

ОБЪЕДИНЕННЫЙ СОВЕТ ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ
ПРИ РОСТОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

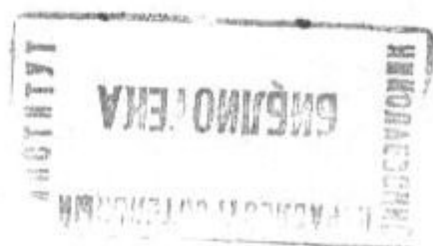
АВЕДИКОВ А. С.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СТРУЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой
степени кандидата физико-матема-
тических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор НИКИТИН А. К.



Ростов-на-Дону

1962 г.

Официальные оппоненты:

1. Доктор физико-математических наук,
профессор ГУРЕВИЧ М. И.
2. Доктор физико-математических наук,
профессор МОИСЕЕВ Н. Н.

Защита диссертации состоится *6 сентября* 1962 г.

Автореферат разослан *30 июля* 1962 г.

Плоская задача теории струй разработана достаточно подробно [1]. Наиболее полно вопрос о струйном истечении жидкости из сосудов рассмотрен в работе Н. Е. Жуковского [2]. Однако, как в работе Н. Е. Жуковского, так и в других работах, относящихся к этому же вопросу, предполагается, что сосуд бесконечно больших размеров и в далеких точках сосуда жидкость движется так, как если бы конечное отверстие было заменено точечным стоком. В настоящей работе мы, отказавшись от этой гипотезы, рассматриваем следующую задачу. Требуется определить струйное истечение жидкости из сосуда при заданном распределении скоростей на конечном расстоянии от отверстия. Эта задача решается как для случая несжимаемой жидкости, так и для газа.

Вторым основным вопросом, рассматриваемым в работе, является задача о пространственных осесимметричных струях. Методы, применяемые для решения плоских задач, основываются на хорошо разработанной теории функций комплексного переменного и использовании конформного отображения. Эти методы не удается перенести на случай пространственного течения. Этим отчасти объясняется тот факт, что задача о пространственных струях разработана значительно менее подробно. Поэтому одной из целей данной работы являлось развитие метода общего как для плоской, так и для пространственной задачи. В качестве такого метода в настоящей работе предлагается метод годографа скорости, примененный С. А. Чаплыгиным [3] для случая сжимаемой жидкости. В применении к плоской задаче этот метод имеет определенные вычислительные преимущества по сравнению с классическими методами [2]. Кроме того, он позволяет несколько расширить постановку задачи. Наконец, так как этот метод не связан с аппаратом конформных отображений, то он имеет известные перспективы для решения задач о пространствен-

ных струях. Результаты настоящей работы изложены в двух главах и приложении.

В первой главе диссертации рассматривается плоская задача о струйном истечении идеальной несжимаемой и невязкой жидкости из сосуда, ограниченного двумя бесконечными симметричными прямолинейными стенками. За независимые переменные задачи принимаются переменные годографа скорости: W — модуль вектора скорости и Θ — угол наклона его к оси симметрии.

В § 1 выводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют потенциал скорости φ , функция тока ψ , а также координаты x и y , рассматриваемые как функции независимых переменных W и Θ . Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial W} = \frac{1}{W} \left(\sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial W} - \cos \Theta \frac{\partial \psi}{\partial W} \right), & \frac{\partial x}{\partial \Theta} = \frac{1}{W} \left(\sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} - \cos \Theta \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} \right), \\ \frac{\partial y}{\partial W} = \frac{1}{W} \left(\sin \Theta \frac{\partial \psi}{\partial W} + \cos \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial W} \right), & \frac{\partial y}{\partial \Theta} = \frac{1}{W} \left(\sin \Theta \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} + \cos \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right); \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} + W \frac{\partial \psi}{\partial W} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} - W \frac{\partial \varphi}{\partial W} = 0. \quad (2)$$

Исключив φ из уравнений (2), получим для ψ такое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} + W^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial W^2} + W \frac{\partial \psi}{\partial W} = 0. \quad (3)$$

В § 2 определяются область изменения переменных W и Θ и граничные значения для функции тока ψ , соответствующие рассматриваемой задаче о струйном истечении жидкости. Ввиду симметричности задачи, движение рассматривается лишь в области справа от оси симметрии. Область изменения переменных W и Θ (W и Θ рассматриваются как декартовы координаты точки) в этом случае представляет прямоугольник, образованный прямыми $\Theta=0$, $\Theta=-\Theta_0$, $W=0$ и $W=W_0$. Здесь W_0 — скорость на свободной поверхности, а $2\Theta_0$ — угол между стенками сосуда. Считая, что секундный расход через отверстие сосуда $2Q$ задан, приходим к следующим граничным условиям для функции тока ψ :

$$\begin{array}{ll} \text{при } \Theta=0, & \psi=0, \\ \text{при } \Theta=-\Theta_0, & \psi=-Q, \\ \text{при } W=W_0, & \psi=-Q, \\ \text{при } W=0, & \psi=\frac{\Theta}{\Theta_0} Q. \end{array}$$

Первые три условия очевидны, а последнее выражает гипотезу, что в далеких от отверстия точках сосуда жидкость движется так, как если бы вместо отверстия конечных размеров находился точечный сток, соответствующей обильности.

В § 3-м решается задача о струйном истечении жидкости из сосуда, ограниченного двумя бесконечными симметричными стенками, в постановке Н. Е. Жуковского. Решение этой задачи получено в виде бесконечных рядов. Для некоторых значений Θ_0 , например, $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (щель в плоскости), полученные ряды суммируются и решение дается в конечной форме. Вычислен коэффициент сжатия струи и определена форма свободной поверхности. Полученные результаты совпадают с известным решением Н. Е. Жуковского. Рассмотрение этой задачи вызвано теми соображениями, что новая форма полученных решений, с одной стороны, является апробацией применяемого метода, выяснением его эффективности. С другой стороны, полученная форма решения неоднократно используется в работе для математического обоснования решения новых задач. Наконец, это решение является полной аналогией решения соответствующей пространственной задачи, рассмотренной во второй главе настоящей диссертации.

В § 4 обобщается задача о струйном истечении жидкости из сосудов. При рассмотрении таких задач обычно предполагается, что сосуд бесконечно большой, жидкость его полностью заполняет и в бесконечно далеких от отверстия точках она покоится. Такая схема вполне оправдывается, когда величина отверстия достаточно мала по сравнению с величиной заполненной части сосуда. При такой постановке задачи жидкость в сосуде играет как бы пассивную роль, она фактически всасывается из сосуда в окружающее пространство. Во многих реально осуществляемых и важных случаях дело обстоит несколько иначе. Сосуд — конечных размеров, а жидкость непрерывно поступает в него. Естественно, что характер движения жидкости в сосуде, а также форма струи и коэффициент сжатия будут в какой то мере зависеть от характера поступления жидкости в сосуд. Чтобы учесть влияние этого фактора, рассматривается следующая механическая схема. Предполагается, что вдоль некоторой, пока неизвестной, линии L , расположенной на конечном расстоянии от отверстия, задано распределение скоростей, соответствующее данному характеру поступления жидкости в сосуд. Это условие эквивалентно тому, что в плоскости годографа вдоль соответствующей линии L' задано значение функции тока ψ . В дальнейшем считаем, что линия L' и $f(W, \Theta)$ — значение

функции тока на ней известны. Эти условия, как показывается в работе, вполне определяют как течение жидкости, так и линию L , на которой осуществляется соответствующее распределение скоростей.

В работе подробно рассмотрен случай, когда линия L' представляет прямую $W = \tau = \text{const} < W_0$. В этом случае рассматриваемая механическая задача сводится к следующей краевой задаче, которую назовем задачей П. Требуется найти функцию тока ψ , удовлетворяющую уравнению (3) и граничным условиям:

$$\begin{array}{ll} \text{при } \Theta = 0, & \psi = 0, \\ \text{при } W = W_0, & \psi = -Q \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{при } \Theta = -\Theta_0, & \psi = -Q, \\ \text{при } W = \tau, & \psi = f(\Theta). \end{array}$$

Из механических соображений следует, что $f(\Theta)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. $f(\Theta)$ — непрерывная функция на $[0, -\Theta_0]$
2. $f(\Theta)$ — монотонная » » »
3. $f(0) = 0, \quad f(-\Theta_0) = -Q$.

Первое и третье условия очевидны. Второе условие отражает тот факт, что жидкость через линию L протекает в одном направлении, т. е. отсутствуют возвратные течения.

Для обоснования сходимости полученных решений на $f(\Theta)$ накладывается дополнительное ограничение — непрерывность первой производной.

В этом же параграфе доказывается единственность решения краевой задачи П.

В § 5 приводится решение задачи П в общем виде. Это решение получается в рядах. Затем по найденной функции тока ψ из соотношений (1) определяются x и y . С помощью результатов § 3 улучшается сходимость полученных рядов для случая истечения жидкости через щель в плоскости.

В § 6 доказывается сходимость полученных рядов для функции тока ψ и ее производных.

В § 7 рассмотрены четыре примера истечения жидкости через щель в плоскости, отвечающих одному из следующих граничных условий: вдоль линии $W = \frac{1}{2}W_0$ функция тока ψ равна f ($i = 1, 2, 3, 4$).

Здесь

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2Q}{\pi} \left(\Theta + \arctg \frac{\sin 2\Theta}{4 - \cos 2\Theta} \right), \quad f_2 = \frac{Q}{\pi} (2\Theta + \sin 2\Theta), \\ f_3 &= \frac{Q}{\pi} (2\Theta - \sin 2\Theta), \quad f_4 = \frac{2Q\Theta}{\pi}. \end{aligned} \quad (4)$$

$f_1(\Theta)$ — соответствует решению Н. Е. Жуковского. Соответствующие коэффициенты сжатия струи, вычисленные с точностью до трех знаков, имеют следующие значения:

$$K_1 = 0,611, \quad K_2 = 0,658, \quad K_3 = 0,507, \quad K_4 = 0,572. \quad (5)$$

Составлены графики. На графиках, в частности, показаны линии, вдоль которых в каждом из случаев скорость принимает данное значение $W = \frac{1}{2}W_0$.

Полученные результаты показывают, что на коэффициент сжатия струи существенное влияние оказывает характер подхода жидкости к отверстию.

В § 8 рассматривается плоская задача о газовых струях. Обобщение задачи о плоских струях несжимаемой жидкости, приведенное в § 4, переносится на случай газа. За исходное уравнение задачи принимается уравнение С. А. Чаплыгина [3]. Используются новые решения этого уравнения, указанные Л. Н. Сретенским [4]. Получено в общем виде решение задачи о газовых струях в обобщенной постановке.

Результаты первой главы можно использовать для приближенного расчета характеристик истечения струй из сосудов конечных размеров при заданном законе поступления жидкости в сосуд.

Во второй главе рассматривается задача о пространственных осесимметричных струйных течениях идеальной несжимаемой жидкости. Используется метод годографа скорости. В качестве независимых переменных задачи принимаются W — модуль вектора скорости и u — косинус угла наклона его к оси симметрии.

В § 1 выводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функция тока ψ , потенциал скоростей ϕ , цилиндрические координаты r и x , рассматриваемые как функции независимых переменных W и u . Эти уравнения оказываются нелинейными и имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{u}{W} \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{\sqrt{1-u^2}}{rW} \frac{\partial \psi}{\partial u}, & \frac{\partial r}{\partial u} &= -\frac{u}{rW} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\sqrt{1-u^2}}{W} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial W} &= \frac{u}{W} \frac{\partial \phi}{\partial W} - \frac{\sqrt{1-u^2}}{rW} \frac{\partial \psi}{\partial W}, & \frac{\partial r}{\partial W} &= -\frac{u}{rW} \frac{\partial \psi}{\partial W} - \frac{\sqrt{1-u^2}}{W} \frac{\partial \psi}{\partial W}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$(1-u^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial W} - \frac{\partial \psi}{\partial W} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + W r^2 \frac{\partial \psi}{\partial W} - r \sqrt{1-u^2} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \quad (7)$$

$$r \sqrt{1-u^2} \frac{\partial \psi}{\partial u} + W \frac{\partial \psi}{\partial W} = 0. \quad (8)$$

В § 2 рассматривается задача о струйном истечении жидкости из осесимметричной воронки. Определяются область изменения независимых переменных W , u и значение функции тока ψ на границе этой области. Если W и u рассматривать как декартовы координаты точки, то искомая область представляет прямоугольник, образованный прямыми $u=1$, $u=u_0$, $W=0$ и $W=W_0$. Здесь u_0 — косинус угла наклона образующей воронки к оси симметрии, а W_0 — скорость на свободной поверхности струи. Граничные значения для функции тока ψ при этом имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{при } u=1, \psi=0; \text{ при } u=u_0, \psi=-Q; \\ \text{при } W=0, \psi=-\frac{Q(1-u)}{1-u_0}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{при } W=W_0, \psi=-Q. \quad (10)$$

где $2\pi Q$ — секундный расход жидкости через отверстие воронки. Последнее из условий (9) соответствует гипотезе о том, что в далеких от отверстия точках жидкость движется так, как если бы вместо отверстия конечных размеров находился точечный сток.

В § 3 рассматривается задача об истечении жидкости из круглого отверстия в тонкой стенке (частный случай воронки при $u_0=0$). Здесь, как и выше, полагаем Q и W_0 равными единицами и определяем r_0 — радиус отверстия.

Так как в уравнения (7) и (8) кроме функций φ и ψ входит еще неизвестная функция r , то к этим уравнениям присоединим одно из уравнений (6) и после преобразования получим такую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (1-u^2) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial W} - \frac{\partial \psi}{\partial W} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) + W r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial W} - r \sqrt{1-u^2} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \\ r \sqrt{1-u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + W \frac{\partial \psi}{\partial W} = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{r^2(r^2)}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial W} - \frac{u}{W} \frac{\partial \psi}{\partial u}. \end{aligned} \quad (11)$$

Решение этой системы ищется в виде:

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k W^k, \quad \varphi = W^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k W^k, \quad r = W^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} r_k W^k, \quad (12)$$

где ψ_0 , φ_0 и r_0 — функции только u . Приводится обоснование принятой формы решения. Подставив φ , ψ и r из (12) в (11),

сбрав коэффициенты при одинаковых степенях W и приравняв их нулю, получим такую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\{ (1-u^2) \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi_k \psi'_{n-k} - k \varphi'_k \psi_{n-k} \right] + \left(k + \frac{1}{2} \right) \varphi_k R_{n-k} - \right. \\ \left. - \sqrt{1-u^2} r_k \psi_{n-k} \right\} = 0, \quad n \psi_n - \sqrt{1-u^2} \sum_{k=0}^n \varphi'_k r_{n-k} = 0, \quad (13) \\ \frac{1}{2} R_n = n \psi_n - u \psi'_n, \quad R_k = \sum_{m=0}^k r_m r_{k-m}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для определения φ_0 , ψ_0 , r_0 и R_0 из (13) получаем нелинейную систему уравнений, но решение ее очевидно, так как движение жидкости, соответствующее этому решению, представляет течение, вызванное точечным стоком. При $n=1, 2, \dots$ из (13) получаем линейную систему, которая легко интегрируется. Непосредственно проинтегрировав систему (13) для $n=1, 2, 3$, заключаем, что при указанных значениях n , решение для ψ_n , φ_n , r_n и R_n имеет структуру

$$\psi_n = u(1-u^2) M_2(n-1), \quad \varphi_n = M_{2n}, \quad r_n = \sqrt{1-u^2} M_{2n}, \quad R_n = (1-u^2) M_{2n}, \quad (14)$$

где M_p — полиномы степени p ($p=1, 2, 3, \dots$) — с коэффициентами, зависящими от постоянных a_k . При четном p эти полиномы содержат только четные степени u ; при нечетном p — соответственно нечетные степени u .

В § 4 методом полной математической индукции доказывается, что для любого n система (13) имеет такую же структуру решения, как и (14). Проведенный анализ показывает, что, как и в случае плоской задачи, ψ_k ($k=1, 2, \dots$) удовлетворяют условиям:

$$\psi_k(0) = \psi_k(1) = 0. \quad (15)$$

Условия (15), в сочетании со значением ψ_0 , обеспечивают выполнение граничных условий (9).

В § 5 определяются постоянные a_k . Их следует выбирать таким образом, чтобы удовлетворить граничному условию (10).

В дальнейшем решение задачи ищется приближенно. Назовем n -м приближением выражение:

$$\psi^{(n)} = \sum_{k=0}^n \psi_k W^k. \quad (16)$$

Обозначим через L_n интеграл от квадрата ошибки в выполнении граничного условия для функции $\psi^{(n)}$ при $W=1$, который является функцией от a_k . Величины a_k определяются из условия минимума L_n . Непосредственное определение a_k таким путем затруднительно, ввиду высокой степени получающихся уравнений (от n до $2n+1$). Учитывая структуру ψ_k , путем введения вспомогательных полиномов удастся несколько упростить вычисление a_k . Из линейной системы алгебраических уравнений определяются коэффициенты вспомогательных полиномов, а по ним из более простой системы алгебраических нелинейных уравнений определяются a_k . При $n=2, 3, \dots$ получается несколько решений для a_k . Из них выбираются такие, которые дают для γ сходящуюся последовательность.

В § 6 по полученным решениям для ϕ , ψ и γ из (6) определяется x как функция W и u . Выводятся контрольные соотношения для эффективной проверки правильности найденных решений.

Определяются γ_0 — радиус отверстия и K — коэффициент сжатия струи. Ограничиваясь в выражении γ двумя, тремя и четырьмя слагаемыми, получаем такую последовательность значений для γ_0 и K :

$$\begin{aligned} \gamma_0^1 &= 1,875, & \gamma_0^2 &= 1,8047, & \gamma_0^3 &= 1,8850 \\ K_1 &= 0,569, & K_2 &= 0,614, & K_3 &= 0,563 \end{aligned} \quad (16)$$

По полученным решениям для x и γ вычисляется поле скоростей в окрестности отверстия. Результаты вычислений сведены в соответствующие таблицы и показаны на графиках.

В приложении рассматривается поведение потенциала скоростей в бесконечно далеких точках сосуда для случая плоского и пространственного течений. Полученный анализ используется для обоснования характера разложения решений в ряды.

Основные результаты данной работы были доложены на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в гор. Москве в январе — феврале мес. 1962 г. [5] и изложены в статье [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. — Теория струй идеальной жидкости. Госиздат, физ.-мат. литературы, Москва, 1961 г.
2. Жуковский Н. Е. — Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Собр. соч., т. 2, Гостехиздат, 1949 г.
3. Чаплыгин С. А. — О газовых струях. Собр. соч., т. 2, Гостехиздат, 1948 г.
4. Сретенский Л. Н. — К теории газовых струй. ПММ, т. XXIII, в. 2, 1959 г.
5. Аведиков А. С. — Некоторые вопросы теории струй. Аннотации докладов. Всесоюзный съезд по теоретич. и прикладной механике. АН СССР, Москва, 1960 г.
6. Аведиков А. С. — К вопросу об истечении жидкости через круглое отверстие в тонкой стенке. Труды Ростовского инженерно-строит. института, вып. 10, Изд. Ростовского университета, 1960 г.