МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ КОРАБЛЕБУДУВАННЯ
ІМЕНІ АДМІРАЛА МАКАРОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Л.О. ЛАТАНСЬКА, І.В. УСТЕНКО, В.О. КАІРОВ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

(Частина 2)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

Л.О. ЛАТАНСЬКА, І.В. УСТЕНКО, В.О. КАІРОВ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

(Частина 2)

Рекомендовано Методичною радою НУК

Миколаїв ◊ ФОП Швець В.М. ◊ 2018

УДК 519.8(076)
Л 27

Автори:
Л.О. Латанська, канд. фіз.-мат. наук, доцент
І.В. Устенко, канд. техн. наук, доцент
В.О. Каіров, канд. техн. наук

Рецензент О.М.Дудченко, канд. техн. наук, доцент

Рекомендовано Методичною радою НУК

Латанська Л.О., Устенко І.В., Каіров В.О.

Л 27 Математичні методи дослідження операцій: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт (частина 2) / Л.О. Латанська, І.В. Устенко, В.О. Каіров. – Миколаїв: ФОП Швець В.М., 2018. – 40 с.

Методичні вказівки укладені у відповідності з робочою навчальною програмою дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" для студентів третього курсу спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення", 122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології" та містять основні теоретичні положення, приклади розв'язування задач та завдання на лабораторні роботи з розділу "Динамічне програмування".

УДК 519.8(076)

ВСТУП

Дисципліна "Математичні методи дослідження операцій" викладається в Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова при підготовці студентів денної та заочної форм навчання освітнього рівня "бакалавр" спеціальностей 121 "Інженерія програмного забезпечення", 122 "Комп’ютерні науки та інформаційні технології".

Метою вивчення дисципліни є формування у студентів знань та вмінь використання сучасних методів оптимізації як особливого процесу людської діяльності щодо вибору раціонального варіанту дій.

Методичні вказівки призначені для закріплення студентами теоретичних знань та набуття практичних навичок у підготовці та виконанні лабораторних робіт з розділу "Динамічне програмування" дисципліни "Математичні методи дослідження операцій". Вони містять завдання для лабораторних робіт, стислий виклад теоретичного матеріалу за кожною темою, приклади розв’язування задач та контрольні запитання.

При виконанні кожної лабораторної роботи рекомендується:

– засвоїти теоретичні відомості;
– розібратися з завданням та етапами виконання роботи;
– виконати запропоноване завдання та оформити звіт з роботи;
– перевірити повноту розуміння теми за допомогою контрольних запитань, розташованих у кінці кожної роботи.

Лабораторну роботу необхідно виконувати відповідно до наведених етапів виконання роботи. Звіт про лабораторну роботу оформлюється кожним студентом індивідуально. Звіт повинен містити: назву і мету роботи; завдання (постановку задачі); методику й алгоритм розв'язування задачі; результати роботи; аналіз результатів та висновки.

Основні положення теорії динамічного програмування

Основні положення динамічного програмування докладно викладені в [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Моделі динамічного програмування

Слово «програмування» в словосполученнях «динамічне програмування», «лінійне програмування» насправді до «традиційного» програмування (написання коду) майже ніякого відношення не має і має сенс як в словосполученні «математичне програмування», яке є синонімом слова «оптимізація». Тому слово «програма» в даному контексті скоріше означає оптимальну послідовність дій для отримання розв’язку задачі.

Словосполучення «динамічне програмування» вперше було використано в 1940-х роках американським математиком Річардом Беллманом. Динамічне програмування (ДП) застосовується при розв’язанні оптимізаційних задач, в яких процес прийняття рішень може бути розбитий на етапи (кроки).

На відміну від моделей лінійного програмування (ЛП), які застосовуються для прийняття великомасштабних планових рішень в складних ситуаціях, моделі ДП застосовуються при вирішенні задач значно меншого масштабу, наприклад, при розподілі дефіцитних капітальних вкладень між можливими напрямками їх використання; при розробці довгострокових правил заміни основних фондів, що вибувають з експлуатації; при розробці правил управління попитом або запасами, що встановлюють момент поповнення запасу і розмір замовлення для його поповнення; при розробці принципів календарного планування виробництва та вирівнювання зайнятості в умовах мінливого попиту на продукцію; при складанні календарних планів поточного і капітального ремонтів устаткування і його заміни; при пошуку найкоротших відстаней на транспортній мережі; при формуванні послідовності розвитку комерційної операції і т.д.

Загальна постановка задачі ДП

Розглядається керований процес, наприклад, процес розподілу коштів між підприємствами, заміни обладнання і т.п. В результаті управління система (об'єкт управління) переводиться з початкового стану S_0 в кінцевий стан $\hat{S}$. Припустимо, що управління можна розбити на n кроків, тобто рішення приймається послідовно на кожному кроці, а управління, що переводить систему з S_0 в $\hat{S}$, можна представити у вигляді послідовності n покрокових управлінь.

Позначимо через x_k управління на k-ому кроці $(k = 1, 2, \dots, n)$. Змінні x_k задовольняють деяким обмеженням і в цьому сенсі називаються допустимими.

Нехай $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – управління, яке переводить систему S із стану S_0 в стан $\hat{S}$.

Позначимо через S_k – стан системи після k-го кроку управління.

Отримуємо послідовність станів системи $S_0, S_1, \dots, S_{k-1}, S_k, \dots, S_{n-1}, S_n = \hat{S}$.

Схематично послідовності станів і управлінь представлені на рисунку 1.

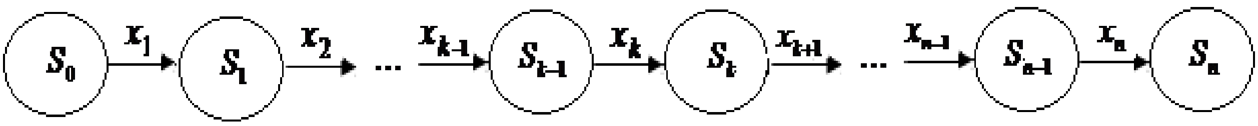

Рисунок 1 – Схематичне представлення послідовності станів і управлінь системи

Показник ефективності F керованої операції (цільова функція) залежить від початкового стану і управління:

$$F = F(S_0, X). \qquad (1)$$

Припустимо, що:

1) Стан системы в кінці k-го кроку залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} та управління на k-ому кроці x_k та не залежить від

інших попередніх станів і управлінь. Це положення записується у вигляді рівнянь

$$S_k = \varphi(S_{k-1}, x_k), \;\; k = 1,2,\dots,n, \qquad (2)$$

які називаються *рівняннями станів*.

2) Цільова функція $Z = F(S_0, X)$ являєтся адитивною:

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(S_{k-1}, x_k), \qquad (3)$$

де f_k – показник ефективності k-го кроку.

Задача ДП формулюється так:

Визначити таке допустиме управління X, яке переводить систему S із стану S_0 в стан $\hat{S}$, при якому цільова функція (3) приймає найбільше (найменше) значення.

Особливості моделі ДП

1) Задача оптимізації інтерпретується як n-кроковий процес управління.

2) Цільова функція дорівнює сумі цільових функцій кожного кроку.

3) Вибір управління на k-му кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку і не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку).

4) Стан системи після k-го кроку управління залежить від попереднього стану і управління на k-му кроці (немає післядії).

5) На кожному кроці управління x_k залежить від кінцевого числа керуючих змінних, а стан S_k – від скінченного числа параметрів.

Розглянемо схему ДП, яка не залежить від способів завдання функції і обмежень. Обчислювальна схема пов'язана з принципом оптимальності Беллмана та використовує рекурентні співвідношення.

Принцип оптимальності і рівняння Беллмана

Принцип оптимальності Беллмана: *Який би не був стан системи в результаті якого-небудь числа кроків, на найближчому кроці управління слід вибирати так, щоб воно в сукупності з управліннями на всіх наступних кроках приводило до оптимального виграшу на всіх наступних кроках, включаючи даний крок.*

Беллман також сформулював умови, при яких принцип вірний. Основне – система повинна бути без зворотнього зв'язку, тобто управління на даному кроці не повинно впливати на попередні кроки.

Розглянемо замість вихідної задачі ДП з фіксованим числом кроків n і початковим станом S_0 послідовність задач: однокрокову, двокрокову і т.д., використовуючи принцип оптимальності.

На кожному кроці будь-якого стану S_{k-1} рішення x_k впливає на наступний стан S_k.

Але є один крок, останній, який можна для будь-якого стану S_{n-1} планувати умовно-локально, виходячи тільки з міркувань цього кроку.

Розглянемо n-й крок:

S_{n-1} – стан системи до початку цього кроку;

$S_n = \hat{S}$ – кінцевий стан;

x_n – управління на n-ому кроці;

$f_n(S_{n-1}, x_n)$ – цільова функція (виграш) n-го кроку.

Відповідно до принципу оптимальності, управління необхідно вибирати так, щоб отримати максимум $f_n(S_{n-1}, x_n)$ на цьому кроці.

Позначимо через $Z_n^*(S_{n-1})$ максимум цільової функції n-го кроку за умови, що до початку останнього кроку система була в довільному S_{n-1} стані:

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{x_n}\{f_n(S_{n-1}, x_n)\}. \quad (4)$$

Максимум знаходиться по всім допустимим управлінням. Розв’язок, при якому досягається max, також залежить від S_{n-1} і називається *умовно оптимальним керуванням на* n*-му кроці*. Позначимо його через $x_n^*(S_{n-1})$. Вирішивши одновимірну задачу локальної оптимізації за рівнянням (4), отримаємо $Z_n^*(S_{n-1})$ та $x_n^*(S_{n-1})$.

Розглянемо тепер двовимірну задачу.

Для будь-яких станів S_{n-2}, довільних управлінь x_{n-1} та оптимальних управлінь x_n^* значення цільової функції на двох останніх кроках дорівнює:

$$f_{n-1}(S_{n-2}, x_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}) \; . \tag{5}$$

Згідно принципу оптимальності для любих S_{n-2} необхідно вибрати розв'язок так, щоб він разом з оптимальним управлінням на останньому (n-му) кроці приводив до максимуму цільову функцію на двох останніх кроках. Тобто, необхідно знайти максимум (5) по всім допустимим управлінням x_{n-1}. Максимум цієї суми залежить від S_{n-2}, позначається $Z_{n-1}^*(S_{n-2})$ і називається умовним максимумом цільової функції при оптимальному управлінні на двох останніх кроках. Відповідне управління x_{n-1} на $(n-1)$-му кроці позначається $x_{n-1}^*(S_{n-2})$ і називається умовним оптимальним управлінням на $(n-1)$-му кроці.

$$Z_{n-1}^*(S_{n-2}) = \max_{x_{n-1}} \{ f_{n-1}(S_{n-2}, x_{n-1}) + Z_n^*(S_{n-1}) \}. \tag{6}$$

Т.я. S_{n-1} можна знайти з рівняння стану $S_{n-1} = \varphi(S_{n-2}, x_{n-1})$ і підставити замість S_{n-1} в функцію $Z_n^*(S_{n-1})$, то, в результаті оптимізації тільки по одній змінній x_{n-1}, одержимо:

$$Z_{n-1}^*(S_{n-2}) \quad \text{та} \quad x_{n-1}^*(S_{n-2}).$$

Далі розглядається трьохкрокова задача і т.д.

Позначимо через $Z_k^*(S_{k-1})$ умовний максимум цільової функції, отриманої на $n-k+1$ кроках, починаючи з k-го до кінця, за умови, що до k-го кроку система перебувала в стані S_{k-1}. Фактично ця функція дорівнює:

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{x_k} \{ f_k(S_{k-1}, x_k) + Z_{k+1}^*(S_k) \} \tag{7}$$

$$k = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Управління x_k на k-ому кроці, при якому досягається максимум (7), позначається $x_k^*(S_{k-1})$ та називається умовно-оптимальне управління на k-ому кроці. Щоб його знайти, необхідно замість S_k підставити $S_k = \varphi(S_{k-1}, x_k)$.

Рівняння (7) називаються *рівняннями Беллмана (основними рекурентними співвідношеннями Беллмана)*.

Таким чином, знаючи рівняння станів і користуючись рівняннями Беллмана (7), можна отримати послідовність умовних максимумів цільової функції на останньому, двох останніх, …, n кроках:

$$Z_n^*(S_{n-1}),\ Z_{n-1}^*(S_{n-2}), \dots,\ Z_2^*(S_1),\ Z_1^*(S_0)$$

та послідовність умовних оптимальних управлінь на n-му, $(n-1)$-му, …, 1-му кроках:

$$x_n^*(S_{n-1}),\ x_{n-1}^*(S_{n-2}), \dots, x_2^*(S_1), x_1^*(S_0).$$

Максимум цільової функції за n кроків:

$$Z_{max} = Z_1^*(S_0).$$

Далі, використовуючи послідовність умовних оптимальних управлінь і рівняння станів, знаходимо оптимальний розв'язок задачі ДП. При фіксованому S_0 однозначно визначаємо оптимальне управління на першому кроці:

$$x_1^* = x_1^*(S_0).$$

З рівнянь станів знаходимо:

$$S_1 = \varphi(S_0, x_1^*).$$

Знаючи S_1, визначаємо оптимальне управління на другому кроці:

$$x_2^* = x_2^*(S_1)$$

і так далі:

$$S_k = \varphi(S_{k-1}, x_k^*),\ \ x_{k+1}^* = x_{k+1}^*(S_k), (k = 2,3,4, \dots, n-1).$$

На останньому кроці знаходимо S_{n-1} та x_n^*:

$$S_{n-1} = \varphi(S_{n-2}, x_{n-1}^*),\ x_n^* = x_n^*(S_{n-1}).$$

В результаті отримали оптимальний розв'язок задачі динамічного програмування:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*).$$

Таким чином, обчислювальна процедура методу ДП розпадається на два етапи: умовну і безумовну оптимізацію.

На етапі ***умовної*** оптимізації відповідно до функціонального рівнянням визначаються умовні оптимальні управління для всіх можливих станів на кожному кроці, починаючи з останнього.

На етапі ***безумовної*** оптимізації кроки розглядаються, починаючи з першого. Оскільки початковий стан S_0 відомий, вибирається оптимальне управління з множини x_1^*. Обране оптимальне управління x_1^* приводить систему в цілком визначений стан S_1. Завдяки тому, що початковий стан S_1 на початку другого кроку відомий, стає можливим вибрати оптимальне управління на другому кроці і т.д. Таким чином, будується ланцюг взаємопов'язаних рішень безумовної оптимізації.

Схема розв'язування задач динамічного програмування

1) Вибираємо спосіб ділення процесу управління на кроки.

2) Визначаємо параметри стану S_k та змінні управління x_k на кожному кроці.

3) Записуємо рівняння стану.

4) Вводимо цільову функцію k-го кроку та сумарну цільову функцію.

5) Вводимо в розгляд умовні максимуми (мінімуми) $Z_k^*(S_{k-1})$ та умовні оптимальні управління на k-му кроці $x_k^*(S_{k-1})$, $k = n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

6) Записуємо рівняння Беллмана для $Z_n^*(S_{n-1})$ та $Z_k^*(S_{k-1})$, $k = n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

7) Розв'язуємо послідовно рівняння Беллмана (умовна оптимізація) та отримуємо дві послідовності: $\{ Z_k^*(S_{k-1})\}$ та $\{ x_k^*(S_{k-1})\}$.

8) Після виконання умовної оптимізації отримуємо оптимальний розв'язок для конкретного початкового стану S_0:

a) $Z_{max} = Z_1^*(S_0)$ та

b) послідовно $S_0 \Rightarrow x_1^* \to S_1^* \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_{n-1}^* \to S_{n-1}^* \Rightarrow x_n^* \to S_n^*$.

Оптимальне управління $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Переваги динамічного програмування

1) На кожному етапі розв'язується задача пошуку екстремуму лише по частині змінних, отже, розмірність цих задач в порівнянні з вихідною значно нижче. Це дозволяє спростити пошук оптимальних значень шуканих змінних.

2) ДП дає можливість вирішувати задачі, які не можуть бути вирішені при інших підходах.

3) Алгоритми розв’язування задач динамічного програмування легко реалізуються на ЕОМ.

Недоліки динамічного програмування

1) Не існує єдиного універсального методу вирішення задач динамічного програмування.

2) Великі об’єми і трудомісткість розв’язку багатокрокових задач, що мають множину станів, приводять до необхідності відбору задач малої розмірності або використання стислої інформації. Останнє досягається за допомогою методів аналізу варіантів і переробки списку станів.

Лабораторна робота №1

Тема: **Задача про розподіл ресурсів між можливими напрямками їх використання**

Мета роботи: набуття теоретичних знань та практичних навичок побудови математичних моделей та знаходження оптимальних розв'язків задач про розподіл ресурсів.

Завдання

Виробниче об'єднання складається з чотирьох підприємств $(n = 4)$. Загальна сума річних інвестицій в виробничому об'єднанні дорівнює 500 ум. од. $(S_0 = 500)$. Розмір інвестицій в кожне окреме підприємство кратний 100 ум. од. Якщо k-е $(k = 1, 2, 3, 4)$ підприємство на початку року отримує інвестиції в обсязі x_k ум. од., то в кінці року прибуток підприємства зростає на $f_k(x_k)$ ум. од. Вихідні дані x_k та $f_k(x_k)$ наведені в таблиці 1.

Передбачається, що:

1) збільшення прибутку кожним підприємством не залежить від вкладених коштів в інші підприємства;

2) прибутки всіх підприємств виражені в одних умовних одиницях;

3) сумарне збільшення прибутку виробничого об’єднання дорівнює сумі збільшень прибутків підприємств.

Необхідно визначити, яку кількість інвестицій необхідно вкласти в кожне підприємство, щоб сумарний приріст прибутку в виробничому об'єднанні був найбільшим.

Таблиця 1 – Вихідні дані для лабораторної роботи №1

Варіант 1					Варіант 2				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	20	18	25	30	100	6	7	5	6
200	44	29	41	52	200	11	14	17	19
300	55	49	52	76	300	15	19	21	27
400	63	72	74	90	400	18	22	26	31
500	67	87	82	104	500	19	25	28	34

Варіант 3					Варіант 4				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	15	18	16	10	100	29	11	20	29
200	24	26	27	17	200	49	22	40	32
300	30	34	37	23	300	67	42	54	40
400	36	39	44	29	400	77	53	66	49
500	40	42	48	34	500	88	69	77	57

Варіант 5					Варіант 6				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	42	30	22	50	100	4	22	16	29
200	58	49	37	68	200	14	35	25	31
300	71	63	49	82	300	15	46	32	34
400	80	68	59	88	400	18	51	39	41
500	89	69	68	91	500	19	45	47	48

Варіант 7					Варіант 8				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	10	13	6	24	100	18	20	9	3
200	20	25	13	36	200	44	25	27	25
300	30	37	20	42	300	54	30	38	30
400	38	47	27	46	400	56	35	47	32
500	43	55	33	48	500	61	37	56	43

Варіант 9					Варіант 10				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	37	48	85	47	100	7	8	5	6
200	64	75	90	70	200	12	13	12	20
300	87	98	111	80	300	24	27	31	22
400	105	120	118	86	400	35	32	35	26
500	120	132	124	91	500	41	40	38	45

Варіант 11					Варіант 12				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	3	5	8	6	100	4	8	5	6
200	5	8	13	10	200	14	23	21	18
300	7	10	17	13	300	21	34	42	40
400	8	12	20	15	400	25	37	47	45
500	9	13	23	16	500	37	45	52	58

Варіант 13				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	5	8	10	11
200	10	13	16	19
300	14	18	21	26
400	17	21	24	30
500	19	23	27	33

Варіант14				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	3	8	6	9
200	18	24	15	30
300	59	26	17	45
400	66	40	31	67
500	68	42	45	70

Варіант 15				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	28	25	15	20
200	45	41	25	33
300	65	55	40	42
400	78	65	50	48
500	90	75	62	53

Варіант 16				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	22	24	26	32
200	25	27	28	36
300	31	31	37	38
400	42	36	40	40
500	57	60	66	55

Варіант 17				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	28	20	8	5
200	42	27	26	20
300	51	30	37	29
400	57	31	47	36
500	61	32	53	41

Варіант 18				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	12	13	16	10
200	18	20	18	22
300	30	26	23	26
400	36	39	26	30
500	45	47	48	55

Варіант 19				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	24	22	16	23
200	40	32	24	36
300	42	47	32	38
400	50	60	46	42
500	61	76	71	68

Варіант 20				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	51	40	37	46
200	52	50	47	50
300	60	62	57	52
400	65	66	64	67
500	75	80	82	81

Варіант 21				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	7	10	12	8
200	10	12	26	23
300	15	18	32	34
400	22	29	45	44
500	43	54	60	62

Варіант 22				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
100	32	28	44	34
200	45	37	46	44
300	67	54	64	46
400	72	62	76	66
500	90	88	94	90

Варіант 23					Варіант 24				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	3	6	8	10	100	13	10	18	20
200	14	15	17	20	200	31	35	40	34
300	32	30	35	28	300	52	49	55	60
400	45	41	46	50	400	66	73	77	69
500	72	80	67	90	500	78	89	95	77

Варіант 25					Варіант 26				
Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.				Вкладені кошти в ум.од.	Збільшення прибутку в ум.од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	23	20	30	21	100	3	6	10	11
200	31	35	32	29	200	21	27	15	22
300	33	40	42	45	300	34	40	42	44
400	51	53	52	60	400	50	52	55	60
500	66	73	80	79	500	62	66	70	69

Номер варіанта визначається за вказівкою викладача.

Короткі теоретичні відомості

Основні етапи розв’язування задачі про заміну обладнання докладно викладені в [7, 8, 9, 10].

Задачі розподілу ресурсів відносяться до одного з найважливіших класів задач прикладного спрямування. Це задачі про розподіл грошових коштів, матеріальних запасів, водних потоків, мережевих ресурсів, часу, оперативної або віртуальної пам'яті та інш.

Розглянемо задачу розподілу коштів між підприємствами.

Постановка задачі про розподіл коштів між підприємствами

Планується розподіл початкової суми коштів x_0 між n підпри-ємствами $П_1, П_2, \dots, П_n$. Передбачається, що виділені підприємству на початку планового періоду кошти x_k на кінці періоду приносять прибуток $f_k(x_k)$ $(k = 1,2, \dots, n)$. Будемо вважати, що:

1) прибуток, отриманий від вкладання коштів в підприємство $П_k$, не залежить від вкладання коштів в інші підприємства;

2) прибуток, отриманий від різних підприємств, виражається в

однакових одиницях;

3) загальний прибуток дорівнює сумі прибутків, отриманих від розподілу всіх коштів по всім підприємствам.

Необхідно визначити, яку кількість коштів потрібно виділити кожному підприємству, щоб сумарний прибуток $Z = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x_k)$ був максимальним. При цьому вважається, що змінні x_k повинні задовольняти умовам $x_1 + x_2 + \dots + x_\mathrm{n} = x_0;\ x_\mathrm{k} \geq 0\ (\mathrm{k} = 1, \dots, \mathrm{n})$.

Схема розв'язування задачі про розподіл коштів між підприємствами

Примінимо до сформульованої задачі схему динамічного програмування.

Будемо умовно вважати, що спочатку виділяємо кошти підприємству Π_1, потім Π_2, ..., Π_n. Тоді під k-м кроком будемо розуміти виділення коштів підприємству Π_k. Отримаємо n кроків.

Під станом S_k будемо розуміти залишок коштів по завершенню k-го кроку або їх наявність на початок $(k+1)$ -го кроку.

Під управлінням на k-му кроці будемо розуміти кількість коштів x_k, що виділяються на k-му кроці (тобто підприємству Π_k).

Рівняння стану для нашої задачі будуть мати вигляд:

$$S_k = S_{k-1} - x_\mathrm{k},\ k = 1, \dots, \mathrm{n}.$$

Під величиною доходу на k-му кроці будемо розуміти задані функції доходу $f_k(x_k)$, причому сумарний прибуток

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x_k).$$

Початковий і кінцевий стани жорстко закріплені, а саме:

$$S_0 = x_0\,,\ S_n = 0.$$

Отримали задачу динамічного програмування, для розв'язання якої необхідно знайти оптимальний набір управлінь $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, на якому $Z = max$.

Вводимо в розгляд умовні максимуми $Z_k^*(S_{k-1})$ цільової функції та умовно-оптимальні управління $x_k^*(S_{k-1})$ на k-ому кроці, $k = n, n-1, \dots 1$.

Записуємо рівняння Беллмана (4), (7) для нашої задачі:

$$Z_n^*(S_{n-1}) = \max_{0 \le x_n \le S_{n-1}}\{f_n(x_n)\}, \tag{8}$$

$$Z_k^*(S_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}}\{f_k(x_k) + Z_{k+1}^*(S_k)\}, \tag{9}$$

$$k = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

Розв'язуємо послідовно рівняння Беллмана (умовна оптимізація) та отримуємо дві послідовності: $\{ Z_k^*(S_{k-1})\}$ та $\{ x_k^*(S_{k-1})\}$.

Значення

$$Z_1^*(S_0) = \max_{x_1}\{f_1(S_0, x_1)\}$$

і є оптимумом. Виконуючи безумовну оптимізацію (використовуючи рівняння стану) знаходимо оптимальний розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Альтернативою динамічному програмуванню для даної задачі є перебір всіх варіантів розв'язку. ДП краще перебору тим, що відкидає невигідні варіанти.

Також ДП дозволяє виконувати аналіз розв'язку на чутливість до зміни початкових коштів і кількості кроків.

Розглянемо конкретний числовий приклад.

Приклад

Виробниче об'єднання складається з чотирьох підприємств $(n = 4)$. Загальна сума річних інвестицій в виробничому об'єднанні дорівнює 50 ум. од. $(x_0 = 50)$. Розмір інвестицій в кожне окреме підприємство кратний 10 ум. од. Якщо k-е $(k = 1, 2, 3, 4)$ підприємство на початку року отримує інвестиції в обсязі x_k ум. од., то в кінці року прибуток підприємства зростає на $f_k(x_k)$ ум. од. Вихідні дані x_k та $f_k(x_k)$ наведені в таблиці 2.

Передбачається, що:

1) збільшення прибутку кожним підприємством не залежить від вкладених коштів в інші підприємства;

2) прибутки всіх підприємств виражені в одних умовних одиницях;

3) сумарне збільшення прибутку виробничого об'єднання дорівнює сумі збільшень прибутків підприємств.

Необхідно визначити, яку кількість інвестицій необхідно вкласти в кожне підприємство, щоб сумарний приріст прибутку в виробничому об'єднанні був найбільшим.

Таблиця 2 – Збільшення прибутку підприємств в залежності від вкладених коштів

Вкладені кошти ум. од.	Збільшення прибутку в ум. од.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
10	3	2	1	2
20	4	3	2	3
30	6	6	5	4
40	8	7	7	8
50	9	9	10	10

Розв'язування

Особливості моделі: обмеження лінійні, шукані значення цілочисельні, а функції $f_k(x_k)$ задані таблично. Тому не можна застосувати методи цілочисельного лінійного програмування.

Примінимо до сформульованої задачі схему динамічного програмування.

Процес розподілу коштів $x_0 = 50$ будемо розглядати як 4-ох кроковий. При цьому номер кроку збігається з номером підприємства.

Позначимо через x_1, x_2, x_3, x_4 управління на першому, другому, третьому і четвертому кроках (виділення коштів відповідним підприємствам), а через S_1, S_2, S_3, S_4 – стани після першого, другого, третього і четвертого кроків (кількість коштів, що залишилися після виділення відповідно першому, другому, третьому та четвертому підприємствам). Початковий стан $S_0 = x_0 = 50$. Так як всі кошти повинні бути вкладені, то кінцевий стан має дорівнювати нулю, т. б. $\mathrm{S}_4 = 0$.

Схема розподілу коштів представлена на рисунку 2.

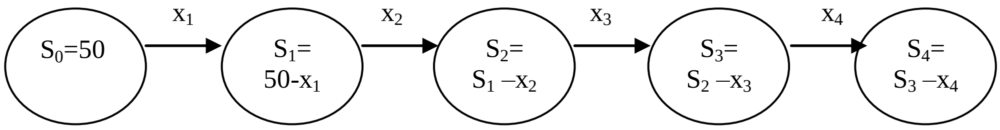

Рисунок 2 – Схема розподілу коштів між підприємствами

Рівняння станів в цій задачі мають вигляд:

$$S_k = S_{k-1} - x_{\mathrm{k}},\ \ k = 1,2,3,4,$$

де

S_{k-1} – кошти перед k -м кроком,

x_{k} – кошти, виділені k -му підприємству,

S_k – кошти, що залишилися після k -го кроку.

Під величиною доходу на k-му кроці будемо розуміти задані функції доходу $f_k(x_k)$, причому сумарний прибуток

$$Z = \sum_{k=1}^{4} f_k\,(x_k).$$

Початковий і кінцевий стани жорстко закріплені, а саме:

$$S_0 = x_0 = 50,\ S_4 = 0.$$

Отримали задачу динамічного програмування, для розв'язання якої необхідно знайти оптимальний набір управлінь на кожному кроці, тобто такий набір управлінь $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$, на якому $Z = max$.

Вводимо в розгляд умовні максимуми $Z_k^*(S_{k-1})$ цільової функції та умовно-оптимальні управління $x_k^*(S_{k-1})$ на k-ому кроці, $k = 4, 3,2, 1$.

Використовуючи обернену схему Беллмана, проведемо умовну оптимізацію.

Розглянемо останній четвертий крок. Згідно (8) умовне оптимальне значення цільової функції на 4-му кроці дорівнює:

$$Z_4^*(S_3) = \max_{0 \le x_4 \le S_3} \{f_4(x_4)\}.$$

Так як всі кошти, що залишилися до четвертого кроку, повинні бути вкладені в четверте підприємство, то попереднє співвідношення набуде вигляду:

$$Z_4^*(S_3) = f_4(S_3)$$

і умовне оптимальне керування на 4-му кроці дорівнюватиме:

$$x_4^*(S_3) = S_3.$$

Розглянемо два останні кроки (третій і четвертий). Згідно (9) умовне оптимальне значення цільової функції на третьому та четвертому кроках дорівнює

$$Z_3^*(S_2) = \max_{0 \le x_3 \le S_2} \{f_3(x_3) + Z_4^*(S_3)\}$$

і умовне оптимальне керування на 3-му кроці дорівнюватиме $x_3^*(S_2)$.

Для кожного значення S_2 обчислюються свої величини $Z_3^*(S_2)$ і $x_3^*(S_2)$. Результати обчислень на двох останніх кроках представлені в таблиці 3.

Кошти на два останніх підприємства представлені в стовпці 1, управління на третьому кроці відображено в стовпці 2, кошти на останнє четверте підприємство представлені в стовпці 3. Умовне оптимальне значення цільової функції на двох останніх кроках і умовне оптимальне управління на 3 кроці відображені в стовпцях 5 і 6 відповідно.

Таблиця 3 – Умовні оптимальні значення цільової функції на двох останніх кроках і умовні оптимальні управління на третьому кроці

S_2	x_3	S_3	$f_3(x_3)+Z_4^*(S_3)$	$Z_3^*(S_2)$	$x_3^*(S_2)$
1	2	3	4	5	6
0	0	0	0 + 0 = 0	0	0
10	0 10	10 0	0 + 2 = 2 1 + 0 = 1	2	0
20	0 10 20	20 10 0	0 + 3 = 3 1 + 2 = 3 2 + 0 = 2	3	0, 10
30	0 10 20 30	30 20 10 0	0 + 4 = 4 1 + 3 = 4 2 + 2 = 4 5 + 0 = 5	5	30
40	0 10 20 30 40	40 30 20 10 0	0 + 8 = 8 1 + 4 = 5 2 + 3 = 5 5 + 2 = 7 7 + 0 = 7	8	0
50	0 10 20 30 40 50	50 40 30 20 10 0	0 + 10 = 10 1 + 8 = 9 2 + 4 = 6 5 + 3 = 8 7 + 2 = 9 10 + 0 = 10	10	0, 50

Розглянемо другий, третій і четвертий кроки. Згідно (9) умовне оптимальне значення цільової функції на трьох останніх кроках дорівнює

$$Z_2^*(S_1) = \max_{0 \le x_2 \le S_1} \{f_2(x_2) + Z_3^*(S_2)\}$$

і умовне оптимальне управління на 2-му кроці дорівнюватиме $x_2^*(S_1)$.

Для кожного значення S_1 обчислюються свої величини $Z_2^*(S_1)$ та $x_2^*(S_1)$. Результати обчислень на трьох останніх кроках представлені в таблиці 4.

Кошти на три останніх підприємства представлені в стовпці 1, управління на другому кроці відображено в стовпці 2, кошти на третє і четверте підприємства представлені в стовпці 3. Умовне оптимальне значення цільової функції на трьох останніх кроках і умовне оптимальне управління на 2 кроці відображені в стовпцях 5 і 6 відповідно.

Таблиця 4 – Умовні оптимальні значення цільової функції на трьох останніх кроках і умовні оптимальні управлінння на другому кроці

S_1	x_2	S_2	$f_2(x_2)+Z_3^*(S_2)$	$Z_2^*(S_1)$	$x_2^*(S_1)$
1	2	3	4	5	6
0	0	0	0 + 0 = 0	0	0
10	0 10	10 0	0 + 2 = 2 2 + 0 = 2	2	0, 10
20	0 10 20	20 10 0	0 + 3 = 3 2 + 2 = 4 3 + 0 = 3	4	10
30	0 10 20 30	30 20 10 0	0 + 5 = 5 2 + 3 = 5 3 + 2 = 5 6 + 0 = 6	6	30
40	0 10 20 30 40	40 30 20 10 0	0 + 8 = 8 2 + 5 = 7 3 + 3 = 6 6 + 2 = 8 7 + 0 = 7	8	0, 30
50	0 10 20 30 40 50	50 40 30 20 10 0	0 + 10 = 10 2 + 8 =10 3 + 5 = 8 6 + 3 = 9 7 + 2 = 9 9 + 0 = 9	10	0, 10

Розглянемо всі чотири кроки. Згідно (9) умовне оптимальне значення цільової функції на чотирьох кроках дорівнює

$$Z_1^*(S_0 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le S_0} \{f_1(x_1) + Z_2^*(S_1)\}$$

і умовне оптимальне управління на 1-му кроці дорівнюватиме $x_1^*(S_0)$.

Для кожного значення S_0 обчислюються свої величини $Z_1^*(S_0)$ та $x_1^*(S_0)$. Результати обчислень на чотирьох кроках представлені в таблиці 5.

Кошти на чотири підприємства представлені в стовпці 1, управління на першому кроці відображено в стовпці 2, кошти на друге, третє і четверте підприємства представлені в стовпці 3. Умовне оптимальне значення цільової функції на чотирьох кроках і умовне оптимальне управління на 1-му кроці відображені в стовпцях 5 і 6 відповідно.

Таблиця 5 – Умовні оптимальні значення цільової функції на чотирьох кроках і умовні оптимальні управлінння на першому кроці

S_0	x_1	S_1	$f_1(x_1) + Z_2^*(S_1)$	$Z_1^*(S_0)$	$x_1^*(S_0)$
1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0
10	0 10	10 0	0 + 2 = 2 3 + 0 = 3	3	10
20	0 10 20	20 10 0	0 + 4 = 4 3 + 2 = 5 4 + 0 = 4	5	10
30	0 10 20 30	30 20 10 0	0 + 6 = 6 3 + 4 = 7 4 + 2 = 6 6 + 0 = 6	7	10
40	0 10 20 30 40	40 30 20 10 0	0 + 8 = 8 3 + 6 = 9 4 + 4 = 8 6 + 2 = 8 8 + 0 = 8	9	10
50	0 10 20 30 40 50	50 40 30 20 10 0	0 + 10 = 10 3 + 8 = 11 4 + 6 = 10 6 + 4 = 10 8 + 2 = 10 9 + 0 = 9	11	10

У таблиці 5 умовної оптимізації достатньо заповнити рядок таблиці, який відповідає $S_0 = 50$, тому що всі виділені кошти повинні бути вкладені (за умовою задачі зі збільшенням кількості вкладених коштів зростає і прибуток).

Максимальне збільшення сумарного прибутку знаходимо з таблиці 5 в п'ятому стовпці:

$$Z_1^*(50) = 11.$$

З цієї ж таблиці отримуємо, що в цьому випадку першому підприємству необхідно виділити

$$x_1^*(50) = 10.$$

Тоді на останні 3 підприємства залишається $50 - 10 = 40$ умовних одиниць грошей.

З таблиці 4 маємо, що якщо на три останніх підприємства припадає 40 умовних одиниць грошей, то максимальне збільшення сумарного прибутку в п'ятому стовпці:

$Z_2^*(40) = 8$ буде досягатися при $x_2^*(40) = 0$ та $x_2^*(40) = 30$.

Так як для другого підприємства є два оптимальних розв'язки, то на інші два підприємства залишається в першому випадку $40 - 0 = 40$ умовних одиниць коштів. З таблиці 3 маємо, що якщо на два останніх підприємства припадає 40 умовних одиниць коштів, то максимальне збільшення сумарного прибутку в п'ятому стовпці:

$$Z_3^*(40) = 8.$$

З цієї ж таблиці отримуємо, що в цьому випадку третьому підприємству необхідно виділити

$$x_3^*(40) = 0.$$

Тоді четвертому підприємству залишиться: $50 - 10 - 0 - 0 = 40$ умовних одиниць коштів.

Перше оптимальне управління дорівнюватиме:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*,\ x_3^*,\ x_4^*) = (10{,}0{,}0{,}40).$$

Якщо ж для другого підприємства вибрати оптимальний розв'язок $x_2^*(40) = 30$, то на інші підприємства в цьому випадку залишається $40 - 30 = 10$ умовних одиниць коштів.

З таблиці 3 маємо, що якщо на два останніх підприємства припадає 10 умовних одиниць коштів, то максимальне збільшення сумарного прибутку в п'ятому стовпці: $Z_3^*(10) = 2$.

З цієї ж таблиці отримуємо, що в цьому випадку третьому підприємству необхідно виділити

$$x_3^*(10) = 0 \text{ ум.од.}$$

Тоді четвертому підприємству залишиться: $50 - 10 - 0 - 30 = 10$ умовних одиниць коштів.

Друге оптимальне управління дорівнюватиме:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (10{,}30{,}0{,}10).$$

Таким чином, замість вирішення чотиривимірної задачі вирішували чотири одновимірних задачі, тобто на кожному кроці визначали одну змінну.

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняттю "дінамічне програмування".

2. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана і поясніть його зміст.

3. Наведіть приклади задач, які можуть вирішуватися методом ДП.

4. Що впливає на перехід системи з одного стану в інший?

5. Що є вихідною інформацією для задачі оптимального розподілу ресурсів?

6. Від чого залежить стан системи на довільному кроці?

7. Що таке умовно-оптимальне управління?

8. Запишіть і поясніть зміст усіх елементів в рівнянні станів в ДП.

9. Назвіть особливості моделі ДП.

10. Сформулюйте постановку задачі про розподіл ресурсів.

11. Запишіть рівняння станів для задачі про розподіл ресурсів.

12. Запишіть рівняння Беллмана для задачі про розподіл ресурсів

13. Який метод являється альтернативним ДП для задачі про розподіл ресурсів.

14. Дайте визначення поняттю "адитивна цільова функція".

15. Назвіть два етапи розв’язання задачі ДП.

Лабораторна робота №2

Тема: **Задача про заміну обладнання**

Мета роботи: Набуття теоретичних знань та практичних навичок побудови математичних моделей та знаходження оптимального розв'язку задач про заміну обладнання.

Завдання

Обладнання експлуатується протягом n років, а потім продається. На початку кожного року експлуатації можна прийняти одне з двох рішень: $X^{зб}$ (зберегти обладнання), або $X^{зам}$ (замінити обладнання новим).

Відомі:

p – вартість нового обладнання, що включає витрати, пов'язані з установкою, наладкою, запуском обладнання, і не змінюється в даному плановому періоді (ум.од.);

$r(t)$ – вартість експлуатації обладнання віку t протягом року $\left(r(t) = At{+}1\right.$ ум.од.;

$g(t)$ – ліквідна вартість (вартість продажу) обладнання віку t ($g(t) = p \cdot 2^{-t}$) (ум.од.).

Необхідно визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб сумарні витрати на експлуатацію обладнання з урахуванням початкової покупки і кінцевого продажу були мінімальні.

Передбачається, що до початку планового періоду обладнання є новим.

Вихідні дані для лабораторної роботи № 2 знаходяться в таблиці 6.

Таблиця 6 – Вихідні дані для лабораторної роботи № 2

№ варіанта	Термін роботи обладнання n (років)	Вартість нового обладнання p (ум.од.)	Коефіцієнт A
1	4	3200	400
2	5	7700	450
3	4	5300	600
4	5	5000	530
5	4	3700	462
6	4	3300	240
7	5	7000	550
8	4	7000	450

9	5	3000	242
10	4	1200	115
11	4	6000	450
12	5	1400	212
13	4	7000	450
14	4	5000	240
15	5	6000	340
16	4	3500	420
17	5	8000	550
18	4	20000	980
19	5	15000	1160
20	4	5700	500
21	5	25000	2220
22	4	5800	600
23	5	6200	480
24	4	4700	500
25	4	25000	1200
26	5	21500	2200

Номер варіанта визначається за вказівкою викладача.

Короткі теоретичні відомості

Основні етапи розв'язування задачі про заміну обладнання докладно викладені в [4, 11, 12, 13].

Однією з важливих проблем економіки є визначення оптимальної стратегії в експлуатації обладнання. Старіння обладнання включає його фізичний і моральний знос, в результаті чого збільшуються виробничі витрати з випуску продукції на старому обладнанні, збільшуються витрати на його ремонт і обслуговування, знижуються продуктивність і ліквідна вартість. Настає час, коли старе обладнання вигідніше продати, замінити новим, ніж експлуатувати ціною великих витрат; причому його можна замінити більш досконалим новим обладнанням. Оптимальна стратегія експлуатації обладнання полягає у визначенні оптимальних термінів заміни. Критерієм оптимальності при цьому можуть служити сумарні витрати на експлуатацію протягом аналізованого проміжку часу, що підлягають мінімізації, або прибуток від експлуатації обладнання, який слід максимізувати.

Розглянемо задачу мінімізації сумарних витрат на експлуатацію обладнання.

Постановка задачі про заміну обладнання

Обладнання експлуатується протягом n років, а потім продається. На початку кожного року експлуатації можна прийняти одне з двох рішень: $X^{зб}$ (зберегти обладнання), або $X^{зам}$ (замінити обладнання новим).

Відомі:

p – вартість нового обладнання, що включає витрати, пов'язані з установкою, наладкою, запуском обладнання, і не змінюється в даному плановому періоді (ум.од.);

$r(t)$ – вартість експлуатації обладнання віку t протягом року (ум.од.);

$g(t)$ – ліквідна вартість (вартість продажу) обладнання віку t (ум.од.).

Необхідно визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб сумарні витрати на експлуатацію обладнання з урахуванням початкової покупки і кінцевого продажу були мінімальні.

Передбачається, що до початку планового періоду обладнання є новим.

Схема розв’язування задачі про заміну обладнання

Примінимо до сформульованої задачі схему динамічного програмування.

Під k-им кроком будемо розуміти k-ий рік запланованого періоду. Маємо n кроків.

Під станом S_k будемо розуміти вік обладнання t на кінці k-го кроку або на початку $(k+1)$-го кроку. Звідси випливає, що на k-му кроці стан S_k може набувати наступних значень: $0, 1, 2, \ldots, k$; $S_0 = 0$.

В якості управління x_k на k-му кроці виступають рішення про збереження ($\text{Х}^{\text{зб}}$) або заміну ($\text{Х}^{\text{зам}}$) обладнання.

Рівняння стану для даної задачі має вигляд:

$$S_k = \begin{cases} t+1, \text{при } x_k = \text{Х}^{\text{зб}}; \\ 1, \quad\ \text{при } x_k = \text{Х}^{\text{зам}}, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тобто рівняння стану залежить від управління. І якщо до k-го кроку вік обладнання $S_{k-1} = t$, то при збереженні обладнання $x_k = \text{Х}^{\text{зб}}$ через рік вік обладнання збільшиться на 1. При заміні обладнання $x_k = \text{Х}^{\text{зам}}$ на початку k-

го кроку вік обладнання буде дорівнює 0, а через рік – буде дорівнює 1.

Показник ефективності k -го кроку:

$$f_k(t, x_k) = \begin{cases} r(t)\,, & \text{при } x_k = \text{X}^{\text{зб}}; \\ -g(t) + p + r(0), & \text{при } x_k = \text{X}^{\text{зам}}, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Якщо на k -му кроці вибирається управління $x_k = \text{X}^{\text{зб}}$, то цільова функція цього кроку буде дорівнює лише витратам на експлуатацію обладнання віку t, тобто $r(t)$. При $x_k = \text{X}^{\text{зам}}$ показник ефективності k -го кроку складається з вартості продажу обладнання віку t ($g(t)$), вартості покупки нового обладнання (p) і вартості експлуатації нового обладнання віку 0 ($r(0)$), тобто $-g(t) + p + r(0)$. У задачі витрати позначаються позитивними числами, а прибуток – негативними.

Запишемо співвідношеннях Беллмана (4) і (7) для визначення умовних оптимумів, замінивши максимізацію на мінімізацію, і використовуючи цільову функцію задачі про заміну обладнання.

Виходячи з (4), умовний оптимум показника ефективності останнього кроку з урахуванням того, що до початку цього кроку обладнання має вік t років, а в кінці кроку розпродається обладнання віку $(t+1)$ років, дорівнює:

$$Z_n^*(t) = min \begin{cases} r(t) - g(t+1), & \text{при } x_n = \text{X}^{\text{зб}}; \\ -g(t) + p + r(0) - g(1), & \text{при } x_n = \text{X}^{\text{зам}}. \end{cases} \tag{10}$$

Виходячи з (7), умовні оптимальні витрати на експлуатацію обладнання, починаючи з k-го кроку до кінця, з урахуванням того, що до початку цього кроку обладнання має вік t років, рівні:

$$Z_k^*(t) = min \begin{cases} r(t) + Z_{k+1}^*(t+1), & \text{при } x_k = \text{X}^{\text{зб}}; \\ -g(t) + p + r(0) + Z_{k+1}^*(1), & \text{при } x_k = \text{X}^{\text{зам}}. \end{cases} (k = \overline{1, n-1}) \tag{11}$$

Умовний мінімум цільової функції за n кроків дорівнює: $Z_{min} = Z_1^*(0)$.

Виконуючи безумовну оптимізацію знаходимо оптимальний розв’язок $x^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ \dots,\ x_n^*)$.

Розглянемо конкретний приклад

Приклад

Обладнання експлуатується протягом 4 років, а потім продається. На початку кожного року експлуатації можна прийняти одне з двох рішень: $X^{зб}$ (зберегти обладнання), або $X^{зам}$ (замінити обладнання новим).

Відомі:

$p = 8000$ – вартість нового обладнання, що включає витрати, пов'язані з установкою, наладкою, запуском обладнання, і не змінюється в даному плановому періоді (ум.од.);

$r(t) = 800(t + 1)$ – вартість експлуатації обладнання віку t протягом року (ум.од.);

$g(t) = p \cdot 2^{-t} = 8000 \cdot 2^{-t}$– ліквідна вартість (вартість продажу) обладнання віку t (ум.од.).

Необхідно визначити оптимальну стратегію експлуатації обладнання, щоб сумарні витрати на експлуатацію обладнання з урахуванням початкової покупки і кінцевого продажу були мінімальні.

Передбачається, що до початку планового періоду обладнання є новим.

Розв'язування

Примінимо до сформульованої задачі схему динамічного програмування.

Під k-им кроком будемо розуміти k-й рік запланованого періоду. Маємо 4 кроки.

Під станом S_k будемо розуміти вік обладнання t на кінці k-го кроку або на початку $(k + 1)$-го кроку. Звідси випливає, що на k-му кроці стан S_k може набувати наступних значень: 0,1, 2, …, k; $S_0 = 0$.

В якості управління x_k на k-му кроці виступають рішення про збереження $(\text{X}^{\text{зб}})$ або заміну $(\text{X}^{\text{зам}})$ обладнання.

Рівняння стану для даної задачі має вигляд:

$$S_k = \begin{cases} t + 1, \text{при } x_k = \text{X}^{\text{зб}}; \\ 1, \quad \text{при } x_k = \text{X}^{\text{зам}}, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots, 4.$$

Тобто рівняння стану залежить від управління. І якщо до k-го кроку вік обладнання $S_{k-1} = t$, то при збереженні обладнання $x_k = \text{Х}^{\text{зб}}$ через рік вік обладнання збільшиться на 1. При заміні обладнання $x_k = \text{Х}^{\text{зам}}$ на початку k -го кроку вік обладнання буде дорівнює 0, а через рік – буде дорівнює 1.

Показник ефективності k -го кроку:

$$f_k(t, x_k) = \begin{cases} 800(t+1)\,, & \text{при } x_k = \text{Х}^{\text{зб}}; \\ -8000 \cdot 2^{-t} + 8000 + 800, & \text{при } x_k = \text{Х}^{\text{зам}},\ k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Якщо на k -му кроці вибирається управління $x_k = \text{Х}^{\text{зб}}$, то цільова функція цього кроку буде дорівнює лише витратам на експлуатацію обладнання віку t, тобто $r(t) = 800(t+1)$. При $x_k = \text{Х}^{\text{зам}}$ показник ефективності k -го кроку складається з вартості продажу обладнання віку t ($g(t) = 8000 \cdot 2^{-t}$), вартості покупки нового обладнання ($p = 8000$) і вартості експлуатації нового обладнання віку 0 ($r(0) = 800(0+1) = 800$), тобто $-g(t) + p + r(0) = -8000 \cdot 2^{-t} + 8000 + 800$. У задачі витрати позначаються позитивними числами, а прибуток – негативними.

Запишемо співвідношеннях Беллмана (10) і (11) для визначення умовних оптимумів.

Виходячи з (10), умовний оптимум показника ефективності останнього кроку з урахуванням того, що до початку цього кроку обладнання має вік t років, а в кінці кроку розпродається обладнання віку $(t+1)$ років, дорівнює:

$$Z_4^*(t) = min \begin{cases} 800(t+1) - 8000 \cdot 2^{-(t+1)}, & \text{при } x_4 = \text{Х}^{\text{зб}}; \\ -8000 \cdot 2^{-t} + 8000 + 800 - 8000 \cdot 2^{-1}, & \text{при } x_4 = \text{Х}^{\text{зам}}. \end{cases}$$

Умовні оптимальні витрати на експлуатацію обладнання, починаючи з k-го кроку до кінця ($k = 1,2,3$) з урахуванням, що до початку цього кроку обладнання має вік t років, згідно (11) рівні:

$$Z_k^*(t) = min \begin{cases} 800(t+1) + Z_{k+1}^*(t+1), & \text{при } x_k = \text{Х}^{\text{зб}}; \\ -8000 \cdot 2^{-t} + 8000 + 800 + Z_{k+1}^*(1), & \text{при } x_k = \text{Х}^{\text{зам}}; \\ (k = 1,2,3). \end{cases}$$

Умовний мінімум цільової функції за 4 кроки дорівнює: $Z_{min} = Z_1^*(0)$.

Розрахунок

Етап 4:

Розв'язування починаємо з останнього 4-го етапу. Так як на початку періоду експлуатації обладнання було новим, то до початку четвертого етапу вік обладнання $\boldsymbol{t}$ може приймати значення 1, 2 або 3 (див. табл. 7).

$$Z_4^*(t) = min\begin{cases} 800(t+1) \ - 8000 \cdot 2^{-(t+1)}, & \text{при } x_4 = \text{Х}^{\text{зб}}; \\ -8000 \cdot 2^{-t} + 8000 + 800 - 8000 \cdot 2^{-1}, & \text{при } x_4 = \text{Х}^{\text{зам}}. \end{cases}$$

Таблиця 7– Етап 4 розв'язування задачі

$\boldsymbol{t}$	$\mathbf{800}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1}) - \mathbf{8000} \cdot \mathbf{2}^{-(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})}$	$-\mathbf{8000} \cdot \mathbf{2}^{-\boldsymbol{t}} + \mathbf{8800} - \mathbf{8000} \cdot \mathbf{2}^{-\mathbf{1}}$	**Оптимальний розв'язок**	
	$\boldsymbol{x_4} = \text{Х}^{\text{зб}}$	$\boldsymbol{x_4} = \text{Х}^{\text{зам}}$	$\boldsymbol{Z_4^*(t)}$	$\boldsymbol{x_4^*}$
1	1600 -2000=-400	-4000+8800-4000=800	-400	$\text{Х}^{\text{зб}}$
2	2400 -1000=1400	-2000+8800-4000=2800	1400	$\text{Х}^{\text{зб}}$
3	3200 -500=2700	-1000+8800-4000=3800	2700	$\text{Х}^{\text{зб}}$

Етап 3:

До початку третього етапу вік обладнання t може приймати значення 1 або 2 (див. табл. 8).

$$Z_3^*(t) = min\begin{cases} 800(t+1) + \ Z_4^*(t+1), & \text{при } x_3 = \text{Х}^{\text{зб}}; \\ -8000 \cdot 2^{-t} + 8000 + 800 + Z_4^*(1), & \text{при } x_3 = \text{Х}^{\text{зам}}. \end{cases}$$

Таблиця 8 – Етап 3 розв'язування задачі

$\boldsymbol{t}$	$\mathbf{800}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1}) + \ \boldsymbol{Z_4^*}(\boldsymbol{t}+\mathbf{1})$	$-\mathbf{8000} \cdot \mathbf{2}^{-\boldsymbol{t}} + \mathbf{8800} + \boldsymbol{Z_4^*}(\mathbf{1})$	**Оптимальний розв'язок**	
	$\boldsymbol{x_3 = X^{зб}}$	$\boldsymbol{x_3 = X^{зам}}$	$\boldsymbol{Z_3^*(t)}$	$\boldsymbol{x_3^*}$
1	1600 +1400=3000	-4000+8800-400=4400	3000	$\text{Х}^{\text{зб}}$
2	2400 +2700=5100	-2000+8800-400=6400	5100	$\text{Х}^{\text{зб}}$

Етап 2:

До початку другого етапу вік обладнання t може приймати значення тільки одне значення 1 (див. табл. 9).

$$Z_2^*(t) = min\begin{cases} 800(t+1) + \ Z_3^*(t+1), \text{ при } x_2 = \text{Х}^{\text{зб}}; \\ -8000 \cdot 2^{-t} + 8000 + 800 + Z_3^*(1), \text{ при } x_2 = \text{Х}^{\text{зам}}. \end{cases}$$

Таблиця 9 – Етап 2 розв'язування задачі

$\boldsymbol{t}$	$\mathbf{800(t+1) + \ Z_3^*(t+1)}$	$\mathbf{-8000 \cdot 2^{-t} + 8800 + Z_3^*(1)}$	**Оптимальний розв'язок**	
	$\boldsymbol{x_2 = X^{зб}}$	$\boldsymbol{x_2 = X^{зам}}$	$\boldsymbol{Z_2^*(t)}$	$\boldsymbol{x_2^*}$
1	1600 +5100=6700	-4000+8800+3000=7800	6700	$\text{Х}^{\text{зб}}$

Етап 1:

На першому етапі купується нове обладнання і рік експлуатується. Тому умовне оптимальне керування на першому етапі $x_1^* = \text{Х}^{\text{зб}}$, а умовне оптимальне значення цільової функції на всіх етапах розраховується за формулою:

$$Z_1^*(0) = 8000 + 800(t+1) + \ Z_2^*(t+1) = 8800 + 6700 = 15500.$$

Виконаємо безумовну оптимізацію. Для цього будемо розглядати кроки, починаючи з першого.

На першому етапі купили нове обладнання, тому $x_1^* = \text{Х}^{\text{зб}}$. На другому етапі з таблиці $x_2^* = \text{Х}^{\text{зб}}$. В кінці другого етапу вік обладнання буде 2 роки і з таблиці етапу 3 для $t = 2$ $x_3^* = \text{Х}^{\text{зб}}$. В кінці третього етапу вік обладнання буде 3 роки і з таблиці етапу 4 для $t = 3$ $x_4^* = \text{Х}^{\text{зб}}$. Таким чином, оптимальне управління в задачі дорівнює:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \left(\text{Х}^{\text{зб}}, \ \text{Х}^{\text{зб}}, \ \text{Х}^{\text{зб}}, \ \text{Х}^{\text{зб}}\right).$$

Контрольні питання

1. Які операції називають багатокроковими?

2. Для вирішення яких задач застосовують метод динамічного програмування?

3. Дайте математичну постановку задачі ДП. Поясніть зміст всіх вхідних в неї елементів.

4. Що є вихідною інформацією для задачі про заміну обладнання?

5. Чим оцінюється якість переходу системи з одного стану в інший?

6. У чому полягає сутність принципу поетапної побудови оптимального управління?

7. Як за відомим умовно-оптимальним управлінням побудувати оптимальне управління?

8. Запишіть і поясніть зміст усіх елементів рівнянь Беллмана.

9. Сформулюйте постановку задачі про заміну обладнання.

10. Запишіть рівняння Беллмана для задачі про заміну обладнання.

11. Назвіть недоліки ДП.

12. Наведіть геометричну інтерпретацію задачі ДП.

13. Наведіть алгоритм розв’язання задачі ДП.

14. Охарактеризуйте етап умовної оптимізації в ДП.

15. Охарактеризуйте етап безумовної оптимізації в ДП.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст] / Р. Беллман.– М.:ИЛ, 1960. – 400 с.
2. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования [Текст] / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М.: Наука, 1965. – 460 с.
3. Беллман, Р. Динамическое программирование и современная теория управления [Текст] / Р. Беллман, Р. Калаба. – М.: Наука, 1969. – 118 с.
4. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике [Текст] : учебн. пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 407 с.
5. Таха, Х. Введение в исследование операции: 6-е издание [Текст] / Х. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
6. Кузнецов, Ю.Н., Математическое программирование [Текст] : учебн. пособие / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М.: Высшая школа, 1980. – 300с.
7. Калихман, И.Л. Динамическое программирование в примерах и задачах [Текст] : учебн. пособие / И.Л. Калихман, М.А. Войтенко. – М.: Высшая школа, 1979. – 125 с.
8. Лежнев, А.В. Динамическое программирование в экономических задачах [Текст] : учебн. пособие / А.В. Лежнев. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 176 с.
9. Окулов, С.М. [Текст] / С.М. Окулов, О.А. Пестов. Динамическое программирование. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2012. – 296 с.
10. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] : учебн. пособие / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
11. Романовская, А.М. Динамическое программирование [Текст] : учебн. пособие / А.М. Романовская, М.В. Мендзив. – Омск: Омский институт

РГТЭУ, 2010. – 58 с.
12. Афанасьев, М.Ю. Прикладные задачи исследование операций [Текст] : учебн. пособие / М.Ю. Афанасьев, К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М.: ИНФА, 2009. – 352 с.
13. Чернов, В.П. Математические модели и методы в экономике и менеджменте [Текст] : учебн. пособие / В.П. Чернов. – СПб.: СПб ГУЭФ, 2010. – 235 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛАТАНСЬКА Людмила Олексіївна
УСТЕНКО Ірина Валеріївна
КАІРОВ Володимир Олексійович

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт

(Частина 2)

Надруковано з оригінал-макету,
підготовленого автором видання

Підписано до друку 28.08.2018 р. Формат 60×94⁄16. Папір офсетний.
Друк цифровий. Ум. друк. арк. 2,5. Тираж 30.
Зам. №___ від 28.08.2018 р.

Надруковано ФОП Швець В.М.
тел. (0512) 50-04-48
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5078 від 01.04.2016 р.