

УДК 621.51

DOI [https://doi.org/10.15589/znp2025.4\(502\).15](https://doi.org/10.15589/znp2025.4(502).15)**ANALYTICAL DETERMINATION OF THE REDUCED MOMENT OF INERTIA OF A LEVER MECHANISM AND ITS FIRST DERIVATIVE WITH RESPECT TO THE ANGLE OF ROTATION OF THE FIRST LINK****АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПРИВЕДЕНОГО МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ВАЖІЛЬНОГО МЕХАНІЗМУ І ЙОГО ПЕРШОЇ ПОХІДНОЇ ПО КУТУ ПОВОРОТУ ПЕРШОГО ЗВЕНА****Oleksandr I. Tarasenko**

oleksandr.tarasenko@nuos.edu.ua

ORCID: 0000-0003-0363-4044

Olena V. Lytosh

olena.lytosh@nuos.edu.ua

ORCID: 0000-0002-8109-4680

Andrej O. Tarasenko

andrii.tarasenko@nuos.edu.ua

ORCID: 0000-0003-2082-3250

О. І. Тарасенко,

канд. техн. наук, доцент

О. В. Литош,

канд. техн. наук, доцент

А. О. Тарасенко,

інженер

*Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv**Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв*

Abstract. The *purpose* of the article is to develop an algorithm that allows analytically calculating the reduced moment of inertia of a lever mechanism and its first derivative with respect to the angle of rotation of the first link (crankshaft or crank) depending on the angle of rotation of the first link. This algorithm is necessary for numerically solving the equations of motion of machine units. In the equations of motion, the reduced moment of inertia is a variable coefficient. The first derivative of the reduced moment of inertia with respect to the angle of rotation can be taken as an additional force effect.

The parameters of the movement of the links of the lever mechanism are determined using the *methods* of theoretical mechanics, the theory of mechanisms and machines, and vector algebra. The reduced moment of inertia does not depend on the speed of rotation of the first link, but depends only on the position of the first link and the parameters of the lever mechanism, such as the kinematic scheme, masses and moments of inertia of the links. The *obtained* analogues of the speeds of the links allow us to calculate the moment of inertia of the lever mechanism and the first derivative of this moment of inertia of the lever mechanism with respect to the angle of rotation depending on the angle of rotation of the first link.

The *obtained expressions* allow us to calculate the moment of inertia and its first derivative with respect to the angle of rotation of the first link analytically. Calculating the first derivative with respect to the angle of rotation of the first link analytically guarantees the accuracy of the result, unlike graphical or numerical methods, the error of which is difficult to determine.

Methods for calculating the reduced moment of inertia of the lever mechanism are known. The *novelty* of the article lies in the analytical calculation of the first derivative and the analytical determination of analogues of speeds.

The *practical significance* of the results in assessing the ranges of change of the reduced moments and first derivatives with respect to the angle of rotation of the first link for a specific low-speed diesel compartment and the possibility of using the obtained results to solve the equations of motion.

The 8DKRN 60/195 diesel engine is considered as an example. This is a licensed copy of the L60MC diesel engine. It is concluded that it is necessary to take into account the variable nature of the reduced moment of inertia of low-speed diesel engines. It is noted that for high-speed diesel engines, the first derivative of the rotation angle is of great importance, as it can cause significant changes in the engine speed and increase the forces on its parts. This may be relevant for engines with a small number of cylinders and emergency modes such as a disconnected cylinder.

Key words: reduced moment of inertia; lever mechanism; analogues of speeds; first derivatives with respect to the angle of rotation; low-speed diesel; equations of motion.

Анотація. *Мета статті* – розробити алгоритм, що дозволяє обчислити аналітичним способом приведений момент інерції важільного механізму та його першу похідну по куту повороту першої ланки (колінчастого валу або кривошипу) залежно від кута повороту першої ланки. Цей алгоритм необхідний для чисельного розв’язання рівнянь руху машинних агрегатів. У рівняннях руху приведений момент інерції є змінним коефіцієнтом. Першу похідну приведенного моменту інерції від кута повороту можна розглядати як додатковий силовий вплив.

Параметри руху ланок важільного механізму визначаються за допомогою *методів* теоретичної механіки, теорії механізмів та машин та векторної алгебри. Приведений момент інерції не залежить від швидкості обертання першої ланки, а залежить тільки від положення першої ланки та параметрів важільного механізму, таких як кінематична схема, маси і моменти інерції ланок. *Отримані* аналоги швидкостей ланок дозволяють обчислити момент інерції важільного механізму і першу похідну цього моменту інерції важільного механізму по куту повороту в залежності від кута повороту першої ланки.

Отримані вирази дозволяють обчислити аналітичним способом момент інерції та його першу похідну по куту повороту першої ланки. Обчислення першої похідної по куту повороту першої ланки аналітичним методом гарантує точність результату на відміну від графічних чи чисельних методів, похибку яких важко визначити.

Методи обчислення приведенного моменту інерції важільного механізму відомі. *Новизна* статті в аналітичному обчисленні першої похідної та аналітичному визначенні аналогів швидкостей.

Практична значимість результатів в оцінці діапазонів зміни приведених моментів та перших похідних по куту повороту першої ланки для відсіку конкретного мало-оборотного дизеля та можливості використовувати отримані результати для вирішення рівнянь руху.

Як приклад розглянуто дизель 8ДКРН 60/195. Це ліцензійна копія дизеля L60MC. Зроблено висновок, що необхідно враховувати змінний характер приведенного моменту інерції мало-оборотних дизелів. Відзначено, що для швидкообертючих дизелів велике значення має перша похідна по куту повороту яка може спричинити суттєві зміни швидкості обертання двигуна та збільшити зусилля на його деталі. Це може бути актуально для двигунів з малим числом циліндрів та аварійним режимом типу відключений циліндр.

Ключові слова: приведений момент інерції; важільний механізм; аналоги швидкостей; перша похідна приведенного моменту інерції важільного механізму по куту повороту; мало-оборотний дизель; рівняння руху.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Динаміку машинного агрегату вивчають з допомогою моделі, де всі частини агрегату розглядаються як диски з’єднані один з одним валами [1,2,3]. Важільний механізм розглядається як диск, момент інерції якого залежить від кута повороту. Йдеться про приведений момент інерції. Зазвичай у якості осі приведення вибирають вісь обертання першої ланки (кривошипа або колінчастого валу).

Рівняння руху машинного агрегату можна записати у вигляді [3]

$$\frac{d}{d\phi} \left[(\theta + J_{pr}) \frac{\omega_1^2}{2} \right] = \Sigma M,$$

де $\omega_1 = \dot{\phi}_1$ – миттєва кутова швидкість валу приведення (валу номер 1); ΣM – сума усіх приведених крутих моментів діючих на диск; θ – постійні моменти інерції елементів машинного агрегату, приведених до валу номер 1; J_{pr} – приведений до колінчастого валу (валу номер 1) момент інерції важільного механізму.

Продиференціювавши це рівняння згідно [3], запишемо

$$\ddot{\phi}_1 \cdot (\theta + J_{pr}) = \Sigma M - \frac{\omega_1^2}{2} \frac{d}{d\phi} J_{pr}, \quad (1)$$

Рівняння (1) – це рівняння руху машинного агрегату. Для його вирішення необхідно методами теорії механізмів і машин отримати вирази, що дозволяють обчислити приведений момент інерції важільного

механізму і його першу похідну по куту повороту колінчастого валу.

Як важільний механізм розглядається найпоширеніший кривошипно-шатунний механізм, але все сказане нижче справедливо для будь-якого механізму другого класу [3].

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Аналіз останніх досліджень і публікацій дозволяє зробити висновок, що маховики змінних моментів інерції використовують для стабілізації швидкості обертання дизель-генераторів [4,5], або повітряних генераторів [6]. В статті [7] наведено методику визначення приведенного моменту інерції одноциліндрового двигуна, але це зроблено з метою компенсації нерівномірності обертання одноциліндрового двигуна маховиками змінних моментів інерції [8,9]. В [10] автор навів вирази для визначення параметрів відсіку дизеля не роз’яснивши як вони отримані.

ВІДОКРЕМЛЕННЯ НЕВИРІШЕНИХ РАНІШЕ ЧАСТИН ЗАГАЛЬНОЇ ПРОБЛЕМИ

Відокремлення невіршених раніше частин загальної проблеми можливо звести к визначенню аналітичним способом приведенного моменту інерції відсіку важільного механізму та його першій похідній по куту повороту першої ланки. Обчислення першої похідної по куту повороту першої ланки аналітичним методом гарантує точність результату на

відміну від графічних чи чисельних методів, похибку яких важко визначити.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета дослідження – розробити алгоритм, що дозволяє обчислити аналітичним способом приведений момент інерції важільного механізму та його першу похідну по куту повороту першої ланки (колінчастого валу або кривошипу) залежно від кута повороту першої ланки та виконати розрахунки для конкретного мало-обертового дизеля.

МЕТОДИ, ОБ'ЄКТ ТА ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Методом, об'єктом та предметом дослідження є відсік мало-оборотного дизеля котрий досліджується методами теорії механізмів та машин, теоретичної механіки та векторної алгебри.

Кінематичний аналіз кривошипно-шатунного механізму.

Розглядається кривошипно-шатунний механізм рис. 1.

На цьому малюнку:

r – радіус кривошипа (ланка 1) – відстань між осями корінної та мотильової шийок колінчастого валу – дорівнює половині ходу поршня;

L – довжина шатуна (ланки 2)

S – відстань між віссю мотильової шийки колінчастого валу і центром тяжіння шатуна (S_2 – центр тяжіння шатуна);

φ – кут між позитивним напрямом осі X і віссю кривошипа (віссю корінної шийки колінчастого валу);

α – кут між позитивним напрямом осі X та віссю шатуна.

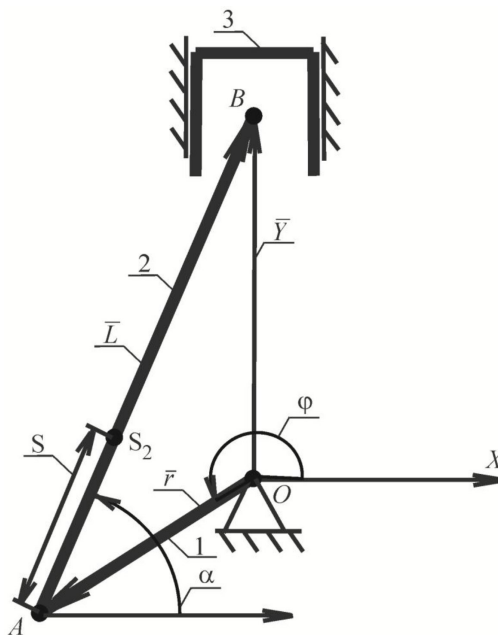


Рис. 1. Схема кривошипно-шатунного механізму

Вибір кутів обумовлений правилами векторної алгебри, оскільки кожна ланка представлена вектором. Наприклад, важливо, що синус кута α завжди позитивний.

Зазвичай для кривошипно-шатунного механізму відомо:

$\frac{r}{L}$ – відношення радіуса кривошипа до довжини шатуна;

$\frac{S}{L}$ – відношення відстані до центру ваги шатуна до його довжини;

θ – момент інерції коліна колінчастого валу (ланки 1);

m_2, J_2 – маса і головний центральний момент інерції шатуна (ланки 2);

m_3 – маса поршня, штока та приєднаних до них деталей (ланки 3).

Часто шатун вважають невагомим стержнем, який з'єднує корпуси крейцкопфного та мотильового підшипників. Тому одна частина маси шатуна розглядається разом з колінчастим валом і входить в θ – момент інерції коліна колінчастого валу (ланки 1), а інша частина маси шатуна розглядається разом з масою деталей, що рухаються поступально (поршень, шток і приєднані до них деталі). Такий під-

хід робить не обов'язковим використання $\frac{S}{L}$, m_2, J_2 , як вхідних даних. Достатньо включити в θ і m_n маси шатуна. За практичних розрахунків так і роблять.

Розглянувши векторний трикутник на рис. 1, можна записати наступне векторне рівняння.

$$\bar{Y} = \bar{r} + \bar{L}. \quad (2)$$

Спроектувавши це рівняння на вісь X та Y , отримаємо наступні алгебраїчні рівняння

$$r \cos \varphi + L \cos \alpha = 0, \quad (3)$$

$$r \sin \varphi + L \sin \alpha = Y. \quad (4)$$

З рівняння (3) легко знайти $\cos \alpha$, а враховуючи зазначений вище факт, що $\sin \alpha > 0$ запишемо наступні рівняння, що дозволяють визначити кут α

$$\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{r}{L} \cos \varphi \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{L} \cos \varphi\right)^2} \end{cases} \quad (5)$$

Положення поршня в циліндрі можна визначити за допомогою виразу

$$Y = r \sin \varphi + L \sin \alpha. \quad (6)$$

Для випадку нижньої мертвої точки $\varphi = 270^\circ$, а $\alpha = 90^\circ$ тоді рівняння (6) дасть $Y_H = L - r$ для координати поршня. Для випадку верхньої мертвої

точки $\varphi = 90^\circ$ і $\alpha = 90^\circ$, рівняння (6) дає $Y_B = L + r$ для координати поршня. Хід поршня – різниця між значеннями координат поршня для верхньої та нижньої мертвих точок дорівнює $2r$.

Завдання кінематики можна вважати вирішеними, якщо за відомим положенням кривошипа φ визначено положення всіх ланок (кут α) і по-друге, за відомою кутовою швидкістю $\omega_1 = \dot{\varphi}$ визначено швидкості центрів тяжкості всіх ланок і кутові швидкості ланок $\omega_1 = \dot{\varphi}$.

Продиференціювавши рівняння (3) одержимо

$$r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi + L \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha = 0.$$

З цього рівняння можна отримати відношення кутової швидкості шатуна (ланки 2) до кутової швидкості колінчастого валу (ланки 1)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{r \sin \varphi}{L \sin \alpha}. \quad (7)$$

Продиференціювавши (6) одержимо

$$\dot{Y} = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + L \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha. \text{ Враховуючи (3) запишемо}$$

$$\dot{Y} = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \varphi \text{ и остаточно}$$

$$\frac{\dot{Y}}{r \cdot \omega_1} = \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \cdot \cos \varphi. \quad (8)$$

Підставив в (8) вираження (7) запишемо

$$\frac{\dot{Y}}{r \cdot \omega_1} = \left(1 + \frac{r}{L} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}\right) \cdot \cos \varphi$$

ілі $\frac{\dot{Y}}{r \cdot \omega_1} = \cos \varphi + \frac{r}{L} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} \sin \varphi.$

Враховуючи, що $r \cdot \cos \varphi = -L \cdot \cos \alpha$ запишемо

$$\frac{\dot{Y}}{r \cdot \omega_1} = \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\tan \alpha} \text{ или } \frac{\dot{Y}}{r \cdot \omega_1} = -\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \alpha},$$

Обчислення наведеного моменту інерції кривошипно-шатунного механізму. Наведений момент інерції механізму – це такий момент інерції умовного маховика, при якому кінетична енергія цього маховика дорівнює кінетичній енергії механізму, що розглядається. Важлива вісь, до якої здійснюється операція приведення, точніше швидкість її обертання. Отже, для приведенного моменту інерції можна записати

$$J_{Pr} = J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2 \left(\frac{V_{S2}}{\omega_1}\right)^2 + m_3 \left(\frac{V_B}{\omega_1}\right)^2. \quad (9)$$

Відношення $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ визначено виразом (7). З виразу (8) можна записати

$$\frac{V_B}{\omega_1} = \frac{\dot{Y}}{\omega_1} = \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \cdot r \cdot \cos \varphi.$$

На основі гіпотези про плоско-паралельний рух твердого тіла в площині можна записати

$$\left(\frac{V_{S2}}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot S \cdot \sin \alpha + r \cdot \sin \varphi\right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot S \cdot \cos \alpha + r \cdot \cos \varphi\right)^2.$$

У записаний вище виразу підставимо замість $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$ виріз (7), а для $\cos \alpha$ та $\sin \alpha$ скористаємось виразами (5). Після перетворень запишемо

$$\left(\frac{V_{S2}}{\omega_1}\right)^2 = r^2 \cdot \left(1 - \frac{S}{L}\right)^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{S}{L}\right)^2 \cdot \cos^2 \varphi.$$

Підставивши отримані вище вирази (9) обчислимо наведений момент інерції за допомогою наступного виразу

$$J_{Pr} = J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_3 r^2 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cos^2 \varphi + m_2 r^2 \left[\left(1 - \frac{S}{L}\right)^2 \sin^2 \varphi + \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{S}{L}\right)^2 \cos^2 \varphi \right]. \quad (10)$$

Цікавим є випадок, коли шатун представляють у вигляді невагомго стрижня, на кінцях якого дві маси (два підшипникові корпуси). У цьому випадку головний центральний момент інерції шатуна

$$J_2 = m_2 \cdot L^2 \cdot \frac{S}{L} \cdot \left(1 - \frac{S}{L}\right). \quad (11)$$

Вираз (11) отримано за умови, що маса мотилового підшипника – $m_2 \cdot \left(1 - \frac{S}{L}\right)$, а маса підшипника шатуна приєднаного до крейцкопфного підшипника – $m_2 \cdot \frac{S}{L}$.

Підставивши (11) у (10) та враховуючи (7) отримаємо

$$J_{Pr} = r^2 \left(m_2 \left(1 - \frac{S}{L}\right) + m_K \right) + \left(m_3 + m_2 \frac{S}{L} \right) r^2 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cos^2 \varphi. \quad (12)$$

З виразу (12) можна зробити висновок, що якщо шатун представляють у вигляді невагомго стрижня, на кінцях якого дві маси (два підшипникові корпуси), то один корпус підшипника обертається разом з мотиловою шийкою колінчастого валу, а другий

корпус здійснює поступальний рух разом з поршнем. Зазвичай задають масу шийки колінчастого валу з корпусом підшипника шатуна і масу деталей, що поступально рухаються. Для формули (12) цих даних достатньо. У виріз (12) додано масу коліна m_k , яка приведена до мотилевої шийки колінчастого валу для врахування його моменту інерції.

Як приклад розглянемо дизель виробництва Брянського заводу 8ДКРН 60/195. Це ліцензійна копія дизеля L60МС. Цей дизель встановлений на судні льодового плавання.

Для обчислення наведеного моменту інерції відомі такі вихідні дані:

1. Маса поршня та деталей, що здійснюють зворотнo поступальний рух – $m_{пд} = 5389$ кг;

2. Маса коліна (з деталями шатуна), наведена до осі мотилевої шийки – $m_{кд} = 3803$ кг;

3. Маса шатуна у зборі – $m_2 = 3013$ кг;

4. Коефіцієнт поступальної складової маси шатуна – $\frac{S}{L} = 0,644$;

5. Відношення радіуса кривошипну до довжини шатуна $\frac{r}{L} = \frac{972}{2340} = 0,415$.

Ці дані дозволяють обчислити $m_1 = 2730$ кг; $m_3 = 3449$ кг; Момент інерції шатуна обчислюється за формулою (11).

Вираз (12) з урахуванням розглянутих вхідних даних можна записати в наступному вигляді:

$$J_{pr} = r^2 m_{кд} + r^2 m_{пд} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \cos^2 \varphi. \quad (13)$$

Першу похідну від моменту інерції по куту повороту колінчастого валу можна обчислити за допомогою наступного виразу, отриманого диференціюванням (10)

$$\frac{dJ_{np}}{d\varphi} = 2J_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) - \left[m_2 \left(\frac{S}{L} \right)^2 + m_3 \right] \times \left[\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin 2\varphi + 2 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right] \cdot r^2. \quad (14)$$

У виразі (14) застосовані наступні співвідношення:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) = \frac{r \cos \varphi}{L \sin \alpha} \left[\left(\frac{r \sin \varphi}{L \sin \alpha} \right)^2 - 1 \right]. \quad (15)$$

Відношення кутової швидкості шатуна (ланки 2) до кутової швидкості колінчастого валу (ланки 1) обчислюється згідно з (7).

Якщо диференціювати вираз (13) то

$$\frac{dJ_{np}}{d\varphi} = -m_{пд} \cdot \left[\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin 2\varphi + 2 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right] \cdot r^2. \quad (16)$$

На графіці рис. 3 показані залежності моменту інерції та його першої похідної по куту повороту колінчастого валу обчислені (13) і (16).

На рис. 3. видно суттєву зміну наведеного моменту інерції відсіку дизеля. Для потужного мало-оборотного дизеля L60МС момент інерції відсіку змінюється більш ніж 2,5 разу від 3,7 до 9,8 тм². Інерційний крутний момент на швидкості обертання колінчастого валу 120 об/хв обумовлений першою похідною наведеного моменту інерції

$$M_{F_{\max}} = -\frac{\omega_1^2}{2} \frac{d}{d\varphi} J_{pr} = -\frac{(\pi \cdot 120/30)^2}{2} 8 \cdot 10^3 = 631,7 \cdot 10^3 \text{ НМ.}$$

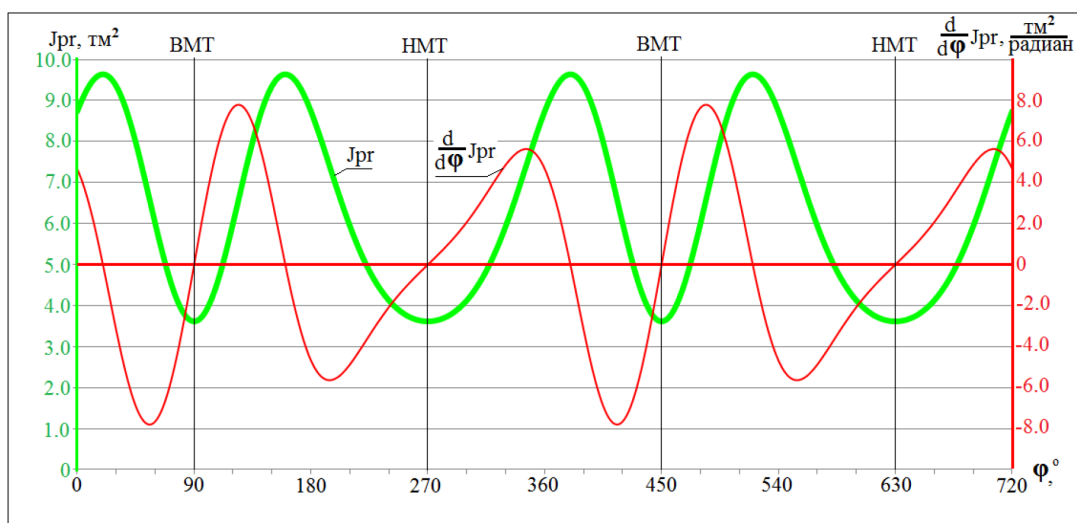


Рис. 3. Залежність наведеного моменту інерції та його першою похідною по куту повороту

Якщо потужність відсіку двигуна один мегават, то момент, що виробляється відсіком і передається в навантаження (на гребний гвинт) буде $79,6 \cdot 10^3$ НМ. Таким чином, інерційний момент значно вищий за момент, що передається в навантаження (на гребний гвинт).

При розрахунках двигунів на міцність сили інерції та інерційні моменти враховуються, але при розрахунках крутильних коливань і законів руху машинного агрегату зміну наведеного моменту інерції враховувати необхідно.

ВИСНОВКИ

Отримано аналітичні вирази, що дозволяють обчислити приведений момент інерції важільного

механізму і першу похідну приведенного моменту інерції по куту повороту першої ланки.

Для потужного мало-оборотного дизеля момент інерції відсіку змінюється більш ніж в 2,5 рази від 3,7 до 9,8 тм².

Для крейцкопфних поршневих машин (мало-оборотних дизелів і потужних компресорів холодильних машин) приведений момент інерції вважати постійним можна дуже приблизно.

Інерційний момент, що виникає внаслідок зміни приведенного моменту інерції, значно вищий (майже на порядок) за момент, що передається в навантаження (на гребний гвинт).

REFERENCES

- [1] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1960). *Mechanics* (Pergamon Press, Oxford).
- [2] Tu, Jay F. (2023). *Difficult Dynamics Concepts Better Explained: Principles and Applications*, World Scientific, ISBN 9811262497, 9789811262494.
- [3] Kinytskyi, Ya.T. (2002). *Teoriya mekhanizmiv i mashyn* [Theory of mechanisms and machines]. "Naukova dumka" – "Scientific thought" 2002. 660 p. [in Ukrainian].
- [4] Arani, A. A. K., Karami, H., Gharehpetian, G. B., & Hejazi, M. S. A. (2017). Review of flywheel energy storage systems structures and applications in power systems and microgrids. *Renew. Sustain. Energy Rev.* 69, 9–18.
- [5] Dugas, Patrick J. (2015). Variable inertia flywheel. US20150204418A1.
- [6] Jauch, C. (2015). A flywheel in a wind turbine rotor for inertia control. *Wind Energy*, 18 (9), 1645–1656.
- [7] Ylchenko, A. V., Kubrak, Yu. O., & Lomakin, B. O. (2011). Pryvedenny moment inertsii kryvoshypno-shatunnoho mekhanizmu odnotsylindrovoho porshnevoho dvyhuna vnutrishn'oho zhoryannya [The reduced moment of inertia of the crank mechanism of a single-cylinder piston internal combustion engine] *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu "KhPI" : zb. nauk. prats' : tematychnyy vypusk : Novi rishennya v suchasnykh tekhnolohiyakh. – Bulletin of the National Technical University "KhPI": collection of scientific works: thematic issue: New solutions in modern technologies*. Kharkiv : NTU "KhPI–2011". № 10. pp. 23–32. 148 p [in Ukrainian].
- [8] Lomakin, V. O. (2016). Makhovyk zminnoho momentu inertsii dlya porshnevoho dvyhuna vnutrishn'oho zhoryannya FP10C [Variable moment of inertia flywheel for internal combustion piston engine FP10C]. *Visnyk ZHDTU – Bulletin of ZhDTU*. № 2 (77) [in Ukrainian].
- [9] Ylchenko, A. V., & Lomakin, B. O. Makhovyk zminnoho momentu inertsii [Flywheel variable moment of inertia] patent No. 94321 C2 Ukraine, IPC (2006.01) F16F 15/30–No. a200910011; Applied on 01.10.2009; Publ. 26.04.2011, Bull. No. 8.–8 p. [in Ukrainian].
- [10] Tarasenko, O. I. (2012) Parametry vymushenykh krutyl'nykh kolyvan' malooborotnykh dyzeliv, vyznacheni za riznymy rozrakhunkovymy skhemamy [Parameters of forced torsional vibrations of low-speed diesel engines determined by various calculation schemes]. *Dvyhuny vnutrishn'oho zhoryannya: Vseukrayins'kyi naukovo-tekhnichnyi zhurnal – Internal combustion engines: All-Ukrainian scientific and technical journal*. Kharkiv : NTU "KhPI" 2012. No. 2. P. 79–82. [in Ukrainian].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Landau, L. D. and Lifshitz, E.M. (1960). *Mechanics* (Pergamon Press, Oxford).
- [2] Tu, Jay F. (2023). *Difficult Dynamics Concepts Better Explained: Principles and Applications*, World Scientific, ISBN 9811262497, 9789811262494.
- [3] Кіницький Я.Т. (2002). *Теорія механізмів і машин*. К. «Наукова думка»/ Підручник. 2002. 660 с
- [4] Arani, A. A. K., Karami, H., Gharehpetian, G. B., Hejazi, M. S. A. (2017). Review of flywheel energy storage systems structures and applications in power systems and microgrids. *Renew. Sustain. Energy Rev.* 69, 9–18.
- [5] Dugas, Patrick J. (2015). Variable inertia flywheel. US20150204418A1.
- [6] Jauch, C. (2015). A flywheel in a wind turbine rotor for inertia control. *Wind Energy* 18 (9), 1645–1656.
- [7] Ільченко, А.В., Кубрак, Ю. О., Ломакін, В. О. (2011). Приведений момент інерції кривошипно-шатунного механізму одноциліндрового поршневого двигуна внутрішнього згорання. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ" : зб. наук. праць : тематичний випуск : Нові рішення в сучасних технологіях*. Харків : НТУ "ХПІ–2011" № 10. С. 23–32. 148с.

- [8] Ломакін, В.О.(2016). Маховик змінного моменту інерції для поршневого двигуна внутрішнього згоряння FP10C. *Вісник ЖДТУ*. 2016. № 2 (77).
- [9] Ільченко, А. В., Ломакін, В. О. (2011) Маховик змінного моменту інерції : патент № 94321 С2 Україна, МПК (2006.01) F16F 15/30 –№ а200910011; Заявлено 01.10.2009; Опубл. 26.04.2011, Бюл. № 8.– 8 с.
- [10] Тарасенко, О. І. (2012) Параметри вимушених крутильних коливань малооборотних дизелів, визначені за різними розрахунковими схемами. Двигуни внутрішнього згоряння: Всеукраїнський науково-технічний журнал. Харків : НТУ “ХПИ”. 2012. № 2. С. 79–82.

© Тарасенко О. І., Литош О. В., Тарасенко А. О.
Дата надходження статті до редакції: 21.11.2025
Дата затвердження статті до друку: 10.12.2025
Опубліковано: 30.12.2025

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0