

УДК 621.4
DOI [https://doi.org/10.15589/znp2023.4\(493\).8](https://doi.org/10.15589/znp2023.4(493).8)

MATHEMATICAL MODELS OF RADIAL OSCILLATIONS WATER COLLECTOR WALL HYDROTHERMAL HEAT PUMP SYSTEMS

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РАДІАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СТІНОК ВОДЯНОГО КОЛЕКТОРА ГІДРОТЕРМАЛЬНІ ТЕПЛОНАСОСНОЇ СИСТЕМИ

Oleksii V. Zurian
alexey_zuryan@ukr.net
ORCID: 0000-0002-2391-1611

О. В. Зур'ян,
канд. техн. наук, старший науковий співробітник

Institute of Renewable Energy of the NAS of Ukraine, Kyiv
Інститут відновлюваної енергетики НАН України, м. Київ

Abstract. The relevance of the transition to renewable energy sources is the subject of constant discussion and scientific research, and in recent years there have been particularly active discussions about the feasibility of using heat pump technologies, the effectiveness and availability of which are proven by both numerous scientific studies and the experience of operating heat pump installations in many countries of the world. Geothermal heat pump systems, which use the low potential energy of the upper layers of the Earth, are already widely used in environmentally safe and economically profitable energy systems. At the same time, the use of low-potential water energy of open water bodies in hydrothermal heat pump systems is not yet widely used. The existing hydrothermal systems are not always adapted to the operating conditions and location of the object, the issue of a scientific approach to the development of the technological design of the hydrothermal collector, the methodology of its optimal placement and the determination of efficiency and reliability depending on the operating conditions remains relevant.

Purpose. On the basis of analytical research, develop an applied methodology as a set of principles and approaches for mathematical modeling of radial oscillations of pipeline walls, which make up the heat exchange system of a hydrothermal heat pump system with an open reservoir, taking into account the process of heat transfer from the water of the open reservoir to the heat pump evaporator.

Method. The following methods are used in the article: analysis, synthesis, deduction, extrapolation method, comparative method and inductive method. **Results.** The analysis of the relations between stresses and deformations in the cylindrical coordinate system was performed and the equations of motion of the walls of the pipelines that perform the function of heat exchangers of the hydrothermal heat pump system were derived. The values of the velocities of longitudinal and transverse sound vibrations are determined. It is proved that the dynamic behavior of the displacements in the pipeline wall has a form different from the dynamic behavior of the pressure in the liquid, in connection with which the measurement of the radial displacements of the walls of pipelines cannot serve as a sufficiently convenient informative parameter for the analysis of dynamic processes in pipelines filled with liquid. Identified differences in approaches and methods of modeling the calculation of the movement of pipeline walls using the finite element method (FEM), and calculation according to the system of equations of a thin shell.

The scientific novelty consists in a new approach to methods of calculating the movement of the walls of the pipeline that performs the function of a heat exchanger of a hydrothermal heat pump system. Methodology of its optimal placement and determination of efficiency and reliability depending on operating conditions.

Practical importance. The results of the research can be used in the educational process of students, and the proposed mathematical model allows you to substantiate the optimal circuit solutions of hydrothermal collectors of heat pump systems of set power and reliability depending on the specific installation location.

Key words: open reservoir; surface water; heat pump system; modeling; reliability; heat exchanger; collector.

Анотація. Актуальність переходу на відновлювані джерела енергії є предметом постійного обговорення та наукових досліджень, а в останні роки особливо активно ведуться дискусії щодо доцільності використання теплонасосних технологій ефективності та доступності яких доводять як чисельні наукові дослідження, так і досвід експлуатації теплонасосних установок у багатьох країнах світу. Геотермальні тепло насосні системи, що використовують низько потенційну енергію верхніх шарів Землі вже широко застосовується в екологічно безпечних та економічно рентабельних енергетичних системах. Разом з тим використання низькопотенційної

енергії води відкритих водойм в гідротермальних теплонасосних системах ще не має широкого застосування. Наявні гідротермальні системи не завжди адаптовані до умов експлуатації та місця розташування об'єкта, актуальним залишається питання наукового підходу до розробки технологічної конструкції гідротермального колектора, методології оптимального його розміщення й визначення ефективності та надійності в залежності від умов експлуатації.

Мета. На основі аналітичних досліджень розробити прикладну методологію, як сукупність принципів та підходів математичного моделювання радіальних коливань стінок трубопроводів, які складають теплообмінну систему гідротермальної теплонасосної системи з відкритою водоймою з урахуванням процесу переносу теплоти від води відкритої водойми до випарника теплового насосу.

Методика. У статті використано такі методи: аналіз, синтез, дедукцію, метод екстраполяції, порівняльний метод та індуктивний.

Результати. Виконано аналіз зв'язків між напруженнями і деформаціями в циліндричній системі координат та виведено рівняння руху стінок трубопроводів що виконують функцію теплообмінників гідротермальної теплонасосної системи. Визначені значення швидкостей поздовжніх і поперечних звукових коливань. Доведено, що інамічна поведінка зміщень в стінці трубопроводів має вигляд, відмінний від динамічної поведінки тиску в рідині, в зв'язку з чим вимірювання радіальних зміщень стінок трубопроводів не може служити досить зручним інформативним параметром для аналізу динамічних процесів в трубопроводах, заповнених рідиною. Визначені відмінності в підходах і способах моделювання розрахунків руху стінок трубопроводу за допомогою методу скінчених елементів (FEM), і розрахунків за системою рівнянь тонкої оболонки.

Наукова новизна полягає в новому підході до способів розрахунку руху стінок трубопроводу що виконує функцію теплообмінника гідротермальної теплонасосної системи. Методології оптимального його розміщення й визначення ефективності та надійності в залежності від умов експлуатації.

Практична значимість. Результати дослідження можуть бути використані в навчальному процесі студентів, а також запропонована математична модель дозволяє обґрунтувати оптимальні схемні рішення гідротермальних колекторів теплонасосних систем заданої потужності та надійності в залежності від конкретного місця монтажу.

Ключові слова: відкрита водойма; поверхневі води; тепло насосна система; моделювання; надійність; теплообмінник; колектор.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Державна політика України з енерго- та ресурсозбереження передбачає суттєве розширення обсягів використання відновлюваних джерел енергії з урахуванням екологічної складової. У квітні 2023 року Кабінет Міністрів України за поданням Міністерства енергетики схвалив Енергетичну стратегію України до 2050 року. Стратегія передбачає досягнення Україною вуглецевої нейтральності енергетичного сектору до зазначеного періоду.

Основною перевагою використання відновлюваних енергоресурсів є їх невичерпність та екологічна чистота.

Серед відновлювальних джерел енергії теплота земних надр характеризується стабільністю параметрів, які не залежать від сезонних і добових коливань температури. Різновиди геотермальних джерел енергії, з'акумльовані [гірськими породами] [підземними термальними водами в усіх агрегатних станах] [верхніми шарами Землі, які розташовано нижче нейтрального шару та мають температуру до 36°C]. Гідротермальна енергія – енергія, накопичена у формі теплової енергії у поверхневих водах (води суходолу, що постійно або тимчасово перебувають на земній поверхні у формі різних водних об'єктів).

Геотермальні теплонасосні системи, що використовують низькопотенційну енергію верхніх шарів Землі вже широко застосовується в екологічно

безпечних та економічно рентабельних енергетичних системах. Разом з тим використання низькопотенційної енергії води відкритих водойм в гідротермальних теплонасосних системах ще не має широкого застосування. Наявні гідротермальні системи не завжди адаптовані до умов експлуатації та місця розташування об'єкта, актуальним залишається питання наукового підходу до розробки технологічної конструкції гідротермального колектора, методології оптимального його розміщення й визначення ефективності та надійності в залежності від умов експлуатації.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Виконаний аналіз проведених наукових досліджень показав, що більшість з них в даному напрямку сконцентровані на визначенні аналізу геотермального енергетичного потенціалу, вивчення фізичних особливостей та енергетичної ефективності акумулювання тепла та холоду шляхом використання води підземних горизонтів, техніко-економічній доцільності впровадження теплонасосних технологій з використанням різних джерел відновлюваної низькопотенційної енергії.

Науково-дослідні та дослідно-конструкторські роботи щодо використання низькопотенційної теплової енергії приповерхневих шарів ґрунту за допомогою теплових насосів проводяться як в Україні так і світі вже тривалий час [1, 2, 3]. Відомо, що

надлишкове тепло отримане в процесі охолодження можливо зберігати в ґрунті [4, 5, 6]. Дослідження щодо встановлення теплового балансу в ґрунті під час експлуатації ГеоТНС описані в роботах [7, 8, 9]. Проводяться активні науково-дослідницькі роботи з вивчення фізичних особливостей та енергетичної ефективності акумулювання тепла та холоду шляхом використання води підземних горизонтів [10, 11, 12]. Доведено техніко-економічну ефективність використання низько потенційної енергії води з відкритих водойм (озер, річок, морів...) в теплонасосних системах [13, 14].

Результати цих досліджень підтверджують перспективність напрямку підвищення енергоефективності за рахунок використання низькопотенційної теплової енергії води відкритих водойм для потреб опалення, кондиціювання, гарячого водопостачання та забезпечення технологічних потреб споживачів, як в польових (автономних) умовах так й в умовах техногенно навантажених урбосистем.

ВІДОКРЕМЛЕННЯ НЕ ВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

Актуальність переходу на відновлювані джерела енергії є предметом постійного обговорення та наукових досліджень, а в останні роки особливо активно ведуться дискусії щодо доцільності використання теплонасосних технологій ефективність та доступність яких доводять як чисельні наукові дослідження, так і досвід експлуатації теплонасосних установок у багатьох країнах світу.

Мірою енергетичної ефективності теплонасосної установки (ТНУ) є коефіцієнт перетворення, який характеризує відношення енергії, що надійшла споживачеві, до витраченої енергії. Оцінки показують, що для вдало спроектованих систем теплопостачання коефіцієнт перетворення може досягати від 4 до 6.

Підвищенням ефективності та надійності теплових насосів займаються передові комерційні компанії та наукові інститути світу. Цей процес відбувається постійно, що приводить до зменшення металоємкості приладу та її вартості, та підвищення надійності та функціональності.

Разом з тим залишаються недостатньо дослідженими системи які використовуються для вилучення низькопотенційної теплової енергії – теплообмінників (колекторів). Зазвичай вони представляють собою трубу занурену у природне середовище. Для гідротермальних теплонасосних систем це гнучка труба згорнута кільцями та занурена в водойму.

Саме від конструктивних особливостей даних теплообмінників та їх адаптованості до конкретного місця розташування залежить ефективність ГідроТНС в цілому.

Головною особливістю системи добування геотермальної теплової енергії є поєднання технічних

і природного елементів таких систем. При цьому природне джерело теплової енергії перебуває в середовищі, яке малодоступне для спостережень.

Другою не менш значною проблемою є подовження ресурсу теплообмінних пристроїв, й забезпечення надійності елементів даного теплообмінного обладнання в умовах старіння матеріалів, схильних до комплексного впливу інтенсивних, механічних і теплових складових.

За таких обставин основними методами дослідження теплових і гідродинамічних процесів в системах видобування низькопотенційних гідро/геотермальних ресурсів з приповерхневих шарів Землі та поверхневих вод та системах її перетворення на енергію комфортну для застосування в теплоенергетиці є теоретичні методи. Основний з них – математичне моделювання. Серйозною перешкодою, яка стримує впровадження даних систем, є фактична відсутність аналітичного, математичного, програмного і методичного забезпечення для розробки таких систем для різних, гідрогеологічних, метеорологічних, морфологічних біологічних та антропогенних умов використання.

Цим обумовлені значимість та актуальність теми дослідження.

Мета дослідження – розробити прикладну методологію, як сукупність принципів та підходів математичного моделювання радіальних коливань стінок трубопроводів які складають теплообмінну систему гідротермальної теплонасосної системи з відкритою водоймою з урахуванням процесу переносу теплоти від води відкритої водойми до випарника теплового насосу.

Методи. У статті використано такі методи: аналіз, синтез, дедукцію, метод екстраполяції, порівняльний метод та індуктивний

Об'єктом дослідження є процеси радіальних коливань стінок водяного колектора гідротермальної теплонасосної системи

Предметом дослідження є параметри процесів радіальних коливань стінок водяного колектора гідротермальної теплонасосної системи

ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

Основна відмінність теплового насоса від інших перетворювачів відновлюваної енергії полягає в тому, що при виробництві тепла до 80% енергії вилучається з навколишнього середовища (для гідротермальних систем – води відкритих водойм). Однак така система має і недоліки, які визначаються суттєвою залежністю її ефективності від стабільності дебіту системи та температури води на виході з теплообмінника зануреного у природне середовище, а також надійністю теплообмінника. Одним із параметрів, що визначає надійність теплообмінника є можливі зміщення стінок трубопроводів

При вимірюванні радіальних зміщень стінок трубопроводів у трубопроводах, заповнених рідиною,

інформативність цього параметру може бути обмеженою з кількох причин:

Рух рідини в трубопроводі: Рідина, яка перебуває в трубопроводі, може зазнавати руху під дією тиску та потоку. Це може призводити до коливань та турбулентності внутрішнього потоку рідини, які ускладнюють точне вимірювання радіальних зміщень стінок.

Зміни форми труби: Внаслідок тиску та температурних змін може відбуватися деформація трубопроводу. Це може впливати на форму труби і впливати на точність вимірювань радіальних зміщень.

Неоднорідність рідини: Рідина можуть містити частки або інші домішки, які можуть утворювати силу тривалого дії на стінки труби та впливати на їх рух.

Неоднаковий тиск: Внутрішній тиск у трубопроводі може бути неоднаково розподіленим в залежності від умов роботи і ділянки трубопроводу. Це може призводити до змін у формі та розмірах стінок труби.

Неоднорідність матеріалу стінок: Матеріал труби також може бути неоднорідним, і це може впливати на його міцність та деформацію.

У таких умовах для аналізу динамічних процесів в трубопроводах зазвичай використовують більш точні методи вимірювання, такі як вимірювання тиску, температури, об'ємного потоку рідини та інші параметри. Крім того, чисельні моделі та симуляції також можуть бути використані для більш точного аналізу динамічних процесів в трубопроводах та визначення впливу різних факторів.

Для моделювання динамічних процесів в трубопроводах, через які циркулює теплоносія від відкритої водойми до теплового насоса, включаючи радіальні коливання стінок трубопроводів, можна використовувати чисельні методи, такі як метод скінчених елементів (Finite Element Method, FEM) та метод обмежених об'ємів (Finite Volume Method, FVM). Ось деякі конкретні моделі та аспекти, які можуть бути включені в такий аналіз:

Теплоперенос і гідравліка: Використовуйте моделі теплопереносу і гідравліки для аналізу руху теплоносія в трубопроводі та теплових втрат через стінки. Це включає в себе рівняння Нав'є-Стокса для моделювання гідравліки та рівняння переносу тепла для моделювання теплопереносу.

Розширення трубопроводів: Для врахування радіальних коливань стінок трубопроводів можна використовувати моделі розширення трубопроводів, які включають рівняння тонкої оболонки або еластичності. Вони описують деформацію та рух стінок трубопроводу під дією тиску і температурних змін.

Моделі теплообміну: Для врахування теплообміну між теплоносієм і оточуючим середовищем використовуються моделі теплообміну, включаючи конвекцію, кондукцію і випромінювання тепла.

Динаміка структури: Якщо важливо врахувати динаміку стінок трубопроводу, можуть

використовуватися моделі динаміки структури. Це включає в себе розгляд трубопроводу як гнучкого тіла та врахування його коливань і деформацій.

Моделі границі та умови задачі: Для точного аналізу визначення граничних умов і умов задачі дуже важливо. Це включає в себе визначення теплових та гідравлічних умов на кінцях трубопроводу.

Залежно від конкретного завдання і області дослідження можуть використовуватися різні комбінації чисельних методів та моделей. Такий аналіз дозволить визначити, як теплоносія рухається в трубопроводі, враховуючи гідравлічні, теплові та механічні аспекти, і як це впливає на динаміку системи.

Рівняння руху стінок трубопроводу в залежності від умов і припущень може бути досить складним. Основна система рівнянь, яку можна використовувати для моделювання деформацій і руху стінок трубопроводу, є системою рівнянь тонкої оболонки.

Для того, щоб вивести рівняння руху стінок трубопроводів розглянемо спочатку зв'язки між напруженнями і деформаціями в циліндричній системі координат r, θ, z для елементарного об'єму, представленого на рис. 1, з розмірами $\Delta r, r\Delta\theta, \Delta z$ в околі точки з координатами r, θ, z . Позначимо через u_r, u_θ, u_z величини компонент зміщень по осях r, θ, z . Очевидно, що відносне подовження в напрямку r характеризується деформацією e_r , яка визначається виразом

$$e_r = [u_r(r + \Delta r) - u_r(r)] / \Delta r = \frac{\partial u_r}{\partial r}. \quad (1)$$

Обчислюючи відносні подовження в інших напрямках аналогічним чином, приходимо до наступної системи рівнянь, що зв'язує деформації зі зміщеннями:

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}, e_{\theta z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Зв'язок деформацій з напруженнями в циліндричній системі координат має таку ж саму форму, як і в прямокутних координатах, і записується виразами:

$$\begin{aligned} p_{\theta z} &= \mu e_{\theta z}, p_{rz} = \mu e_{rz}, p_{r\theta} = \mu e_{r\theta}, \\ p_{rr} &= (\lambda + 2\mu) e_{rr} + \lambda e_{\theta\theta} + \lambda e_{zz}, \\ p_{\theta\theta} &= \lambda e_{rr} + (\lambda + 2\mu) e_{\theta\theta} + \lambda e_{zz}, \\ p_{zz} &= \lambda e_{rr} + \lambda e_{\theta\theta} + (\lambda + 2\mu) e_{zz}, \end{aligned} \quad (3)$$

де λ – параметр Ламе і μ – модуль зсуву, які пов'язані з модулем всебічного стиснення K , модулем розтягання (модулем Юнга) E і коефіцієнтом Пуассона σ наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} K &= \lambda + \frac{2}{3}\mu, E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}, \\ K &= \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}, \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Через названі вище параметри визначаються значення швидкостей поздовжніх C_L і поперечних C_t звукових коливань

$$C_L = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}, \quad C_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}. \quad (5)$$

Прирівнюючи далі сили інерції, які діють на елементарний об'єм в напрямках r, z , силам тиску на грані об'єму, отримаємо рівняння руху стінки трубопровода в напрямках r, z в наступній формі:

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial p_r}{\partial r} + \frac{p_r}{r} \frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial p_z}{\partial z}, \quad \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial p_z}{\partial r} + \frac{p_z}{r} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \quad (6)$$

або з урахуванням виразів (1.2), (1.3) – в формі

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Якщо припустити, що зміщення u_z не залежить від r , а зміщення u_r не залежить від z , система рівнянь (7) розщиплюється і перетворюється до вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right), \quad (8)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Далі розглянемо рівняння (8), прийнявши до уваги при формулюванні граничних умов ту обставину, що напруження p_r пов'язане зі зміщенням u_r відповідно з виразами (2), (3) наступним співвідношенням:

$$p_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{r}. \quad (10)$$

З (10) випливає, що для ненавантаженого зовнішнього контуру трубопроводу гранична умова для u_r має вигляд

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{R + \delta} \Big|_{r=R+\delta} = 0, \quad (11)$$

а для контуру, навантаженого тиском рідини p , гранична умова u_r є

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{R} \Big|_{r=R} = p. \quad (12)$$

З рівнянь (9), (11), (12) випливає, що в стаціонарному випадку розподіл зміщення u_r по радіусу трубопроводу r описується крайовою задачею вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{R + \delta} \Big|_{r=R+\delta} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{R} \Big|_{r=R} &= p. \end{aligned} \quad (13)$$

Так як рівняння в крайовій задачі (13) може бути представлене у вигляді

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right) = 0,$$

то

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = C_1, \quad C_1 = \text{const}, \quad (14)$$

$$u_r = \frac{C_2}{r} + \frac{C_1}{2} r, \quad C_2 = \text{const}. \quad (15)$$

Значення констант C_1, C_2 визначається з граничних умов в (13) і має такий вигляд:

$$C_1 = -\frac{pR^2}{(\lambda + \mu)(2R\delta + \delta^2)}, \quad C_2 = -\frac{pR^2(R + \delta)^2}{2\mu(2R\delta + \delta^2)}. \quad (16)$$

Далі, підставляючи вирази (16) в (15), отримуємо залежності для зміщень на зовнішній ($r = R + \delta$) і внутрішній стінках трубопроводу ($r = R$)

$$\begin{aligned} u_r(r = R + \delta) &= -\frac{pR^2(R + \delta)}{2(2R\delta + \delta^2)} \cdot \frac{1 + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}, \\ u_r(r = R) &= -\frac{pR[(\lambda + \mu)(R + \delta)^2 + \mu R^2]}{2(2R\delta + \delta^2)\mu(\lambda + \mu)}, \end{aligned} \quad (17)$$

які з урахуванням малості відношення δ / R набувають однакового вигляду

$$\begin{aligned} u_r(r = R + \delta) &= u_r(r = R) \approx -\frac{pR^2}{4\delta} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \\ \text{при } \delta / R &\ll 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Далі, використавши вираз (16) в межах $\delta / R \ll 1$.

$$C_1 \approx -\frac{pR}{2(\lambda + \mu)\delta}, \quad C_2 \approx -\frac{pR^3}{4\mu\delta},$$

оцінимо значення членів $\frac{u_r}{r^2}$, $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r}$ і $\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}$:

$$\frac{u_r}{r^2} \approx -\frac{p}{4\delta} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} \approx \frac{p\lambda}{4\delta\mu(\lambda + \mu)}, \quad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \approx -\frac{2p}{\mu\delta}, \quad (19)$$

звідки випливає

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{\lambda}{8(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}, \quad -\frac{u_r}{r^2} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{8(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}.$$

Обчислюючи відповідно вище отриманим приблизним співвідношенням диференціальний оператор

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \approx \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2},$$

можна прийти до фізично зрозумілого висновку про те, що для тонкостінних трубопроводів модель розповсюдження радіальних коливань представлена в формі, аналогічній поздовжнім коливанням

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{R + \delta} \Big|_{r=R+\delta, t} &= 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \frac{u_r}{R} \Big|_{r=R, t} = p, \\ u_r(r, t = 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial r}(r, t = 0) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Використання перетворювання Лапласа до u_r по змінній t [15]

$$u_r^*(r, s) = \int_0^\infty e^{-st} u_r(r, t) dt$$

приводить до крайової задачі для звичайних рівнянь виду:

$$\frac{d^2 u_r^*}{dr^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} s^2 u_r^* = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{du_r^*}{dr} + \lambda \frac{u_r^*}{R + \delta} \Big|_{r=R+\delta} = 0, \quad (\lambda + 2\mu) \frac{du_r^*}{dr} + \lambda \frac{u_r^*}{R} \Big|_{r=R} = \bar{p}^* \quad (21)$$

У відповідності з загальне рішення крайової задачі (21) визначається виразом

$$u_r^* = C_1 \exp\left[\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} sr\right] + C_2 \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} sr\right], \quad (22)$$

де константи C_1, C_2 визначаються з системи рівнянь

Проаналізувавши структуру виразів (22), (23), можна зробити висновок про те, що динамічна поведінка зміщень в стінці трубопроводів має вигляд, відмінний від динамічної поведінки тиску в рідині, в зв'язку з чим вимірювання радіальних зміщень стінок трубопроводів не може служити досить зручним інформативним параметром для аналізу динамічних процесів в трубопроводах, заповнених рідиною.

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left\{ \left[\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right]^{1/2} s C_1 \exp\left[\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} s(R + \delta)\right] - (\lambda + 2\mu) \times \right. \\ & \times \left\{ \left[\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right]^{1/2} s C_2 \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} s(R + \delta)\right] \right\} + \\ & + \frac{\lambda}{R + \delta} \left\{ C_1 \exp\left[\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} s(R + \delta)\right] + C_2 \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} s(R + \delta)\right] \right\} \Big|_{r=R+\delta} = 0, \quad (23) \\ & (\lambda + 2\mu) \left\{ \left[\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right]^{1/2} s C_1 \exp\left[\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} sR\right] - \right. \\ & - (\lambda + 2\mu) \left\{ \left[\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \right]^{1/2} s C_2 \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} sR\right] \right\} + \\ & + \frac{\lambda}{R} \left\{ C_1 \exp\left[\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} sR\right] + C_2 \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\right)^{1/2} sR\right] \right\} \Big|_{r=R} = \bar{p}^*. \end{aligned}$$

Розрахунок руху стінок трубопроводу за допомогою системи рівнянь тонкої оболонки має кілька переваг:

Точність: Система рівнянь тонкої оболонки враховує товщину стінок трубопроводу і забезпечує точний розрахунок деформацій та напружень в матеріалі.

Гнучкість: Ця система дозволяє моделювати рух трубопроводу під впливом різних умов та навантажень, таких як внутрішні та зовнішні тиски, температурні зміни, різні типи граничних умов тощо.

Врахування товщини стінок: Система рівнянь тонкої оболонки враховує товщину стінок трубопроводу, що особливо важливо для трубопроводів з тонкими стінками, де товщина матеріалу важлива.

Моделювання складних геометричних форм: Ви можете використовувати цю систему для моделювання трубопроводів з різними геометричними формами, включаючи трубопроводи з змінним діаметром та формою перетину.

Можливість визначення різних параметрів: За допомогою цієї системи ви можете визначити параметри, такі як деформації, напруження, зміщення,

кутові відхилення, а також швидкість та прискорення руху стінок трубопроводу.

Оптимізація дизайну: Система рівнянь тонкої оболонки дозволяє вам проводити аналіз і оптимізацію дизайну трубопроводу для досягнення бажаних характеристик і безпеки.

Можливість використання для різних матеріалів: Система рівнянь тонкої оболонки може бути використана для різних матеріалів, що дозволяє моделювати трубопроводи з різних видів сталі, пластику, композитних матеріалів тощо.

Загалом, система рівнянь тонкої оболонки є потужним інструментом для аналізу та моделювання руху стінок трубопроводу в різних умовах і дозволяє отримувати високоякісні результати для проектування і обслуговування трубопровідних систем.

Розрахунок руху стінок трубопроводу може бути залежним від конкретних умов та параметрів системи. Нижче наведено приклад спрощеного розрахунку руху стінок трубопроводу за допомогою методу скінчених елементів (Finite Element Method, FEM) в середовищі MATLAB. При цьому припускається, що трубопровід рухається під дією зовнішніх сил та обмежень.

% Встановлення параметрів трубопроводу та розрахунок
L = 10; % Довжина трубопроводу (м)
D = 0.1; % Діаметр трубопроводу (м)
E = 2.1e11; % Модуль пружності матеріалу (Па)
t = 0.005; % Товщина стінки трубопроводу (м)
rho = 7850; % Густина матеріалу (кг/м³)
P = 1e6; % Зовнішній тиск (Па)

% Створення геометричної моделі трубопроводу
model = createpde();

% Створення геометричних об'єктів (циліндр)
R = [3; 4];
gm = multicuboid(R, L, 'Sides', 'open');
geometryFromEdges(model, gm);

% Задання фізичних властивостей матеріалу
structuralProperties(model, 'YoungsModulus', E,
'PoissonsRatio', 0.3);

% Задання обмежень на кінцях трубопроводу (фіксовані крайові умови)
applyBoundaryCondition(model, 'dirichlet', 'Edge', 1:4, 'u', 0);

% Задання зовнішніх навантажень (приклад – рівномірний тиск вздовж трубопроводу)
distributedLoad = P / (pi * D * t);
distributedLoad = createDistributedLoad(model, 'r', 'z', 'Fz',
distributedLoad);
applyBoundaryLoad(model, 'neumann', 'Edge', 5, 'g',
distributedLoad);

% Створення та розв'язок системи рівнянь
generateMesh(model);
result = solvepde(model);

% Відображення результатів (зміщення стінок трубопроводу)
u = result.NodalSolution;
pdeplot3D(model, 'ColorMapData', u(1, :), 'Deformation',
'on', 'DeformationScaleFactor', 1e3);
title('Зміщення стінок трубопроводу');

Розрахунок руху стінок трубопроводу, розроблений за допомогою методу скінчених елементів (FEM), має більше переваг по відношенню до системи рівнянь тонкої оболонки:

Точність: FEM дозволяє розраховувати поведінку стінок трубопроводу з високою точністю, особливо при складних геометріях та матеріалах.

Гнучкість: FEM може бути використаний для моделювання різних умов та впливів, таких як різні типи навантажень, граничні умови, а також змінні параметри матеріалу.

Можливість моделювання реальних умов: За допомогою FEM, ви можете моделювати рух стінок трубопроводу в реальних умовах, з урахуванням зовнішніх навантажень, температурних змін, внутрішніх тисків тощо.

Можливість врахування складних геометричних форм: FEM дозволяє моделювати складні геометричні форми, що часто зустрічаються у реальних об'єктах, таких як трубопроводи зі змінним діаметром, різними перетинами тощо.

Можливість визначення різних параметрів: FEM дозволяє визначити багато параметрів, таких як напруження, зміщення, деформації, швидкість руху тощо, що може бути корисним для аналізу та конструювання трубопроводів.

Можливість оптимізації дизайну: FEM дозволяє проводити аналіз різних варіантів дизайну та вибирати оптимальний.

Візуалізація результатів: FEM зазвичай надає інструменти для візуалізації результатів, що полегшує сприйняття інформації та її аналіз.

ВИСНОВКИ

1. Розрахунок руху стінок трубопроводу, розроблений за допомогою методу скінчених елементів (FEM), і розрахунок за системою рівнянь тонкої

оболонки мають певні відмінності в підходах і способах моделювання. Ось деякі з них:

– Розмір моделі та складність: FEM дозволяє створити більш докладні та складні моделі, включаючи деталізацію геометрії, матеріалів та навантажень. Він може бути використаний для більш реалістичного моделювання геометричних властивостей трубопроводу.

– Товщина стінок: FEM може бути використаний для моделювання трубопроводів з різною товщиною стінок, в той час як розрахунок тонкої оболонки передбачає однорідні тонкі стінки.

– Розгляд граничних умов: FEM дозволяє більше гнучкості в розгляді різних типів граничних умов та обмежень, включаючи змінні граничні умови вздовж трубопроводу.

– Точність і обсяг обчислень: FEM може надавати більш точні результати для складних задач, але при цьому вимагає більше обчислень та об'ємну обчислювальну потужність.

– Матеріалів: FEM дозволяє моделювати різні матеріали та їх поведінку під впливом навантажень, включаючи неоднорідні матеріали та неоднорідну поведінку.

– Швидкість обчислень: Розрахунок тонкої оболонки, як правило, вимагає менше обчислень та ресурсів, що може бути важливим для деяких застосувань.

2. Обираючи між даними методами, важливо враховувати конкретні потреби вашого проекту, обсяг і якість даних, яку ви маєте, і обчислювальну потужність, яку ви можете надати. Зазвичай FEM використовується для більш складних, точних і докладних обчислень, тоді як розрахунок тонкої оболонки може бути швидким та ефективним методом для більш простих задач.

REFERENCES

- [1] Bezrodnyi, M. K., Pukhovy, I. I., Kutra, D. S. (2013) *Teplovi nasosy ta yikh vykorystannia*. [Heat pumps and their uses] : textbook. Kyiv. 312 p. (Ukrainian)
- [2] Dolinsky, A.A., Draganov, B.H. (2008) *Teplovi nasosy u systemi teplopostachannia budivel*. [Heat pumps in the heat supply system of buildings]. *Industrial heat engineering*. № 6. P. 71–83. (Ukrainian)
- [3] Kudrya, S.O. (2020) *Vidnovliuvani dzherela enerhii*. [Renewable energy sources] : monograph. Kyiv : IVE NAS of Ukraine. 354 p. (Ukrainian)
- [4] Dincer I., Rosen M. (2011) *Thermal energy storage: systems and applications* : 2nd ed. London : Wiley. 315 p.
- [5] Kalaiselvam, S., Parameshwaran, R. (2014) *Thermal energy storage technologies for sustainability: systems design, assessment, and applications* : 1st ed. Amsterdam : Elsevier AP. 233 p.
- [6] Andersson, O., Ekkestubbe, J., Ekdahl, A. (2013) *UTES (underground thermal energy storage) – applications and market development in Sweden*. *Energy Power Eng*. №7. P. 669–678.
- [7] Bayer, P., Saner, D., Bolay, S., Rybach, L., Blum, P. (2012) *Greenhouse gas emission savings of ground source heat pump systems in Europe: a review*. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. №16: P. 1256–1267. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2011.09.027>
- [8] Morozov, Y.P., Chalaev, D.M., Nikolayevskaya, N.V., Dobrovolsky, M.P. (2019) *Otsinka efektyvnosti vykorystannia teplovoho potentsialu dovkillia ta verkhnikh shariv Zemli Ukrainy*. [Evaluation of the efficiency of using the thermal potential of the environment and the upper layers of the Earth of Ukraine]. *Renewable energy*. № 4(63). P. 80–88. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4\(63\).80-88](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4(63).80-88) (Ukrainian)

- [9] Zurian, O.V., Oliynychenko, V.G. (2021) Hidrotermalna systema otrymannia teplovoi enerhii, fizychni protsesy, efektyvnist. [Hydrothermal system of heat energy production, physical processes, efficiency]. *Visnyk of Vinnytsia Politechnical Institute*. № 4. P. 40–46. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2021-157-4-40-46> (Ukrainian)
- [10] Zurian, O.V., Barilo, A.A. (2022) Impact of the natural temperature regime of the upper layers of the earth on the efficiency of a hydrothermal heat pump system. *Journal of Geology, Geography and Geoecology*. Vol 31. No. 3. P. 575–584. <https://doi.org/10.15421/112254>
- [11] Zurian, O.V. (2021) Eksperymentalni doslidzhennia teplovoho rezhymu hidrotermalnoi teplonasosnoi systemy. [Experimental studies of the thermal regime of the hydrothermal heat pump system]. *Renewable energy*. No. 1 (56). P. 10–19. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.4\(67\).77-89](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.4(67).77-89)
- [12] Morozov, Yu.P., Chalaev, D.M., Oliynichenko, V.G., Velichko, V.V. (2019) Eksperymentalne doslidzhennia dobovoho akumuluvannia kholodu shliakhom vykorystannia vody pidzemnykh horyzontiv m. Kyieva. [Experimental study of daily accumulation of cold by using water from the underground horizons of the city of Kyiv]. *Renewable energy*. No. 3. P. 67–77. [https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3\(58\).67-77](https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3(58).67-77)
- [13] Barylo, A. A. (2020) Analiz hidroheolohichnykh i heotermichnykh kharakterystyk heotermalnykh ob'ektiv Ukrainy. [Analysis of hydrogeological and geothermal characteristics of geothermal objects of Ukraine]. *Vidnovlyuvana energetyka*. № 1(60). P. 74–84. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.1\(60\).74-85](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.1(60).74-85)
- [14] Malkin E.S., Kulinko Ye.O. (2014) Perspektyvy ta aspekty zastosuvannia system teplokhodopostachannia, yaki vykorystovuiut pryverkhnevi shary vody v yakosti teplovoho akumulatora. [Prospects and aspects of application of heat and cold supply systems that use near-surface layers of water as a heat accumulator]. *Ventylaciya, osvittleniya ta teplogazopostachannya*. 2014. № 17. P. 63–69. [in Ukrainian]
- [15] Andrianov, I.V. (1991) Kontynualna aproksymatsiia dla vysokochastotnykh kolyvan lantsiuzhka. [Continuum approximation for high-frequency oscillations of a chain] // DAN. Ukrainian SSR Ser. A. P. 13–15. [in Ukrainian]

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Безродний, М. К., Пуховий, І. І., Кутра, Д. С. (2013) Теплові насоси та їх використання : навч. посіб. Київ. 312 с.
- [2] Долінський, А. А., Драганов, Б. Х. (2008) Теплові насоси у системі тепlopостачання будівель. *Промислова теплотехніка*. № 6. С. 71–83.
- [3] Кудря, С.О. (2020) Відновлювані джерела енергії : монографія. Київ : ІБЕ НАН України, 354 с.
- [4] Dincer I., Rosen M. (2011) Thermal energy storage: systems and applications : 2nd ed. London : Wiley. 315 p.
- [5] Kalaiselvam, S., Parameshwaran, R. (2014) Thermal energy storage technologies for sustainability: systems design, assessment, and applications : 1st ed. Amsterdam : Elsevier AP. 233 p.
- [6] Andersson, O., Ekkestubbe, J., Ekdahl, A. (2013) UTES (underground thermal energy storage) – applications and market development in Sweden. *Energy Power Eng.* №7. P. 669–678.
- [7] Bayer P., Saner D., Bolay S., Rybach L., Blum P. (2012) Greenhouse gas emission savings of ground source heat pump systems in Europe: a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. № 16. 1256–1267. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2011.09.027>
- [8] Морозов, Ю.П., Чалаєв, Д.М., Ніколаєвська, Н.В., Добровольський, М.П. (2019) Оцінка ефективності використання теплового потенціалу довкілля та верхніх шарів Землі України. *Відновлювана енергетика*. № 4(63). С. 80–88. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4\(63\).80-88](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.4(63).80-88)
- [9] Зур'ян, О.В., Олійніченко, В.Г. (2021) Гідротермальна система отримання теплової енергії, фізичні процеси, ефективність. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. № 4. С. 40–46. <https://doi.org/10.31649/1997-9266-2021-157-4-40-46>
- [10] Zurian O.V., Barilo A.A. (2022) Impact of the natural temperature regime of the upper layers of earth on efficiency of a hydrothermal heat pump system. *Journal of Geology, Geography and Geoecology*. Vol 31. No 3. P. 575–584. <https://doi.org/10.15421/112254>
- [11] Зур'ян, О.В. (2021) Експериментальні дослідження теплового режиму гідротермальної теплонасосної системи. *Відновлювана енергетика*. 2021. № 1 (56). С. 10–19. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.4\(67\).77-89](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2021.4(67).77-89)
- [12] Морозов, Ю.П., Чалаєв Д.М., Олійніченко В.Г., Величко В.В. (2019) Експериментальне дослідження добового акумулювання холоду шляхом використання води підземних горизонтів м. Києва. *Відновлювана енергетика*. № 3. С. 67–77. [https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3\(58\).67-77](https://doi.org/10.36296/1819-058.2019.3(58).67-77)
- [13] Баріло, А. А. (2020) Аналіз гідрогеологічних і геотермічних характеристик геотермальних об'єктів України. *Відновлювана енергетика*. № 1(60). С. 74–84. [https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.1\(60\).74-85](https://doi.org/10.36296/1819-8058.2020.1(60).74-85)
- [14] Малкін, Е.С., Кулінко, Є.О. (2014) Перспективи та аспекти застосування систем теплохолодопостачання, які використовують приповерхневі шари води в якості теплового акумулятора. *Вентиляція, освітлення та тепло-газопостачання*. №17. С. 63–69.
- [15] Андріанов, І.В. (1991) Континуальна апроксимація для високочастотних коливань ланцюжка // ДАН. УРСР. Сер. А. С. 13–15.

© Зур'ян О. В.

Дата надходження статті до редакції: 03.10.2023

Дата затвердження статті до друку: 08.11.2023