

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Р.І. ЗАРОСЬКИЙ, Ю.Є. ЦИБІН

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт з курсу
"Теорія ймовірностей і математична статистика"

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2004

Зароський Р.І., Цибін Ю.Є. Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з курсу "Теорія ймовірностей і математична статистика". – Миколаїв: НУК, 2004. – 64 с.

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки містять зразки розв'язування задач з докладними поясненнями з усіх основних розділів курсу і варіанти завдань з цих розділів. Наведено таблиці вихідних даних для варіантів завдань і таблиці стандартних статистичних розподілів та їхніх критичних значень.

Посібник може бути рекомендований студентам і викладачам стаціонарної та дистанційної форм навчання для проведення практичних і лабораторних робіт з курсу теорії ймовірностей і математичної статистики та виконання контрольних завдань і типових розрахунків з цього курсу.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. А.М. Кузнецов

1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Теорема додавання та множення ймовірностей

Основні розрахункові формули:

ймовірність події згідно з класичним означенням

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де m – число результатів випробувань, які сприяють появі даної події; n – загальне число рівно можливих і єдино можливих результатів випробувань;

ймовірність суми несумісних подій A і B

$$p(A + B) = p(A) + p(B);$$

ймовірність суми сумісних подій A і B

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B);$$

ймовірність добутку незалежних подій A і B

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B);$$

ймовірність добутку залежних подій A і B

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p_A(B) = p(B) \cdot p_B(A);$$

зв'язок між ймовірностями двох протилежних подій A і $\bar{A}$

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1.$$

Задача 1.1. В ящику лежать 15 коробок цукерок, причому п'ять з них – першого сорту, а решта – другого сорту. Визначити ймовірність того, що з чотирьох навмання виїнятих коробок принаймні одна виявиться першого сорту.

Розв'язання.

Перший спосіб

Нехай подія A_1 – одна з трьох виїнятих коробок буде першого сорту, подія A_2 – дві з трьох виїнятих коробок будуть першого сорту, подія A_3 – усі три виїняті коробки будуть першого сорту.

Із 15 коробок три можна вибрати C_{15}^3 способами, а з п'яти коробок першого сорту три можна вибрати C_5^3 способами. Тому ймовірність того, що усі три коробки будуть першого сорту, дорівнює

$$p(A_3) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Створити комбінацію з двох коробок першого сорту і однієї коробки другого сорту можна $C_5^2 \cdot C_{10}^1$ способами. Тому ймовірність того, що серед трьох виїнятих коробок дві будуть першого сорту

$$\text{і одна – другого, дорівнює } p(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}.$$

Аналогічно, створити комбінацію з однієї коробки першого сорту і двох коробок другого сорту можна $C_5^1 \cdot C_{10}^2$ способами. Тому ймовірність того, що серед трьох виїнятих коробок одна буде пер-

$$\text{шого сорту і дві – другого, дорівнює } p(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}.$$

Нехай подія B – серед виїнятих трьох коробок цукерок принаймні одна виявиться першого сорту. Тоді $B = A_1 + A_2 + A_3$, і за теоремою додавання ймовірностей

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = \frac{2}{91} + \frac{20}{91} + \frac{45}{91} = \frac{67}{91}.$$

Другий спосіб

Події B (хоча б одна з виїнятих коробок виявляється першого сорту) та $\bar{B}$ (жодна з виїнятих коробок не буде першого сорту) – протилежні, тому $p(B) + p(\bar{B}) = 1$. Звідси $p(B) = 1 - p(\bar{B})$, і, оскільки

ймовірність події $\bar{B}$ дорівнює $p(\bar{B}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$, маємо

$$p(B) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Задача 1.2. У ящику міститься 50 пляшок мінеральної води, з яких три – нестандартні. Знайти ймовірність того, що дві навмання взяті одна за одною пляшки виявляться нестандартними.

Розв'язання. Введемо позначення: подія A – перша взята навмання пляшка виявилася нестандартною, подія B – друга взята навмання пляшка – нестандартна, подія C – дві взяті навмання пляшки – нестандартні. Тоді $C = A \cdot B$. Події A і B залежні, тому ймовірність події C визначається за формулою $p(C) = p(A \cdot B) = p(A) \cdot p_A(B)$, де ймовірність того, що перша пляшка виявилася нестандартною, $p(A) = \frac{3}{50}$ і ймовірність того, що друга пляшка нестандартна за умови, що перша пляшка була нестандартною, $p_A(B) = \frac{2}{49}$.

$$\text{Остаточно, } p(C) = \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} \approx 0,0024.$$

Задача 1.3. На підприємстві встановлено три технологічні лінії з виробництва маргарину. Імовірність відмови першої лінії протягом місяця $p_1 = 0,2$, другої – $p_2 = 0,1$, третьої – $p_3 = 0,3$. Знайти ймовірність того, що протягом місяця відмовить хоча б одна лінія.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A_1 – безвідмовна робота першої лінії, $\bar{A}_1$ – відмова в роботі першої лінії, A_2 – безвідмовна робота другої лінії, $\bar{A}_2$ – відмова в роботі другої лінії, A_3 – безвідмовна робота третьої лінії, $\bar{A}_3$ – відмова в роботі третьої лінії, A – безвідмовна робота усіх трьох ліній, $\bar{A}$ – відмова хоча б однієї лінії (подія, протилежна до A). Очевидно, $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Події A_1, A_2, A_3 – взаємно незалежні, тому за теоремою множення

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = \\ &= (1 - p(\bar{A}_1)) \cdot (1 - p(\bar{A}_2)) \cdot (1 - p(\bar{A}_3)) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = \\ &= 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504. \end{aligned}$$

Імовірність того, що протягом місяця відмовить хоча б одна лінія

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,504 = 0,496.$$

Задача 1.4. Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Імовірності того, що формула є у першому, другому, третьому довіднику, відповідно дорівнюють $p_1 = 0,6$; $p_2 = 0,7$; $p_3 = 0,8$. Знайти ймовірність того, що формула є: 1) тільки в одному довіднику; 2) тільки у двох довідниках; 3) в усіх трьох довідниках.

Розв'язання. Введемо позначення подій: A_1 – формула є тільки в одному довіднику, A_2 – формула є тільки у двох довідниках, A_3 – формула є в усіх трьох довідниках, B_i – формула є в i -му довіднику, $\bar{B}_i$ – формули немає в i -му довіднику, $i = 1, 2, 3$. Тоді

$$A_1 = B_1\bar{B}_2\bar{B}_3 + \bar{B}_1B_2\bar{B}_3 + \bar{B}_1\bar{B}_2B_3,$$

$$A_2 = B_1B_2\bar{B}_3 + B_1\bar{B}_2B_3 + \bar{B}_1B_2B_3, \quad A_3 = B_1B_2B_3.$$

У кожній з рівностей події, що додаються, попарно несумісні, тому

$$p(A_1) = p(B_1\bar{B}_2\bar{B}_3) + p(\bar{B}_1B_2\bar{B}_3) + p(\bar{B}_1\bar{B}_2B_3),$$

$$p(A_2) = p(B_1B_2\bar{B}_3) + p(B_1\bar{B}_2B_3) + p(\bar{B}_1B_2B_3), \quad p(A_3) = p(B_1B_2B_3).$$

Кожні три події в цих добутках незалежні в сукупності, тому

$$\begin{aligned} 1) \quad p(A_1) &= p(B_1)p(\bar{B}_2)p(\bar{B}_3) + p(\bar{B}_1)p(B_2)p(\bar{B}_3) + p(\bar{B}_1)p(\bar{B}_2)p(B_3) = \\ &= p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) + (1-p_1)(1-p_2)p_3 = \\ &= 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad p(A_2) &= p(B_1)p(B_2)p(\bar{B}_3) + p(B_1)p(\bar{B}_2)p(B_3) + p(\bar{B}_1)p(B_2)p(B_3) = \\ &= p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3 = \\ &= 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452; \end{aligned}$$

$$3) \quad p(A_3) = p(B_1)p(B_2)p(B_3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

1.2. Формула повної ймовірності та формула Байєса

Основні розрахункові формули:
формула повної ймовірності

$$p(A) = \sum_{i=1}^n p(H_i) \cdot p_{H_i}(A),$$

де $\sum_{i=1}^n p(H_i) = 1$, тобто гіпотези H_i утворюють повну групу;
формула Байєса

$$p(H_k) = \frac{p(H_i) \cdot p_{H_k}(A)}{p(A)},$$

де $p(A)$ – повна ймовірність події A .

Задача 1.5. Є три однакових контейнери, що містять пляшки з пивом. У першому контейнері – 2 % нестандартних пляшок, у другому – 3 %, у третьому – 1 %. Із навмання вибраного контейнера беруть одну пляшку. Обчислити ймовірність того, що вона виявиться нестандартною. Якщо вона виявиться нестандартною, яка ймовірність того, що цю пляшку взято з другого контейнера?

Розв'язання. Подія A – вилучена пляшка нестандартна. Гіпотези: H_1 – пляшка вилучена з першого контейнера, H_2 – з другого, H_3 – з третього. Ці гіпотези утворюють повну групу подій. Оскільки вони

рівно ймовірні, то $p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{3}$. За умовою задачі ймовірність вилучити нестандартну пляшку з кожного контейнера відповідно дорівнює $p_{H_1}(A) = 0,02$; $p_{H_2}(A) = 0,03$; $p_{H_3}(A) = 0,01$.

За формулою повної ймовірності

$$\begin{aligned} p(A) &= p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) + p(H_3) \cdot p_{H_3}(A) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0,02 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 + \frac{1}{3} \cdot 0,01 = 0,02. \end{aligned}$$

Далі необхідно знайти $p_A(H_2)$ – ймовірність того, що нестандартну пляшку вилучено з другого контейнера. За формулою Байєса

са маємо

$$p_A(H_2) = \frac{p(H_2) \cdot p_{H_2}(A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,03}{0,02} = 0,5.$$

1.3. Формула Бернуллі. Локальна й інтегральна теореми Лапласа

Основні розрахункові формули:

формула Бернуллі (ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях зі сталою ймовірністю появи в кожному з них події A ця подія з'явиться k разів)

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де p – ймовірність появи події A в одному випробуванні та $q = 1 - p$;
локальна теорема Лапласа (наближене значення вказаної ймовірності $p_n(k)$ у випадку великих значень n)

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

де $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ і $\varphi(x)$ – функція Гаусса (дод. 1);

інтегральна теорема Лапласа (ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях зі сталою ймовірністю появи в кожному з них події A ця подія настане не менше k_1 разів і не більше k_2 разів)

$$p_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ і $\Phi(x)$ – функція Лапласа (дод. 2).

Задача 1.6. Система складена з $n = 10$ блоків. Кожний блок може виходити з ладу незалежно один від одного з ймовірністю $p = 0,2$. Знайти ймовірність того, що: 1) відмовлять два блоки; 2) відмовлять менше двох блоків; 3) відмовлять не менше двох блоків; 4) відмовить хоча б один блок.

Розв'язання. Враховуючи задану ймовірність відмови блока, за-

пишемо ймовірність його справного функціонування: $q = 1 - p = 0,8$. Тоді, позначивши через $P_n(m = k)$ ймовірність відмови k блоків, згідно з формулою Бернуллі маємо:

$$1) P_{10}(m = 2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = C_{10}^2 \cdot (0,2)^2 \cdot (0,8)^8 = 0,202;$$

$$2) P_{10}(m < 2) = P_{10}(m = 0) + P_{10}(m = 1) = C_{10}^0 \cdot (0,2)^0 \cdot (0,8)^{10} + C_{10}^1 \cdot (0,2)^1 \cdot (0,8)^9 = 0,107 + 0,269 = 0,376;$$

$$3) P_{10}(m \geq 2) = 1 - P_{10}(m < 2) = 1 - 0,376 = 0,624;$$

$$4) P_{10}(m \geq 1) = 1 - P_{10}(m = 0) = 1 - 0,107 = 0,893.$$

Задача 1.7. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться 80 разів у 400 незалежних випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

Розв'язання. За умовою $p = 0,2$; $q = 1 - 0,2 = 0,8$; $n = 400$; $k = 80$. Користуючись таблицею значень функції Гаусса (див. дод. 1) і локальною теоремою Лапласа, знайдемо

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 0;$$

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,0499.$$

Задача 1.8. Імовірність того, що деталь не пройшла контролю якості $p = 0,2$. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей виявляться неперевіреними від 70 до 100 деталей.

Розв'язання. За умовою $p = 0,2$; $q = 1 - 0,2 = 0,8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$. Користуючись таблицею значень функції Лапласа (див. дод. 2) і інтегральною теоремою Лапласа, знайдемо

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -\frac{5}{4}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{5}{2};$$

$$P_{400} = (70; 100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

1.4. Дискретні випадкові величини та їхні числові характеристики

Основні теоретичні відомості й розрахункові формули:
закон розподілу дискретної випадкової величини (ДВВ) X

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_k	$\sum_{i=1}^k p_i = 1;$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_k	

інтегральна функція розподілу ДВВ X

$$F(x) = p(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i;$$

математичне сподівання ДВВ X

$$M(X) = m = \sum_{i=1}^k x_i p_i;$$

дисперсія ДВВ X

$$D(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - m)^2 p_i, \quad \text{або} \quad D(X) = \sum_{i=1}^k x_i^2 p_i - m^2;$$

середньоквадратичне відхилення ДВВ X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)};$$

ймовірність того, що значення X попаде в інтервал $k_1 < X < k_2$,

$$p(k_1 < X < k_2) = \sum_{k_1 < x_i < k_2} p_i.$$

Задача 1.9. У комплекті є шість коробок цукерок, з яких чотири коробки з шоколадними цукерками. Навмання відібрано три коробки. Потрібно скласти закон розподілу числа коробок з шоколадними цукерками серед відібраних, побудувати багатокутник розподілу одержаної вказаним чином ДВВ, знайти її математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення, обчислити ймовірність того, що буде відібрано не менше двох коробок з шоколадними цукерками.

Розв'язання. За умовою маємо ДВВ з гіпергеометричним розпо-

ділом імовірностей її окремих значень: $p(X=0)=0$; $p(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}$; $p(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$; $p(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot C_2^0}{C_6^3} = \frac{1}{5}$. Шуканий закон розподілу:

X	0	1	2	3
P	0	0,2	0,6	0,2

Багатокутник розподілу ймовірностей побудований на рис. 1.1.

Знайдемо числові характеристики поданої ДВВ:

а) математичне сподівання

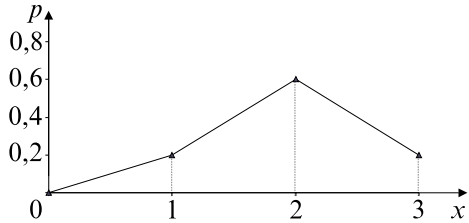


Рис. 1.1

$$M(X) = m = \sum_{i=0}^3 x_i p_i = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,2 = 2,0;$$

б) дисперсію

$$D(X) = \sum_{i=0}^3 x_i^2 p_i - m^2 = 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,6 + 3^2 \cdot 0,2 - 2^2 = 0,4;$$

в) середньоквадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,4} = 0,63.$$

Імовірність того, що буде відібрано не менше двох коробок з шоколадними цукерками, дорівнює $p(X \geq 2) = p(X=2) + p(X=3) = 0,6 + 0,2 = 0,8$.

1.5. Неперервні випадкові величини та їхні числові характеристики

Основні теоретичні відомості й розрахункові формули:

основна властивість диференціальної функції розподілу (щільності розподілу) неперервної випадкової величини (НВВ) X

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1;$$

зв'язок між диференціальною й інтегральною функціями розподілу НВВ X

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx; \quad f(x) = F'(x);$$

математичне сподівання НВВ X

$$M(X) = m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx;$$

дисперсія НВВ X

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad \text{або} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - m^2;$$

середньоквадратичне відхилення НВВ X

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)};$$

імовірність того, що значення X попаде в інтервал $x_1 < X < x_2$,

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx.$$

Задача 1.10. НВВ задано наступною диференціальною функцією розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } x \in [1; 3]; \\ 0 & \text{при } x \notin [1; 3]. \end{cases}$$

Потрібно записати інтегральну функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей, побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$, знайти математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення величини X , обчислити ймовірність того, що значення величини X належать інтервалу $(0; 1,5)$.

Розв'язання. Інтегральну функцію розподілу ймовірностей знай-

демо за співвідношенням $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1; \\ 0,5(x-1) & \text{при } 1 \leq x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Будуємо графіки диференціальної та інтегральної функцій розподілу (рис. 1.2, 1.3).

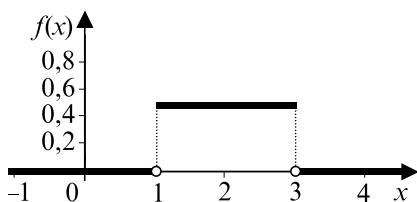


Рис. 1.2

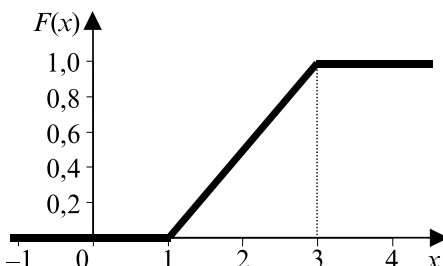


Рис. 1.3

Обчислюємо числові характеристики заданої НВВ:

а) математичне сподівання

$$M(X) = m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^3 0,5 x dx = 0,5 \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 2,0;$$

б) дисперсію

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - m^2 = \int_1^3 0,5 x^2 dx - 4,0 = 0,5 \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 - 4,0 = 0,33;$$

в) середньоквадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,33} = 0,58.$$

Імовірність того, що значення величини X належать інтервалу $(0; 1,5)$, дорівнює $p(0 < X < 2) = \int_0^{1,5} f(x) dx = \int_1^{1,5} 0,5 dx = 0,5 x \Big|_1^{1,5} = 0,25$.

Задача 1.11. Щільність розподілу ймовірностей деякої НВВ подано функцією $f(x) = \gamma e^{-2x^2 + 6x - 4}$. Потрібно визначити значення γ , знайти математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення величини X , записати інтегральну функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей, обчислити ймовірність належності значення величини X інтервалу $(0,5; 1,5)$.

Розв'язання. Порівнюючи задану щільність розподілу

$$f(x) = \gamma e^{-2x^2 + 6x - 4} = \gamma e^{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \gamma e^{\frac{1}{2}} e^{-2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$$

зі щільністю нормально розподіленої НВВ $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$,

знайдемо, що $m = \frac{3}{2}$, $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \gamma e^{\frac{1}{2}}$, $2\sigma^2 = \frac{1}{2}$, звідки $\sigma = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}$.

Таким чином, маємо $\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi e}}$; $M(X) = m = \frac{3}{2}$; $D(X) = \sigma^2 = \frac{1}{4}$.

Інтегральна функція розподілу даної НВВ, як величини, розподіленої за нормальним законом, набуває наступного вигляду:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad \text{або} \quad F(x) = 0,5 + \Phi(2x - 3),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа (див. дод. 2).

Ймовірність того, що значення величини X належать інтервалу $(0,5; 1,5)$, обчислюємо за формулою

$$p(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right);$$

$$p(0,5 < X < 1,5) = \Phi\left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \Phi(0) - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0,477.$$

2. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

2.1. Опис та статистична обробка даних

Вся досліджувана сукупність об'єктів (кількістю N) називається *генеральною сукупністю*. Частина об'єктів кількістю n ($n \leq N$), випадково відібрана з генеральної сукупності, називається *вибірковою сукупністю* або *вибіркою*.

Нехай над випадковою величиною X проведено n незалежних випробувань, і $x_1, x_2, \dots, x_n$ – сукупність її спостережених значень. Цю сукупність називають *статистичним рядом*, а x_i – *варіантами*. Серед варіант можуть бути однакові. Якщо кожній варіанті поставити у відповідність її частоту (кількість повторень) n_i , а також відносну частоту $P_i^* = \frac{n_i}{n}$, а самі варіанти записати у зростаючому (спадяючому) порядку, одержана таким чином таблиця називається *варіаційним рядом*.

Статистичною (емпіричною) функцією розподілу $F^*(x)$ випадкової величини X називається закон зміни відносної частоти нерівності $X < x$ в даному статистичному матеріалі:

$$F^*(x) = P^*(X < x).$$

Якщо об'єм вибірки n великий, доцільно весь інтервал одержаних значень величини X розбити на часткові (як правило, рівні) інтервали $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_k, x_{k+1})$. Позначимо через n_i число значень величини X , що попали в інтервал (x_i, x_{i+1}) . Для кожного інтервалу визначимо також відносну частоту $P_i^* = \frac{n_i}{n}$. В результаті одержимо таблицю, яку називають *інтервальним варіаційним рядом*:

I	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	...	(x_i, x_{i+1})	...	(x_k, x_{k+1})
N	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k
P^*	P_1^*	P_2^*	...	P_i^*	...	P_k^*

Якщо на кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, як на основі, побудувати прямокутник, висота якого дорівнює P_i^* , одержимо фігуру, що називається *гістограмою*. Вважаємо при цьому, що крок $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$. Якщо наближати $h \rightarrow 0$, то гістограма буде все більше на-

ближатися до деякої кривої. Ця крива є графіком певної функції $f(x)$, яку називають *щільністю розподілу* випадкової величини X .

Задача 2.1. Задано наступну вибірку об'єму $n = 170$:

187	193	199	197	196	184	200	193	198	191	193	188
193	195	197	199	202	193	190	197	195	182	201	202
184	197	205	178	191	200	223	188	192	188	194	183
207	183	195	184	175	195	212	197	194	184	175	198
189	194	185	213	192	200	194	173	206	163	204	174
183	199	203	185	199	196	196	188	169	196	190	205
189	189	190	175	190	193	209	190	183	191	193	191
190	192	191	185	202	173	184	176	199	182	186	189
193	185	168	192	193	205	171	193	191	206	187	193
192	189	191	190	182	194	194	197	207	198	180	175
193	191	188	187	191	191	192	192	214	171	208	185
195	190	214	193	183	193	193	187	198	203	181	173
189	195	180	180	205	194	179	191	201	195	195	189
185	199	194	187	173	211	190	165	182	182	194	168
176	192										

Потрібно провести статистичну обробку даної сукупності значень і з цією метою побудувати:

- 1) варіаційний ряд;
- 2) інтервальний варіаційний ряд;
- 3) гістограму та криву щільності розподілу;
- 4) статистичну функцію розподілу $F^*(x)$ та її графік.

Розв'язання. 1. Впорядкуємо задану сукупність за зростанням значень і, враховуючи кількість повторів кожного значення, складемо наступний варіаційний ряд:

x_i	163	165	168	169	171	173	174	175	176	178	179	180	181	182	183	184	185
n_i	1	1	2	1	2	4	1	4	2	1	1	3	2	4	6	5	6
x_i	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202
n_i	1	5	5	7	9	11	9	14	8	8	4	6	4	6	3	2	4
x_i	203	204	205	206	207	208	209	211	212	213	214	223					
n_i	1	1	4	2	2	1	1	1	1	1	2	1					

2. $x_{\min} = 163$, $x_{\max} = 223$, $n = 170$. Для побудови інтервального ряду вибираємо крок h за формулою

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,32 \cdot \lg n}; \quad h = \frac{223 - 163}{1 + 3,32 \cdot \lg 170} = \frac{60}{1 + 3,32 \cdot 2,23} = 7,14.$$

Взявши $h = 7$ і підрахувавши для кожного інтервалу відносну частоту $P_i^* = \frac{n_i}{n}$, одержуємо наступний інтервальний варіаційний ряд:

I_i	163... ...170	170... ...177	177... ...184	184... ...191	191... ...198	198... ...205	205... ...212	212... ...219	219... ...226
n_i	5	13	17	38	60	21	11	4	1
P_i^*	0,029	0,076	0,100	0,224	0,353	0,124	0,065	0,023	0,006

3. За одержаними даними складемо гістограму (краще це зробити на міліметровому папері) і побудуємо приблизну криву щільності статистичного розподілу $f(x)$ (рис. 2.1).

4. Знаходимо статистичну функцію розподілу $F^*(x)$:

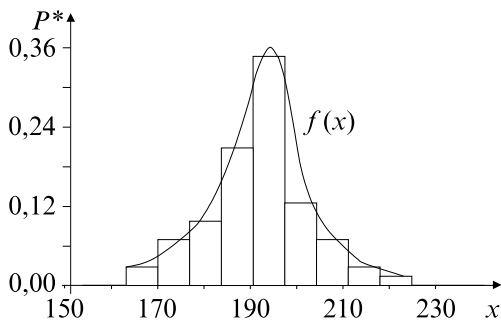


Рис. 2.1

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 163; \\ 0,029 & \text{при } 163 < x \leq 170; \\ 0,029 + 0,076 = 0,105 & \text{при } 170 < x \leq 177; \\ 0,105 + 0,100 = 0,205 & \text{при } 177 < x \leq 184; \\ 0,205 + 0,224 = 0,429 & \text{при } 184 < x \leq 191; \\ 0,429 + 0,353 = 0,782 & \text{при } 191 < x \leq 198; \\ 0,782 + 0,124 = 0,906 & \text{при } 198 < x \leq 205; \\ 0,906 + 0,065 = 0,971 & \text{при } 205 < x \leq 212; \\ 0,971 + 0,023 = 0,994 & \text{при } 212 < x \leq 219; \\ 0,994 + 0,006 = 1,0 & \text{при } x > 219. \end{cases}$$

За цими даними будуюмо графік статистичної функції розподілу $F^*(x)$ (рис. 2.2). Як бачимо, він носить ступінчатий (східчастий) характер.

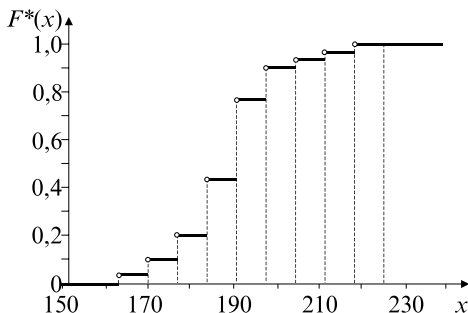


Рис. 2.2

2.2. Основні числові характеристики вибірки

Задача 2.2. Для кількісної ознаки у вибірці, яка розглянута в задачі 2.1, використовуючи побудовані в ній варіаційний та інтервальний варіаційний ряди, знайти наступні характеристики: 1) вибіркове середнє; 2) дисперсію; 3) середньоквадратичне відхилення; 4) моду; 5) медіану; 6) коефіцієнт варіації.

Розв'язання.

Варіаційний ряд (див. с. 16)

1. Вибіркове середнє

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{46} x_i n_i}{n} = \\ &= \frac{163 \cdot 1 + 165 \cdot 1 + 168 \cdot 2 + 169 \cdot 1 + \dots + 212 \cdot 1 + 213 \cdot 1 + 214 \cdot 2 + 223 \cdot 1}{170} = \\ &= \frac{32464}{170} = 190,96 \approx 191,0.\end{aligned}$$

Цю ж величину можна отримати за формулою $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - C) n_i + C$, де за значення "хибного нуля" C найкраще взяти варіанту з максимальною частотою: $C = 193$. Тоді

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{(-30) \cdot 1 + (-28) \cdot 1 + (-25) \cdot 2 + (-24) \cdot 1 + \dots + 19 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 21 \cdot 2 + 30 \cdot 1}{170} + \\ &+ 193 = \frac{-346}{170} + 193 = 190,96 \approx 191,0.\end{aligned}$$

2. Дисперсію знайдемо за формулою

$$\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - C)^2 n_i - (\bar{x} - C)^2;$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{46} (x_i - C)^2 n_i}{n} - (\bar{x} - C)^2 = \frac{900 \cdot 1 + 784 \cdot 1 + 625 \cdot 2 + 576 \cdot 1}{170} + \dots + \\ &+ \frac{361 \cdot 1 + 400 \cdot 1 + 441 \cdot 2 + 900 \cdot 1}{170} - (191 - 193)^2 = \\ &= \frac{17964}{170} - 4 = 105,67 - 4 = 101,67. \end{aligned}$$

3. Середньоквадратичне відхилення

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma}^2} = \sqrt{101,67} \approx 10,1.$$

4. Мода вибірки для варіаційного ряду є значенням варіанти з максимальною частотою: $M_o = 193$.

5. Медіана вибірки – це значення середнього елемента варіаційного ряду при непарній кількості елементів і середньоарифметичне двох середніх елементів при їхній парній кількості:

$$Me = \frac{x_{23} + x_{24}}{2} = 191,5.$$

6. Коефіцієнт варіації $V = \frac{\overline{\sigma}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{10,1}{191} \cdot 100\% = 5,3\%$.

Інтервальный варіаційний ряд (див. с. 17)

1. Вибіркове середнє обчислюємо за формулою $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$, в якій за варіанти x_i беруть середини інтервалів. Тоді

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^9 x_i n_i = \frac{166,5 \cdot 5 + 173,5 \cdot 13 + 180,5 \cdot 17 + 187,5 \cdot 38 + 194,5 \cdot 60}{170} + \\ &+ \frac{201,5 \cdot 21 + 208,5 \cdot 11 + 215,5 \cdot 4 + 222,5 \cdot 1}{170} = \frac{32561}{170} = 191,5. \end{aligned}$$

2. Дисперсія

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{625 \cdot 5 + 324 \cdot 13 + 121 \cdot 17 + 16 \cdot 38 + 9 \cdot 60 + 100 \cdot 21}{170} + \\ &+ \frac{289 \cdot 11 + 576 \cdot 4 + 964}{170} = \frac{19089}{170} = 112,27.\end{aligned}$$

3. Середньоквадратичне відхилення

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma}^2} = \sqrt{112,27} \approx 10,6.$$

4. Мода інтервального ряду $Mo = x_0 + h \cdot \frac{n_s - n_{s-1}}{(n_s - n_{s-1}) + (n_s - n_{s+1})}$,

де $x_0 = 191$ – початок модального інтервалу; $h = 7$ – крок інтервального ряду; $n_s = 60$ – частота модального інтервалу; $n_{s-1} = 38$ – частота інтервалу, що передує модальному; $n_{s+1} = 21$ – частота наступного за модальним інтервалу.

Тому

$$Mo = 191 + 7 \cdot \frac{60 - 38}{(60 - 38) + (60 - 21)} = 191 + 7 \cdot \frac{22}{22 + 39} = 193,5.$$

5. Медіану дістанемо за формулою

$$Me = x_0 + h \cdot \frac{n/2 - T_{s-1}}{n_s},$$

де $x_0 = 191$ – початок медіанного інтервалу (191...198), тобто інтервалу, в якому утримується середній елемент $\bar{x} = 191,5$; $h = 7$; $n = 170$; $T_{s-1} = 5 + 13 + 17 + 38 = 73$ – сума частот інтервалів, які передують медіанному; $n_s = 60$ – частота медіанного інтервалу.

$$\text{Отже, } Me = 191 + 7 \cdot \frac{85 - 73}{60} = 191 + 7 \cdot \frac{22}{60} \approx 193,6.$$

$$6. \text{ Коефіцієнт варіації } V = \frac{\overline{\sigma}}{\bar{x}} \cdot 100 \% = \frac{10,6}{191,54} \cdot 100 \% = 5,5 \%,$$

2.3. Розрахунок числових характеристик вибірки з використанням умовних варіант і методу добутоків

Для варіаційного ряду, який містить варіанти, рівновіддалені одна від одної, розрахунок числових характеристик вибірки спрощується, якщо застосовувати умовні варіанти. Ці варіанти визначаються формулою

$$u_i = \frac{x_i - C}{h},$$

де C – "хибний нуль" (значення C звичайно вибирають найближче до середини варіаційного ряду і, можливо, таке, що має найбільшу частоту); h – крок варіаційного ряду.

Використовуючи значення умовних варіант u_i , обчислюють так звані умовні моменти чотирьох порядків за формулами

$$M_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i n_i; \quad M_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i^2 n_i;$$

$$M_3^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i^3 n_i; \quad M_4^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k u_i^4 n_i,$$

і потім центральні моменти другого, третього і четвертого порядків за формулами

$$m_2 = (M_2^* - (M_1^*)^2) h^2;$$

$$m_3 = (M_3^* - 3 M_2^* M_1^* + 2(M_1^*)^3) h^3;$$

$$m_4 = (M_4^* - 4 M_3^* M_1^* + 6 M_2^* (M_1^*)^2 - 3(M_1^*)^4) h^4.$$

Користуючись наведеними умовними моментами першого і другого порядків, визначають

$$\text{вибіркове середнє} \quad \bar{x} = M_1^* h + C;$$

$$\text{вибіркову дисперсію} \quad \bar{\sigma}^2 = (M_2^* - (M_1^*)^2) h^2 = m_2;$$

$$\text{середньоквадратичне відхилення} \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2}.$$

Крім того, за допомогою центральних моментів третього і четвертого порядків знаходять додаткові характеристики вибіркового розподілу:

коефіцієнт схилення (асиметрії) $a_s = \frac{m_3}{\sigma^3}$;

коефіцієнт гостровершинності (ексцесу) $e_k = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$.

Задача 2.3. Застосовуючи для побудованого у задачі 2.1 інтервального варіаційного ряду умовні варіанти й метод добутків, обчислити: вибіркове середнє, вибірккову дисперсію, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт схилення (асиметрії), коефіцієнт гостровершинності (ексцесу).

Розв'язання. За початкові значення варіант x_i візьмемо середини інтервалів, а за "хибний" нуль – значення $C = 194,5$. Для розрахунку умовних моментів складемо табл. 2.1.

Таблиця 2.1

i	I_i	x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$
1	163...170	166,5	5	-4	-20	80	-320	1280
2	170...177	173,5	13	-3	-39	117	-351	1053
3	177...184	180,5	17	-2	-34	68	-136	272
4	184...191	187,5	38	-1	-38	38	-38	38
5	191...198	194,5	60	0	0	0	0	0
6	198...205	201,5	21	1	21	21	21	21
7	205...212	208,5	11	2	22	44	88	176
8	212...219	215,5	4	3	12	36	108	324
9	219...226	222,5	1	4	4	16	64	256
Сума			170		-72	420	-564	3420

Після заповнення цієї таблиці підрахуємо потрібні суми по відповідних стовпчиках і визначимо умовні й центральні моменти, враховуючи при цьому, що крок варіаційного ряду $h = 7$:

$$M_1^* = \frac{1}{170} \cdot (-72) = -0,42; \quad M_2^* = \frac{1}{170} \cdot 420 = 2,47;$$

$$M_3^* = \frac{1}{170} \cdot (-564) = -3,32; \quad M_4^* = \frac{1}{170} \cdot 3420 = 20,12.$$

$$m_2 = (2,47 - (-0,42)^2) \cdot 7^2 = 112,27;$$

$$m_3 = (-3,32 - 3 \cdot 2,47 \cdot (-0,42) + 2 \cdot (-0,42)^3) \cdot 7^3 = -113,36;$$

$$m_4 = (20,12 - 4 \cdot (-3,32) \cdot (-0,42) + 6 \cdot 2,47 \cdot (-0,42)^2 - \\ - 3 \cdot (-0,42)^4) \cdot 7^4 = 40960,19.$$

Обчислимо необхідні вибіркові характеристики:

$$\bar{x} = M_1^* h + C = -0,42 \cdot 7 + 194,5 = 191,54;$$

$$\bar{\sigma}^2 = m_2 = 112,27;$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2} = \sqrt{112,27} = 10,60;$$

$$a_s = \frac{m_3}{\bar{\sigma}^3} = \frac{-113,36}{10,6^3} = -0,095;$$

$$e_k = \frac{m_4}{\bar{\sigma}^4} - 3 = \frac{40960,19}{10,6^4} - 3 = 0,250.$$

Аналіз одержаних статистичних характеристик свідчить про те, що даний вибірковий розподіл є майже симетричним, незначно від'ємно (у лівий бік) схиленим і трохи гостровершинним.

2.4. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності

Якщо закон розподілу генеральної сукупності невідомий, але є підстава припустити, що він має деякий визначений вид A , то перевіряють нульову гіпотезу: генеральна сукупність розподілена за законом A . Перевірка цієї гіпотези здійснюється за допомогою спеціально підібраної величини – критерію узгодження.

Для перевірки гіпотези про нормальний розподіл використовується критерій узгодження Пірсона. Сутність перевірки полягає в тому, щоб порівняти емпіричні (спостережені) і теоретичні (обчислені за припущенням наявності нормального розподілу) частоти. Як критерій перевірки нульової гіпотези (H_0 : генеральна сукупність розподілена за нормальним законом) приймається випадкова величина χ^2 :

$$\chi_{\text{спост}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i},$$

де n_i – емпіричні частоти; $\tilde{n}_i$ – теоретичні частоти нормального розподілу; k – кількість інтервалів варіаційного ряду, побудованого за даними вибірки.

Чим менше розрізняються емпіричні й теоретичні частоти, тим менше величина χ^2 . Таким чином, критерій характеризує близькість теоретичного й емпіричного розподілів.

Критичне значення (межу правобічної критичної області) $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha; r)$ знаходять за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (дод. 3) з використанням двох параметрів – заданого рівня значимості α і числа ступенів вільності $r = k - 3$ (k – кількість інтервалів варіаційного ряду). У випадку, якщо спостережене значення критерію $\chi^2_{\text{спост}}$ виявиться меншим, ніж $\chi^2_{\text{крит}}$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Якщо ж $\chi^2_{\text{спост}}$ буде більшим за $\chi^2_{\text{крит}}$, то нульову гіпотезу слід відкинути й прийняти альтернативу H_1 : розподіл генеральної сукупності не відповідає нормальному закону.

Задача 2.4. Для заданої в п. 2.1 вибірки, використовуючи побудований в задачі 2.1 інтервальний варіаційний ряд, при рівні значимості $\alpha = 0,02$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл імовірностей досліджуваної ознаки в генеральній сукупності її значень.

Розв'язання. Скористаємось відповідним інтервальним варіаційним рядом (див. с. 17) і підрахованими під час розв'язання задачі 2.3 значеннями вибіркового середнього й середньоквадратичного відхилення: $\bar{x} = 191,54$; $\bar{\sigma} = 10,6$.

Розрахунки, що пов'язані з обчисленням теоретичних частот і спостереженого значення $\chi^2_{\text{спост}}$, зведемо до табл. 2.2, другий і третій стовпці якої візьмемо з табл. 2.1 (x_i – середини інтервалів і n_i – частоти, що відповідають кожному інтервалу). Три наступні стовпці поспіль заповнюємо значеннями $u_i = x_i - \bar{x}$ (відхиленнями x_i від вибіркового середнього), $t_i = u_i / \bar{\sigma}$ (нормованими відхиленнями) і $f(t_i)$ (значеннями функції щільності розподілу ймовірностей нормального закону, які у відповідності до значень аргументу знаходимо в дод. 1).

Теоретичні частоти n'_i підраховуємо за співвідношенням

$$n'_i = \frac{n \cdot h}{\bar{\sigma}} f(t_i),$$

де $n = 170$ – об'єм вибірки; $h = 7$ – довжина інтервалу варіаційного ряду.

Одержані значення n'_i підлягають округленню, і стовпець $\tilde{n}_i$ містить цілі значення теоретичних частот нормального розподілу. В останньому стовпці обчислюємо відношення до значень $\tilde{n}_i$ квадратів відхилень спостережених частот n_i від теоретичних $\tilde{n}_i$.

Таблиця 2.2

i	x_i	n_i	$u_i = x_i - \bar{x}$	$t_i = \frac{u_i}{\bar{\sigma}}$	$f(t_i)$	n'_i	$\tilde{n}_i$	$\frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
1	166,5	5	-25,04	-2,36	0,0246	2,76	3	1,3333
2	173,5	13	-18,04	-1,70	0,0940	10,56	11	0,3636
3	180,5	17	-11,04	-1,04	0,2323	26,09	26	3,1154
4	187,5	38	-4,04	-0,38	0,3712	41,69	42	0,3810
5	194,5	60	2,96	0,28	0,3836	43,08	43	6,7209
6	201,5	21	9,96	0,94	0,2565	28,81	29	2,2069
7	208,5	11	16,96	1,60	0,1109	12,46	12	0,0833
8	215,5	4	23,96	2,26	0,0310	3,48	3	0,3333
9	222,5	1	30,96	2,92	0,0056	0,63	1	0,0000
Сума		170					170	14,5378

Сума значень останнього стовпця цієї таблиці є шукане спостережене значення критерію: $\chi^2_{\text{спост}} \approx 14,54$.

Критичне значення критерію знаходимо за дод. 3: $\chi^2_{\text{крит}}(\alpha; r) = \chi^2_{\text{крит}}(0,02; 6) = 15,03$.

Через те, що $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{крит}}$, немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Таким чином, при заданому рівні значимості $\alpha = 0,02$ (тобто з 2 %-м ризиком помилитися або з довірчою ймовірністю $\gamma = 0,98$) можна стверджувати, що досліджувана ознака в генеральній сукупності розподілена за нормальним законом.

2.5. Інтервальна оцінка параметрів генеральної сукупності.

Побудова довірчих інтервалів

Основні характеристики вибіркового розподілу ($\bar{x}$, $\bar{\sigma}^2$, $\bar{\sigma}$) є точковими оцінками відповідних параметрів генеральної сукупності: генеральних середнього, дисперсії й середньоквадратичного відхилення. Для вибірок невеликого об'єму точкові оцінки можуть значно відрізнятись від оцінюваного параметра. Тому у випадку малих вибірок застосовують інтервальні оцінки. Інтервальну оцінку даного параметра знаходять, враховуючи задану *надійність* або *довірчу ймовірність*, тобто ймовірність, з якою шуканий інтервал

покриває дійсне значення оцінюваного параметра. Одержаний за таких умов інтервал називають *довірчим інтервалом* для оцінюваного параметра.

Нехай задано вибірку об'єму n із деякої генеральної сукупності, основні параметри якої невідомі. Побудову довірчих інтервалів для цих параметрів починають з визначення їх точкових оцінок:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2.$$

Оскільки вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії, користуються *виправленою дисперсією* $\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1} \bar{\sigma}^2$ і відповідним середньоквадратичним відхиленням $\bar{s} = \sqrt{\bar{s}^2}$.

Довірчий інтервал для математичного сподівання $\bar{x}_r$ досліджуваної кількісної ознаки генеральної сукупності створюється

за допомогою величини $\delta = t_\gamma \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}$, де t_γ треба вибрати з таблиці критичних точок t -розподілу Ст'юдента (дод. 4) для заданої надійності γ і кількості ступенів вільності $(n-1)$. Зміст знайденого довірчого інтервалу $(\bar{x} - \delta; \bar{x} + \delta)$ полягає у співвідношенні $p(\bar{x} - \delta < \bar{x}_r < \bar{x} + \delta) = \gamma$.

Межі довірчих інтервалів для генеральної дисперсії й генерального середнього квадратичного відхилення, за припущенням близькості генерального розподілу до нормального закону, знаходять після розрахунку допоміжних величин $p_1 = \frac{1-\gamma}{2}$, $p_2 = 1-p_1$, $r = n-1$ і вибору відповідних значень $\chi^2 = f(p; r)$ з таблиці критичних точок χ^2 -розподілу (див. дод. 3). Ці межі обчислюються за формулами

$$D_1 = \bar{s}^2 \frac{n-1}{\chi_1^2}; \quad D_2 = \bar{s}^2 \frac{n-1}{\chi_2^2}; \quad \sigma_1 = \sqrt{D_1}; \quad \sigma_2 = \sqrt{D_2}.$$

Шукані довірчі інтервали за даним рівнем надійності γ набувають вигляду $p(D_1 < \bar{\sigma}_r^2 < D_2) = \gamma$; $p(\sigma_1 < \bar{\sigma}_r < \sigma_2) = \gamma$.

Задача 2.5. Використовуючи вибірку, створену з перших 24 значень кількісної ознаки, заданої в задачі 2.1, визначити з надійністю

$\gamma = 0,9$ довірчі інтервали для генерального середнього, генеральної дисперсії й генерального середньоквадратичного відхилення вищевказаної ознаки.

Розв'язання. Маємо наступну вибірку об'єму $n = 24$:

187	193	199	197	196	184	200	193	198	191	193	188
193	195	197	199	202	193	190	197	195	182	201	202

Обчислюємо для цієї вибірки основні числові характеристики:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{24} x_i = \frac{1}{24} (187 + 193 + 199 + 197 + \dots$$

$$\dots + 182 + 201 + 202) = \frac{4665}{24} = 194,38;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{24} x_i^2 = \frac{1}{24} (187^2 + 193^2 + 199^2 + 197^2 + \dots + 182^2 + 201^2 + 202^2) =$$

$$= \frac{907427}{24} = 37809,46;$$

$$\overline{\sigma^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 37809,46 - 194,38^2 = 27,82;$$

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\overline{\sigma^2}} = \sqrt{27,82} \approx 5,27.$$

Оскільки об'єм вибірки невеликий, потрібне виправлення знайденої дисперсії й відповідного середньоквадратичного відхилення:

$$\bar{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{\sigma^2} = \frac{24}{23} \cdot 27,82 = 29,0 \quad \text{і} \quad \bar{s} = \sqrt{\bar{s}^2} = \sqrt{29,0} \approx 5,39.$$

З таблиці дод. 4 для $\gamma = 0,9$ і $n - 1 = 23$ визначимо критичне значення $t_\gamma = 1,714$. Тоді $\delta = t_\gamma \frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} = 1,714 \cdot \frac{5,39}{\sqrt{24}} = 1,88$, і довірчий інтервал для генерального середнього набуває вигляду

$$194,38 - 1,88 < \bar{x}_\Gamma < 194,38 + 1,88, \quad \text{або} \quad \bar{x}_\Gamma = 194,38 \pm 1,88.$$

Отже, з довірчою ймовірністю $\gamma = 0,9$ можна стверджувати, що

середнє значення розглядуваної ознаки в генеральній сукупності знаходиться в інтервалі 192,49...196,26 :

$$p(192,49 < \bar{x}_r < 196,26) = 0,9.$$

Для побудови інших довірчих інтервалів розрахуємо значення

$$p_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0,9}{2} = 0,05; \quad p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,05 = 0,95; \quad r = n - 1 = 23$$

і в таблиці дод. 3 знайдемо відповідні критичні точки χ^2 -розподілу:

$$\chi_1^2 = f(p_1, r) = f(0,05; 23) = 35,2; \quad \chi_2^2 = f(p_2, r) = f(0,95; 23) = 13,09,$$

після чого визначимо межі довірчих інтервалів для генеральної дисперсії та генерального середньоквадратичного відхилення:

$$D_1 = \bar{s}^2 \frac{n-1}{\chi_1^2} = 29,0 \cdot \frac{23}{35,2} = 18,97; \quad D_2 = \bar{s}^2 \frac{n-1}{\chi_2^2} = 29,0 \cdot \frac{23}{13,09} = 51,0;$$

$$\sigma_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{18,97} = 4,36; \quad \sigma_2 = \sqrt{D_2} = \sqrt{51,0} = 7,14.$$

Таким чином, отриманий довірчий інтервал для генеральної дисперсії

$$p(18,97 < \bar{\sigma}_r^2 < 51,0) = 0,9$$

і для генерального середньоквадратичного відхилення

$$p(4,36 < \bar{\sigma}_r < 7,14) = 0,9.$$

Інакше кажучи, з імовірністю $\gamma = 0,9$ можна стверджувати, що в досліджуваній генеральній сукупності дисперсія ознаки знаходиться в інтервалі 18,97...51,0, а її середньоквадратичне відхилення належить інтервалу 4,36...7,14.

2.6. Кореляційна залежність

Залежність між випадковими величинами X і Y може бути функціональною, статистичною та кореляційною.

Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y , то ка-

жуть, що існує *функціональна* залежність Y від X :

$$Y = Y(X).$$

Статистичною називається залежність, при якій зі зміною однієї з випадкових величин впливає зміна закону розподілу другої випадкової величини.

Умовним середнім $\bar{y}_x$ називається середнє арифметичне значення Y , що відповідає значенню $X = x$. Аналогічно визначається умовне середнє $\bar{x}_y$.

Статистичну залежність називають *кореляційною*, якщо при зміні однієї величини змінюється середнє значення другої величини. Отже, кореляційна залежність Y від X – це функціональна залежність умовної середньої $\bar{y}_x$ від x , тобто

$$\bar{y}_x = f(x).$$

Це рівняння називається *рівнянням регресії* Y на X , а графік функції $f(x)$ – *лінією регресії*.

Аналогічно визначається кореляційна залежність X від Y :

$$\bar{x}_y = \varphi(y).$$

Основними задачами теорії кореляції є встановлення форми кореляційної залежності, тобто вигляду функції регресії та оцінка тісноти (сили) кореляційного зв'язку.

Якщо обидві функції, $f(x)$ і $\varphi(y)$, – лінійні, то кореляційну залежність (регресію) називають *лінійною*.

Тісноту кореляційного зв'язку між X і Y можна оцінювати за величиною розсіювання значень y навколо умовних середніх $\bar{y}_x$ і значень x навколо умовних середніх $\bar{x}_y$.

Рівняння лінійної регресії Y на X має вигляд

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}),$$

де $\bar{y}_x$ – умовна середня; $\bar{x}$, $\bar{y}$ – вибіркові середні значення компонент X і Y ; σ_x , σ_y – вибіркові середньоквадратичні відхилення; r_b – вибірковий коефіцієнт кореляції.

Для побудови рівняння лінійної регресії послідовно обчислюють-

ся значення

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j^2;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_i y_j; \quad \sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}; \quad r_B = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Ті ж самі значення використовуються для запису рівняння регресії X на Y , яке має вигляд

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}).$$

Одержане значення вибіркового коефіцієнта кореляції r_B аналізують, використовуючи правило: чим ближче $|r_B|$ до 1, тим тісніший зв'язок між X і Y .

Задача 2.6. Подано вибірку значень двох кількісних ознак X і Y об'єму $n = 10$:

X	2,3	2,6	3	3,6	3,6	4,4	5,2	5,2	5,9	6,6
Y	12,0	17,4	16,2	20,3	24,9	19,4	31,8	23,0	27,4	36,5

За даною вибіркою необхідно розрахувати основні числові характеристики для обох ознак, скласти рівняння лінійної регресії Y на X і X на Y , у відповідній системі координат побудувати кореляційне поле для X , Y і графіки ліній регресії, знайти коефіцієнти кореляції і детермінації та визначити їхній зміст.

Розв'язання. За даною вибіркою складаємо табл. 2.3 (чотири останні стовпці заповнюються після розрахунку параметрів регресії).

Використовуємо одержані в цій таблиці результати:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 4,24; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 22,89;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 19,878; \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = 574,091; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 105,704,$$

за якими знайдемо дисперсії й середньоквадратичні відхилення X і Y :

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 19,878 - (4,24)^2 = 1,9004;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2 = 574,091 - (22,89)^2 = 50,1389;$$

$$\sigma_x = \sqrt{1,9004} = 1,3785; \quad \sigma_y = \sqrt{50,1389} = 7,0809$$

– і вибіркові коефіцієнти кореляції та детермінації:

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{105,704 - 4,24 \cdot 22,89}{1,3785 \cdot 7,0809} = 0,886; \quad R^2 = (0,886)^2 = 0,785.$$

Таблиця 2.3

i	x_i	x_i^2	y_i	y_i^2	$x_i y_i$	$\bar{y}_x$	$y - \bar{y}_x$	$\bar{x}_y$	$x - \bar{x}_y$
1	2,3	5,29	12,0	144,00	27,60	14,06	-2,06	2,36	-0,06
2	2,6	6,76	17,4	302,76	45,24	15,42	1,98	3,29	-0,69
3	3,0	9,00	16,2	262,44	48,60	17,25	-1,05	3,09	-0,09
4	3,6	12,96	20,3	412,09	73,08	19,98	0,32	3,79	-0,19
5	3,6	12,96	24,9	620,01	89,64	19,98	4,92	4,59	-0,99
6	4,4	19,36	19,4	376,36	85,36	23,62	-4,22	3,64	0,76
7	5,2	27,04	31,8	1011,24	165,36	27,26	4,54	5,78	-0,58
8	5,2	27,04	23,0	529,00	119,60	27,26	-4,26	4,26	0,94
9	5,9	34,81	27,4	750,76	161,66	30,45	-3,05	5,02	0,88
10	6,6	43,56	36,5	1332,25	240,90	33,63	2,87	6,59	0,01
Σ	42,4	198,78	228,9	5740,91	1057,04	228,90	0,00	42,40	0,00
$\frac{1}{n} \Sigma$	4,24	19,878	22,89	574,091	105,704				

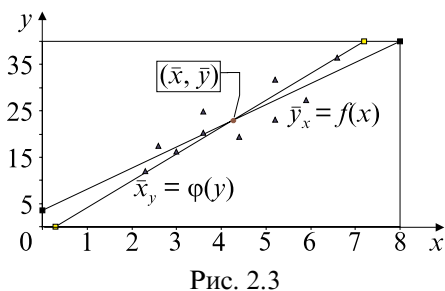
Запишемо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X

$$\bar{y}_x - 22,89 = 0,886 \cdot \frac{7,0809}{1,3785} \cdot (x - 4,24), \quad \text{звідки} \quad \bar{y}_x = 4,55x + 3,59$$

і вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y

$$\bar{x}_y - 4,24 = 0,886 \cdot \frac{1,3785}{7,0809} \cdot (y - 22,89), \quad \text{звідки} \quad \bar{x}_y = 0,17y + 0,29.$$

Використовуючи одержані рівняння, заповнюємо чотири останні стовпці табл. 2.3 і будуємо графіки прямих ліній регресії разом з заданим кореляційним полем (рис. 2.3).



Вибірковий коефіцієнт кореляції $r_b = 0,886$ достатньо близький до одиниці. Тому зв'язок між випадковими величинами X і Y вважається тісним, про що також свідчить розташування досить близько один до одного графіків функцій лінійної регресії $\bar{y}_x = f(x)$ і $\bar{x}_y = \varphi(y)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ

З кожної теми подано 30 варіантів задач. Студент виконує задачі згідно з номером свого варіанта.

Задача 1. Безпосередній підрахунок імовірностей

1. Для сигналізації про аварію встановлені два незалежні сигналізатори. Імовірність того, що перший сигналізатор спрацює при аварії, дорівнює 0,95; для другого сигналізатора ця імовірність – 0,9. Знайти ймовірність того, що при аварії спрацює хоча б один сигналізатор.

2. Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірність того, що студент відповість на перше питання, дорівнює 0,9; на друге і третє питання – 0,9 і 0,8 відповідно. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього потрібно знати хоча б два питання.

3. Серед кандидатів у студентську раду факультету чотири першокурсники, п'ять другокурсників і шість третьокурсників. З числа цих кандидатів навмання вибирають п'ять чоловік на майбутню конференцію. Знайти ймовірність того, що буде обраний такий склад: один першокурсник, два другокурсники і два третьокурсники.

4. У цеху два станки. Імовірність того, що перший станок протягом робочого дня вийде з ладу, дорівнює 0,9; для другого ця ймовірність – 0,94. Визначити ймовірність того, що протягом робочого дня хоча б один станок не вийде з ладу.

5. Знайти ймовірність того, що при підкиданні трьох гральних кубиків шість очок випаде на одному з них (байдуже на якому), а на

гранях двох інших випадіє різна кількість очок, причому це не буде шість очок.

6. У студентському ансамблі 12 студентів, серед яких п'ять хлопців. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання відібраних солістів два хлопці?

7. У групі з 30 студентів на контрольній роботі з математики шість студентів отримали оцінку "відмінно", десять – "добре", дев'ять – "задовільно". Яка ймовірність того, що всі студенти, яких викликали до дошки, мають незадовільні оцінки з контрольної роботи?

8. У лотереї випущено 1000 білетів, з яких половина виграшних. Куплено два білети. Яка ймовірність того, що серед них один виграшний;
два виграшних?

9. В ящику десять деталей, з яких чотири першого сорту. Робітник навмання взяв три деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з узятих деталей виявиться першого сорту.

10. В отриманій магазином партії товарів міститься 150 виробів першого сорту, 30 – другого, 16 – третього та чотирі браковані вироби. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб буде першого або другого сорту.

11. В урні знаходиться 20 куль, причому вісім з них білі, решта – чорні. Визначити ймовірність того, що з чотирьох навмання вибраних куль усі виявляться одного кольору.

12. Виконано постріл по мішені, яка складається з трьох зон. Ймовірність влучення в першу, другу та третю зони відповідно 0,15; 0,23; 0,17. Знайти ймовірність промаху.

13. У цеху працюють сім чоловіків та три жінки. За табельними номерами навмання відібрано троє працівників. Знайти ймовірність того, що всі відібрані особи виявляться чоловіками.

14. У партії є 20 коробок цукерок, при чому в чотирьох з них – цукерки шоколадні. Товарознавець бере навмання одну за одною три коробки. Яка ймовірність того, що три взяті коробки виявляться з нешоколадними цукерками?

15. На полиці у бібліотеці у випадковому порядку розставлено 15 підручників, причому п'ять з них – з математики. Бібліотекар навмання бере три підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один із узятих підручників виявиться з математики.

16. На підприємстві встановлено три технологічні лінії.

Імовірність відмови першої протягом місяця дорівнює 0,2, другої – 0,1, третьої – 0,3. Знайти ймовірність того, що протягом місяця відмовить хоча б одна лінія.

17. 15 % стандартної продукції підприємства виготовляється вищим сортом, 32 % – першим сортом. Решта продукції виготовляється другим сортом. Визначити ймовірність виготовлення продукції другого сорту, якщо відсоток браку дорівнює 1 %.

18. Студент знає 40 із 100 екзаменаційних питань. Викладач задає йому п'ять питань. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит за умови, що для цього потрібно знати не менше трьох питань.

19. Кожен з трьох стрільців виконує один постріл по мішені. Імовірності їхнього влучення в мішень відповідно дорівнюють 0,6; 0,9; 0,7. Знайти ймовірність того, що в результаті цих трьох пострілів у мішені буде тільки одна пробоїна; рівно дві пробоїни; рівно три пробоїни.

20. В урні містяться п'ять куль з номерами від 1 до 5. Навмання одна за одною виймають три кулі без повернення. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кулі з номерами 1, 4, 5.

21. Магазин отримує товар партіями по 100 штук. Якщо взяті навмання п'ять зразків з певної партії відповідають стандартам, партія надходить на реалізацію. У наступній партії вісім зразків товару з дефектами. Яка ймовірність того, що товар піде на реалізацію?

22. В урні 18 білих і 2 чорні кулі. Навмання одна за одною виймають дві кулі без повернення. Знайти ймовірність наступних подій:
обидві кулі одного кольору;
кулі різних кольорів.

23. Імовірність влучення в мішень стрільця при одному пострілі дорівнює 0,8. Яку кількість пострілів повинен виконати стрілець, щоб з імовірністю, меншою за 0,4, можна було б очікувати, що не буде жодного промаху?

24. Імовірності того, що необхідна працівнику запчастина знаходиться в першому, другому, третьому та четвертому ящику, відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь міститься

не більш, ніж у трьох ящиках;

не менше, ніж у двох ящиках.

25. Імовірність успішного виконання вправи для кожного з двох

спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконують вправу по черзі, причому кожен робить по дві спроби. Спортсмен, що виконує вправу першим, отримує приз. Знайти ймовірність отримання призу хоча б одним із спортсменів.

26. Абонент забув дві останні цифри телефонного номера і набрав їх намання, пам'ятаючи, що ці цифри непарні та різні. Знайти ймовірність того, що номер набрано вірно.

27. Імовірність влучення в першу мішень для стрільця дорівнює $\frac{2}{3}$. Якщо при першому пострілі зафіксовано влучення, то він отримує право на другий постріл по другій мішені. Імовірність влучення в дві мішені при двох пострілах дорівнює 0,5. Знайти ймовірність влучення в другу мішень.

28. Групу, яка складається з п'яти чоловіків і десяти жінок, намання розбивають на п'ять груп по три особи. Знайти ймовірність того, що в кожній групі буде по одному чоловіку.

29. Два стрільці по черзі виконують постріли по мішені до першого влучення. Імовірність влучення для першого дорівнює 0,2, а для другого – 0,3. Знайти ймовірність того, що перший стрілець виконає більше пострілів, ніж другий.

30. У потяг, який складається з 20 вагонів, входять 74 пасажери, які обирають вагони намання. Знайти ймовірність того, що в кожен вагон увійде хоча б один пасажир.

Задача 2. Застосування формули повної ймовірності та формули Байєса

1. Схема, до якої входять три елементи, може працювати у двох режимах, які постають з імовірностями 0,6 і 0,4. Надійність елементів у першому режимі відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7, а в другому – 0,8; 0,6; 0,5. Знайти надійність схеми при послідовному розташуванні елементів.

2. В урну, що містить дві кулі, опущено білу кулю, після чого з неї намання вилучено одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою, якщо рівно можливі усі припущення про початковий склад куль за кольором.

3. У першій урні дві білі і чотири чорні кулі, а у другій – три білі і одна чорна куля. Із першої переклали в другу дві кулі. Знайти ймовірність того, що куля, вийнята із другої урни після перекладання, буде білою.

4. На станцію очищення стічних вод 30 % стоку надходить з першого підприємства, 40 % – з другого, а решта – з третього. Імовірності появи в стічних водах солей важких металів для першого, другого і третього підприємств відповідно дорівнюють 0,01, 0,02 та 0,04. Визначити ймовірність появи солей важких металів в усьому стоці.

5. На складі є 20 нових та 7 використаних інструментів. Першій зміні робітників випадковим чином видається два інструменти, які після роботи повертаються на склад. Друга зміна отримує три інструменти. Яка ймовірність того, що друга зміна одержить три нових інструменти?

6. На кондитерській фабриці 30 % шоколаду виробляється автоматичною лінією А, 25 % – лінією В, а весь інший – лінією С. Лінія А допускає 1 % браку від вироблених нею плиток; лінія В – 1,2 %, лінія С – 2 %. Протягом дня ці три лінії виробляють 10 000 плиток шоколаду.

Яка ймовірність того, що випадково відібрана з них плитка виявиться бракованою?

Якщо плитка виявиться бракованою, то яка ймовірність того, що вона вироблена лінією А? лінією В? лінією С?

7. Три однакових контейнери містять пляшки з пивом. У першому контейнері 2 % нестандартних пляшок, у другому – 3 %, у третьому – 1 %. Із навмання вибраного контейнера беруть одну пляшку. Обчислити

імовірність того, що вона виявиться нестандартною;

імовірність того, що цю пляшку взято з другого контейнера.

8. Виріб перевіряється на стандартність одним з двох товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,55; другого – 0,45. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці було визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевіряв другий товарознавець.

9. Є десять однакових урн, у дев'яти з яких знаходиться по дві білі і дві чорні кулі, а в одній – п'ять білих і одна чорна куля. З навмання вибраної урни взято білу кулю. Яка ймовірність того, що кулю взято з урни, яка містить п'ять білих куль?

10. Перевірка агрегатів деякого пристрою при технічному обслуговуванні дозволяє виявити порушення з ймовірністю 0,8. Імовірність помилкового виявлення порушення дорівнює 0,01. При-

строї, що вийшли з ладу, складають 20 % усіх пристроїв, які надходять на техобслуговування. Визначити ймовірність того, що машина справна, якщо її визнано несправною.

11. У центральну бухгалтерію корпорації надійшли пачки накладних для перевірки й обробки. 90 % пачок було визнано задовільними, оскільки вони містили лише 1 % невірно оформлених накладних. Інші 10 % пачок визнано незадовільними, оскільки вони містили 5 % невірно оформлених накладних. Яка ймовірність того, що наступна партія накладних, які надійдуть у бухгалтерію, буде визнана незадовільною?

12. 21 % яблук (в ящиках) надійшов у продаж з ферми № 1, з них 90 % ящиків стандартні; 35 % – з ферми № 2, з них 80 % – стандартні; 29 % – з підсобного господарства № 1, з них 70 % – стандартні; 15 % – з підсобного господарства № 2, з них 80 % – стандартні. При відкритті навантаження вибраного ящика яблука визнано стандартними. Визначити ймовірність того, що ці яблука надійшли:

з ферми № 1;

з підсобного господарства № 2;

з будь-якого підсобного господарства.

13. Імовірність розбивання скляних банок при транспортуванні консервів на автомашинах дорівнює 0,01, а при транспортуванні залізницею – у 5 разів менше. Визначити ймовірність того, що навантаження вибрана банка виявиться розбитою, якщо автомашинами перевезено консервів у 4 рази менше, ніж залізницею.

14. У цеху три типи автоматичних станків виготовляють одні й ті ж деталі. Продуктивність їх однакова, але якість роботи різна: станки першого типу виготовляють 90 % продукції відмінної якості, другого – 85 % і третього – 80 %. Усі виготовлені за зміну деталі надходять на склад в одну ємність. Визначити ймовірність того, що навантаження вибрана деталь виявиться відмінної якості, якщо станків першого типу десять, другого – шість і третього – чотири.

15. При перевірці якості насіння пшениці було встановлено, що всі зерна можна розбити на чотири групи. До першої групи належать 96 % зерен, до другої – 2 %, до третьої та четвертої – по 1 % всіх зерен. Імовірність того, що із зернини виросте колос, який містить не менше 50 зерен, для насіння першої групи дорівнює 0,5, для насіння другої групи – 0,2, для насіння третьої групи – 0,18, для насіння четвертої групи – 0,02. Знайти ймовірність того, що з узятої навантаження зернини виросте колос, який містить не менше 50 зерен.

16. На заводі 40 % усієї продукції виготовляється першим станком, решта – другим. У середньому дев'ять із 1 000 деталей, вироблених першим станком, виявляються бракованими, для другого станка цей показник – одна бракована деталь з 250. Випадково вибрана з усієї даної продукції деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовлено першим станком.

17. Вершкове масло фасується на двох технологічних лініях молокозаводу. Імовірність виходу кондиційної продукції з першої лінії дорівнює 0,88, а з другої – 0,95. Навмання взятий пакет виявився кондиційним. Яка ймовірність того, що він розфасований на першій лінії? на другій лінії?

18. На склад надходить продукція з чотирьох конвеєрних ліній, причому частка кожної з них відповідно дорівнює 40, 30, 20, 10 %. Відомо, що ймовірність браку для першої лінії становить 0,5 %, для другої – 1 %, для третьої – 1,5 %, для четвертої – 2 %. Знайти ймовірність того, що взята навмання одиниця продукції не має браку.

19. У двох ящиках міститься по 20 лотків з яйцями. У першому ящику – чотири лотки дієтичних яєць, а в другому – шість, решта – яйця першого сорту. З другого в перший навмання перекладено один лоток яєць. Яка ймовірність того, що навмання взятий з першого ящика лоток виявиться з дієтичними яйцями?

20. На пивзаводі встановлено вітчизняний та імпорتنний автомати розливу пива, продуктивність яких відноситься як 4:6. Пляшки з пивом надходять на загальний конвеєр. Вітчизняний апарат дає в середньому 5 % браку, а імпорتنний – 2 %. Навмання взята з конвеєра пляшка виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона розлита імпортним автоматом?

21. Кожна з трьох партій складається з 20 деталей. Число стандартних деталей в першій, другій і третій партіях відповідно дорівнюють 20, 15, 10. З навмання обраної партії вилучають деталь, яка виявляється стандартною. Деталь повертають в партію і ще раз з цієї ж партії вилучають деталь, яка також виявляється стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі вилучали з третьої партії.

22. З трьох гвинтівок одночасно виконуються постріли, при цьому дві кулі влучили в мішень. Знайти ймовірність того, що влучення в мішень відбулося з першої гвинтівки, якщо ймовірності влучення в мішень першою, другою і третьою гвинтівкою відповідно дорівнюють 0,4; 0,3; 0,5.

23. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою перестали працювати. Знайти ймовірність того, що відмовили перший і другий елементи, якщо ймовірність відмови для першого – 0,2, другого – 0,4, третього – 0,3.

24. Три стрільці виконали залп, причому дві кулі влучили в мішень. Знайти ймовірність того, що третій стрілець влучив в мішень, якщо ймовірність влучення для першого стрільця – 0,6, другого – 0,5, третього – 0,4.

25. Схема, в яку входять три елементи, може працювати у двох режимах, які настають з імовірностями 0,6 і 0,4. Надійність елементів у першому режимі відповідно дорівнює 0,9; 0,8; 0,7; а в другому – 0,8; 0,6; 0,5. Знайти надійність схеми:

при послідовному розташуванні елементів;

при паралельному розташуванні елементів.

26. Серед 30 екзаменаційних білетів є три "щасливих". Студенти послідовно витягують білети. У кого більша ймовірність витягти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

27. Є 30 білетів, з яких студент знає 25. У нього є дві можливості: узяти білет першим, або, поступившись чергою, другим. Знайти ймовірність успішного складання іспиту для першого і другого випадків.

28. В спеціалізовану лікарню поступають 50 % пацієнтів з хворобою K , 30 % – з хворобою L , 20 % – з хворобою M . Імовірності повного одужання для хвороб K , L , M відповідно дорівнюють 0,7; 0,8; 0,9. Пацієнт одужав. Знайти ймовірність того, що він поступив з хворобою K .

29. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох контролерів. Імовірність перевірки виробу першим контролером дорівнює 0,55, другим – 0,45. Імовірність того, що виріб буде визнано стандартним, для першого контролера дорівнює 0,9, другого – 0,98. Перевірений виріб виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що його перевірів другий контролер.

30. Число вантажівок, що проїжджають через деякий населений пункт, відноситься до числа легкових машин, як 3:2. Імовірність того, що буде проїжджати вантажівка, дорівнює 0,1, імовірність того, що буде проїжджати легкова машина – 0,2. Через населений пункт проїхала машина. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

Задача 3. Підрахунок імовірностей у схемі незалежних випробувань Бернуллі

1. Система складена з 10 блоків, надійність кожного з них дорівнює 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що

- відмовлять два блоки;
- відмовить хоча б один блок;
- відмовлять не менше двох блоків.

2. При транспортуванні винограду з кожних ста ящиків один виявляється з зіпсованим виноградом. Визначити ймовірність того, що з трьох ящиків з виноградом, які надійшли в магазин,

- в жодному з ящиків не буде зіпсованого винограду;
- в одному ящику виявиться зіпсований виноград;
- виноград зіпсувався у двох ящиках;
- виноград зіпсувався у всіх трьох ящиках.

3. Середній відсоток порушення роботи конвеєра – 10 %. Обчислити ймовірність того, що з 20 випадкових перевірок у більше ніж 18 перевірках конвеєр працював нормально.

4. Батарея виконала шість пострілів по об'єкту. Імовірність влучення в об'єкт при одному пострілі дорівнює 0,3. Знайти:

- найвірогідніше число влучень;
- імовірність найвірогіднішого числа влучень,
- імовірність того, що об'єкт буде зруйновано, якщо для цього достатньо хоча б двох влучень.

5. Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. В даний момент часу абонент може зателефонувати незалежно від інших з імовірністю 0,005. Знайти ймовірність того, що в даний момент було не більше семи телефонних викликів.

6. Чому дорівнює ймовірність p появи події в кожному з 39 незалежних випробувань, якщо найвірогідніше число появи події в цих випробуваннях дорівнює 25?

7. Визначити ймовірність одночасної зупинки 30 машин із 100 працюючих, якщо ймовірність зупинки однієї машини дорівнює 0,2.

8. Старовинна сімейна фірма вирішила почати продаж своїх акцій на біржі. Відомо, що 80 % брокерів порадили своїм клієнтам купити ці акції. Навмання відібрали шість брокерів. Знайти ймовірність того, що принаймні четверо з них запропонували своїм клієнтам купити акції фірми.

9. Імовірність того, що навмання взятий виріб з партії буде пер-

шого сорту, дорівнює $2/3$. Скільки одиниць цього виробу слід узяти, щоб найвірогідніше число виробів першого сорту дорівнювало 270?

10. Проростання насіння пшениці складає 70 %. Знайти ймовірність того, що серед 2100 посіяних зерен пшениці зійде:

не менше 1470 і не більше 1500 зерен;

не менше 1470;

не більше 1469 зерен.

11. Монету підкидають шість разів. Яка ймовірність того, що випаде герб:

рівно три рази;

не більше трьох разів;

більше трьох разів?

12. Імовірність того, що відвідувачу в їдальні знадобиться перша страва, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що зі 100 відвідувачів першу страву замовлять:

не менше 75 і не більше 90 відвідувачів;

не менше 75 відвідувачів;

не більше 74 відвідувачів.

13. Число довгих волокон у партії бавовни складає в середньому 0,7 загальної кількості волокон. При якій загальній кількості волокон найвірогідніше число довгих волокон виявиться рівним 25?

14. Імовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з ймовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія з'явиться не менше 75 разів?

15. Товарознавець перевіряє 24 вироби. Імовірність того, що виріб буде визнано придатним для продажу, для кожного виробу становить $p = 0,6$. Знайти найвірогідніше число виробів, які товарознавець визнає придатним для продажу.

16. Автопарк підприємства налічує 12 автомашин. Імовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює $p = 0,8$. Знайти ймовірність нормальної роботи автопарку, якщо для цього необхідно на лінії мати не менше восьми автомашин.

17. Господарство висадило 200 саджанців фруктових дерев. Для кожного саджанця ймовірність прижитися береться рівною 0,6. Знайти ймовірність того, що приживеться:

не менше 120 і не більше 140 саджанців;

не менше 100 саджанців;

рівно 125 саджанців.

18. Молокозавод відправив у магазин 500 пакетів молока. Імовірність пошкодження пакета при транспортуванні дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що при транспортуванні буде пошкоджено пакетів:

- рівно три;
- менше трьох;
- більше чотирьох;
- хоча б один.

19. Чому дорівнює ймовірність p появи події в кожному із 49 незалежних випробовувань, якщо найвірогідніше число появи події в цих випробовуваннях дорівнює 30?

20. Імовірність появи події в кожному з 625 незалежних випробовувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,04.

21. Комплекс з виробництва консервів складається з п'яти незалежно працюючих агрегатів. Імовірність відмови агрегату в момент запуску комплексу дорівнює 0,2. Знайти

найвірогідніше число агрегатів, що відмовляють;
імовірність відмови комплексу, якщо для цього достатньо, щоб відмовили хоча б чотири агрегати.

22. До технічного водопроводу приєднано 100 підприємств, кожне з яких з імовірністю 0,8 у даний момент здійснює забір води з магістралі. Визначити ймовірність того, що в цей момент забір води здійснюють 75 підприємств.

23. Посіяно 28 зернин ячменю з однією й тією ж імовірністю проростання кожного з них. Знайти цю ймовірність, якщо найвірогідніші числа позитивних результатів – 17 і 18?

24. Імовірність появи позитивного результату в кожному з n незалежних дослідів дорівнює 0,9. Скільки потрібно провести дослідів, щоб з імовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менше 150 дослідів дадуть позитивний результат?

25. З практики відомо, що 7 % накладних, які проходять перевірку в бухгалтерії, виявляються невірно оформленими. Навмання відібрано 20 накладних. Яка ймовірність того, що не менше трьох з них оформлено вірно?

26. Серед насіння пшениці 0,6 % насіння бур'янів. Випадковим способом вибирають 1000 насінин. Яка ймовірність виявити серед них

не менше 3 насінин бур'янів;
не менше 16 насінин бур'янів;
рівно 6 насінин бур'янів?

27. Під час роботи технологічної лінії в середньому за п'ять годин відбувається два порушення в її роботі. Визначити ймовірність того, що за 30 хвилин роботи лінії не відбувається жодного порушення; відбувається не більше одного порушення.

28. Відомо, що в середньому з кожних 100 виробів 10 не задовольняють усі вимоги стандарту. Визначити ймовірність того, що з чотирьох узятих навмання виробів нестандартних виявиться не більше одного.

29. У камері Вільсона в середньому реєструються 15 елементарних частинок за годину. Визначити ймовірність того, що протягом 20 хвилин буде зареєстровано:

рівно три частинки;
хоча б дві частинки.

30. Для нейтралізації електростатичного заряду на поверхні пакувального паперу використовується радіоактивний іонізатор. Відомо, що в середньому за 10 секунд іонізатор випромінює чотири заряджені частинки. Визначити ймовірність того, що за дві секунди іонізатор випромінить

рівно одну частинку;
хоча б одну частинку.

Задача 4. Дискретні випадкові величини, їхні властивості та характеристики

1 – 8. Радіостанція передає для літака три радіосигнали. Імовірність прийому літаком сигналу при першій передачі дорівнює p_1 , при другій – p_2 , при третій – p_3 . Потрібно скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа прийнятих літаком сигналів.

9 – 16. В урні знаходиться n куль, з них m білих. Навмання беруть k куль. Потрібно скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа взятих білих куль.

17 – 24. Імовірність виходу з ладу за час t одного конденсатора дорівнює p . У схемі є k таких конденсаторів. Потрібно скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа конденсаторів, що вийшли з ладу за час t .

25 – 30. Екзаменатор задає студенту додаткові запитання. Ймовірність того, що студент відповість на будь-яке задане питання, дорівнює p . Викладач припиняє екзамен, як тільки студент не відповідає на запитання. Потрібно скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа додаткових питань, які викладач задасть студенту.

Крім того, для кожного варіанта:
 побудувати багатокутник розподілу ймовірностей ДВВ X ;
 записати інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік;
 обчислити математичне сподівання, дисперсію і середньоквадратичне відхилення ДВВ X ;
 обчислити ймовірність виконання нерівностей $k_1 \leq X \leq k_2$.
 (Вихідні дані до задачі див. у дод. 5).

Задача 5. Неперервні випадкові величини, розподілені за рівномірним законом

Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X має вигляд

$$1 - 8: \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma - a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

$$9 - 16: \quad f(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma, b]; \\ 0, & x \notin [\gamma, b]. \end{cases}$$

$$17 - 24: \quad f(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

$$25 - 30: \quad f(x) = \begin{cases} a, & x \in \left[\frac{b - \gamma}{2}, \frac{b + \gamma}{2} \right]; \\ 0, & x \notin \left[\frac{b - \gamma}{2}, \frac{b + \gamma}{2} \right]. \end{cases}$$

Потрібно:
 визначити значення γ ;

підрахувати математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$;
знайти інтегральну функцію розподілу ймовірностей $F(x)$;
побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$;
обчислити ймовірність виконання нерівностей $x_1 < X < x_2$.
(Вихідні дані до задачі див. у дод. 6).

Задача 6. Неперервна випадкова величина, розподілена за нормальним законом

Щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X має вигляд $f(x) = \gamma e^{ax^2 + bx + c}$.

Потрібно:

визначити значення γ ;
підрахувати математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ і середньоквадратичне відхилення $\sigma(X)$;
знайти інтегральну функцію розподілу ймовірностей $F(x)$;
обчислити ймовірність виконання нерівностей $x_1 < X < x_2$.
(Вихідні дані до задачі див. у дод. 6).

Задача 7. Статистичний аналіз числової вибіркової сукупності

У вищому навчальному закладі проводилося тестування студентів з метою з'ясування рівня знань з курсу вищої математики. Студенти, крім відповідей на запропоновані питання, повинні були вказати, скільки часу кожний з них витрачав на підготовку до тесту. Підсумком тестування виявилася генеральна сукупність даних обсягом $N = 600$ (див. дод. 7) за двома числовими ознаками: результат тестування в балах (ознака 1) і час, витрачений на підготовку до тесту в годинах (ознака 2).

Потрібно:

створити індивідуальну вибірку сукупності даних (ознаки 1 і 2) обсягом $n = 100$ відповідно до зазначеного викладачем індивідуального номера K і наступного правила: з генеральної сукупності вибрати 100 значень ознак 1 і 2 з послідовними номерами $NN = K, K+5, K+10, \dots, K+495$ (усі значення ознаки 1 збільшити при цьому на величину K);

після упорядкування значень ознаки 1 за зростанням побудувати для цієї ознаки інтервальний варіаційний ряд;

побудувати багатокутник і гістограму вибіркового розподілу ознаки 1;

визначити числові характеристики побудованого вибіркового розподілу: а) вибіркoву середню, б) вибіркoву дисперсію, в) вибіркoве середньоквадратичне відхилення;

для побудованого вибіркового розподілу перевірити гіпотезу про те, що ознаку 1 в генеральній сукупності розподілено за нормальним законом (рівень значимості $\alpha = 0,05$);

при довірчій ймовірності $\gamma = 0,95$ визначити довірчі інтервали для математичного сподівання, дисперсії й середньоквадратичного відхилення ознаки 1 у генеральній сукупності, використовуючи для цього перші $(20 + q)$ значень ознаки 1 у початковій (неупорядкованій) вибірці; q – остання цифра індивідуального номера K ;

для тих же $(20 + q)$ перших значень ознак 1 і 2 побудувати рівняння прямої лінії регресії Y (ознака 1) на X (ознака 2) і рівняння прямої лінії регресії X на Y . Визначити коефіцієнти кореляції й детермінації та пояснити зміст цих коефіцієнтів. Побудувати графіки прямих ліній регресії разом із заданим кореляційним полем.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Теорія ймовірностей та математична статистика. Математика для економістів. – К.: НАУ, 1997. – 224 с.
2. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 1999. – 576 с.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища шк., 1988. – 438 с.
4. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1999. – 400 с.
5. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1999. – 480 с.
6. *Кузнецов А.М., Зароський Р.І., Неделько Є.Ю.* Лабораторний практикум з математичної статистики. – Миколаїв: УДМТУ, 2002. – 48 с.
7. *Мармоза А.Т.* Практикум по математической статистике. – К.: Вища шк., 1990. – 191 с.
8. *Мартиненко М.А., Клименко Р.К., Лебедева І.В.* Теорія ймовірностей. Конспект лекцій і практичних занять. – К.: УДУХТ, 1999. – 242 с.
9. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. *А.А.Свешникова*. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
10. *Толбатов Ю.А.* Математична статистика та задачі оптимізації в алгоритмах і програмах. – К.: Вища шк., 1994. – 394 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Функція густини ймовірності нормального розподілу

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2033	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0941	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0271	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0159	0155	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0094	0091	0089	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0049	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0041	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018

Продовж. дод. 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

$$\text{Значення функції } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810

Продовж. дод. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,50	0,4938
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,52	0,4941
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,54	0,4945
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,56	0,4948
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,58	0,4951
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,60	0,4953
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,62	0,4956
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,01	0,4777	2,64	0,4959
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,02	0,4783	2,66	0,4961
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,03	0,4788	2,68	0,4963
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,34	0,4904	3,00	0,4986

Продовж. дод. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,38	0,4913	3,40	0,4996
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,40	0,4918	3,60	0,4998
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,42	0,4922	3,80	0,4999
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,44	0,4927	4,00	0,4999
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,46	0,4931	4,50	0,4999
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,48	0,4934	5,00	0,4999

Додаток 3

Таблиця значень $\chi^2 = f(\alpha, r)$
(критичні точки χ^2 -розподілу)

r	α									
	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01
1	0,0002	0,001	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	5,41	6,63
2	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	7,82	9,21
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	9,84	11,34
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	11,67	13,28
5	0,554	0,752	0,831	1,145	1,61	9,24	11,07	12,83	13,39	15,09
6	0,872	1,134	1,24	1,635	2,20	10,64	12,59	14,45	15,03	16,81
7	1,239	1,564	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	16,62	18,48
8	1,646	2,03	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	18,17	20,1
9	2,09	2,53	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	19,68	21,7
10	2,56	3,06	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,5	21,2	23,2
11	3,05	3,61	3,82	4,57	5,58	17,27	19,68	21,9	22,6	24,7
12	3,57	4,18	4,40	5,23	6,30	18,55	21,0	23,3	24,1	26,2
13	4,11	4,76	5,01	5,89	7,04	19,81	22,4	24,7	25,5	27,7
14	4,66	5,37	5,63	6,57	7,79	21,1	23,7	26,1	26,9	29,1
15	5,23	5,98	6,26	7,26	8,55	22,3	25,0	27,5	28,3	30,6
16	5,81	6,61	6,91	7,96	9,31	23,5	26,3	28,8	29,6	32,0
17	6,41	7,26	7,56	8,67	10,08	24,8	27,6	30,2	31,0	33,4
18	7,01	7,91	8,23	9,39	10,86	26,0	28,9	31,5	32,3	34,8
19	7,63	8,57	8,91	10,11	11,65	27,2	30,1	32,9	33,7	36,2
20	8,26	9,24	9,59	10,85	12,44	28,4	31,4	34,2	35,0	37,6
21	8,90	9,92	10,28	11,59	13,24	29,6	32,7	35,5	36,3	38,9
22	9,54	10,60	10,98	12,34	14,04	30,8	33,9	36,8	37,7	40,3

Продовж. дод. 3

r	α									
	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01
23	10,20	11,29	11,69	13,09	14,85	32,0	35,2	38,1	39,0	41,6
24	10,86	11,99	12,40	13,85	15,66	33,2	36,4	39,4	40,3	43,0
25	11,52	12,70	13,12	14,61	16,47	34,4	37,7	40,6	41,7	44,3
26	12,20	13,41	13,84	15,38	17,29	35,6	38,9	41,9	42,9	45,6
27	12,88	14,12	14,57	16,15	18,11	36,7	40,1	43,2	44,1	47,0
28	13,56	14,85	15,31	16,93	18,94	37,9	41,3	44,5	45,4	48,3
29	14,26	15,57	16,04	17,71	19,77	39,1	42,6	45,7	46,7	49,6
30	14,95	16,31	16,79	18,49	20,60	40,3	43,8	47,0	48,0	50,9

Додаток 4

**Таблиця критичних точок t -розподілу Ст'юдента
(двобічна критична область)**

n	γ					
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,310
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,214
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,61
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,86
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,96
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,40
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,04
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,78
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,59
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,49
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,32
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,22
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,14
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,07
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,02
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,96
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,92
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,88

Продовж. дод. 4

n	γ					
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,85
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,82
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,79
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,77
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,74
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,72
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,71
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,69
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,67
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,66
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,65
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,55
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,46
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,37
∞	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,29

Вихідні дані до задачі 4

Номер варіанта	p_1	p_2	p_3	k_1	k_2
1	0,65	0,75	0,9	0	1
2	0,5	0,6	0,7	0	2
3	0,8	0,85	0,9	1	2
4	0,6	0,7	0,8	1	3
5	0,75	0,85	0,95	2	3
6	0,55	0,7	0,9	0	1
7	0,6	0,75	0,95	1	2
8	0,7	0,8	0,9	1	3
Номер варіанта	n	m	k	k_1	k_2
9	10	6	3	0	2
10	12	5	3	2	3
11	9	4	3	0	1
12	15	8	4	2	4
13	12	7	4	0	3
14	14	6	4	3	4
15	10	5	3	1	2
16	12	8	4	1	3
Номер варіанта	p	k	k_1	k_2	
17	0,1	3	0	2	
18	0,2	3	2	3	
19	0,15	3	0	1	
20	0,1	4	2	4	
21	0,2	4	0	3	
22	0,15	4	3	4	
23	0,25	3	1	2	
24	0,25	4	1	3	
Номер варіанта	p	k_1	k_2		
25	0,9	1	2		
26	0,65	1	4		
27	0,7	3	4		
28	0,8	1	3		
29	0,75	2	4		
30	0,6	3	5		

Вихідні дані до задачі 5 і 6

Номер варіанта	Задача 5				Задача 6				
	a	b	x_1	x_2	a	b	c	x_1	x_2
1	2,5	4	3	3,3	-2	8	-2	1	3
2	1,5	3	2	2,6	-2	4/3	-2/3	1/3	2/3
3	1,5	2,5	2	2,3	-2	-8	2/3	-3/2	-1
4	1	3,5	2	2,8	-4	6	2	0	3/4
5	-1	2	-0,7	1,1	-3	3	-2	1/2	3/2
6	-2	1	-1,5	0,3	-4	-6	-2	-3/4	1/4
7	-3	5	-2	2	-3	-3	2	-1/2	3/2
8	-1,5	2,5	-1	0	-3	-4	2	1/3	4/3
9	1	1,8	1,6	2,1	-2	-4/3	2/3	-1/3	2/3
10	1	2,4	1,5	2,5	-3	4	-2	-1/3	5/3
11	2	3,5	2,8	3,2	-2	8	0	1	3
12	2	2,8	2,1	2,5	-2	4/3	0	1/3	2/3
13	1	2,8	-1	3	-2	-8	0	-3/2	-1
14	1	2,6	1,5	3	-4	6	0	0	3/4
15	2	3	1	3	-3	3	0	1/2	3/2
16	2	4,8	4,5	5	-4	-6	0	-3/4	1/4
17	-4	-2	-3	-1	-3	-3	0	-1/2	3/2
18	-3	-1	-2	0	-3	-4	0	1/3	4/3
19	2	4	0	3	-2	-4/3	0	-1/3	2/3
20	1	3	0	2	-3	4	0	-1/3	5/3
21	0,5	1,5	0	1	-2	8	-1	1	3
22	-1	1,5	0	2	-4	6	1	0	3/4
23	-2	0	-1	2	-2	-8	1	-3/2	-1
24	-1,5	1	-1	1	-4	-6	-1	-3/4	1/4
25	0,5	1	1	3	-3	3	-1	1/2	3/2
26	0,2	2	3	5	-3	-4	1	1/3	4/3
27	0,5	3	0	2,5	-3	-3	1	-1/2	3/2
28	0,4	4	2	4	-3	4	-1	-1/3	5/3
29	0,25	1	2	5	-2	-4/3	1/3	-1/3	2/3
30	0,5	2	0	2	-2	4/3	-1/3	1/3	2/3

Вихідні дані до задачі 7

<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2
1	222	34	37	179	34	73	205	34
2	253	34	38	130	22	74	110	20
3	175	32	39	159	19	75	224	40
4	151	21	40	81	21	76	278	33
5	167	27	41	320	41	77	228	31
6	89	17	42	86	28	78	192	29
7	161	25	43	217	22	79	225	38
8	277	32	44	147	22	80	99	13
9	146	20	45	56	29	81	212	30
10	166	25	46	317	40	82	146	27
11	196	33	47	87	28	83	217	34
12	247	36	48	40	16	84	207	34
13	164	23	49	117	17	85	79	19
14	83	22	50	48	11	86	174	28
15	186	20	51	71	14	87	210	38
16	273	39	52	198	30	88	113	20
17	180	31	53	242	32	89	269	41
18	176	29	54	91	21	90	128	19
19	207	35	55	279	35	91	76	14
20	127	24	56	112	23	92	284	34
21	190	30	57	200	33	93	235	39
22	229	31	58	152	24	94	159	22
23	285	38	59	160	34	95	221	33
24	172	29	60	276	31	96	173	29
25	174	26	61	154	26	97	96	26
26	61	20	62	169	31	98	166	28
27	238	33	63	83	17	99	300	37
28	228	26	64	210	36	100	154	26
29	115	16	65	252	33	101	151	19
30	216	34	66	175	29	102	230	33
31	191	25	67	98	20	103	97	24
32	141	26	68	313	39	104	258	37
33	159	24	69	167	31	105	128	19
34	121	24	70	45	11	106	208	39
35	278	33	71	255	36	107	239	38
36	80	22	72	156	25	108	165	17

Продовж. дод. 7

<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2
109	313	39	148	62	21	187	307	40
110	148	11	149	102	26	188	145	11
111	235	39	150	260	36	189	214	33
112	129	25	151	181	30	190	181	26
113	207	34	152	147	12	191	321	18
114	311	41	153	232	36	192	219	40
115	291	41	154	64	19	193	118	25
116	99	13	155	106	39	194	80	22
117	33	20	156	202	33	195	47	10
118	191	16	157	160	27	196	212	37
119	193	29	158	320	34	197	85	11
120	174	36	159	170	16	198	146	13
121	290	21	160	218	32	199	216	42
122	56	26	161	114	24	200	186	20
123	190	27	162	181	24	201	151	39
124	270	36	163	82	16	202	230	33
125	184	24	164	310	46	203	197	24
126	221	39	165	241	32	204	258	37
127	270	36	166	185	11	205	128	19
128	140	25	167	228	33	206	208	39
129	319	36	168	151	23	207	239	38
130	198	30	169	116	19	208	165	17
131	248	35	170	42	9	209	313	39
132	71	14	171	320	37	210	48	11
133	179	19	172	215	39	211	235	39
134	127	26	173	170	24	212	128	25
135	169	24	174	261	20	213	207	30
136	313	38	175	171	19	214	311	41
137	195	29	176	189	25	215	294	40
138	173	33	177	176	29	216	99	13
139	45	13	178	184	23	217	33	20
140	152	33	179	310	40	218	291	6
141	196	30	180	283	36	219	193	29
142	176	14	181	50	11	220	174	36
143	130	22	182	186	30	221	190	21
144	206	34	183	220	43	222	156	16
145	291	16	184	258	17	223	190	27
146	261	41	185	218	34	224	270	36
147	197	23	186	156	29	225	184	14

Продовж. дод. 7

<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2
226	221	39	261	114	24	296	212	34
227	270	36	262	181	24	297	85	12
228	140	15	263	282	16	298	148	13
229	319	36	264	210	46	299	216	42
230	198	30	265	241	32	300	188	22
231	248	25	266	185	11	301	222	30
232	171	14	267	228	33	302	253	14
233	179	19	268	151	22	303	175	32
234	127	26	269	116	19	304	151	21
235	169	24	270	42	9	305	167	27
236	313	38	271	326	37	306	289	17
237	195	29	272	115	40	307	161	25
238	173	33	273	170	24	308	277	30
239	43	13	274	261	20	309	146	20
240	152	33	275	321	19	310	166	25
241	196	31	276	189	25	311	196	33
242	76	14	277	176	28	312	247	30
243	130	22	278	304	23	313	164	23
244	206	20	279	310	40	314	188	22
245	291	16	280	283	36	315	186	20
246	261	41	281	50	11	316	273	39
247	197	23	282	186	22	317	180	21
248	62	34	283	120	43	318	176	29
249	102	26	284	158	17	319	207	35
250	260	36	285	218	34	320	127	24
251	181	30	286	56	26	321	190	32
252	47	15	287	207	40	322	229	31
253	232	36	288	143	11	323	285	38
254	164	19	289	214	33	324	172	29
255	206	39	290	181	26	325	174	28
256	202	38	291	241	18	326	61	22
257	160	27	292	319	14	327	238	33
258	120	34	293	118	25	328	228	24
259	70	16	294	180	22	329	115	16
260	218	30	295	47	10	330	218	34

Продовж. дод. 7

<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2
331	191	25	366	176	29	401	181	17
332	141	26	367	98	20	402	230	33
333	159	22	368	313	39	403	87	25
334	121	24	369	167	11	404	258	37
335	278	33	370	325	11	405	148	16
336	280	22	371	255	36	406	228	39
337	179	34	372	156	25	407	239	37
338	130	23	373	205	34	408	175	13
339	159	19	374	110	20	409	303	32
340	181	21	375	234	41	410	198	17
341	321	41	376	278	13	411	235	37
342	86	18	377	228	31	412	169	24
343	217	22	378	192	29	413	207	33
344	147	22	379	225	25	414	312	42
345	56	29	380	95	13	415	291	44
346	217	40	381	212	30	416	99	13
347	287	28	382	146	27	417	43	21
348	140	16	383	217	32	418	191	15
349	117	27	384	207	34	419	183	27
350	328	11	385	78	19	420	174	36
351	71	10	386	174	28	421	280	22
352	198	30	387	210	31	422	56	26
353	243	32	388	113	20	423	160	26
354	91	21	389	269	41	424	280	33
355	279	30	390	127	19	425	134	22
356	112	23	391	76	15	426	211	38
357	201	33	392	284	34	427	260	35
358	152	24	393	235	39	428	150	24
359	160	31	394	159	22	429	329	33
360	276	31	395	221	32	430	188	31
361	154	26	396	173	29	431	238	35
362	169	31	397	96	26	432	81	15
363	183	17	398	166	18	433	159	19
364	210	32	399	307	37	434	117	23
365	252	33	400	154	25	435	159	24

Продовж. дод. 7

<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2
436	314	37	471	321	36	506	238	39
437	185	29	472	215	34	507	219	37
438	183	34	473	160	21	508	165	13
439	55	13	474	251	21	509	314	39
440	142	31	475	131	16	510	48	11
441	176	33	476	189	25	511	215	37
442	176	15	477	196	29	512	138	24
443	140	21	478	174	23	513	207	30
444	216	33	479	313	40	514	311	40
445	281	15	480	253	36	515	274	40
446	261	41	481	70	11	516	89	12
447	187	22	482	186	30	517	33	20
448	62	21	483	240	43	518	271	7
449	112	25	484	238	17	519	193	28
450	250	33	485	258	34	520	164	36
451	171	31	486	186	29	509	314	39
452	157	13	487	307	40	510	48	11
453	212	36	488	195	11	511	215	37
454	74	18	489	234	33	512	138	24
455	136	39	490	171	26	513	207	30
456	222	32	491	321	18	514	311	40
457	150	27	492	239	40	515	274	40
458	310	33	493	128	25	516	89	12
459	160	15	494	90	22	517	33	20
460	228	31	495	49	10	518	271	7
461	124	25	496	252	37	519	193	28
462	191	24	497	95	11	520	164	36
463	92	17	498	156	13	521	190	22
464	311	46	499	226	42	522	136	16
465	241	37	500	126	20	523	190	23
466	175	10	501	191	30	524	260	35
467	228	32	502	230	33	525	184	19
468	161	22	503	127	23	526	281	35
469	116	18	504	238	36	527	230	34
470	43	16	505	128	15	528	170	15

Продовж. дод. 7

<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2	<i>N</i>	1	2
529	319	30	561	134	23			
530	168	33	562	191	24			
531	238	24	563	242	18			
532	171	19	564	220	45			
533	169	19	565	241	30			
534	127	21	566	195	13			
535	149	24	567	218	30			
536	312	39	568	101	21			
537	185	29	569	176	18			
538	123	32	570	45	19			
539	47	13	571	323	34			
540	142	37	572	135	41			
541	196	38	573	160	24			
542	86	15	574	191	25			
543	130	23	575	323	18			
544	216	29	576	139	25			
545	281	16	577	196	28			
546	261	43	578	303	23			
547	157	23	579	111	40			
548	72	35	580	273	36			
549	112	29	581	50	11			
550	240	31	582	176	22			
551	131	31	583	130	43			
552	57	17	584	148	17			
553	292	36	585	218	34			
554	154	17	586	66	26			
555	226	39						
556	252	30						
557	150	26						
558	120	33						
559	80	15						
560	248	30						

ЗМІСТ

1. Теорія ймовірностей	3
1.1. Теорема додавання та множення ймовірностей	3
1.2. Формула повної ймовірності та формула Байєса	7
1.3. Формула Бернуллі. Локальна й інтегральна теореми Лапласа	8
1.4. Дискретні випадкові величини та їхні числові характеристики	10
1.5. Неперервні випадкові величини та їхні числові характеристики	11
2. Математична статистика	15
2.1. Опис та статистична обробка даних	15
2.2. Основні числові характеристики вибірки	18
2.3. Розрахунок числових характеристик вибірки з використанням умовних варіант і методу добутків	21
2.4. Перевірка гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності	23
2.5. Інтервальна оцінка параметрів генеральної сукупності. Побудова довірчих інтервалів	25
2.6. Кореляційна залежність	28
Контрольні завдання	32
Задача 1. Безпосередній підрахунок імовірностей	32
Задача 2. Застосування формули повної ймовірності та формули Байєса	35
Задача 3. Підрахунок імовірностей у схемі незалежних випробувань Бернуллі	40
Задача 4. Дискретні випадкові величини, їхні властивості та характеристики	43
Задача 5. Неперервні випадкові величини, розподілені за рівномірним законом	44
Задача 6. Неперервна випадкова величина, розподілена за нормальним законом	45
Задача 7. Статистичний аналіз числової вибіркової сукупності	45
Список рекомендованої літератури	47
Додатки	48

Ромуальд Іванович ЗАРОСЬКИЙ
Юрій Євгенович ЦИБІН

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт з курсу
"Теорія ймовірностей і математична статистика"

Видавництво НУК, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 1150 від 12.12.2002 р.

Редактор О.В. Нестеровська
Комп'ютерна правка та верстка Т.М. Чередніченко
Коректор Н.О. Шайкіна

Підписано до друку 07.06.04. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 3,5. Обл.-вид. арк. 3,8. Тираж 200 прим. Вид. № 34.
Зам. № 110. Ціна договірна.



Шановні панове!

Запрошуємо Вас ознайомитись з можливостями книжкового видавництва, висококваліфіковані спеціалісти якого забезпечать оперативне та якісне виконання замовлення будь-якого рівня складності.

Наш головний принцип – задовольнити потреби замовника в повному комплексі поліграфічних послуг, починаючи з розробки та підготовки оригіналу-макета, що виконується на базі IBM PC, і закінчуючи друком на офсетних машинах.

Крім цього, ми маємо повний комплекс післядрукарського обладнання, що дає можливість виконувати:

- ✓ аркушепідбір;
- ✓ брошурування на скобу, клей;
- ✓ порізку на гільйотинах;
- ✓ ламінування.

Видавництво також оснащено сучасним цифровим дублюкатором фірми "Duplo" формату А3, що дає можливість тиражувати зі швидкістю до 130 копій за хвилину.

Для постійних клієнтів – гнучка система знижок.

Отже, якщо вам потрібно надрукувати **підручники, книги, брошури, журнали, каталоги, рекламні листівки, прайс-листи, бланки, візитні картки**, – ми до Ваших послуг.

© Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

✉ Україна, 54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5, видавництво НУК

☎ 8(0512) 47-83-86; 39-81-42, 39-73-39, fax 8(0512) 42-46-52;

E-mail: publishing@usmtu.edu.ua