

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**Л.Т. Саприкіна, Т.А. Юрченко,
А.М. Кузнецов, І.І. Ластовецька**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання типових розрахунків та
індивідуальних завдань з вищої математики**

В двох частинах

Частина I

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв 2006

УДК 517(076)

Методичні вказівки до виконання типових розрахунків та індивідуальних завдань з вищої математики: У 2 ч. / **Л.Т. Саприкіна, Т.А. Юрченко, А.М. Кузнецов, І.І. Ластовецька.** – Миколаїв: НУК, 2006. – Ч. 1. – 40 с.

Кафедра вищої математики

Методичні вказівки містять завдання типових розрахунків та індивідуальних завдань з розділів курсу вищої математики, що вивчаються студентами на першому курсі.

Кожне завдання подано 25 варіантами. До типових розрахунків надані зразки їх виконання.

Рецензент канд. фіз.-мат. наук О.М. Шихватов

Розділ I
Типовий розрахунок № 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Завдання 1. Встановити, що система рівнянь має єдиний розв'язок та знайти його: а) за допомогою оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) за методом Гаусса.

Варіант	Система	Варіант	Система
1	$\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$	6	$\begin{cases} x - y + 3z = 3, \\ 3x - 5y + z = 3, \\ 4x - 7y + z = 4 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ 4x + 2y + z = -4, \\ 9x + 3y + z = -8 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + 3y - 2z = 6, \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x - y + z = 7, \\ 2x + y - z = 2, \\ -x - 3y + 2z = 7 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$

Продовження

Варіант	Система	Варіант	Система
11	$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5, \\ 2x - y - 3z = 4, \\ x + 5y + z = 5 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x + 2y - z = 2, \\ 5x - y + 3z = -10, \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 5x + 4y + 3z = 22, \\ 10x + 5y + z = 23 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2x + y - 2z = -3, \\ x - 2y + z = 4, \\ 3x - y + 7z = 13 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x + 2y + z = 4, \\ 3x - 5y + 3z = 1, \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x - 3y + z = -1, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 2x - z = 1, \\ 2x + 4y - z = 1, \\ x - 8y - 3z = -2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + 3y + z = 4, \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 4y + z = 6, \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 4x - 3y - z = -6, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$		

Завдання 2. Встановити, при якому значенні λ система має ненульові розв'язки. Знайти ці розв'язки.

Варіант	Система	Варіант	Система
1	$\begin{cases} x + 2y - (\lambda + 4)z = 0, \\ 2x + y - 5z = 0, \\ x - y - z = 0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ 5x - (10 + \lambda)y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Продовження

Варіант	Система	Варіант	Система
3	$\begin{cases} \lambda x - y + 4z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ x + 4y + (1 + \lambda)z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \lambda x - 3y + 2z = 0, \\ -2x + 6y - 4z = 0, \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x + y - 5z = 0, \\ x + (5 - \lambda)y - 3z = 0, \\ x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x - 6y + 7z = 0, \\ 5x - 14y + 15z = 0, \\ x + (2 - \lambda)y - 3z = 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 4x + y + 3z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 5x + (5 - \lambda)y + 2z = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ 3x + (8 - \lambda)y + 3z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 5x + y - 2z = 0, \\ 15x + 3y - (9 - \lambda)z = 0, \\ x + y - 10z = 0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 2z = 0, \\ (1 - \lambda)x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x + 2y - (5 - \lambda)z = 0, \\ x - 2y + 2z = 0, \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x + y = 0, \\ 4x + y + 3z = 0, \\ x + 2y - \lambda z = 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 5x + 5y + z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ (5 - \lambda)x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 6x - \lambda y - 3z = 0, \\ -2x + 6y + z = 0, \\ 3x - 6y - z = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x + (4 - \lambda)y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - 13z = 0, \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2x - z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0, \\ (4 + \lambda)x - 14y + 15z = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x - y + 4z = 0, \\ (7 - \lambda)x + 3y + 2z = 0, \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + \lambda y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ -(10 - \lambda)x + 5y - 5z = 0, \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 4x + 5y - (13 - \lambda)z = 0, \\ 5x + 7y - 16z = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 4x - 4y + 3z = 0, \\ x + (6 - \lambda)y - 3z = 0, \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2x - 3y + (5 + \lambda)z = 0, \\ x + 2y - z = 0, \\ 5x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ (2 + \lambda)x + 7y + 3z = 0 \end{cases}$

Продовження

Варіант	Система	Варіант	Система
25	$\begin{cases} x + y - 5z = 0, \\ x - y + z = 0, \\ (\lambda - 3)x - 3y + 15z = 0 \end{cases}$		

Завдання 3. Встановити, які лінії визначаються заданими рівняннями. Знайти характеристики цих ліній та побудувати їх.

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1	а) $x^2 + 4y^2 = 4$; б) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$; в) $x = -2\sqrt{-y}$	2	а) $y^2 = 5x + 10$; б) $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$; в) $25x^2 + 16y^2 = 1$
3	а) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$; б) $x^2 = 2 - y$; в) $x = -2\sqrt{y^2 - 1}$	4	а) $y + \frac{1}{6}x^2 + 2x + 7 = 0$; б) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$; в) $x^2 - 4y^2 = 16$
5	а) $x^2 = 16y + 2$; б) $x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$; в) $-x^2 + 4y^2 = 4$	6	а) $x^2 = -2y - 2$; б) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$; в) $16x^2 + y^2 = 64$
7	а) $y^2 = 4x - 8$; б) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$; в) $-x^2 + 9y^2 = -9$	8	а) $y^2 = 2x + 1$; б) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$; в) $x^2 + 9y^2 = 36$
9	а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$; б) $x = 4\sqrt{-2y}$; в) $9x^2 + 4y^2 = 36$	10	а) $x^2 = 2y + 2$; б) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$; в) $4x^2 - 7y^2 = -28$
11	а) $x^2 = 3y - 6$; б) $x = -\frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 6y}$; в) $x^2 + 9y^2 = 81$	12	а) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$; б) $y = x^2 - 5$; в) $x^2 + 6y^2 = 24$

Продовження

Вари- ант	Рівняння	Вари- ант	Рівняння
13	а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$; б) $x = -5\sqrt{-y}$; в) $6x^2 - 8y^2 = -24$	14	а) $y^2 = -12 - 6x$; б) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$; в) $-9x^2 + 4y^2 = 36$
15	а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$; б) $x = 4\sqrt{-y}$; в) $x^2 + 25y^2 - 25 = 0$	16	а) $y^2 - 6y + 14y + 49 = 0$; б) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}$; в) $4x^2 + 7y^2 = 28$
17	а) $x = 2y^2 + 6y$; б) $y = -3\sqrt{x+1}$; в) $4x^2 + 9y^2 = 36$	18	а) $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$; б) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$; в) $9x^2 - 16y^2 = 144$
19	а) $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$; б) $y = \sqrt{-7x}$; в) $9x^2 + 25y^2 = 1$	20	а) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$; б) $y = -\sqrt{-4x+2}$; в) $y^2 - 9x^2 = 9$
21	а) $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$; б) $y = -\sqrt{2x+2}$; в) $x^2 - 4y^2 = -16$	22	а) $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$; б) $x = -\sqrt{-3y}$; в) $9y^2 + 4x^2 - 36 = 0$
23	а) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$; б) $x = -\sqrt{3y}$; в) $-5x^2 + 9y^2 = -45$	24	а) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$; б) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + 9}$; в) $5x^2 + 9y^2 = 45$
25	а) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$; б) $x = -\frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 16}$; в) $16x^2 + y^2 = 16$		

Завдання 4. Побудувати лінію, задану рівнянням у полярній системі координат. Знайти її рівняння у декартовій системі (додатня піввісь Ox співпадає з полярною віссю, полюс – з початком координат).

Варі- ант	Рівняння	Варі- ант	Рівняння	Варі- ант	Рівняння
1	$\rho = \frac{1}{2} + \cos\varphi$	6	$\rho = 3\sqrt{\cos^2\varphi}$	11	$\rho = \frac{3}{2 + \sin\varphi}$
2	$\rho = 3\sin\varphi$	7	$\rho = 3 + \sin\varphi$	12	$\rho = 2\sin^2 2\varphi$
3	$\rho = \cos 2\varphi$	8	$\rho = 2\cos^2\varphi$	13	$\rho = 4\cos\varphi$
4	$\rho = 3(1 + \sin\varphi)$	9	$\rho = 1 + \cos 2\varphi$	14	$\rho = 2 + \sin\varphi$
5	$\rho = 2(1 - \cos\varphi)$	10	$\rho = 3\cos^2 2\varphi$	15	$\rho = \frac{1}{2 + \cos\varphi}$

Записати рівняння заданої лінії у полярних координатах (додатня піввісь Ox співпадає з полярною віссю, полюс – з початком координат) та побудувати цю лінію.

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
16	$(x^2 + y^2)^2 = 20x^3$	21	$(x^2 + y^2)^2 = -4x^3$
17	$(x^2 + y^2)^2 = 8y^3$	22	$(x^2 + y^2)^2 = 18xy$
18	$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$	23	$(x^2 + y^2)^3 = x^4$
19	$(x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2)$	24	$(x^2 + y^2)^3 = y^4$
20	$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$	25	$(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$

Зразок виконання типового розрахунку № 1

Завдання 1. Встановити, що система рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок та знайти його: а) за допомогою оберненої матриці; б) за формулами Крамера; в) за методом Гаусса.

Розв'язання

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 8 & -10 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 80 + 18 - 6 - 64 - 30 = 6;$$

$\Delta \neq 0$, тому система має єдиний розв'язок.

а) *Матричним методом* розв'язок системи знайдемо за формулою

$$X = A^{-1} \cdot H,$$

де $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих;

$H = \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \\ 1 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів; A^{-1} – матриця, обер-

нена до матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 8 & -10 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця існує, оскільки $\Delta = \det A \neq 0$. Знайдемо обернену матрицю. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 8 & -10 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -22; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -37; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -23;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -10 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -22 & -4 & 4 \\ -37 & -7 & 4 \\ -23 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -22 & -4 & 4 \\ -37 & -7 & 4 \\ -23 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -22 \cdot 5 - 4(-25) + 4 \cdot 1 \\ -37 \cdot 5 - 7(-25) + 4 \cdot 1 \\ -23 \cdot 5 - 5(-25) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x = -1$; $y = -1$; $z = 2$.

б) За формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -25 & 8 & -10 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -6; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -25 & -10 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 8 & -25 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 12; \quad \Delta = 6.$$

$$\text{Звідси маємо: } x = \frac{-6}{6} = -1; y = \frac{-6}{6} = -1; z = \frac{12}{6} = 2.$$

в) Метод Гаусса

Прямий хід. Виключаємо невідомі з рівнянь системи, зводячи її до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ -3x + 8y - 10z = -25 \\ 4x - 3y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ + \text{(I)} \cdot 3 \\ + \text{(I)} \cdot (-4) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ 2y - 4z = -10 \\ 5y - 7z = -19 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ 5y - 7z = -19 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ + \text{(II)} \cdot (-5) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5, \\ 3z = 6. \end{cases}$$

Обернений хід. З третього рівняння одержаної трикутної системи $z = 2$, з другого $y = -1$, з першого $x = -1$.

Відповідь: $x = -1, y = -1, z = 2$.

Завдання 2. Встановити, при якому значенні λ система

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0, \\ 3x + (1 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

має ненульові розв'язки. Знайти ці розв'язки.

Розв'язання

Відомо, що однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульові розв'язки, коли визначник системи дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 + \lambda \end{vmatrix} = -1 - \lambda + 6 - 3 - 2\lambda - 2 = 0, \text{ звідки } \lambda = 0.$$

Підставимо $\lambda = 0$ в дану систему:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0, \\ 3x + z = 0. \end{cases}$$

Одержана система має безліч ненульових розв'язків. Знаходимо їх:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I)} \\ + \text{(I)} \cdot (-2) \\ + \text{(I)} \cdot (-3) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + 4z = 0 \\ -3y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{4}{3}z, \quad x = -\frac{z}{3}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Позначивши $\frac{z}{3} = t$, отримаємо: $x = -t, y = 4t, z = 3t, t \in \mathbb{R}$.

Завдання 3. Встановити, які лінії визначаються заданими рів-

няннями. Знайти характеристики цих ліній та побудувати їх:

а) $x^2 - 9y^2 = -81$; б) $5x^2 - 10x + 3y^2 + 12y - 13 = 0$; в) $x = 3\sqrt{-2y}$.

Розв'язання

а) $x^2 - 9y^2 = -81$. Зведемо до канонічного вигляду: $-\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Це рівняння визначає гіперболу з центром на початку координат, півосями $a = 9$ (уявна), $b = 3$ (дійсна); $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{90}$. Фокуси $F_1(0; -\sqrt{90})$, $F_2(0; \sqrt{90})$, вершини $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$. Побудуємо основний прямокутник і його діагоналі, що є асимптотами гіперболи і зобразимо гілки лінії (рис. 1).

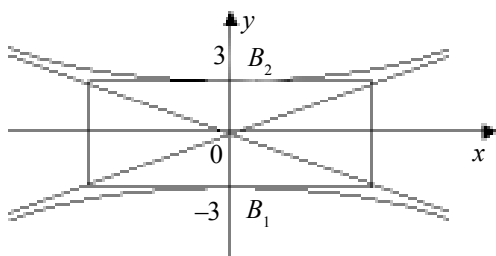


Рис. 1

б) $5x^2 - 10x + 3y^2 + 12y - 13 = 0$. Зведемо рівняння до канонічного вигляду:

$$5(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3(y^2 + 4y + 4 - 4) - 13 = 0,$$

звідси

$$5(x - 1)^2 - 5 + 3(y + 2)^2 - 12 - 13 = 0,$$

отже,

$$\frac{(x - 1)^2}{6} + \frac{(y + 2)^2}{10} = 1.$$

Це рівняння визначає еліпс з центром $C(1; -2)$, півосями $a = \sqrt{6}$,

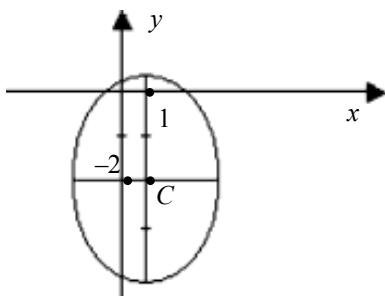


Рис. 2

$b = \sqrt{10}$; $c = \sqrt{b^2 - a^2} = 2$; ексцентриситет $\epsilon = \frac{c}{b} = \frac{2}{\sqrt{10}}$ (рис 2).

в) $x = 3\sqrt{-2y}$. Зведемо рівняння до канонічного вигляду: $x^2 = -18y$. Рівняння визначає спадну параболу з вершиною $O(0; 0)$, віссю симетрії Oy . Параметр параболи $p = 9$, фокус

$F\left(0; -\frac{9}{2}\right)$. Задане рівняння $x = 3\sqrt{-2y}$ визначає праву половину цієї параболи. Для побудови лінії візьмемо ще хоча б одну точку, що лежить на ній, наприклад $A(6; -2)$ (рис. 3).

Завдання 4

Задача 1. Побудувати лінію, задану рівнянням у полярній системі координат $\rho = 2a\cos 3\varphi$. Знайти її рівняння у декартовій системі (додатна піввісь Ox співпадає з полярною віссю, полюс – з початком координат).

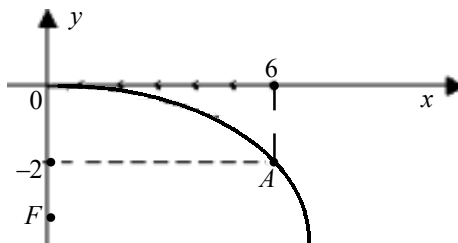


Рис. 3

Розв'язання
У полярній системі координат $\rho \geq 0$, тому треба брати $\cos 3\varphi \geq 0$. В тригонометричному колі знаки $\cos 3\varphi$ розподіляються так, як показано на рис. 4. Згідно з цим достатньо побудувати лінію для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$, а далі, враховуючи періодичність та парність функції $\cos 3\varphi$, розповсюдити її на проміжок $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 2\pi$.

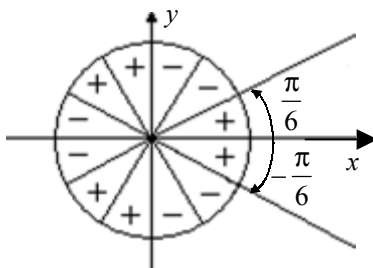


Рис. 4

Складаємо таблицю значень функції $\rho = 2a\cos 3\varphi$ (табл. 1).

Точки з'єднуємо плавною лінією (рис. 5). За формулами $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\rho}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\rho}$ одержимо рівняння лінії в декартових координатах:

$$\rho = 2a\cos 3\varphi = 2a(4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi),$$

звідси

Таблиця 1

φ	3φ	$\cos 3\varphi$	ρ
0	0	1	$2a$
$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx 1,7a$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\approx 1,4a$
$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	a
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	0	0

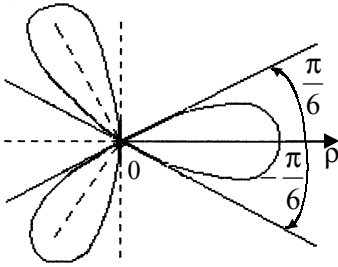


Рис. 5

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \left(\frac{4x^3}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

отже,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a(4x^3 - 3x(x^2 + y^2)).$$

$$\text{Остаточно: } (x^2 + y^2)^2 = 2ax(x^2 - 3y^2).$$

Задача 2. Записати рівняння заданої лінії у полярних координатах (додатна піввісь Ox співпадає з полярною віссю, полюс – з початком координат) та побудувати цю лінію $(x^2 + y^2)^2 = 8y^3$.

Розв'язання

За формулами переходу до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ одержимо:

$$\rho^4 = 8\rho^3 \sin^3 \varphi, \text{ тоді } \rho = 8 \sin^3 \varphi.$$

Оскільки $\rho \geq 0$, то $0 \leq \varphi \leq \pi$. Складаємо таблицю значень функції $\rho = 8 \sin^3 \varphi$ (табл. 2), за якою і будуємо лінію (рис. 6).

Таблиця 2

φ	$\sin \varphi$	ρ
0	0,0	0,0
$\frac{\pi}{6}$	0,5	1,0
$\frac{\pi}{4}$	0,7	2,7
$\frac{\pi}{3}$	0,85	4,9
$\frac{\pi}{2}$	1,0	8,0

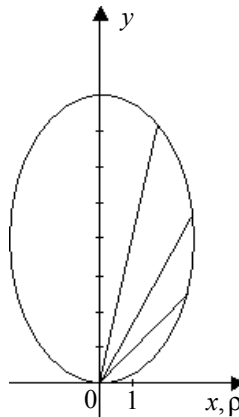


Рис. 6

Типовий розрахунок № 2. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Завдання 1. Обчислити площу фігури, що обмежена даними лініями. Зробити рисунок.

Варіант	Рівняння ліній	Варіант	Рівняння ліній
1	$y = 4 - x^2;$ $y = x^2 - 2x$	2	$y = x^2 - 3x - 2;$ $y = -2x$
3	$y^2 + 4x = 4;$ $y^2 - 12x = 36$	4	$y = x^2 - 2x + 4;$ $9x + y + 2 = 0$
5	$y = x^2 - 3x;$ $y = 2x - 6$	6	$y = 5x - 2x^2;$ $y = 2x - 2$
7	$y = 9 - x^2;$ $y = x^2 - 3x$	8	$y = x^2 - 3x;$ $y = 2x + 6$
9	$y = x^2 + 5x;$ $y = 2x + 4$	10	$y = x^2 - 2x - 1;$ $y = 1 - x$
11	$x = 8 - y^2;$ $x = y^2$	12	$y = 3x^2 - 3;$ $y = x^2 + 6x + 5$
13	$y^2 = 2x + 2;$ $y^2 = 6 - 2x$	14	$y = (x - 1)^2;$ $y^2 = x - 1$
15	$x = 4 - y^2;$ $x = y^2 - 2y$	16	$y = x^2 - 5x;$ $y = -x^2 + x + 8$
17	$x = y^2 - 4;$ $x = -y^2 + 3y + 5$	18	$y = x^2 - 4x - 3;$ $y + 3x + 1 = 0$
19	$x = 2y^2 + 6y;$ $x - y + 2 = 0$	20	$x = 4 - y^2;$ $x = 3y^2$
21	$y = x^2 + 3x;$ $4x + y + 6 = 0$	22	$y = x^2 - 4x;$ $x + y - 4 = 0$
23	$y = x^2 - 5x;$ $3x + y - 3 = 0$	24	$x^2 - 2y = 3;$ $x^2 - y = 4$
25	$y = 2x^2 + 6x + 5;$ $y = x + 3$		

Завдання 2. Обчислити площу фігури, що обмежена заданими лініями. Зробити рисунок.

Варіант	Рівняння ліній	Варіант	Рівняння ліній
1	$\rho = a \cos 3\varphi$	2	$\rho = 2 + \cos \varphi$
3	$\rho = 1 - \cos \varphi$	4	$\rho = 3 + \cos \varphi$; $\rho = 2$
5	$\rho = 3 \cos 2\varphi$	6	$\rho = 2(1 - \cos \varphi)$; $\rho = 4$
7	$\rho = 4 \cos 3\varphi$	8	$\rho = 2 + \sin \varphi$
9	$\rho = 3 - \sin \varphi$	10	$\rho = 2 \sin 4\varphi$
11	$\begin{cases} x = a \cos^3 t; \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$	12	$\rho = 4 \sin^2 \varphi$
13	$\rho = a(1 - \cos \varphi)$	14	$\rho = a \sin 2\varphi$
15	$\rho = a \cos 2\varphi$	16	$\rho = 2(1 + \sin \varphi)$
17	$\rho = 2(1 + \cos \varphi)$	18	$\rho = 2 \cos 6\varphi$
19	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$	20	$\rho^2 = 2 \cos 2\varphi$
21	$\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$	22	$\rho = a \sin 3\varphi$
23	$\rho = 3(1 - \sin \varphi)$	24	$\rho = a \cos 5\varphi$
25	$\rho = 0,5(3 - \sin \varphi)$		

Завдання 3. Обчислити довжини дуг кривих.

Варіант	Рівняння ліній	Варіант	Рівняння ліній
1	$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t); \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}$	2	$\begin{cases} x = 3 \cos^3 t; \\ y = 3 \sin^3 t \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = e^t \cos t; \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$	4	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t); \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$
5	$y = (1+x)^{\frac{3}{2}};$ $-1 \leq x \leq 4$	6	$y = \ln \cos x;$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

Продовження

Варіант	Рівняння ліній	Варіант	Рівняння ліній
7	$\rho = 3(1 - \cos \varphi)$	8	$\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t; \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$
9	$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$ $0 \leq x \leq \ln 3$	10	$y = \sqrt{(x-1)^3};$ $1 \leq x \leq 5$
11	$\rho = a \sin^3 \left(\frac{\varphi}{3} \right)$	12	$\begin{cases} x = \sqrt{3} t^2, \\ y = t - t^3; \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$
13	$y = \ln \sin x;$ $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	14	$y = 1 - \ln \cos x;$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
15	$y = \operatorname{ch} x;$ $0 \leq x \leq 1$	16	$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 1; \\ 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$
17	$\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3};$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	18	$\rho = 1 - \cos \varphi$
19	$\rho = 5(1 + \cos \varphi);$ $0 \leq \varphi \leq \pi$	20	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t); \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$
21	$\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$	22	$y = 6\sqrt{x^3};$ $0 \leq x \leq 3$
23	$\begin{cases} x = \frac{t^6}{6}, \\ y = 2 - \frac{t^4}{4}; \\ 0 \leq t \leq \sqrt[4]{8} \end{cases}$	24	$y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x;$ $0 \leq x \leq 3$

Продовження

Варіант	Рівняння ліній	Варіант	Рівняння ліній
25	$\begin{cases} x = a(3 \cos t - \cos 3t), \\ y = a(3 \sin t - \sin 3t); \\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$		

Завдання 4. Обчислити об'єм тіла, що обмежене заданими поверхнями. Зробити рисунок.

Варіант	Рівняння поверхонь
1	$x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$
2	$x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{8}; \quad x = 4$
3	$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}; \quad z = 2$
4	$(z-3)^2 = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}; \quad z = 0$
5	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1; \quad z = -1; \quad z = 1$
6	$z = 4 - y^2; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0; \quad x = a$
7	$z = 4 - x^2 - 4y^2; \quad z = 0$
8	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1; \quad z = 0; \quad z = 4$
9	$z = 9x^2 + y^2; \quad z = 4$
10	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = 1; \quad z = 0; \quad z = 6$
11	$z = 2x^2 + 6y^2; \quad z = 6$
12	$z = 3 - 2x^2 - 6y^2; \quad z = 0$
13	$z = 9 - x^2 - 9y^2; \quad z = 0$
14	$z = x^2 + 2y^2; \quad z = 4$

Продовження

Варіант	Рівняння поверхонь
15	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1; \quad z = 0; \quad z = 3$
16	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1; \quad z = 0; \quad z = 4$
17	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1; \quad z = 0; \quad z = 4$
18	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1; \quad z = 0; \quad z = 2$
19	$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1; \quad z = y; \quad z = 0; \quad (y \geq 0)$
20	$x^2 + y^2 = 9; \quad z = y; \quad z = 0; \quad (y \geq 0)$
21	$z = 2x^2 + 8y^2; \quad z = 4$
22	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1; \quad z = 20$
23	$z = 3x^2 + 4y^2; \quad z = 6$
24	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1; \quad z = 16$
25	$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad z = y\sqrt{3}; \quad z = 0; \quad (y \geq 0)$

Завдання 5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігур, обмежених заданими лініями. У парних варіантах вісь обертання Oy , у непарних – Ox .

Варіант	Рівняння ліній	Варіант	Рівняння ліній
1	$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \quad x = 1; \quad x = -1;$ $y = 0$	2	$y = x^2; \quad y = 2 - x^2$
3	$y = 2x - x^2; \quad y = x$	4	$y^2 = 2 - x; \quad x = 1$
5	$y = x^2; \quad y = \sqrt{x}$	6	$y = 4x^2; \quad y = 4x$
7	$y = -x^2 + 8; \quad y = x^2$	8	$x = 5 - y^2; \quad x = 5 - 2y$

Продовження

Варіант	Рівняння ліній	Варіант	Рівняння ліній
9	$y = 2\sqrt{x+1}; y = \sqrt{4-2x}; y = 0$	10	$y = 2x^2; y = x^2 + 1$
11	$y = e^x; y = 1; x = \ln 2$	12	$x = 2\sqrt{y}; x = 2; y = 0$
13	$y = 4x - x^2; y = x$	14	$y = \arcsin x; x = 0$
15	$y = 9x^2; y = 9x$	16	$y = \arccos x; x = 0$
17	$x = \sqrt{y}; x = 2\sqrt{y}; x = 2$	18	$x = 6 - y^2; x = 6 - 2y$
19	$y = \sin x; y = 0; 0 \leq x \leq \pi$	20	$y = x^3; x = 2; y = 0$
21	$y = \cos 3x; x = 0; y = 0; x = \frac{\pi}{6}$	22	$x = 1 - y^2; x = 0$
23	$xy = 2; y = 1; x = 1; x = 2$	24	$y^2 = 16x; y = 0; x = 1$
25	$y = 3 \sin x; y = \sin x; 0 \leq x \leq \pi$		

Завдання 6

Варіант	Умова задачі
1	Обчислити силу, з якою вода тисне на греблю, що має форму рівнобічної трапеції з верхньою основою a , нижньою b та висотою h , якщо вода доходить до верхньої основи
2	Електричний заряд E , що міститься в початку координат, відштовхує заряд e з точки $(a; 0)$ в точку $(b; 0)$. Знайти роботу A сили відштовхування F
3	Знайти роботу, яку треба витратити при викачуванні рідини густиною γ з цистерни, що обмежена поверхнями $y^2 = 2pz, x = \pm a(a > 0), z = p(p > 0)$
4	Знайти кінетичну енергію диску маси M і радіуса R , який обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через центр диску перпендикулярно до його площини
5	Яку роботу треба витратити, щоб тіло маси M підняти з поверхні землі, радіус якої дорівнює R , на висоту h ?
6	Знайти роботу, яку треба витратити, щоб викачати воду з корита, що має форму півциліндра, довжина якого a , радіус основи r
7	Знайти роботу, яку треба витратити, щоб насипати купу піску конічної форми з радіусом основи R і висотою H , якщо густина піску дорівнює γ

Продовження

Варіант	Умова задачі
8	Знайти глибину h , на якій прямокутний шлюз висотою H поділиться горизонтально на дві частини так, що сила тиску води на кожну з них буде однаковою
9	Знайти силу тиску на параболічний сегмент з основою a та висотою h , який вертикально занурений у рідину густиною γ так, що його вершина знаходиться на поверхні рідини
10	Круговий циліндр, радіус основи якого R , а висота H , обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω . Густина матеріалу, з якого зроблено циліндр, дорівнює γ . Знайти кінетичну енергію циліндра
11	Яку роботу треба витратити, щоб викачати воду із параболічного котла глибиною H і радіусом основи R ?
12	Куб занурений у воду так, що його верхня основа знаходиться на поверхні води. Яку роботу треба витратити, щоб витягнути куб із води, якщо його ребро дорівнює a , а густина γ ?
13	Тонкий дріт маси M , зігнутий у вигляді півкола радіуса R , обертається навколо осі, яка проходить через кінці півкола, роблячи n обертів за хвилину. Обчислити його кінетичну енергію
14	Дерев'яний поплавок циліндричної форми, висота якого H , а площа основи S , занурений у воду так, що його верхня основа лежить на поверхні води. Густина дерева γ . Яку роботу треба виконати, щоб витягти поплавок з води?
15	Циліндр з рухомим поршнем заповнений парою об'єму $V_0 = 0,2 \text{ м}^3$; $P_0 = 10330 \text{ Н/м}^2$. Яку роботу треба витратити, щоб при сталій температурі (ізотермічний процес) об'єм пари зменшити у два рази?
16	Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 6 см, якщо сила в 10 Н розтягує її на 1 см? Відповідно до закону Гука, сила, що розтягує пружину $F(x) = -kx$, де x – подовження пружини, k – коефіцієнт пропорційності
17	Циліндрична цистерна з горизонтальною віссю наполовину заповнена олією, густина якої γ . Визначити силу тиску олії на кожну із плоских стінок цистерни, якщо радіус її дорівнює R
18	Квадрат із стороною a вертикально занурений у воду так, що одна із його сторін лежить на поверхні води. Визначити силу тиску води на кожну із частин квадрату, на які він ділиться діагоналлю

Продовження

Варіант	Умова задачі
19	Пластина у формі прямокутного трикутника із катетами a і b обертається навколо катета a з кутовою швидкістю ω . Знайти кінетичну енергію пластинки, якщо товщина її дорівнює d , а густина матеріалу, з якого вона зроблена, γ
20	Яку роботу треба витратити, щоб викачати воду з резервуара, що має форму половини еліпсоїда обертання. Верхня основа резервуара є круг радіуса a . Глибина резервуара дорівнює b
21	Пластинка у формі прямокутного трикутника із катетами a і b занурена вертикально у рідину так, що катет a лежить на поверхні рідини. Знайти силу тиску на кожну зі сторін пластинки, якщо густина рідини дорівнює γ
22	Стержень AB , довжина якого дорівнює l , рівномірно заряджений додатною електрикою (лінійна густина електрики b). З якою силою діє цей стержень на одиничний заряд, що знаходиться на продовженні стержня на відстані a від найближчого кінця B ? Діелектрична проникність середовища дорівнює 1
23	Яку роботу треба витратити підйомному крану на повне вилучення з води каміння конічної форми, якщо канат крана закріплено за вершину конуса, що знаходиться на поверхні води? Радіус основи 1 м, висота 3 м, густина $2,5 \text{ г/см}^3$
24	Пластина у формі рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює a , обертається навколо гіпотенузи з кутовою швидкістю ω . Товщина пластини d , густина матеріалу, з якого вона виготовлена, γ . Знайти кінетичну енергію пластини
25	Знайти роботу, що буде здійснено при адіабатичному стисненні повітря до об'єму $V_1 = 2 \text{ м}^3$, якщо його початковий об'єм був $V_0 = 8 \text{ м}^3$, а тиск $P_0 = 10000 \text{ Н/м}^2$

Зразок виконання типового розрахунку № 2

Завдання 1 Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y = x^2 + 2x$ та $y = x + 2$. Зробити рисунок.

Розв'язання

Знаходимо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x, \\ y = x + 2; \end{cases}$$

тоді

$$x^2 + 2x = x + 2; x^2 + x - 2 = 0,$$

звідси

$$x_1 = -2, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 3.$$

Отже, лінії перетинаються в точках $(-2; 0)$, $(1; 3)$. Рівнянням $y = x^2 + 2x$ визначається парабола. Знайдемо вершину. Для цього виділимо повний квадрат: $y = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$. Вершина параболи $A(-1; -1)$ вісь паралельна Oy . Рівнянням $y = x + 2$ визначається пряма. Зробимо рисунок (рис. 7).

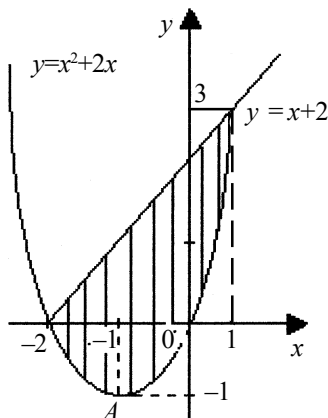


Рис. 7

Виходячи з формули $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$, маємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(x+2) - (x^2 + 2x)] dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{-2}^1 = \\ &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Завдання 2. Обчислити площу фігури, що обмежена лінією

$$\rho = \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Зробити рисунок.

Розв'язання

Функція $\rho = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ парна. Тому достатньо побудувати її графік для $0 \leq \varphi \leq \pi$, на якому $\sin \frac{\varphi}{2}$ плавно зростає від 0 до 1, та застосувати симетрію відносно полярної осі (рис. 8).

Площа

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^4 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \left(1 - 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{1}{4} \left(\varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{3}{8} \pi (\text{кв. од.}).
 \end{aligned}$$

Завдання 3. Знайти довжину першої арки циклоїди (рис. 9)

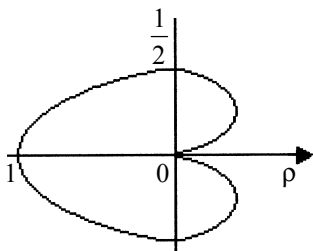


Рис. 8

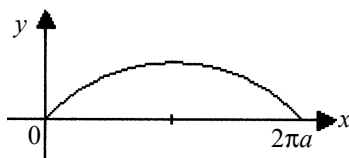


Рис. 9

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Розв'язання

При параметричному завданні лінії $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt$. Маємо:

$$t_1 = 0, t_2 = 2\pi;$$

$$x_t' = a(1 - \cos t), y_t' = a \sin t;$$

$$x_t'^2 + y_t'^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$\text{Отже, } L = 2a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -4a(\cos \pi - \cos 0) = 8a.$$

Завдання 4. Знайти об'єм тіла, що обмежене параболоїдом $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ та площинами $z = 2, z = 5$ (рис. 10).

Розв'язання

Переріз параболоїда $z = \text{const}$ – еліпс $\frac{x^2}{8z} + \frac{y^2}{18z} = 1$ з півосьми $a(z) = \sqrt{8z}, b(z) = \sqrt{18z}$.

Площа його $S(z) = \pi a(z)b(z) = \pi\sqrt{8z}\sqrt{18z} = 12\pi z$.

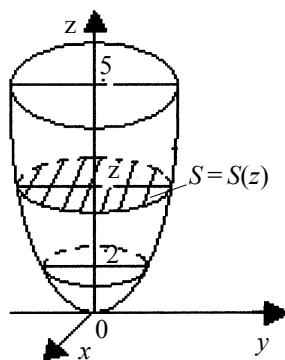


Рис. 10

$$\text{Об'єм тіла } V = \int_2^5 S(z)dz = 12\pi \int_2^5 z dz = \frac{12\pi z^2}{2} \Big|_2^5 = 126\pi (\text{кв. од.}).$$

Завдання 5. Обчислити об'єм тіла, що утворено обертанням навколо осі Ox плосккої фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 1$ та прямою $y = x + 3$ (рис. 11).

Розв'язання

Якщо фігура зверху і знизу обмежена кривими, заданими рівняннями $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$, де $f_2(x) \geq f_1(x)$, то об'єм тіла обертання навколо осі Ox знаходиться за формулою

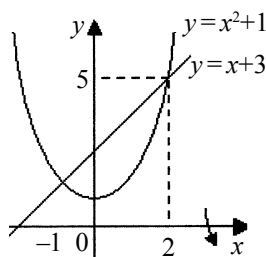


Рис. 11

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2 - y_1^2] dx.$$

Знаходимо абсциси точок перетину ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x + 3, \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = x + 3; x^2 - x - 2 = 0; x_1 = -1; x_2 = 2.$$

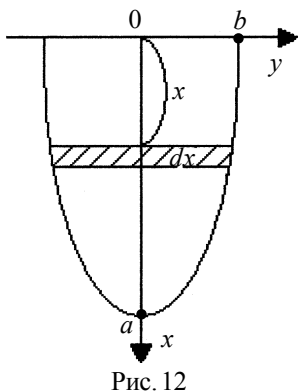
Отже,

$$V = \pi \int_{-1}^2 \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2 \right] dx = \pi \int_{-1}^2 (6x - x^2 - x^4 + 8) dx =$$

$$= \pi \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + 8x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{117\pi}{5} \text{ (куб. од.)}$$

Завдання 6. Пластинка, що має форму еліпса, наполовину занурена в рідину вертикально так, що одна вісь довжиною $2b$ лежить на поверхні. Знайти силу тиску рідини на кожну зі сторін пластинки, якщо довжина зануреної півосі еліпса дорівнює a , а густина рідини γ .

Розв'язання



Вибираємо систему координат (рис.12). Далі застосуємо метод виділення елемента. На глибині x виділимо елементарну смужку висотою dx , яку наближено можна вважати прямокутником з площею $dS = 2ydx$. Тиск рідини на цю смужку

$$dP = \gamma dS \cdot x = 2\gamma x y dx.$$

Виразимо y через x з рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Тоді елемент тиску

$$dP = 2 \frac{b}{a} \gamma g \sqrt{a^2 - x^2} x dx.$$

Шукана сила тиску рідини на всю пластинку

$$P = \frac{b}{a} \gamma g \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot 2x dx = -\frac{b}{a} \gamma g \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} d(a^2 - x^2) =$$

$$= -\frac{2b}{3a} \gamma g \sqrt{(a^2 - x^2)^3} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \gamma g b a^2.$$

Розділ II

Індивідуальне завдання № 1. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ.

Задача. Знайти точки розриву функції, встановити тип розриву, зобразити схематично поведінку функції поблизу точки розриву.

Варі- ант	Функція	Варі- ант	Функція
1	$y = 2^{\frac{1}{x-5}}$	2	$y = \begin{cases} 2x-1, & \text{якщо } x \leq 4, \\ 3+\sqrt{x}, & \text{якщо } x > 4 \end{cases}$
3	$y = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2+1, & \text{якщо } -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$	4	$y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x+2, & \text{якщо } x > 0 \end{cases}$
5	$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{якщо } 0 < x \leq \pi, \\ x-2, & \text{якщо } x > \pi \end{cases}$	6	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$
7	$y = \frac{x^3+8}{x+2}$	8	$y = 3^{\frac{1}{x+1}}$
9	$y = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \leq 1, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$	10	$y = \frac{x+2}{(x-3)^2}$
11	$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}$	12	$y = \begin{cases} -2x+1, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1 \end{cases}$
13	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2-x}}$	14	$y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 2, \\ x-3, & \text{якщо } x > 2 \end{cases}$
15	$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \leq 1, \\ x+2, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$	16	$y = \frac{x^3}{x+3}$
17	$y = \begin{cases} x+2, & \text{якщо } x \leq 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 2 \end{cases}$	18	$y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \cos x, & \text{якщо } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Продовження

Варіант	Функція	Варіант	Функція
19	$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$	20	$y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & \text{якщо } x < 2, \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 2 \end{cases}$
21	$y = \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-1}}}$	22	$y = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{якщо } x \leq 1, \\ -x + 1, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}$
23	$y = \frac{x}{(x+1)^3}$	24	$y = \frac{ x-2 }{x-2}$
25	$y = \begin{cases} 2^x, & \text{якщо } x \leq 2, \\ 2x-1, & \text{якщо } x > 2 \end{cases}$		

Індивідуальне завдання № 2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Задача 1. Дослідити функцію методами диференціального числення та побудувати її графік.

Варіант	Функція	Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	$y = \frac{1}{x} + x^2$	2	$y = \frac{1}{x^2 + 8x}$	3	$y = \frac{1-x}{(x-2)^3}$
4	$y = \frac{16}{x^2(x-4)}$	5	$y = \frac{4x^3}{x^3-1}$	6	$y = x - \frac{8}{x^4}$
7	$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$	8	$y = \frac{x^2}{x^2-1}$	9	$y = \frac{x^3}{x-1}$
10	$y = x^2 e^{-x}$	11	$y = \frac{x^3 + 16}{x}$	12	$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$
13	$y = x e^{x^2}$	14	$y = \frac{e^x}{x-1}$	15	$y = \frac{x^2 - 1}{x^4}$
16	$y = x e^{-x}$	17	$y = \frac{3 \ln x}{\sqrt{x}}$	18	$y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$

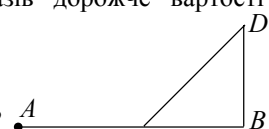
Продовження

Варіант	Функція	Варіант	Функція	Варіант	Функція
19	$y = e^{\frac{1}{x+2}}$	20	$y = \frac{x}{\ln x}$	21	$y = \frac{e^x}{x}$
22	$y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$	23	$y = \frac{\ln x}{x}$	24	$y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$
25	$y = e^{\frac{1}{2-x}}$				

Задача 2

Варіант	Умова задачі
1	Якими повинні бути розміри відкритого басейна з квадратним дном і об'ємом 32 м^3 , щоб на облицювання його стінок та дна було витрачено найменшу кількість матеріалу?
2	Щоб зменшити тертя води об стінки каналу, площа, що змочується водою, повинна бути якомога меншою. Показати, що кращою формою відкритого прямокутного каналу із заданою площею поперечного перерізу є така, при якій ширина каналу перевищує вдвічі його висоту
3	Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $9\sqrt{2}$. Якими повинні бути катети, щоб периметр трикутника був найбільшим?
4	Вікно має форму прямокутника, що завершується півколом. Периметр вікна дорівнює P . При яких розмірах прямокутника вікно буде пропускати найбільшу кількість світла?
5	На прямій між двома джерелами світла сили F і $8F$ знайти найменш освітлену точку, якщо відстань між джерелами світла 24 м (освітленість точки прямо пропорційна силі світла джерела і обернено пропорційна квадрату відстані від нього)
6	Сума довжини і обхвата циліндричної поштової посилки повинна бути рівною 150 см . Якими повинні бути розміри посилки, щоб об'єм її був найбільшим?

Продовження

Варіант	Умова задачі
7	Два літаки летять в одній площині прямолінійно під кутом 120° з однаковою швидкістю V км/год. У деякий момент часу перший літак прилетів у точку перетину ліній руху, а другий не долетів до неї a км. Через який час відстань між літаками стане найменшою і чому вона дорівнюватиме?
8	У рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α треба вписати паралелограм найбільшої площі так, щоб одна з його сторін лежала на основі, а друга – на боковій стороні. Визначити сторони паралелограма
9	У прямокутній системі координат через точку $P(4; 9)$ проведено пряму, яка утворює разом з осями координат трикутник, розташований у першому квадранті. Якими повинні бути відрізки, що відтинає пряма на осях координат, щоб площа трикутника була найменшою?
10	Знайти найбільший об'єм конуса із заданою твірною l
11	У кулю радіуса R треба вписати циліндр з найбільшою бічною поверхнею. Знайти розміри цього циліндра
12	Знайти циліндр, що має найбільший об'єм при заданій повній поверхні S
13	Знайти найбільшу площу прямокутника, що вписано в параболічний сегмент, обмежений параболою $y^2 = 2bx$ і $x = \frac{3}{2b}$.
14	Завод D треба з'єднати шосе із залізницею, що проходить через місто A. Відстань BD дорівнює a, а відстань AB дорівнює l. Вартість перевезень по шосе в m разів дорожче вартості перевезень залізницею. Як треба прокласти шосе до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу до міста A була найменшою? 
15	У кулю радіуса R треба вписати циліндр з найменшим об'ємом. Визначити розміри цього циліндра
16	На осі Ox знайти точку, з якої відрізок AB можна було б бачити під найбільшим кутом, якщо $A(0; 2)$ і $B(0; 8)$
17	Бічні сторони та менша основа трапеції дорівнюють по 10 см. Знайти, при якому значенні більшої основи площа трапеції буде найбільшою

Продовження

Варіант	Умова задачі
18	У конус, радіус основи якого R і висота H , вписано циліндр. Знайти, при якому значенні його висоти об'єм циліндра буде найбільшим
19	Турист іде з пункту A , що знаходиться на шосе, в пункт B , що віддалений на 8 км від шосе. Відстань від A до B по прямій 17 км. У якому місці туристу слід звернути з шосе, щоб за найкоротший час прийти в пункт B , якщо швидкість його по шосе 5 км/год, а по бездоріжжю 3 км/год
20	Визначити найбільшу площу прямокутника, у якого одна сторона лежить на основі a даного трикутника, а дві вершини – на його бічних сторонах, якщо висота трикутника дорівнює h
21	Конус описано навколо півкулі радіуса R (центр основи конуса лежить у центрі півкулі). При якій висоті конуса його об'єм буде найменшим?
22	Через точку $A(4; 1)$ провести пряму з від'ємним кутовим коефіцієнтом так, щоб сума довжин відрізків, що відтинаються на осях координат, була б найменшою
23	На сторінці книжки друкований текст повинен займати S см ² . Поля зверху і знизу повинні бути по a см, а праворуч і ліворуч – по b см. Знайти найбільш економічні розміри сторінки
24	Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, який можна було б вписати в еліпс з півосями $a = 5$, $b = 3$
25	На осі параболу $x^2 = 4y$ взято точку на відстані трьох одиниць від вершини. Знайти ординату y найближчої до неї точки кривої

Індивідуальне завдання № 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Задача 1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

Варіант	Диференціальні рівняння
1	а) $2x^2 dy = (x^2 + y^2) dx$; б) $xy' + y = \sin x$; в) $y'' = \frac{y}{x} + x$
2	а) $xy' - 2y = 2x^4$; б) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$; в) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$

Продовження

Варі- ант	Диференціальні рівняння		
3	a) $y' = \frac{y-x}{y+x}$;	б) $y' - 2y = e^x - x$;	в) $yy'' = (y')^2$
4	a) $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$;	б) $xy' = y \ln y$;	в) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$
5	a) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$;	б) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$;	в) $2(y')^2 = (y-1)y''$
6	a) $y' = y \operatorname{tg} x + \cos x$;	б) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;	в) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$
7	a) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;	б) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$;	в) $y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0$
8	a) $y' - y = \frac{e^x}{x}$;	б) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;	в) $(y')^2 + 2yy'' = 0$
9	a) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;	б) $y' + 2y = 4x$;	в) $y'' x \ln x = y'$
10	a) $y' - 3x^2y = x^2$;	б) $x^2y' = y^2 - 2x^2$;	в) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$
11	a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;	б) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;	в) $x(y'' - 4) + y' = 0$
12	a) $y' - 2xy = \sin x \cdot e^{x^2}$;	б) $(xy + y^2)dx - x^2dy = 0$;	в) $yy'' = (y')^2$
13	a) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;	б) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;	в) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$
14	a) $(x+y) - (y-x)y' = 0$;	б) $y' + y = \cos x$;	в) $y'' + \frac{2}{1-y} (y')^2 = 0$
15	a) $y' = \frac{xy - y^2}{x^2}$;	б) $y' = 2y + e^x - x$;	в) $1 + (y')^2 = 2yy''$
16	a) $y' - \frac{2y}{x} = x^2 + x$;	б) $yy' = 2y - x$;	в) $(y')^2 + 2yy'' = 0$
17	a) $x dy = (y - 2\sqrt{xy}) dx$;	б) $(1 + e^x)yy' = e^x$;	в) $yy'' - 2 \operatorname{ctg} x y' = \sin^3 x$

Продовження

Варіант	Диференціальні рівняння		
18	а) $x^2y' - 2xy = 3$;	б) $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$;	в) $xy'' + 2y' = x^3$
19	а) $y' - \frac{2y}{x} = x^4$;	б) $x^3y' = y(y^2 + x^2)$;	в) $xy'' = y'$
20	а) $(x^2 + 1)y' = 3 - 4xy$;	б) $xy' \cos \frac{y}{x} =$ $= y \cos \frac{y}{x} - x$;	в) $y^3y'' = 1$
21	а) $y' + y \cos x = \cos x$;	б) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;	в) $yy'' + 1 = (y')^2$
22	а) $xy' = 3x^2 - y$;	б) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$;	в) $y'' = 2yy'$
23	а) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$;	б) $x dy = (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx$;	в) $2xy'y'' = (y')^2 - 1$
24	а) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;	б) $(x + xy^2) - (y + yx^2)y' = 0$;	в) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$.
25	а) $x^2y = y^2 - 2x^2$	б) $y' \cos x + y \sin x = 1$;	в) $x^2y'' = (y')^2$

Задача 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння за початкових умов.

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкові умови		
		x_0	y_0	y'_0
1	$y'' + 4y = 8 \sin 2x$	0	0	0
2	$y'' - 6y' + 9y = x$	0	1	0
3	$y'' + 4y' = 4x$	0	0	1
4	$y'' + 7y' = 3x + 2$	0	2	-1
5	$y'' + 9y = \sin 2x$	0	-1	0
6	$y'' - 2y' = 3x + 4$	0	2	-1

Продовження

Варіант	Диференціальне рівняння	Початкові умови		
		x_0	y_0	y'_0
7	$y'' + 4y' = 3e^{-4x}$	0	2	-1
8	$y'' + y = 5x^2$	0	0	0
9	$y'' + 8y' + 16y = x$	0	1	1
10	$y'' + 9y = \cos x$	0	0	2
11	$y'' + y = \cos x$	0	1	0
12	$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$	0	2	8
13	$y'' - 4y' + 5y = \cos x$	0	1	1
14	$y'' + 2y' = e^{-2x}$	0	1	-1
15	$y'' - 2y' + 2y = \sin x$	0	0	1
16	$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$	0	0	2
17	$y'' + 9y = \cos 3x$	0	1	0
18	$y'' - 4y' + 4y = \sin 2x$	0	0	1
19	$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$	0	1	0
20	$y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2x}$	0	0	1
21	$y'' - 2y' + 5y = 3\cos 2x$	0	2	0
22	$y'' + 2y' + 2y = \sin x$	0	1	1
23	$y'' + 4y' = x^2 + 1$	0	1	-1
24	$y'' + 6y' + 13y = e^{2x}$	0	0	1
25	$y'' + y = x^2$	0	1	-1

Задача 3

Варіант	Задача
1	Вантаж масою 100 г, підвішений до кінця пружини, рухається у рідині. Коефіцієнт жорсткості пружини $C = 19,6$ Н/м. Сила опору руху пропорційна першому ступеню швидкості вантажу: $R = \alpha V$, де $\alpha = 3,5$ Н·с/м. Знайти рівняння руху вантажу, якщо у початковий момент вантаж був зміщений із стану рівноваги на $x_0 = 1$ см і відпущений без початкової швидкості

Продовження

Варіант	Задача
2	Статична деформація вертикальної пружини під дією вантажу, підвішеного до нижнього кінця, $\delta_{\text{ст}} = 10$ см. Вантаж відтягли із стану статичної рівноваги на відстань $x_0 = 15$ см і надали вертикальної швидкості $V_0 = 99$ см/с, що спрямована вниз. Визначити рівняння руху вантажу $x = x(t)$, провівши вісь із стану його статичної рівноваги вниз
3	Вантаж вагою $P = 2,45$ Н підвішений на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $C = 1$ Н/см. На вантаж діє вертикальна сила $Q = 1,8\sin 16t$ (Н). Визначити рівняння вимушених коливань вантажу $x = x(t)$
4	Матеріальна точка масою 200 г притягується до нерухомого центра силою, пропорційною відстані точки від цього центра. Коефіцієнт пропорційності $k = 0,18$ Н/см. Знайти рівняння руху точки, якщо у початковий момент вона була відхилена від центра на відстань 4 см, а її швидкість була спрямована до центра і дорівнювала $6\sqrt{10}$ см/с
5	До вільного кінця A пружного горизонтального стержня, другий кінець якого нерухомо закріплений, підвісили вантаж вагою $P = 198$ Н. Пружна сила стержня пропорційна стрілі прогину f . Статична стріла прогину стержня $f = 5$ см. Визначити закон руху вантажу $x = x(t)$
6	Тіло масою 1,96 кг підвішене на пружині, яка силою 4,9 Н розтягується на 10 см. При русі тіло зустрічає опір, пропорційний першому степеню швидкості, і при швидкості 1 м/с він дорівнює 19,6 Н. У початковий момент часу пружина розтягнена на 5 см і тіло приходить у рух без початкової швидкості. Знайти закон руху
7	Тіло масою $m = 0,5$ кг занурено в рідину на пружині. Його вага в рідині $P = 4,52$ Н і статичне здовження пружини під дією сили P дорівнює $\lambda_{\text{ст}} = 1$ см. Тіло здійснює вертикальні коливання. Сила опору R рідини пропорційна швидкості тіла і при швидкості 1 см/с вона дорівнює $\alpha = 0,196$ Н. Знайти закон коливального руху тіла
8	Тіло вагою 49 Н підвішене на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $C = 1,25$ Н/см. При русі тіла середовище становить опір, пропорційний першому степеню швидкості, і при швидкості $V = 1$ см/с опір дорівнює 0,5 Н. У початковий момент пружина розтягнена від положення рівноваги на 3 см, тілу надана швидкість 6 см/с, яка спрямована вниз. Знайти закон руху

Продовження

Варіант	Задача
9	На пружині, коефіцієнт жорсткості якої $Q = 19,6$ Н/м, підвішано вантаж масою 100 г. На нього діє періодична сила $C = 1,4 \sin 14t$ (Н), а сила опору руху $R = 0,5V$ (Н), де V – швидкість тіла, м/с. Визначити вимушені коливання тіла
10	До нижнього кінця пружини, яка нерухомо закріплена верхнім кінцем і має коефіцієнт жорсткості $C = 0,9$ кН/м, підвішано вантаж масою $m = 1$ кг. У деякий момент часу пружина стиснена із стану рівноваги на 0,1 м, а потім вантаж відпущено без початкової швидкості. При русі вантажу виникає опір, пропорційний першому ступеню швидкості (коефіцієнт пропорційності $\mu = 1,6$ кН·с/м). Знайти закон руху вантажу $x = x(t)$
11	Тіло масою 2 кг, що прикріплено пружиною до нерухомої точки A , рухається по гладкій похилій площині, яка утворює кут α з горизонтом. Сила опору $R = 29,4V$ (Н). Коефіцієнт жорсткості пружини $C = 500$ Н/м. У початковий момент тіло було у стані статичної рівноваги і мало швидкість $V_0 = 0,5$ м/с. Знайти рівняння руху тіла
12	Вантаж масою 100 г, підвішаний до кінця пружини, рухається у рідині. Коефіцієнт жорсткості пружини $C = 39,2$ Н/м. Сила опору руху R пропорційна першому ступеню швидкості вантажу: $R = \alpha V$, де $\alpha = 3,5$ Н·с/м. Знайти рівняння руху вантажу, якщо у початковий момент його змістили із положення рівноваги на $x_0 = 1$ см і надали початкової швидкості 50 см/с у напрямку, протилежному зміщенню
13	По горизонтальній хорді вертикального кола рухається точка M масою 1 кг. На точку діє пружна сила, пропорційна відстані від неї до центру і спрямована до центра (коефіцієнт пропорційності $k = 16$ Н/м). Крім того, на точку діє сила опору, пропорційна першому ступеню швидкості (коефіцієнт пропорційності $k = 10$ Н·с/м). Визначити закон руху точки, якщо у початковий момент вона знаходилася у крайньому правому положенні і була відпущена без початкової швидкості. Відстань від центра до хорди дорівнює 30 см, радіус кола 50 см
14	На тіло масою 1 кг, прикріплене до пружини з коефіцієнтом жорсткості $C = 5$ кН/м, діє сила $Q = 100 \sin 100t$ (Н), сила опору $R = 50V$ (Н). Написати рівняння вимушених коливань тіла

Продовження

Варіант	Задача
15	Під дією вантажу, що підвішений до кінця пружини, остання одержала статичне подовження $x = 5$ см. Знайти закон коливань цього вантажу, якщо у початковий момент часу вантажу, що знаходився у стані статичної рівноваги, була надана початкова швидкість $V_0 = 28$ см/с
16	Визначити рівняння вимушених коливань тіла, прикріпленого до кінця горизонтально розташованої пружини, якщо вага тіла $P = 0,198$ Н, вимушуюча сила S змінюється відповідно до рівняння $S = H \sin pt$, де $H = 1,6$ Н, $p = 100$ с ⁻¹ . Опір середовища відсутній, коефіцієнт жорсткості пружини $C = 2$ Н/см
17	Пружина AB закріплена одним кінцем у точці A . Для її подовження на 1 см треба прикласти у точці B силу в 0,02 Н. У деякий момент до нижнього кінця недеформованої пружини підвішують гирю масою $m = 100$ г і відпускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, знайти рівняння дальшого руху гирі
18	Тіло вагою 1,96 Н, що підвішане на пружині з коефіцієнтом жорсткості $C = 0,152$ Н/см, рухається, долаючи опір, пропорційний першому ступеню швидкості. При швидкості 1 см/с опір дорівнює 0,08 Н. У початковий момент часу довжина пружини на 4 см більша за її довжину у положенні статичної рівноваги тіла, швидкість якого дорівнює 16 см/с, і спрямована вертикально униз. Визначити рівняння руху тіла
19	Важке тіло сковзає по жорсткій поверхні з кутом нахилу до горизонту α . Коефіцієнт тертя дорівнює μ . Знайти закон руху тіла $x = x(t)$, якщо у початковий момент тіло знаходилося у положенні $x_0 = 0$ і мало швидкість $V_0 = 0$. Покласти $\alpha = 30^\circ$; $\mu = 0,1$; $g = 980$ см/с ²
20	Тіло масою m , яке знаходилося у початковий момент у рідині, занурюється у неї під дією власної ваги без початкової швидкості. Опір рідини пропорційний першому ступеню швидкості тіла і при швидкості 2 м/с дорівнює 9,8 Н. Знайти закон руху тіла, якщо $m = 0,1$ кг; $g = 9,8$ м/с ²
21	Матеріальна точка масою m відштовхується від центра силою, пропорційною відстані (коефіцієнт пропорційності $k_1 = 5$ Н/м). Опір середовища пропорційний швидкості руху (коефіцієнт пропорційності $k_2 = 4m$ Н/м). У початковий момент точка знаходилась на відстані a від центра, її швидкість дорівнювала нулю. Знайти закон руху точки, якщо $a = 0,024$ м

Продовження

Варіант	Задача
22	Матеріальна точка масою $m = 1$ кг рухається прямолінійно у напрямку до нерухомого центра і притягується до цього центра силою F , яка прямо пропорційна відстані від центра притягання (коефіцієнт пропорційності $k_1 = 0,1$ Н/м). Сила опору середовища R прямо пропорційна першому ступеню швидкості (коефіцієнт пропорційності $k_2 = 0,4$ Н·с/м). При $t = 0$ швидкість $V = 0$ і точка знаходилась на відстані 10 см від центра. Знайти залежність відстані від часу
23	Матеріальна точка масою 1 кг відштовхується вздовж прямої від центра O з силою, пропорційною її віддалі від цього центра (коефіцієнт пропорційності $k = 0,004$ Н·с/м). Опір середовища пропорційний швидкості руху (коефіцієнт пропорційності $\mu = 0,003$ Н·с/м). На початку руху відстань від центра дорівнювала 1 см, а швидкість 11 см/с. Знайти закон руху
24	Тіло масою m , підвішене на пружині, знаходиться у стані рівноваги. Поштовхом воно виводиться із стану рівноваги. При цьому надається швидкість V_0 . Знайти закон руху маси, якщо коефіцієнт жорсткості пружини C . Покласти $m = 1,96$ кг; $C = 0,49$ Н/см; $V_0 = 15$ см/с
25	Вантаж масою 4 кг підвішаний на пружині і збільшує її довжину на 1 см. Знайти закон руху вантажу, якщо верхній кінець пружини здійснює гармонічні коливання $y = 2\sin 30t$ (см) і в початковий момент часу вантаж знаходиться у спокої (опором середовища нехтуємо)

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі: Навч. посіб.: У 2 кн. / За ред. *Т.Я. Кулініча*. – К.: Либідь, 1994. – Кн. 1. – 312 с.
2. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі: Навч. посіб.: У 2 кн. / За ред. *І.П. Васильченко*. – К.: Либідь, 1994. – Кн. 2. – 280 с.
3. *Гаврилова Р.Н., Кузнецов А.Н., Самецкая И.Е.* Аналитическая геометрия с элементами линейной алгебры: Учеб. пос. – Николаев: НКИ, 1977. – Ч. I. – 82 с.
4. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посіб. – К: Вища школа, 1993. – 648 с.
5. *Иванова А.Г., Ластовецкая И.И., Руденко Н.А.* Сборник задач по высшей математики (линейная, векторная алгебра и аналитическая геометрия). – Николаев: НКИ, 1989. – 50 с.
6. *Кузнецов А.Н., Косянчук А.В.* Методические указания к решению задач по дифференциальным уравнениям и их приложениям. – Николаев: НКИ, 1988.
7. *Шкіль М.У., Котлова В.М.* Вища математика: Підручник: У 3 кн. – Кн. 1: Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – К.: Либідь, 1994. – 280 с.
8. *Шкіль М.У., Колесник Т.В.* Вища математика: Підручник: У 3 кн. – Кн. 2: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.
9. *Шкіль М.У., Колесник Т.В.* Вища математика: Підручник: У 3 кн. – Кн. 3: Диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 1994. – 352 с.

ЗМІСТ

Розділ I	
Типовий розрахунок № 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія.....	3
Типовий розрахунок № 2. Застосування визначеного інтеграла.....	15
Розділ II	
Індивідуальне завдання № 1. Неперервність функцій.....	27
Індивідуальне завдання № 2. Застосування похідної.....	28
Індивідуальне завдання № 3. Диференціальні рівняння.....	31
Рекомендована література.....	39
