

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**В. Л. Тимченко, Д. М. Підпригора,
І. В. Тимченко**

МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

*Рекомендовано Методичною радою НУК
як методичні вказівки*

Миколаїв 2007

В.Л. Тимченко, Д.М. Підпригора, І.В. Тимченко. Моделювання неперервних динамічних систем: Методичні вказівки до лабораторних робіт. – Миколаїв: НУК, 2007. – 32 с.

Кафедра комп'ютеризованих систем управління

Наведено загальні положення з теорії багатовимірних неперервних диференціальних систем управління; методи вирішення систем лінійних диференціальних рівнянь та лінеаризації нелінійних рівнянь, у тому числі суттєво нелінійних; особливості використання спектрального методу для аналізу стохастичних диференціальних систем, застосування кінцевих різниць для моделювання диференціальних систем. Розглянуто моделювання неперервних диференціальних систем в основному на прикладі систем третього-четвертого порядків. Вміщено контрольні запитання для перевірки отриманих студентами знань.

Призначено для виконання лабораторних робіт студентами та магістрантами спеціальності "Системи управління і автоматики".

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Ю.П. Кондратенко;
канд. техн. наук, доц. С.А. Сидоренко

ВСТУП

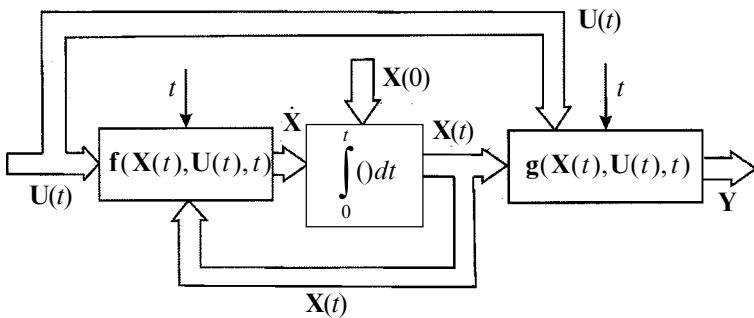
Неперервні системи управління – це системи, які описуються звичайними диференціальними рівняннями. Загальні рівняння стану неперервних систем мають вигляд [9]

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t);$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t),$$

де $\mathbf{X}(t)$ – вектор-стовпець розміром $n \times 1$ змінних (координат) стану; $\mathbf{U}(t)$ – вхідний вектор-стовпець розміром $n \times 1$ керувальних впливів; $\mathbf{Y}(t)$ – вихідний вектор-стовпець розміром $n \times 1$ координат спостереження.

Блок-схема неперервної системи управління зображена на рисунку.



Неперервні системи управління можна поділити на наступні класи:

- 1) лінійні та нелінійні;
- 2) стаціонарні та нестаціонарні;
- 3) детерміновані та стохастичні.

Лінійні – системи, що не містять елементів нелінійності та описуються у загальному вигляді векторно-матричним рівнянням

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t); \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}\mathbf{U}(t), \end{cases}$$

де $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ – матриці коефіцієнтів системи розміром $n \times n$.

Нелінійною є система, яка включає в себе одну чи декілька нелінійних функцій. Серед них розрізняють такі нелінійні функції: "слабкі", що з достатньою точністю можуть бути описані біля фіксованого початкового значення аргументу лінійними функціями, та "суттєві", характеристики яких мають вигляд релейних чи гістерезисних функцій, а лінеаризація потребує застосування методів статистичної або гармонічної лінеаризації.

Стаціонарні – системи, де всі компоненти матриць $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ не залежать від часу і описуються звичайними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Нестационарні – системи, де компоненти матриць залежать від часу:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t);$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t),$$

де $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ – матриці, компоненти яких $a_{ji}(t)$, $b_{ji}(t)$, $c_{ji}(t)$, $d_{ji}(t)$ є функціями часу.

Детерміновані – системи, в яких відсутні зовнішні та внутрішні (параметричні) випадкові впливи.

Стохастичні – системи, які містять хоча б один випадковий вплив. Випадкові впливи можна охарактеризувати математичним очікуванням, дисперсією, кореляційною функцією, спектральною щільністю, щільністю ймовірності.

Для опису, розв'язання та моделювання багатовимірних неперервних диференціальних систем застосовуються методи векторно-матричного числення, диференціального та спектрального аналізу, перетворення Лапласа та Фур'є, різницевих функцій.

Лабораторна робота № 1

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ СИСТЕМ

Мета роботи – ознайомлення з процесами моделювання векторно-матричних перетворень (перемноження двох заданих матриць 4×4 , транспонування та знаходження зворотної матриці й рангу матриці).

Теоретичні відомості

Розглянемо лінійну систему управління та спостереження, блок-схема якої зображена на рис. 1.1, що описується векторно-матричним рівнянням n -го порядку:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t); \\ \mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

де $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ – вектори-стовпці розміром $n \times 1$ координат стану та спостереження неперервної системи; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ – матриці розміром $n \times n$ коефіцієнтів системи; матриця $\mathbf{D}$ є нульовою.

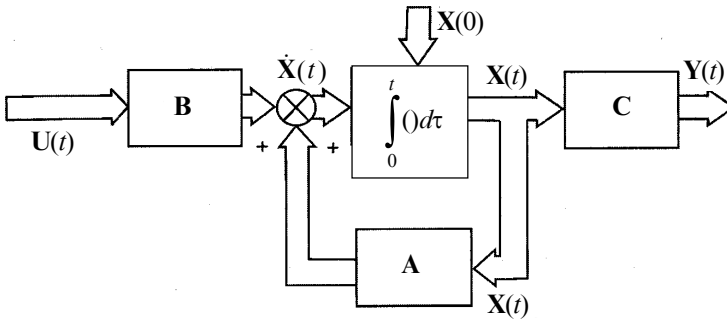


Рис. 1.1

Наприклад, вектор $\mathbf{X}(t)$ та квадратна матриця $\mathbf{A}$ мають вигляд

$$\mathbf{X}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Основні властивості векторно-матричного числення:

1. Рівність $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, якщо всі компоненти даних матриць із відповідними номерами рівні між собою ($a_{ij} = b_{ij}$).

2. Добуток двох матриць. Якщо $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$,
то

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \left\{ \begin{array}{l} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{array} \right\},$$

де $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ – матриці порядку $m \times l$ та $l \times n$. Добуток матриць є асоціативним та дистрибутивним, але не комутативним, тобто $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

3. Добуток двох векторів. Добуток вектору $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}^T$ має вигляд

$$\mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix}.$$

4. Слід матриці. Слідом матриці називається сума елементів головної діагоналі матриці $tr \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

5. Нульова матриця. Матриця виду $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ є нульовою,

тобто для будь-якого ij , $a_{ij} = 0$.

6. Одинична матриця $\mathbf{E}$. Квадратна матриця, компоненти головної діагоналі якої рівні одиниці, а всі інші дорівнюють нулю, називається одиничною.

7. Вироджена матриця. Квадратна матриця $\mathbf{A}$, детермінант якої дорівнює нулю ($\det \mathbf{A} = 0$), називається виродженою.

8. Ранг матриці (*rank*). Ранг матриці – це максимальний порядок невивірженої квадратної підматриці, яка входить до матри-

ці $\mathbf{A}$. Наприклад, якщо $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, то ранг матриці дорівнює

3 ($rank \mathbf{A} = 3$).

9. Транспонована матриця (A^T) – це матриця, в якій всі стовпці замінені на рядки.

10. Зворотна матриця (A^{-1}) – це матриця, яка є зворотною по відношенню до невиворотної квадратної матриці A .

Методи знаходження зворотної матриці:

метод невизначених коефіцієнтів, який призводить до необхідності вирішення системи алгебраїчних рівнянь $A^{-1}A = E$;

метод, заснований на використанні формули

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

де A_{ik} – алгебраїчне доповнення компоненти a_{ik} матриці A .

11. Симетрична матриця, для якої виконується умова $A = A^T$.

Завдання

1. За допомогою функції випадково задати матриці A та B розмірністю 4×4 , скласти програму обчислювання для наступних дій:

а) перемножити дві матриці;

б) транспонувати матриці;

в) знайти зворотну матрицю A за допомогою детермінанту.

2. За допомогою функції випадково задати та знайти добуток векторів a і b розмірністю 4×1 .

3. Обчислити ранг матриці A .

Контрольні запитання

1. Визначення поняття слід матриці A .

2. Ранг матриці. Обчислення рангу матриці.

3. Методи визначення зворотної матриці.

та $\text{rank}(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$, де $(\mathbf{C}|\mathbf{Y})$ – розширена матриця коефіцієнтів, що утворюється шляхом правостороннього приєднання вектора $\mathbf{Y}$ до матриці $\mathbf{C}$.

Способи розв'язання лінійних рівнянь

Метод Гауса. Знаходження множини розв'язків системи лінійних рівнянь засновується на переході від заданої системи рівнянь $\mathbf{CX} = \mathbf{Y}$ до еквівалентної системи $\mathbf{C}'\mathbf{X} = \mathbf{Y}'$ (тобто з тією ж множиною рішень) за наступними перетвореннями:

- 1) зміна місць двох рівнянь у системі;
- 2) добуток будь-якого рівняння системи на дійсне число $b \neq 0$;
- 3) додавання одного рівняння до іншого, помноженого на вільне число.

Сутність алгоритму Гауса у тому, щоб отримати матриці $\mathbf{C}'$ та $(\mathbf{C}'|\mathbf{Y}')$ трапецеподібної форми.

Правило Крамера. Випадок $n \times n$ – системи лінійних рівнянь $\mathbf{CX} = \mathbf{Y}$, коли $\text{rank}(\mathbf{C}) = \text{rank}(\mathbf{C}|\mathbf{Y}) = n$. Через те, що матриця $\mathbf{C}$ не є виродженою, єдиний розв'язок $\mathbf{X}$ можна представити у вигляді $\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}$.

Квадратична форма. Квадратична форма використовується для опису критеріїв оптимальності систем керування та описується рівнянням

$$Q(x) = \mathbf{X}^T \mathbf{R} \mathbf{X},$$

де $\mathbf{R}$ – симетрична матриця; $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$; $\mathbf{X}$ – вектор-стовпець; $Q(x)$ – скалярний добуток.

Наприклад, для векторів та матриці третього порядку добуток визначиться наступним чином:

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3 \\ r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3 \end{bmatrix} = \\ &= x_1(r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3) + x_2(r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + r_{23}x_3) + \\ &\quad + x_3(r_{31}x_1 + r_{32}x_2 + r_{33}x_3). \end{aligned}$$

Ранг квадратичної форми дорівнює рангу k матриці $\mathbf{R}$. Ранг матриці дорівнює k , якщо найвищий порядок відмінного від нуля

детермінанта, який визначається внаслідок вилучення деякого числа строк та (чи) стовпців даної матриці, дорівнює k за умови, що всі детермінанти порядку $k + 1$ дорівнюють нулю.

Квадратична форма називається виродженою, якщо $k < n$, та неvirодженою, якщо $k = n$.

Завдання

1. За допомогою функції випадково задати матриці $\mathbf{C}$ та $\mathbf{Y}$ (розмірністю 4×4), скласти програму обчислення для розв'язання алгебраїчного векторно-матричного рівняння $\mathbf{CX} = \mathbf{Y}$.

2. За допомогою функції випадково задати матрицю $\mathbf{R}$ та вектор $\mathbf{X}$, визначити квадратичну форму.

Контрольні запитання

1. Визначення та основні способи вирішення системи лінійних рівнянь.

2. Сутність алгоритму Гауса.

3. Застосування правила Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь.

4. Основні властивості квадратичної форми.

Лабораторна робота № 3

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЗНАХОДЖЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ МАТРИЦІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ В ЗМІННИХ СТАНУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА РОЗКЛАДАННЯ СИЛЬВЕСТРА

Мета роботи – ознайомитись із моделюванням лінійної однорідної стаціонарної системи. Отримати фундаментальну матрицю за допомогою перетворення Лапласа та розкладання Сильвестра.

Теоретичні відомості

Розглянемо однорідне векторно-матричне рівняння у змінних

стану n -го порядку

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t). \quad (3.1)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (3.1) спочатку розглянемо скалярне диференціальне рівняння з початковою умовою $x(0)$:

$$\dot{x} = ax,$$

тобто

$$\frac{dx}{dt} = ax;$$

відокремлюючи змінні, отримуємо

$$\frac{dx}{x} = a dt$$

та інтегруємо останнє рівняння

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = a \int_0^t dt.$$

Після інтегрування будемо мати

$$\ln \frac{x(t)}{x(0)} = at,$$

тобто

$$x(t) = e^{at} x(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (at)^k x(0). \quad (3.2)$$

Для вирішення рівняння (3.1) можна використати формулу (3.2):

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{A}t)^k \mathbf{X}(0),$$

яка визначає формулу загального вирішення векторного диференціального рівняння. Таким чином, цей розв'язок можна виразити у векторно-матричній формі

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}(0),$$

де $\mathbf{X}(0)$ – початковий вектор стану; $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)$ – фундаментальна, або перехідна матриця.

Визначення фундаментальної матриці

Перший спосіб – за допомогою оператора Лапласа.

Перетворення Лапласа у випадку векторного диференційного рівняння (3.1) матиме вигляд

$$p\mathbf{X}(p) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(p)$$

або

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X}(p) = \mathbf{X}(0).$$

Помножимо рівняння на $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X}(p) = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0).$$

Після алгебраїчних перетворень, отримуємо

$$\mathbf{X}(p) = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0).$$

Якщо взяти зворотнє перетворення

$$\mathbf{X}(t) = L^{-1}\{(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\}\mathbf{X}(0),$$

то знайдемо фундаментальну матрицю наступним чином:

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t} = L^{-1}\{(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\} = L^{-1}\{\mathbf{\Phi}(p)\}.$$

Другий спосіб – визначення фундаментальної матриці за теоремою розкладання Сильвестра.

У часовій області фундаментальну матрицю можна визначити за допомогою теореми розкладання у ряд Сильвестра:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^n \left(e^{p_i t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\mathbf{A} - p_j \mathbf{E}}{p_i - p_j} \right),$$

де p_i, p_j – корні характеристичного поліному однорідного диференціального рівняння (власні числа).

Третій спосіб – за допомогою розкладання у нескінченні ряди:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^k t^k).$$

Завдання

1. За допомогою функції випадково задати матрицю A розмірності 4×4 .
2. Визначити фундаментальну матрицю за допомогою перетворення Лапласа та розкладання Сильвестра.
3. Знайти розв'язок рівняння $\dot{X}(t) = AX(t)$ для заданих викладачем початкових умов.

Контрольні запитання

1. Формула вирішення скалярного векторного диференційного рівняння.
2. Формула загального вирішення векторного диференційного рівняння.
3. Фундаментальна матриця. Способи її визначення.
4. Порядок визначення фундаментальної матриці за теоремою розкладання Сильвестра.
5. Порядок визначення фундаментальної матриці за допомогою розкладання у нескінченні ряди.
6. Порядок визначення фундаментальної матриці за допомогою розкладання Лапласа.

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗКЛАДАННЯ У РЯД ТЕЙЛОРА. МОДЕРНІЗОВАНА ПРОЦЕДУРА ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Мета роботи – ознайомитись із процедурами лінеаризації нелінійних систем. Провести моделювання та зробити порівняльний аналіз процедур лінеаризації.

Теоретичні відомості

Першим етапом моделювання нелінійних систем є їх лінеаризація, тобто формування припущень та заміна вихідного нелінійного рівняння лінійним.

Основні методи лінеаризації

1. Лінеаризація за допомогою розкладання у ряд Тейлора.
2. Гармонічна лінеаризація за допомогою розкладання у ряд Фур'є.
3. Статистична лінеаризація, що застосовується для систем із випадковими параметрами.

Класифікація нелінійних систем

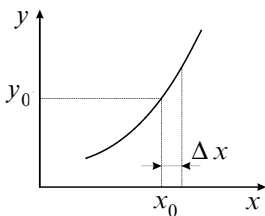


Рис. 4.1

1. Системи зі "слабкою" нелінійністю (рис. 4.1). Це системи, для яких при малих прирощеннях аргументу (вхідного сигналу) в будь-який момент часу вихідний сигнал можна апроксимувати відрізками прямої.

2. Системи із "суттєвою" нелінійністю (рис. 4.2). Системи, які характеризуються ізоклінами та розривами.

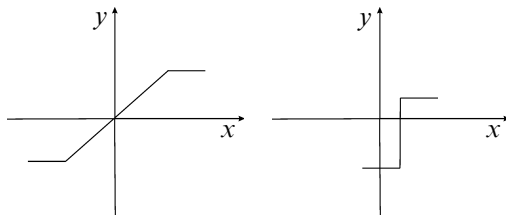
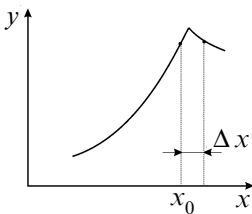


Рис. 4.2

Системи зі "слабкою" нелінійністю. Лінеаризація за допомогою розкладання у ряд Тейлора

Нехай система зі "слабкою" нелінійністю, зображена на рис. 4.3, описується функцією

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (4.1)$$

$$\text{де } k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Перетворимо рівняння (4.1):

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0);$$

$$y = y_0 + x \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} - x_0 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} = kx + a;$$

$$a = y_0 - x_0 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}; \quad k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}.$$

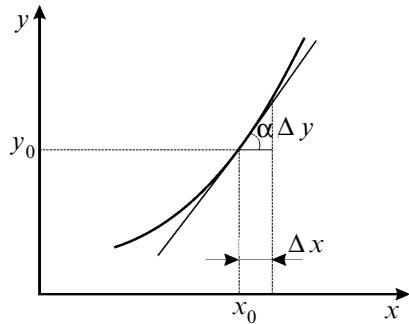


Рис. 4.3

Нелінійну функцію (4.1) у точці (x_0, y_0) , яка відповідає сталому режиму, можна представити у вигляді нескінченної суми – ряду Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \Delta x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_0} \Delta x^2 + \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n y}{dx^n} \right|_{x_0} \Delta x^n + \dots + R_m. \quad (4.2)$$

Ряд визначається першими двома лінійними членами, якщо відхилення аргументу Δx від сталого значення x_0 достатньо малі:

$$y(x) = y(x_0) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} \Delta x.$$

Якщо функція залежить від двох змінних, то (4.1) має вигляд

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \Delta x + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \Delta y + \\ + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{x_0, y_0} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} \Delta x^2 + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} \Delta y^2 + \dots \end{aligned}$$

Модернізована процедура лінеаризації

Розглянемо модернізовану процедуру [6] на прикладі вирішення скалярного нелінійного диференційного рівняння вигляду

$$\dot{x}(t) = x^r(t). \quad (4.3)$$

Звичайна процедура лінеаризації для початкового значення аргументу дає рівняння

$$\dot{x} = x_0^r + r x_0^{r-1} (x - x_0) = r x_0^{r-1} x - (r-1) x_0^r. \quad (4.4)$$

Отриманий розв'язок неоднорідного рівняння (4.4)

$$x^*(t) = e^{r x_0^{r-1} t} x_0 - \int_0^t e^{r x_0^{r-1} (t-\tau)} (r-1) x_0^r d\tau$$

підставляємо у рівняння (4.3) як змінний коефіцієнт:

$$\dot{x}(t) = [x^*(t)]^{r-1} x(t).$$

Знаходимо кінцевий розв'язок останнього рівняння зі змінним коефіцієнтом:

$$x(t) = e^{\int [x^*(t)]^{r-1} dt} x_0.$$

Приклади лінеаризації нелінійних систем

1. Звичайна процедура лінеаризації, розглянута на прикладі рівняння другого порядку $\dot{x} = x^2$.

При $x_0 = 2$ отримуємо

$$y = 2x x_0 - x_0^2 = 4x - 4,$$

що має наступний розв'язок:

$$x(t) = e^{4t} x_0 - 4 \int_0^t e^{4(t-\tau)} d\tau.$$

Отримуємо перший розв'язок:

$$x^*(t) = 2e^{4t} + \int_0^t e^{4(t-\tau)} d4(t-\tau) = e^{4t} + 1.$$

2. Модернізована процедура лінеаризації. Отримуємо рівняння зі змінним коефіцієнтом:

$$\dot{x} = x^*(t) x(t) = (e^{4t} + 1) x(t).$$

Уточнений розв'язок при $x_0 = 2$ має вигляд

$$x(t) = 2e^{\left(\frac{1}{4}e^{4t} + t - \frac{1}{4}\right)}.$$

Порядок застосування модернізованої процедури лінеаризації багатовимірних нелінійних рівнянь

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X})\mathbf{X}(t). \quad (4.5)$$

1. Проведемо лінеаризацію нелінійності у вигляді аналітичної функції за допомогою розкладання членів у ряд Тейлора та з урахуванням правил векторно-матричних перетворень:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X})\mathbf{X}(t) &\approx \mathbf{A}(\mathbf{X}(0))\mathbf{X}(0) + \left[\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{X}(t))\mathbf{X}(t)}{d\mathbf{X}^T(t)} \right]_{\mathbf{X}(0)} [\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(0)] = \\ &= \mathbf{R}\mathbf{X}(t) + [\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}]\mathbf{X}(0), \end{aligned}$$

де матриця параметрів для значень $\mathbf{X}(0)$ дорівнює

$$\mathbf{R} = \left[\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{X}(t))\mathbf{X}(t)}{d\mathbf{X}^T} \right]_{\mathbf{X}(0)}.$$

2. Знаходимо розв'язок лінійної стаціонарної неоднорідної системи (4.5):

$$\mathbf{X}^*(t) = e^{\mathbf{R}t}\mathbf{X}(0) - \int_0^t e^{\mathbf{R}(t-\tau)} [\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}]\mathbf{X}(0) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\mathbf{R}t} \mathbf{X}(0) - \int_0^t e^{\mathbf{R}(t-\tau)} d\tau [\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}] \mathbf{X}(0) = \\
&= e^{\mathbf{R}t} \mathbf{X}(0) - (\mathbf{E} - e^{\mathbf{R}t}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{A}(\mathbf{X}(0)) - \mathbf{R}] \mathbf{X}(0),
\end{aligned}$$

де $\mathbf{E}$ – одинична матриця.

3. Використовуючи розв'язок $\mathbf{X}^*(t)$, представляємо векторно-матричну систему нелінійних диференціальних рівнянь у вигляді системи лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (нестационарної системи):

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}^*(t)) \mathbf{X}(t). \quad (4.6)$$

4. Знаходимо вирішення нестационарної однорідної системи рівнянь (4.6), тобто отримуємо уточнений розв'язок вихідного нелінійного рівняння (4.5):

$$\mathbf{X}(t) = e^{\int [\mathbf{A}(\mathbf{X}^*(t))] dt} \mathbf{X}(0).$$

Завдання

1. Провести лінеаризацію нелінійних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами $\dot{x} = ax^2$; $\dot{x} = ax^3$ за звичайною та модернізованою процедурою за наступних умов (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Номер варіанта	x_0	a
1	1,0	0,5
2	1,5	0,2
3	2,0	0,3
4	2,5	0,4
5	3,0	0,1

2. Зробити порівняльний аналіз процедур лінеаризації (звичайної та модернізованої) і на його основі побудувати графіки функцій.

Контрольні запитання

1. Основні методи лінеаризації нелінійних систем.
2. Класифікація нелінійних систем. Основні властивості систем зі слабкою нелінійністю.

3. Сутність методу лінеаризації за допомогою розкладання у ряд Тейлора.

4. Етапи процедури лінеаризації нелінійних рівнянь у вигляді степеневих функцій.

5. Застосування модернізованої процедури лінеаризації нелінійних рівнянь.

Лабораторна робота № 5

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ГАРМОНІЧНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Мета роботи – ознайомитись із моделюванням та процедурою лінеаризації "суттєво" нелінійних систем.

Теоретичні відомості

Системи з суттєвою нелінійністю. Метод гармонічної лінеаризації

Основні види суттєвої нелінійності представлені на рис. 5.1, 5.2.

Статичні однозначні характеристики нелінійних елементів (див. рис. 5.1):

a нелінійність – "зона нечутливості"; ***б*** нелінійність – "насиченість"; ***с*** нелінійність – "зона нечутливості з насиченістю"; ***д*** нелінійність – "сухе тертя".

Неоднозначна характеристика "Магнітний гістерезис" показано на рис. 5.2.

Однозначні нелінійні елементи характеризуються тим, що кожному значенню аргументу відповідає тільки одне значення функції.

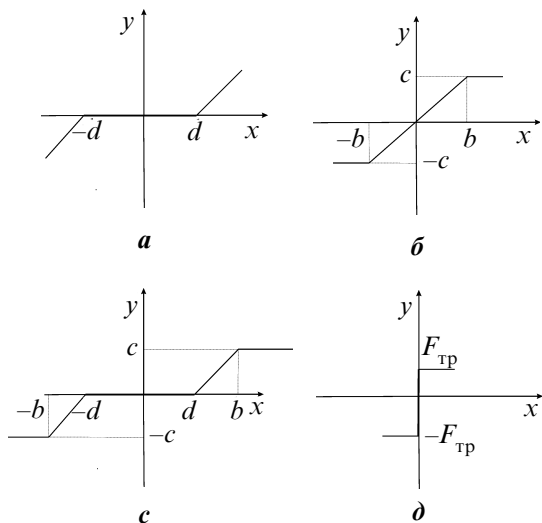


Рис. 5.1

Одним із методів лінеаризації систем із "суттєвою" нелінійністю є метод гармонічної лінеаризації.

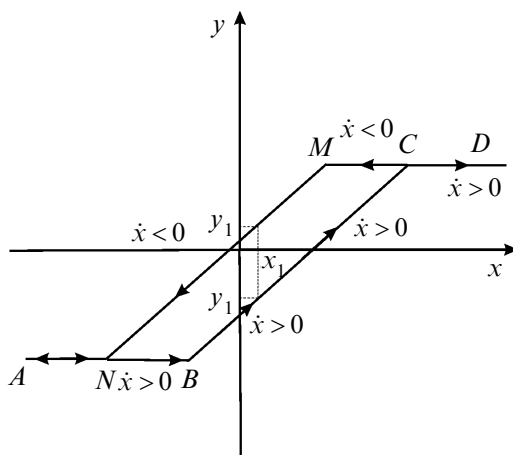


Рис. 5.2

Сутність цього методу полягає в заміні нелінійного елементу системи еквівалентним лінійним, який аналогічно до нелінійних перетворює гармонічні коливання та характеризується комплексним коефіцієнтом підсилення.

Метод гармонічної лінеаризації потребує наступних припущень:

1. Вихідний сигнал із нелінійного елемента має форму гармонічного, тобто метод застосовується для елементів із непарно-симетричною характеристикою.

2. Вхідний сигнал на нелінійний елемент має форму гармонічного.

3. При використанні розкладання у ряд Фур'є не враховується постійна складова розкладання та вищі гармоніки.

Нехай гармонічний вхідний сигнал описується рівнянням

$$x_{\text{BX}} = a \sin \omega t = a \sin \Psi, \quad (5.1)$$

де $\Psi = \omega t$.

Продиференціювавши (5.1), отримуємо

$$\dot{x}_{\text{BX}} = a\omega \cos \omega t = a\omega \cos \Psi.$$

Періодичний сигнал на виході нелінійного елемента можна розкласти у ряд Фур'є:

$$y(\dot{x}, x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n \Psi + B_n \sin n \Psi),$$

де A_0 – постійна складова; n – номер гармоніки; A_n, B_n – коефіцієнти n -ї гармоніки.

Якщо вважати, що нелінійність симетрична, коефіцієнти можна визначити з наступних рівнянь:

$$A_0 = 0; \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(x, \dot{x}) \cos n\Psi d\Psi; \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(x, \dot{x}) \sin n\Psi d\Psi.$$

У загальному випадку коефіцієнти $A_n = A_n(B, j\omega)$ та $B_n = B_n(B, j\omega)$, тобто коефіцієнти залежать як від амплітуди, так і від частоти. До уваги можна прийняти лише основну складову вихідного сигналу:

$$y(a \sin n\Psi, a\omega \cos \Psi) = A_1 \cos \Psi + B_1 \sin \Psi.$$

З урахуванням

$$\sin \Psi = \frac{x}{a}; \quad \cos \Psi = \frac{\dot{x}}{\omega a},$$

отримуємо:

$$y(a \sin n\Psi, a\omega \cos \Psi) = \frac{A_1}{a\omega} \dot{x} + \frac{B_1}{a} x = k'(a_1\omega) \dot{x} + k(a_1\omega) x,$$

де $k'(a_1\omega) \dot{x} + k(a_1\omega) x$ – лінійне рівняння; k, k' – коефіцієнти гармонічної лінеаризації, що залежать від амплітуди та частоти вхідного сигналу (a, ω).

Завдання

Лінеаризувати за допомогою методу гармонічної лінеаризації передаточну функцію з нелінійністю згідно з варіантом (табл. 5.1). При наступних значеннях параметрів вхідний сигнал має вигляд $x = a \sin \omega t$, де $a = 1$, $\omega = 1$ рад / с.

Таблиця 5.1. Початкові умови для здійснення лінеаризації

Номер варіанта	Характеристика нелінійності	k	b	d
1	Нечуттєвості з насиченістю	1	1,1	0,5
2	Нечуттєвості	1	1	0,4
3	Насиченість	1	1,1	–
4	Нечуттєвості з насиченістю	1,5	1,1	0,7
5	Насиченість	1,4	1	–

Контрольні запитання

1. Основні види суттєвих нелінійностей.
2. Сутність метода гармонічної лінеаризації.
3. Розкладання функції у ряд Фур'є.
4. Основні припущення, необхідні при застосуванні метода гармонічної лінеаризації.

Лабораторна робота № 6

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВПЛИВІВ У НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМАХ

Мета роботи – розрахувати формуючий фільтр для випадкових величин.

Теоретичні відомості

Основи спектрального аналізу випадкових процесів

Випадковий процес можна визначити як сукупність величин, які змінюються з часом. Для дослідження системи за присутністю на її вході стаціонарного випадкового впливу необхідно визначити наступні статистичні характеристики: середні значення (математичне очікування та дисперсію), кореляційну функцію та спектральну щільність [1].

Середнє значення $\bar{x}$ випадкового процесу $x(t)$ за часом визначається за формулою

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Середнє значення за сукупністю, або статистичне середнє значення, знайдене за спостереженнями за багатьма подібними системами у той самий момент часу для стаціонарного випадкового процесу, має вигляд

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx,$$

де p – щільність розподілення.

Дисперсія D_x випадкового стаціонарного процесу являє собою середнє значення квадрату різниці між випадковою величиною та її середнім значенням та обчислюється за формулою

$$D_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}]^2 dt.$$

Кореляційна функція $R_x(\tau)$ випадкового процесу являє собою середнє за часом значення добутку випадкових значень у моменти часу, розділені проміжком τ , та характеризує щільність сигналів у часовій області.

Для випадкового стаціонарного процесу

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - \bar{x}][x(t + \tau) - \bar{x}] dt.$$

Спектральна щільність S_x показує, як середня потужність випадкового процесу $x(t)$ розподілена за спектром частот ω та пов'язана з кореляційною функцією співвідношеннями

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega;$$

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Середнє квадратичне відхилення, що при статистичному методі аналізу та синтезу визначає динамічну точність системи, отримуємо через дисперсію похибки САУ:

$$\varepsilon_x = \sqrt{D_\varepsilon}.$$

У свою чергу, дисперсія похибки визначається через кореляційну функцію

$$D_{\varepsilon} = R_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon}(\omega) d\omega.$$

Спектральна щільність вихідного сигналу лінійної системи S_x визначається як квадрат модуля комплексної передатної функції, перемноженої на спектральну щільність вихідного сигналу:

$$S_{\beta}(\omega) = |K_3(j\omega)|^2 S_{\alpha}(\omega),$$

де $|K_3(j\omega)|^2$ – квадрат модуля комплексної передатної функції замкнутої системи.

Розглянемо замкнуту лінійну систему (рис. 6.1), на вхід якої подається випадковий сигнал $\alpha(p)$.

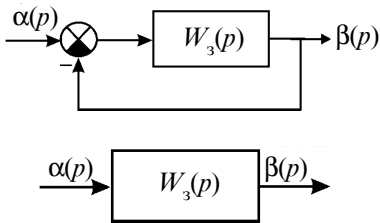


Рис. 6.1

Передатна функція для замкнутої системи має вигляд

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)},$$

а комплексна передатна функція

$$K_3(j\omega) = W_3(p) \text{ при } p \rightarrow j\omega.$$

Виділивши дійсну та уявну частини, отримаємо для модуля комплексної передатної функції

$$|K_3(j\omega)| = N_3(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}.$$

Наприклад для аперіодичної ланки

$$W_p(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

охопленої від'ємним зворотним зв'язком, маємо

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} = \frac{k^*}{T^* p + 1},$$

$$\text{де } k^* = \frac{k}{k+1}; \quad T^* = \frac{T}{k+1}.$$

Тоді для комплексної передатної функції замкнутої системи

$$K_3(j\omega) = \frac{k^*}{j\omega T^* + 1} = \frac{k^*(j\omega T^* - 1)}{\omega^2 T^{*2} + 1} = \frac{k^*}{1 + \omega^2 T^{*2}} - j \frac{k^* \omega T^*}{1 + \omega^2 T^{*2}};$$

$$P_3(\omega) = \frac{k^*}{1 + \omega^2 T^{*2}}; \quad Q_3(\omega) = \frac{k^* \omega T^*}{1 + \omega^2 T^{*2}};$$

$$N_3(\omega) = \sqrt{P_3^2(\omega) + Q_3^2(\omega)}.$$

Як приклад моделювання випадкових впливів у неперервних системах розглянемо моделювання *нерегулярного морського хвилювання*.

Нерегулярність та хаотичність схвильованої поверхні обумовлює випадковий імовірнісний процес, який називається нерегулярним хвилюванням (табл. 6.1). Це процес, коли амплітуди та частоти елементарних гармонік змінюються випадково. Взагалі він носить нестационарний характер [8].

Таблиця 6.1

Бали	Висота хвилі h_3 %, м	Частота хвилювання β_0 , с ⁻¹	Дисперсія хвилювання D_ξ , м ²
1	0–0,25		
2	0,25–0,75		
3	0,75–1,25	1,7	0,059
4	1,25–2,00	1,4	0,143
5	2,00–3,50	1,05	0,438
6	3,50–6,00	0,827	1,29
7	6,00–8,50	0,722	2,58
8	8,50–11,00	0,661	4,33
9	11,00 та більше		

Нерегулярне морське хвилювання характеризують наступні величини:

1) дисперсія

$$D(\tau) = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega;$$

2) кореляційна функція

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega;$$

3) спектральна щільність та кореляційна функція морського хвилювання має наступну раціональну форму [4]:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} D_{\xi} \alpha_0 \frac{\omega^2 + \alpha_0^2 + \beta_0^2}{\omega^4 + 2\omega^2(\alpha_0^2 - \beta_0^2) + (\alpha_0^2 - \beta_0^2)^2}, \quad (6.1)$$

$$R(\tau) = D_{\xi} \cdot e^{-\alpha_0|\tau|} \cos \beta_0 \tau,$$

де α_0 – коефіцієнт затухання; β_0 – частота хвилювання; D_{ξ} – дисперсія хвилювання.

У теорії випадкових процесів функції часу зі змінними спектральними характеристиками називаються *кольоровими* шумами, на відміну від функції типу *білий шум*. Білий шум – це випадковий процес нескінченної потужності з постійною спектральною щільністю та значеннями, що абсолютно не корелюються.

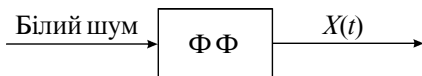


Рис. 6.2

При моделюванні випадкових процесів вважають, що вони являють собою результат перетворень білого шуму формувальним фільтром (рис. 6.2).

Використовуючи спектральну щільність нерегулярного морського хвилювання (6.1), отримуємо диференційні рівняння формувального фільтру:

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} + c_1 V, \\ \dot{x}_{12} = -b^2 x_{11} - 2\alpha_0 x_{12} + c_2 V, \end{cases}$$

де x_{11} – реалізація ординати хвилювальної поверхні; c_1, c_2, α_0, b – параметри морського хвилювання; V – білий шум.

Завдання

Провести моделювання формувального фільтру для опису випадкових величин нерегулярного морського хвилювання, як лінійну динамічну ланку за наступних початкових умов (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Номер варіанта	$c_1 = c_2$	α_0	b
1	0,1	0,1	0,1
2	0,3	0,2	0,2
3	0,25	0,1	0,1
4	0,15	0,3	0,2
5	0,1	0,2	0,1

Контрольні запитання

1. Основні характеристики випадкових процесів
2. Визначення поняття білий шум.
3. Сутність спектрального аналізу випадкових процесів.
4. Основні характеристики білого шуму.
5. Поняття формувального фільтру.

Лабораторна робота № 7

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗА РІЗНИЦЕВОЮ СХЕМОЮ

Мета роботи – навчитися моделювати системи шляхом приведення диференційних рівнянь до різницевої схеми.

Теоретичні відомості

Сутність різницевої апроксимації полягає у тому, що диференційне рівняння замінюється на різницеве. Тобто похідна

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ замінюється на різницевий аналог:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[k] - x[k-1]}{\Delta t} \text{ – висхідна різниця;}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[k+1] - x[k]}{\Delta t} - \text{низхідна різниця};$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x[k+1] - x[k-1]}{2\Delta t} - \text{центральна різниця},$$

де $\Delta t = t_{k+1} - t_k = \text{const.}$

Друга похідна $\ddot{x}$ замінюється так:

$$\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{x[k+2] - 2x[k+1] + x[k]}{\Delta t^2}.$$

Якщо прийняти $\Delta t = 1$, отримаємо для різниці n -го порядку

$$\Delta^n x[k] = \Delta^{n-1} x[k+1] - \Delta^{n-1} x[k].$$

чи, безпосередньо через значення різницевої функції [1],

$$\Delta^n x[k] = \sum_{v=1}^n (-1)^v \binom{n}{v} x[k+n-v],$$

де $\binom{n}{v} = \frac{n!}{v!(n-v)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

При дослідженні неперервних систем n -го порядку

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

використовують рівняння, які визначаються зв'язком між безперервною функцією та її похідними.

При переході до різницевих рівнянь будемо мати

$$a_n x[k+n] + a_{n-1} x[k+n-1] + \dots + a_0 x[k] = f[k],$$

де $f[k]$ – відома функція; $x[k]$ – розв'язок різницевого рівняння.

Різницеве рівняння n -го порядку відповідає неперервному диференційному рівнянню n -го порядку. Диференційне рівняння мож-

на розглядати як граничне для різницевого, якщо прийняти період дискретності Δt , який прямує до нуля.

При застосуванні методу змінних стану для системи рівнянь n -го порядку система різницевих рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{cases} x_1[k+1] = f_1(x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]); \\ \dots \\ x_n[k+1] = f_n(x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k]), \end{cases}$$

де $f_i(x_1[k], x_2[k], \dots, x_n[k])$ – алгебраїчні функції.

Завдання

1. Вирішити за різницевою схемою та промодельовати систему диференційних рівнянь згідно з варіантом (табл. 7.1.) за умови, що $\Delta t = 0,05$ та

$$\begin{aligned} |x(k+1) - x(k)| &< \varepsilon, \text{ де } \varepsilon = 0,05. \\ |y(k+1) - y(k)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

2. Побудувати графіки функції x та y

Таблиця 7.1

Номер варіанта	Система рівнянь	$x(0)$	$y(0)$	$x(1)$	$y(1)$
1	$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{x} + x + y \\ \ddot{y} = \dot{y} + 0,1x + 0,1y \end{cases}$	0	1,7	0,8	1,5
2	$\begin{cases} \ddot{x} + 10\dot{x} + 4x = 0,5y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$	0,5	0,8	0,6	–
3	$\begin{cases} \dot{x} = y + 0,5 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$	1,5	1,3	–	–
4	$\begin{cases} \dot{x} = 0,5x + y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$	1	0	–	–
5	$\begin{cases} \dot{x} = y + 8 \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$	0,7	1	–	–

Контрольні запитання

1. Сутність різницевої апроксимації.
 2. Різницевий аналог для першої похідної за висхідною різницевою схемою.
 3. Різницевий аналог для другої похідної за низхідною різницевою схемою.
 4. Різницевий аналог для похідної n -го порядку за центральною різницевою схемою.
-

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Зайцев Г.Ф.* Теория автоматического управления и регулирования. – К.: Высшая школа, 1988. – 432 с.
 2. *Катханов М.Н.* Теория судовых автоматических систем. – Л.: Судостроение, 1985. – 375 с.
 3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
 4. *Лукомский Ю.А., Чугунов В.С.* Системы управления морскими подвижными объектами. – Л.: Судостроение, 1988. – 272 с.
 5. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 392с.
 6. *Тимченко В.Л.* Стохастическая динамика системы стабилизации плавучих объектов при выполнении грузовых операций // Вестник Херсонского национального технического университета №1(21), Херсон, 2005. – С. 435–440.
 7. *Ткаченко А.Н.* Судовые системы автоматического управления и регулирования. – Л.: Судостроение, 1984. – 288 с.
 8. Судовые устройства: Справочник / Под ред. *М.Н. Александрова*. – Л.: Судостроение, 1987. – 656 с.
 9. *Чаки Ф.* Современная теория управления. – М.: Мир, 1975. – 425 с.
-

Навчальне видання

ТИМЧЕНКО Віктор Леонідович
ПІДОПРИГОРА Дмитро Миколайович
ТИМЧЕНКО Інна Вікторівна

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ**

(українською мовою)

Редактор М.П. Фоміна
Комп'ютерна правка та верстка Н.В. Ялова
Коректор М.О. Паненко

Свідectво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 25.05.07. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 1,8. Обл.-вид. арк. 1,9.
Тираж 100 прим. Вид. № 27. Зам. № 55. Ціна договірна

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5