \frac{0 \cdot 10 + 24 \cdot 0}{10} \right| = 0 \text{ см/с}^2;$$

$$a_0^n = \left| \frac{24 \cdot 10 + 0 \cdot 0}{10} \right| = 24 \text{ см/с}^2; \quad a_0 = \sqrt{0^2 + 24^2} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$- M_1 \text{ при } t_1 = 0,5 \text{ с, } a_1^\tau = \left| \frac{0 \cdot 10 + 24 \cdot 12}{15,6} \right| = 18,46 \text{ см/с}^2;$$

$$a_1^n = \left| \frac{24 \cdot 10 + 0 \cdot 12}{15,6} \right| = 15,4 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = \sqrt{18,46^2 + 15,4^2} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$-M_2 \text{ при } t_2 = 1,0 \text{ с, } a_2^x = \left| \frac{0 \cdot 10 + 24 \cdot 24}{26} \right| = 22,15 \text{ см/с}^2;$$

$$a_2^n = \left| \frac{24 \cdot 10 + 0 \cdot 24}{26} \right| = 9,23 \text{ см/с}^2; \quad a_2 = \sqrt{22,15^2 + 9,23^2} = 24 \text{ см/с}^2.$$

Радіус кривини траєкторії знаходимо знаючи, що $a_n = v^2/\rho$, звідси $\rho = v^2/a_n$. Тоді для точок:

$$-M_0 \quad \rho_0 = 10^2/24 = 4,2 \text{ см};$$

$$-M_1 \quad \rho_1 = 15,6^2/15,4 = 15,8 \text{ см};$$

$$-M_2 \quad \rho_2 = 26^2/9,23 = 73,2 \text{ см}.$$

Модуль нормального прискорення також можна визначити іншим чином

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Знайдені результати заносимо до табл. 2.1.1.

Таблиця 2.1.1

$t, \text{ с}$	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a_τ	a_n	a	$\rho, \text{ см}$
	см		см/с			см/с ²					
0	0	-2	10	0	10,0	0	24	0	24	24	4,2
0,5	5	1	10	12	15,6	0	24	18,46	15,40	24	15,8
1,0	10	10	10	24	26,0	0	24	22,15	9,23	24	73,2

Знайдемо шлях пройдений точкою в проміжку часу 0 ... t_2 , знаючи, що $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, використовуючи знання з математики*

$$s = \int_0^{t_1} v(t) dt = \int \sqrt{X} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{X} + a^2 \ln(x + \sqrt{X}) \right] + C_1,$$

$$\text{де } \sqrt{X} = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

У нашому випадку

* Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 544 с.

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad \dot{x} = v_x, \quad \dot{y} = v_y.$$

Тоді

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt \rightarrow \frac{25 \ln(12t + \sqrt{144t^2 + 25})}{12} - \frac{25 \ln(5)}{12} + t\sqrt{144t^2 + 25}.$$

Шлях пройдений точкою за час t_2

$$s(t_2) = 6,022 \text{ см}.$$

Шлях пройдений точкою за час t_1

$$s(t_1) = 16,353 \text{ см}.$$

Уявлення про характер руху точки по траєкторії дає аналіз за допомогою приведених даних (табл. 2.1.1) про вектори швидкостей та прискорень та їх зображення на графіку руху точки (рис. 2.1.2).

Точка M рухається по параболі проти годинникової стрілки на що вказує напрямки векторів швидкості та прискорення. В початковий момент руху точка M знаходиться в положенні M_0 в точці перегину траєкторії, швидкість рухомої точки напрямлена паралельно осі Ox .

З часом кут вектора швидкості точки з віссю Oy зменшується, а сам вектор швидкості за напрямком наближається до напрямку траєкторії. За величиною швидкість точки нелінійно зростає.

Завдання К-2. Дослідження параметрів поступального та обертального рухів твердого тіла

Для механізму (рис. 2.2.1), в якому ступеневі шківів 2 і 3 зв'язані пасовою передачею, знайти швидкість та прискорення точок на ободах всіх коліс та точки M (в момент часу $t = 1 \text{ с}$), якщо тіло l (вантаж) рухається за законом $x = 36t^2 + 5t + 16$. Пас по ободу шківів (коліс) не ковзає. Радіуси ободів шківів складають – $R_2 = 80 \text{ см}$, $r_2 = 50 \text{ см}$, $R_3 = 80 \text{ см}$, $r_3 = 40 \text{ см}$.

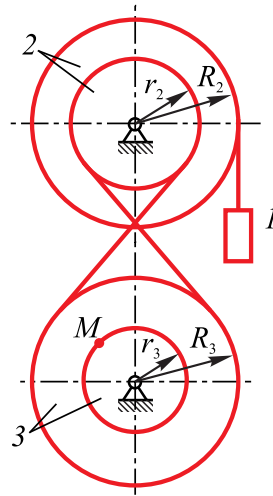


Рис. 2.2.1. Схема передаточного механізму

Завдання полягає у дослідженні перетворень найпростіших рухів твердого тіла.

Знаходимо швидкість руху та прискорення вантажу I в момент часу t .

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = 72 \cdot t + 5 \text{ см/с}; \quad v_1(t) = 72 \cdot 1 + 5 = 77 \text{ см/с};$$

$$a_1 = a_1(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = 72 \text{ см/с}^2.$$

Рухаючись поступально, вантаж I набуває швидкості v_1 , величину якої ми визначили. Вектор швидкості v_1 направляємо у напрямку руху вантажу (рис. 2.2.2). В точці A відбувається перетворення руху. Поступальний рух вантажу I спричиняє обертання колеса 2 за годинниковою стрілкою. При цьому точка A , одночасно належить мотузці, яка з'єднана з вантажем I ($v_A = v_1$) і колесу 2 ($v_A = \omega_2 R_2$). Звідси маємо:

$$\omega_2 \cdot R_2 = v_1.$$

Знаходимо кутову швидкість колеса 2:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{72 \cdot t + 5}{80} = 0,9 \cdot t + 0,063 \text{ рад/с}; \quad \omega_2(t) = 0,9 \cdot 1 + 0,063 = 0,963 \text{ рад/с}.$$

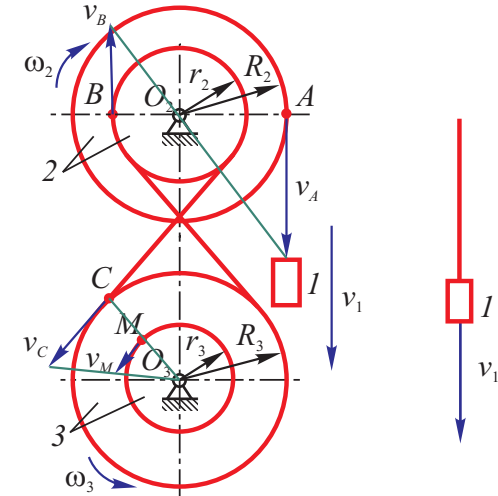


Рис. 2.2.2. Розрахункова схема механізму

Кутове прискорення колеса 2 визначаємо як похідну від кутової швидкості ω_2 за часом:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = 0,9 \text{ рад/с}^2.$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки A в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки A :

$$a_A^{доц} = \omega_2(t)^2 \cdot R_2 = 0,963^2 \cdot 80 = 74,19 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки A :

$$a_A^{об} = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 0,9 \cdot 80 = 72 \text{ см/с}^2.$$

Повне прискорення точки A знаходимо як рівнодіючу доцентрового та обертального прискорень точки:

$$a_A = \sqrt{(a_A^{доц})^2 + (a_A^{об})^2} = \sqrt{74,19^2 + 72^2} = 103,38 \text{ см/с}^2.$$

Точка B належить внутрішньому ободу колеса 2. Знаходимо швидкість точки B :

$$v_B = \omega_2(t) \cdot r_2 = 0,963 \cdot 50 = 48,15 \text{ см/с}.$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки B в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки B :

$$a_B^{\text{доц}} = \omega_2(t)^2 \cdot r_2 = 0,963^2 \cdot 50 = 46,37 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки B :

$$a_B^{\text{об}} = \varepsilon_2 \cdot r_2 = 0,9 \cdot 50 = 45 \text{ см/с}^2.$$

Повне прискорення точки B :

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\text{доц}})^2 + (a_B^{\text{об}})^2} = \sqrt{46,37^2 + 45^2} = 64,62 \text{ см/с}^2.$$

Точка C розташована на ободі колеса 3, її швидкість визначається як:

$$v_C = \omega_3(t) \cdot R_3.$$

Точки B і C належать тросу, який з'єднує колеса 2 та 3, тому їх швидкості рівні. Враховуючи, що $V_B = V_C$, складаємо рівняння:

$$\omega_2 \cdot r_2 = \omega_3 \cdot R_3.$$

Знаходимо кутову швидкість колеса 3:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{(0,9 \cdot t + 0,063) \cdot r_2}{R_3} = \frac{(0,9 \cdot t + 0,063) \cdot 50}{80} = 0,563 \cdot t + 0,039 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3(t) = 0,563 \cdot 1 + 0,039 = 0,602 \text{ рад/с};$$

Кутове прискорення колеса 3 визначаємо як похідну від кутової швидкості ω_3 за часом:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 0,563 \text{ рад/с}^2.$$

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки C в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки C :

$$a_C^{\text{доц}} = \omega_3(t)^2 \cdot R_3 = 0,602^2 \cdot 80 = 28,99 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки C :

$$a_C^{\text{об}} = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 0,563 \cdot 80 = 45,04 \text{ см/с}^2.$$

Повне прискорення точки C :

$$a_C = \sqrt{(a_C^{\text{доц}})^2 + (a_C^{\text{об}})^2} = \sqrt{28,99^2 + 45,04^2} = 53,56 \text{ см/с}^2.$$

Оскільки точка M належить колесу 3 і віддалена від осі обертання на відстань r_3 , то її швидкість визначаємо за формулою:

$$v_M = \omega_3(t) \cdot r_3 = 0,602 \cdot 40 = 24,08 \text{ см/с}.$$

Величина і напрямлення векторів швидкостей усіх точок представлено на розрахунковій схемі механізму (див. рис. 2.2.2).

Визначимо доцентрове, обертальне та повне прискорення точки M в момент часу t .

Доцентрове прискорення точки M :

$$a_M^{\text{доц}} = \omega_3(t)^2 \cdot r_3 = 0,602^2 \cdot 40 = 14,5 \text{ см/с}^2.$$

Обертальне прискорення точки M :

$$a_M^{\text{об}} = \varepsilon_3 \cdot r_3 = 0,563 \cdot 40 = 22,52 \text{ см/с}^2.$$

Повне прискорення точки M :

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\text{доц}})^2 + (a_M^{\text{об}})^2} = \sqrt{14,5^2 + 22,52^2} = 26,78 \text{ см/с}^2.$$

Будуємо вектори знайдених відповідних складових (обертального та доцентрового) прискорень точок A , B , C та M (рис. 2.2.3).

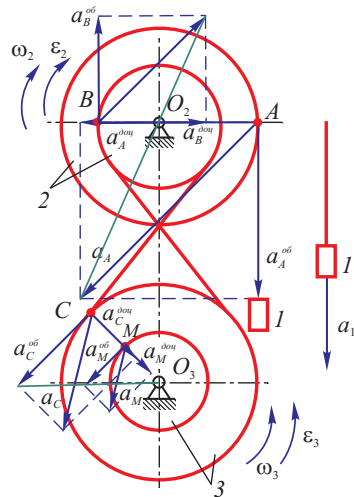


Рис. 2.2.3. Побудова прискорень усіх точок механізму

Вектор повного прискорення точок визначаємо як векторну суму векторів обертального та доцентрового прискорень. Цей вектор направляємо по діагоналі прямокутника, побудованого на його складових прискорень.

Кінці векторів прискорень точок плоскої фігури, що лежать на одній прямій, також лежать на одній прямій і ділять її на відрізки, пропорційні відстаням між точками, що підтверджує правильність розрахунків.

Результати розрахунків приведено в табл. 2.1.2.

Таблиця 2.1.2

Точка	R , см	r , см	v , см/с	a , см/с ²	$a^{доц}$, см/с ²	$a^{об}$, см/с ²	ω , рад/с	ϵ , рад/с ²
I	—	—	77	72	—	—	—	—
A	80	—	77	103,38	74,19	72	0,963	0,9
B	—	50	48,15	64,62	46,37	45	0,963	0,9
C	80	—	48,15	53,56	28,99	45,04	0,602	0,563
M	—	40	24,08	26,78	14,5	22,52	0,602	0,563

Будуємо діаграми кутових швидкостей (рис. 2.2.4, а) та кутових прискорень (рис. 2.2.4, б) коліс механізму.

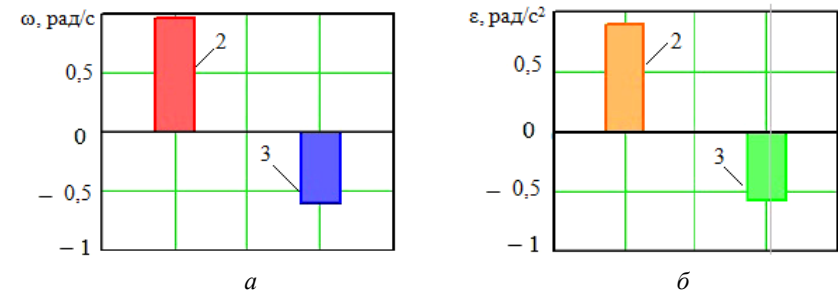


Рис. 2.2.4. Діаграми параметрів обертального руху коліс механізму: а – кутова швидкість; б – кутове прискорення

Висновок: Виходячи з аналізу даних, наведених на рис. 2.2.2–2.2.3, зрозуміло, що швидкості та повні прискорення точок механізму зменшуються із збільшенням відстані точки від вантажу, який приводить механізм до руху. Аналіз рис. 2.2.4 дає змогу зрозуміти, що колесо 2 прискорюється під час руху, а колесо 3 – навпаки, сповільнюється.

Завдання К-3. Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму

Кривошип O_1A багатоланкового механізму (рис. 2.3.1) обертається з кутовою швидкістю $\omega_0 = 3\pi$ рад/с та кутовим прискоренням $\epsilon_0 = 10$ рад/с². Розміри ланок механізму складають: $O_1A = 300$ мм; $AB = 900$ мм; $CD = 400$ мм; $O_2D = 600$ мм; $O_1O_2 = 1000$ мм; $e = 150$ мм; $\alpha = 30^\circ$; $\varphi = 60^\circ$. Для заданого положення механізму визначити:

- швидкості руху усіх вузлових точок механізму;
- кутові швидкості руху усіх ланок механізму;
- повне прискорення руху усіх вузлових точок механізму;
- кутове прискорення усіх ланок механізму;
- для виконання перевірки обчислити швидкості руху точок механізму за допомогою миттєвого центру швидкостей (МЦШ) та плану швидкостей;
- для виконання перевірки обчислити прискорення руху точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень (МЦП) та плану прискорень.

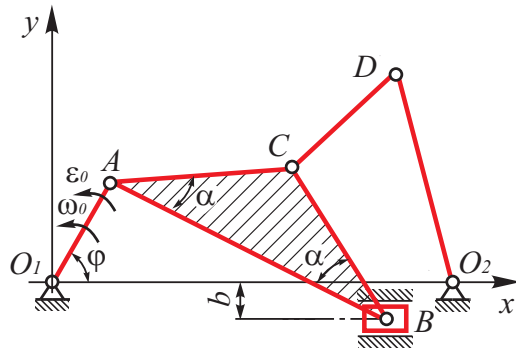


Рис. 2.3.1. Схема багатоланкового механізму

Кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму виконуємо за допомогою методу планів швидкостей і прискорень механізму, який відноситься до графоаналітичного методу.

Планом швидкостей (прискорень) механізму називають креслення, на якому швидкості (прискорення) різних точок зображені у вигляді векторів, що показують напрямки і величини (в масштабі) цих швидкостей (прискорень) в даний момент часу. Для забезпечення точності розрахунків усі креслення виконуємо в системі *Autocad*.

Для визначення швидкостей точок плоского механізму, будемо схему механізму у вибраному масштабі ($\mu_v = 10 \text{ см/см}$). Положення механізму в даний момент часу задається величиною кута φ , який є кутом повороту кривошипа. Цей кут відкладається між кривошипом та віссю x в системі координат механізму.

1. *Визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей.*

Визначення швидкостей точок плоскої фігури за допомогою плану швидкостей базується на теоремі про швидкості точок плоскої фігури (швидкість будь-якої точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса та обертальної швидкості цієї точки навколо полюса).

Щоб визначити швидкість точки механізму, насамперед необхідно визначити якій ланці належить точка і який рух здійснює ця ланка.

Ланка O_1A здійснює обертальний рух навколо осі, що перпендикулярна площині механізму та проходить крізь точку O_1 . Оскільки кутова швидкість ω_0 кривошипа O_1A направлена проти годинникової стрілки, відповідно і ланка O_1A рухається навколо шарніру O_1 проти годинникової стрілки.

Визначаємо модуль швидкості точки A кривошипа O_1A :

$$v_A = \omega_0 \cdot O_1A = 3\pi \cdot 0,3 = 2,827 \text{ м/с.}$$

Розглянемо ланку ACB , що здійснює плоский рух. За полюс виберемо точку A . Точка B рухається по горизонтальній прямій, напрям вектору швидкості якої співпадає з напрямом руху точки.

Швидкість точки B буде виражена геометричною рівністю:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA},$$

де v_{BA} – обертальна швидкість точки B навколо точки A , направлена перпендикулярно радіусу обертання BA .

Для побудови плану швидкостей, вибираємо масштаб швидкостей точок ланок при відкладанні їх на схемі механізму ($\mu_v = 1 \text{ м/с / см}$).

Для геометричного визначення v_B , з довільної точки p площини креслення проводимо відрізок pa , який паралельний v_A , та в вибраному масштабі відображає v_A . З кінця цього відрізка, проводимо пряму ab перпендикулярно ланці AB , яка співпадає з напрямом v_{BA} . З точки p будемо пряму, паралельну v_B , до перетину з прямою ab (рис. 2.3.2).

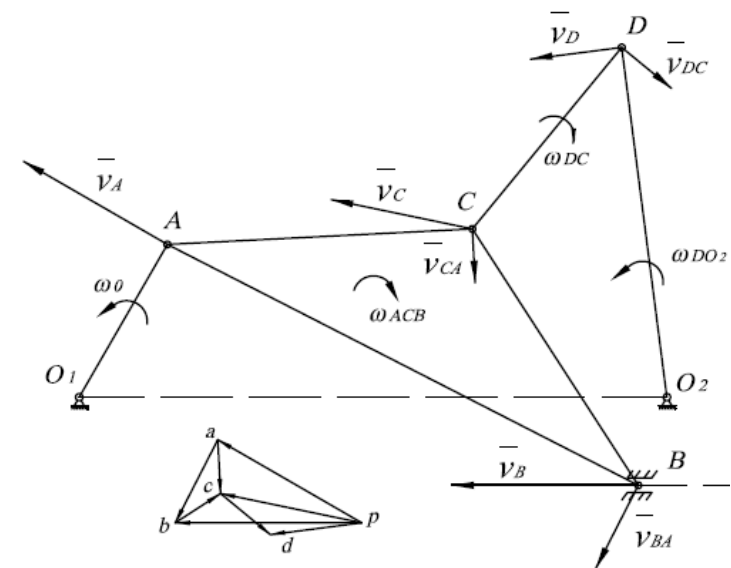


Рис. 2.3.2. План швидкостей багатоланкового механізму

Отримуємо трикутник швидкостей Δpab , сторони якого пропорційні швидкостям ланки ACB : pa – швидкість точки A (полюса); ab – обертальна швидкість точки B навколо полюса; pb – шукана швидкість точки B .

Для визначення швидкості точки C візьмемо за полюс точку A , тоді:

$$\overline{v_C} = \overline{v_A} + \overline{v_{CA}},$$

де v_{CA} – обертальна швидкість точки C навколо точки A , направлена перпендикулярно радіусу обертання AC .

Але в цій рівності невідомий напрямок v_C . Тому візьмемо за полюс точку B та запишемо інше рівняння:

$$\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}},$$

де v_{CB} – обертальна швидкість точки C навколо точки B , направлена перпендикулярно радіусу обертання BC .

Подальша побудова ґрунтується на цих двох рівностях.

З точки a проводимо пряму, перпендикулярну ланці AC ($v_{CA} \perp AC$), а з точки b – пряму, перпендикулярну ланці BC ($v_{CB} \perp BC$). Перетин цих двох прямих утворює точку C . З'єднаємо її з точкою p , отримавши відрізок pc , який являється швидкістю точки C . Відрізок ac – обертальна швидкість точки C навколо точки A , bc – обертальна швидкість точки C навколо точки B .

Розглянемо ланку CD . Для визначення швидкості точки D візьмемо за полюс точку C , зв'язану з точкою D ланкою CD , тоді:

$$\overline{v_D} = \overline{v_C} + \overline{v_{DC}}.$$

Напрямок v_C є відомим, оскільки швидкість v_D направлена перпендикулярно DO_2 – кривошип DO_2 здійснює тільки обертальний рух навколо центру O_2 . З точки p проводимо пряму паралельно цій швидкості, а з точки c – пряму перпендикулярну CD до перетину з щойно проведеною прямою. Отримаємо точку d , яку з'єднаємо з точкою p . Відстань pd виражає величину і напрямок швидкості точки D .

Отримана діаграма – план швидкостей для заданого механізму. По ній можна визначити швидкість будь-якої точки даного механізму.

Вимірюючи відрізки pb , pc , pd , ba , cd на плані швидкостей відповідно обраному масштабу, отримаємо швидкості точок B , C , D , BA , CD :

$$v_B = 3,171 \text{ м/с}, \quad v_C = 2,453 \text{ м/с}, \quad v_D = 1,566 \text{ м/с},$$

$$v_{BA} = 1,588 \text{ м/с}, \quad v_{CD} = 1,099 \text{ м/с}.$$

Обертальна швидкість точки плоскої фігури дорівнює добутку кутової швидкості фігури на відстань цієї точки до полюса, тоді:

$$v_{BA} = \omega_{ACB} \cdot BA, \quad v_{DC} = \omega_{DC} \cdot DC, \quad v_D = \omega_{DO_2} \cdot DO_2.$$

Визначаємо кутові швидкості ланок механізму:

$$\omega_{ACB} = \frac{v_{BA}}{BA} = \frac{1,588}{0,9} = 1,764 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DC} = \frac{v_{DC}}{DC} = \frac{1,099}{0,4} = 2,748 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DO_2} = \frac{v_D}{DO_2} = \frac{1,566}{0,6} = 2,61 \text{ рад/с}.$$

Діаграма кутових швидкостей ланок механізму представлена на рис. 2.3.3.

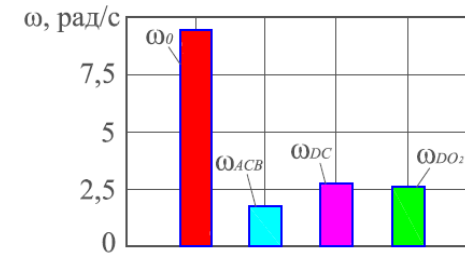


Рис. 2.3.3. Діаграма кутових швидкостей ланок механізму

2. Визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою миттєвих центрів швидкостей (МЦШ).

Кривошип O_1A має МЦШ в точці O_1 , оскільки $v_{O_1}=0$ (нерухома точка).

Для знаходження МЦШ ΔACB проводимо перпендикуляри до векторів швидкостей точок A та B . Швидкість $v_A \perp O_1A$, оскільки точка A обертається навколо O_1 . Тому перпендикуляр до v_A буде продовженням кривошипу. Швидкість v_B спрямована по горизонталі, так як точка B повзуна рухається по горизонтальній прямій. Перетин перпендикулярів до швидкостей v_A та v_B утворює точку P_{AB} , яка і являється МЦШ ΔACB . Побудову МЦШ представлено на рис. 2.3.4.

Так як швидкість точки P_{AB} дорівнює нулю, то всі інші точки ΔACB здійснюють миттєвий поворот навколо неї. Тому їх швидкості перпендикулярні відповідним прямим, проведеним в точки з точки P_{AB} , а їх модулі прямо пропорційні відстаням від точки P_{AB} до цих точок.

Для визначення v_C з'єднаємо точку C з МЦШ, точкою P_{AB} .

Визначимо модуль швидкості точки A :

$$v_A = \omega_0 \cdot O_1A = 3\pi \cdot 0,3 = 2,827 \text{ м/с}.$$

Кутова швидкість усіх точок ланки ACB однакова, тому модулі швидкостей точок визначимо з пропорцій:

$$\frac{v_B}{BP_{AB}} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_C}{CP_{AB}}.$$

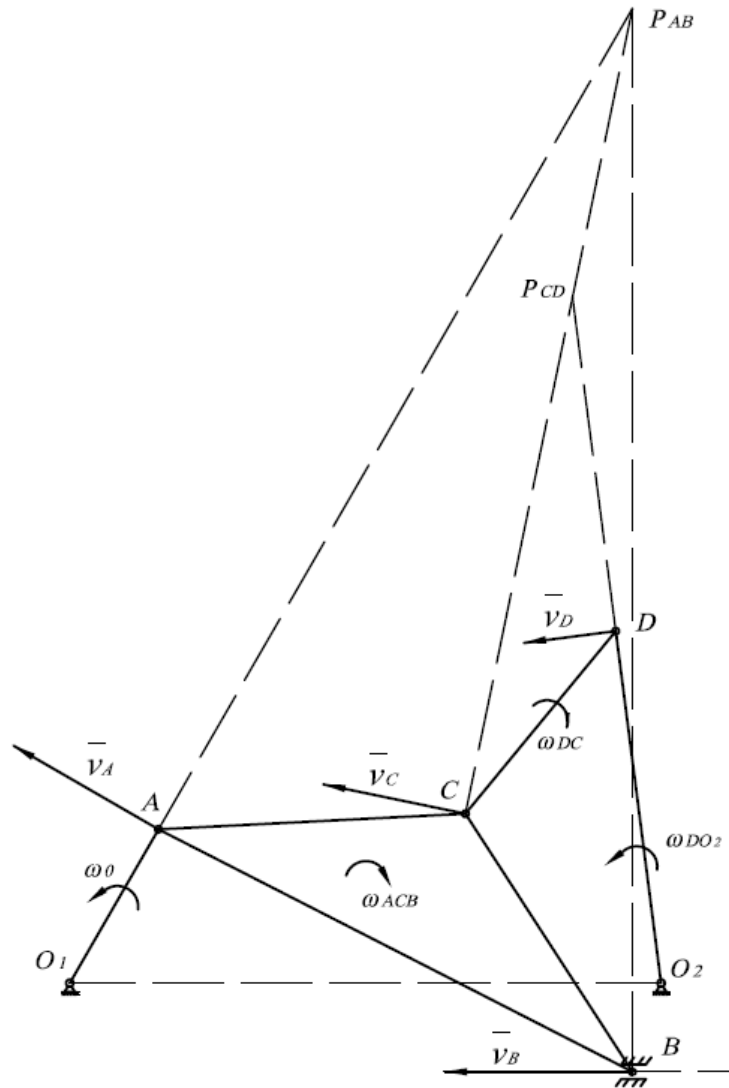


Рис. 2.3.4. Визначення миттєвого центру швидкостей багатоланкового механізму

Визначаємо відстань точок до МЦШ (рис. 2.3.4):

$$AP_{AB} = 1,603 \text{ м}; \quad BP_{AB} = 1,798 \text{ м}; \quad CP_{AB} = 1,390 \text{ м}.$$

Визначаємо швидкості точок B та C:

$$v_B = \frac{v_A \cdot BP_{AB}}{AP_{AB}} = \frac{2,827 \cdot 1,798}{1,603} = 3,171 \text{ м/с},$$

$$v_C = \frac{v_A \cdot CP_{AB}}{AP_{AB}} = \frac{2,827 \cdot 1,390}{1,603} = 2,451 \text{ м/с}.$$

Для визначення швидкості точки D знаходимо МЦШ ланки CD, для чого продовжуємо кривошип DO_2 ($DO_2 \perp v_D$) до перетину з перпендикуляром до $v_C - CP_{AB}$. Отримуємо точку P_{CD} , яка являється МЦШ ланки CD.

Визначаємо відстань точок до МЦШ ланки CD (рис. 2.3.4):

$$DP_{CD} = 0,570 \text{ м}; \quad CP_{CD} = 0,892 \text{ м}.$$

Тоді з пропорції

$$\frac{v_D}{DP_{CD}} = \frac{v_C}{CP_{CD}},$$

знаходимо швидкість точки D:

$$v_D = \frac{v_C \cdot DP_{CD}}{CP_{CD}} = \frac{2,451 \cdot 0,570}{0,892} = 1,566 \text{ м/с}.$$

Знаючи, що МЦШ має швидкість, рівну нулю, а всі інші точки плоскої фігури обертаються навколо нього, для визначення кутової швидкості плоскої фігури потрібно швидкість будь-якої її точки розділити на відповідну відстань її до МЦШ:

$$\omega_{ACB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_B}{BP_{AB}} = \frac{v_C}{CP_{AB}} = \frac{2,827}{1,603} = 1,764 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DC} = \frac{v_C}{CP_{CD}} = \frac{v_D}{DP_{CD}} = \frac{2,451}{0,892} = 2,748 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{DO_2} = \frac{v_D}{DO_2} = \frac{1,566}{0,6} = 2,61 \text{ рад/с}.$$

Порівняння розрахунків визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей та за допомогою миттєвих центрів швидкостей наведено в табл. 2.1.3.

Таблиця 2.1.3

v , м/с	v_A	v_B	v_C	v_D
по плану швидкостей	2,827	3,171	2,453	1,566
за допомогою МЦШ	2,827	3,171	2,451	1,566
ω , рад/с	ACB	DC	DO_2	
по плану швидкостей	1,764	2,748	2,61	
за допомогою МЦШ	1,764	2,748	2,61	

Проаналізувавши дані табл. 2.1.3. можна зробити висновок, що результати визначення швидкостей точок та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою плану швидкостей та за допомогою миттєвих центрів швидкостей співпадають майже з 100% точністю. Величина відносної похибки складає 0,08%, яка пов'язана з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа.

3. Визначення повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму та кутових прискорень усіх ланок механізму за допомогою плану прискорень.

Прискорення точки A складається з двох складових – обертального та доцентрового прискорень:

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^{об}} + \overline{a_A^{доц}}$$

Обертальне прискорення точки A :

$$a_A^{об} = \varepsilon_0 \cdot O_1A = 10 \cdot 0,3 = 3 \text{ м/с}^2.$$

Доцентрове прискорення точки A :

$$a_A^{доц} = \omega_0^2 \cdot O_1A = (3\pi)^2 \cdot 0,3 = 26,646 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки A :

$$a_A = \sqrt{(a_A^{об})^2 + (a_A^{доц})^2} = \sqrt{3^2 + 26,646^2} = 26,814 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення прискорень точок B , C , D застосовуємо теорему про прискорення точок плоскої фігури (прискорення будь-якої точки плоскої

фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки навколо полюса, яке має дві складові – обертальну та доцентрову).

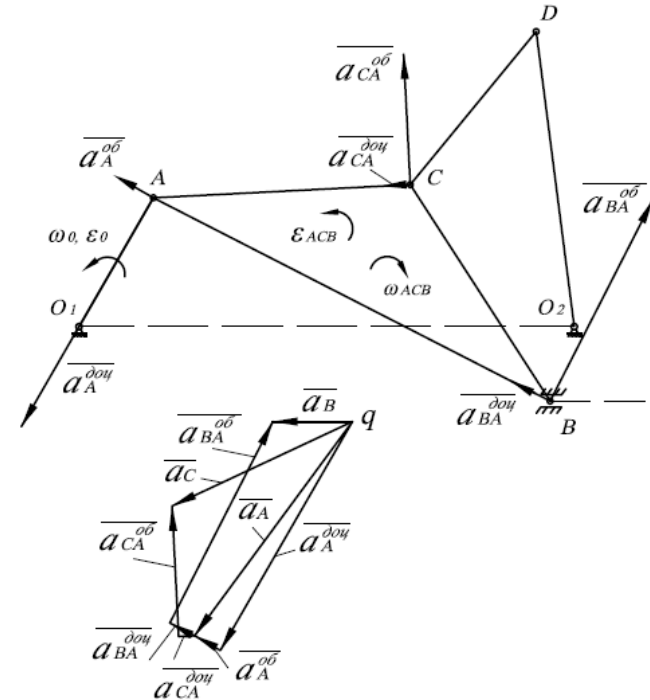
Напрямок прискорення точки B відомий – направлено по прямій, по якій рухається повзун. Якщо точку B віднести до ΔACB , який здійснює плоский рух, то її прискорення потрібно визначити відповідно вище вказаної теореми про прискорення точок.

Для визначення прискорення точки B , виберемо точку A за полюс, тоді:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^{об}} + \overline{a_{BA}^{доц}}, \text{ або } \overline{a_B} = \overline{a_A^{об}} + \overline{a_A^{доц}} + \overline{a_{BA}^{об}} + \overline{a_{BA}^{доц}}.$$

Вибираємо масштаб прискорень точок ланок при відкладанні їх на схемі механізму ($\mu_a = 4,5 \text{ м/с}^2 / \text{см}$).

З довільної точки q площини креслення, у вибраному масштабі прискорень, відкладаємо доцентрове прискорення точки A , вектор $\overline{a_A^{доц}}$, зберігаючи його величину та напрямок (рис. 2.3.5). Доцентрове прискорення точки A , направлено по лінії O_1A кривошипу, від точки A , до осі обертання O_1 .

Рис. 2.3.5. План прискорень багатоланкового механізму (точок A , B , C)

З кінця цього вектору будуюмо у масштабі оберталине прискорення точки A , вектор $a_A^{об}$, який направлений перпендикулярно кривошину O_1A , в сторону обертання кутового прискорення. Наступним будуюмо вектор $a_{BA}^{доц}$, величину якого визначаємо за формулою:

$$a_{BA}^{доц} = \omega_{ACB}^2 \cdot BA = 1,764^2 \cdot 0,9 = 2,801 \text{ м/с}^2,$$

напрямок якого буде від точки B до точки A по лінії BA , оскільки точка B обертається навколо полюса, точки A .

З кінця вектора $a_{BA}^{доц}$ перпендикулярно до нього проводимо пряму, паралельну $a_{BA}^{об}$, до перетину з прямою, яка проходить з точки q паралельно a_B . Точка перетину цих прямих буде кінцем векторів $a_{BA}^{об}$ та a_B .

Вимірюючи зазначені вектори на плані прискорень (рис. 2.3.5), відповідно обраному масштабу, визначаємо:

$$a_B = 8,034 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^{об} = 22,803 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення ланки ACB визначаємо за формулою:

$$\varepsilon_{ACB} = \frac{a_{BA}^{об}}{AB} = \frac{22,803}{0,9} = 25,337 \text{ рад/с}^2.$$

Напрямок вектора $a_{BA}^{об}$ вказує, що кутове прискорення ланки ACB направлене проти годинникової стрілки, тобто в сторону протилежну напрямку кутової швидкості ланки. Це означає, що рух ланки ACB , в даний момент часу сповільнений.

Визначимо прискорення точки C , для чого за полюс візьмемо спочатку точку A і запишемо рівність:

$$\overline{a_C} = \overline{a_A} + \overline{a_{CA}^{об}} + \overline{a_{CA}^{доц}}. \quad (2.1.1)$$

Доцентрове прискорення точки C навколо полюса (направлене по лінії AC) визначаємо за формулою:

$$a_{CA}^{доц} = \omega_{ACB}^2 \cdot CA = \omega_{ACB}^2 \cdot \frac{AB}{2 \cdot \cos \alpha} = 1,764^2 \cdot \frac{0,9}{2 \cdot \cos 30^\circ} = 1,617 \text{ м/с}^2.$$

Оберталине прискорення точки C навколо полюса (направлене перпендикулярно $a_{CA}^{доц}$):

$$a_{CA}^{об} = \varepsilon_{ACB} \cdot CA = \varepsilon_{ACB} \cdot \frac{AB}{2 \cdot \cos \alpha} = 25,337 \cdot \frac{0,9}{2 \cdot \cos 30^\circ} = 13,165 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $a_{CA}^{доц}$ направлений від точки C до точки A по лінії AC , а вектор $a_{CA}^{об}$ направлений перпендикулярно ланці AC в сторону кутового прискорення ланки ACB .

Будуємо векторну рівність (2.1.1), для чого з кінця вектора a_A проводимо вектор $a_{CA}^{доц}$. З кінця побудованого вектора $a_{CA}^{доц}$, перпендикулярно йому, будуюмо вектор $a_{CA}^{об}$. Зазначена векторна рівність і визначає кінець вектора a_C , початок якого знаходиться в точці q .

Вимірюючи вектор a_C на плані прискорень (рис. 2.3.5), відповідно обраному масштабу, визначаємо:

$$a_C = 20,099 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо прискорення точки D . Якщо точку D віднести до ланки CD , яка здійснює складний рух, і за полюс прийняти точку C :

$$\overline{a_D} = \overline{a_C} + \overline{a_{DC}^{об}} + \overline{a_{DC}^{доц}}.$$

Доцентрове прискорення точки D навколо полюса (точка C) направлене по ланці CD від точки D до точки C і визначається за формулою:

$$a_{DC}^{доц} = \omega_{DC}^2 \cdot DC = 2,748^2 \cdot 0,4 = 3,021 \text{ м/с}^2.$$

Величина обертого прискорення точки D навколо полюса невідома, вектор прискорення направлений перпендикулярно ланці CD .

З метою отримати більш наглядне креслення і результати відносно побудови плану прискорень, будуюмо план прискорення точок C, D окремо (рис. 2.3.6).

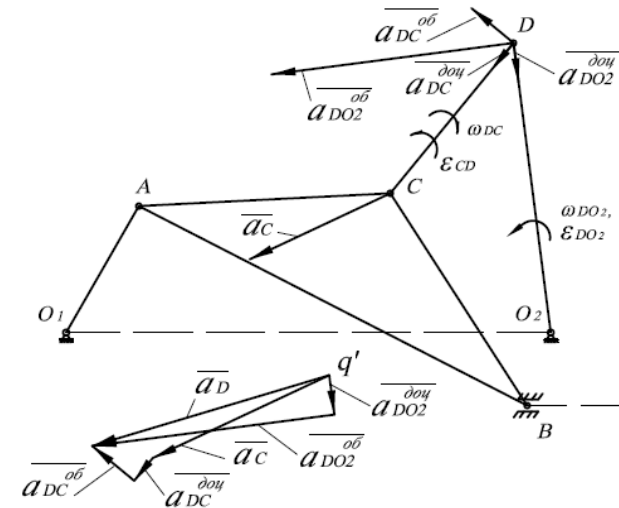


Рис. 2.3.6. План прискорень багатоланкового механізму (точок C, D)

З довільної точки q' (рис. 2.3.6) відкладаємо вже відомий вектор a_C . З кінця цього вектора будуюмо вектор $a_{DC}^{доц}$. Далі, з кінця отриманого вектора проводимо пряму, паралельну вектору обертального прискорення точки D навколо полюса C . Кінець цього вектора невідомий, а також невідомо напрямок прискорення точки D .

Розглянемо ланку DO_2 . Віднесемо точку D до ланки DO_2 , яка здійснює тільки поворот навколо точки O_2 . У цьому випадку складаємо рівняння:

$$\overline{a_D} = \overline{a_{DO_2}^{об}} + \overline{a_{DO_2}^{доц}}. \quad (2.1.2)$$

Доцентрове прискорення точки D навколо полюса (точка O_2) направле- не по ланці DO_2 від точки D до точки O_2 і визначається за формулою:

$$a_{DO_2}^{доц} = \omega_{DO_2}^2 \cdot DO_2 = 2,61^2 \cdot 0,6 = 4,087 \text{ м/с}^2.$$

Прискорення $a_{DO_2}^{об}$ невідоме по величині, а за напрямком перпендику- лярне ланці DO_2 . Будуюмо векторну рівність (2.1.2). З точки q' відкладаємо вектор $a_{DO_2}^{доц}$, з кінця цього вектора проводимо пряму, паралельну вектору $a_{DO_2}^{об}$. Перетин прямих, паралельних відповідно $a_{DO_2}^{об}$ та $a_{DC}^{об}$ утворює кінець вектора a_D , початок якого знаходиться в точці q' . Вимірюючи довжини відрізків на плані прискорень (рис. 2.3.6), відповідно обраному масшта- бу, визначаємо:

$$a_D = 25,519 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{DC}^{об} = 5,609 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{DO_2}^{об} = 25,189 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення ланки CD визначаємо за формулою:

$$\varepsilon_{DC} = \frac{a_{DC}^{об}}{DC} = \frac{5,609}{0,4} = 14,023 \text{ рад/с}^2.$$

Кутове прискорення ланки DO_2 :

$$\varepsilon_{DO_2} = \frac{a_{DO_2}^{об}}{DO_2} = \frac{25,189}{0,6} = 41,982 \text{ рад/с}^2.$$

Результати розрахунків повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму та кутових прискорень усіх ланок механізму за допомогою плану прискорень приведені в табл. 2.1.4.

Таблиця 2.1.4

Точка (ланка)	прискорення, м/с ²			кутове прискорення, рад/с ²
	обертальне	доцентрове	повне	
<i>A</i>	3	26,646	26,814	–
<i>B</i>	–	–	8,034	–
<i>C</i>	–	–	20,099	–
<i>D</i>	–	–	25,519	–
<i>BA</i>	22,803	2,801		–
<i>CA</i>	13,165	1,617		–
<i>ACB</i>	–	–	–	25,337
<i>DC</i>	5,609	3,021	–	14,023
<i>DO₂</i>	25,189	4,087	–	41,982

Діаграма кутових прискорень ланок механізму представлена на рис. 2.3.7.

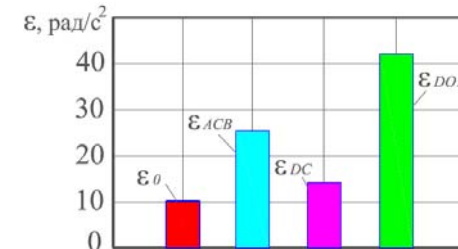


Рис. 2.3.7. Діаграма кутових прискорень ланок механізму

4. Визначення повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень (МЦП).

Миттєвий центр прискорень (МЦП) – точка, прискорення якої в даний момент дорівнює нулю. МЦП повинен знаходитися на прямій, що становить кут β до вектору прискорення полюса, проведеної в сторону кутового прискорення, на відстані Q .

Кут β визначається за формулою:

$$\beta = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки точки A, B, C належать ланці ACB , кутову швидкість та кутове прискорення якої знайдено в пп.1-3 розв'язку задачі, кут β визначимо за формулою:

$$\beta = \arctg \frac{\varepsilon_{ACB}}{\omega_{ACB}^2} = \arctg \frac{25,337}{1,764^2} = 82,998^\circ.$$

Відстань від точки A до МЦП визначаємо за формулою:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4}} = \frac{26,814}{\sqrt{25,337^2 + 1,764^4}} = 1,0504 \text{ м.}$$

Положення МЦП ланки ACB зображено на рис. 2.3.8.

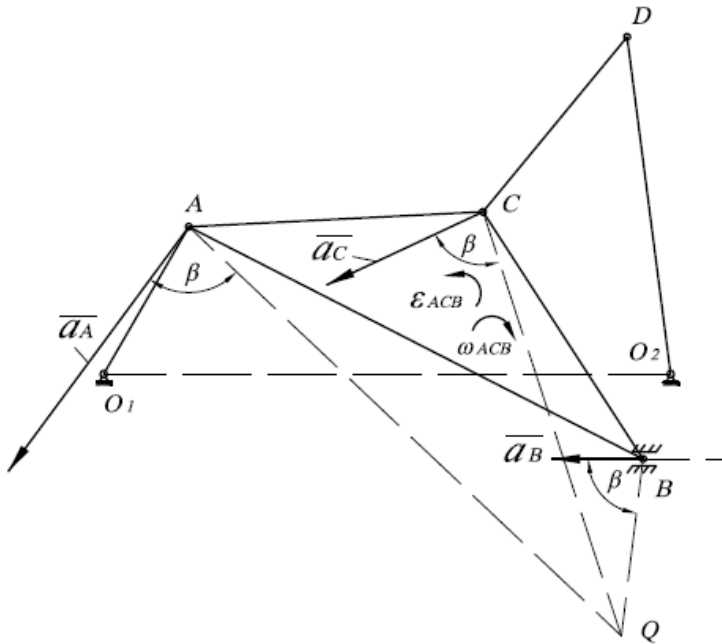


Рис. 2.3.8. Миттєвий центр прискорень ланки ACB

З урахуванням вибраного масштабу для схеми багатоланкового механізму ($\mu_l = 10 \text{ см/см}$) визначаємо відстань точок до МЦП:

$$AQ = 1,0504 \text{ м;}$$

$$CQ = 0,7872 \text{ м;}$$

$$BQ = 0,3146 \text{ м.}$$

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури може бути визначено за допомогою вибору полюса в МЦП. Тоді:

$$a_A = AQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4} = 1,0504 \cdot \sqrt{25,337^2 + 1,764^4} = 26,814 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = CQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4} = 0,7872 \cdot \sqrt{25,337^2 + 1,764^4} = 20,095 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = BQ \cdot \sqrt{\varepsilon_{ACB}^2 + \omega_{ACB}^4} = 0,3146 \cdot \sqrt{25,337^2 + 1,764^4} = 8,031 \text{ м/с}^2$$

Аналогічно визначимо положення МЦП ланки CD . Оскільки точки C, D належать ланці CD , кутову швидкість та кутове прискорення якої знайдено в пп.1-3 розв'язку задачі, кут β_{DC} визначимо за формулою:

$$\beta_{DC} = \arctg \frac{\varepsilon_{DC}}{\omega_{DC}^2} = \arctg \frac{14,023}{2,748^2} = 61,697^\circ.$$

Оскільки повне прискорення точки C знайдено, відстань точки C до МЦП для ланки CD визначаємо за формулою:

$$CQ_{CD} = \frac{a_C}{\sqrt{\varepsilon_{CD}^2 + \omega_{CD}^4}} = \frac{20,095}{\sqrt{14,023^2 + 2,748^4}} = 1,262 \text{ м.}$$

Положення МЦП ланки CD багатоланкового механізму приведено на рис. 2.3.9 (для компактності рисунка, лінії CQ_{DC} та DQ_{DC} зображені розірваними).

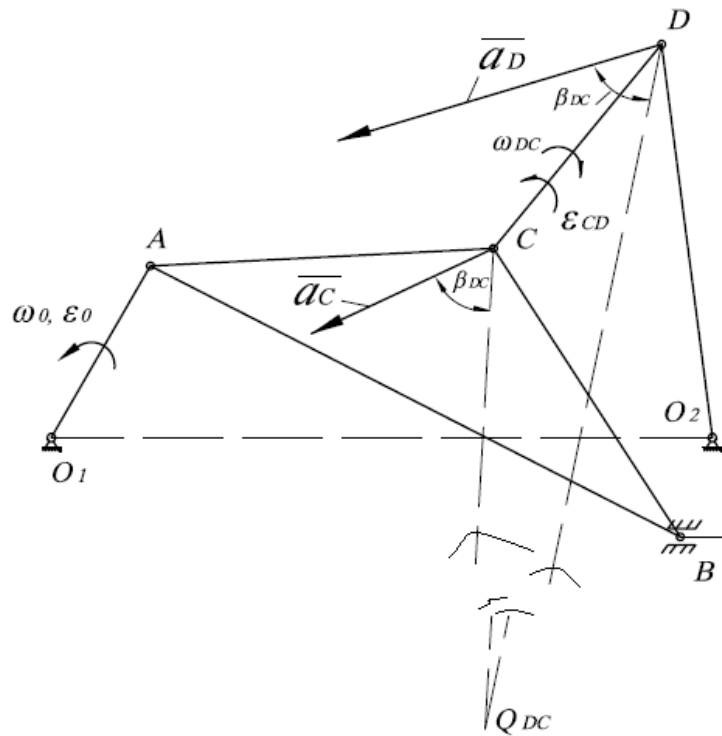


Рис. 2.3.9. Миттєвий центр прискорень ланки CD

З урахуванням вибраного масштабу для схеми багатоланкового механізму ($\mu_l = 10 \text{ см/см}$) визначимо відстань точки D до МЦП ланки CD :

$$DQ_{DC} = 1,6023 \text{ м.}$$

Так як положення МЦП ланки CD знайдено, визначаємо прискорення точки D :

$$a_D = DQ_{CD} \cdot \sqrt{\epsilon_{CD}^2 + \omega_{CD}^4} = 1,6023 \cdot \sqrt{14,023^2 + 2,748^4} = 25,520 \text{ м/с}^2.$$

Результати розрахунків повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень приведені в табл. 2.1.5.

Таблиця 2.1.5

Точка	повне прискорення, м/с^2
A	26,814
B	8,031
C	20,095
D	25,520

Проаналізувавши дані табл. 2.1.4–2.1.5 можна зробити висновок, що результати визначення повних прискорень руху усіх вузлових точок механізму за допомогою плану прискорень та миттєвого центру прискорень співпадають майже з 100% точністю. Величина відносної похибки не перевищує 0,04%, що пов'язано з округленням результатів розрахунків до третього розряду числа.

Оскільки результати розрахунків швидкостей руху точок механізму за допомогою миттєвого центру швидкостей та плану швидкостей, а також прискорення руху точок механізму за допомогою миттєвого центру прискорень та плану прискорень достатньо добре збігаються, то можна зробити висновок, що кінематичне дослідження руху плоского багатоланкового механізму виконано правильно.

Література

1. **Бутенин Н. В.** Курс теоретической механики: в 2 т. [Текст] / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб. : Лань, 2009. – 736 с.
2. **Яблонский А. А.** Курс теоретической механики. Статика и кинематика [Текст] / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб. : Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
3. **Павловський М. А.** Теоретична механіка [Текст] / М. А. Павловський. – К.: Техніка, 2002.
4. **Мещерский И. В.** Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для вузов по дисциплине "Теоретическая механика" [Текст] / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – СПб. : Лань, 2008. – 448 с.
5. **Яблонский А. А.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / А. А. Яблонский. – М. : КноРус, 2010. – 400 с.
6. **Тарг С. М.** Краткий курс теоретической механики [Текст] / С. М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2010. – 416 с.
7. **Бать М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1. Статика и кинематика. [Текст] / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб. : Лань, 2010. – 672 с.
8. **Бертяев В. Д.** Теоретическая механика на базе Mathcad. Практикум [Текст] / В. Д. Бертяев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
9. **Макаров Е. А.** Инженерные расчёты в Mathcad 15. Учебный курс.[Текст] / Е. А. Макаров. – СПб.: Питер, 2011. – 400 с.
10. **Фролов В. П.** Короткий довідник з теоретичної механіки (кінематика): методичні вказівки / В. П. Фролов, М. Р. Ткач. – Миколаїв: НУК, 2012. – 50 с.
11. **Ткач М. Р.** Теоретическая механика. Кинематика: Иллюстративные материалы / М. Р. Ткач, В. П. Фролов. – Миколаїв: НУК, 2014. – 60 с.

Зміст

Глава перша - Розрахунково-графічні завдання

ЗАВДАННЯ К1 – КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТОЧКИ ПО ЗАВДАННИМ РІВНЯННЯМ.....	3
ЗАВДАННЯ К2 – ПОСТУПАЛЬНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	5
ЗАВДАННЯ К3 – КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ПЛОСКОГО БАГАТОЛАНКОВОГО МЕХАНІЗМУ.....	10

Глава друга - Рішення РГЗ аналітичним методом

ЗАВДАННЯ К1 – КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТОЧКИ ПО ЗАВДАННИМ РІВНЯННЯМ.....	15
ЗАВДАННЯ К2 – ПОСТУПАЛЬНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	20
ЗАВДАННЯ К3 – КІНЕМАТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ПЛОСКОГО БАГАТОЛАНКОВОГО МЕХАНІЗМУ.....	26
Література	43