

УДК 621.313

DOI [https://doi.org/10.15589/znp2026.1\(503\).2.5](https://doi.org/10.15589/znp2026.1(503).2.5)

RESEARCH ON THE POSSIBILITY OF OPTIMIZING A DC ELECTRIC DRIVE USING MODAL CONTROL IN A SYSTEM WITH MODULAR OPTIMUM

ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ ПРИ ВИКОРИСТАННІ МОДАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ В СИСТЕМІ З МОДУЛЬНИМ ОПТИМУМОМ

Oleksiy S. Sadovoy

sadvuyos@mnau.edu.ua

ORCID: 0000-0003-0424-6086

Andrey A. Stavinskiy

andrey.stavynskiy@mnau.edu.ua

ORCID: 0000-0001-7573-9238

Vitalii A. Mardziavko

mardzavko@mnau.edu.ua

ORCID: 0000-0001-7327-9215

Anatoliy P. Gurov

anatoliy.gurov1945@gmail.com

ORCID: 0009-0002-6425-3325

Oleksandr H. Vasiliev

grigorich041949@gmail.com

ORCID: 0009-0002-8399-0865

Anatoliy M. Tubalsev

anatoliy.tubalsev@nuas.edu.ua

ORCID: 0009-0005-4497-1014

О. С. Садовий¹,

канд. техн. наук, доцент

А. А. Ставинський¹,

докт. техн. наук, професор

В. А. Мардзявко¹,

асистент

А. П. Гуров²,

канд. техн. наук, професор

О. Г. Васильєв²,

канд. техн. наук, доцент

А. М. Тубальцев²,

доцент

¹Mykolaiv National Agrarian University, Mykolaiv²Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv¹Миколаївський національний аграрний університет, м. Миколаїв²Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв

Abstract. Purpose. The purpose of this study is to substantiate an approach to the synthesis of a DC electric drive control system that combines the optimal tuning of internal circuits using the modular optimum method with modal control methods, in order to reduce the order of the characteristic equation of the system, improve the quality of transient processes, and increase the stability of dynamic characteristics in the speed loop. **Methodology.** The study is based on the use of methods of automatic control theory, in particular, modular optimum for tuning internal circuits and the pole placement method for synthesizing a modal controller. Mathematical modeling of a DC electric drive, analysis of characteristic equations and transient processes, as well as computer modeling in the MATLAB/Simulink environment were used. **Results.** It is shown that the application of modal control to a system optimized using the modular optimum allows reducing the effective order of the characteristic equation without significant loss of speed and control accuracy. The obtained modeling results confirm the improvement of the rigidity of the mechanical characteristics, the reduction of the system's sensitivity to load changes, and the stabilization of currents in transient regimes. **Scientific novelty.** It consists in the formalized combination of the modular optimum and modal control methods within the framework of a single structure of the DC electric drive control system, as well as in proving the possibility of reducing the system order without deteriorating dynamic performance. **Practical significance.** The proposed approach can be used in the design and modernization of DC electric drive control systems with increased requirements for speed, stability, and robustness.

Key words: synthesis; electric drive; nonlinear control; nonlinearity; subordinate regulation system; modular optimum; modal control; pole placement; current loop; speed loop; optimization of control systems.

Анотація. *Мета.* Метою даного дослідження є обґрунтування підходу до синтезу системи керування електроприводом постійного струму, що поєднує оптимальне налаштування внутрішніх контурів за методом модульного оптимуму з методами модального керування, з метою зниження порядку характеристичного рівняння системи, покращення якості перехідних процесів та підвищення стійкості динамічних характеристик у контурі швидкості. *Методика.* Дослідження ґрунтується на використанні методів теорії автоматичного керування, зокрема модульного оптимуму для налаштування внутрішніх контурів та методу розміщення полюсів для синтезу модального регулятора. Застосовано математичне моделювання електропривода постійного струму, аналіз характеристичних рівнянь і перехідних процесів, а також комп'ютерне моделювання в середовищі MATLAB/Simulink. *Результати.* Показано, що застосування модального керування до системи, оптимізованої за модульним оптимумом, дозволяє знизити ефективний порядок характеристичного рівняння без істотної втрати швидкодії та точності регулювання. Отримані результати моделювання підтверджують покращення жорсткості механічної характеристики, зменшення чутливості системи до змін навантаження та стабілізацію струмів у перехідних режимах. *Наукова новизна.* Полягає у формалізованому поєднанні методів модульного оптимуму та модального керування в межах єдиної структури системи керування електроприводом постійного струму, а також у доведенні можливості зниження порядку системи без погіршення динамічних показників. *Практична значимість.* Запропонований підхід може бути використаний при проєктуванні та модернізації систем керування електроприводами постійного струму з підвищеними вимогами до швидкодії, стійкості та робастності.

Ключові слова: синтез; електропривод; нелінійне керування; нелінійність; система підпорядкованого регулювання; модульний оптимум; модальне керування; розміщення полюсів; контур струму; контур швидкості; оптимізація систем керування.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Сучасні системи керування електроприводами постійного струму широко застосовуються в технологічних установках, де висувуються підвищені вимоги до швидкодії, точності та стійкості перехідних процесів за дії збурень і зміни параметрів об'єкта керування. Традиційні методи оптимального налаштування систем підпорядкованого регулювання, зокрема метод модульного оптимуму, забезпечують високі динамічні показники, однак призводять до збільшення порядку характеристичного рівняння системи та зниження швидкодії зовнішніх контурів.

З іншого боку, методи модального керування, засновані на розміщенні полюсів, дозволяють формувати бажані динамічні властивості системи, проте їх безпосереднє застосування до багатоконтурних електромеханічних систем ускладнюється високим порядком математичної моделі та наявністю внутрішніх оптимізованих контурів.

У зв'язку з цим актуальною є задача дослідження можливості суміщення оптимізації системи електропривода постійного струму за модульним оптимумом із методами модального керування з метою зниження порядку характеристичного рівняння, покращення якості перехідних процесів та зменшення чутливості системи до параметричних відхилень у контурі швидкості.

Таким чином, у роботі ставиться задача розробки та дослідження структури системи керування електроприводом постійного струму, яка поєднує переваги модульного оптимуму та модального керування і забезпечує підвищення динамічних показників електромеханічної системи.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Актуальність дослідження систем керування електроприводами постійного струму підтверджується

широкою увагою дослідників до оптимізації параметрів регуляторів та підвищення якості перехідних процесів у приводах. Так, у численних роботах пропонуються алгоритми оптимізації параметрів контролерів для покращення динамічних характеристик DC-електродвигунів, зокрема з використанням еволюційних підходів (наприклад, Multiverse Optimization Algorithm для оптимального регулювання PID-контролера) – що дозволяє підвищити точність і стабільність швидкісного керування постійним двигуном з оптимізованими параметрами регулятора [1].

Параметрична оптимізація систем керування DC-двигунів вже широко застосовується, зокрема з використанням генетичних алгоритмів для оптимізації характеристик перехідних процесів систем керування двигунами з різним збудженням, що дозволяє покращити їхню якість і енергоефективність [2].

В роботі [3] також розглядаються методи оптимізації внутрішніх контурів струму електроприводів постійного струму, де оптимізація регулятора струму сприяє стабілізації динамічних властивостей приводу та підвищенню його стійкості до збурень.

Крім того, у сучасних публікаціях [4] досліджуються сучасні методи оптимізації для привідних систем, включаючи евристичні методи та порівняльний аналіз методів керування, що дозволяють виявити найбільш ефективні стратегії регулювання швидкості DC-двигунів за умов змінних навантажень або зовнішніх впливів.

Ще одним напрямом оптимізації є застосування гібридних та нечітких PID-регуляторів з алгоритмами пошуку оптимальних параметрів, які поєднують переваги класичних PID-структур та оптимізованих параметрів для зменшення перерегулювань і часу перехідного процесу [5].

Зі сторони теорії керування, важливу роль відіграє підхід модального керування (розміщення полюсів), який дозволяє формувати бажані динамічні характеристики замкнених систем шляхом заданого розташування власних значень замкненої петлі. Існують численні публікації, що пропонують керування станом на основі розміщення полюсів для DC-двигунів з метою покращення часових характеристик, контролю перехідних процесів і зниження перерегулювання [6]. Наприклад, у роботі [7] показано, що регулятор з розміщенням полюсів дозволяє досягти значного покращення характеристик переходу (малий перерегулювання та прийнятне час встановлення) шляхом точного розташування полюсів замкненої системи.

Інші дослідження пропонують адаптивні та самоналагоджувані алгоритми на основі модального керування, які динамічно оцінюють параметри системи та відповідно коригують місцезнаходження полюсів для підтримки оптимальних показників у режимі реального часу.

Огляд наукових публікацій показує, що поєднання оптимального налаштування параметрів регуляторів та модального керування має великий потенціал для одночасного зниження порядку характеристичного рівняння системи й підвищення якості її динамічних показників. Питання систематичного суміщення оптимізації параметрів регуляторів із методами модального керування, яке б забезпечувало узгоджене формування динамічних характеристик замкненої системи без ускладнення її структури та зниження практичної реалізованості, залишається недостатньо дослідженим.

ВІДОКРЕМЛЕННЯ НЕВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

Незважаючи на наявність численних досліджень, присвячених оптимізації систем керування електроприводами постійного струму та застосуванню методів модального керування, у доступній науковій літературі відсутні системні підходи, в яких ці методи були б формалізовано поєднані в межах єдиної структури керування. Існуючі роботи, як правило, розглядають зазначені підходи ізольовано або застосовують їх фрагментарно, без чіткого методичного обґрунтування взаємодії між оптимізованими внутрішніми контурами та модальним синтезом замкненої системи.

Таким чином, невіршеним залишається питання розробки цілісної методики синтезу системи керування електроприводом постійного струму, що забезпечує узгоджене використання методів оптимального налаштування та модального керування в єдиній структурі.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою даного дослідження є обґрунтування підходу до синтезу системи керування електроприводом постійного струму, що поєднує оптимальне

налаштування внутрішніх контурів за методом модульного оптимуму з методами модального керування, з метою зниження порядку характеристичного рівняння системи, покращення якості перехідних процесів та підвищення стійкості динамічних характеристик у контурі швидкості.

МЕТОДИ, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Об'єктом дослідження є система керування електроприводом постійного струму з підпорядкованого регулюванням.

Предметом дослідження є методи синтезу структури та параметрів системи керування електроприводом постійного струму при суміщенні оптимального налаштування внутрішніх контурів і методів модального керування.

Дослідження ґрунтується на використанні методів теорії автоматичного керування, модульного оптимуму, розміщення полюсів, аналізу характеристичних рівнянь і перехідних процесів, а також математичного та комп'ютерного моделювання динамічних режимів електропривода в середовищі MATLAB/Simulink.

Для будь-якої складної системи завжди можна визначити режими керування, які характеризуються найбільшими показниками якості роботи системи. Але якщо сигнал керування представляє собою постійну або задану величину, то можливі варіанти налагоджування самої системи на режими роботи, в яких якісні характеристики об'єкта керування (ОК) буде мати максимальне значення. Серед таких режимів розрізняють оптимальні та екстремальні режими керування (роботи).

В теорії автоматичного керування для замкненого контуру з передавальною функцією

$$W_3(p) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^m a_i p^i}{d_0 + \sum_{i=1}^n d_i p^i}, \quad (1)$$

відомі різноманітні критерії оптимізації за допомогою налаштування регулятора, послідовно включеного з об'єктом керування [8, 9]. Широке використання для електроприводів знайшов динамічний оптимум – модульний оптимум (МО), який значить наступне: замкнений контур є динамічно оптимальним, якщо він однаково передає на вихід різночастотні вхідні сигнали на можливо більшому інтервалі частот, тобто на цьому інтервалі модуль АЧХ замкненого контуру

$$|W_3(j\omega)| = \text{const}. \quad (2)$$

Умова (2) виконується, якщо при $\omega > 0$ як можна більше число похідних модуля АЧХ по частоті прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d|W_3(j\omega)|}{d\omega} = 0. \quad (3)$$

Умові (3) відповідають деякі визначені співвідношення коефіцієнтів чисельника та знаменника передавальної функції замкненого контуру [10]:

$$\begin{aligned}
 (a_1^2 - 2a_0a_2)d_0^2 &= (d_1^2 - 2d_0d_2)a_0^2 \\
 (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4)d_0^2 &= (d_2^2 - 2d_1d_3 + 2d_0d_4)a_0^2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \left(a_7^2 - 2\sum_{i=1}^7 (-1)^i a_{7-i}a_{7+i}\right)d_0^2 &= \left(a_7^2 + 2\sum_{i=1}^7 (-1)^i d_{7-i}d_{7+i}\right)a_0^2
 \end{aligned} \quad (4)$$

Теоретично МО може дати нескінченно велику полосу пропускання контуру ($\omega_{n,n} \rightarrow \infty$), $m = n$ та $a_i = d_i$. Однак практично це недосяжно через обмеженість можливостей реальних регуляторів та кінцевої полоси пропускання датчиків. Саме тому модульний оптимум називають також практичним або технічним оптимумом. Оптимізація по максимуму полоси пропускання являється також і оптимізацією по швидкодії [11]. Чим ширше полоса пропускання системи, тим менше час перехідного процесу контуру.

В інерційному контурі регулювання можна виділити дві частини – з більшою інерційністю та досить малою інерційністю, обумовленою фільтрами датчиків та перетворювачів сигналів, яка характеризується деякою малою постійною часу T_μ . Передавальна функція об'єкту керування з урахуванням T_μ має вигляд:

$$W_{o.k.}(p) = \frac{k_{o.k.}}{\left(b_0 + \sum_{i=1}^K b_i p^i\right)(T_\mu p + 1)}, \quad (5)$$

де $k_{o.k.}$ – коефіцієнт підсилення об'єкту керування.

Приймаючи для регулятора передавальну функцію, що має вигляд

$$W_p(p) = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^m a_i p^i}{\hat{O}_0 p}, \quad (6)$$

отримуємо для замкненого контуру передавальну функцію

$$W_3(p) = \frac{x}{x_3} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^m a_i p^i}{\frac{T_0}{k_{o.k.}} p \left(b_0 + \sum_{i=1}^K b_i p^i\right) (T_\mu p + 1) + a_0 + \sum_{i=1}^m a_i p^i}. \quad (7)$$

Коефіцієнти регулятора a_0 , a_i , T_0 знаходяться із рівнянь (4). Згідно першому рівнянню (4):

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{T_0}{k_{o.k.}}\right)^2 - 2\frac{T_0 T_\mu}{k_{o.k.}}; \quad \frac{T_0}{k_{o.k.}} = 2T_\mu, \\
 W_{3,опт.}(p) &= \frac{1}{2T_\mu p(T_\mu p + 1) + 1}
 \end{aligned} \quad (8)$$

Таким чином, регулятор, що компенсує інерційність об'єкту керування, окрім малих фільтрових, та такий, що має інтегральну складову напруги з постійною часу $T_0 = 2k_{o.k.}T_\mu$, забезпечує максимальну швидкодію замкненого контуру. Тобто, для об'єкту керування у вигляді коливальної ланки другого порядку, наприклад, двигун постійного струму, потрібно пропорційно-інтегрально-диференціальний (ПІД) регулятор.

Якщо складний об'єкт керування представляє собою послідовність перерахованих вище інерційних ланок $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$, що з'єднані одне з одним координатами, що контролюються $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то для кожної координати складається замкнений

контур з регулятором, що налаштований на динамічний оптимум, наприклад, модульний оптимум. Налаштування регуляторів $W_{p1}, W_{p2}, W_{p3}, \dots, W_{pn}$ проводиться від внутрішнього контуру з номером 1 до контуру з номером n , що являється зовнішнім контуром. До складу об'єкту керування контуру з номером i входить налаштований оптимально замкнений контур $i - 1$. Якщо для кожного наступного після першого контуру компенсувати регулятором W_{pi} інерційність ланки W_i , нехтуючи при цьому його малою постійною часу T_μ , то

$$W_{pi}(p)W_i(p) = \frac{k_{o.k.i}}{T_{0i}p}.$$

Відповідно, налаштовуючи інтегральну складову регулятора за умовою модульного оптимуму (8), отримуємо передавальну функцію замкненого i -го контуру:

$$W_{xi}(p) = \frac{1}{2^i T_\mu p (2^{i-1} T_\mu p (2^{i-2} T_\mu p \dots (2^{i-i} T_\mu p + 1) \dots) + 1)}, \quad (9)$$

де T_μ – мала постійна часу, що віднесена до першого контуру.

Чим більше контурів в системі підпорядкованого регулювання, тим менше швидкодія зовнішнього контуру системи. У порівнянні з одно контурною системою швидкодія n – контурної системи зменшується в 2^{n-1} рази. У зв'язку з цим виникає ідея суміщення оптимально налаштованої системи з системою модального керування.

Найбільше розповсюдження серед систем керування швидкістю електродвигуна постійного струму отримали системи, в яких швидкість регулюється змінною напруги на якорі двигуна за рахунок керованого електричного перетворювача (генератора, керованого тиристорного або транзисторного випрямлювача, широтноімпульсного перетворювача) при підключенні контури регулювання струму двигуна.

Система керування електропривода включає два контури регулювання внутрішній контур струму якоря (КС) та зовнішній контур швидкості (КШ) (рис. 1).

Схема на рис. 1 відповідає каскадній структурі підпорядкованого регулювання, так як в ній за допомогою стандартних правил перетворений додатковий зв'язок по ЕРС двигуна, що впливає на контур струму. Контур струму включає в себе силову частину електроприводу з виходом по струму якоря i_a , ланцюг від'ємного зворотного зв'язку по струму якоря та регулятор струму РС. Контур регулювання швидкості двигуна включає в себе замкнений контур КС, ланцюг від'ємного зворотного зв'язку (ВЗЗ) по швидкості двигуна та регулятор швидкості. Регулятор швидкості може бути як пропорційним (при невисоких вимогах до точності регулювання швидкості), так і пропорційно-інтегральним (при необхідності абсолютної статичної точності регулювання).

При формуванні структурної схеми електропривода будемо вважати, що регулювальна характеристика керованого перетворювача лінійна; струм

Передавальна функція замкненого контуру швидкості відносно швидкості визначається виразом:

$$W_{3,ш}(p) = \frac{\omega(p)}{u_{3,ш}(p)} = \frac{1/k_{IT}}{4T_{\mu}pD_C(p)+1}, \quad (17)$$

де мала постійна часу $T_{\mu} = T_{IT}$.

Регулювання швидкості пропорційним регулятором виявляється статичним (рис. 2). В залежності від значення відношення $T_M/(4T_{\mu})$ жорсткість замкненого електропривода може бути більше, менше або рівною жорсткості природної характеристики: $\beta_3 = J/4T_{\mu} = \beta T_M/4T_{\mu}$, де β – жорсткість природної механічної характеристики електроприводу ($\beta = J/T_M$).

Для отримання астатичного регулювання швидкості може бути використаний симетричний оптимум на основі ПІ – регулятора швидкості.

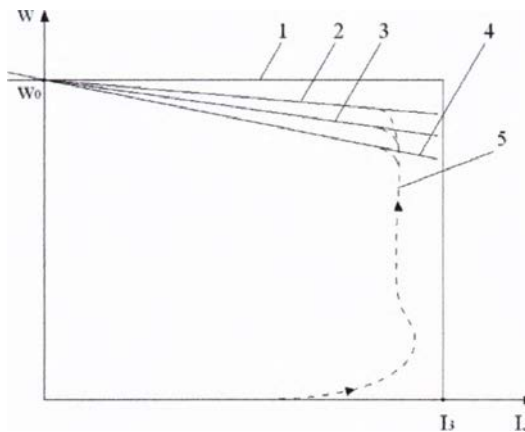


Рис. 2. Механічні характеристики електроприводу з підпорядкованим регулюванням струму та швидкості: 1 – при астатичному регулюванні швидкості; 2 – при $\Pi - PC$; $T_M/(4T_{\mu}) > 1$; 3 – при $\Pi - PC$; $T_M/(4T_{\mu}) = 1$; 4 – при $\Pi - PC$; $T_M/(4T_{\mu}) < 1$; 5 – динамічна механічна характеристика

Згідно до виразу (17) характеристичний поліном замкненого контуру швидкості з $\Pi - PC$ має третій порядок. В практичних розрахунках даний поліном замінюють без значної похибки на поліном другого порядку, нехтуючи при цьому в контурі струму малою

постійною часу $T_{\mu}(D_C(p) = T_{\mu}p+1 = 2T_{\mu}p+1)$ або у випадку поліному четвертого порядку приймають контур струму за безінерційний ($D_r(p) = 1$).

Якщо до електроприводу з підпорядкованим регулюванням струму та швидкості, налаштованому на модульний оптимум, використати метод розміщення полюсів (з використанням фізичних змінних стану), то замість характеристичного поліному третього порядку ми будемо мати справу з рівнянням другого порядку. Це можна реалізувати за рахунок нехтування малою постійною часу T_{μ} в контурі струму, а також за рахунок того, що від'ємний зворотний зв'язок по швидкості (ω) являється вже налаштованим на модульний оптимум.

Тобто метод розміщення полюсів в даному випадку зводиться до пошуку коефіцієнтів зворотного зв'язку (33) по вектору стану для двох фізичних змінних стану: струму якорного ланцюга i_a та кутової швидкості валу електродвигуна ω , так як інтегральна складова напруги ПІ – регулятора струму вже включена в оптимізований внутрішній контур.

Розглянемо детальніше процедуру синтезу системи керування методом розміщення полюсів для оптимально налаштованого електроприводу та доведемо наявність ефекту зниження порядку системи.

В попередніх розрахунках ми уявляли керований перетворювач як ідеальну безінерційну підсилювальну ланку. Але в реальному тиристорному перетворювачі, як і в будь-якому іншому напівпровідниковому перетворювачі електричної енергії, необхідно враховувати нелінійність у вигляді гістерезисну силових ключів, а також наявність індуктивностей в ланцюгах керування. Дані фактори являються причиною виникнення малої некомпенсованої інерційності в ланцюгах керування, тобто наявності малої інерційності. Тому тиристорний перетворювач раціонально представити у вигляді аперіодичної ланки з коефіцієнтом підсилення k_m та постійною часу T_m , яка і являється некомпенсованою інерційністю:

$$W_m(p) = \frac{k_m}{T_m p + 1},$$

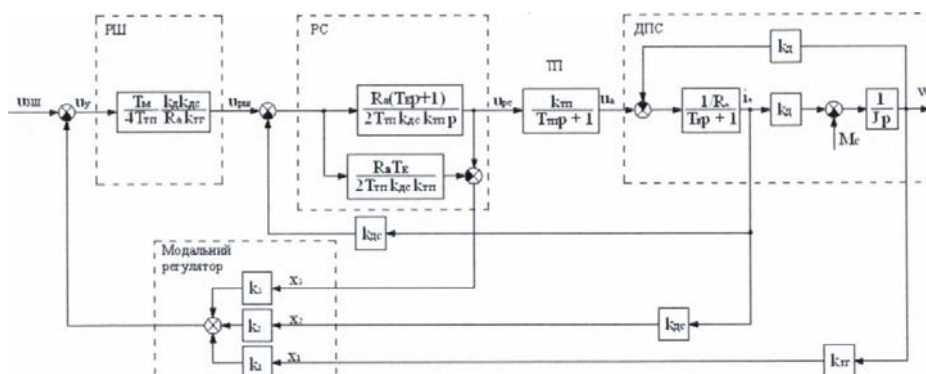


Рис. 3. Структурна схема електроприводу, налаштованого на модульний оптимум та з керуючим сигналом, сформованим за допомогою модального регулятора

де $\dot{O}_0 = 2 \dots 5$ мс – постійна часу для врахування усіх мало інерційних датчиків, фільтрів та напівпровідникових перетворювачів.

Для того, щоб використати метод розміщення полюсів до налаштованого на модульний оптимум електроприводу постійного струму, необхідно реалізувати додатковий внутрішній контур регулювання струму, тобто від'ємний зворотний зв'язок (ВЗЗ) по струму та 33 по вектору стану (рис. 3).

Як видно зі структурної схеми, даний контур від'ємного зворотного зв'язку по струму за допомогою структурних перетворень легко суміщається з ланцюгами 33 по вектору стану. Передавальна функція розімкненого по вектору стану оптимізованого електроприводу:

$$W_{3,ш}(p) = \frac{\omega(p)}{u_{3,ш}(p)} = \frac{1/k_{IT}}{4T_{IT}pD_C(p)+1} = \frac{1/k_{IT}}{4T_{IT}p(2T_{IT}p(T_{IT}p+1)+1)} \quad (18)$$

де $D_C(p) = 2T_{IT}p(T_{IT}p+1)+1$ – характеристичний поліном оптимізованого замкненого контуру струму; $T_{IT} = T_{IT} = 5$ мс – некомпенсована постійна часу системи підпорядкованого регулювання.

При переході до зовнішнього контуру швидкості передавальну функцію підпорядкованого контуру струму спрощують, апроксимуючи контур ланкою першого порядку, тобто нехтуючи малою постійною часу T_{IT} . Похибка апроксимації при цьому не суттєва. Так, при оптимізації структури на рис. 3 передавальна функція замкненого зовнішнього контуру швидкості (18), оптимізованого по технічному оптимуму, апроксимується функцією

$$W_{3,ш}(p) = \frac{1/k_{IT}}{4T_{IT}p(2T_{IT}p+1)+1} \quad (19)$$

Це значить, що при підборі бажаного характеристичного рівняння можна обмежитись вибором типового нормованого рівняння другого порядку замість третього. Згідно структурної схеми на рис. 3 запишемо систему диференціальних рівнянь досліджуваної електромеханічної системи. Нехтуючи T_{IT} , вираз для напруги якірного ланцюга приймає вигляд:

$$u_a = k_{IT} \left[\frac{T_E R_a}{2T_{IT} k_{ДС} k_{IT}} (u_{рш} - k_{ДС} i_a) + u_2 \right]$$

де $u_{рш} = \frac{T_M}{4T_{IT}} \cdot \frac{k_{ДС} k_{ДС}}{R_a k_{IT}} u_y = \frac{J k_{ДС}}{4T_{IT} k_{ДС} k_{IT}} u_y$, u_2 – інтегральна складова напруги ПІ – регулятора струму:

Тоді напруга на якірному ланцюзі:

$$u_a = \frac{T_E J R_a}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС}} u_y - \frac{T_E R_a}{2T_{IT}} i_a + k_{IT} u_2$$

З урахуванням виразу для u_a записується система диференціальних рівнянь в нормальній формі Копій:

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_{ДС}}{J} i_a, \\ \frac{di_a}{dt} = \frac{J}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС}} u_y - \frac{1}{2T_{IT}} i_a + \frac{k_{IT}}{L_a} u_2 - \frac{R_a}{L_a} i_a, \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{J R_a}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС}} u_y - \frac{R_a}{2T_{IT} k_{IT}} i_a, \end{cases} \quad (20)$$

$$u_y = u_3 = k_1 \omega - k_2 i_a - k_3 u_2$$

де враховується введення 33 по інтегральній складовій напруги ПІ-регулятора струму.

На основі векторно-матричних рівнянь (20) складемо характеристичну матрицю оптимізованого електроприводу, замкненого по вектору стану з урахуванням, що $u_3 = 0$.

$$D = pI - A + bk^T = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{ДС}}{J} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2T_{IT}} - \frac{R_a}{L_a} & \frac{k_{IT}}{L_a} \\ 0 & -\frac{R_a}{2T_{IT} k_{IT}} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{J}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС}} \\ \frac{J R_a}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС}} \end{bmatrix} \cdot [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

або, виконуючи математичні дії, отримаємо

$$D(p) = \det D = p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + d_3, \quad (21)$$

$$\text{де } d_1 = \frac{L_a R_a J k_3 + 4T_{IT} k_{IT} k_{ДС} L_a + J L_a k_{IT} k_2 + 8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС} k_1 R_a}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС} k_{ДС} L_a};$$

$$d_2 = \frac{R_a^2 J k_3 + 4T_{IT} k_{IT} k_{ДС} L_a R_a + J R_a k_{IT} k_2 + L_a k_{IT} k_{ДС} k_1}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС} k_{ДС} L_a};$$

$$d_3 = \frac{R_a k_1}{8T_{IT}^2 k_{IT} L_a}.$$

В якості бажаного обираємо типові нормовані характеристичні рівняння третього порядку для модульного оптимуму:

$$D_{БЛЖ}(p) = \det D = p^3 + 2p^2 + 2p + 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти $D_{БЛЖ}(p)$ та $D(p)$ поліному (21) при однакових степенях оператора p , знаходимо коефіцієнти 33 по вектору стану k_i :

$$\begin{cases} \frac{L_a R_a J k_3 + 4T_{IT} k_{IT} k_{ДС} L_a + J L_a k_{IT} k_2 + 8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС} k_1 R_a}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС} k_{ДС} L_a} = 2; \\ \frac{R_a^2 J k_3 + 4T_{IT} k_{IT} k_{ДС} L_a R_a + J R_a k_{IT} k_2 + L_a k_{IT} k_{ДС} k_1}{8T_{IT}^2 k_{IT} k_{ДС} k_{ДС} L_a} = 2; \end{cases} \quad (22)$$

Система (22) має важливу особливість: два перших рівняння системи являються лінійно залежними, тобто одне рівняння можна отримати із іншого шляхом множення одного з них на визначений коефіцієнт q :

$$\begin{cases} ak_3 + bk_2 = c \\ qak_3 + qbk_2 = d, \\ k_1 = const \end{cases} \quad (23)$$

де $d \neq q \cdot c$ – вільний коефіцієнт рівняння.

Коефіцієнт 33 по швидкості знаходиться відносно легко з третього рівняння системи:

$$k_1 = \frac{8T_{IT}^2 k_{IT} L_a}{R_a} \quad (24)$$

В лінійно залежних рівняннях немає однозначного розв'язання, а яке-небудь одне рішення може бути знайдене шляхом попереднього завдання значення однієї з двох змінних k_2 або k_3 . Так, якщо задаються значення змінної $k_3 = 1$, то першого рівняння системи

(22) шукана змінна k_2 визначається за допомогою наступного виразу:

$$k_2 = - \frac{JR_a + 4T_{\text{III}}k_{\text{IT}}k_dk_{\text{III}} + 8T_{\text{III}}^2k_{\text{IT}}k_dk_{\text{III}} \frac{R_a}{L_a} - 16T_{\text{III}}^2k_{\text{IT}}k_dk_{\text{III}}}{k_{\text{III}}J}. \quad (25)$$

Якщо знехтувати малістю значення T_{III}^2 , то вираз для змінної k_2 прийме вигляд:

$$k_2 = - \frac{JR_a + 4T_{\text{III}}k_{\text{IT}}k_dk_{\text{III}}}{k_{\text{III}}J}. \quad (26)$$

Аналогічне значення змінної отримаємо також із другого рівняння системи (23), підставляючи в неї знайдене значення змінної k_1 .

Із системи рівнянь (22) і (23) видно, що після оптимізації контуру струму електромеханічної системи третього порядку, її можна розглядати як електропривод другого порядку. При цьому, система диференціальних рівнянь в нормальній формі Коши (20) буде складатись із виразів похідних лише по двом фізичним змінним: по швидкості обертання валу i_a та по струму якорного ланцюга i_a , оскільки інтегральна складова напруги ПП – регулятора струму u_2 повинна входити до вже оптимізованого контуру струму.

У випадку розгляду системи як структури третього порядку, коефіцієнт зворотного зв'язку по інтегральній складовій напруги ПП – регулятора приймемо довільного значення, наприклад, рівним одиниці $k_3 = 1$. Такий підхід однозначно спрощує використання методу розміщення полюсів при синтезі системи керування, так як працювати доводиться з диференціальними рівняннями та векторно-матричними рівняннями на порядок меншими фактичного порядку електропривода.

ОБГОВОРЕННЯ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Для дослідження перехідних процесів електропривода і вимірів характерних їм показників якості змодельємо роботу оптимізованого електропривода і синтезованої системи модального керування (рис. 3) в програмному середовищі Matlab. Номінальні параметри електродвигуна постійного струму та налаштованими на модульний оптимум значеннями елементів ланцюга керування: $k_{\text{III}} = 30$, $R_a = 0,67 \text{ Ом}$, $L_a = 0,005 \text{ Гн}$, $T_E = 0,0075 \text{ с}$, $k_d = 0,65 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{рад}$, $J = 0,162 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $k_{\text{IT}} = 0,032 \text{ В} \cdot \text{с} / \text{рад}$, $k_{\text{IT}} = 0,1 \text{ Ом}$. В процесі синтезу системи керування методом розміщення полюсів по умовчання було прийнято, що коефіцієнти 33 по вектору стану включають в себе передавальні функції датчиків струму та швидкості, тобто при побудові структурної схеми для моделювання їх можна не виділяти окремими коефіцієнтами підсилення.

Підставляючи дані параметри електропривода у вирази для коефіцієнтів 33 по вектору стану, отримуємо їх числові значення: $k_1 = 4,6 \cdot 10^{-8}$, $k_2 = -0,025$, $k_3 = 1$.

Значення коефіцієнту 33 по швидкості k_1 , мале і ним можна знехтувати або ж без особливих змін характеристик ЕП можна прирівняти його до нуля. Це

значить, що основний контур регулювання швидкості не має впливу на якісні характеристики системи, так як задані показники якості повністю реалізуються за рахунок лінійно залежних 33 по швидкості та інтегральній складовій напруги ПП – регулятора струму.

Отже, можна стверджувати, що окрім зниження порядку характеристичного рівняння системи, забезпечено параметричну стійкість системи керування відносно контуру швидкості.

На рисунках 4 та 5 для порівняння представлені графіки перехідних функцій зміни швидкості та струму при ступінчастій зміні навантаження (характеристика а) на валу електродвигуна в двоконтурному електроприводі, що налаштований на модульний оптимум (характеристика б) та оптимізованому електроприводі з модальним регулятором, синтезованим за допомогою методу розміщення полюсів (характеристика в).

Порівнюючи перехідні характеристики швидкості бачимо, що в електроприводі з характеристиками (б) коефіцієнт передачі менше, ніж в електроприводі з характеристиками (в). Показники якості перехідного процесу при цьому в обох електроприводах абсолютно аналогічні. Також, розглядаючи у відносних одиницях падіння швидкості при стрибкоподібному підвищенні навантаження, бачимо, що жорсткість механічної характеристики електропривода (в) значно вище жорсткості характеристики електропривода (б).

При порівнянні перехідних характеристик зміни струму якорного ланцюга електроприводів (б) та (в) видно, що електромеханічні характеристики обох приблизно однакові. Однак, при запуску в електроприводі з характеристиками (б) спостерігаються високочастотні коливання струму з початковим стрибком пускового струму, значення якого підвищується пропорційно навантаженню на валу електродвигуна. При цьому оптимізований електропривод з модальним регулятором (характеристика в) має чітко виражений процес зміни струму в момент пуску та розгону двигуна, а також постійні значення стрибку пускового струму, що не залежать від навантаження на валу при $M_c < M_n$. Така стабілізація струму досягається за рахунок подвійного 33 (додатного та від'ємного) по струму, а також за рахунок робастного контуру регулювання швидкості.

Виходячи із всього вище сказаного, цілком очевидні переваги використання модального керування при налаштуванні на модульний оптимум електропривода постійного струму. Така структура системи керування дозволяє реалізувати будь-які задані показники якості перехідних процесів як в контурі струму, так і в контурі швидкості.

ВИСНОВКИ

У результаті дослідження обґрунтовано можливість формалізованого суміщення оптимізації параметрів регуляторів та модального керування в межах єдиної структури системи керування

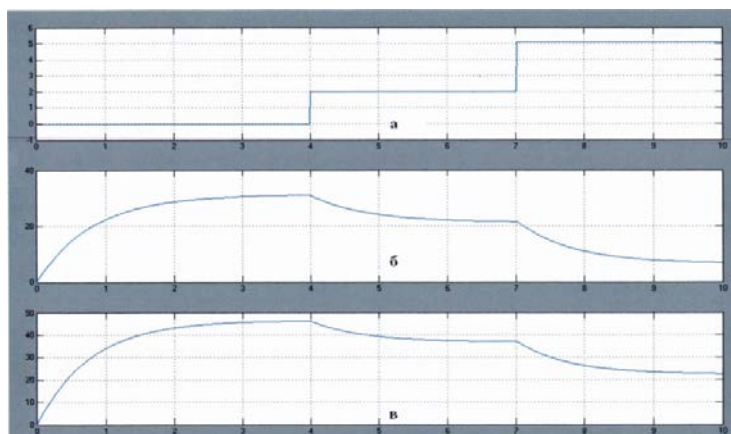


Рис. 4. Стрибоподібна зміна навантаження на валу (а) та перехідні процеси зміни швидкості в оптимізованому електроприводі (б) та оптимізованому електроприводі з модальним керуванням (в)

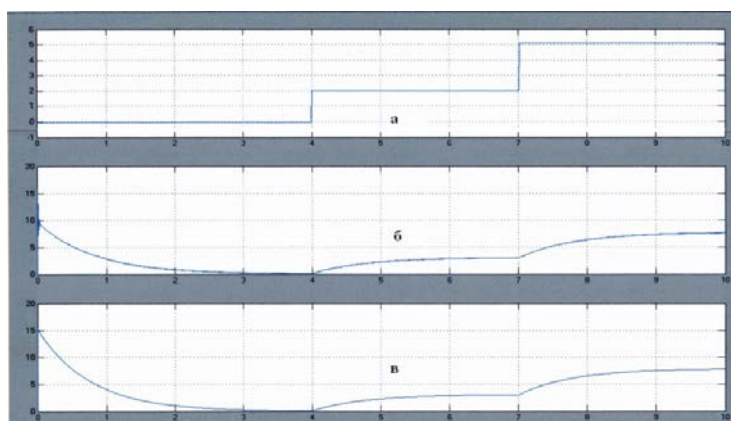


Рис. 5. Стрибоподібна зміна навантаження на валу (а) та перехідні процеси зміни струму якорних ланцюгів в оптимізованому електроприводі (б) та оптимізованому електроприводі з модальним керуванням (в)

електроприводом постійного струму. Показано, що застосування модального керування до зовнішнього контуру дозволяє знизити ефективний порядок характеристичного рівняння системи без істотної втрати швидкодії та точності регулювання.

На основі результатів моделювання встановлено, що запропонований підхід забезпечує покращення показників якості перехідних процесів, зокрема

зменшення перерегулювання та часу встановлення, а також підвищення стійкості динамічних характеристик системи за умов параметричних відхилень у контурі швидкості.

Отримані результати підтверджують доцільність застосування поєднання методів модульного оптимізму та модального керування при синтезі систем керування електроприводами постійного струму.

REFERENCES

- [1] Kumar, P., & Singh, M. (2023). Optimal control of DC motor using Multiverse Optimization Algorithm. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, 12(05), 1–6.
- [2] Pavelchak, A. H., Samotyi, V. V., & Shyrii, P. P. (2017). Parametrychna optymizatsiia systemy keruvannia motorom postiinoho strumu z paralelnym zbudzhenniam [Parametric optimization of a DC motor control system with shunt excitation]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnik"*. Seriya: Avtomatyka, vymiriuvannia ta keruvannia, no. 880, pp. 50–59.
- [3] Lozynskyi, O. Yu., & Boichuk, B. H. (2001). Optymizatsiia konturu strumu v elektropyvodi postiinoho strumu za systemoiu kerovanyi peretvoriuvach–dvyhun [Optimization of the current loop in a DC drive with a controlled converter–motor system]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnik"*, no. 418, pp. 93–99.
- [4] Bozali, B., Al Saremi, N. B. N., & Öztürk, A. (2024). Enhancing DC motor speed control performance using heuristic optimization and comparative analysis of control methods. *DUBİTED*, 12(4), 2220–2244. <https://doi.org/10.29130/dubited.1505316>

- [5] Khather, S. I., Ibrahim, M. A., & Ibrahim, M. H. (2023). Dual fuzzy logic PID controller based regulating of DC motor speed control with optimization using Harmony Search algorithm. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(8(124)), 6–14. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.282830>
- [6] Kuczmam, M. (2024). Review of DC motor modeling and linear control: Theory with laboratory tests. *Electronics*, 13(11), 2225. <https://doi.org/10.3390/electronics13112225>
- [7] Iswanto, Raharja, N., Ma'arif, A., Ramadhan, Y., & Rosyady, P. (2021). Pole placement based state feedback for DC motor position control. *Journal of Physics: Conference Series*, 1783, 012057. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1783/1/012057>
- [8] Vukosavic, S. N. (2012). *Digital control of electrical drives*. New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48598-0>
- [9] Pyrhonen, J., Hrabovcova, V., & Semken, R. S. (2016). *Electrical machine drives control: An introduction*. Hoboken, NJ: Wiley.
- [10] De Doncker, R. W., Pulte, D. W. J., & Veltman, A. (2020). *Advanced electrical drives*. Cham: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-48977-9>
- [11] *Advanced control systems for electric drives*. (2022). Basel: MDPI. <https://doi.org/10.3390/books978-3-03943-700-9>

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Kumar, P., & Singh, M. (2023). Optimal control of DC motor using Multiverse Optimization Algorithm. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, 12(05), 1–6.
- [2] Pavelchak, A. H., Samotyi, V. V., & Shyrii, P. P. (2017). Параметрична оптимізація системи керування мотором постійного струму з паралельним збудженням. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*. Серія: Автоматика, вимірювання та керування, (880), 50–59.
- [3] Lozynskiy, O. Yu., & Boichuk, B. H. (2001). Оптимізація контуру струму в електроприводі постійного струму за системою керований перетворювач–двигун. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*. Серія: Електроенергетичні та електромеханічні системи, (418), 93–99.
- [4] Bozali, B., Al Saremi, N. B. N., & Öztürk, A. (2024). Enhancing DC motor speed control performance using heuristic optimization and comparative analysis of control methods. *DUBİTED*, 12(4), 2220–2244. <https://doi.org/10.29130/dubited.1505316>
- [5] Khather, S. I., Ibrahim, M. A., & Ibrahim, M. H. (2023). Dual fuzzy logic PID controller based regulating of DC motor speed control with optimization using Harmony Search algorithm. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4(8(124)), 6–14. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.282830>
- [6] Kuczmam, M. (2024). Review of DC motor modeling and linear control: Theory with laboratory tests. *Electronics*, 13(11), 2225. <https://doi.org/10.3390/electronics13112225>
- [7] Iswanto, Raharja, N., Ma'arif, A., Ramadhan, Y., & Rosyady, P. (2021). Pole placement based state feedback for DC motor position control. *Journal of Physics: Conference Series*, 1783, 012057. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1783/1/012057>
- [8] Vukosavic, S. N. (2012). *Digital control of electrical drives*. New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48598-0>
- [9] Pyrhonen, J., Hrabovcova, V., & Semken, R. S. (2016). *Electrical machine drives control: An introduction*. Hoboken, NJ: Wiley.
- [10] De Doncker, R. W., Pulte, D. W. J., & Veltman, A. (2020). *Advanced electrical drives*. Cham: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-48977-9>
- [11] *Advanced control systems for electric drives*. (2022). Basel: MDPI. <https://doi.org/10.3390/books978-3-03943-700-9>

© Садовий О. С., Ставинський А. А., Мардзявко В. А., Гуров А. П., Васильєв О. Г., Тубальцев А. М.

Дата першого надходження статті до видання: 11.01.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 17.02.2026

Дата публікації (оприлюднення) статті: 22.05.2026



Стаття поширюється на умовах ліцензії відкритого доступу (CC BY 4.0)