

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О. Г. БІДНІЧЕНКО, С. О. СЛОБОДЯН

**АТЛАС ЗАВДАНЬ
З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
З ТЕОРЕТИЧНИМИ ОСНОВАМИ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою НУК

Миколаїв ♦ НУК ♦ 2019

УДК 514.18 (075)

Б 59

Автори:

О. Г. Бідніченко, канд. техн. наук, доцент, професор НУК імені адмірала Макарова;

С. О. Слободян, канд. техн. наук, професор НУК імені адмірала Макарова

Рецензенти:

А. Я. Казарезов, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри морської логістики НУК імені адмірала Макарова;

С. А. Устенко, д-р техн. наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії МНУ імені В. О. Сухомлинського;

А. П. Бойко, канд. техн. наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії ЧНУ імені П. Могили

*Рекомендовано Вченою радою НУК імені адмірала Макарова
як навчальний посібник (протокол № 6 від 27.06.2018)*

Бідніченко О. Г.

Б 59

Атлас завдань з нарисної геометрії з теоретичними основами :
навчальний посібник / О. Г. Бідніченко, С. О. Слободян. – Миколаїв :
НУК, 2019. – 264 с.

ISBN 978–966–321–366–8

Навчальний посібник з нарисної геометрії складено з метою дати можливість студентам вищих технічних навчальних закладів засвоїти деякі розділи нарисної геометрії та виконати самостійно завдання (розрахунково-графічні та домашні). Посібник містить необхідний обсяг теоретичного матеріалу, відповідні пояснення та приклади виконання графічних завдань.

Призначено для аудиторної, самостійної роботи та дистанційного навчання студентів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 514.18(075)

© Бідніченко О. Г., Слободян С. О., 2019

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2019

ISBN 978–966–321–366–8

ВСТУП

У навчальному посібнику наведено теоретичний матеріал з нарисної геометрії, засвоєння якого дасть змогу вивчити відповідні розділи та виконати завдання (розрахунково-графічні, аудиторні або домашні), зміст яких передбачає елементи самостійного конструювання геометричних фігур і тіл. Матеріал подано таким чином, щоб його можна було вивчити самостійно або дистанційно, він містить необхідні пояснення та застереження для попередження виникнення найбільш поширених помилок.

Завдання підібрані для засвоєння студентами розділів нарисної геометрії згідно з робочою програмою, що складена на основі типової програми дисципліни "Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка", яку затверджено Інститутом системних досліджень Міністерства освіти і науки України для студентів технічних спеціальностей ВНЗ України 1994 р.

Посібник складено з метою спрощення студентам процесу виконання завдань з нарисної геометрії, для можливості детальніше розібратися у методиці виконання завдань, врахувати при виконанні наведені поради та застереження. У текстовій частині посібника подано методичні особливості виконання завдань, надані відповідні рисунки з кресленнями проміжних та остаточних результатів побудов, наведено необхідні примітки.

Перший розділ присвячено викладенню матеріалу щодо комплексного завдання "Побудова піраміди". Його розв'язання передбачає вирішити на комплексному кресленні декілька графічних задач: побудову проекцій заданих точок та прямих ліній; визначення видимості ребер піраміди; побудову перпендикуляра до площини; визначення точки перетину прямої з площиною та визначення натуральної величини відрізка загального положення. У викладенні теоретичного матеріалу передбачені приклади щодо особливостей конструювання геометричних образів та виконання відповідних графічних рішень.

У другому розділі сформульовані чотири задачі перетворення комплексного креслення, наведені класичні способи перетворення проекцій. Особливу увагу приділено способу заміни площин проекцій, який використовується для виконання завдання. Наведені методи широко застосовуються в нарисній геометрії для розв'язування багатьох практичних задач, зокрема метричних.

Третій розділ містить матеріал щодо перетину поверхонь площинами. Розглянуто різні варіанти розташування (загальне й окреме) як геометричних поверхонь, так і площин. Наведено методику побудови проекцій отриманих ліній перетину.

Більш складним варіантом перетину є взаємний перетин поверхонь, який викладено у четвертому розділі. Подано теоретичний матеріал щодо перетину поверхні іншою поверхнею окремого (проекціювального) положення, а також наведено особливості способів побудови ліній перетину поверхонь на комплексному кресленні, зокрема розглянуто способи січних площин-посередників та січних сфер-посередників.

П'ятий розділ посібника присвячено розгляданню способів та методів побудови розгортки поверхонь. Отримання розгортки різноманітних поверхонь має суттєве практичне значення в нашому житті, зокрема при конструюванні виробів із

листового матеріалу різної якості, тому побудова розгортки є актуальним та необхідним питанням.

Важливе місце в посібнику приділено теоретичним основам і практичній реалізації побудови аксонометричних проєкцій геометричних об'єктів, оскільки вони є наочними й легкими для сприйняття та уявлення форми зображуваної деталі. У посібнику розглянуті особливості кожного зі стандартних видів аксонометричних проєкцій, оскільки студент сам вибирає вид аксонометрії залежно від форми поверхонь заданої деталі.

Окремий розділ посібника присвячено конструюванню перспективних зображень геометричних об'єктів. Перспективні проєкції отримуються шляхом центрального проєціювання та є науковою базою реалістичного рисунка, тому що дають можливість отримувати зображення предметів, наближених до їх зорового образу та використовуються для побудови наочних зображень різних технічних об'єктів. У посібнику викладені теоретичні основи перспективи точки, прямої лінії, пучка паралельних прямих, кривих ліній та площин. Розглянуті питання побудови лінійних перспективних зображень каскаду інженерних будівельних споруд. Як апарат побудови лінійної перспективи використовується метод архітекторів.

В останньому розділі посібника стисло подано матеріал щодо основи теорії тіней, наведено практичні рекомендації та описано графічні прийоми нанесення власних і падаючих тіней на аксонометричних проєкціях машинобудівних деталей та каскадах інженерних будівельних споруд.

Наприкінці кожного розділу посібника наведені приклади розв'язування й оформлення завдань, які студенти виконують під час вивчення курсу нарисної геометрії. Для можливості самостійної роботи подано варіанти вихідних даних для кожного завдання.

Навчальний посібник містить завдання для студентів технічних спеціальностей та спеціальності "Дизайн", які розроблені викладачами кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологій та інженерної графіки з урахуванням особливостей навчання відповідним спеціальностям.

Навчальний посібник написано спільно канд. техн. наук, професором О.Г. Бідніченко та канд. техн. наук, професором С.О. Слободяном. Матеріал базується на курсі з нарисної геометрії, який викладається в Національному університеті кораблебудування імені адмірала Макарова для студентів технічних спеціальностей та дизайну.

Автори висловлюють велику подяку д-ру техн. наук, професору Борисенку В.Д. за слушні поради та пропозиції, які були надані під час роботи над посібником.



УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

1. Точки, розташовані у просторі, позначаються великими літерами латинського алфавіту або арабськими цифрами: $A, B, C, \dots$ чи $1, 2, 3, \dots$.

2. Лінії, паралельні площинам проєкцій (лінії рівня), позначаються: h – горизонталь; f – фронталь; p – профільна пряма. Інші прямі або криві лінії позначаються малими літерами латинського алфавіту: $a, b, c, \dots$.

3. Площини та поверхні позначаються великими літерами грецького алфавіту: Δ (дельта), Γ (гамма), Λ (лямбда), Π (пі), Σ (сигма), Ω (омега), T (тау) тощо.

4. Для основних площин проєкцій прийняті такі позначення: Π_1 – горизонтальна площина проєкцій; Π_2 – фронтальна площина проєкцій; Π_3 – профільна площина проєкцій. Нові площини проєкцій, які вводяться під час заміни площин проєкцій, позначаються $\Pi_4, \Pi_5, \dots$.

5. Проєкції геометричних образів позначаються тими ж літерами (або цифрами), що й самі образи з додаванням індексу, який відповідає площині проєкцій. Так, $A_1, B_1, C_1, \dots$ – горизонтальні проєкції точок; $A_2, B_2, C_2, \dots$ – фронтальні проєкції точок; $A_3, B_3, C_3, \dots$ – профільні проєкції точок.

6. Якщо проєкції точок або ліній збігаються, то говорять, що ці проєкції тотожно рівні між собою: $A_2 \equiv B_2, a_1 \equiv b_1$.

7. Взаємні положення образів позначаються так: $c \parallel l$ – пряма c паралельна прямій l ; $a \perp d$ – пряма a перпендикулярна до прямої d ; $\Omega (n \times m)$ – площина Ω (омега) задана двома прямими n та m , що перетинаються.

8. Система прямокутних координат позначається $Oxyz$; початок координат – O .

9. Центр проєкціювання позначається великою латинською літерою S , напрям проєкціювання – малою латинською літерою s .

Додаткові позначення, які використовуються при побудові тіней, аксонометричних проєкцій та перспективи, наведено у відповідних розділах.



1. ПОБУДОВА ПІРАМІДИ

1.1. Побудова проєкцій точок

Для визначення положення конкретної окремої точки потрібно знати три її ортогональних координати: *абсцису* (x), *ординату* (y), *аплікату* (z). При цьому площини проєкцій Π_1 , Π_2 , Π_3 уважаються системою трьох взаємно перпендикулярних координатних площин, а точка O – початком відріку координат геометричного образу, зокрема точки.

Координати точок записуються у дужках: $A(x, y, z)$. Кожна проєкція точки задається двома координатами. Так, координати x і y визначають горизонтальну A_1 ; координати x і z – фронтальну A_2 та координати y і z – профільну A_3 проєкції точки (табл. 1.1).

На рис. 1.1 подано приклад побудови трикартинного комплексного креслення точки A за її координатами $A(5, 6, 4)$. Відрізки, які відповідають координатам (за масштабну одиницю прийнято відрізок довільної довжини), відкладаються на відповідних координатних осях: OA_x (5 одиниць) на осі Ox , OA_y (6 одиниць) на осі Oy та OA_z (4 одиниці) на осі Oz . Після цього через точки, позначені як A_x , A_y , A_z , проводять лінії сполучення, на перетині яких позначають шукані проєкції A_1 , A_2 і A_3 точки A .

Таблиця 1.1. Координати та проекції точок

Координати	Наочне зображення	Комплексне креслення
$x \text{ i } y$ $OA_x = x$ $OA_y = y$	Горизонтальна проекція точки	
$x \text{ i } z$ $OA_x = x$ $OA_z = z$	Фронтальна проекція точки	
$y \text{ i } z$ $OA_y = y$ $OA_z = z$	Профільна проекція точки	

Нагадаємо, що фронтальна A_2 та горизонтальна A_1 проекції точки A завжди знаходяться на одній прямій лінії, яка називається вертикальною лінією сполучення та розташована перпендикулярно до осі x . У свою чергу, фронтальна A_2 та профільна A_3 проекції точки A завжди знаходяться на одній прямій лінії, яку називають горизонтальною лінією сполучен-

ня та яка розташована перпендикулярно до осі z . Відстань від горизонтальної проекції A_1 точки A до осі x ($A_1 = A_x$) дорівнює відстані від профільної проекції A_3 точки A до осі z ($A_1A_x = A_3A_z$).

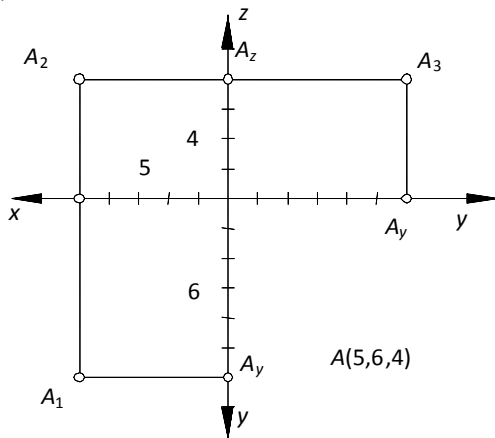


Рис. 1.1

Відповідно до умов першого комплексного завдання на папері формату А3 потрібно побудувати чотири точки A , B , C та S у трьох проекціях та попарно з'єднати однойменні проекції точок між собою. Таким чином, отримаємо три проекції піраміди, в якій, перш за все, визначаємо видимість ребер.

1.2. Визначення видимості конкуруючих точок

Пару точок, розташованих на одному перпендикулярі до площини проекцій, називають *конкуруючими точками*. З їх допомогою визначається видимість геометричних фігур на епюрі. Такий спосіб визначення видимості геометричних елементів називається *способом конкуруючих точок*.

Точка перетину однойменних проекцій мимобіжних прямих (наприклад, на площині Π_1 , рис. 1.2, *a*) є проекцією двох

точок, що лежать на одному перпендикулярі до площини Π_1 , з яких одна (точка 1) належить прямій a , а друга (точка 2) – прямій b .

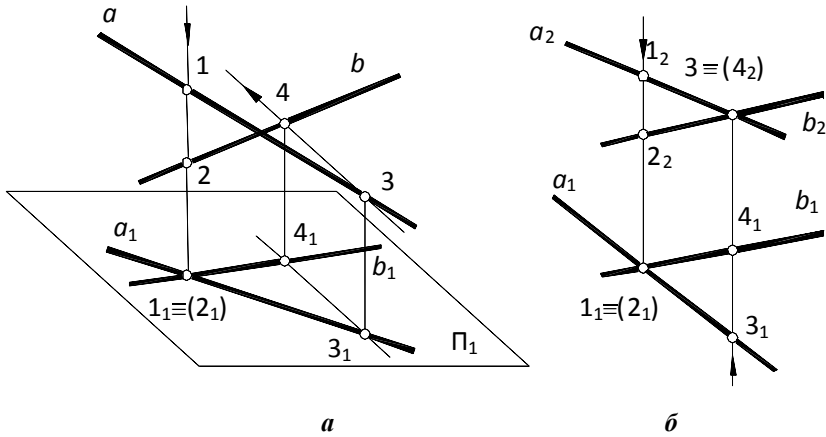


Рис. 1.2

Ці точки однаково віддалені від площини проєкцій Π_2 , але відстань їх від площини Π_1 різна: точка 1 розташована далі від площини Π_1 , ніж точка 2 (див. рис. 1.2, **б**). Таким чином, якщо дивитися на площину Π_1 у напрямку проєкціонування, точка 1, що належить прямій a , буде закривати точку 2, яка знаходиться на прямій b . Тому проєкцію цієї точки на площині Π_1 , тобто 2_1 , взято в дужки. Цим самим умовно визначено факт її невидимості.

Так само точка перетину проєкцій прямих на площині Π_2 є проєкцією двох точок 3 та 4, які знаходяться на одному перпендикулярі до площини проєкцій Π_2 . Точка 3 належить прямій a і закриває собою точку 4, що знаходиться на прямій b . Тому проєкцію точки 4 на площині Π_2 (проєкцію 4_2) треба взяти в дужки, оскільки вона невидима.

Слід пам'ятати, що з двох горизонтально конкуруючих точок на площині проєкцій Π_1 видимою буде та, що розташо-

вана вище, а з двох фронтально конкуруючих точок на площині проєкцій Π_2 – та, що розташована ближче (відносно спостерігача, який стоїть обличчям до площини проєкцій Π_2).

На рис. 1.3 показано визначення видимості ребер для побудованих проєкцій піраміди. На горизонтальній площині проєкцій Π_1 конкуруючими є ребра A_1B_1 та C_1S_1 . У точці перетину їх горизонтальних проєкцій маємо дві конкуруючі точки 1_1 та 2_1 . Через цю точку проведемо вертикальну лінію сполучення до перетину з фронтальними проєкціями відповідних ребер. Точка 1_2 належить ребру AB , тому її фронтальна проєкція 1_2 буде належати лінії A_2B_2 . Якщо точка 2 належить ребру CS , то її фронтальна проєкція 2_2 належатиме лінії C_2S_2 . Оскільки точка 1_2 розташована вище точки 2_2 , то для спостерігача, що дивиться зверху, ребро AB на горизонтальній проєкції буде видимим (тобто лінію A_1B_1 наведемо суцільною товстою лінією), а ребро CS буде невидимим, тобто лінію C_1S_1 наведемо штриховою лінією.

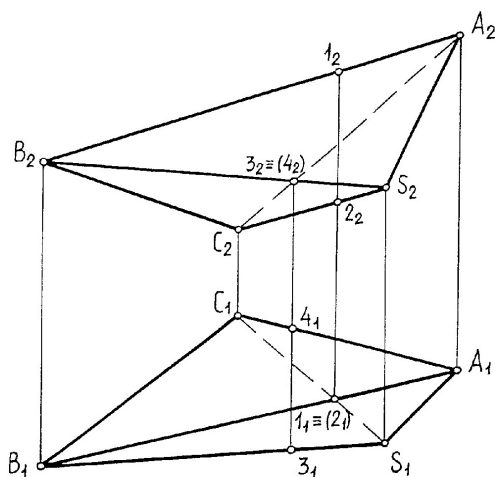


Рис. 1.3

Аналогічно для фронтальної проекції. Точки 3 та 4 є конкуруючими. Позначимо їх у точці перетину ліній A_2C_2 та B_2S_2 . Проведемо через цю точку вертикальну лінію сполучення до перетину з відповідними горизонтальними проекціями, тобто 3_1 належить прямій B_1S_1 , а точка 4_1 належить ребру A_1C_1 . Оскільки точка 3_1 для спостерігача, що дивиться знизу, буде ближче, то вона є видимою, і ребро BS також є видимим на фронтальній проекції, тому ребро B_2S_2 наведемо суцільною товстою лінією. Крім того, точка 3_1 закриває собою точку 4_1 , тому вона буде невидимою. Відповідно ребро AC також буде невидимим та на фронтальній проекції A_2C_2 позначається штриховою лінією.

1.3. Побудова горизонталі та фронталі в площині основи піраміди

Горизонталлю h деякої площини є пряма, що належить цій площині та проходить паралельно площині проекцій Π_1 . Фронтальна проекція h_2 горизонталі h паралельна осі проекцій Ox . Побудову горизонталі починають з проведення її фронтальної проекції h_2 . На рис. 1.4 площину задано прямими a і b , що перетинаються в точці C . Проводимо $h_2 \parallel Ox$ до перетину з фронтальними проекціями прямих a_2 і b_2 в точках 1_2 і 2_2 . Горизонтальні проекції 1_1 і 2_1 цих точок знаходяться на вертикальних лініях сполучення. Пряма h_1 є горизонтальною проекцією горизонталі h . У площині можна провести безліч горизонталей.

Фронталлю f площини називається пряма, що належить цій площині і проходить паралельно площині проекцій Π_2 . Горизонтальна проекція f_1 фронталі f паралельна осі Ox . Побудову фронталі починають з її горизонтальної проекції f_1 .

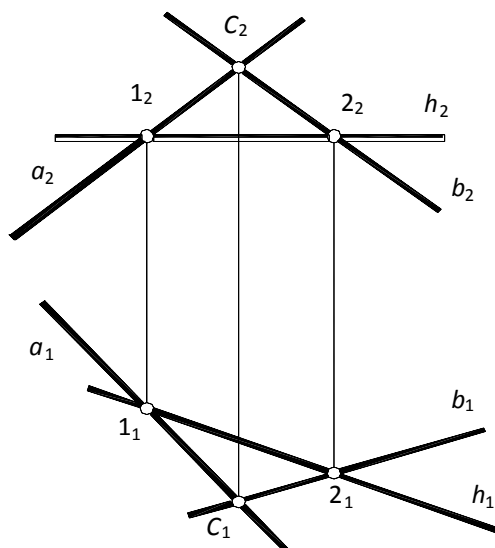


Рис. 1.4

На рис. 1.5 площину задано трикутником ABC . Проводимо $f_1 \parallel O\alpha$, яка перетинає горизонтальні проекції A_1B_1 і B_1C_1 у точках 1_1 і 2_1 . Провівши вертикальні лінії сполучення, знаходимо фронтальні проекції 1_2 і 2_2 цих точок і з'єднуємо їх. Пряма f_2 є фронтальною проекцією фронталі f . У площині можна провести безліч фронталей, які паралельні між собою.

Розглянемо проведення горизонталі та фронталі в основі ABC піраміди (рис. 1.6). Побудову горизонталі почнемо з фронтальної проекції. Через точку B_2 проведемо $h_2 \parallel O\alpha$. У перетині з лінією A_2C_2 отримаємо точку 5_2 . За допомогою вертикальної лінії сполучення на лінії A_1C_1 отримаємо точку 5_1 . З'єднавши B_1 та 5_1 , отримаємо горизонтальну проекцію h_1 горизонталі h . Фронталь почнемо будувати з горизонтальної проекції. Проведемо $f_1 \parallel O\alpha$ через точку A_1 та отримаємо точку 6_1 на ребрі B_1C_1 . Використовуючи вертикальну лінію сполучення,

отримаємо точку b_2 на лінії B_2C_2 . З'єднавши A_2 та b_2 , отримаємо фронтальну проекцію f_2 фронталі f .

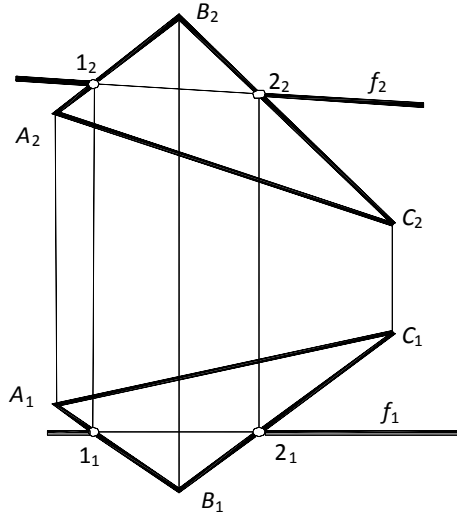


Рис. 1.5

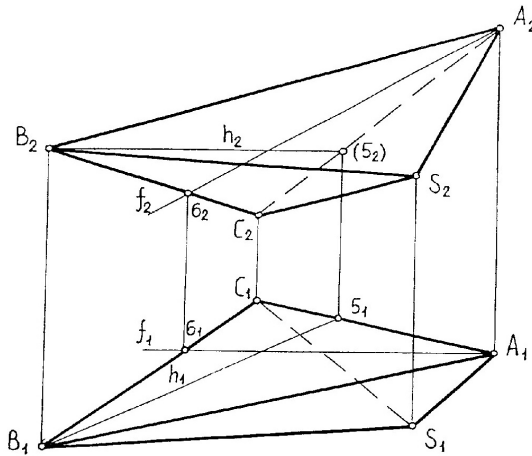


Рис. 1.6

1.4. Побудова перпендикуляра до площини

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються і належать цій площині.

Перпендикуляр до площини буде перпендикулярним до будь-якої прямої, що проведена в цій площині. Через кожну точку простору можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до заданої площини.

На рис. 1.7, *а* показано пряму n , перпендикулярну до двох прямих a і b , що лежать у площині Ξ та взаємно перетинаються, тому можна стверджувати, що пряма n перпендикулярна до площини Ξ , тобто $n \perp \Xi$. На комплексному кресленні довільний вибір прямих a і b не дасть бажаного результату, оскільки прямі кути між прямими загального положення n і a та n і b проєкціюються на площини проєкцій зі спотворенням. За теоремою про проєкції прямого кута впливає, що замість довільних прямих a і b потрібно взяти дві головні прямі площини – горизонталь h і фронталь f , які визначають напрями проєкцій перпендикуляра, відповідно, на площинах проєкцій Π_1 та Π_2 .

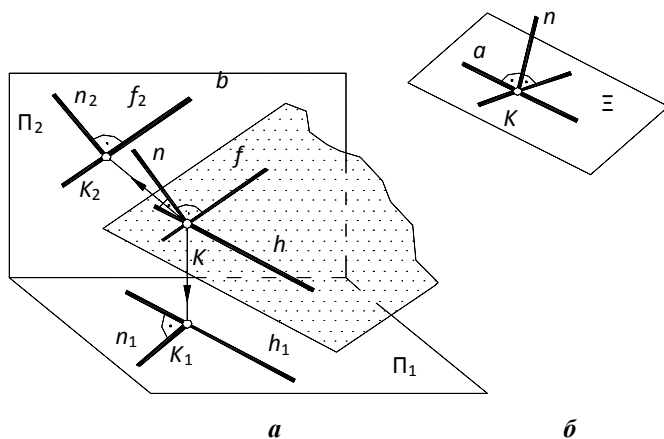


Рис. 1.7

Для проведення перпендикуляра до заданої площини (див. рис. 1.7,б) треба провести горизонтальну його проекцію n_1 перпендикулярно до h_1 ($n_1 \perp h_1$), а фронтальну проекцію n_2 перпендикулярно до f_2 ($n_2 \perp f_2$). Або інакше: якщо пряма перпендикулярна до площини, то проекції цієї прямої перпендикулярні до відповідних проекцій горизонталі та фронталі цієї площини (рис. 1.8).

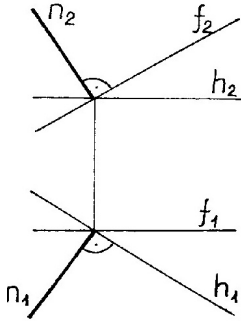


Рис. 1.8

На комплексному кресленні (рис. 1.9) через точку T проведено перпендикуляр n до площини Σ , заданої двома прямими a і b , що перетинаються. Спочатку в площині Σ будують горизонталь h та фронталь f , а потім через точку T проводять проекції перпендикуляра n ($n_1 \perp h_1$ та $n_2 \perp f_2$).

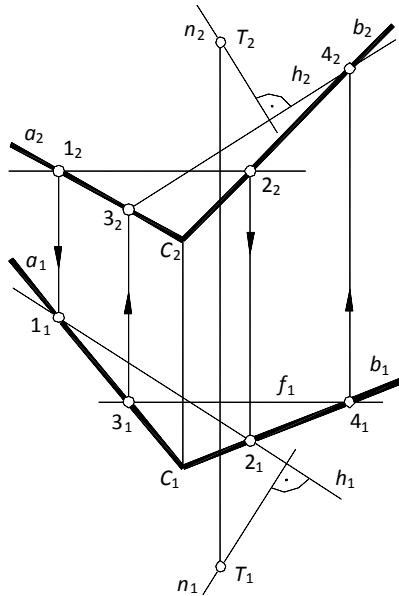


Рис. 1.9

Виконаємо описані вище побудови у піраміді ABC . Для цього із вершини S_1 на горизонтальній проекції проведемо перпендикуляр n_1 до лінії h_1 , на фронтальній проекції із вершини S_2 проведемо перпендикуляр n_2 до лінії f_2 (рис. 1.10).

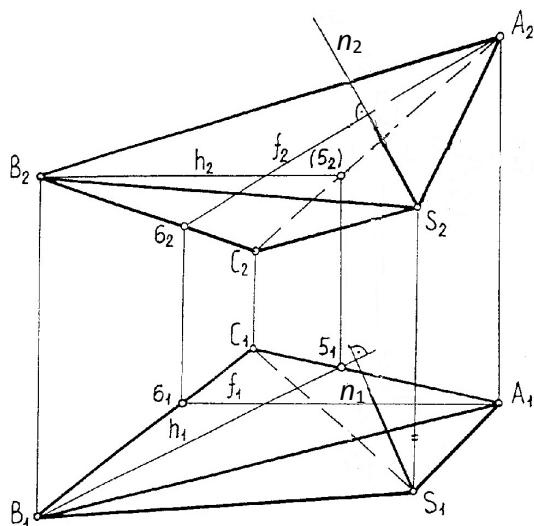


Рис. 1.10

1.5. Визначення точки перетину прямої з площиною

Якщо пряма не належить площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину в єдиній точці.

Розглянемо випадок, коли пряма та площина займають у просторі загальне положення. Для визначення точки перетину прямої з площиною в цьому випадку доцільно застосувати спосіб допоміжних січних площин-посередників. Порядок розв'язання задачі такий:

- через задану пряму l проводять допоміжну площину T (ця площина для простоти побудови є площиною окремого положення);

- знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною січною площиною-посередником;
- визначають точку перетину двох прямих – заданої та лінії перетину.

На рис. 1.11 через задану пряму l проведено горизонтально-проекціювальну площину T ($l_1 \equiv T_1$), знайдено лінію перетину двох площин – пряму 1–2 (її горизонтальною проекцією є відрізок $1_1 2_1$). За проекційною відповідністю визначено фронтальну проекцію прямої $1_2 2_2$. У перетині l_2 та $1_2 2_2$ знайдено шукану проекцію точки M_2 – точки перетину прямої з площиною. Горизонтальна проекція M_1 цієї точки знаходиться на вертикальній лінії сполучення. Видимість проекцій прямої l визначена методом конкуруючих точок 3 і 4 та 2 і 5.

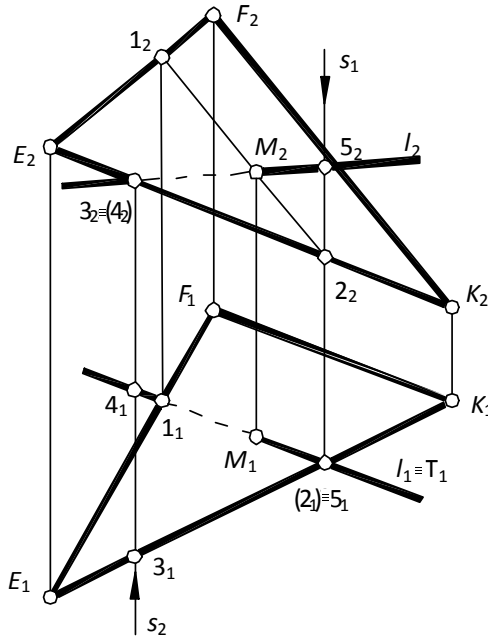


Рис. 1.11

Застосуємо описані побудови до заданої піраміди (рис. 1.12). Через перпендикуляр n (n_2) проведемо площину Σ_2 ($n_2 \equiv \Sigma_2$), яка перетне ребра піраміди відповідно A_2B_2 в точці K_2 , а A_2C_2 в точці L_2 . Знайдемо горизонтальні проекції отриманих точок за вертикальною відповідністю (точка K_1 належить ребру A_1B_1 , а точка L_1 належить ребру A_1C_1) та з'єднаємо їх. Отримано дві проекції лінії KL , яка є перетином допоміжної площини Σ із площиною основи піраміди ABC .

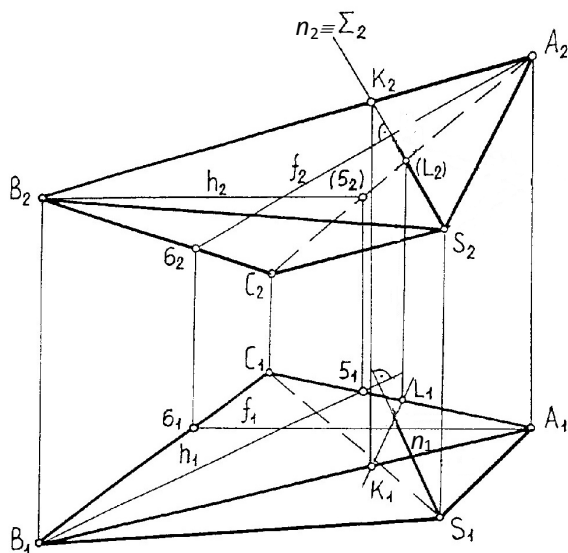


Рис. 1.12

У точці перетину K_1L_1 з перпендикуляром n_1 (рис.1.13) отримаємо горизонтальну проекцію O_1 точки O , яка є точкою перетину перпендикуляра n з основою ABC , тобто є шуканою точкою. Фронтальну проекцію O_2 точки O знайдемо за вертикальною відповідністю на лінії n_2 .

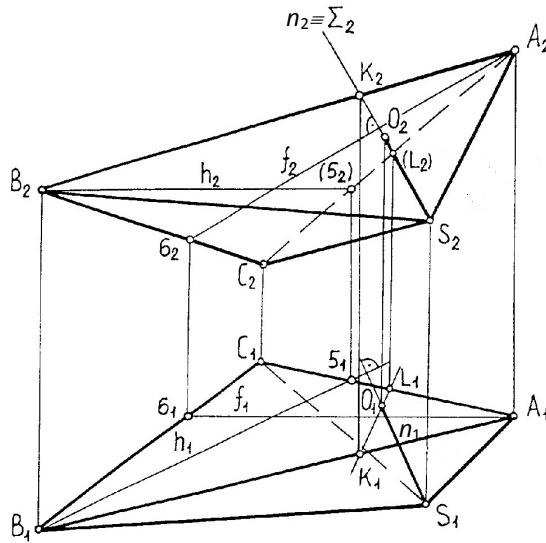


Рис. 1.13

1.6. Визначення натуральної величини відрізка

Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення та кутів його нахилу до площин проекцій виконують *способом прямокутного трикутника*.

Для його реалізації виконаємо відповідні побудови. На рис. 1.14 показано відрізок AB , дві площини проекцій Π_1 і Π_2 та проекції відрізка A_1B_1 і A_2B_2 . Якщо з точки A провести відрізок AC паралельно його горизонтальній проекції A_1B_1 , то утвориться прямокутний трикутник ABC . Гіпотенузою цього трикутника є відрізок AB .

Побудуємо в площині Π_1 трикутник $A_1B_1B_0$, рівний трикутнику ABC . У точці B_1 катета A_1B_1 проводимо перпендикуляр B_0B_1 за довжиною, що дорівнює відрізку BC , який відповідає різниці координат z точок B і A . Із рівності трикутників $A_1B_1B_0$ і ABC випливає, що гіпотенуза A_1B_0 трикутника $A_1B_1B_0$ дорівнює

натуральній величині (НВ) відрізка AB прямої загально-го положення.

Звернувшись до комплексного креслення відрізка AB (рис. 1.15, *а*), побачимо, що всі необхідні елементи для розв'язування задачі визначення натуральної величини відрізка прямої загально-го положення присутні. Дійсно, є катет A_1B_1 (горизонтальна проекція відрізка AB) і відома довжина *другого кате-та* B_1B_0 (*перевищення Δz одного кінця відрізка над іншим*). Виконавши необхідні побудови (провівши перпендикуляр із точки B_1 до проекції A_1B_1 , відклавши вздовж нього відстань Δz й отримавши точку B_0 , з'єднавши її з точкою A_1), отримуємо натуральну величину відрізка AB прямої загального положення безпосередньо на комплексному кресленні.

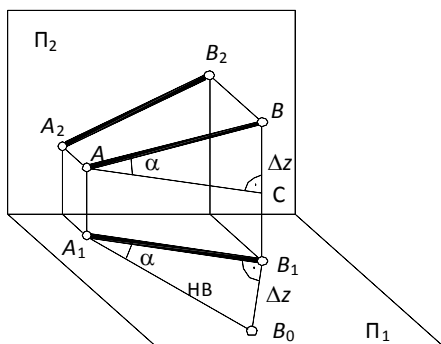


Рис. 1.14

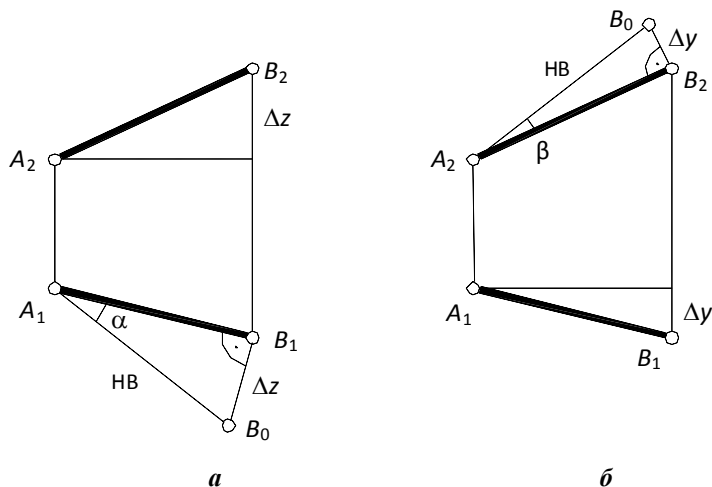


Рис. 1.15

З рис. 1.14, маємо, що кут α між гіпотенузою A_1B_0 і катетом-проекцією A_1B_1 дорівнює куту нахилу відрізка AB до горизонтальної площини проєкцій Π_1 . Отже, в результаті розв'язування цієї задачі одночасно визначені натуральна величина відрізка та кут його нахилу до площини проєкцій Π_1 .

Для знаходження кута нахилу прямої до фронтальної площини проєкцій, тобто кута β , відповідні побудови треба виконати на площині проєкцій Π_2 (див. рис. 1.15, б). Зазначимо, що при побудові прямокутного трикутника у площині Π_2 застосовано різницю координат y (Δy) кінців відрізка. Відрізки A_1B_0 і A_2B_0 (див. рис. 1.15) будуть рівні між собою, оскільки це довжина одного і того ж відрізка AB .

Потрібно зазначити, що проведення перпендикуляра може бути здійснено із будь-якого кінця відрізка та в будь-який бік. На рис. 1.16, а прямокутний трикутник побудовано на площині Π_2 та перпендикуляр проведено нижче проєкції відрізка S_2O_2 , а на рис. 1.16, б побудова здійснюється із правої вершини відрізка за описаними вище правилами.

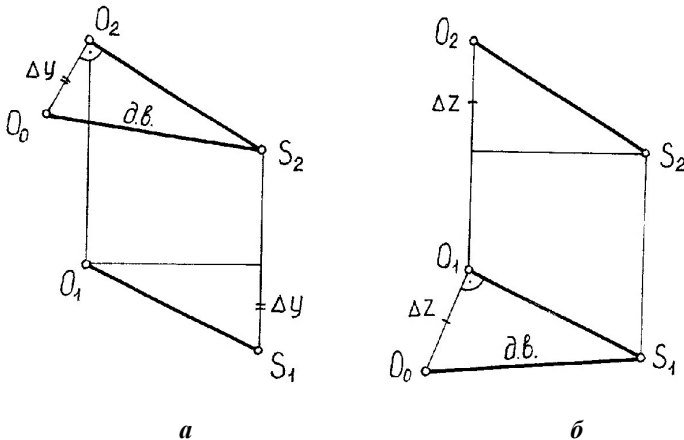


Рис. 1.16

Застосуємо описаний спосіб *прямокутного трикутника* для визначення натуральної (дійсної) величини висоти піраміди (рис. 1.17). Маємо дві його проекції S_1O_1 та S_2O_2 , які вже отримані на кресленні. Побудуємо прямокутний трикутник на площині Π_2 . Для цього із вершини S_2 проведемо перпендикуляр до прямої n_2 . Відкладемо вздовж нього величину Δy , яку визначаємо на горизонтальній проекції. Отримаємо точку S_0 . З'єднавши точки O_2 та S_0 , отримаємо натуральну (дійсну) величину (д. в.) висоти SO піраміди.

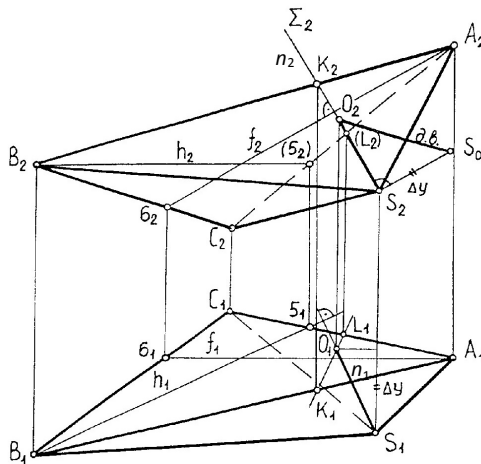


Рис. 1.17

1.7. Завдання "Побудова піраміди"

Завдання: Побудувати піраміду з основою ABC і вершиною S . Встановити видимість ребер. Визначити висоту SO піраміди. Задачу розв'язувати на трикартинному комплексному кресленні. Варіанти вихідних даних наведені у табл. 1.2.

З елементарної геометрії відомо, що висота піраміди дорівнює довжині перпендикуляра, опущеного з вершини піраміди на її основу.

Таблиця 1.2. Варіанти вихідних даних до завдання "Побудова піраміди"

Номер варі- анта	A			B			C			S		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	173	109	21	124	36	106	70	15	21	31	126	86
2	130	116	0	78	116	108	34	24	85	172	52	77
3	67	113	20	25	23	71	134	95	98	171	8	5
4	116	108	18	52	108	100	23	24	45	174	48	112
5	166	57	16	102	19	100	63	120	91	25	84	0
6	115	19	108	18	107	77	53	19	15	163	96	100
7	132	10	53	23	48	12	64	114	117	155	114	46
8	57	23	99	28	75	20	114	103	99	170	53	12
9	122	84	0	70	105	109	28	27	55	172	0	100
10	132	102	16	79	102	112	36	11	40	180	39	95
11	176	10	54	80	97	11	138	112	108	35	24	96
12	64	108	20	30	35	102	127	16	20	172	97	102
13	31	45	22	72	107	105	121	13	81	170	124	11
14	145	114	105	66	28	105	23	69	24	177	53	12
15	118	130	42	85	24	110	24	57	0	164	14	46
16	131	22	96	33	113	61	67	22	18	190	122	26
17	128	25	13	17	98	31	177	98	107	64	12	110
18	56	102	18	29	44	104	120	12	18	174	102	110
19	147	15	76	78	116	119	28	76	18	167	96	9
20	183	22	24	132	121	98	71	96	19	32	7	115
21	128	53	12	62	37	98	27	102	47	182	108	114
22	166	98	49	98	12	103	41	57	8	24	93	116
23	160	91	94	26	38	50	68	125	7	132	42	0
24	176	67	29	102	14	106	61	122	88	27	35	14
25	153	116	96	101	19	14	16	72	37	48	13	122
26	124	32	73	45	132	113	24	12	16	153	116	0
27	167	71	78	21	104	42	62	33	11	75	57	96

Продовж. табл. 1.2

Номер варі- анта	A			B			C			S		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
28	147	64	53	27	25	53	62	112	8	105	120	122
29	126	76	0	72	112	111	28	24	76	174	0	82
30	130	127	82	32	19	112	103	19	0	165	41	93

Новим для студентів, які починають вивчати нарисну геометрію, є те, що піраміда задана своїм трикартинним кресленням, вона може мати довільне розташування у просторі, а її вершина може проєкціюватися на площини проєкцій поза проєкціями основи. Зрозуміло, що це трохи ускладнює розв'язування поставленої задачі.

Таким чином, перше домашнє завдання призначене для закріплення студентами знань з побудови трикартинних креслень сукупності точок, одна з яких розглядається як вершина піраміди (точка S), а три інших – як вершини трикутної її основи (точки A , B і C). З'єднавши однойменні проєкції цих точок, отримують три проєкції піраміди. Оскільки можливі випадки, коли деякі ребра піраміди будуть мимобіжними прямими, то необхідно, застосовуючи метод конкуруючих точок, визначити видимість ребер. Невидимі ребра обводять штриховою лінією.

Далі з вершини S опускають перпендикуляр на основу, що реалізується проведенням горизонтальної і фронтальної його проєкцій. За теоремою про проєкції прямого кута проєкції перпендикуляра проводяться на площині проєкцій Π_1 через точку S_1 перпендикулярно до горизонталі h_1 , а на площині проєкцій Π_2 – через точку S_2 перпендикулярно до фронталі f_2 .

Застосовуючи допоміжну січну площину-посередник, знаходять точку O , в якій побудований перпендикуляр

перетинає основу піраміди. Останнім кроком розв'язування задачі є визначення методом прямокутного трикутника натуральної (дійсної) висоти піраміди.

Завдання виконується на папері формату А3 креслярського гатунку. Лінії креслення, позначення проєкцій геометричних образів і написи мають відповідати вимогам державних стандартів України щодо їх виконання.

Порядок виконання завдання:

1. Згідно з варіантом завдання (номер варіанта відповідає номеру прізвища студента в журналі групи) виписати координати вершини S і основи ABC піраміди, ретельно їх перевірити.

2. Накреслити внутрішню рамку формату і спрощений варіант основного напису. Побудувати трикартинне комплексне креслення цих чотирьох точок, розташувавши вісі координат так, як це показано на рис. 1.18.

3. З'єднати однойменні проєкції вершин піраміди відрізками прямих ліній. Методом конкуруючих точок визначити видимість ребер піраміди на трьох площинах проєкцій (рис. 1.19). Конкуруючі точки обов'язково позначати великими літерами або цифрами (краще цифрами) з додаванням відповідного індексу площини проєціювання. Невидиму проєкцію точки брати у дужки.

4. Провести з вершини S піраміди перпендикуляр n до її основи ABC (рис. 1.20). Для цього в трикутній основі піраміди спочатку будують горизонталь h і фронталь f . Горизонталь h починають будувати з фронтальної проєкції h_2 , яка паралельна осі x . Фронталь f починають будувати з горизонтальної проєкції f_1 , оскільки вона також паралельна осі x .

Застереження. Переконайтеся, що горизонталь h і фронталь f побудовані в площині основи ABC піраміди, а не в якійсь її бічній грані.

Далі із проекції вершини піраміди S_1 провести проекцію перпендикуляра n_1 ортогонально до горизонтальної проекції горизонталі h_1 , а із проекції вершини піраміди S_2 – проекцію перпендикуляра n_2 ортогонально до фронтальної проекції фронталі f_2 .

Примітка. Точки, які застосовувалися при побудові проєкцій горизонталі і фронталі, обов'язково позначати.

5. Знайти точку перетину O перпендикуляра n з площиною основи ABC , застосувавши для цього метод допоміжної січної площини-посередника. На рис. 1.21 для розв'язання поставленої задачі застосовано горизонтально-проєкціювальну площину Ω , слід-проєкція Ω_1 якої збігається з горизонтальною проєкцією перпендикуляра n_1 .

Через проєкції точок 9_1 і 10_1 перетину сліду-проєкції допоміжної січної площини Ω_1 зі сторонами основи піраміди проводять вертикальні лінії сполучення до їх перетину з відповідними сторонами трикутника основи, отримуючи проєкції 9_2 і 10_2 , які належать лінії перетину площини основи з допоміжною січною площиною Ω_1 .

Шукана у нашому прикладі проєкція O_2 точки O перетину перпендикуляра n із площиною основи ABC знаходиться на перетині проєкції перпендикуляра n_2 з відрізком лінії перетину $9_2 10_2$.

Примітка. Проєкція O_2 точки O може знаходитися між проєкціями точок 9_2 і 10_2 або бути поза ними (як у прикладі, що розглядається).

Провівши через O_2 вертикальну лінію сполучення до її перетину з проєкцією перпендикуляра n_1 , знайти горизонтальну проєкцію O_1 точки O .

Побудувати профільну проєкцію O_3 точки O , провівши горизонтальну лінію сполучення із O_2 та відклавши на ній від

осі z на площині Π_3 координату u для точки O , яка вимірюється на площині Π_1 від осі x до проекції O_1 .

6. Визначити методом прямокутного трикутника дійсну величину висоти SO піраміди (рис. 1.22).

Примітка. Прямокутний трикутник можна будувати або в площині проекцій Π_1 , або в площині проекцій Π_2 .

Застереження. При знаходженні дійсної величини висоти піраміди методом прямокутного трикутника відкладайте правильну різницю координат точок S і O .

7. Обвести проекції побудованої піраміди та її висоту суцільною товстою лінією та невидиме ребро – штриховою.

8. Написати креслярським шрифтом розміру 7 текст домашнього завдання. Накреслити таблицю з координатами заданих вершин піраміди (див. рис. 1.22).

9. Оформити основний напис, вказавши прізвище, ім'я, по батькові, номер групи, номер варіанта і номер завдання.

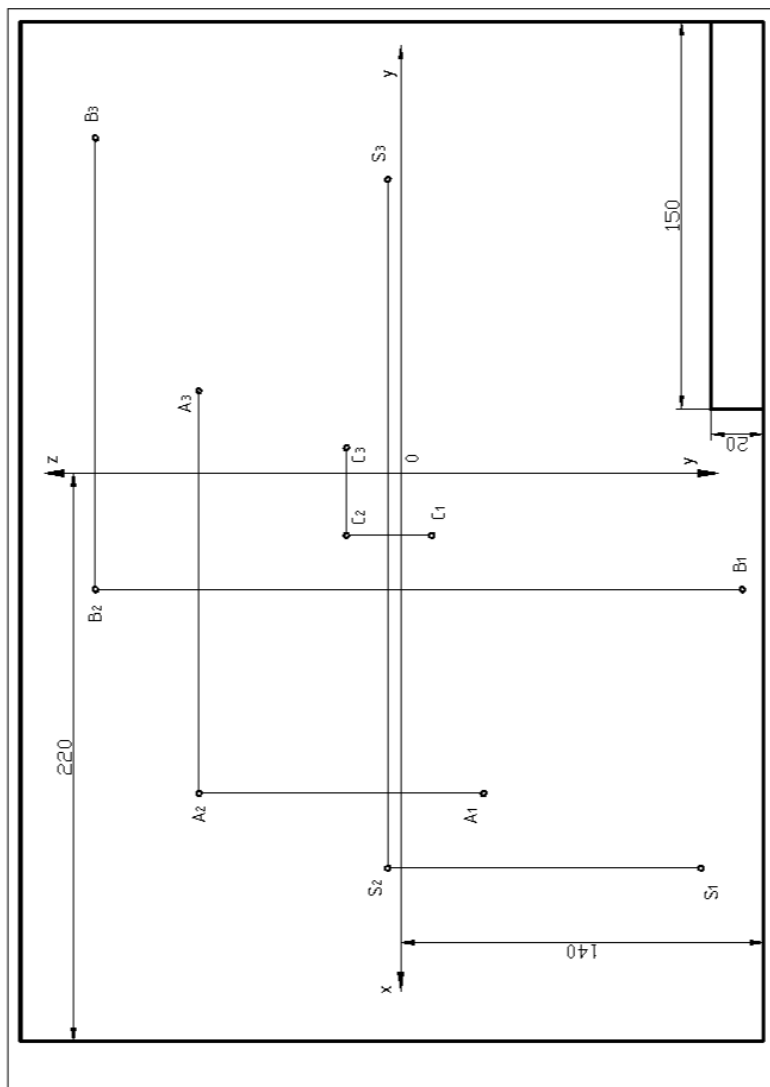


Рис. 1.18

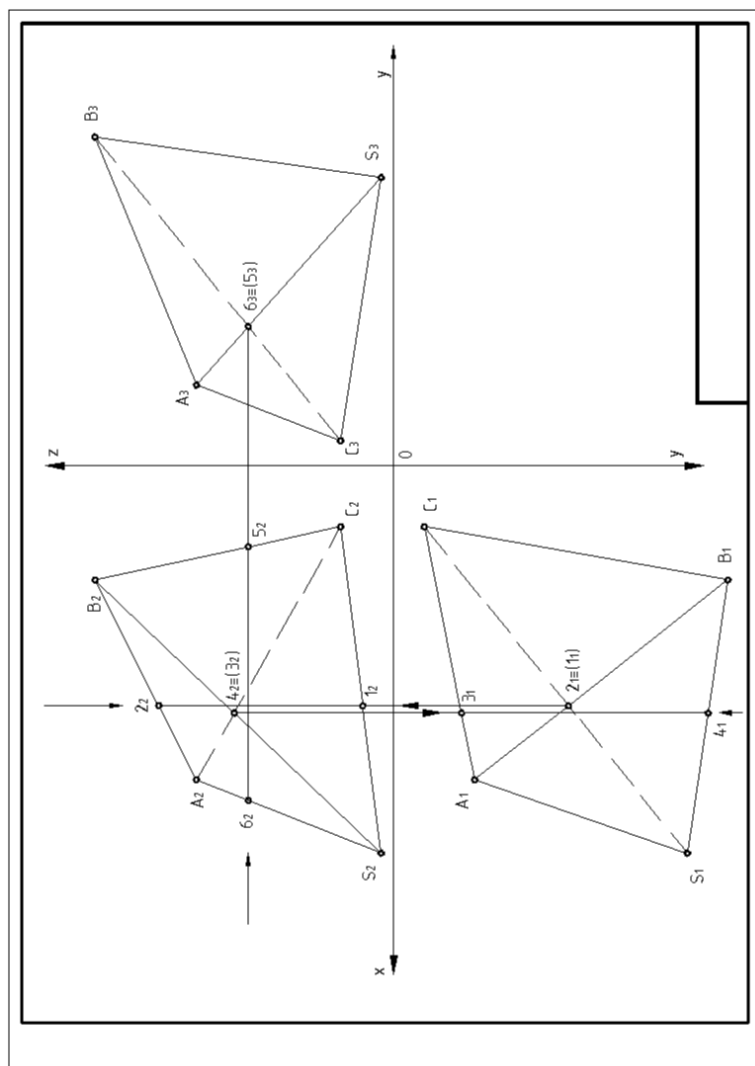


Рис. 1.19

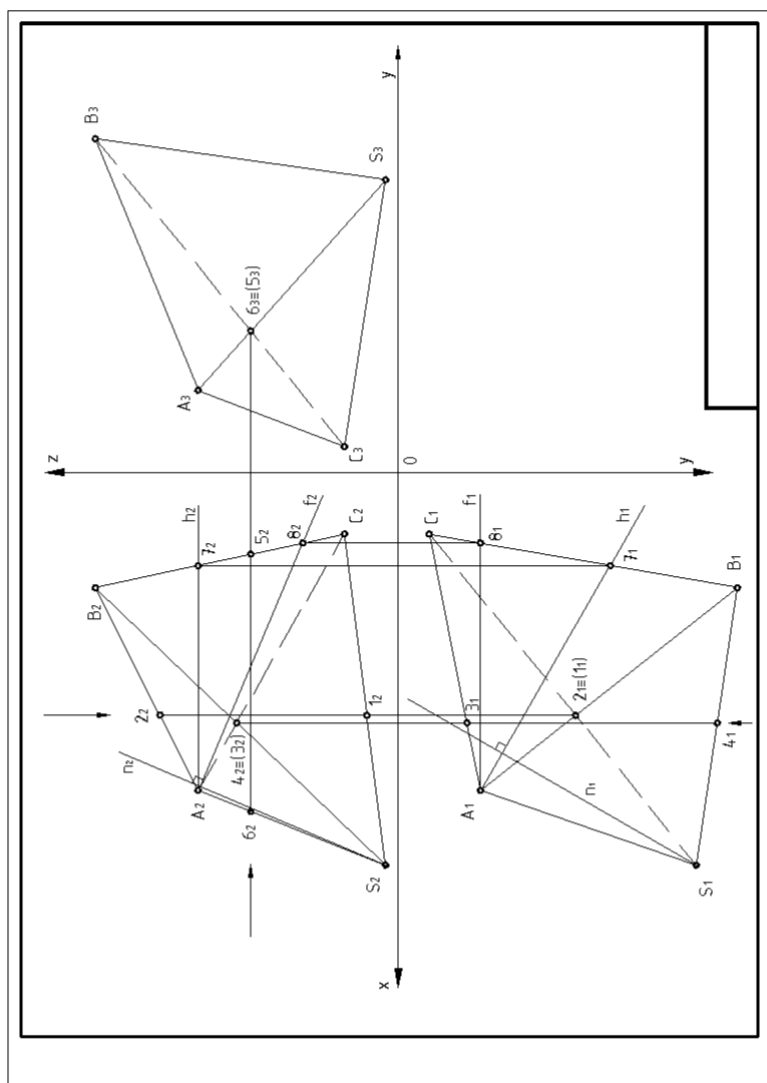


Рис. 1.20

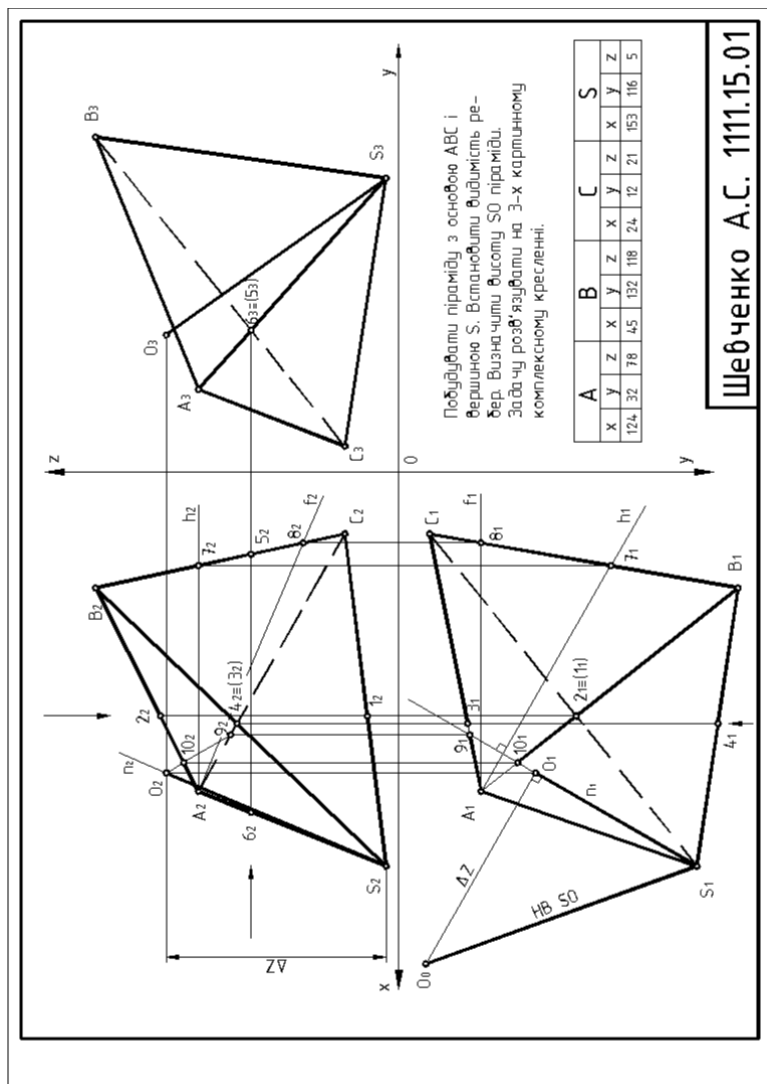


Рис. 1.22

2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

2.1. Основні задачі перетворення комплексного креслення

У багатьох задачах нарисної геометрії необхідно знаходити натуральні розміри геометричних образів або їх окремих елементів. Відомо, що при розміщенні геометричного образу паралельно якійсь площині проєкцій він проєкціюється на цю площину в натуральну величину, тобто без спотворення. За такими проєкціями можна легко визначити довжини відрізків, площі фігур, величини кутів нахилу окремих елементів геометричного образу (відрізків прямих, відсіків площин) до площин проєкцій тощо.

Отже, є практична потреба вивчення способів, які б давали змогу переводити геометричні образи із загального положення в окреме по відношенню до тієї чи іншої площини проєкцій. Подібні дії, тобто переведення геометричного образу із загального положення в окреме, в якому розв'язування конкретних задач суттєво спрощується, називають *перетворенням комплексного креслення*. Здобуті після перетворення комплексного креслення проєкції дають можливість розв'язувати задачі найпростішими графічними способами.

Перехід від загального положення геометричного образу до окремого здійснюється зміною взаємного положення гео-

метричного образу, що проєкціюється, та площини проєкцій. Це досягається двома шляхами:

по-перше, переміщенням у просторі геометричного образу таким чином, щоб він зайняв окреме положення відносно площин проєкцій, які при цьому не змінюють свого положення у просторі;

по-друге, переміщенням площин проєкцій у нове положення, по відношенню до якого геометричний образ (який не змінює свого положення у просторі) опиниться в окремому положенні.

Перший шлях веде до *способу обертання* та його різновиду *способу плоскопаралельного переміщення*; другий складає теоретичну базу *способу заміни площин проєкцій*.

2.2. Чотири основні задачі перетворення проєкцій

В основі розв'язування багатьох задач нарисної геометрії лежать прості задачі, які об'єднуються в чотири групи і приводять до перетворення:

- 1) *прямої загального положення у пряму рівня*;
- 2) *прямої рівня у проєкціювальну пряму*;
- 3) *площини загального положення у проєкціювальну площину*;
- 4) *проєкціювальної площини у площину рівня*.

У перших двох задачах основним елементом перетворення є пряма лінія, а в двох останніх – *площина*.

Перша задача розв'язується при визначенні натуральної величини відрізка прямої загального положення, кутів нахилу її до площин проєкцій, при побудові взаємно перпендикулярних прямих тощо; *друга задача* – при визначенні відстані від прямої до точки, відстані між двома паралельними або мимобіжними прямими, натуральної величини двогранного кута, утвореного двома площинами і так далі; *третьа задача* –

при визначенні натуральної величини відстані від точки до площини, кута нахилу площини до площин проекцій тощо; *четверта задача* – при визначенні натуральної величини плоскої фігури, лінійного кута та інших подібних задач.

У більшості задач нарисної геометрії необхідно послідовно розв'язувати першу та другу задачі перетворення комплексного креслення – якщо основним елементом є пряма; або третю та четверту задачі – коли основним елементом перетворення є площина.

2.3. Способи перетворення комплексного креслення

Залежно від розташування геометричних образів у просторі та від виду розв'язуваної задачі існує декілька способів перетворення комплексного креслення. Опишемо деякі із них.

Спосіб обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проекцій. Особливістю способу обертання є те, що задана геометрична модель або її елемент обертається навколо деякої нерухомої прямої – *осі обертання* – і переводиться в положення, зручне для розв'язування задачі. Відомо, що *траєкторією* точки, яка обертається навколо осі, є *коло*. В свою чергу, площина, в якій знаходиться коло-траєкторія, перпендикулярна до осі обертання.

Віссю обертання може бути будь-яка пряма, але доцільно за вісь брати пряму окремого положення, що обумовлене бажанням спростити побудову проекцій траєкторій точок геометричного образу на площини проекцій. У зв'язку з цим розглядають два підходи до застосування методу обертання:

1) *обертання навколо прямої, перпендикулярної до площини проекцій*, тобто обертання навколо проєкціювальних прямих;

2) *обертання навколо прямої, паралельної площині*, тобто обертання навколо прямих рівня.

На рис. 2.1 показано обертання відрізка прямої лінії загального положення на кут φ навколо фронтально-проекціуювальної осі i (i_1, i_2), а на рис. 2.2 побудовано обертання відсіку площини на кут φ навколо горизонтально-проекціуювальної осі i (i_1, i_2).

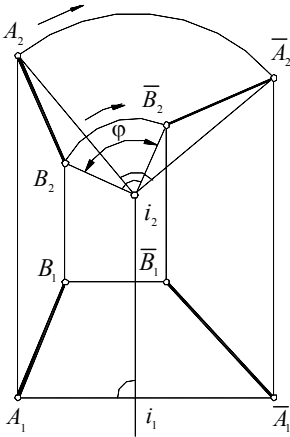


Рис. 2.1

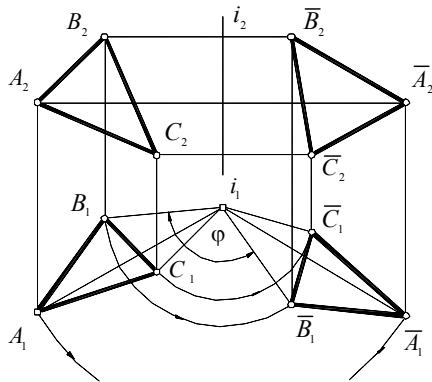


Рис. 2.2

Такий спосіб може бути використаний для розв'язання будь-якої із чотирьох основних задач перетворення проєкцій. Наприклад, для перетворення проєкціуювальної площини у площину рівня необхідно повернути її навколо осі до положення, перпендикулярного до однієї з площин проєкцій. На рис. 2.3 горизонтально-проєкціуювальна площина ABC є результатом перетворення площини загального положення. Для її перетворення у фронтальну площину рівня необхідно повернути цю площину навколо горизонтально-проєкціуювальної осі l до положення, паралельного площині Π_2 .

Для перетворення площини загального положення у площину рівня на кресленні послідовно розв'язують задачі 3 і 4,

тобто виконують два повороти площини відносно двох різних осей. На рис. 2.4 перший поворот трикутника ABC виконано відносно вертикальної осі, яка проходить через вершину C . У результаті цього перетворення площина ABC переходить у положення фронтально-проекціуювальної площини. Далі виконують другий поворот відносно горизонтальної осі, яка проходить через вершину $\bar{B}_1$, перпендикулярно до площини проєкцій Π_2 . У результаті площина трикутника опиняється у положенні, паралельному площині проєкцій Π_1 . Горизонтальна проєкція $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$ трикутника проєкціюється на площину Π_1 без спотворення і, отже, визначає його форму.

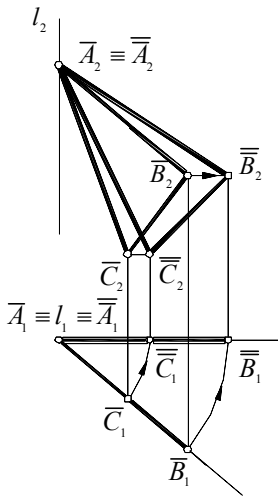


Рис. 2.3

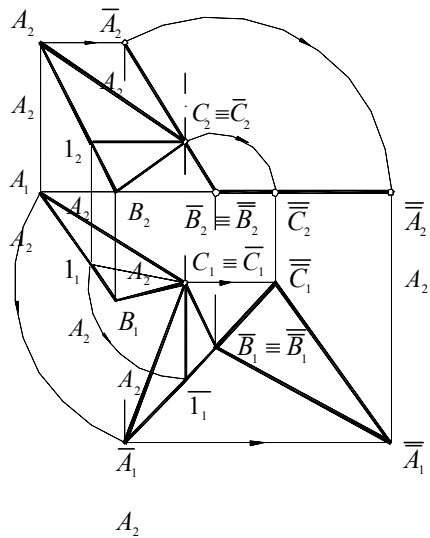


Рис. 2.4

Застосування способу обертання відносно проєкціуювальної прямої часто призводить до того, що перетворена проєкція геометричної фігури накладається на її задану проєкцію.

На кресленні присутні вісі обертання, які збільшують на ньому кількість ліній і тому ускладнюють його сприйняття. Побудова та читання такого комплексного креслення стають утрудненими.

Цього недоліку позбавлений *спосіб плоскопаралельного переміщення*, який дозволяє раціонально використовувати поле креслення для розміщення перетворених проєкцій геометричного образу. Сутність цього способу полягає в тому, що всі точки зображуваного об'єкта, який змінює своє положення в просторі, переміщуються в площинах, паралельних одній із площин проєкцій.

Під плоскопаралельним рухом розуміють плоский рух геометричного образу, за яким усі його точки рухаються паралельно деякій площині.

При розгляді способу обертання навколо проєкціовальної осі зазначалося, що проєкції геометричних образів на площину проєкцій, до якої вісь обертання перпендикулярна, не змінюють ні свого вигляду, ні величини. Змінюється тільки положення цієї проєкції відносно осі обертання. Щодо проєкцій геометричних образів на площини проєкцій, паралельних осі обертання, можна зробити висновок, що всі їх точки (за винятком тих, які розташовані на осі обертання) переміщуються вздовж прямих, перпендикулярних до ліній сполучення. Ці проєкції змінюються за формою та величиною.

На рис. 2.5 фронтальна пряма рівня $\overline{AB}$ переміщена у положення, перпендикулярне до горизонтальної площини проєкцій Π_1 . При цьому пряма $\overline{AB}$ розглядається як результат перетворення прямої AB загального положення. Фронтальну проєкцію $\overline{A_2B_2}$ відрізка $\overline{AB}$ розташовано вертикально на вільному місці креслення. Довжина нової фронтальної проєкції $\overline{A_2B_2}$ дорівнює довжині проєкції $\overline{A_2B_2}$. Горизонтальна

проекція відрізка $\overline{AB}$ вироджується в точку, тобто $\overline{A_2} \equiv \overline{B_2}$. Її положення визначається перетином горизонтальної та вертикальної ліній сполучення.

Для перетворення прямої загального положення в проєкціювальну пряму потрібно послідовно розв'язати задачі 1 та 2 (рис. 2.6).

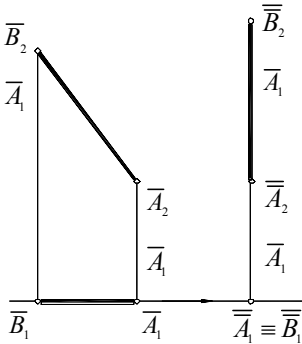


Рис. 2.5

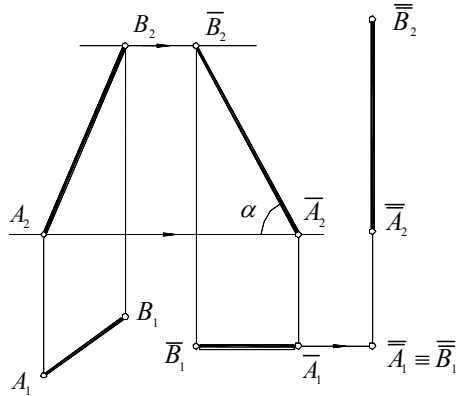


Рис. 2.6

Перетворення площини загального положення в площину рівня здійснюється двома плоскопаралельними переміщеннями, які відповідають послідовному розв'язуванню третьої та четвертої задач (рис. 2.7).

Обертання навколо ліній рівня. Ефективним прийомом, який суттєво спрощує розв'язування задач, пов'язаних із визначенням метричних характеристик плоских фігур, є спосіб обертання фігур навколо їх ліній рівня, тобто фронталі або горизонталі.

Обертаючи площину загального положення навколо горизонталі, можна перевести її в положення, паралельне горизонтальній площині проєкцій Π_1 . Обертання площини навколо фронталі дозволяє перевести її у положення, паралельне фронтальній площині проєкцій Π_2 .

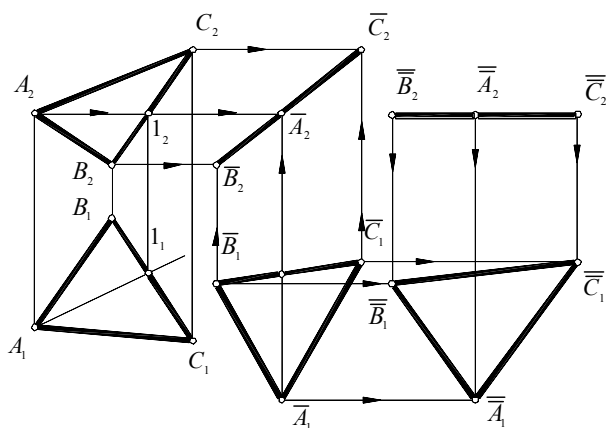


Рис. 2.7

Кожна точка площини при обертанні переміщується за колом, що належить площині, перпендикулярній до осі обертання. Центр кола знаходиться на осі обертання, а радіус дорівнює відстані від точки, що обертається, до осі. Якщо за вісь обертання взяти горизонталь, то коло, яке є траєкторією руху точки, спроектується на площину Π_1 у відрізок прямої, перпендикулярної до горизонталі. На площину Π_2 коло проєкціюється у вигляді еліпса. Точка перетину проєкцій горизонталі та кола визначає горизонтальну проєкцію центра обертання.

При обертанні довільної площини навколо фронталі будь-яка точка цієї площини переміщується за колом, яке проєкціюється на площину Π_2 у відрізок прямої, перпендикулярної до фронталі. Фронтальна проєкція центра обертання визначається перетином фронтальних проєкцій фронталі та кола.

На рис. 2.8 задано відсік MNL , який не має сторони-горизонталі. Через вершину L проводимо горизонталь h до перетину її зі стороною MN у точці K . Матимемо трикутний відсік KNL , який обертаємо навколо сторони-горизонталі KL . Точка M обертається в площині Δ , паралельній площині Γ .

З'єднавши нові положення точок $\overline{M}$ і $\overline{N}$ з нерухомою точкою L , отримаємо нове положення трикутника MNL .

На рис. 2.9 задачу обертання площини навколо прямої рівня розв'язано за умови, що горизонталь CD площини побудована безпосередньо у трикутному відсіку. Не повторюючи всіх пояснень, поданих вище, визначимо, що в той час, коли трикутник буде паралельним площині Π_1 , горизонтальні проекції кожної з вершин, що переміщуються, опиняться віддаленими від осі обертання на відстань, яка дорівнює радіусу обертання цієї точки.

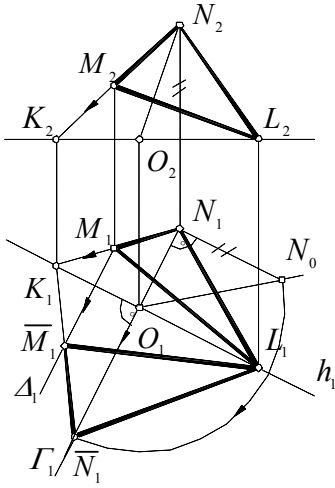


Рис. 2.8

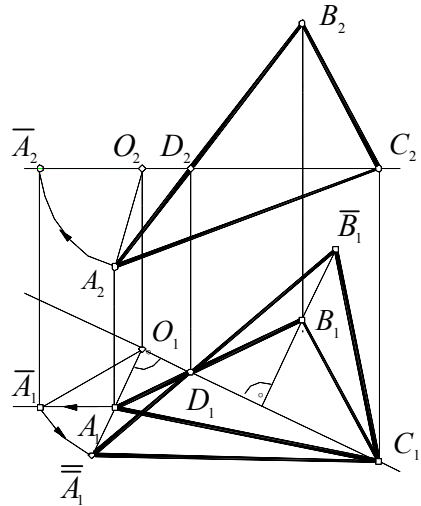


Рис. 2.9

Додамо, що на відміну від попереднього випадку, коли натуральна величина радіуса обертання точки визначалася методом прямокутного трикутника, цього разу радіус обертання визначено способом обертання відрізка OA навколо осі, яка проходить через точку O , перпендикулярно до площини

проекцій Π_2 . Нова проекція трикутника ABC , яка побудована обертанням його навколо горизонталі, є натуральною величиною трикутного відсіку.

2.4. Спосіб заміни площин проекцій

2.4.1. Сутність способу заміни площин проекцій

Спосіб заміни площин проекцій передбачає зміну взаємних положень геометричного образу та площин проекцій шляхом переходу від заданих площин проекцій до нових, більш доцільних.

Геометричний образ свого положення у просторі не змінює. При виборі положення нової площини проекцій керуються тим, щоб по відношенню до нової площини образ, що проєкціюється, зайняв окреме положення, яке забезпечує здобуття найбільш зручних для розв'язування задачі проекцій.

Додамо також, що нас цікавлять не проміжні, а кінцеві положення площин проекцій. Ці нові площини проекцій будемо позначати, як Π_4 , Π_5 , Π_6 і так далі. Можна сказати, що "старі" площини проекцій Π_1 і Π_2 замінюються новими площинами Π_4 , Π_5 тощо. Звідси випливає назва способу перетворення – *заміна площин проекцій*.

У деяких випадках достатньо замінити тільки одну площину проекцій Π_1 на Π_4 або Π_2 на Π_4 . Якщо така заміна не забезпечує бажаного вигляду нової проекції геометричного образу, то виконують заміну двох площин.

При заміні площин проекцій необхідно дотримуватись таких умов:

- 1) площини проекцій замінюються не одночасно, а послідовно;
- 2) кожна нова площина проекцій має бути перпендикулярною до тієї площини, яка залишається та утворює з нею нову систему площин проекцій.

Розглянемо суть способу заміни площин проекцій на прикладі точок, прямих і площин та розв'яжемо чотири основні задачі на перетворення.

Подивимося, які зміни відбуваються з проекціями точки при переході від однієї системи площин проекцій до іншої. На рис. 2.10 показано точку A , що знаходиться в системі площин проекцій Π_1/Π_2 . Замінімо одну з цих площин, наприклад Π_2 , іншою, також вертикальною площиною Π_4 , і побудуємо проекцію точки A на цю площину. Оскільки горизонтальна площина проекцій Π_1 є спільною для "старої" та "нової" систем, то координата z точки A залишається незмінною. Отже, *відстань від нової проекції A_4 до нової осі Π_1/Π_4 дорівнює відстані від проекції, що замінюється, до осі Π_1/Π_2* . При цьому проекцію A_4 визначено як основу перпендикуляра, проведеного із точки A на Π_4 . Горизонтальна проекція A_1 залишається тією ж самою, але координата y точки A тепер інша. Вона визначається відстанню від точки A до площини Π_4 , яка на комплексному кресленні дорівнює відстані від проекції A_1 до осі Π_1/Π_4 . Зазначимо, що ця вісь на кресленні вибрана довільно.

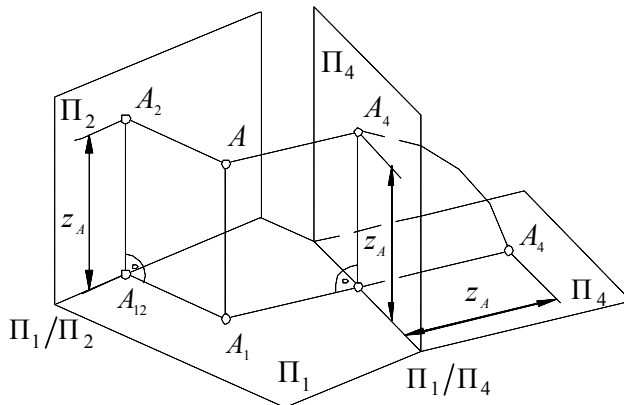


Рис. 2.10

Для побудови комплексного креслення площина Π_4 обертанням навколо осі Π_1/Π_4 суміщається з площиною Π_1 . Суміститься з Π_1 і нова проекція A_4 точки A , яка виявиться на спільному перпендикулярі до нової осі Π_1/Π_4 , проведеному з горизонтальної проекції A_1 точки A (рис. 2.11).

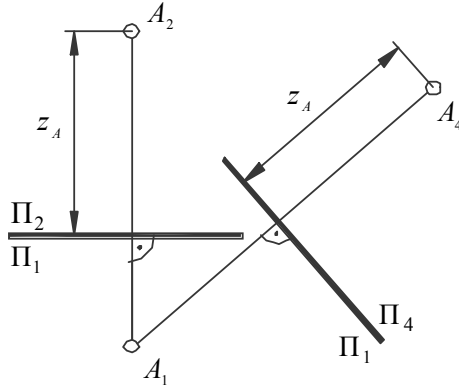


Рис. 2.11

Так само можна замінити горизонтальну площину проекцій Π_1 площиною Π_4 , також перпендикулярною до Π_2 (рис. 2.12). У цьому випадку не змінюється величина координати y , яка визначає відстань від точки B до спільної для двох систем проекцій площини Π_2 . Тому відстань від нової проекції B_4 точки B до нової осі Π_4/Π_2 дорівнює відстані від проекції B_1 цієї точки до осі Π_2/Π_1 , тобто $B_4B_{24} = B_1B_{12}$.

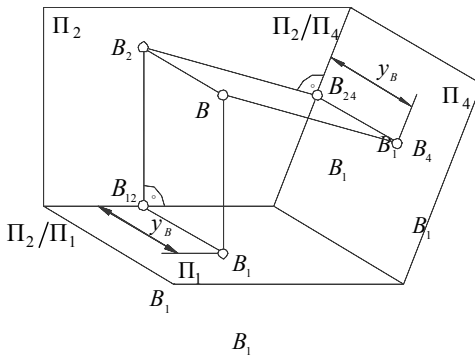


Рис. 2.12

2.4.2. Перетворення прямої загального положення в пряму рівня

Задача перетворення прямої загального положення в пряму рівня (задача 1) є першою задачею перетворення проєкцій. У системі площин Π_1/Π_2 задано відрізок AB прямої загального положення (рис. 2.14). Для того щоб у новій системі площин проєкцій ця пряма зайняла положення прямої рівня, необхідно нову площину проєкцій Π_4 розташувати паралельно відрізку AB і перпендикулярно до площини проєкцій Π_1 . Утворюється нова система взаємно перпендикулярних площин Π_1, Π_4 , вісь Π_1/Π_4 якої паралельна проєкції A_1B_1 відрізка AB . Спроеціювавши AB на площину Π_4 , отримаємо його проєкцію A_4B_4 . Для здобуття нового плоского комплексного креслення площину Π_4 обертанням навколо осі Π_1/Π_4 суміщаємо з площиною Π_1 .

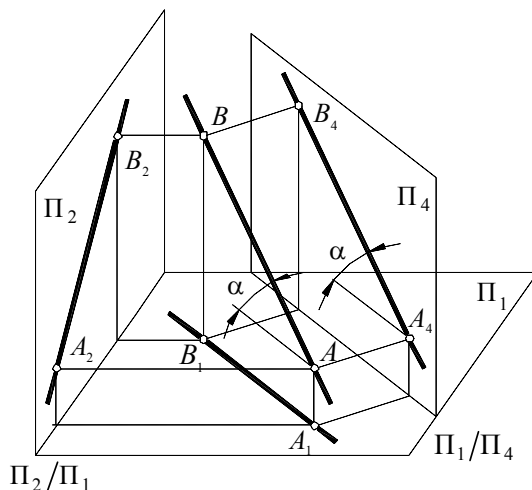


Рис. 2.14

У системі площин проєкцій Π_1, Π_4 пряма AB є прямою рівня, її проєкція на Π_4 дорівнює дійсній величині відрізка AB ,

а кут α між проекцією A_4B_4 та новою віссю Π_1/Π_4 є кутом нахилу відрізка AB до площини Π_1 .

Переходимо до комплексного креслення (рис. 2.15). На цьому кресленні в системі площин Π_1, Π_2 маємо відрізок AB прямої загального положення. Пам'ятаємо, що при перетворенні креслення способом заміни площин проекцій необхідно мати осі проекцій, які виступають базами відліку координат окремих точок. Якщо на комплексному кресленні вісь Π_1/Π_2 відсутня, то треба вибрати вісь системи площин Π_1, Π_2 на довільному місці між горизонтальною та фронтальною проекціями відрізка.

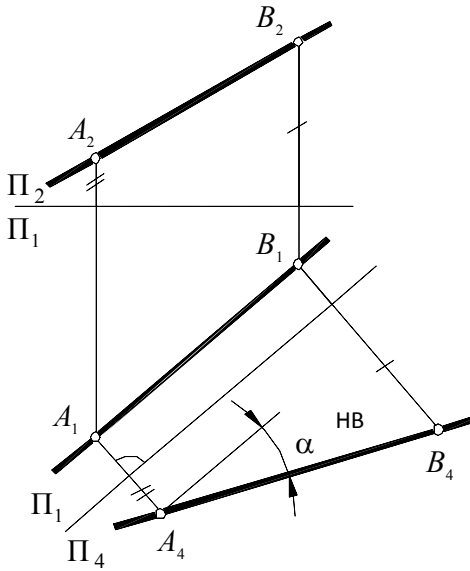


Рис. 2.15

Перехід до нової системи площин реалізується за три кроки:

1. Будують нову вісь проекцій згідно з умовами задачі. В нашому випадку нова вісь проекцій Π_1/Π_4 паралельна горизонтальній проекції A_1B_1 відрізка AB . Відстань від нової осі проекцій до проекції A_1B_1 довільна.

2. Проводять нові лінії сполучення перпендикулярно до нової осі проекцій. Ці лінії починаються від тих проекцій точок, які переходять до нового креслення. На рис. 2.15 лінії сполучення йдуть від кінців A_1, B_1 горизонтальної проекції відрізка до нових проекцій, перпендикулярно до нової осі.

3. На нових лініях сполучення від нової осі відкладають відстані, які дорівнюють відстаням від "старих" проєкцій точок до старої осі (у нашому випадку це координати z точок A і B , тобто віддалення проєкцій A_2 і B_2 від осі Π_1/Π_2).

Отже, маємо нове двокартинне креслення, яке складається із старої проєкції A_1B_1 відрізка та нової, додаткової проєкції A_4B_4 . На цьому кресленні пряма загального положення перетворена в пряму рівня. Тепер це ні горизонталь, ні фронталь, оскільки ми відійшли від старої, початкової системи площин проєкцій Π_1, Π_2 . Нова, додаткова проєкція A_4B_4 є натуральною величиною відрізка AB , а кут α – натуральною величиною кута його нахилу до горизонтальної площини Π_1 .

Незвичайність цього креслення ще є й у тому, що вісь проєкцій нахилена. Щоб перейти до звичайного горизонтального розташування осі проєкцій, достатньо повернути креслення на необхідний кут.

Якщо треба знайти кут β нахилу відрізка AB до площини Π_2 , то площину проєкцій Π_1 замінюють новою площиною проєкцій Π_4 , паралельною відрізку AB і перпендикулярною до площини проєкцій Π_2 (рис. 2.16). Нову вісь проєкцій Π_2/Π_4 проводять паралельно фронтальній проєкції відрізка A_2B_2 на довільній відстані. Очевидно, що проєкція A_4B_4 дорівнює натуральній величині відрізка AB , а кут між цією проєкцією і віссю Π_2/Π_4 є кутом β нахилу відрізка до площини Π_2 .

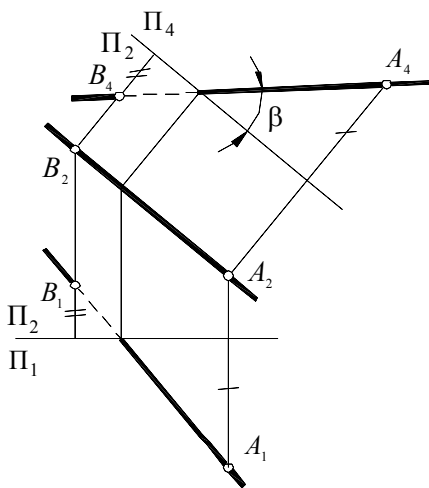


Рис. 2.16

щини проекцій Π_2 . Назвемо одну особливість цього прикладу. Оскільки горизонтальні проекції точок A і B розташовані по різні сторони від осі Π_1/Π_2 , то і проекції A_4 і B_4 цих точок знаходяться по різні сторони від нової осі. Пояснюється це тим, що $y_A > 0$, а $y_B < 0$.

2.4.3. Перетворення прямої рівня в проекціювальну пряму

Задача перетворення прямої рівня в проекціювальну пряму (задача 2) є другою задачею перетворення проекцій. Будемо розв'язувати її як продовження першої задачі. На рис. 2.17 пряма AB у системі площин проекцій Π_1, Π_4 є прямою рівня. Для перетворення її в проекціювальну пряму необхідно ввести

до розгляду нову площину проекцій Π_5 і розташувати її перпендикулярно до відрізка AB . Отже, площина Π_5 замінить собою горизонтальну площину проекцій Π_1 .

Утворюється нова система двох взаємно перпендикулярних площин Π_4 і Π_5 з новою віссю проекцій Π_4/Π_5 . Спроеціювавши відрізок AB на нову площину проекцій Π_5 , отримаємо нову, "вироджену" проекцію $A_5 \equiv B_5$ відрізка AB .

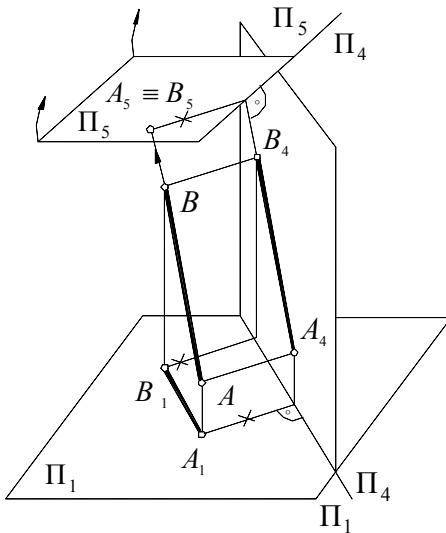


Рис. 2.17

Для здобуття плоского креслення треба сумістити площину проекцій Π_5 з площиною Π_4 обертанням її навколо осі проекцій Π_4/Π_5 .

Розглянемо комплексне креслення (рис. 2.18). Для зручності комплексне креслення в системі площин Π_1, Π_4 повернуто таким чином, щоб положення осі проекцій Π_1/Π_4 відповідало наочному зображенню рис. 2.17.

На комплексному кресленні перехід до нової системи площин реалізується в тому ж порядку, який використовувався при розв'язуванні попередньої задачі (задачі 1):

1. Будуємо вісь проекцій Π_4/Π_5 перпендикулярно до проекції A_4B_4 , що випливає з умови задачі, пов'язаної з перетворенням прямої рівня у пряму проекціювальну.

2. Через проекції A_4 і B_4 , що переходять із старого у нове комплексне креслення, проводимо нові лінії сполучення, перпендикулярно до нової осі Π_4/Π_5 (зрозуміло, що у нашому випадку ці лінії збігаються).

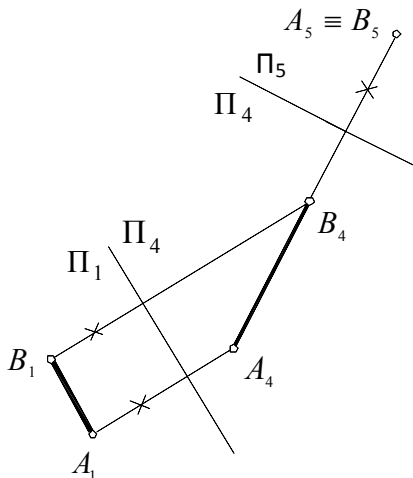


Рис. 2.18

3. На нових лініях сполучення від нової осі відкладаємо відрізки, що відповідають відстаням від горизонтальних проекцій A_1 і B_1 точок до старої осі Π_1/Π_4 . Отримуємо нову, додаткову проекцію $A_5 \equiv B_5$ відрізка AB .

Таким чином, маємо нове комплексне креслення, яке складається зі старої проекції A_4B_4 та нової, додаткової проекції $A_5 \equiv B_5$. На цьому новому кресленні пряма рівня AB є проекціювальною прямою.

Нагадаємо, що нові вісі проекцій будують на довільних відстанях від тих проекцій геометричних образів, які переходять до нового креслення. Ці відстані визначаються тільки

зручністю розв'язування конкретної задачі та наявністю вільного місця на аркуші паперу.

Для перетворення прямої загального положення у проєкціювальну пряму необхідно послідовно розв'язувати першу та другу задачі на одному комплексному кресленні. Дійсно, перетворення однієї із проєкцій деякої прямої загального положення у точку вимагає подвійної заміни площин проєкцій, оскільки в системі площин Π_1, Π_2 площина, перпендикулярна до цієї прямої, не буде ортогональною ні до Π_1 , ні до Π_2 .

Перетворення прямої загального положення у пряму проєкціювальну подане на рис. 2.19. Нагадаємо, що при переході від системи площин проєкцій Π_1, Π_2 до системи площин Π_1, Π_4 площину проєкцій Π_4 розташовано перпендикулярно до Π_1 і паралельно відріzkу AB . Це відповідає розв'язуванню першої задачі на перетворення. При другій заміні площин проєкцій нову площину Π_5 розташовують перпендикулярно до прямої загального положення. Цим самим забезпечують умову ортогональності системи площин проєкцій Π_4, Π_5 . На нову площину проєкцій Π_5 пряма AB проєкціюється в точку.

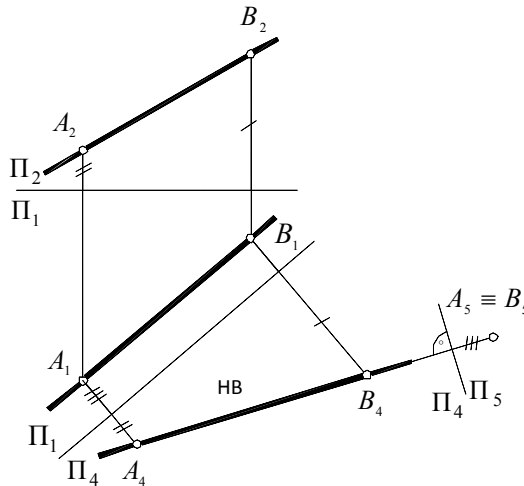


Рис. 2.19

Таким чином, у системі площин проєкцій Π_4, Π_5 пряма загального положення AB перетворилася в проєкціювальну пряму.

2.4.4. Перетворення площини загального положення в площину проєкціювальну

Задача перетворення площини загального положення в площину проєкціювальну (задача 3) є третьою задачею перетворення проєкцій. Нехай площина загального положення задана трикутним відсіком ABC (рис. 2.20). Для розв'язування цієї задачі нову площину проєкцій розташовують перпендикулярно до трикутного відсіку ABC і однієї з площин проєкцій. А це свідчить про те, що нова площина проєкцій є перпендикулярною до лінії перетину заданої площини з однією із площин проєкцій. Саму лінію не будують, оскільки її напрям визначають за допомогою головної лінії площини (горизонталі чи фронталі). Тому у заданій площині загального положення, перш за все, проводять одну із подібних ліній, наприклад горизонталь A_1 . Ця горизонталь необхідна для орієнтування нової площини проєкцій Π_4 .

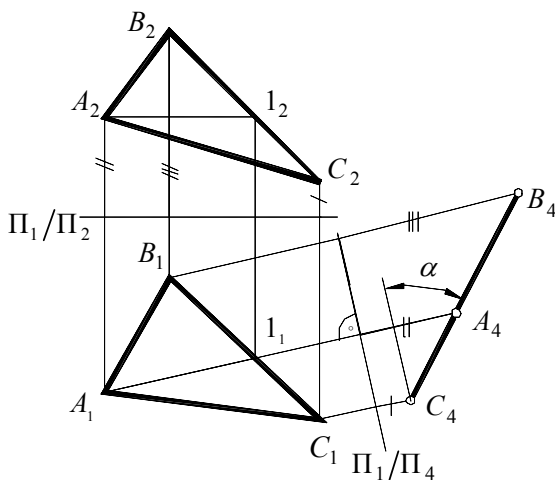


Рис. 2.20

Розташувавши $\Pi_4 \perp A_1$, забезпечуємо виконання одразу двох умов: нова площина Π_4 буде перпендикулярною і до Π_1 , і до площини ABC . Нову вісь проєкцій Π_1/Π_4 проводять під прямим кутом до $A_1 l_1$. Провівши через горизонтальні проєкції вершин трикутника лінії сполучення, перпендикулярні до нової осі, відкладають на них від осі Π_1/Π_4 відрізки, що дорівнюють z_A, z_B, z_C . Далі будують нову проєкцію $A_4 B_4 C_4$ трикутника ABC , яка є прямою лінією. Додамо, що на площину Π_4 , яка перпендикулярна до трикутника і до площини проєкцій Π_1 , без спотворення проєкціюється кут α , утворений трикутним відсіком з площиною проєкцій Π_1 .

Подібне перетворення виконане на рис. 2.21, де площина проєкцій Π_1 замінена площиною Π_4 , перпендикулярною до Π_2 і трикутника ABC . Для цього в площині трикутника побудовано фронталь, перпендикулярно до якої розташовано площину Π_4 . Нова вісь Π_2/Π_4 проведена перпендикулярно до $A_2 l_2$. Площина трикутника відносно площини проєкцій Π_4 є проєкціювальною. На площину Π_4 кут β нахилу трикутника ABC до площини проєкцій Π_2 проєкціюється без спотворення.

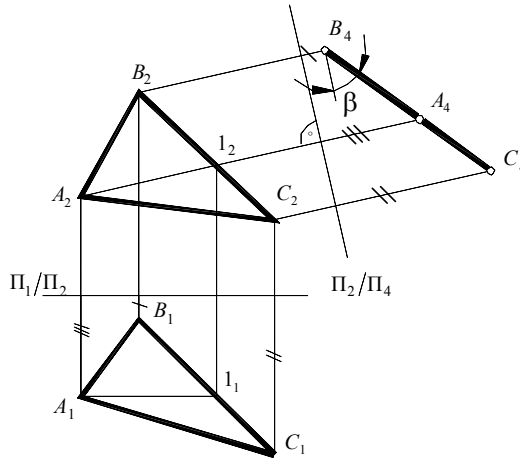


Рис. 2.21

2.4.5. Перетворення проєкціовальної площини в площину рівня

Задача перетворення проєкціовальної площини в площину рівня (задача 4) є четвертою, останньою задачею перетворення комплексного креслення. Цю задачу будемо розглядати як продовження попередньої (третьої) задачі. Для зручності вісь розташуємо горизонтально.

Нагадаємо, що для перетворення проєкціовальної площини у площину рівня необхідно ввести нову площину проєкції Π_5 , паралельну площині трикутника. Вісь проєкцій Π_4/Π_5 має бути паралельною "виродженій" проєкції трикутника, яка є результатом розв'язування третьої задачі.

Спочатку паралельно "виродженій" проєкції $A_4B_4C_4$ трикутника на довільній відстані від неї будемо нову вісь проєкцій Π_4/Π_5 (рис. 2.22), а потім від вершин A_4, B_4, C_4 проводимо нові лінії сполучення, перпендикулярні до нової осі Π_4/Π_5 , і на них відкладаємо відстані, які визначають віддалення проєкцій точок A_1, B_1, C_1 від старої осі Π_1/Π_4 . У результаті матимемо нове комплексне креслення площини ABC , яке складається із старої проєкції-прямої $A_4B_4C_4$ відсіку та його нової, додаткової проєкції $A_5B_5C_5$. На цьому кресленні площина

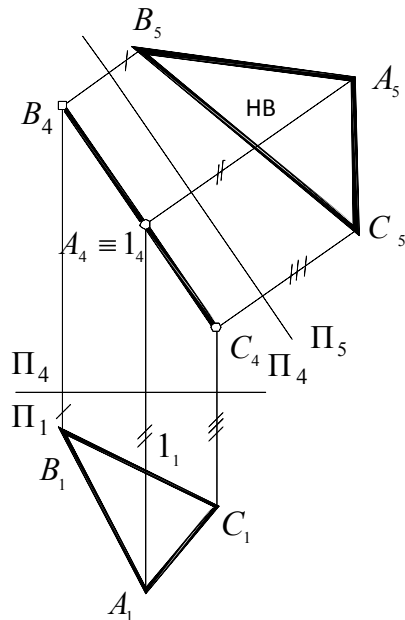


Рис. 2.22

ABC є площиною рівня, а проекція $A_5B_5C_5$ відповідає його натуральній величині.

Для перетворення площини загального положення в площину рівня послідовно розв'язують третю та четверту задачі на одному комплексному кресленні (рис. 2.23). Треба створити таку нову ортогональну систему площин проєкцій, в якій одна з цих площин була б паралельна трикутному відсіку. В системі Π_1, Π_2 таку площину побудувати неможливо. Дійсно, площина, паралельна трикутнику, не буде перпендикулярною ні до Π_1 , ні до Π_2 , тобто вона не утворює з площинами проєкцій ортогональної системи. Звідси випливає необхідність виконання подвійної заміни площин проєкцій. Спочатку площина Π_2 замінюється площиною Π_4 , а потім площина Π_1 – площиною Π_5 .

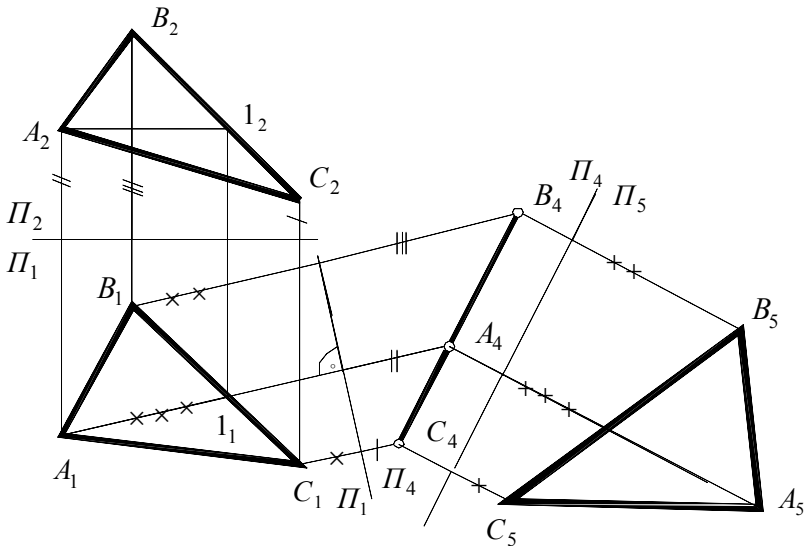


Рис. 2.23

2.4.6. Приклади розв'язання задач способом заміни площин проєкцій

Способи перетворення проєкцій знаходять широке застосування при розв'язуванні багатьох задач нарисної геометрії. Розглянемо кілька прикладів задач, де застосування способів перетворення проєкцій суттєво спрощує їх розв'язування.

Приклад 1. Побудувати лінію перетину двох трикутних відсіків площин ABC і DEK (рис. 2.24).

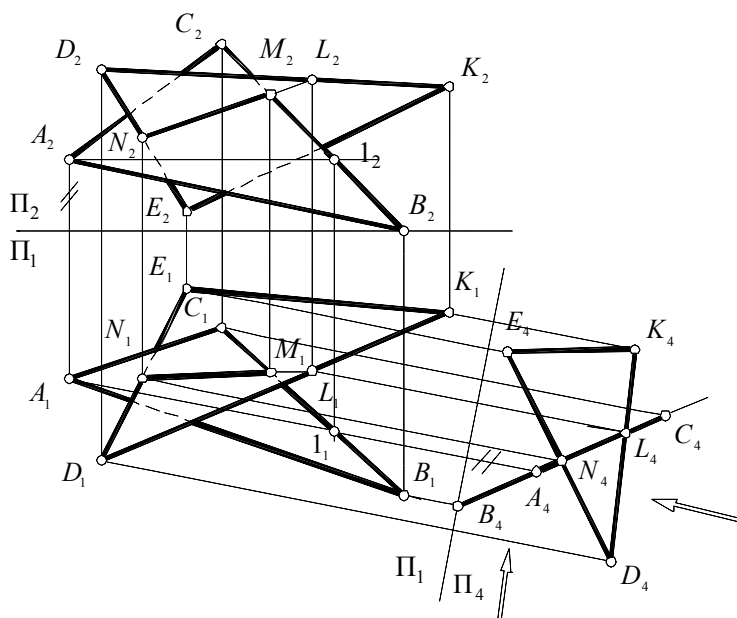


Рис. 2.24

Способом заміни площин проєкцій будуюмо додаткове комплексне креслення за умови, що один із трикутників, наприклад ABC , займе положення проєкціювальної площини. Горизонталь A_1 визначає напрям нової площини проєкцій.

Знаходимо проєкції $A_4B_4C_4$ і $D_4E_4K_4$ трикутників. Проєкція $A_4B_4C_4$ площини ABC має вигляд прямої лінії.

Це дає можливість легко знайти проєкції точок L_4 і N_4 лінії перетину на Π_4 . Зробивши побудови у зворотному напрямі, знаходимо проєкції L_1 і N_1 точок L і N на Π_1 . Перетин N_1L_1 з B_1C_1 визначає проєкцію M_1 другої крайньої точки лінії перетину заданих площин. Остаточо маємо проєкції M_1N_1 і M_2N_2 лінії перетину на площини Π_1 і Π_2 . Видимість сторін трикутників відносно цих площин проєкцій визначена за напрямом стрілок методом конкуруючих точок.

Приклад 2. Повернути за годинниковою стрілкою точку K на кут δ навколо прямої AB загального положення (рис. 2.25).

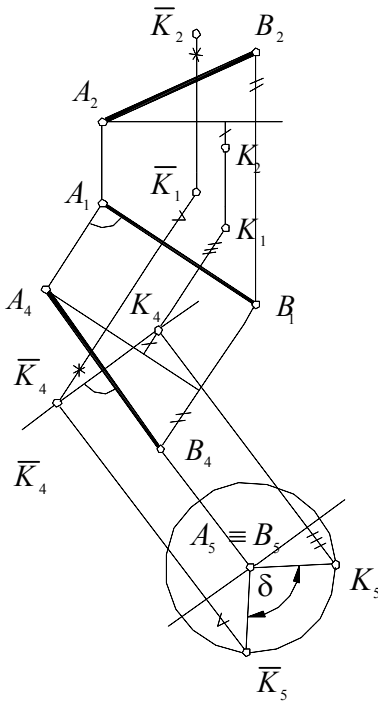


Рис. 2.25

Ця задача є прикладом комбінованого застосування способів заміни площин проєкцій та обертання. Спочатку способом заміни площин проєкцій перетворюємо задану пряму AB у пряму проєкціювальну. Нагадаємо, що для цього потрібно застосувати подвійну заміну площин проєкцій і робити ці перетворення необхідно сумісно з точкою K .

Нове положення $\bar{K}_5$ точки K знаходимо способом обертання навколо проєкціювальної прямої. На площині проєкцій Π_5 траєкторія точки K проєкціюється у вигляді дуги кола, на площині Π_4 – у вигляді відрізка прямої, перпендикулярної до напрямку проєкціювання. Із

рис. 2.25 впливає порядок знаходження проєкцій $\bar{K}_1$ і $\bar{K}_2$ точки K після її повороту на кут δ навколо прямої загального положення. За необхідності можна знайти безліч положень цієї точки при її обертанні і, таким чином, побудувати проєкції її траєкторії на площини проєкцій Π_1 і Π_2 . Це будуть еліптичні криві.

Приклад 3. За ортогональним кресленням деякої геометричної моделі побудувати її наочне зображення за довільним напрямом проєціювання r (рис. 2.26).

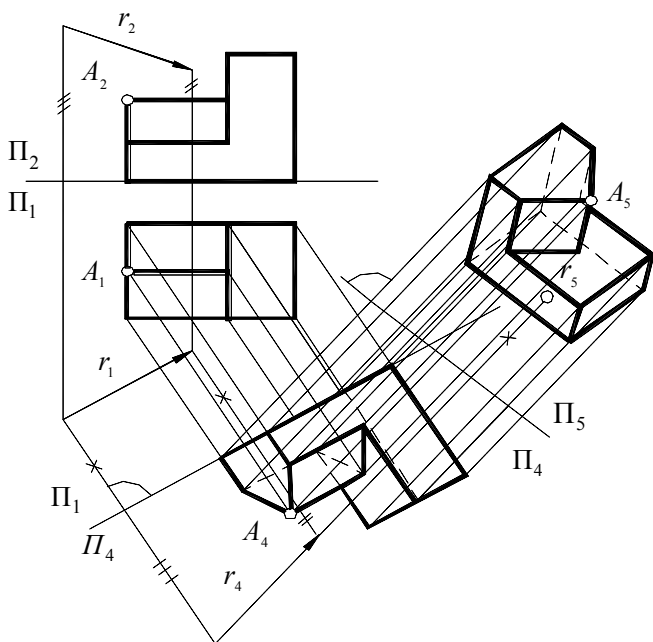


Рис. 2.26

Задача буде розв'язана тільки тоді, коли напрям проєціювання займе положення проєкціовальної прямої. Для цього потрібно зробити подвійне перетворення проєкцій. При застосуванні способу заміни площин проєкцій спочатку

вводять площину проєкцій P_4 , паралельну проєкції напрямку r_1 , а потім площину проєкцій P_5 , перпендикулярну до заданого напрямку. Додаткова проєкція моделі, яка побудована на площині проєкцій P_5 , є її наочним зображенням.

2.5. Завдання "Заміна площин проєкцій"

Завдання: За ортогональним кресленням моделі побудувати її нове зображення способом заміни площин проєкцій, першою замінити P_2 , розташувавши нову площину P_4 під кутом α до площини P_2 . Другу заміну (тобто заміну P_1) виконати розташувавши нову вісь під довільним кутом. Варіанти вихідних даних наведено наприкінці розділу (ст. 66–67).

Завдання виконується на аркуші формату А3. Воно є індивідуальним. Номер варіанта відповідає порядковому номеру прізвища студента в журналі групи.

Схема розташування моделі, яка підлягає перетворенню способом заміни площин проєкцій, показана на рис. 2.27. На цьому ж рисунку визначені положення точок K і L , з яких починаються вісі P_1/P_4 . Кут нахилу осі P_1/P_4 до горизонтальної лінії може приймати одне із значень 45 чи 60 градусів. Він залежить від того, парним чи непарним є номер варіанта завдання.

Характерною рисою цього завдання є дотримання високої графічної точності (перпендикулярності, паралельності, визначення довжин відрізків тощо). Недотримання цих вимог не дозволить отримати позитивний результат при виконанні завдання, зокрема зібрати отримані точки в цілісну модель, що відповідає заданій.

Рекомендується всі лінії побудов залишати на кресленні. Лінії видимого і невидимого контурів треба обвести згідно з вимогами ГОСТ 2.303–68. Необхідно позначити (бажано цифрами) найбільш характерні точки моделі, а також написати умови завдання та заповнити основний напис креслярським шрифтом.

Зразок остаточно оформленого завдання подано на рис. 2.28.

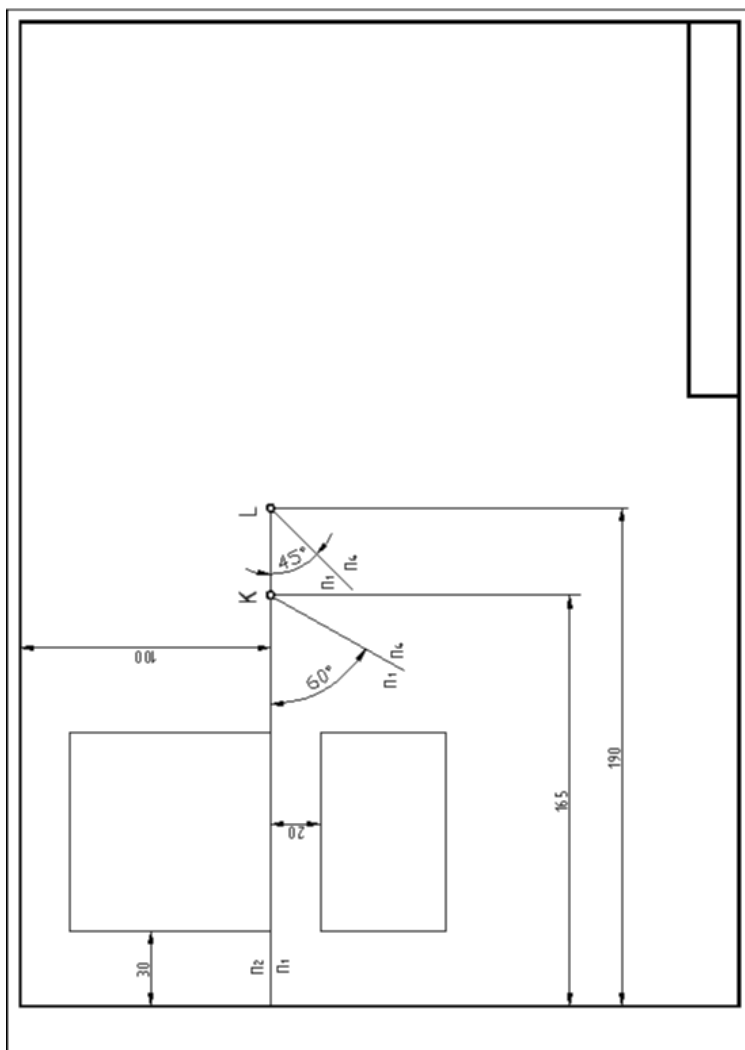
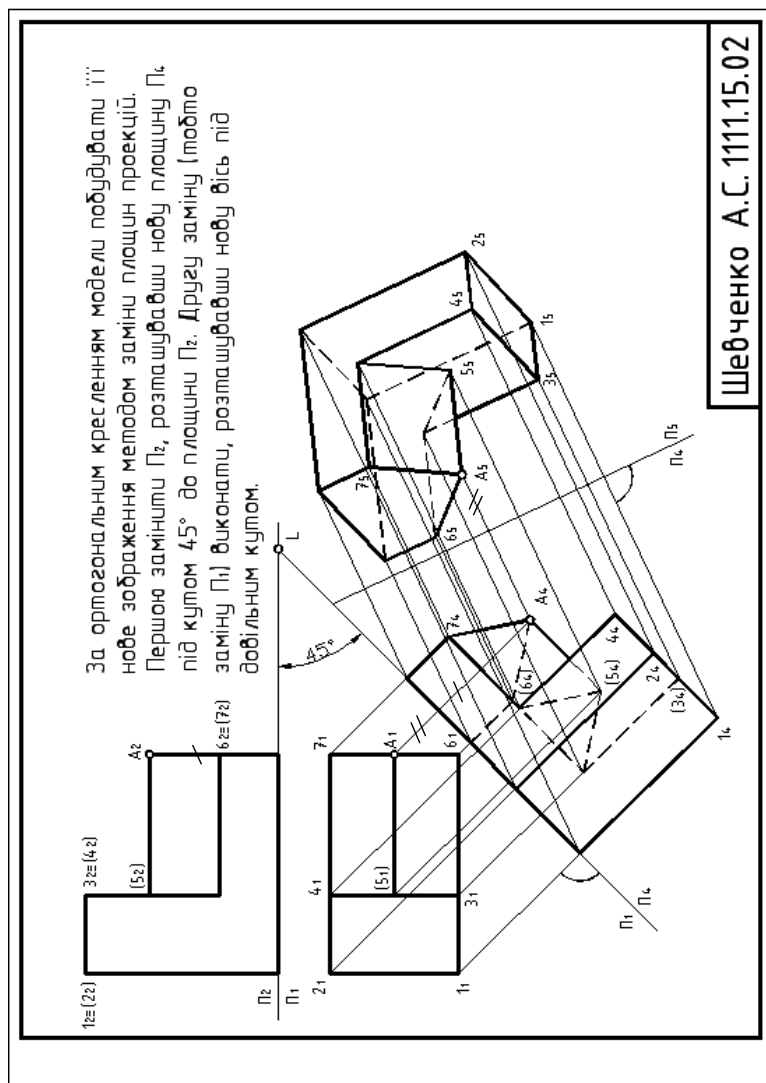


Рис. 2.27



Примітка. Текст завдання пишуть на вільному місці креслення шрифтом номер 7.

Порядок виконання завдання:

1. Побудувати згідно з варіантом завдання фронтальну і горизонтальну проекції моделі, розташувавши їх на форматі А3, виходячи з рекомендацій, поданих на рис. 2.26.

2. Позначити вісь Π_2/Π_1 , яку доцільно провести дотично до фронтальної проекції основи моделі.

3. Провести вісь проекцій Π_2/Π_1 під кутом α , який залежно від варіанта може дорівнювати 45 або 60 градусів.

4. Спроекціювати модель на площину проекцій Π_4 . На рис. 2.26 для прикладу розглянуто побудову точки, позначеною літерою A . Визначають відстань від проекції точки A_2 до осі Π_2/Π_1 (на рисунку цю відстань позначено однією рисою) і відкладають її від осі Π_1/Π_4 до проекції точки A_4 . Таким же чином проекціюють інші точки на площину Π_4 , визначають їх видимість методом конкуруючих точок.

Примітка. При визначенні видимості методом конкуруючих точок враховують, що проекціювання відбувається у напрямі з площини Π_1 на площину Π_4 . На підставі визначено, наприклад, що проекція точки B_4 є невидимою, оскільки вона на площині Π_4 закривається непрозорою моделлю.

5. З'єднати точки залежно від їх видимості суцільними або штриховими лініями.

6. Провести вісь Π_4/Π_5 таким чином, щоб вона не була ні паралельна, ні перпендикулярна до граней і ребер моделі. Це дасть можливість отримати її об'ємне зображення.

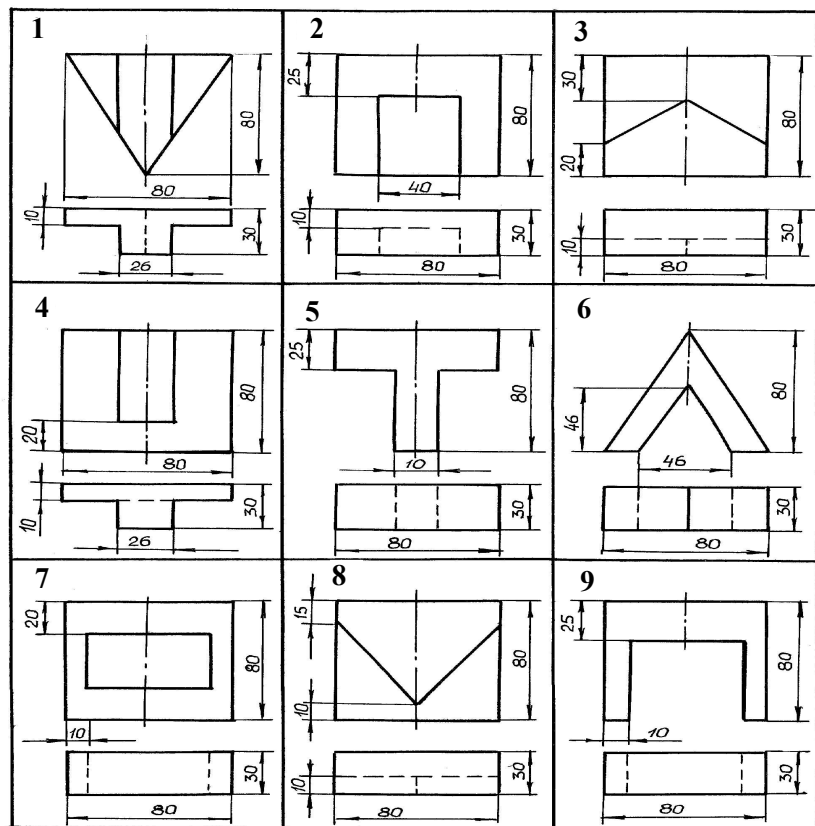
7. Спроекціювати модель на площину проекцій Π_5 . Розглянемо це на прикладі точки A . Вимірюють відстань від A_1 до осі Π_1/Π_4 (на рис. 2.26 ця відстань позначена двома рисками) і відкладають її від осі Π_4/Π_5 , щоб отримати проекцію точки A на площину Π_5 . За цією метою проекціюють на площину Π_5 інші точки, визначають їх видимість методом конку-

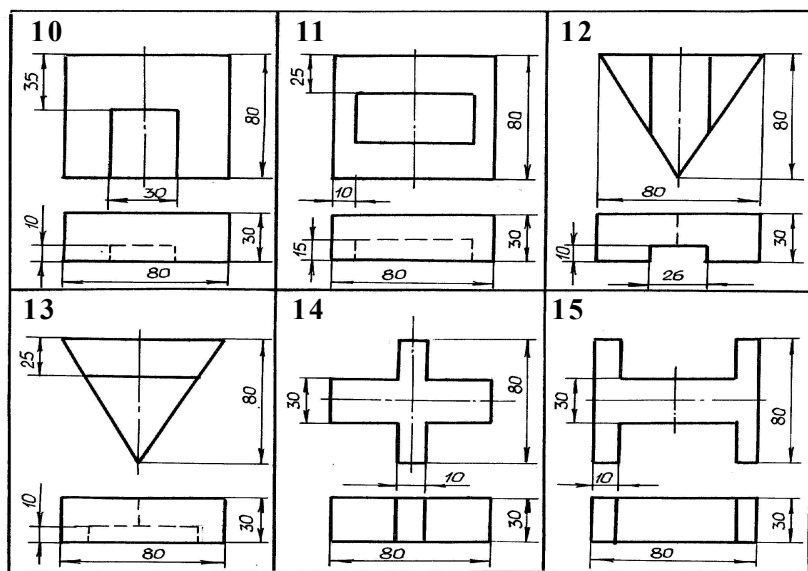
руючих точок. Напря́м проєкціювання орієнтований від площини Π_4 на площину Π_5 . За цих обставин невидима проєкція точки b_4 на площині проєкцій Π_5 набула видимості, тобто проєкція b_5 є видимою.

8. З'єднати на площині проєкцій Π_5 вершини моделі видимими або невидимими лініями залежно від видимості вершин.

9. Остаточнo оформити завдання.

Варіанти вихідних даних до домашнього завдання "Заміна площин проєкцій"





3. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ

3.1. Перетин поверхні з проекціовальною площиною

У загальному випадку лінія перетину кривої поверхні з площиною є плоскою кривою, яка може розпадатися й на прямі лінії у випадку перетину площини з лінійчастою поверхнею вздовж її твірної.

Основним способом побудови точок лінії перетину поверхні з площиною є спосіб допоміжних січних площин-посередників, який передбачає введення ряду допоміжних проекціовальних площин, що перетинають задану поверхню по деяких лініях, а січну площину – по прямим. Точки перетину цих ліній з прямими, які є спільними для даної поверхні й даної площини, є точками шуканої лінії перетину.

При виборі допоміжних проекціовальних площин-посередників слід керуватися простотою побудови ліній перетину цих площин із заданою поверхнею. Ці лінії мають бути графічно простими, тобто прямими або колами. Крім того, якщо цими лініями є кола, то поверхня повинна бути також розташована щодо площин проекцій таким чином, щоб ці кола не спотворювалися на одній із площин проекцій.

Визначення проекцій ліній перетину починають з побудови опорних точок – точок, розташованих на обрисових твірних поверхні (точки, які визначають границі видимості

проекцій кривої); точок, віддалених на екстремальні (максимальну й мінімальну) відстані від площин проекцій. Після цього визначають довільні (проміжні) точки лінії перетину.

Якщо проміжні точки визначаються за допомогою того ж самого прийому, то для знаходження опорних точок, як правило, доводиться користуватися різними способами.

Складність розв'язування задачі побудови лінії перетину поверхні з площиною полягає у розташуванні заданих геометричних образів у просторі. Задача спрощується, якщо один із геометричних образів (поверхня або площина) займає окреме положення, тобто є проєкціювальним. Розглянемо кілька прикладів побудови лінії перетину поверхні з проєкціювальною площиною.

На рис. 3.1 циліндрична поверхня загального вигляду перетинається фронтально-проєкціювальною площиною $T(T_2)$. Для побудови лінії перетину, згідно з розглянутою вище схемою, візьмемо кілька січних площин ($\Delta_2, \Lambda_2, \Sigma_2$), які для цієї лінійчастої поверхні збігаються з лініями каркасу. Принцип побудови лінії перетину зрозумілий і не потребує додаткових пояснень.

На рис. 3.2 задані конічна поверхня обертання Γ і фронтально-проєкціювальна площина Φ . Лінією їх взаємного перетину є плоска крива другого порядку – парабола t (січна площина паралельна одній із твірних конічної поверхні).

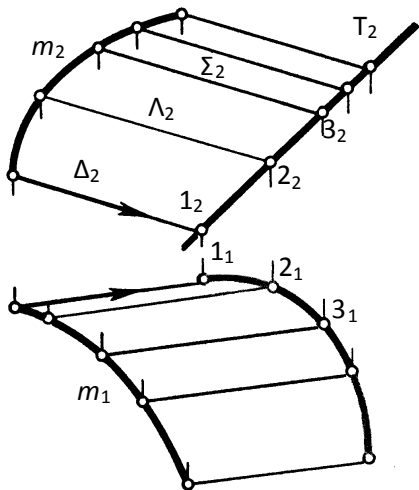


Рис. 3.1

Фронтальна проекція t_2 лінії перетину вже є на комплексному кресленні (вона збігається з виродженою проекцією Φ_2

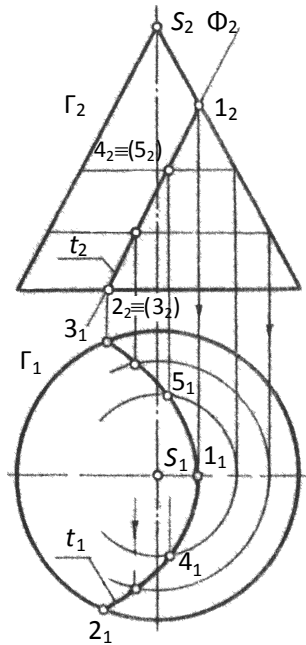


Рис. 3.2

площини Φ). Будують горизонтальну проекцію параболі. Точки 1 (вершина параболі), 2 і 3 є опорними. Їх положення визначаються без додаткових побудов. Проміжні точки 4, 5, ... лінії перетину t будують із застосуванням ліній каркасу. У цьому випадку доцільно користуватися сім'єю кіл-горизонталей, оскільки вони дають більш точне розв'язання задачі, ніж сім'я прямих-твірних.

На рис. 3.3 наведено приклад побудови лінії перетину сфери з горизонтально-проекціювальною площиною Ω . Коло, за яким площина Ω перетинає сферичну поверхню, проєкціюється на P_2 у вигляді еліпса. Точки 1 і 6 знаходяться на екваторі сфери, точки 2 і 3 – на її головному меридіані. Фронтальні проєкції цих то-

чок відділяють видиму і невидиму частини еліпса. Проміжні точки еліпса знаходять із застосуванням допоміжних січних площин Σ і Ψ . Точки 4 і 5 визначають велику вісь еліпса, довжина якої дорівнює діаметру кола – перерізу, тобто відрізок 4_2-5_2 дорівнює відріzkу 1_1-6_1 . Січна площина Σ проведена через точку перетину перпендикуляра, опущеного з O_1 на Ω_1 .

Розглянемо наступний приклад (рис. 3.4). Фронтально-проекціювальна площина Ω перетинає поверхню еліптичного циліндра T . Лінією перетину є замкнена крива s другого порядку – еліпс.

Фронтальна проекція c_2 шуканої лінії перетину вже є на кресленні – вона збігається з проекцією Ω_2 січної площини Ω . Необхідно побудувати горизонтальну проекцію c_1 лінії перетину c . Спочатку будують опорні точки. Такими є найвища й найнижча точки 1 і 2, які знаходяться на крайніх бічних твірних EF і GH . Ще дві опорні точки (3 і 4) – обрисові, і знаходяться вони на горизонтальних обрисових твірних. Визначаються вони так. Майбутній переріз-еліпс має торкатися обрисових твірних KL і MN . Тому позначають спочатку фронтальні проекції 3_2 і 4_2 цих опорних точок, а потім горизонтальні проекції 3_1 і 4_1 . Зазначимо, що опорні точки 3 і 4 є границями видимості лінії перетину в горизонтальній площині проєкцій.

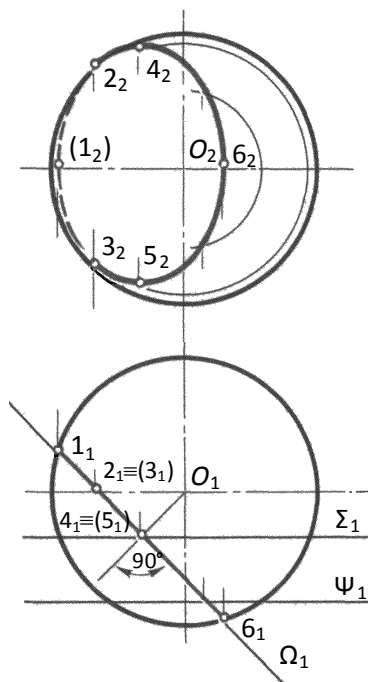


Рис. 3.3

Проміжні точки 5, 6, ... лінії перетину будують за допомогою ліній каркасу. У розглянутому випадку зручно користуватися сім'єю прямолінійних твірних, оскільки сім'я горизонтальних кіл істотно збільшує кількість ліній на кресленні.

З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією c_1 , отримують другу проекцію шуканої лінії перетину. Зазначимо, що зі збільшенням кількості проміжних точок графічна точність кривої перетину зростає.

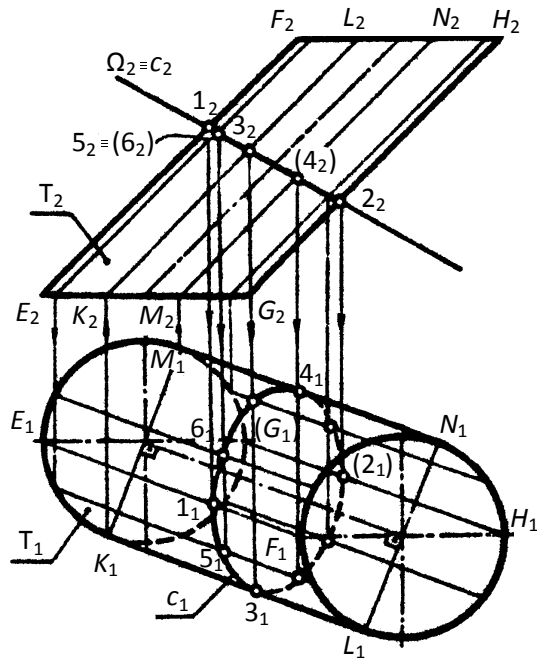


Рис. 3.4

3.2. Перетин поверхонь із площиною загального положення

Лінію перетину поверхні довільно розташованою площиною будують (як і у випадку проєкціювальних площини) по точках, застосовуючи допоміжні січні площини-посередники.

Розглянемо випадок, коли площина, що перетинає поверхню, займає загальне положення, а поверхня – окреме. Під окремим положенням поверхонь розуміється їх проєкціювальне положення, що можливе не для всіх поверхонь, розглянутих вище, а тільки для деяких, наприклад циліндричних.

На рис. 3.5 задані циліндрична проєкціювальна поверхня Σ і площина загального положення T ($ABCD$). Треба побудувати лінію їх перетину з урахуванням видимості.

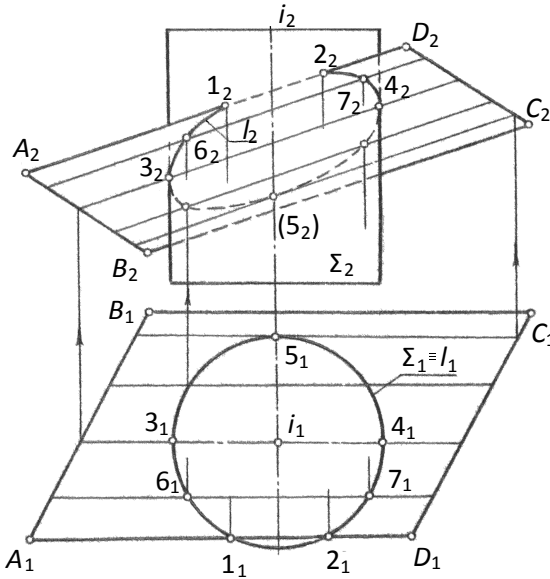


Рис. 3.5

З рис. 3.5 неважко встановити, що лінією перетину цих геометричних образів є плоска крива другого порядку – еліпс. Горизонтальна проєкція l_1 цієї кривої збігається з виродженою проєкцією Σ_1 циліндричної поверхні Σ . Залишається побудувати фронтальну проєкцію l_2 цієї лінії перетину, що виконується за допомогою спеціально обраних прямих площини T .

Опорними є точки 1 і 2 (точки перетину кромки AD відсіку з поверхнею циліндра), 3 і 4 (крайні бічні, що є границями видимості лінії перетину), а також точка 5. Точки 6, 7, ... є проміжними. Після побудови лінії перетину встановлюється її видимість.

Найбільш доцільним підходом до розв'язання задачі побудови лінії перетину поверхні з площиною загального положення є перетворення комплексного креслення до вигляду, коли або поверхня (якщо вона циліндрична), або площина стають проєкціювальними.

На рис. 3.6 сферична поверхня перетинається площиною загального положення Δ , заданою своїми головними лініями – фронталлю f' і горизонталлю h . Випадок, що розглядається, можна звести до подібного тому, який наведено на рис. 3.3. Зробимо заміну площин проєкцій, замість площини Π_2 введемо площину Π_4 , перпендикулярну до горизонталі h . У новій системі площин Π_4/Π_1 задана площина зайняла положення проєкціювальної. Розв'язання задачі починається з нової додаткової проєкції.

Найвища й найнижча точки лінії перерізу на додатковій проєкції позначені відповідно 1 ($1_1, 1_4$) і 2 ($2_1, 2_4$). Цифрами 3 ($3_1, 3_2$) і 4 ($4_1, 4_2$) позначені точки, розташовані на контурі горизонтальної проєкції сфери. Вони розрізняють видиму і невидиму частини горизонтальної проєкції лінії перетину.

Зазначимо, що точки 3 і 4 можна знайти й безпосередньо в системі площин Π_2/Π_1 за допомогою площини Δ , яка проходить через центр сфери паралельно Π_1 . Площина Δ перетинає площину Λ по горизонталі h' (h'_1, h'_2), а сферу – по екватору. Перетин горизонтальних проєкцій екватора й горизонталі визначає горизонтальні проєкції точок 3 і 4.

Побудову фронтальної проєкції перерізу можна виконати незалежно від уже побудованої проєкції перерізу на площині Π_1 . Для цього доцільно перейти від системи площин проєкцій Π_2/Π_1 до системи Π_5/Π_2 . Нова площина проєкцій Π_5 перпендикулярна до фронталі заданої площини.

Зазначимо, що цифрами 5 і 6 позначені точки, найбільш і найменш віддалені від площини Π_2 . Точки 7 і 8 розташовані

на головному меридіані сфери й визначають границі видимості фронтальної проекції лінії перерізу. Проміжні точки визначаються за допомогою додаткових паралелей сфери.

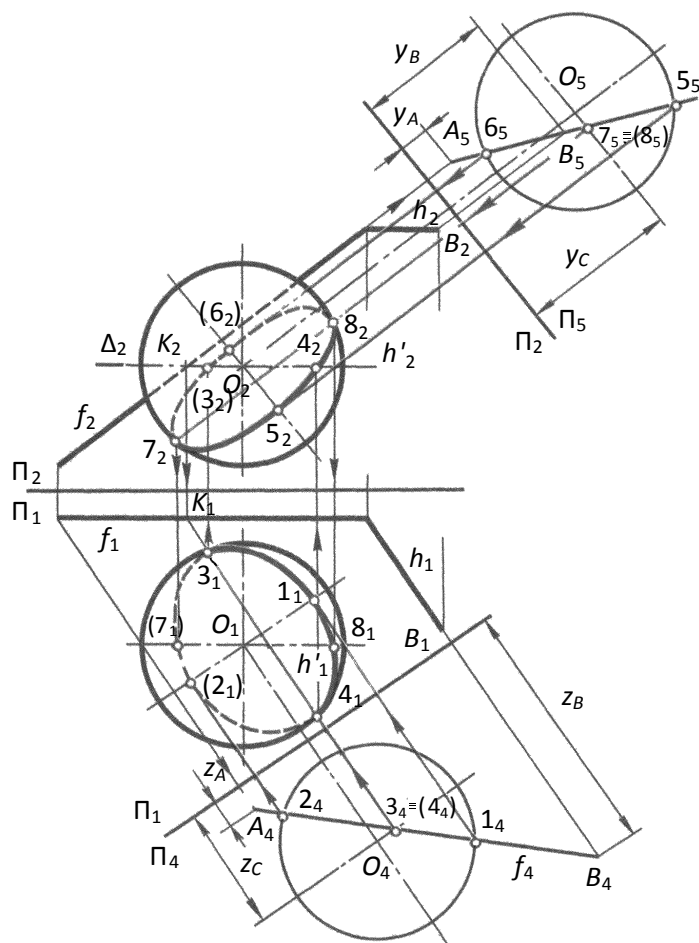


Рис. 3.6

3.3. Завдання "Перетин поверхні площиною"

Завдання. Побудувати три проекції частини геометричної поверхні після перерізу її площинами Σ (сігма) і Ω (омега).

Розміри фігур: конус – висота 130 мм, діаметр основи 130 мм; сфера – радіус 65 мм; циліндр – висота 120 мм, діаметр основи 120 мм.

Завдання виконується на аркуші формату А3 креслярського гатунку. Воно є індивідуальним. Вихідні дані для завдання наведено наприкінці розділу (ст. 80–84). Номер варіанта відповідає порядковому номеру прізвища студента в журналі групи.

У наведених графічних завданнях показано поверхню (конус, сфера або циліндр), яка перетнута двома проєкціювальними площинами Σ і Ω . Крім того, подані додаткові дані щодо розташування цих площин (кути нахилу, паралельність, відстані).

Перед виконанням завдання необхідно уважно ознайомитися із заданою фігурою, згадати, які криві лінії вона буде мати при перерізі її проєкціювальними площинами: коло, еліпс, параболу або гіперболу. Проекції всіх цих кривих будуються за окремими точками, які потім з'єднуються плавною кривою лінією з використанням лекала.

Рекомендується всі лінії побудов залишати на кресленні. Необхідно позначити (бажано цифрами) найбільш характерні точки лінії перетину для наочності та уникнення помилок при побудові їхніх проєкцій. Після виконання всіх побудов потрібно навести проєкції фігури, яка утворилась після відсічення. Лінії видимого і невидимого контурів треба обвести згідно з вимогами ГОСТ 2.303–68 (суцільною товстою або штриховою лініями). Наприкінці виконання завдання потрібно написати умови завдання та заповнити основний напис креслярським шрифтом № 7.

На рис. 3.7 показано послідовне виконання перетину поверхні конуса обертання фронтально-прекціювальними площинами Σ і Ω .

Порядок виконання завдання:

1. Накреслити тонкими лініями фронтальну проекцію заданої фігури згідно з графічним завданням.

2. Побудувати три проекції заданої фігури, зберігаючи проєкційний зв'язок між проєкціями та зазначивши осі симетрії (див. рис. 3.7,а).

3. Вибрати декілька точок на лінії перетину спочатку однією площиною (наприклад, Σ). Обов'язково вибираємо точки перетину площини з обрисами заданої поверхні (1_2), з основою поверхні (2_2 та 3_2) та декілька проміжних точок (наприклад, 4_2 та 5_2) (див. рис. 3.7,б).

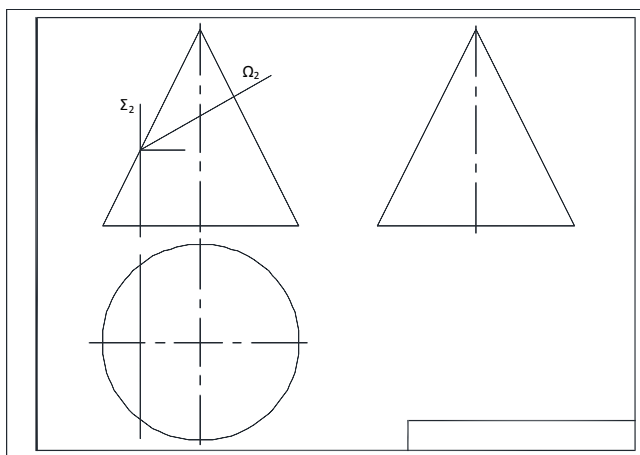
4. Визначити положення точок перетину площини Σ з обрисною твірною (точка 1) та основою конуса (точки 2 та 3) на горизонтальній та профільній проєкціях ($1_1, 1_3; 2_1, 2_3$ та $3_3, 3_1$).

5. Прив'язати вибрані проміжні точки 4 та 5 до поверхні конуса лініями каркасу заданої фігури (кола-паралелі або прямі), побудувати горизонтальні проєкції цих ліній (у даному прикладі це коло) та визначити на них положення проміжних точок (4_1 та 5_1). Побудувати профільні проєкції точок 4 та 5 (4_3 та 5_3).

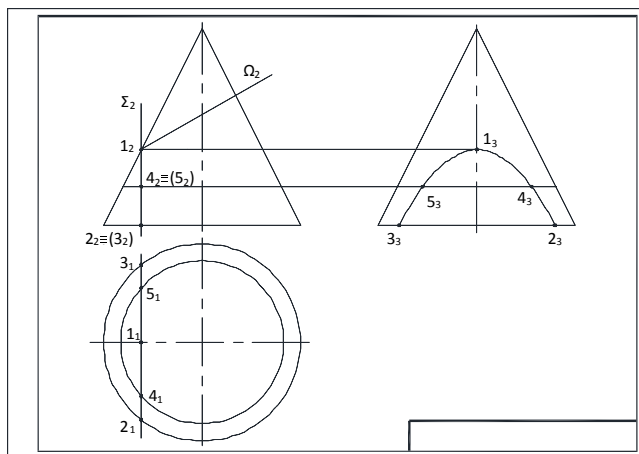
6. З'єднати на профільній проєкції побудовані однойменні проєкції точок плавною кривою лінією ($3_3, 5_3, 1_3, 4_1, 2_3$) (див. рис. 3.7,б).

7. Повторити дії пунктів 3–6 до другої заданої площини Ω (див. рис. 3.7,в).

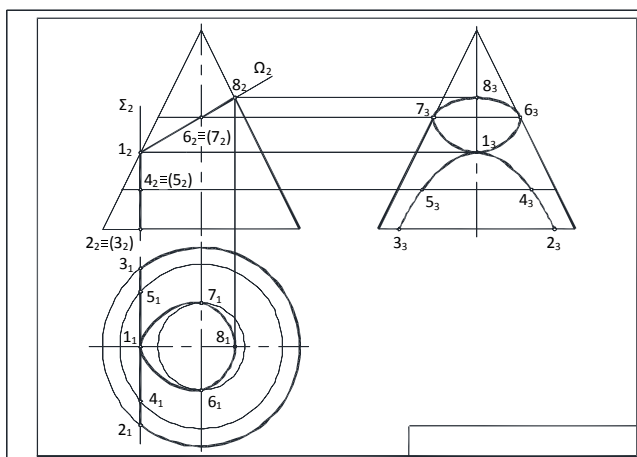
8. Остаточню завершити завдання (див. рис. 3.7,г). Для цього навести товстою суцільною лінією побудовані проєкції відсіченої фігури, написати умову завдання на вільному місці креслення; а також прізвище, ініціали та номер групи в рамці у нижньому правому куті рамки.



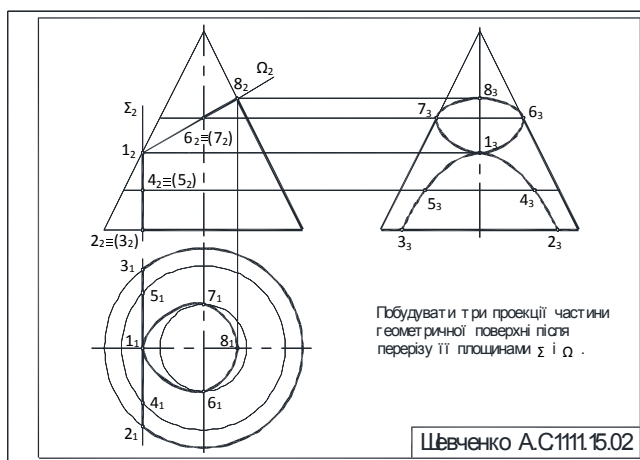
a



б



6

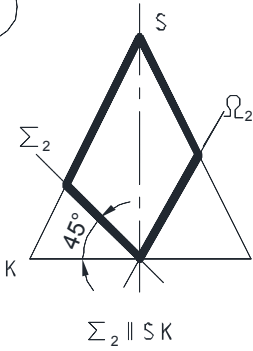


2

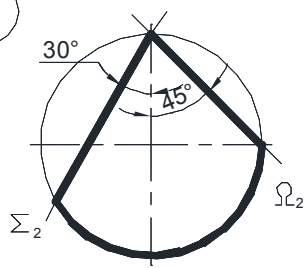
Рис. 3.7

Варіанти завдань "Перетин поверхні площиною"

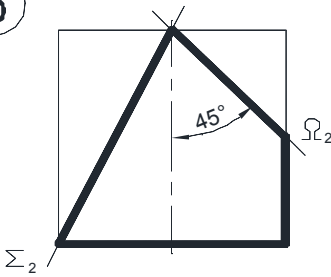
1



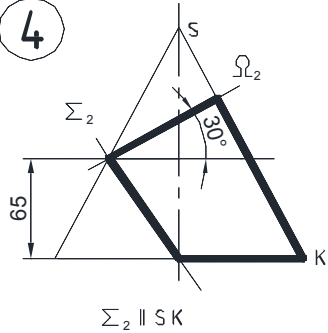
2



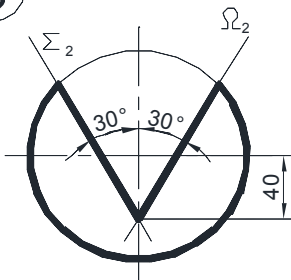
3



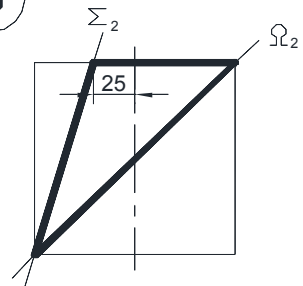
4



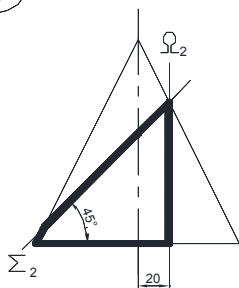
5



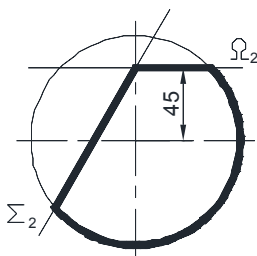
6



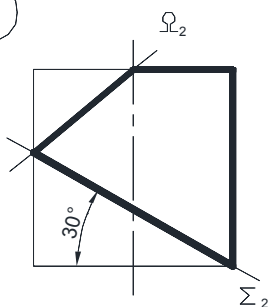
7



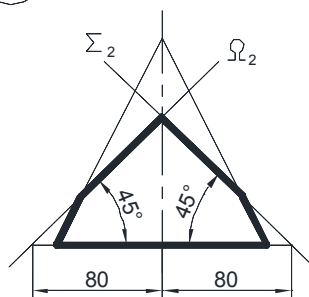
8



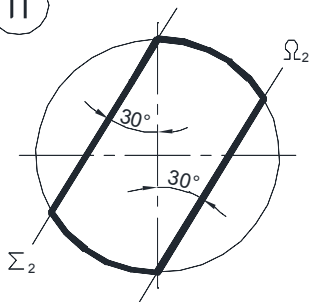
9



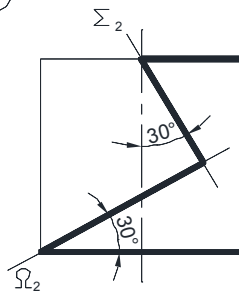
10



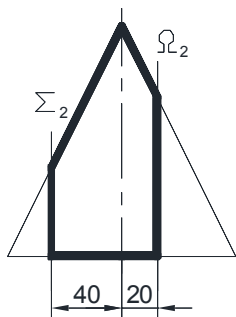
11



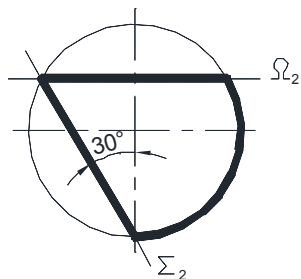
12



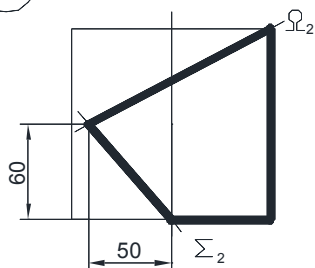
13



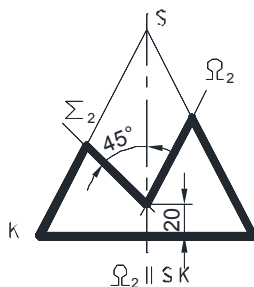
14



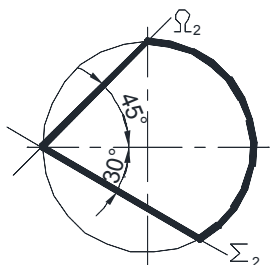
15



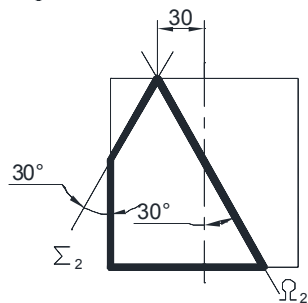
16



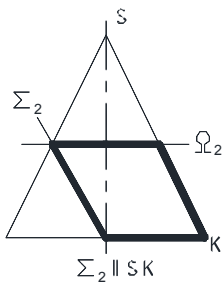
17



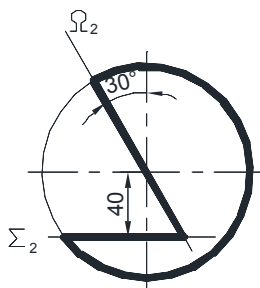
18



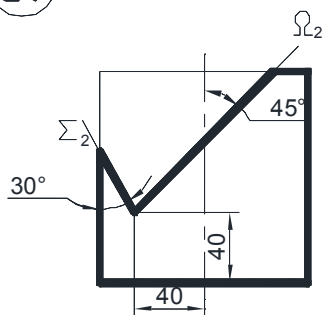
19



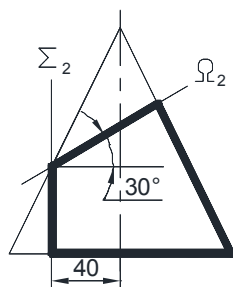
20



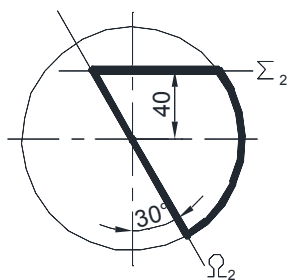
21



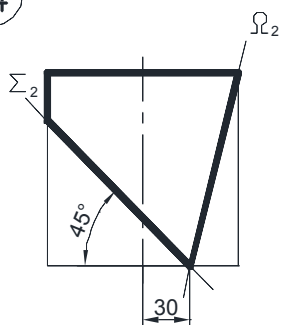
22



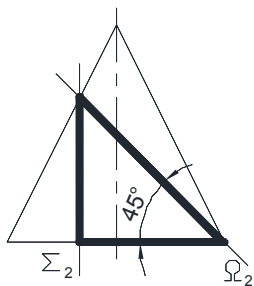
23



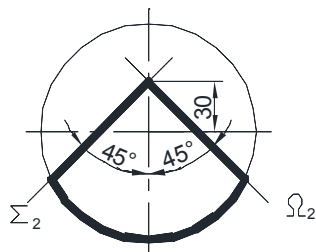
24



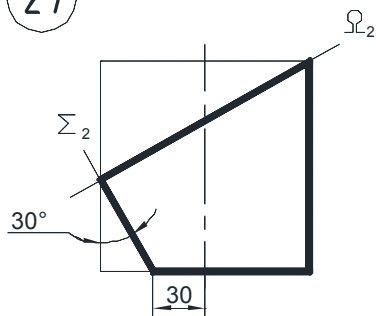
25



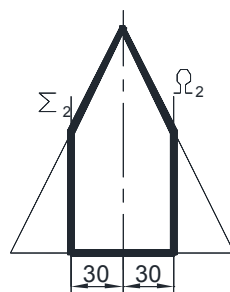
26



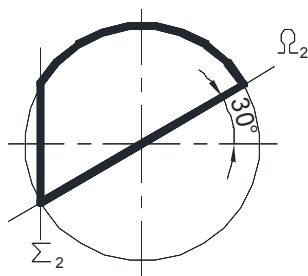
27



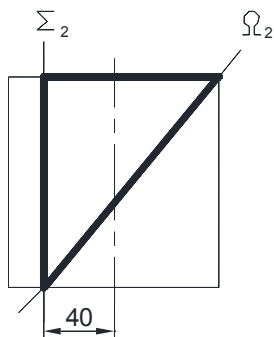
28



29



30



4. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ

4.1. Загальні підходи до побудови лінії перетину двох поверхонь

Лінією перетину двох поверхонь може бути пряма, плоска й просторова крива лінія або будь-яке сполучення із цих ліній. У загальному випадку криві поверхні перетинаються по просторовій кривій лінії. Лінія перетину кривої поверхні із гранною складається з ланок плоских кривих із точками зламу в місцях перетину ребер гранної поверхні із кривою.

Для побудови лінії перетину двох поверхонь треба перетнути їх низкою *допоміжних поверхонь-посередників*, побудувати лінії перетину заданих поверхонь із допоміжними, позначити спільні для них точки, з'єднати отримані точки послідовно між собою.

На рис. 4.1 показано, що поверхні Ω і Σ перетинаються деякою поверхнею Φ . Ця допоміжна поверхня перетинає поверхню Ω по лінії AB , а поверхню Σ – по лінії CD . Точка K , в якій перетинаються лінії AB і CD , є спільною для поверхонь Ω і Σ . Отже, вона належить лінії

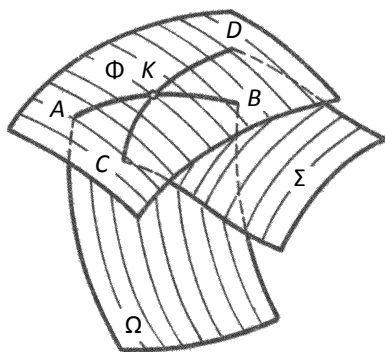


Рис. 4.1

їх перетину. Повторюючи подібний прийом кілька разів, отримують сукупність точок шуканої лінії перетину однієї поверхні з іншою.

За поверхні-посередники беруть проєкціювальні поверхні, площини та сфери, залежно від чого розрізняють наступні способи побудови точок лінії перетину двох поверхонь: спосіб допоміжних проєкціювальних поверхонь, спосіб допоміжних площин і спосіб допоміжних сфер. Застосування того або іншого способу залежить як від типу поверхонь, що перетинаються, так і від їх взаємного розташування.

Спосіб допоміжних проєкціювальних поверхонь застосовують у випадку, коли одна із поверхонь, що перетинаються, лінійчаста циліндрична або призматична. Спосіб допоміжних проєкціювальних площин-посередників застосовують тоді, коли обидві поверхні можна перетнути по графічно простих лініях деякою сукупністю проєкціювальних площин або площин рівня.

Спосіб допоміжних сфер-посередників застосовують при побудові лінії перетину поверхонь, які мають спільну площину симетрії, розташовану паралельно одній із площин проєкцій. При цьому кожна з поверхонь повинна містити сім'ю кіл, по яких її можуть перетинати допоміжні сфери, спільні для обох заданих поверхонь. Зокрема, спосіб допоміжних сфер-посередників можна застосовувати при побудові лінії перетину двох поверхонь обертання, осі яких перетинаються й паралельні одній із площин проєкцій.

У деяких випадках лінія перетину поверхонь другого порядку розпадається на плоскі криві другого порядку. Тоді, якщо заздалегідь відомий вид цих кривих, можна уникнути трудомісткої побудови лінії перетину по точках, а провести побудову цих кривих по їх основних елементах.

Зазначимо також, що коли одна з поверхонь, які перетинаються, є проєкціювальною, наприклад проєкціювальною

циліндричною поверхнею, то побудова лінії перетину спрощується, оскільки в цьому випадку відразу визначаються точки перетину проекціовальної поверхні із графічно простими лініями другої поверхні.

Звідси випливає, що при побудові лінії перетину якої-небудь поверхні із циліндричною буває корисним перетворити циліндричну поверхню в проекціовальну способом заміни площин проекцій.

Яким би способом не проводилася побудова лінії перетину поверхонь, при знаходженні точок цієї лінії необхідно дотримуватися певної послідовності. У лінії перетину двох поверхонь так само, як і в лінії перетину поверхні із площиною, розрізняють точки опорні й проміжні.

У першу чергу, визначають опорні точки, оскільки вони завжди дозволяють бачити, в яких межах розташовані проекції лінії перетину і де між ними є сенс визначати проміжні точки для більш точної побудови лінії перетину поверхонь.

Визначення видимості лінії перетину роблять окремо для кожної ділянки, обмеженої точками видимості, при цьому видимість усієї ділянки збігається з видимістю якої-небудь проміжної точки цієї ділянки.

При побудові лінії перетину необхідно мати на увазі, що її проекції завжди розташовуються в межах площі знаходження однойменних проекцій поверхонь, що перетинаються.

4.2. Перетин поверхонь, одна з яких проекціовальна

При побудові лінії перетину враховується властивість циліндричних і призматичних поверхонь проекціюватися, відповідно, в криву й ламану лінію, коли твірні циліндра або ребра призми перпендикулярні до площини проекцій. У цьому випадку проекції будь-якої лінії, що знаходиться на проекціовальній поверхні, збігаються з виродженою проекцією цієї поверхні.

На рис. 4.2 задані дві поверхні, які взаємно перетинаються: коса площина Δ і проекціовальний циліндр обертання Γ .

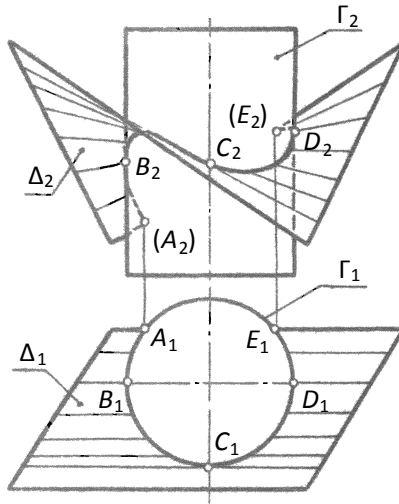


Рис. 4.2

Лінія їх перетину одночасно належить обом поверхням. Отже, можна стверджувати, що одна із проекцій цієї лінії перетину вже є на комплексному кресленні (вона збігається з виродженою проекцією проекціовальної поверхні).

Оскільки просторова крива $ABCDE$ одночасно належить поверхні косої площини Δ , задача зводиться до побудови її фронтальної проекції $A_2B_2C_2D_2E_2$, для чого застосовуються лінії каркасу цієї поверхні. Нагадаємо, що каркасом косої площини є сім'я прямих ліній, у даному випадку паралельних площині паралелізму Π_2 , тобто є сім'єю фронталей.

Спочатку будують опорні точки A, E, C . До опорних також належать точки B і D . Інші є проміжними. Отримані проекції точок з'єднують за допомогою лекала плавною кривою лінією й визначають її видимість.

На рис. 4.3 і 4.4 зображені поверхні сфери Θ і проекціовального циліндра Λ , які взаємно перетинаються. Оскільки одна з проекцій лінії їх перетину на кресленні присутня (вона збігається з виродженою проекцією циліндра – колом Λ_1), то шукану криву можна розглядати як таку, що належить поверхні сфери Θ . Відсутню проекцію цієї кривої (у даному випадку, фронтальну) будують за допомогою ліній каркасу сфери.

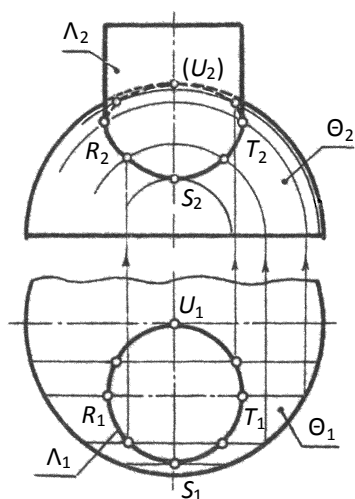


Рис. 4.3

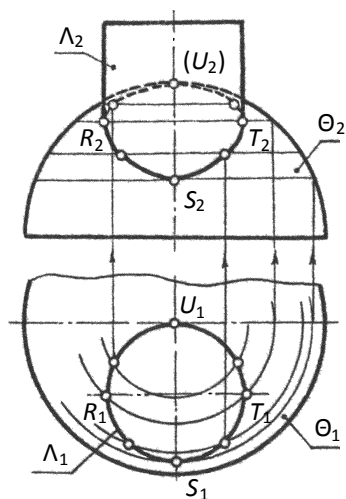


Рис. 4.4

На рис. 4.3 використано сім'ю кіл, паралельних фронтальній площині проєкцій Π_2 , а на рис. 4.4 – горизонтальній площині проєкцій Π_1 . Точки R, S, T, U лінії перетину є опорними: U – найвища (вона знаходиться на головному меридіані), S – найнижча, R і T – крайні бічні (вони знаходяться на бічних твірних циліндра й одночасно є межею видимості кривої). Інші точки – проміжні.

Розглянемо ще один приклад побудови лінії перетину півсфери Λ з циліндричною проєкціювальною поверхнею Θ , вісь якої перпендикулярна до площини проєкцій Π_2 (рис. 4.5). Оскільки поверхня циліндра є проєкціювальною, то фронтальна проєкція лінії перетину q_2 збігається з виродженою проєкцією Θ_2 циліндра. Побудуємо горизонтальну проєкцію q_1 лінії перетину як лінію, що належить поверхні сфери Λ по окремих точках.

Опорними точками лінії перетину q є точки 1 і 2, які знаходяться на головному меридіані сфери; точки 3 і 4, які знаходяться

на екваторі сфери; точки 5–8, які розташовані на крайніх бічних твірних циліндра. Ці точки знаходяться на межі видимості лінії перетину.

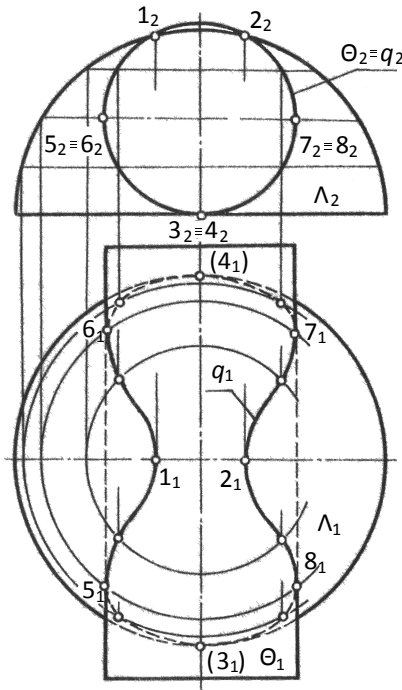


Рис. 4.5

Точки 5–8 та інші проміжні точки лінії перетину будують за допомогою ліній каркасу сфери – сім'ї кіл-паралелей. З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією, отримують проекцію q_1 шуканої лінії перетину q поверхонь сфери й циліндра.

Оскільки лінія перетину має форму єдиного замкнутого контуру, тобто не розпадається на окремі ділянки, то такий перетин називається *неповним прониканням, або врізанням*.

На рис. 4.6 поверхні, що розглядаються, перетинаються

таким чином, що лінія їх взаємного перетину розпадається на два окремих контури. Такий взаємоперетин поверхонь називається *повним прониканням*.

Якщо тепер із комплексних креслень, показаних на рис. 4.5 і 4.6, вилучити поверхню циліндра обертання, то поверхню сфери, що залишилася, називають або відсіченою поверхнею (рис. 4.7,*а*), або поверхнею з крізним отвором (див. рис. 4.7,*б*).

Коли циліндрична поверхня обертання займає положення, не перпендикулярне до якоїсь із площин проєкцій, тобто поверхня не є проєкціовальною, виникає необхідність у пе-

ретворенні комплексного креслення. На рис. 4.8 зображені відсіки поверхонь тора Θ й циліндра Σ , які взаємно перетинаються. Для побудови лінії їх взаємного перетину креслення перетворюють таким чином, щоб циліндрична поверхня зайняла проєкціовальне положення.

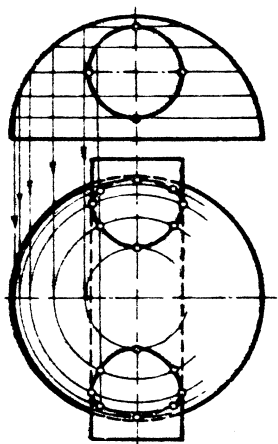


Рис. 4.6

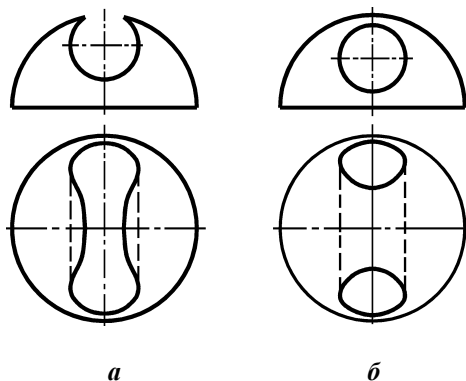


Рис. 4.7

Обидва відсіки проєкціюють на нову площину проєкцій Π_4 , введену замість площини Π_2 , перпендикулярно до твірних циліндра. Отримують нове комплексне креслення, з якого й починають розв'язування задачі побудови лінії перетину. Точки A, B, C, D є опорними, інші – проміжними. Використовуючи каркас поверхні тора (доцільно брати сім'ю кіл-паралелей поверхні тора), будують горизонтальну проєкцію $A_1B_1C_1D_1$ шуканої лінії взаємного перетину відсіків тора й циліндра обертання.

Фронтальну проєкцію цієї кривої можна побудувати або за допомогою тих же ліній каркасу, або шляхом перенесення висот кожної точки з нової проєкції (висота l для точок B і D на рис. 4.8). З'єднавши побудовані проєкції точок плавною

кривою лінією й визначивши її видимість, отримують шукану лінію перетину заданих відсіків поверхонь.

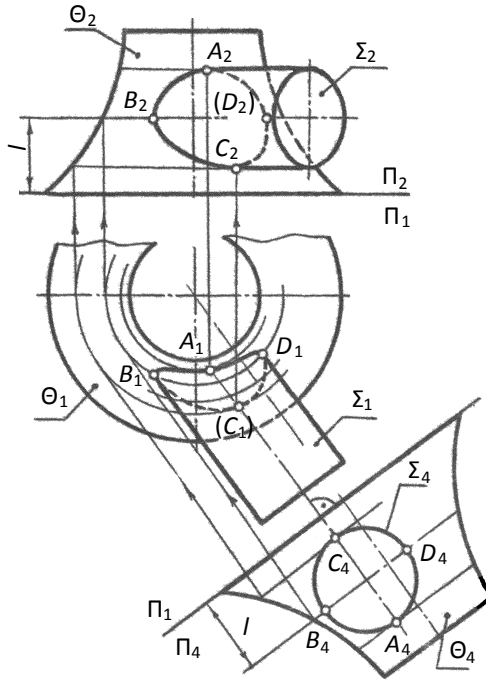


Рис. 4.8

Слід зазначити, що при побудові лінії перетину поверхню еліптичного циліндра перетворювати в поверхню проєкціювальну не рекомендується, оскільки виродженою проєкцією такої поверхні є складна графічна крива – еліпс, для побудови якого треба визначити певну кількість точок.

4.3. Спосіб допоміжних січних площин-посередників

У тих випадках, коли обидві поверхні, що взаємно перетинаються, не є проєкціювальними і не можуть бути такими

(сфера, конус, тор і т. п.), для побудови лінії їх перетину користуються допоміжними січними площинами-посередниками. Спосіб базується на застосуванні таких допоміжних площин-посередників, які перетинають обидві поверхні по простих графічних лініях – прямих або колах. Часто площини-посередники вибираються у вигляді площин рівня.

На рис. 4.9 задані конічна поверхня обертання Ω й сфера Σ . Необхідно побудувати лінію їх взаємного перетину з урахуванням видимості.

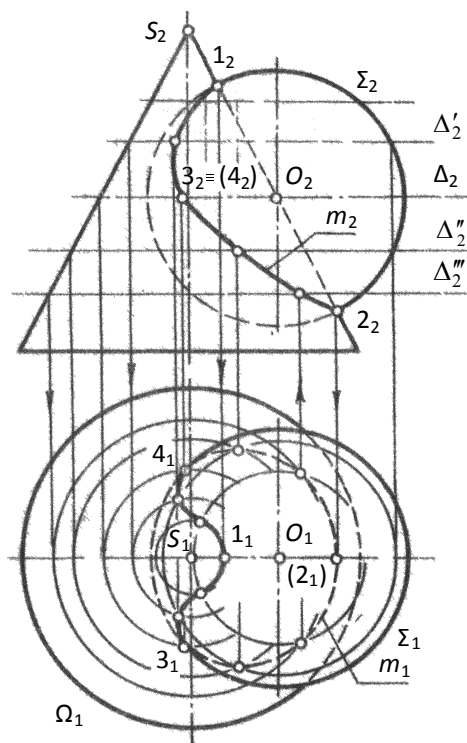


Рис. 4.9

Опорними точками кривої перетину m є найвища точка 1, найнижча точка 2, а також точки 3 і 4, які знаходяться на екваторі сфери Σ . Ці точки відділяють видиму й невидиму ділянки лінії перетину.

Точки 3 і 4, а також усі проміжні точки лінії перетину m будуються за допомогою площин-посередників. Найбільш зручними при розв'язуванні цієї задачі є горизонтальні площини-посередники. Вони перетинають обидві поверхні по колах-паралелях.

Площина-посередник Δ , яка проведена через центр сфери O , перетинає її по екватору, а поверхню конуса – по колу. При взаємному перетині ці кола визначають дві точки 3 і 4, які належать лінії перетину поверхонь.

Аналогічно визначаються всі проміжні точки (за допомогою площин-посередників Δ' , Δ'' , Δ''' , ...). З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією m , отримують шукану лінію перетину заданих конічної і сферичної поверхонь. Після цього визначається видимість кривої лінії m .

На рис. 4.10 показано побудову лінії перетину поверхонь конуса обертання Λ і еліптичного циліндра Ψ .

Вище вказувалося, що перетворювати еліптичний циліндр у проєкціювальний немає сенсу, оскільки таке перетворення тільки ускладнює розв'язування задачі. Тому для побудови лінії перетину цих поверхонь доцільно застосувати спосіб допоміжних січних площин-посередників. Більш зручними у цьому випадку є горизонтальні площини рівня. Так, площина Φ перетинає поверхню конуса обертання по колу m , а еліптичний циліндр – по твірних t і k . Ці лінії знаходяться в одній і тій же площині Φ і перетинаються між собою в точках 1 і 2, які належать лінії перетину. Це проміжні точки. Опорні точки кривої лінії перетину будують за допомогою площин рівня Ω , Σ , T . Дотичні до еліптичного циліндра площини рівня

Ω і T визначають найвищу й найнижчу точки A і C лінії перетину. Допоміжна січна площина Σ проведена через вісь еліптичного циліндра. Вона дає можливість знайти опорні точки B і D . Побудувавши достатню кількість проміжних точок і з'єднавши їх плавною кривою лінією з урахуванням видимості, отримують шукану лінію перетину заданих відсіків поверхонь.

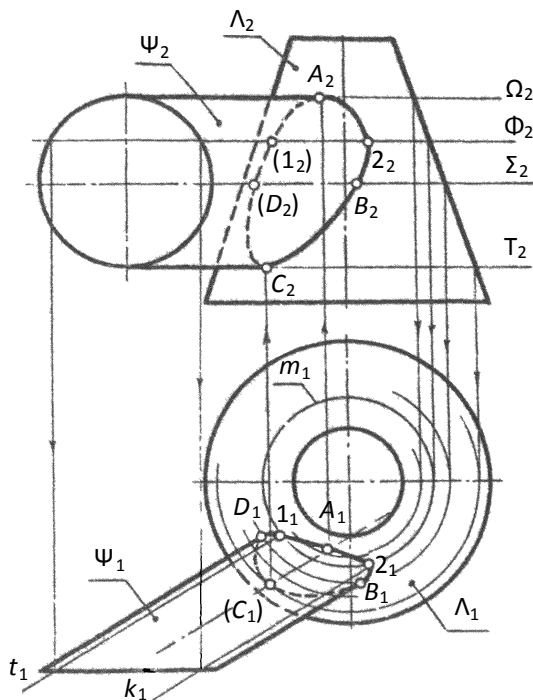


Рис. 4.10

Розглянемо ще один приклад побудови лінії перетину поверхонь із застосуванням способу допоміжних січних площин-посередників. На рис. 4.11 подані дві поверхні обертання – сфера Δ і конус Γ . Для побудови їх лінії перетину як по-

середники візьмемо горизонтальні площини рівня, які перетинають обидві поверхні по колах. Так, площина P , перетинаючи сферу й конус відповідно по колах l і n , визначає точки 1 і 2 , які належать шуканій лінії перетину.

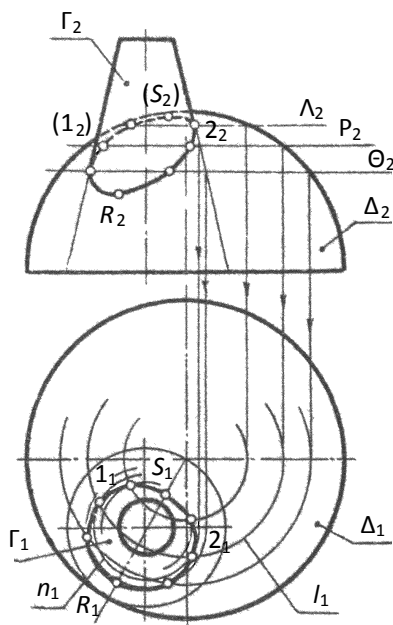


Рис. 4.11

Для визначення найвищої і найнижчої опорних точок лінії перетину, між якими будуть проводитися всі проміжні площини-посередники, виконують наступні побудови. Через вісь конуса й центр сфери проводять спільну площину симетрії Ω (Ω_1) (рис. 4.12), яка перетне конус по твірних прямих, а сферу – по колу-меридіану. Ці лінії при взаємному перетині визначають шукані опорні точки – найвищу S і найнижчу R . Для їх побудови треба площину Ω повернути навколо центра сфери до положення фронтальної площини рівня ($\overline{\Omega_1}$). У но-

вому положенні твірні конуса в перетині з головним меридіаном сфери дають найвищу $\bar{S}$ і найнижчу $\bar{R}$ точки. Зворотним поворотом площини Ω в її вихідне положення визначають опорні точки R і S у заданому положенні відсіків поверхонь.

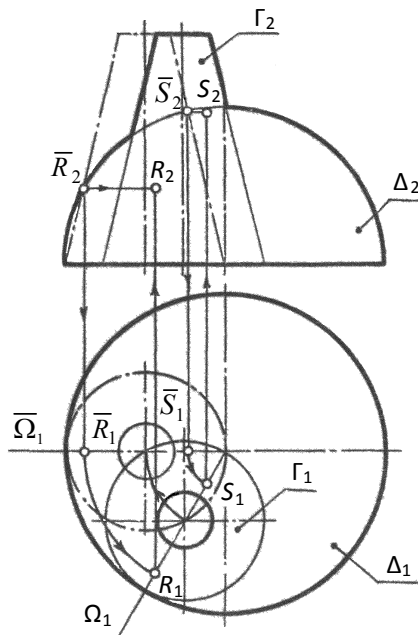


Рис. 4.12

4.4. Спосіб допоміжних січних сфер-посередників

При побудові лінії перетину деяких поверхонь, а також при особливому їх взаємному розташуванні не завжди раціонально застосовувати допоміжні січні площини-посередники. У певних випадках застосовують спосіб допоміжних січних сфер-посередників.

Так, для побудови лінії перетину двох довільних поверхонь обертання доцільно скористатися властивістю, притаманною

цим поверхням, яка полягає в тому, що дві будь-які співвісні поверхні обертання перетинаються по колах, які проходять через точки перетину меридіанів поверхонь (рис. 4.13).

В окремому випадку, коли одна з поверхонь обертання – сфера, наведена вище пропозиція може бути сформульована інакше: якщо центр січної сфери знаходиться на осі поверхні обертання, то сфера перетне дану поверхню по колах, кількість яких дорівнює кількості точок перетину головних меридіанів поверхонь (рис. 4.14).

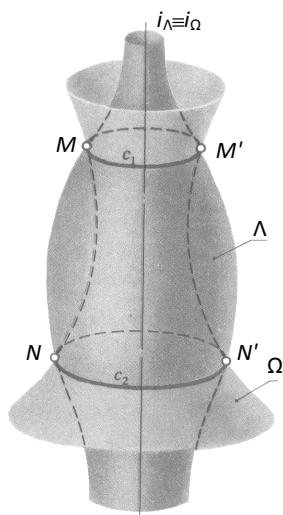


Рис. 4.13

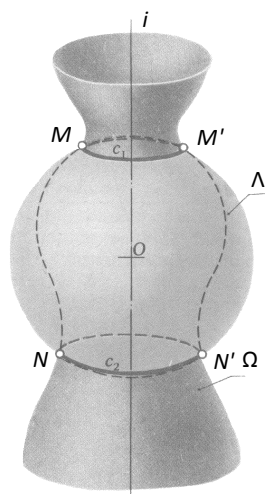


Рис. 4.14

Поверхня сфери може перетинатися по колу не тільки зі співвісною поверхнею обертання, але й з будь-якою іншою поверхнею, яка має сім'ю кіл, наприклад із циліндричною або конічною поверхнями обертання та ін.

В основі способу сфер-посередників використовується властивість сфери, центр якої знаходиться на осі поверхні обертання, перетинати цю поверхню по колах-паралелях.

На рис. 4.15, де показані тільки фронтальні проєкції поверхонь, центр O сфери знаходиться на осі i конічної та на осі i' циліндричної поверхонь обертання.

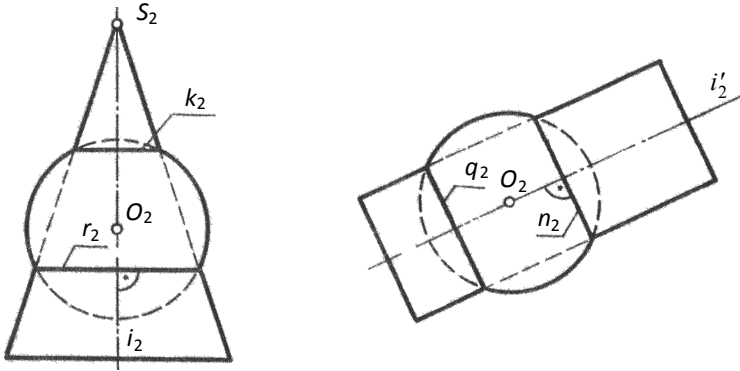


Рис. 4.15

Оскільки вісь обертання i конічної поверхні збігається з віссю обертання сфери, то вони мають і спільні кола-паралелі. Такими є кола k і r . Ці кола проєктуються у відрізки прямих k_2 і r_2 , перпендикулярних до осі i . По довжині вони дорівнюють діаметрам цих кіл.

Також по колах q і n сфера перетинає циліндричну поверхню обертання. Проекції цих кіл вироджуються у відрізки прямих q_2 і n_2 , перпендикулярних до осі i' .

Ця властивість сфер використовується при побудові лінії перетину двох поверхонь обертання з осями, що перетинаються. Точка перетину осевих ліній є центром концентричних сфер-посередників.

На рис. 4.16 задані поверхні обертання: конічна T і циліндрична Ψ . Їх вісі обертання i та i' паралельні площині проєкцій Π_2 і перетинаються в точці O . Необхідно побудувати лінію перетину цих поверхонь.

Специфіка способу сфер-посередників дозволяє розв'язувати цю задачу в одній площині проєкцій. Перш за все визначають

опорні точки лінії перетину. Такими будуть точки 1, 2, 3 і 4, в яких перетинаються проекції контурів поверхонь T і Ψ . Потім установлюють радіуси мінімальної й максимальної сфер-посередників (усі проміжні сфери знаходяться усередині цього сферичного кільця).

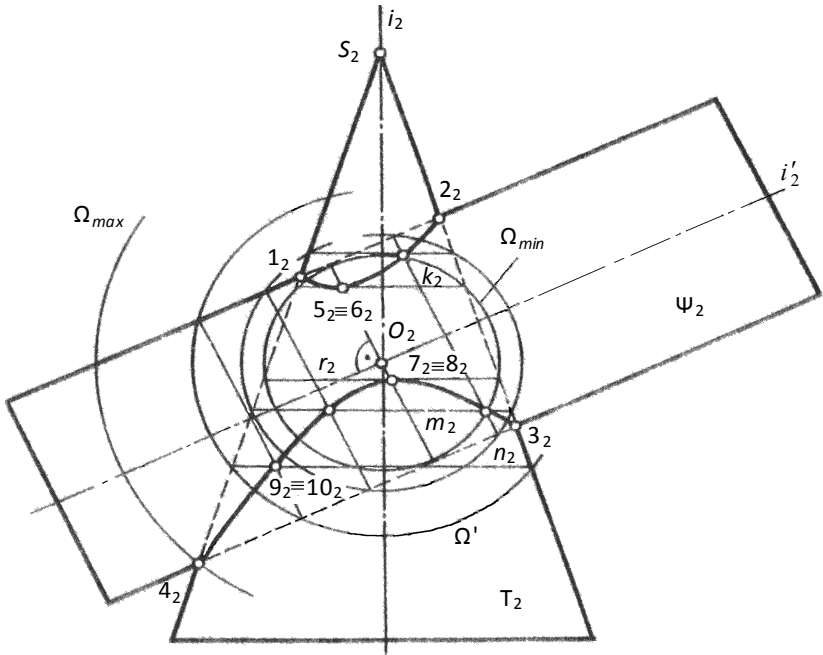


Рис. 4.16

Сферою мінімального радіуса є та, яка торкається однієї поверхні, а іншу перетинає. У нашому випадку це сфера Ω_{min} . Вона торкається поверхні циліндра Ψ по колу m , а поверхню конуса обертання T перетинає по колах k і r .

Оскільки ці три кола m , k і r належать одній і тій же сферичній поверхні Ω_{min} , то вони перетинаються між собою в чотирьох точках 5–8. Ці точки також відносяться до опорних.

Сферою максимального радіуса є сфера Ω_{max} , яка проходить через найбільш віддалену опорну точку – точку 4.

Для побудови проміжних точок лінії перетину проводять кілька січних сфер-посередників між сферами $\Omega_{\min}$ і $\Omega_{\max}$. Так, проміжна сфера-посередник Ω' визначає точки 9 і 10.

З'єднавши побудовані точки плавною кривою лінією, отримують лінію перетину заданих поверхонь T і Ψ . Лінія перетину є просторовою кривою четвертого порядку. Вона складається з двох окремих замкнених контурів. Такий перетин називається повним.

За необхідності можна побудувати й горизонтальну проекцію поверхонь, що взаємно перетинаються. Горизонтальну проекцію лінії перетину доцільно будувати із застосуванням ліній безперервного каркасу конічної поверхні T , тобто кіл-паралелей (у горизонтальній проекції вони зображуються в натуральну величину).

Розв'язування ще однієї подібної задачі показано на рис. 4.17, де побудовано лінію перетину циліндричної поверхні Σ з поверхнею обертання Θ довільного вигляду. Вісі поверхонь паралельні площині проекцій Π_2 і перетинаються в точці O . Хід розв'язування задачі такий же, як і на рис. 4.16.

Розглянемо розв'язування задачі побудови лінії взаємного перетину поверхні тора Γ і сфери Φ , осі яких визначають площину, паралельну фронтальній площині проекцій, тобто фронтальну площину рівня (рис. 4.18).

Оскільки віссю сферичної поверхні може бути будь-яка пряма, що проходить через її центр, то за центр допоміжних сфер-посередників можна прийняти довільну точку на осі поверхні обертання Γ . Тому графічне розв'язання задачі по визначенню лінії перетину заданих поверхонь виконується так.

Приймають точку O_2 за центр кіл – фронтальних проекцій допоміжних січних сфер. Проводять фронтальну проекцію допоміжної сфери-посередника Λ . Визначають відрізки $1_2 2_2$ і $3_2 4_2$ – фронтальні проекції кіл, по яких сфера-посередник Λ перетинає задані поверхні Γ і Φ . Точки 5_2 і 6_2 перетину проекцій кіл (відрізків $1_2 2_2$ і $3_2 4_2$) належать шуканій лінії перетину поверхонь.

Фронтальні проекції опорних точок A_2 і B_2 визначаються перетином фронтальних проекцій головних меридіанів поверхонь Γ і Φ . Горизонтальні проекції лінії перетину будують за допомогою паралелей поверхні Φ .

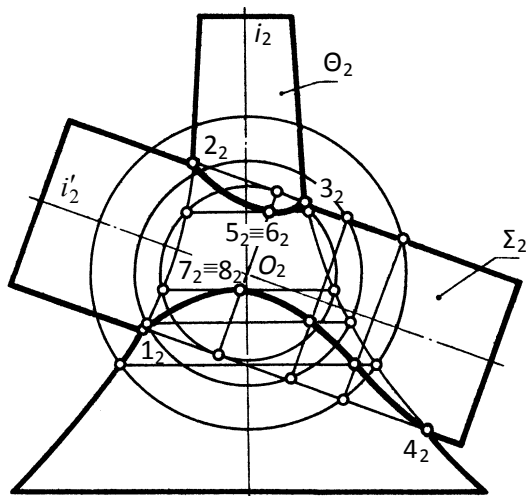


Рис. 4.17

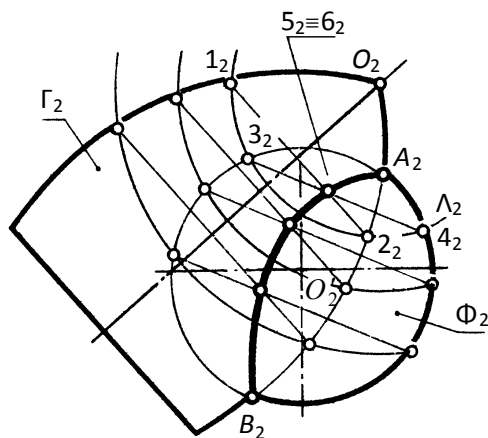


Рис. 4.18

Якщо вісі двох поверхонь обертання, що перетинаються, знаходяться не в площині рівня, а в площині проєкціовальній (рис. 4.19), то для побудови лінії перетину способом сфер-посередників комплексне креслення необхідно перетворити. Нову площину проєкцій Π_4 доцільно провести паралельно осі і заданої конічної поверхні. Поставлену задачу розв'язують на новому комплексному кресленні методом сфер-посередників. Сфери-посередники проводять із точки O_4 перетину осьових ліній i та i' . Розв'язування задачі завершують побудовою фронтальної проєкції лінії перетину заданих поверхонь, для чого через проєкції точок лінії перетину на площині проєкцій Π_1 проводять вертикальні лінії сполучення, на яких відкладають відстані від проєкцій цих точок на площині проєкцій Π_4 до осьової лінії, що розмежує площини проєкцій Π_1 і Π_4 .

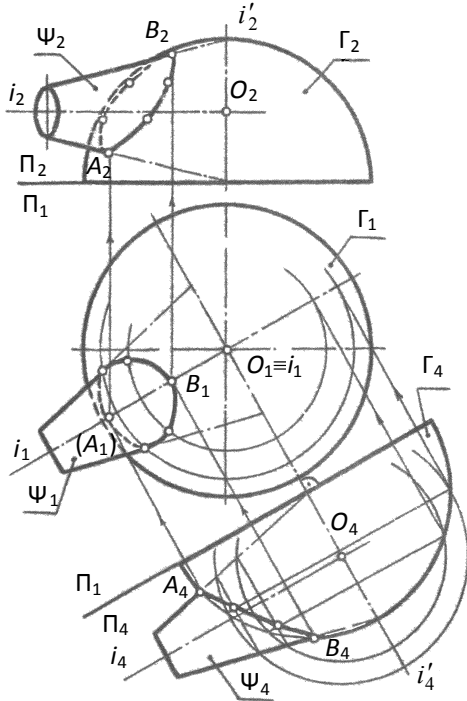


Рис. 4.19

4.5. Окремий випадок взаємного перетину поверхонь обертання другого порядку

Відомо, що порядок кривої лінії перетину двох поверхонь дорівнює добутку порядків поверхонь, тому дві поверхні

другого порядку завжди перетинаються по кривій четвертого порядку. За певних умов ця крива розпадається на кілька ліній більш низького порядку. При цьому сума порядків ліній, на які розпадається алгебраїчна крива, дорівнює порядку самої лінії. Зокрема, крива четвертого порядку може розпадатися на дві криві другого порядку.

Умови, за яких крива четвертого порядку розпадається на дві криві другого порядку, можуть бути сформульовані теоремою Гаспара Монжа: *"Якщо дві поверхні другого порядку описані навколо третьої поверхні другого порядку або вписані в неї, то лінія їх перетину розпадається на дві криві другого порядку, площини яких проходять через прями, що з'єднують точки перетину ліній"*.

На рис. 4.20 конічна і циліндрична поверхні обертання описані навколо однієї і тієї ж сфери Δ . Необхідно побудувати лінію їх перетину.

Конічна поверхня торкається сфери Δ по колу l , а циліндрична – по колу m . Обидва кола знаходяться на одній і тій же сфері та перетинаються між собою в точках 5 і 6. Ці точки в нарисній геометрії називаються точками подвійного дотику поверхонь.

Отже, точки 1–6 належать до опорних точок. Для побудови проміжних точок шуканої лінії перетину проводять декілька сфер-посередників із центра O (на кресленні ці сфери не показані).

У результаті проекції всіх побудованих точок розташуються на двох прямих: 1–3 і 2–4. Це означає, що просторова крива лінія перетину четвертого порядку розпалася на дві плоскі криві другого порядку, тобто на два еліпси, один з яких належить площині Λ , а другий – площині Θ .

На рис. 4.21 відсіки поверхонь конуса Σ і циліндра обертання Θ описані навколо сфери Δ , яка торкається поверхні конуса по колу t , а поверхні циліндра – по колу p . Згідно із

записаною вище теоремою Монжа просторова крива лінія перетину поверхонь також розпадається на дві плоскі криві – еліпси. Побудова проєкцій цих кривих виконується за методикою, описаною вище. При взаємному перетині проєкцій кіл t і p визначаються точки 3 і 4, які належать шуканій лінії перетину. На рисунку показані проєкції поверхонь і ліній перетину на горизонтальну площину проєкцій. З його розгляду випливає, що лінії перетину проєкціюються на площину Π_1 у вигляді двох еліпсів, окремі ділянки яких є видимими, а решта – невидимими.

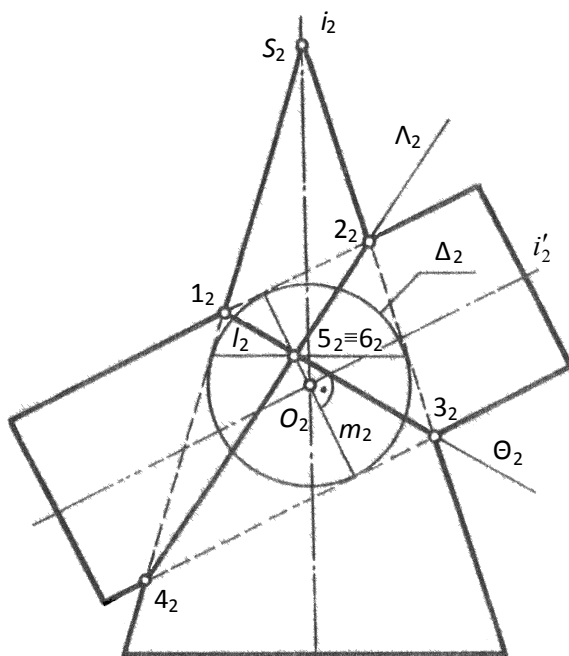


Рис. 4.20

Зазначимо, що теорема Монжа знаходить широке застосування при конструюванні трубопроводів, які виготовляються із листового матеріалу.

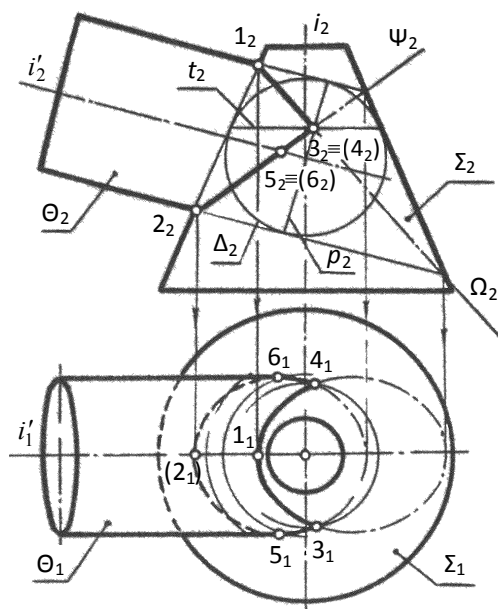


Рис. 4.21

На рис. 4.22 показано побудову перехідних конічних поверхонь, що з'єднують циліндричні ділянки трубопроводів Θ , Σ і Ω , вісі яких знаходяться в одній фронтальній площині рівня. Якщо вписати в кожен із заданих труб сферу, то сфери, вписані у труби Θ , Σ і Ω циліндричної форми, визначають перехідні конічні поверхні Γ і T , дотичні до цих вписаних сфер. При побудові ліній перетину заданих циліндричних і перехідних конічних поверхонь застосовано теорему Монжа, з якої випливає, що шукані лінії перетину будуть плоскими кривими. Фронтальні проекції цих ліній будуть відрізками прямих A_2C_2 , B_2C_2 , C_2D_2 , E_2F_2 і G_2H_2 , які визначаються точками перетину крайніх твірних поверхонь, що взаємно перетинаються.

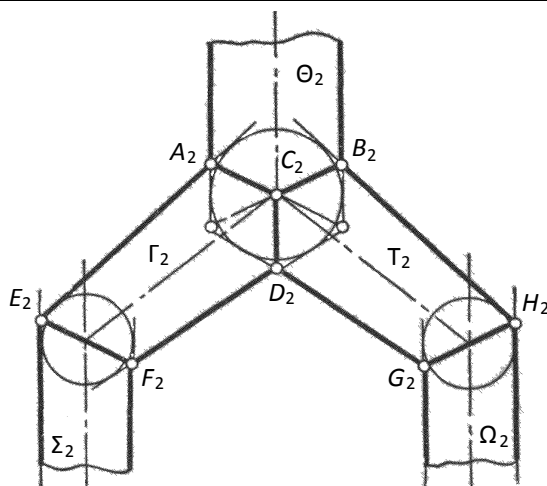


Рис. 4.22

4.6. Завдання "Побудова лінії взаємного перетину поверхонь"

Завдання: Побудувати лінію взаємного перетину поверхонь технічної конструкції, яку виготовлено з листового матеріалу. Визначити видимість. Задачу розв'язувати у трьох проекціях.

Це завдання також є індивідуальним, воно виконується на аркуші формату А3. Вихідні дані завдання та спрощені варіанти завдань наведено наприкінці розділу (ст. 111–117).

Відсіки поверхонь, що перетинаються, задаються своїми проекціями. Перш ніж почати креслити, розв'язуючи завдання, рекомендується ретельно вивчити задані поверхні, розібратися з їх утворенням, визначитися з лініями каркасу, які доцільно застосовувати для розв'язування поставленої задачі. Потім треба вирішити, який із відомих способів побудови лінії перетину поверхонь доцільно застосувати при побудові лінії

перетину заданих поверхонь. Треба пам'ятати, що точність побудови кривої зростає при збільшенні точок, які її визначають.

Спочатку будують характерні точки майбутньої лінії перетину. Далі шукають проміжні точки, застосовуючи або метод допоміжних січних площин-посередників, або метод допоміжних січних сфер-посередників.

При визначенні видимості й при остаточному обведенні креслення треба враховувати те, що поверхні виконані із листового непрозорого матеріалу та існують тільки до лінії перетину. Усі побудови рекомендується залишати в тонких лініях. Самі ж лінії перетину обводять основною суцільною лінією.

На рис. 4.23 наведено приклад побудови лінії перетину тора і конуса обертання. Для побудови цієї лінії застосовано метод допоміжних січних площин-посередників.

Метод сфер-посередників застосовано для побудови лінії перетину півсфери і конуса (рис. 4.24). Нагадаємо, що метод сфер-посередників застосовується при побудові лінії перетину поверхонь обертання, вісі яких перетинаються і є прямими окремого положення.

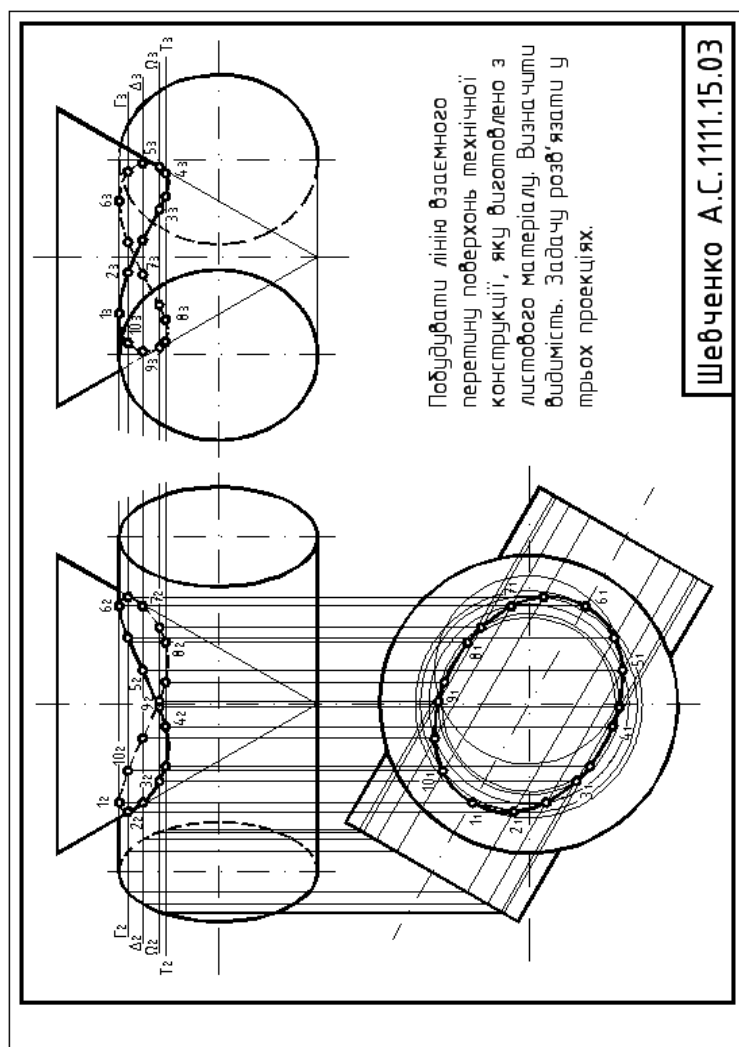


Рис. 4.23

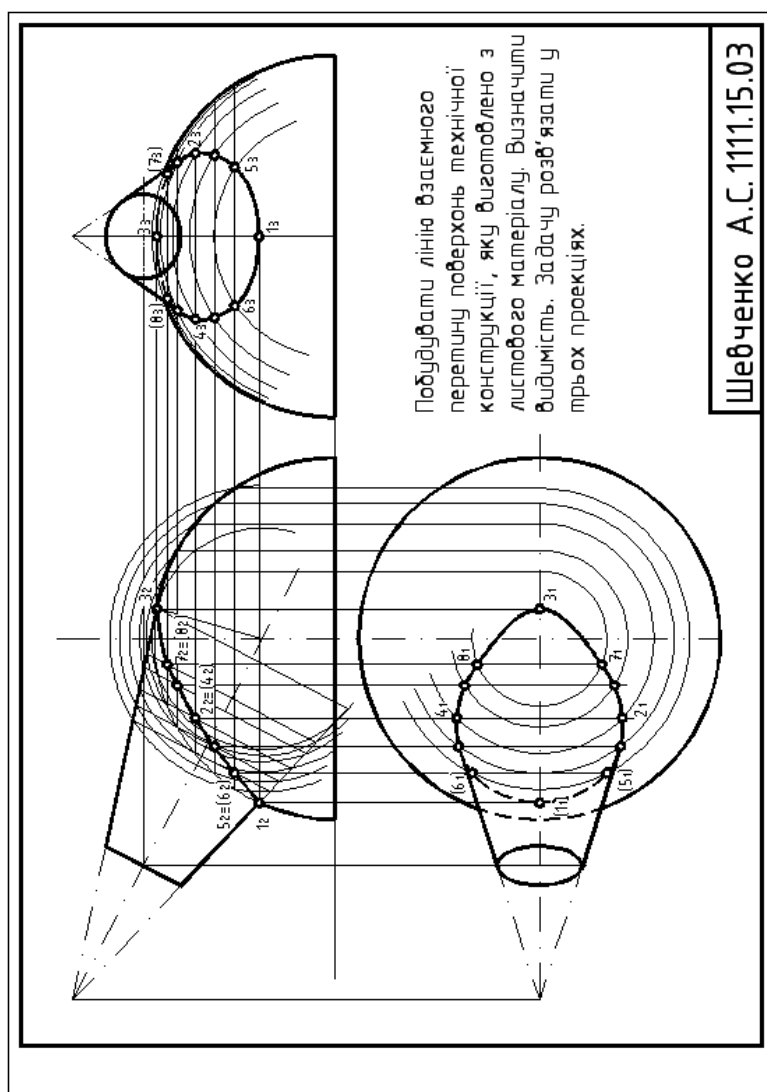
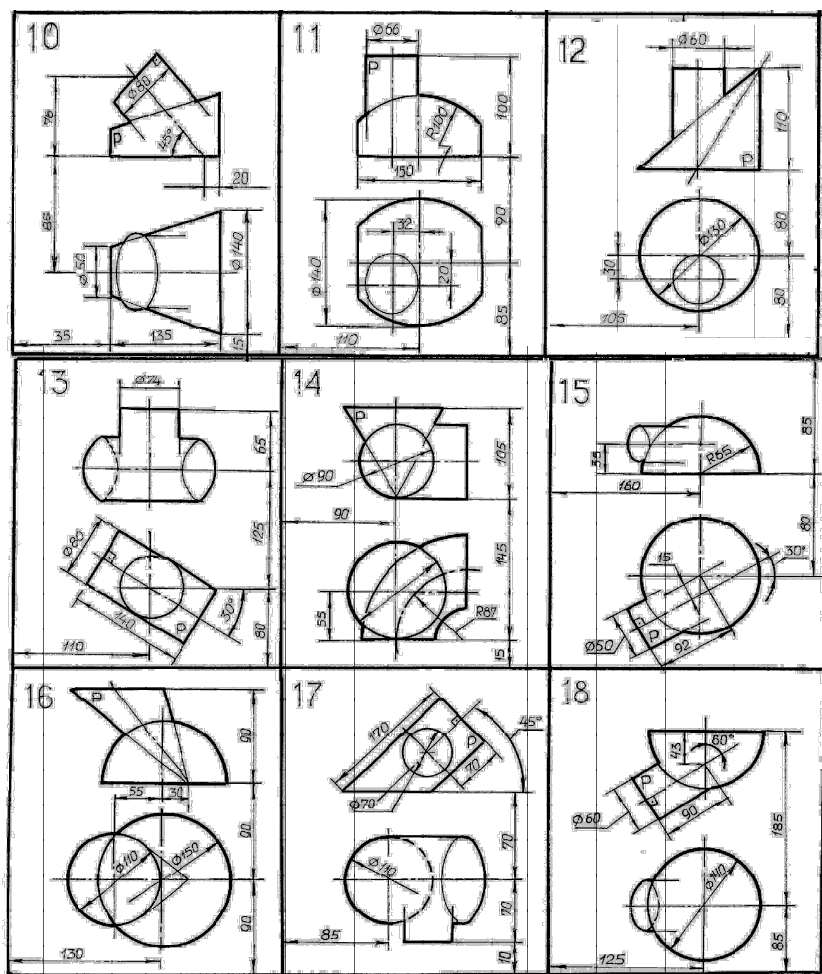
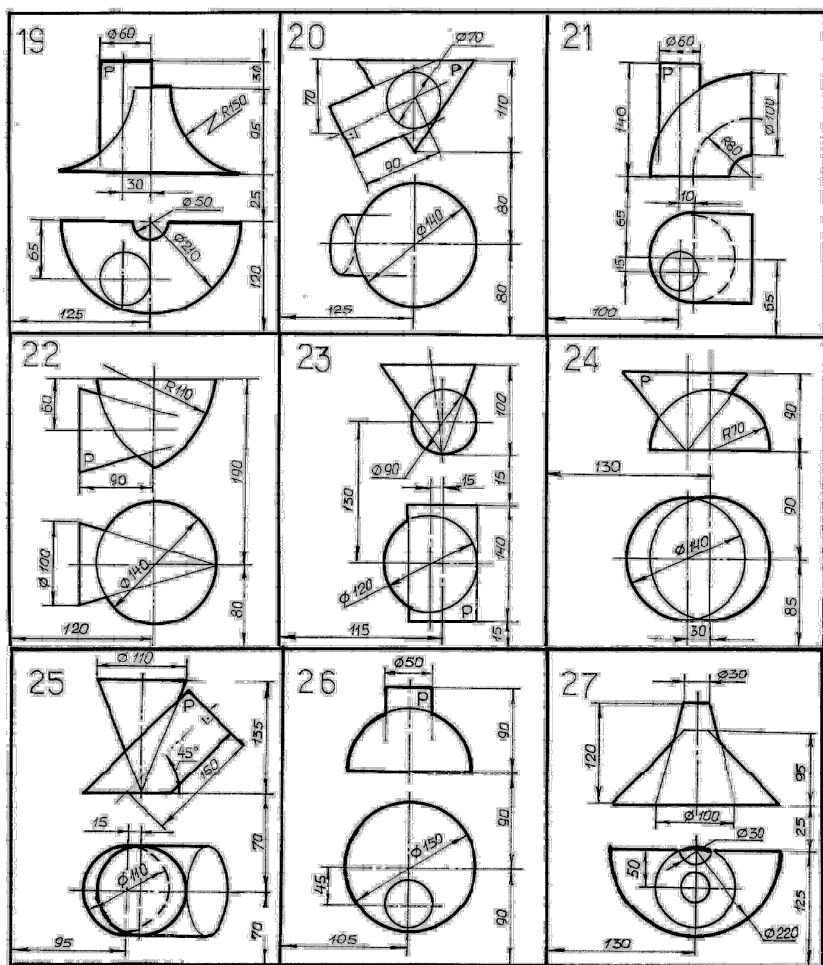
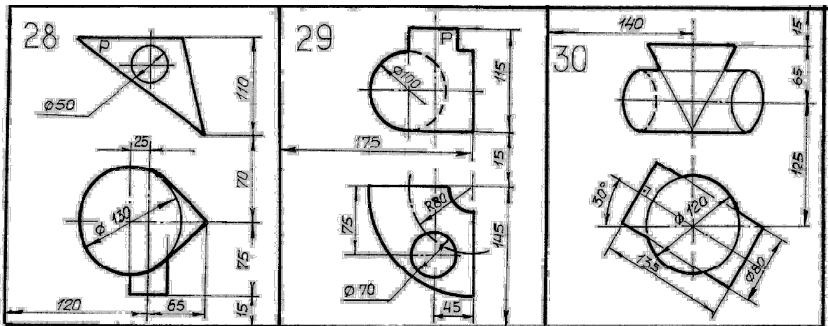


Рис. 4.24



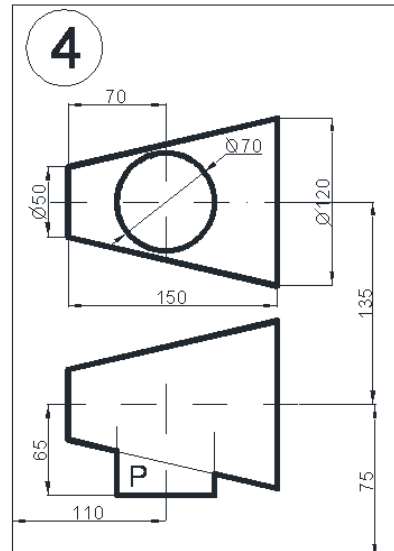
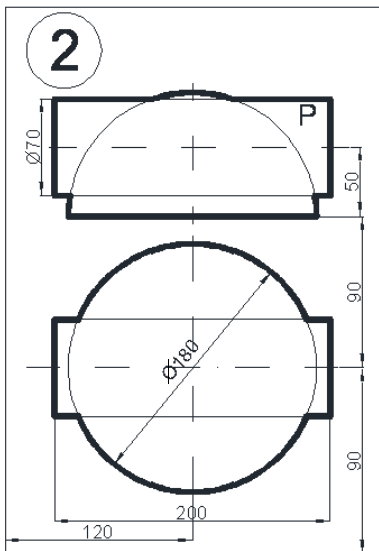


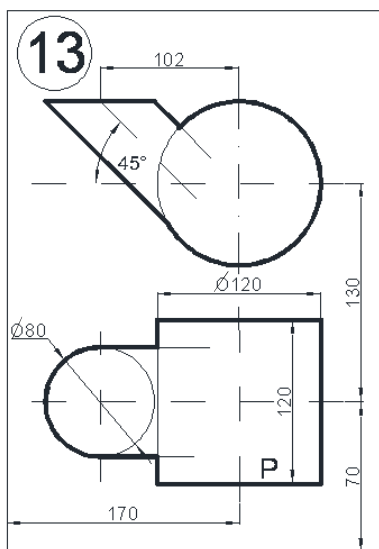
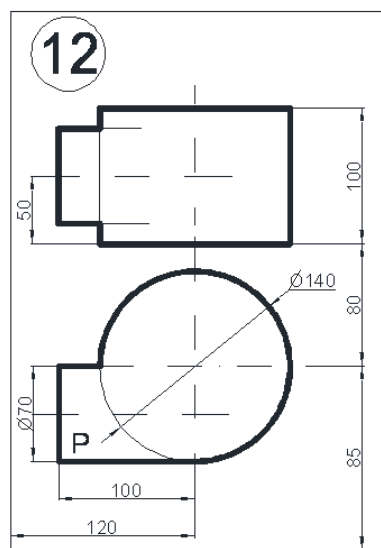
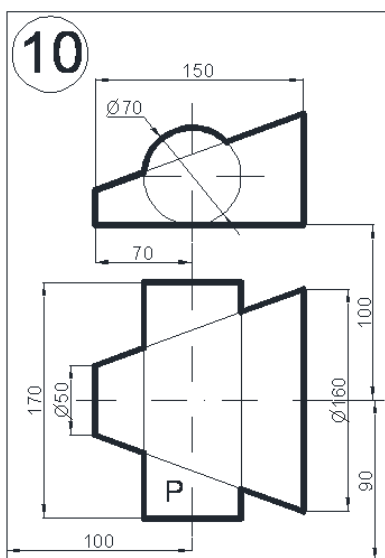
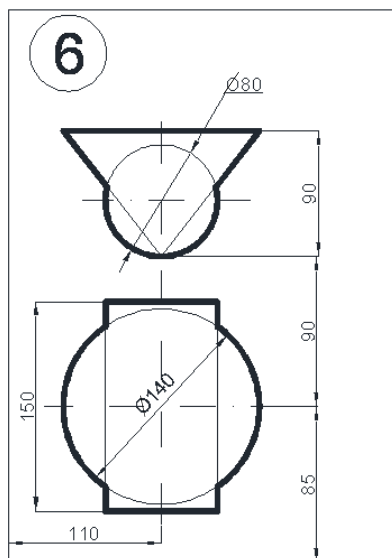


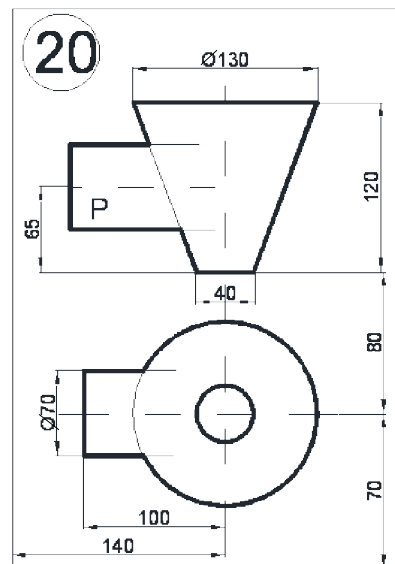
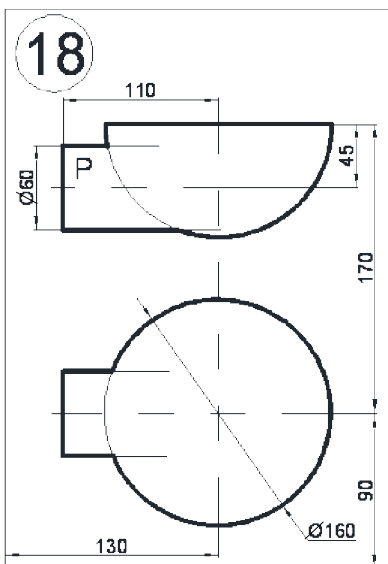
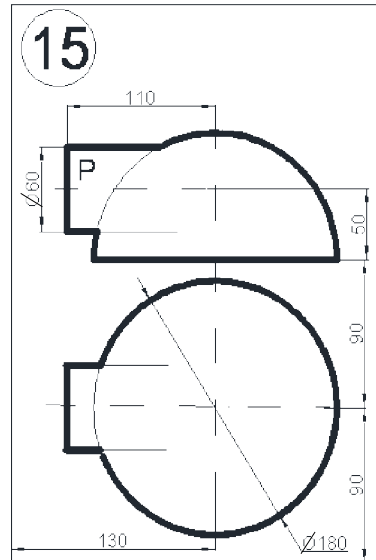
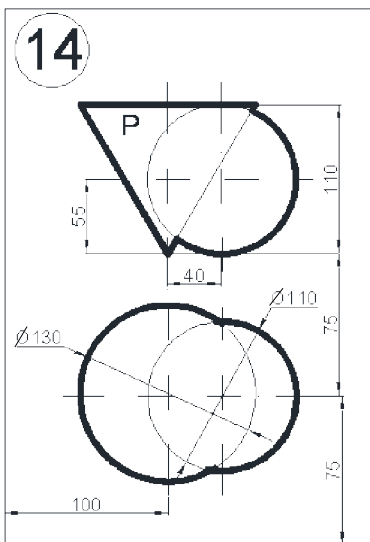


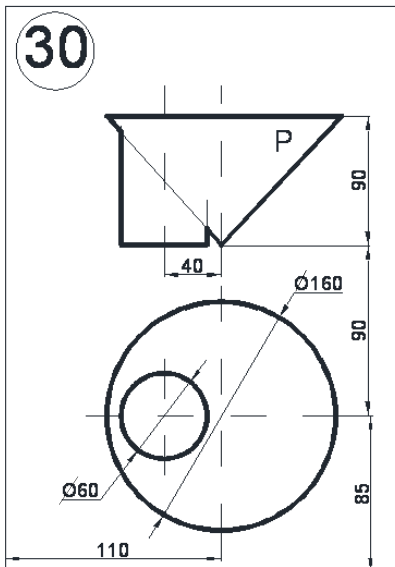
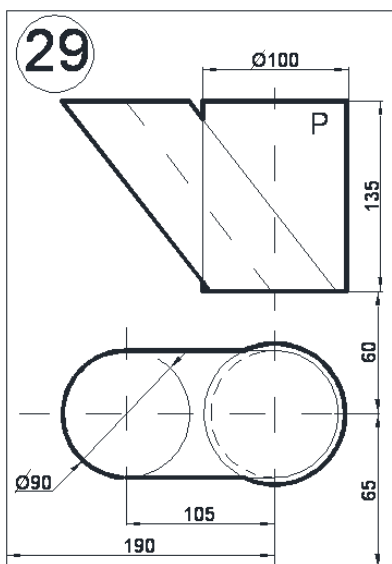
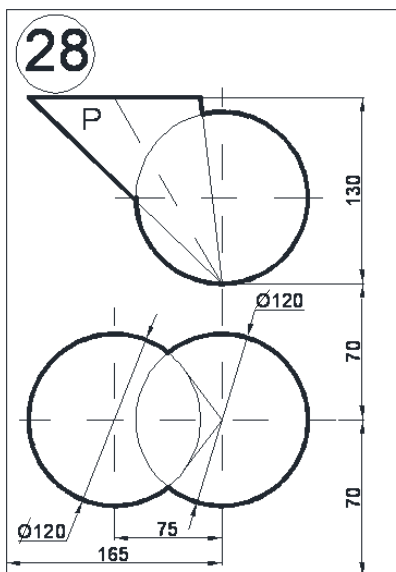
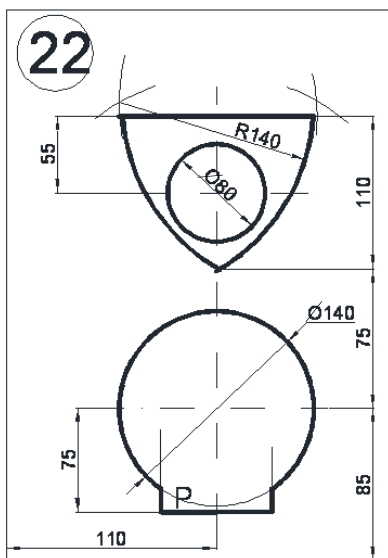
Спрощені варіанти завдань до домашнього завдання "Побудова лінії взаємного перетину поверхонь"

Варіанти, які відсутні у спрощених завданнях, беруться із загального переліку (ст. 111–114).









5. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

5.1. Загальні поняття про розгортні поверхні

Представляючи поверхню у вигляді гнучкої, але нерозтяжної плівки, можна говорити про таке перетворення поверхні, за яким вона сполучається із площиною без складок і розривів. Слід зазначити, що далеко не кожна поверхня дозволяє виконати таке перетворення. Нижче буде показано, які типи поверхонь можна сполучити із площиною за допомогою згинання, без розтягання й стискання.

Поверхні, які допускають таке перетворення, називаються *розгортними*, а фігура на площині, в яку поверхня перетворюється, називається *розгорткою* поверхні. На розгортці зберігаються натуральні довжини ліній, площ фігур, кутів між лініями тощо.

Побудова розгорток поверхонь має велике практичне значення при конструюванні різних виробів із листового матеріалу. При цьому необхідно зазначити, що часто доводиться виготовляти з листового матеріалу не тільки розгортні поверхні, але й поверхні, що не розгортаються. У цьому випадку нерозгортну поверхню розбивають на частини, які приблизно замінюють розгортними поверхнями, а потім будують розгортки цих частин. Більш докладно це буде показано нижче на окремих прикладах.

З'ясуємо тепер, які види поверхонь належать до розгортних. Очевидно, що до цього типу відносяться всі багатогранні поверхні. Розгорткою багатогранника є плоска фігура, отримана послідовним сполученням з однією й тією ж площиною всіх її граней. Тому побудова розгортки багатогранної поверхні зводиться до визначення натурального вигляду її окремих граней – плоских багатокутників.

Із кривих поверхонь до розгортних відносяться лінійчасті поверхні, в яких дотична площина дотикається до поверхні у всіх точках її прямолінійної твірної. Із числа розглянутих у цьому підручнику до розгортних поверхонь відносяться циліндричні й конічні.

Усі інші криві поверхні не розгортаються на площину й тому за необхідності виготовлення цих поверхонь із листового матеріалу їх наближено замінюють розгортними поверхнями.

5.2. Розгортки пірамідальних поверхонь

Побудова розгорток пірамідальних поверхонь полягає у багаторазовій побудові натурального вигляду трикутників, з яких складається задана пірамідальна поверхня. Оскільки цей спосіб приводить до розбивки пірамідальної поверхні на трикутники, то його прийнято називати способом *триангуляції*.

Побудуємо повну розгортку поверхні частини трикутної піраміди $SABC$, розташованої між площиною основи та січною фронтально-проекціовальною площиною $\Sigma(\Sigma_2)$ (рис. 5.1).

Спочатку будують розгортку бічної поверхні всієї піраміди $SABC$. Оскільки бічні грані піраміди є трикутниками, то для побудови розгортки потрібно побудувати натуральні вигляди цих трикутників. Для цього попередньо визначають натуральні величини бічних ребер. Це виконують за допомогою методу прямокутного трикутника, у кожному з яких один

катет це перевищення точки S над точками A , B і C , а другий катет – відрізок, рівний горизонтальній проекції відповідного бічного ребра.

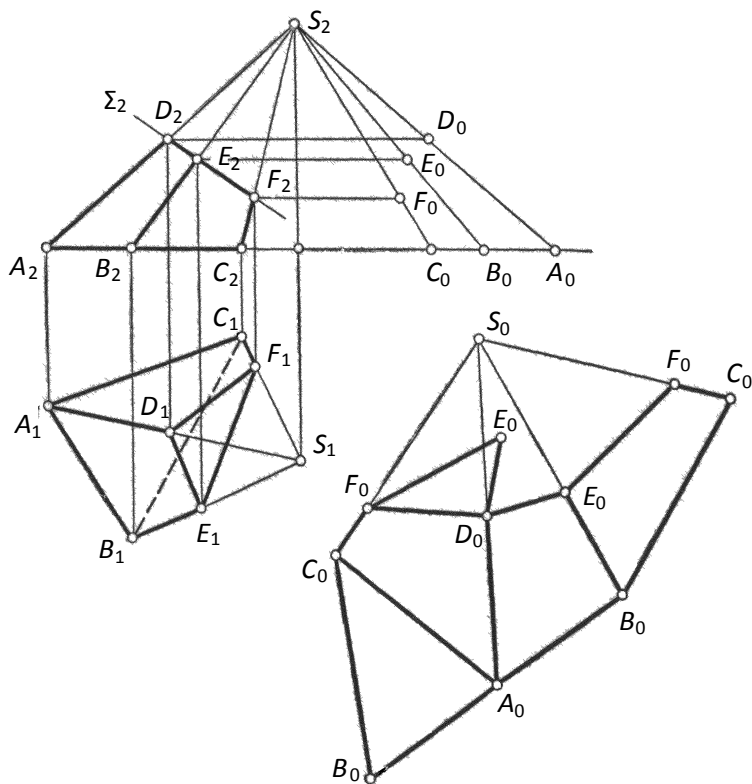


Рис. 5.1

Оскільки сторони нижньої основи піраміди є горизонталями, то їх натуральні величини можна знайти безпосередньо на площині проєкцій Π_1 .

Після цього кожна бічна грань будується як трикутник за трьома сторонами. Розгортка бічної поверхні піраміди має

вигляд трьох трикутників, які примикають один до одного, зі спільною вершиною у точці S_0 .

Для нанесення на розгортку точок D_0 , E_0 і F_0 , які відповідають вершинам D , E і F перетину піраміди площиною $\Sigma(\Sigma_2)$, визначають їх натуральні відстані від вершини S , для чого переносять точки D , E і F на відповідні натуральні величини бічних ребер. Після побудови розгортки бічної поверхні зрізаної частини піраміди додають до неї трикутники $A_0B_0C_0$ і $D_0E_0F_0$, які є натуральними виглядами основ зрізаної піраміди.

5.3. Розгортки призматичних поверхонь

Поверхню призми можна розгорнути двома способами – *способом нормального перерізу* і *способом розкатки*. Незалежно від способу розгортання призматичну поверхню необхідно мати заданою відносно площин проекцій таким чином, щоб її ребра були паралельними одній із площин проекцій, тобто займали положення прямих рівня (рис. 5.2).

Якщо при цьому лінії відсікання q поверхні проєкціюються зі спотворенням (див. рис. 5.2), то для побудови розгортки доцільно застосовувати спосіб *нормального перерізу*. Якщо ж лінія відсікання q проєкціюється на якусь із площин проєкцій в натуральну величину, а ребра призми при цьому паралельні іншій площині проєкцій, то побудову розгортки поверхні такої призми доцільно виконувати *способом розкатки*.

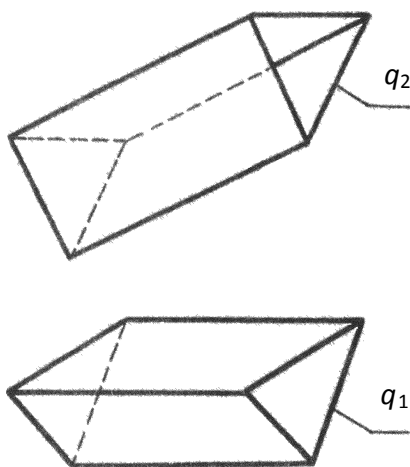


Рис. 5.2

У випадку коли поверхня призми розташована так, що її ребра займають загальне положення, то комплексне креслення необхідно одним із відомих способів перетворити до вигляду, показаного на рис. 5.2.

Нормальним перерізом призматичної поверхні називається переріз її площиною, перпендикулярною до ребер призми.

На рис. 5.3 зображена призматична поверхня Δ , ребра якої є фронталями. Нормальний переріз цієї поверхні дає фронтально-проекціювальна площина $\Gamma(\Gamma_2)$, перпендикулярна до її ребер.

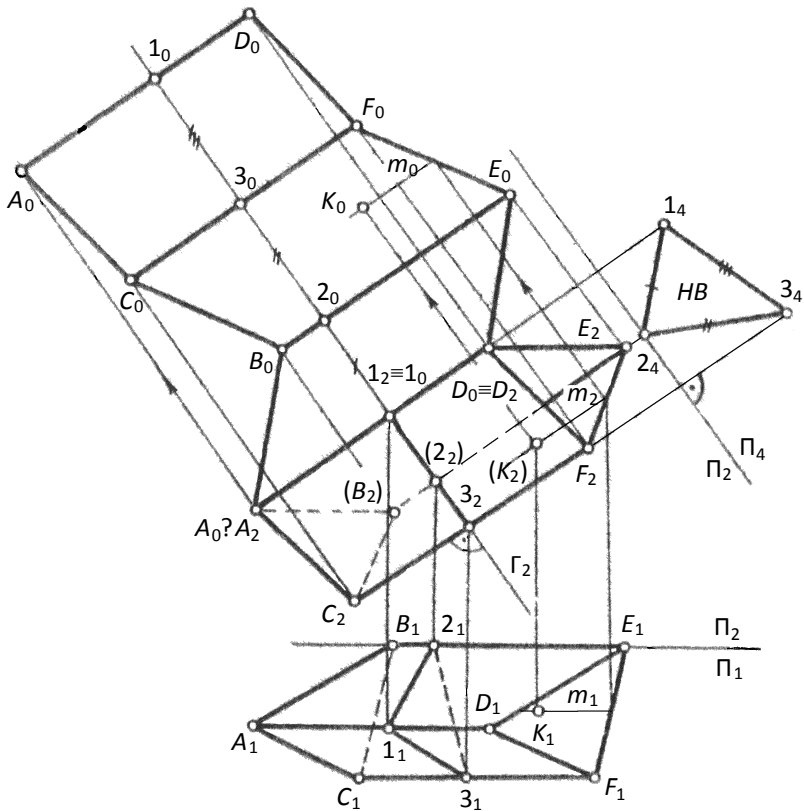


Рис. 5.3

Для побудови розгортки бічної поверхні призми необхідно контур нормального перерізу розгорнути в пряму лінію. Спочатку заміною площин проекцій визначають натуральну величину нормального перерізу (трикутника 1–2–3). Потім на лінії Γ_2 від точки 1 відкладають відрізки, рівні сторонам трикутника $1_4 2_4 3_4$. Цим самим випрямляють периметр нормального перерізу в пряму лінію.

Потім через точки 2_0 , 3_0 і 1_0 проводять напрями ребер перпендикулярно до лінії Γ_2 і на них фіксують точки B_0 , E_0 , C_0 , F_0 , A_0 , D_0 , які з'єднують ламаною лінією. Плоска фігура $A_0 B_0 C_0 \dots E_0 D_0$ є розгорткою призматичної поверхні Δ . Точку K перенесено з поверхні Δ на її розгортку за допомогою прямої m .

Розглянемо побудову розгортки поверхні призми способом розклатки (рис. 5.4). У цієї призми верхня і нижня основи паралельні площині проекцій Π_1 і, отже, проєкціюються на неї у натуральну величину. Бічні ребра паралельні площині проєкцій Π_2 . Таким чином, усі умови застосування способу розклатки для побудови розгортки поверхні призми є наявними.

Візьмемо за площину розгортки поверхні призми площину Γ , яка проходить через ребро AD паралельно фронтальній площині проєкцій. Сумістимо грань $ADEB$ з площиною Γ . Для цього умовно розріжемо бічну поверхню призми вздовж ребра AD , а потім здійснимо поворот грані $ADEB$ навколо ребра AD .

Для знаходження суміщеного з площиною Γ положення ребра $B_0 E_0$ із точки B_2 проводимо промінь, перпендикулярний до $A_2 D_2$, і позначаємо на ньому дугою радіуса $A_1 B_1$, проведеною із центра A_2 , точку B_0 . Через B_0 проводимо пряму $B_0 E_0$, паралельну $A_2 D_2$.

Суміщене положення ребра $B_0 E_0$ приймають за нову вісь обертання і повертають навколо неї грань $BEFC$ до суміщення з площиною $\Gamma(\Gamma_1)$. Для цього із точки C_2 проводять промінь, перпендикулярний до суміщеного ребра $B_0 E_0$, а із точки B_0 – дугу кола радіусом, рівним $B_1 C_1$. Перетин дуги

з променем визначить положення точки C_0 . Через C_0 проводять C_0F_0 паралельно B_0E_0 . Аналогічно знаходять положення ребра A_0D_0 . З'єднавши точки $A_2B_0C_0A_0$ і $D_2E_0F_0D_0$ відрізками прямих ліній, отримують плоску фігуру $A_2B_0C_0A_0D_0F_0E_0D_2$ – розгортку бічної поверхні призми. Для отримання повної розгортки призми достатньо до будь-якого із ланцюгів ламаної лінії $A_2B_0C_0A_0$ і $D_2E_0F_0D_0$ додати трикутники основи $A_0B_0C_0$ і $D_0E_0F_0$.

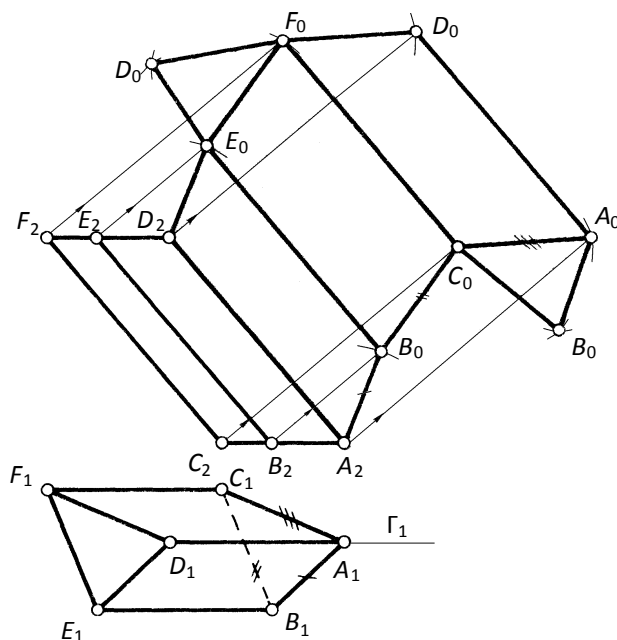


Рис. 5.4

5.4. Розгортки конічних поверхонь

Розгортку конічної поверхні виконують наближено шляхом вписування в неї пірамідальної поверхні з достатньою

кількістю граней. Зрозуміло, чим більше граней матиме піраміда, тим точніше будується розгортка. Такий спосіб побудови розгортки конічної поверхні називається *триангуляцією*.

Лінію відсікання конічної поверхні Σ (рис. 5.5) ділять на рівні частини, точки ділення 1, 2, 3, ... з'єднують прямими лініями з вершиною в точці S . Отримують ребра вписаної пірамідальної поверхні. Натуральні величини цих ребер визначають обертанням навколо вертикальної осі i , яка проходить через вершину S конічної поверхні, до положення фронталей.

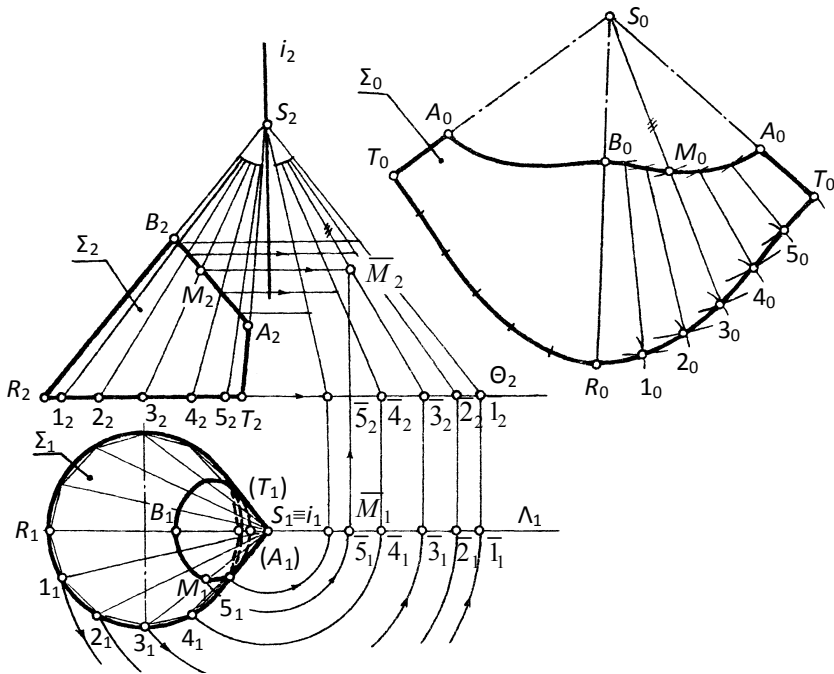


Рис. 5.5

Дуги 1–2, 2–3, 3–4, ... лінії відсікання замінюють хордами, визначають натуральні величини граней-трикутників за трьома сторонами способом засічок. Побудувавши всі трикутники,

ламану лінію $R_0 1_0 2_0 3_0 \dots$ замінюють плавною кривою лінією. Одержують наближену розгортку поверхні еліптичного конуса Σ . Відсік поверхні розрізаний по найменшій твірній ST .

Для побудови на розгортці кривої лінії ABA , що належить конічній поверхні, використовують ті ж твірні. Відстані від вершини S до точок перетину кривої з твірними вимірюють на натуральних величинах цих твірних.

Розгортання поверхні конуса обертання (рис. 5.6) виконується простіше. У цьому випадку відпадає необхідність у визначенні натуральних величин твірних-ребер, оскільки вони всі рівні між собою. Крива $T_0 R_0 T_0$ розгортки є дугою кола, радіус якої дорівнює довжині твірної конуса. Для побудови на розгортці кривої лінії ABA , яка належить поверхні конуса обертання, застосовують твірні, попередньо повернуті до положення бічних твірних SR або ST , які проєкціюються на площину Π_2 у натуральну величину.

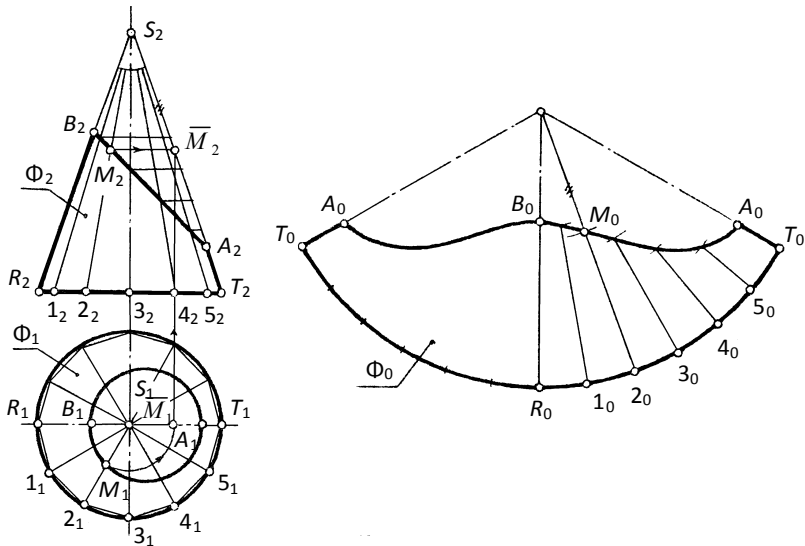


Рис. 5.6

5.5. Розгортки циліндричних поверхонь

Розгортку циліндричних поверхонь, як і вище розглянутих призматичних поверхонь, виконують або способом нормального перерізу, або способом розклатки. Вибір способу залежить від розташування циліндричної поверхні відносно площин проекцій. Але в кожному випадку криволінійна циліндрична поверхня замінюється вписаною гранною поверхнею. При цьому бічні грані будуть не трикутниками, а паралелограмами.

У випадку використання способу нормального перерізу початковою стадією розв'язання задачі є побудова нормального перерізу циліндричної поверхні.

Нормальним перерізом циліндричної поверхні є її переріз площиною, перпендикулярною до твірних. Для циліндричної поверхні нормальний переріз можна одержати, спроекціювавши циліндр на площину, перпендикулярну до його твірних, тобто необхідно одержати вироджену проекцію циліндра, яка і буде його нормальним перерізом.

На рис. 5.7 заміною площини проекцій отримана вироджена проекція заданого відсіку – еліпса з осями m і n . У цьому випадку відразу ж одержують натуральну величину нормального перерізу.

Наступним кроком розв'язування задачі є випрямлення контуру нормального перерізу. Для цього еліпс ділять на деяку кількість частин (не менше 12). Заміняючи дуги еліпса хордами, відкладають їх на прямій лінії. Одержують відрізок A_0A_0 , рівний за довжиною периметру нормального перерізу.

Оскільки точки ділення еліпса можна вважати виродженими проекціями твірних циліндричної поверхні, то на перпендикулярах до відрізка A_0A_0 , які проходять через ці точки, відкладають натуральні величини твірних уверх і вниз від відрізка A_0A_0 . З'єднавши кінці твірних плавними кривими лініями, одержують розгортку відсіку еліптичного циліндра Г.

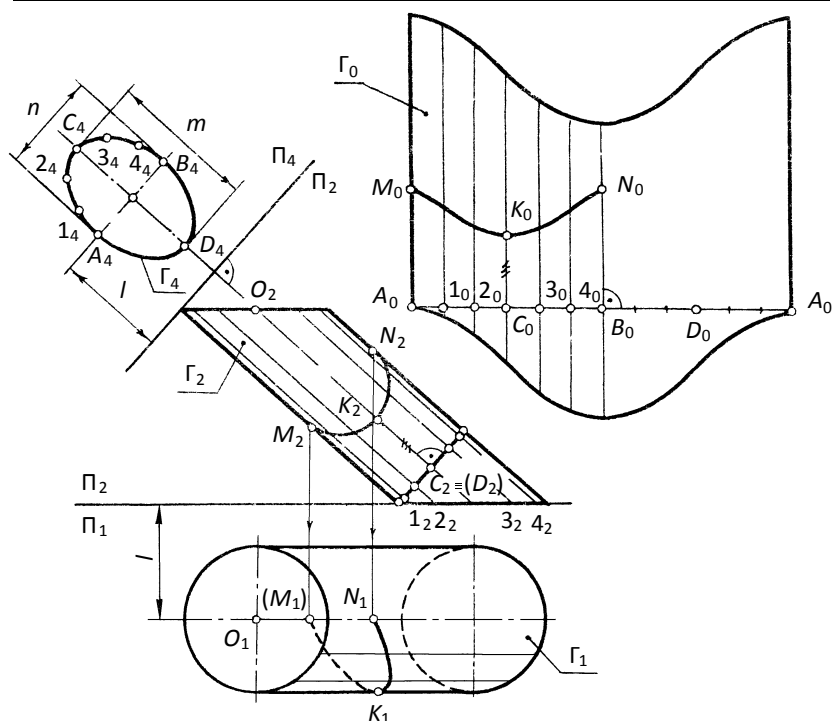


Рис. 5.7

Для побудови на розгортці кривої лінії MKN , яка належить циліндричній поверхні, використовують ті ж твірні, які проєкціюються на площину Π_2 у натуральну величину.

Розгортка поверхні циліндра обертання (рис. 5.8) виконується простіше. Нормальним перерізом у цьому випадку є коло. Відрізок прямої $l_0 l_0$ дорівнює довжині кола. Крива ABA , що належить поверхні циліндричного відсіку, будується за допомогою твірних.

На рис. 5.9 побудовано розгортку поверхні еліптичного циліндра, основи якого паралельні горизонтальній, а твірні – фронтальній площині проєкцій. Отже, розгортку цієї поверхні

можна виконувати способом розкатки. Горизонтальна проекція нижньої основи поділена на 12 частин (на рис. 5.9 позначені точки нижньої половини проекції). Через точки розподілу проведені проекції твірних на площинах проекцій Π_1 і Π_2 . Із фронтальної проекції точки 12, як із центра, проводять засічку радіусом, рівним довжині хорди 1_1-2_1 . Знаходять точку її перетину з прямою лінією, яка проходить через проекцію точки 2_2 , перпендикулярно до твірних еліптичного циліндра. Цю точку позначають як 2_0 . Із цієї точки як із центра проводять засічку радіусом 1_1-2_1 , а через точку 3_2 – пряму, перпендикулярну до твірних циліндра. Цей процес продовжують доти, поки не буде завершено обхід за колом нижньої проекції основи циліндра. Отримані точки $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ з'єднують плавною кривою лінією l . Так само будують лінію t . Отриману фігуру вважають розгорткою поверхні еліптичного циліндра.

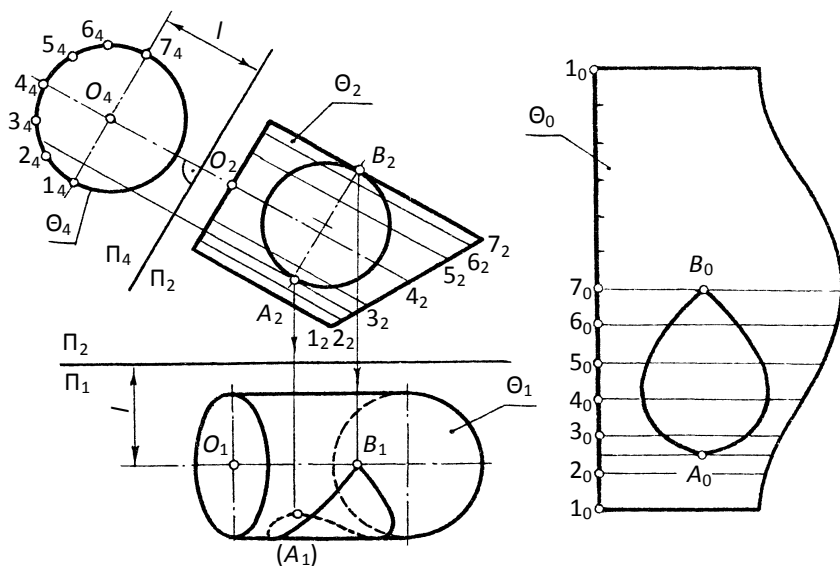


Рис. 5.8

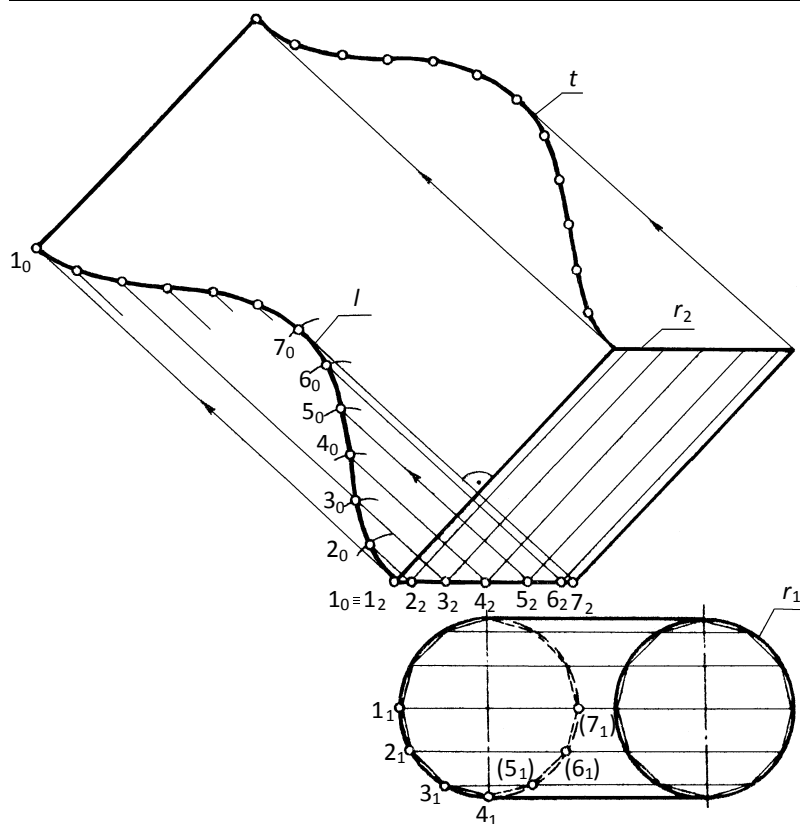


Рис. 5.9

5.6. Умовні розгортки поверхонь

У попередніх підрозділах було показано, що із розглянутих у посібнику поверхонь до розгортних можна віднести гранні поверхні, лінійчасті поверхні загального вигляду та лінійчасті поверхні обертання. Всі інші поверхні належать до нерозгортних – вони не можуть бути суміщені з площиною без розривів і склеювання. Тому нижче йтиметься про умовне розв'язування

задачі побудови розгорток нерозгортних поверхонь. У першу чергу це буде стосуватися до поверхонь обертання – сфери і тора, які знаходять практичне застосування в техніці, будівництві тощо.

Загальний прийом розв'язування задачі на побудову умовної розгортки нерозгортних поверхонь полягає у тому, що відсіки заданої поверхні апроксимуються (заміняються) відсіками розгортних поверхонь – гранними, циліндричними, конічними. Задану поверхню розсікають пучком площин, які проходять через вісь поверхні, на вузькі, рівні між собою відсіки.

Побудову умовної розгортки сфери показано на рис. 5.10. Сферу розсічено трьома горизонтально-проекціювальними площинами $\Gamma(\Gamma_1)$, $\Delta(\Delta_1)$ і $T(T_1)$ на шість рівних відсіків. Розсічення сфери на шість відсіків зроблено для полегшення пояснення прикладу побудови, на практиці сферу розсікають на 12 і більше відсіків.

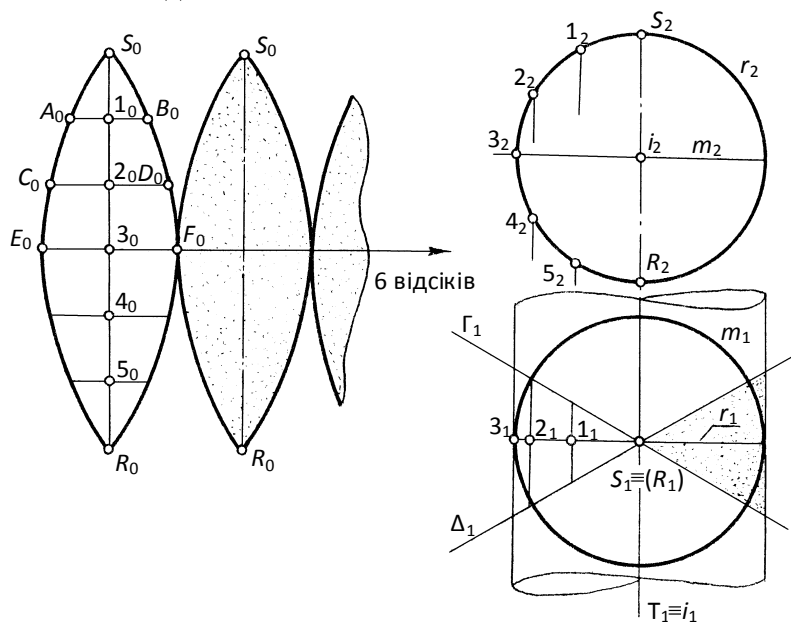


Рис. 5.10

Для розгортки кожного сферичного відсіку (рис. 5.11) необхідно замінити його, тобто апроксимувати, описаним циліндричним відсіком (рис. 5.12). Далі розгортають цей циліндричний відсік. Спочатку розпрямляють півмеридіан SR , розділивши його на шість рівних частин. Отримують пряму лінію $S_0 1_0 2_0 \dots R_0$ (див. рис. 5.10). Твірні AB, CD, EF і т. д. циліндричного відсіку, які проходять через точки $1, 2, 3, \dots$, є фронтально-проекційвальними прямими і на горизонтальну площину вони проєкціюються у натуральну величину. На розгортці ці твірні пройдуть через точки $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ перпендикулярно до лінії симетрії $S_0 1_0 2_0 3_0 \dots R_0$.

З'єднавши кінці цих твірних плавними кривими лініями, отримують умовну (наближену) розгортку одного відсіку поверхні сфери. Для повної розгортки треба побудувати ще п'ять таких відсіків.

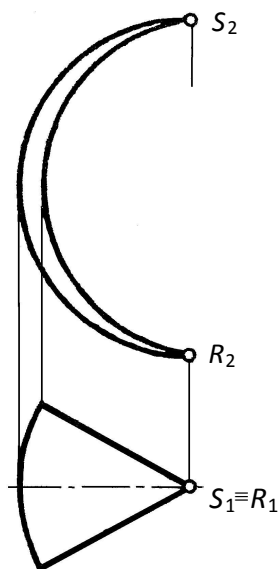


Рис. 5.11

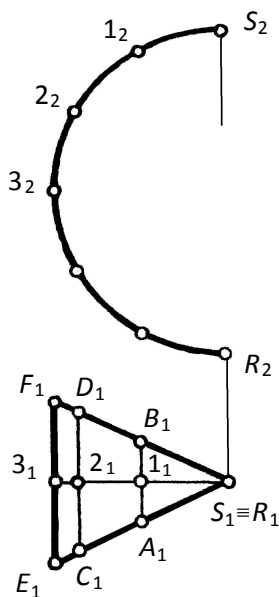


Рис. 5.12

Розглянуті побудови виконані із застосуванням допоміжних циліндричних поверхонь.

Умовну розгортку поверхні сфери можна також побудувати із застосуванням допоміжних конічних поверхонь (рис. 5.13). Поверхню сфери розрізають горизонтальними площинами рівня на окремі пояси, які потім замінюють вписаними конічними поверхнями. На рис. 5.13 пояси II–V є розгортками поверхонь зрізаних конусів обертання. Пояс I замінений циліндричною поверхнею. Недоліком цього способу є недоцільність розкрою матеріалу (довгі полоси зі значними радіусами кривини).

За цим прикладом можна будувати розгортку будь-якої іншої поверхні обертання.

На рис. 5.14 подано розгортку ще однієї нерозгортної поверхні обертання – поверхні кругового кільця, або тора. Розгортку виконано із застосуванням способу допоміжних циліндричних поверхонь.

Кожний відсік поверхні тора апроксимується циліндричним відсіком (один такий відсік знаходиться між площинами Т і Г).

Подальший процес розгорткування подібний до розглянутого вище. Кільцевий циліндричний відсік розгортається по малій твірній (проходить через точку 1).

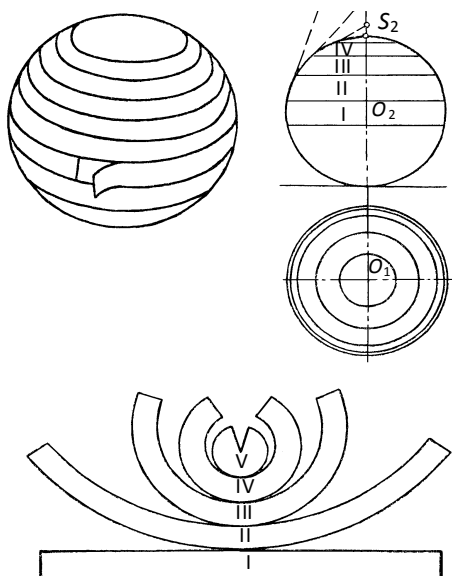


Рис. 5.13

Потім розгортається у пряму лінію меридіан-коло і будуються твірні циліндричного відсіку. Чим на більшу кількість відсіків розділена поверхня, тим точнішою є її розгортка.

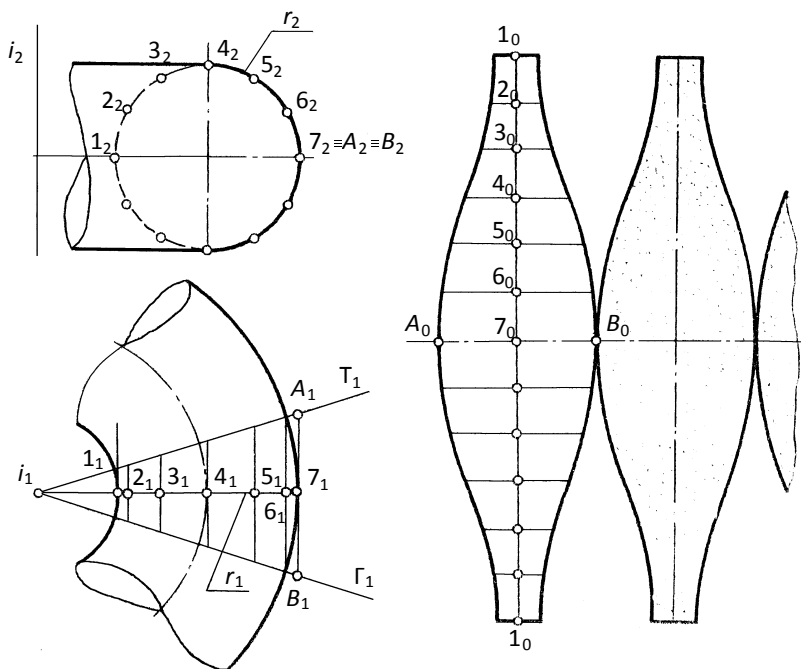


Рис. 5.14

5.7. Завдання "Побудова розгортки поверхні"

Завдання: Побудувати розгортку поверхні P , що входить до технічної конструкції завдання "Побудова лінії взаємного перетину поверхонь".

Це завдання також є індивідуальним, воно виконується на аркуші формату А3. Вихідні дані завдання подано наприкінці розділу 4 (ст. 111–117).

При виконанні розгортки поверхні потрібно пам'ятати, що модель виконано із листового матеріалу, тому поверхня завершується на лінії перетину заданих поверхонь.

Залежно від поверхні, що розгортається, використовуємо відповідний метод розгортки: для кінцевих поверхонь – метод триангуляції; для циліндричних або призматичних поверхонь – спосіб нормального перерізу або розкатки.

На рис. 5.15 показано приклад побудови розгортки відсіченого конуса (P_2), що перетинається із півсферою. Умовно розрізаємо поверхню конуса вздовж лінії SC , яку зображуємо вертикально S_0C_0 праворуч на кресленні. Вздовж цієї лінії відкладаємо натуральну величину S_2B_2 та S_2C_2 . Проведемо дугу радіусом S_0C_0 . На ній будемо будувати розгортку нижньої основи конуса.

На кресленні проекції поверхонь проведемо твірні конуса із вершини S_2 через кожную точку лінії перетину поверхонь (S_21_2, S_22_2, S_23_2 тощо) до нижньої основи конуса. Для визначення натуральної величини основи конуса накреслимо півкола з центром у точці N_2 та радіусом N_2C_2 . Під прямим кутом до основи конуса проведемо перпендикуляри із точок перетину твірних до півкола. Отримаємо точки 1, 2, 3, 4, 5. Саме ці відрізки ($E_2-1, 1-2, 2-3$ тощо) і будуть наближеною натуральною величиною для побудови розгортки нижньої основи конуса. Відкладаємо ці відстані на кресленні розгортки. На отриманих відповідних твірних (S_01, S_02, S_03 тощо) відкладаємо натуральні величини довжин, взяті із проекції Π_2 . З'єднавши отримані точки, отримуємо розгортку лінії перетину моделі.

Верхня основа конуса розгортається шляхом проведення дуги радіусом S_0B_0 до перетину із твірними S_0E_0 .

Отриману розгортку наводимо суцільною товстою лінією.

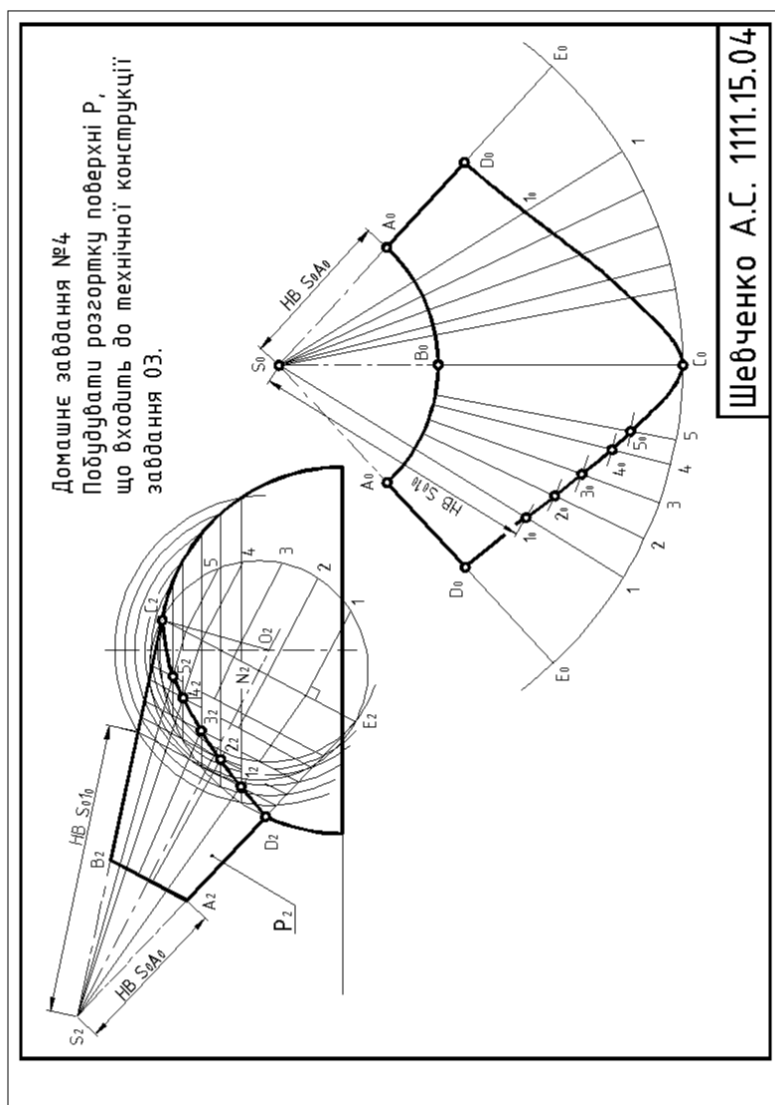


Рис. 5.15

6. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

6.1. Загальні відомості про аксонометричні проекції

При зображенні різних геометричних предметів, наприклад машини чи будівлі, вузла чи деталі, залежно від поставленої технічної задачі обирають такі проекції, які зможуть забезпечити або найбільшу наочність, або найменшу трудомісткість побудов, або зручність виміру окремих частин і всього предмета в цілому. При цьому доводиться віддати перевагу чомусь одному, бо перелічені властивості зображень зазвичай суперечливі. Ортогональні проекції, як правило, є найменш трудомістким способом зображення предметів, але вони не мають достатньої наочності. Це пояснюється тим, що при зображенні предметів прагнуть так розташувати їх відносно площин проекцій, щоб найбільш важливі грані, ребра та осі були паралельними або перпендикулярними цим площинам. У випадку коли предмет є складним за формою (наприклад, машина або будівельна конструкція), відсутність наочності іноді стає перешкодою для правильного читання креслення, тому з'являється необхідність у доповненні креслення зображенням, яке має достатню наочність. Найбільшу наочність зображення безумовно має перспектива, але вона трудомістка і не дозволяє без допоміжних, іноді достатньо складних побудов розв'язувати метричні задачі. Виникає необхідність

у таких зображеннях, які б не мали зазначених недоліків. Таким видом зображень є аксонометричні проекції.

Аксонометричні проекції відносяться до паралельних проекцій і, відповідно, мають усі їх властивості. Для аксонометрій використовуються також основні положення паралельних проекцій: аксонометричні проекції паралельних прямих паралельні між собою; рівні відрізки, котрі належать паралельним прямим, проєкціюються в рівні відрізки; якщо точка ділить відрізок у певному співвідношенні, то її аксонометрична проекція ділить аксонометричну проекцію відрізка в тому ж співвідношенні.

Людина, яка незнайома з методами ортогонального проєкціювання на три площини проєкцій, навряд чи зможе одразу собі уявити, що вона бачить на рис. 6.1.

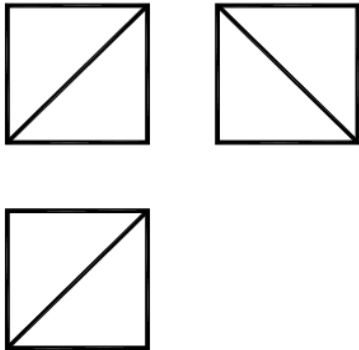


Рис. 6.1

Щоб полегшити процес просторової уяви, використовуються аксонометричні проекції. На рис. 6.2 наведено приклад цього креслення, виконаного в аксонометричній проекції. На ньому показано зображення куба з вирізом в аксонометричній проекції і його проекції на три взаємно

перпендикулярні площини. Тепер зрозуміло, як одержуються ортогональні проекції фігури.

Отже, за допомогою аксонометричних проекцій можна показати конструктивну будову як цілого виробу, так і будову окремих його частин, технологічні процеси обробки, зборки та монтажу. Аксонометричні проекції використовують для передачі технічного задуму автора при проектуванні та конструюванні нових виробів.

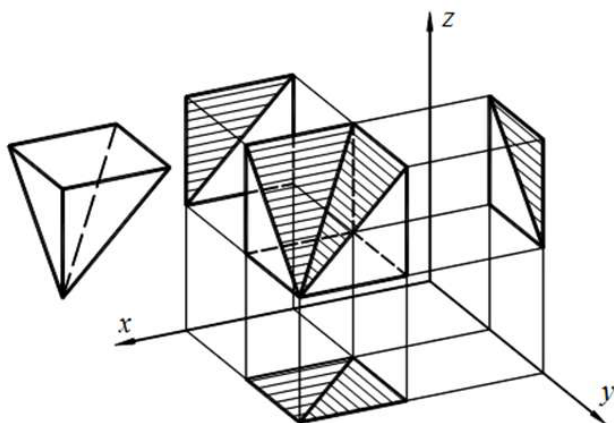


Рис. 6.2

При розгляді наочного зображення уявлення про предмет формується лише на основі єдиного образу, який представлений з однієї нерухомої точки зору. На наочному зображенні має бути видно найбільшу кількість складових частин предмета, які виявляють його форму в цілому. Окремі частини предмета не повинні повністю закривати інші його частини.

АксонOMETричною проекцією, або аксонометрією предмета (з грецької "ахон" – вісь та "metreo" – вимірюю) називається зображення, отримане шляхом проєкціювання паралельними променями геометричного предмета разом з осями прямокутних координат x, y, z , до яких він віднесений у просторі, на довільно розташовану площину Π' , яка має назву "аксонометричної площини". Проекції на неї осей Ox, Oy, Oz називаються аксонометричними осями – $O'x', O'y', O'z'$. Розмір кута між ними залежить від напрямку проєкціювання s і положення площини Π' відносно осей x, y, z .

Якщо напрям проєкціювання s є перпендикулярним до аксонометричної площини проєкцій, така аксонометрична

проекція називається *прямокутною*, якщо ж напрям проєкціювання не перпендикулярний до аксонометричної площини проєкцій – *косокутною*.

Розглянемо відрізок e (рис. 6.3), який є одиницею масштабу при вимірюванні оригіналу (тобто у просторі). Відкладемо цю масштабну одиницю від початку координат 0 по координатних осях x, y, z . Тоді $e_x = e_y = e_z = e$. Назвемо їх *натуральними масштабами*.

Спроеціюємо ці натуральні масштаби за напрямом s на відповідні аксонометричні осі $0'x', 0'y', 0'z'$. Отримані проєкції e'_x, e'_y, e'_z будемо називати аксонометричними масштабами. Із рис. 6.3 видно, що у загальному випадку $e'_x \neq e'_y \neq e'_z \neq e$.

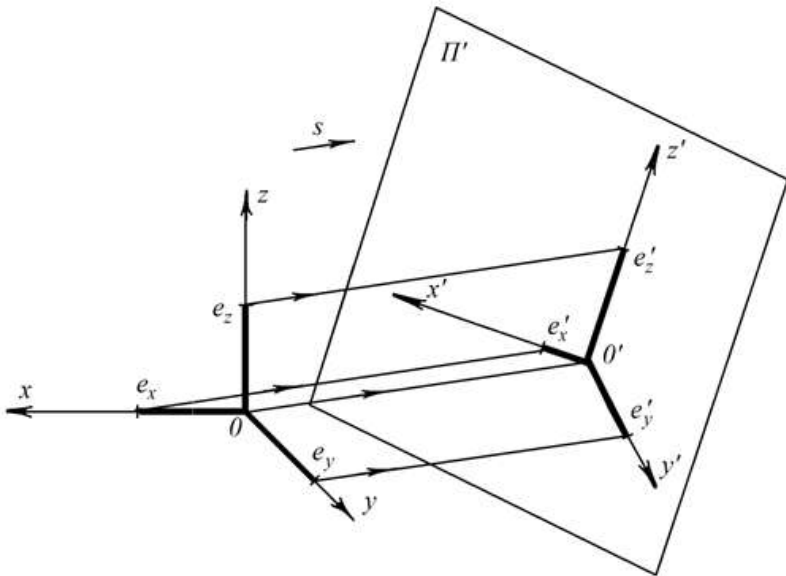


Рис. 6.3

Отже, кожна аксонометрична вісь має свій масштаб, який відрізняється від натурального. Однак користуватися масштабами при побудові аксонометричних проєкцій незручно, тому на практиці використовують так звані коефіцієнти (показники) спотворення.

Відношення аксонометричного масштабу до натурального го називається *коефіцієнтом спотворення по даній осі*:

$$u = \frac{e'_x}{e_x} - \text{коефіцієнт спотворення по осі } 0x;$$

$$v = \frac{e'_y}{e_y} - \text{коефіцієнт спотворення по осі } 0y;$$

$$w = \frac{e'_z}{e_z} - \text{коефіцієнт спотворення по осі } 0z.$$

Ці коефіцієнти спотворення є натуральними. Вони показують, в скільки разів відбулося спотворення розмірів оригіналу вздовж аксонометричних осей при його проєкціюванні на аксонометричну площину. Для прямокутної аксонометрії коефіцієнт спотворення завжди менше одиниці, а для косокутної він може бути будь-яким.

Усі натуральні коефіцієнти спотворення пов'язані між собою певними співвідношеннями:

– для прямокутної аксонометрії $u^2 + v^2 + w^2 = 2$;

– для косокутної аксонометрії $u^2 + v^2 + w^2 > 2$.

Залежно від напрямку проєкціювання s на аксонометричну площину Π' та кутів нахилу координатних осей $0x$, $0y$, $0z$ до цієї площини можуть бути отримані найрізноманітніші види аксонометричних проєкцій одного й того ж предмета. Але побудова довільної аксонометрії пов'язана з певними труднощами обчислювального характеру.

6.2. Види аксонометричних проєкцій

Співвідношення між коефіцієнтами спотворення визначають той чи інший вид аксонометричної проєкції. Оскільки існує три різних коефіцієнти спотворення, то можливе існування трьох різних видів аксонометричних проєкцій – ізометрії, диметрії та триметрії.

Розглянемо, які співвідношення між коефіцієнтами спотворення визначатимуть той чи інший вид аксонометричної проєкції.

На рис. 6.4 показана довільна аксонометрична площина Π' , яка перетинає осі x, y, z ортогональної системи координат відповідно у точках P'_x, P'_y і P'_z . Точка O' є прямокутною аксонометричною проєкцією початку координат O на аксонометричну площину Π' . З'єднавши O' прямими лініями з P'_x, P'_y і P'_z , отримаємо аксонометричні осі координат x', y', z' та кути α, β, γ , які вони утворюють з осями ортогональної системи координат.

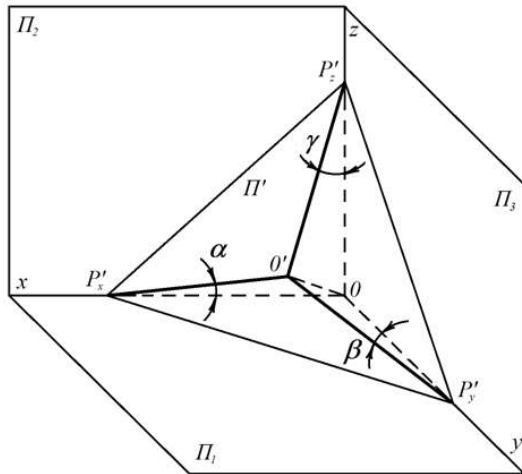


Рис. 6.4

Отже, як уже було зазначено, можливі три варіанти співвідношення між коефіцієнтами спотворення.

1. Аксонометрична площина проекцій Π' займає таке положення відносно площин Π_1, Π_2, Π_3 , при якому $\alpha = \beta = \gamma$, унаслідок чого $u = v = w$ (за трьома напрямками коефіцієнти спотворення однакові). Такий вид аксонометричної проекції називається *ізометрією*.

У цьому випадку матимемо $3u^2 = 2$, звідки $u = v = w = 0,82$. Аксонометричні осі x', y', z' утворюють між собою кут 120° .

2. Аксонометрична площина проекцій Π' займає таке положення відносно площин Π_1, Π_2, Π_3 , при якому $\alpha = \gamma \neq \beta$, унаслідок чого $u = w \neq v$ (за двома напрямками коефіцієнти спотворення однакові). Такий вид аксонометричної проекції називається *диметрією*.

Можна так підібрати кут β нахилу осі до площини Π' , що коефіцієнт спотворення v уздовж аксонометричної осі y' буде вдвічі менший за коефіцієнти u і w , тобто $v = 0,5$.

Якщо розглядати прямокутний вид аксонометричної проекції, то при таких співвідношеннях між коефіцієнтами спотворення з формули $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ отримуємо $2u^2 + 0,25u^2 = 2$, звідки матимемо значення натуральних коефіцієнтів спотворення: $u = w = 0,94$; $v = 0,47$.

Аксонометричну вісь z' зазвичай розташовують вертикально. Кут нахилу осі x' до горизонтальної лінії дорівнює $41^\circ 25'$.

3. Аксонометрична площина проекцій Π' займає довільне положення відносно площин Π_1, Π_2, Π_3 . Тоді $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, унаслідок чого $u \neq v \neq w$, що дає безліч варіантів аксонометричних проекцій. Такий вид аксонометричної проекції називається *триметрією*.

Один із можливих варіантів триметричної проекції, коли вісь x' нахилена до горизонтальної прямої лінії під кутом 15° , вісь y' утворює з горизонтальною лінією кут 30° , вісь z' розташована вертикально. Кут між осями x' і y' дорівнює 135° .

6.3. Стандартні аксонометричні проєкції

На підставі викладеного вище матеріалу можна зробити висновок, що побудова довільної аксонометричної проєкції викликає певні труднощі. По-перше, треба визначати напрями аксонометричних осей, для чого необхідно виконувати деякі розрахунки. По-друге, необхідно знаходити коефіцієнти спотворення по цих осях. Для цього також треба робити розрахунки, результатом яких, можна впевнено стверджувати, будуть різні за величиною дробові значення коефіцієнтів спотворення. Усе це суттєво ускладнює і без того непростий процес побудови аксонометричних проєкцій.

Чинною в Україні системою стандартизації оформлення графічної конструкторської документації передбачені певні заходи щодо уніфікації та спрощення виконання аксонометричних проєкцій. Таким чином, ГОСТ 2.317–69 рекомендує використовувати два види прямокутних аксонометричних проєкцій – ізометричну та диметричну та три види косокутних аксонометричних проєкцій – фронтальну ізометричну, горизонтальну ізометричну та фронтальну диметричну. Ці аксонометричні проєкції називаються стандартними, відрізняються простотою побудови та є достатньо наочними. При їх виконанні передбачається, що напрям погляду на зображувану деталь відбувається зліва зверху.

6.3.1. Прямокутна ізометрія

Розглянемо побудову прямокутної ізометрії на прикладі деякої умовної деталі, ортогональне трикартинне креслення якої наведено на рис. 6.5.

Спочатку будують аксонометричні осі проєкцій, кут між якими дорівнює 120° .

Аксонометрію починають будувати з проєкціювання на аксонометричну площину опорних (характерних) точок деталі

$A, B, C, \dots$. Кожну із цих точок будують за її координатною ланкою, ланками якої є координати x, y, z конкретної точки, взяті із урахуванням натуральних коефіцієнтів спотворення ($u = v = w = 0,82$). Опорні точки в аксонометричній площині показані на рис. 6.6,*а*. З'єднавши їх у певному порядку і побудувавши решту елементів деталі, отримаємо її аксонометричну проекцію (див. рис. 6.6,*б*), на якій літерами позначені тільки видимі точки.

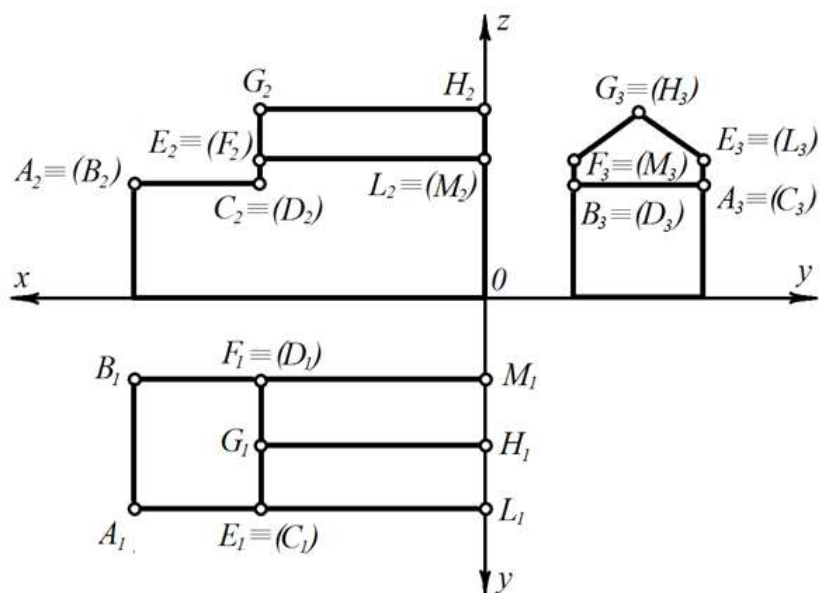


Рис. 6.5

Слід зазначити, що залежно від взаємного розташування ортогональної системи координат і аксонометричної площини проєкцій Π' при прямокутному проєкціюванні можна отримати три види прямокутних аксонометричних проєкцій:

ізометрію, диметрію та триметрію, які розрізняються не тільки видами аксонометричних осей проекцій, а й значеннями коефіцієнтів спотворення по них.

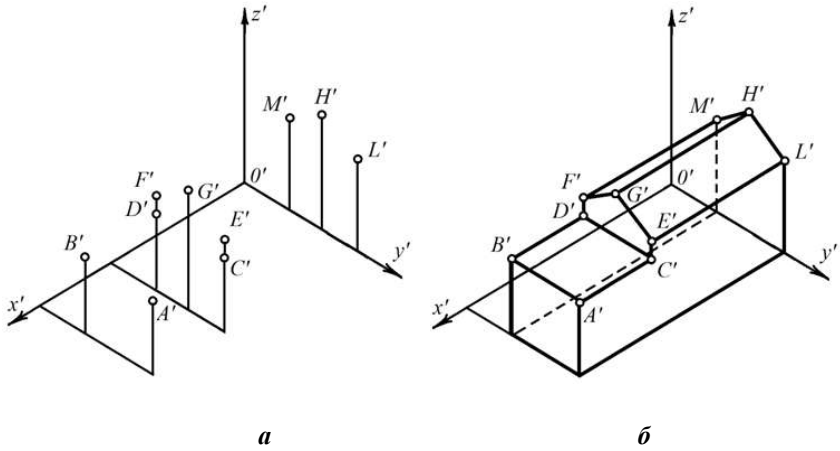


Рис. 6.6

На рис. 6.7,*а* зображена сфера у прямокутній ізометричній проекції, діаметр якої дорівнює одиниці вимірювання. Розташуємо цю сферу всередині куба, ребра якого також дорівнюють одиниці по напрямку аксонометричних осей (див. рис. 6.7,*б*). Спроекціюємо сферу на грані куба. Такий вид проектування називається *третьоквADRANTним* (американським). Як бачимо, проекції сфери на грані куба менші за розміром (спотворені), тобто відрізок координатної осі довжиною 1 мм у прямокутній ізометрії відобразиться відрізком аксонометричної осі довжиною 0,82 мм. Співвідношення $1 / 0,82 = 1,22$ рази визначає коефіцієнт масштабування, на який ми збільшуємо сферу без порушення пропорційності її елементів (див. рис. 6.7,*в*).

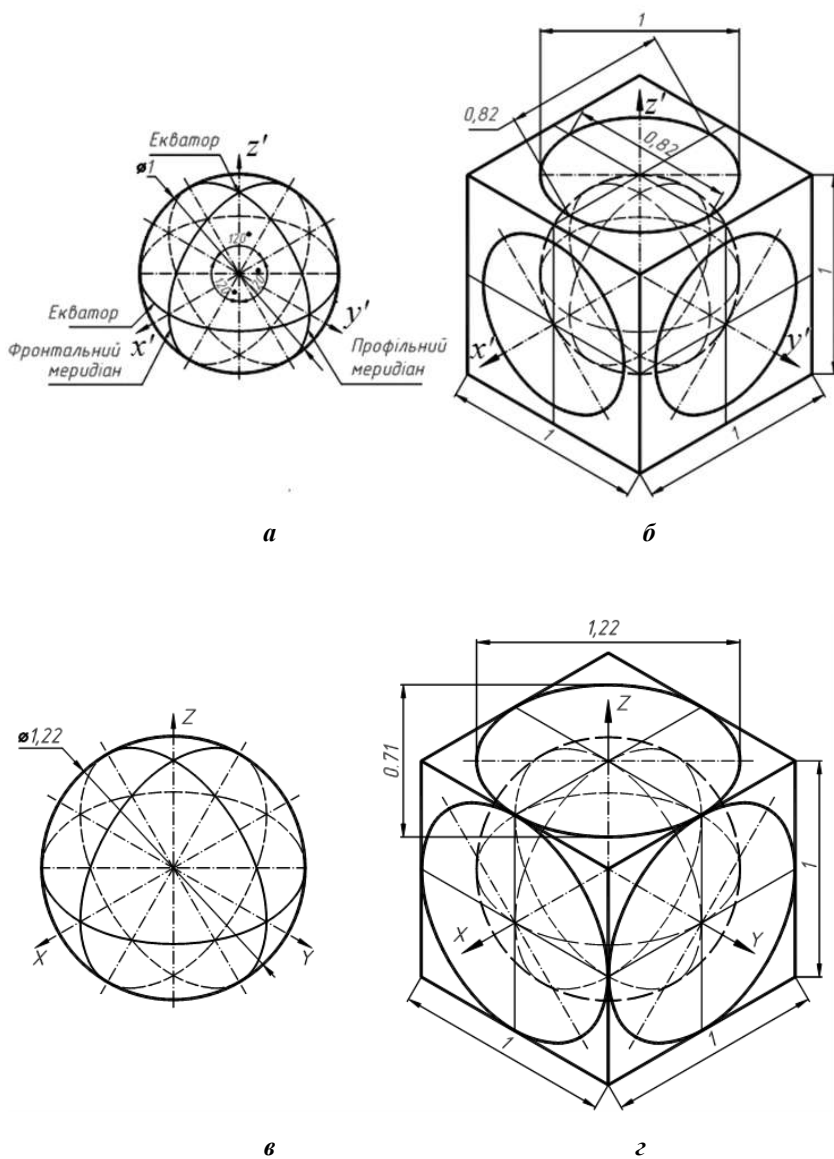


Рис. 6.7

Число 1,22 називають коефіцієнтом приведення, а отримані таким чином збільшені коефіцієнти спотворення $U = 1$, $V = 1$, $W = 1$ – *приведеними коефіцієнтами спотворення*. Зараз проєкції сфери у вигляді еліпсів вписуються в грані куба (див. рис. 6.7,2). Велика вісь еліпса складає 1,22 діаметра D проєкційного кола сфери (екватор, фронтальний меридіан, профільний меридіан), а мала вісь еліпса – 0,71 діаметра. Розташуємо сферу у звичному нам (європейському) першоквadrантному вигляді проектування. На рис. 6.8,*а* наведені співвідношення для визначення довжини відрізків великої AB і малої CD осей еліпсів. Величина відрізків 1, 2 і 3, 4 дорівнює діаметру проєкційного кола сфери, а у загальному випадку – діаметру циліндра або отвору на фігурі.

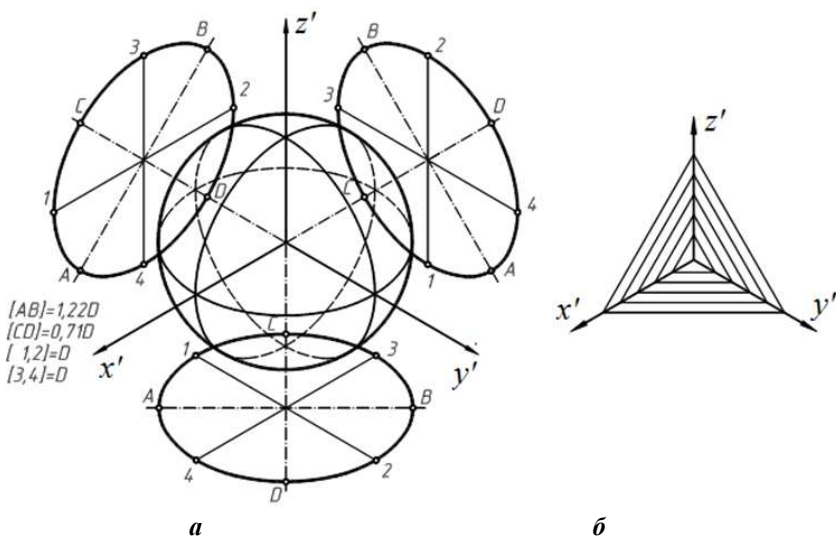


Рис. 6.8

В аксонометричних проєкціях, як і в ортогональних, для визначення внутрішніх форм деталі (порожнин, отворів тощо) використовуються умовні вирізи, які виконуються січними

площинами рівня. У тих місцях, де січні площини перетинають матеріал деталі, застосовується штриховка, яка зображується сукупністю тонких паралельних ліній.

Напрямок ліній штриховки залежить від розташування січних площин, які можуть бути паралельними горизонтальній, фронтальній або профільній площині проєкцій ортогональної системи координат. У прямокутній ізометрії слід дотримуватися наведеного на рис. 6.8,б правила штриховки.

При зображенні аксонометричних проєкцій для спрощення побудови дозволяється еліпси замінювати овалами, які окреслені дугами кіл. Способи побудови овалів ретельно розглянуті в довідниковій літературі.

Розглянемо спосіб побудови овалу за двома його осями AB і CD (рис. 6.9,а). Побудова овалу проводиться дугами кіл із центрів O_1 , O_2 , O_3 , та O_4 .

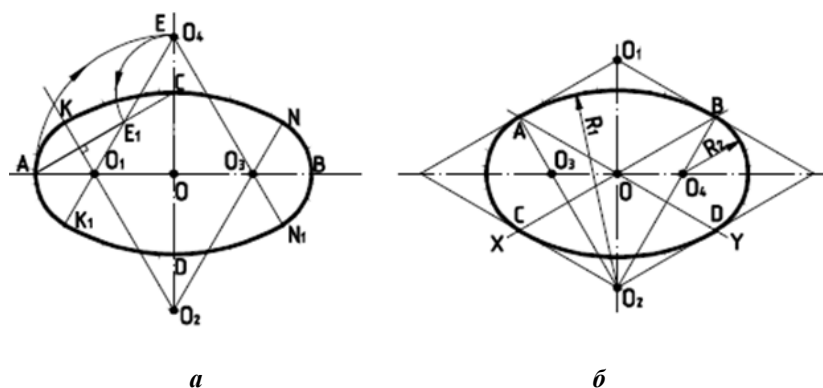


Рис. 6.9

Для визначення центрів O_1 і O_2 відкладають на малій осі відрізок $OE = OA$, тобто довжину великої півосі. Різницю півосей CE відкладають від точки C на прямій AC , яка з'єднує кінці цих осей. Далі з середини відрізка AE_1 будують перпенди-

куляр, перетин якого з даними осями визначає центри O_1 і O_2 . Два інших центра O_3 та O_4 визначаються як точки, що є симетричними до O_1 і O_2 . Дуги $KA K_1$ та NBN_1 проводяться з центрів O_1 і O_3 радіусом O_1A , дуги KCN та K_1DN_1 – з центрів O_2 і O_4 радіусом O_2C .

Приклад побудови овалу у прямокутній ізометрії наведено на рис. 6.9,б. На аксонометричних осях x' і y' від точки O відкладають відрізки, які дорівнюють радіусу зображуваного кола. Через точки A, B, C і D проводять прямі, що утворюють ромб. Його сторони дорівнюють діаметру зображуваного кола. Точки O_1 і O_2 є центрами великих дуг R_1 . Точки O_3 і O_4 , які розташовані на перетині діагоналі ромба з прямими O_2A та O_2B , є центрами малих дуг R_2 .

На рис. 6.10 наведено приклад зображення технічної деталі з колами у горизонтальній площині проєкції Π_1 у прямокутній ізометрії.

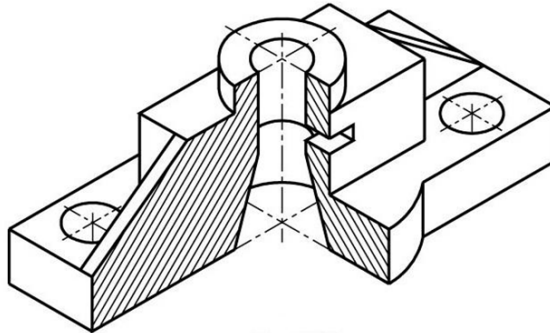


Рис. 6.10

6.3.2. Прямокутна диметрія

Згідно з ГОСТ 2.317–69 у інженерній графіці застосовують прямокутну диметрію, в якій вісь $O'z'$ розташовують вер-

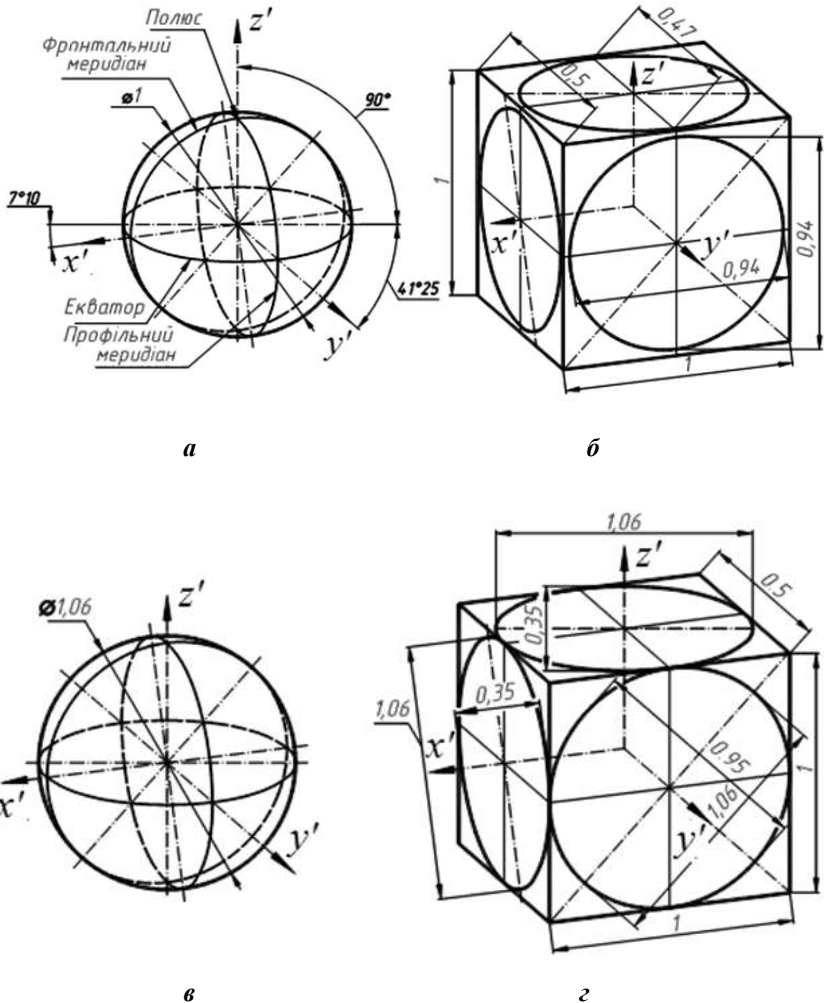
тикально, кут між горизонтальною лінією і віссю $O'x'$ дорівнює $7^{\circ}10'$, а між горизонтальною лінією і віссю $O'y'$ – $41^{\circ}25'$.

На рис. 6.11,*а* зображена сфера у прямокутній диметричній проекції, діаметр якої дорівнює одиниці вимірювання. Розташуємо цю сферу всередині куба, ребра якого також дорівнюють одиниці по напрямку аксонометричних осей $O'x'$ і $O'z'$, а по напрямку осі $O'y'$ ребро в прямокутній диметрії буде виглядати впововину меншим (див. рис. 6.11,*б*). Спроеціюємо сферу на грані куба. Як бачимо, проекції сфери на грані куба менші за розміром (спотворені). Тобто відрізок координатної осі довжиною 1 мм у прямокутній диметрії відобразиться відрізком довжиною 0,94 мм по напрямку осей $O'x'$ і $O'z'$ і відрізком довжиною 0,47 мм по напрямку осі $O'y'$. Співвідношення $1/0,94 = 1,06$ рази визначає коефіцієнт масштабування, на який ми збільшуємо сферу (див. рис. 6.11,*в*). Зараз проекції сфери у вигляді еліпсів вписуються в грані куба (див. рис. 6.11,*г*). Велика вісь еліпсів складає 1,06 діаметра D проекційного кола сфери (екватор, фронтальний меридіан, профільний меридіан), а мала – 0,95 діаметра на фронтальну площину проекцій і 0,35 діаметра на горизонтальну і профільну площини. Розташуємо сферу у звичному нам (європейському) першоквadrантному вигляді проектування. На рис. 6.11,*д* наведені співвідношення для визначення довжини відрізків великої AB і малої CD осей еліпса на фронтальну площину проекцій та малої осі EF еліпсів на горизонтальній та профільній площинах. Величина відрізків 1, 2 і 3, 4 дорівнює діаметру проекційного кола сфери (в загальному випадку діаметру циліндра або отвора на фігурі), а відрізка 5, 6 – половині діаметра проекційного кола сфери.

У прямокутній диметрії слід дотримуватись наведеного на рис. 6.11,*е* правила штриховки. Штрихові лінії спочатку проводять перпендикулярно до аксонометричної осі $O'y'$, а далі

їх проводять через одну лінію до осі $O'y'$ на впововину меншу відстань.

Приклад зображення технічної деталі у прямокутній диметрії наведено на рис. 6.12.



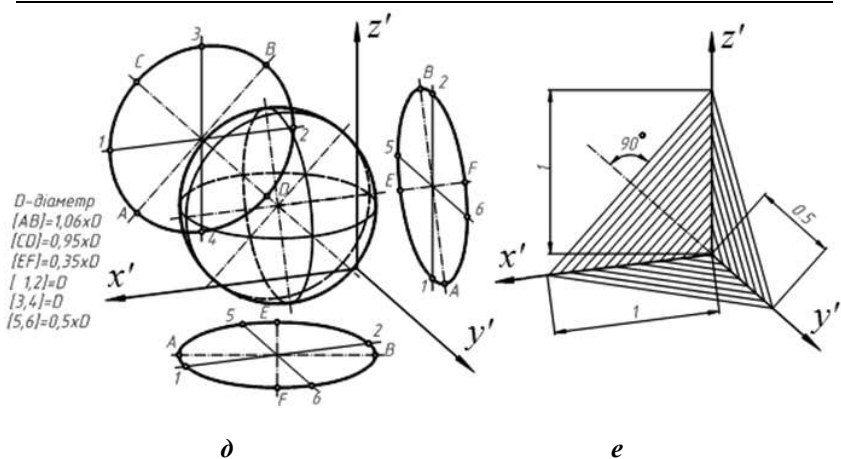


Рис. 6.11

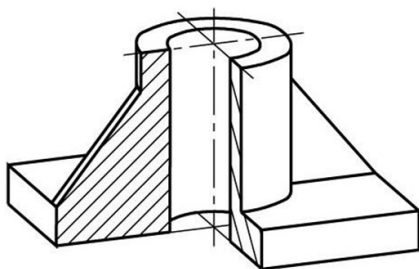


Рис. 6.12

6.3.3. Косокутна фронтальна диметрія

Цей вид аксонометричної проєкції отримується в тому випадку, коли аксонометрична площина проєкцій Π' розташовується паралельно фронтальній площині проєкцій Π_2 ортогональної системи координат і застосовується косокутне проєкціювання.

Косокутну фронтальну диметрію також називають "*кавальєрною проекцією*", або "*кавальєрною перспективою*".

Основний варіант розташування аксонометричних осей у цьому виді аксонометрії припускає, що можна так підібрати напрям проєкціювання s , щоб коефіцієнт спотворення v вздовж аксонометричної осі $0'y'$ був удвічі менший за коефіцієнти u і w , тобто $u = w = 1$, $v = 0,5$.

Тоді кут нахилу осі $0'y'$ до лінії горизонту становитиме 45° (рис. 6.13). Таку проєкцію іноді називають "*кабінетною проєкцією*".

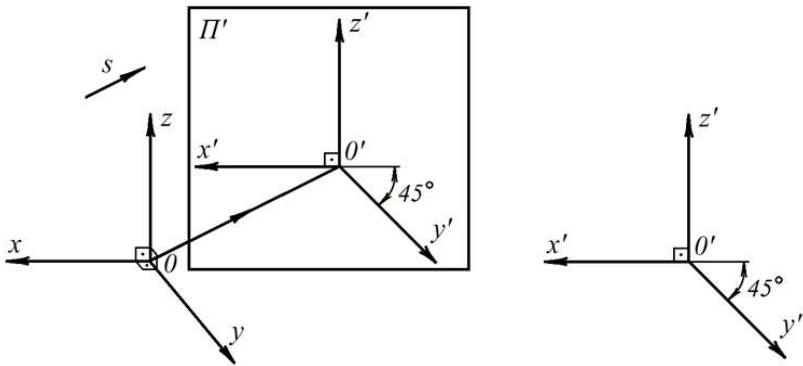


Рис. 6.13

Крім цього, ГОСТ 2.317–69 також передбачає виконання косокутної фронтальної диметрії при розташуванні аксонометричної осі $0'y'$ під кутами 30° і 60° до горизонтальної лінії (рис. 6.14).

Косокутна фронтальна диметрія дозволяє зберігати неспотвореними всі плоскі фігури, у тому числі й кола, площини розташування яких паралельні фронтальній площині проєкцій Π_2 (рис. 6.15, *б, в*).

Щодо інших площин проєкцій, то при косокутному фронтальному проєкціюванні фігури, що в них розташовуються, проєкціюються зі спотворенням. На рис. 6.15, *а* показано напрям виконання штриховки розрізів і вирізів.

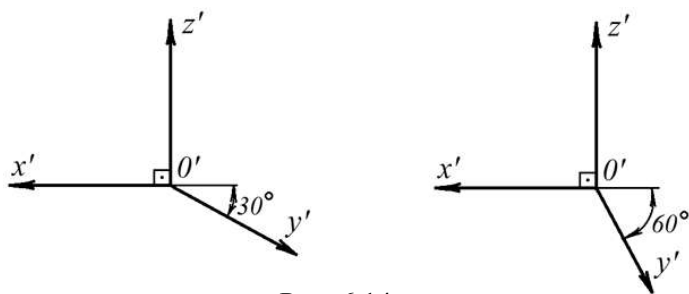
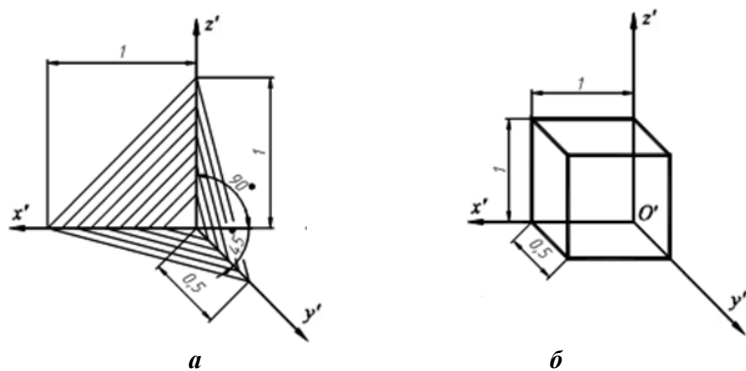
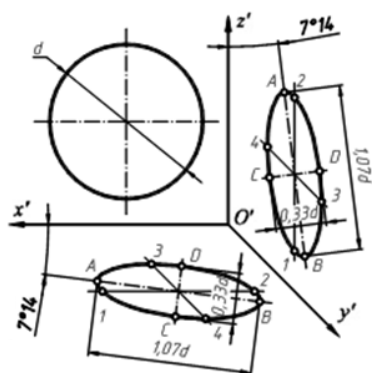


Рис. 6.14



а

б



в

Рис. 6.15

Для порівняння, на рис. 6.16 показано однакову технічну деталь, зображену у прямокутній ізометрії (див. рис. 6.16,*а*) та у косокутній фронтальній диметрії (див. рис. 6.16,*б*).

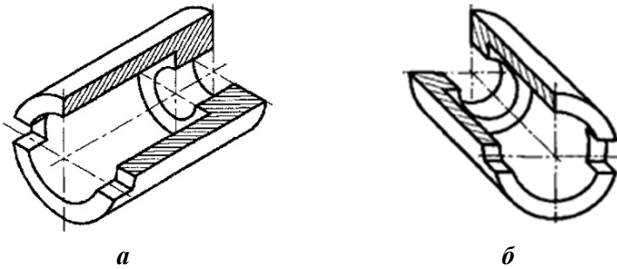


Рис. 6.16

Зіставлення цих двох аксонометричних проєкцій для даної технічної деталі свідчить про переваги косокутної диметрії. Її можна побудувати значно швидше, оскільки немає необхідності креслити еліпси.

6.3.4. Косокутна фронтальна ізометрія

У цьому виді аксонометричної проєкції коефіцієнти спотворення по аксонометричних осях $0'x'$, $0'y'$, $0'z'$ дорівнюють одиниці ($u = w = v = 1$), тобто сама фронтальна проєкція виконується без спотворення по осях x , y , z (рис. 6.17,*б*).

Розташування осей координат косокутної ізометричної проєкції є таким самим, як і для косокутної фронтальної диметрії (див. рис. 6.13 і рис. 6.14), тому й положення її не змінюється.

Кола, які лежать у площинах, паралельних фронтальній площині проєкцій Π_2 , проєкціюються на аксонометричну площину в кола, а кола, що лежать у площинах, паралельних горизонтальній та профільній площинам – в еліпси, великі осі яких нахилені під кутом $22^\circ 30'$ відповідно до осей $0'x'$ і $0'y'$. Великі осі цих еліпсів дорівнюють $1,3d$, а малі – $0,54d$ (рис. 6.17,*в*).

На рис. 6.17, *a* також показано виконання штриховки розрізів і вирізів.

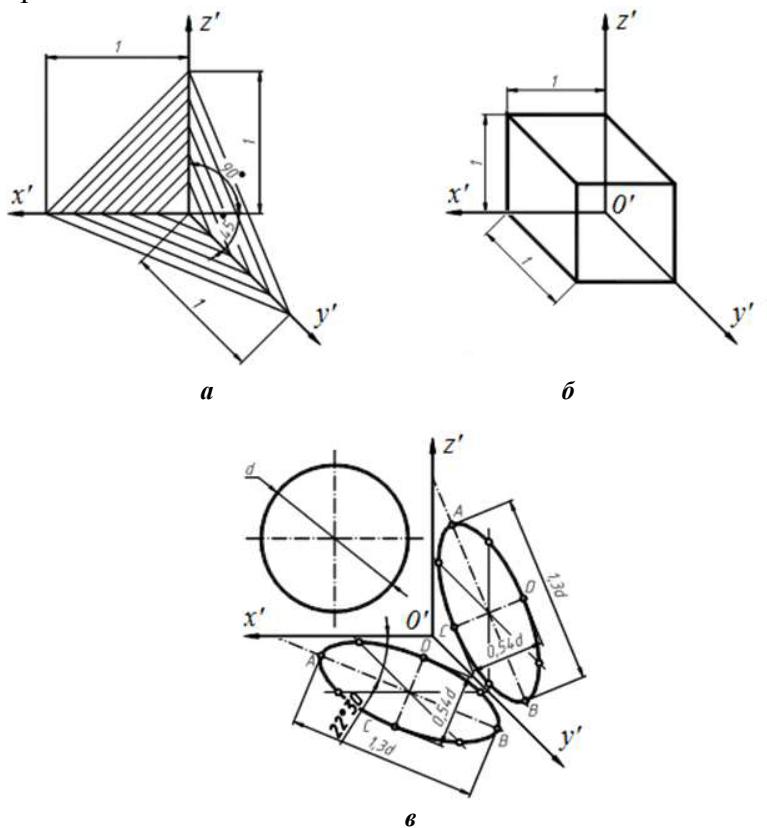


Рис. 6.17

Косокутну фронтальну ізометрію доцільно застосовувати у тому випадку, коли зображувана деталь у напрямку осі $O'y'$ має малі розміри (рис. 6.18).

Застосування для подібних деталей косокутної фронтальної диметрії призведе до зменшення їх розміру вздовж осі $O'y'$ вдвічі, що може бути причиною втрати наочності зображення.

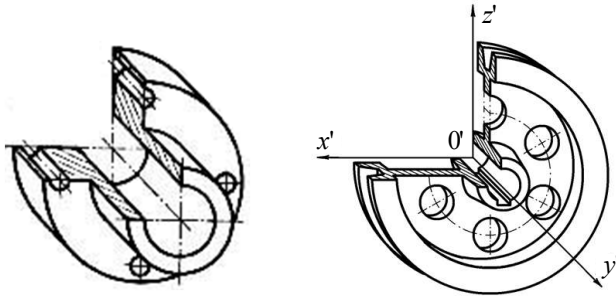


Рис. 6.18

6.3.5. Косокутна горизонтальна ізометрія

Косокутну горизонтальну аксонометричну ізометрію отримують у тому випадку, коли аксонометрична площина проєкцій Π' розташовується паралельно площині проєкцій Π_1 ортогональної системи координат. Іноді косокутну горизонтальну ізометрію ще називають "зенітною" аксонометричною проєкцією.

Напрямок аксонометричних осей для виконання цього виду аксонометрії наведено на рис. 6.19. Коефіцієнти спотворення по цих осях $u = w = v = 1$ (рис. 6.20,б).

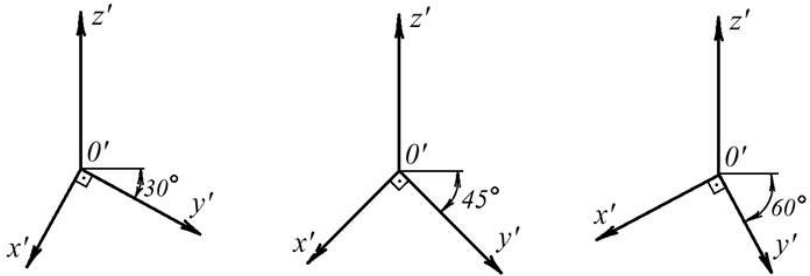


Рис. 6.19

Кола, які розташовані у площинах, паралельних горизонтальній площині проєкцій Π_1 , проєкціюються у натуральну

величину, тобто без спотворення, а кола, розташовані у площинах, паралельних площинам Π_2 і Π_3 – в еліпси. Велика вісь еліпса для кола, паралельного площині проєкцій Π_2 , нахилена до вертикального напрямку під кутом 15° , а еліпса, паралельного площині проєкцій Π_3 – під кутом 30° . Величини великих і малих осей еліпсів, паралельних площинам проєкцій, наведено на рис. 6.20,в. Нарис. 6.20,а показано напрями виконання штриховки розрізів і вирізів.

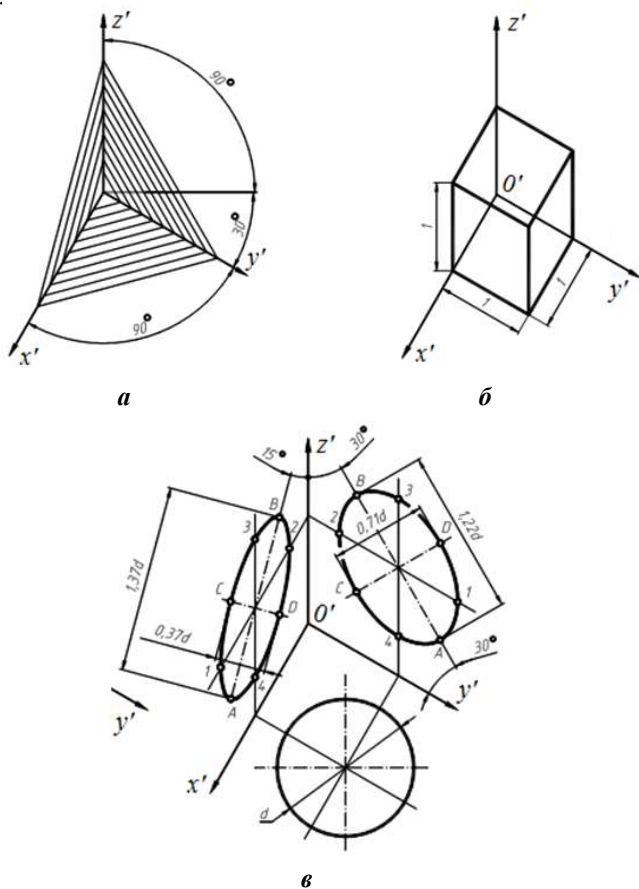


Рис. 6.20

Як видно, у косокутній горизонтальній ізометрії всі плоскі фігури (у тому числі, кола), паралельні площині проєкцій Π_1 , зберігаються неспотвореними.

На рис. 6.21 наведено приклади зображення технічних деталей у косокутній горизонтальній ізометрії.

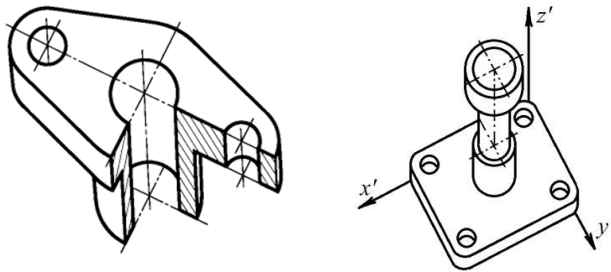


Рис. 6.21

6.4. Аксонометричні проєкції плоских фігур

Для побудови точки в аксонометрії будують координатну ламану лінію з урахуванням коефіцієнтів спотворення по осях x , y , z залежно від виду аксонометрії (рис. 6.22).

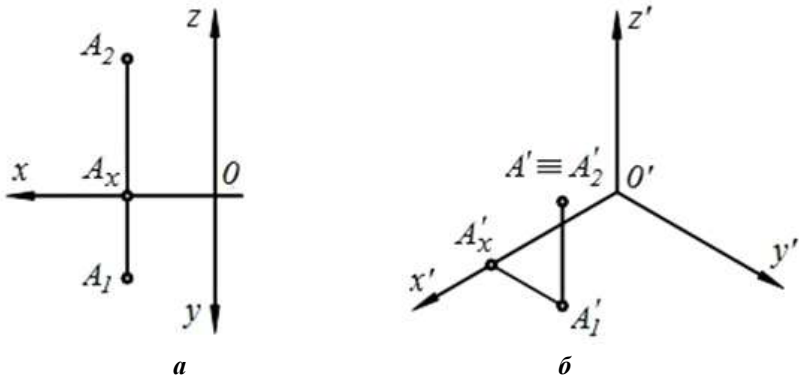


Рис. 6.22

Розглянемо побудову аксонометрії точки, прямої і плоскої фігури в прямокутній ізометрії

В ізометрії коефіцієнти спотворення по осях x, y, z однакові і дорівнюють одиниці.

Відрізок $0A_x$ (див. рис. 6.22,*а*) відкладаємо від точки $0'$ по осі x' аксонометричної системи координат (див. рис. 6.22,*б*). Через одержану точку A'_x проводимо пряму, паралельну y' , на якій відкладаємо відрізок, рівний відрізку A_xA_1 . Одержимо точку A'_1 , з якої проводимо пряму, паралельну z' . На цій прямій відкладаємо відрізок $A'_1A'_2$, рівний відрізку A_xA_2 . Одержана точка A є ізометричною проекцією точки A . При цьому відкладені аксонометричні відрізки складають аксонометричну координатну площину.

Виконуючи розглянуті побудови для кожної точки аксонометричної фігури, можна побудувати модель цієї фігури в аксонометричних проекціях. На рис. 6.23 показана побудова прямокутної ізометрії для відрізка AB , а на рис. 6.24 – побудова прямокутної ізометрії плоскої фігури ABC .

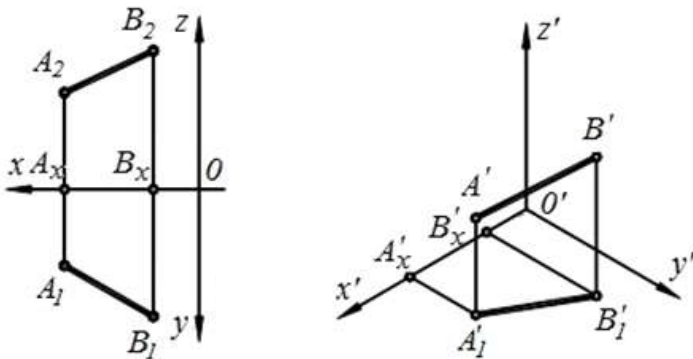


Рис. 6.23

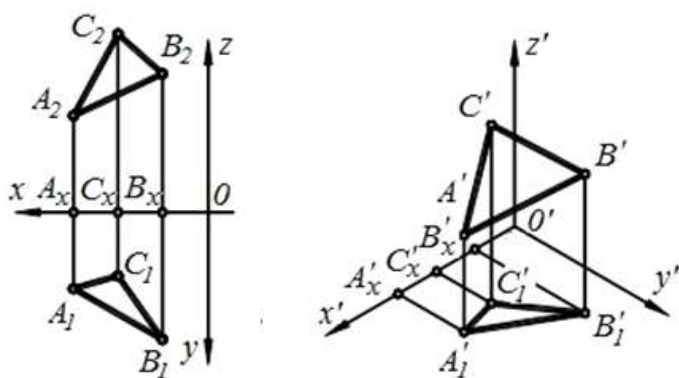


Рис. 6.24

Розглянемо побудову прямокутної ізометрії плоскої фігури, яка лежить у площині проєкцій (або в площині рівня). Оскільки плоскі фігури мають два виміри, то для їх побудови в аксонометрії використовують дві осі, які вибирають залежно від того, якій із площин проєкцій паралельна задана фігура.

На рис. 6.25 зображено правильний шестикутник, який розташований: **а** – паралельно горизонтальній площині; **б** – паралельно фронтальній площині проєкцій; **в** – паралельно профільній площині проєкцій.

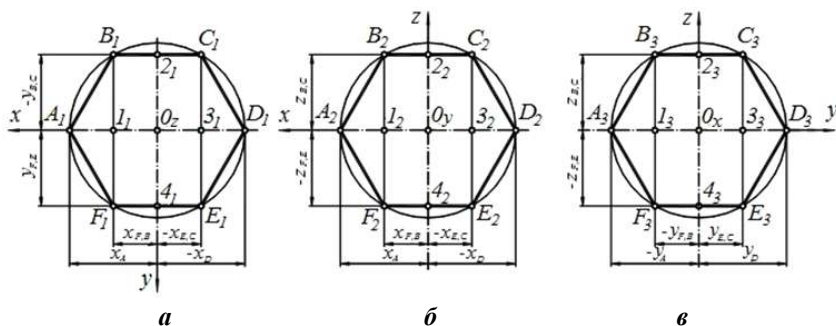


Рис. 6.25

Побудова кожної точки в аксонометричній проекції в загальному випадку здійснюється як показано на рис. 6.22, ми ж скористаємося відомим положенням: аксонометричні проекції паралельних прямих паралельні між собою. Через допоміжні точки $1, 2, 3, 4$, які знаходяться на аксонометричних осях, проводимо прямі, паралельні відповідним аксонометричним осям (рис. 6.26, *а*), і на їхньому перетині позначимо точки B', C', E', F' . Точки A', D' також знаходимо на відповідних аксонометричних осях. З'єднавши всі аксонометричні проекції точок, одержимо аксонометричну проекцію фігури (див. рис. 6.26, *б*).

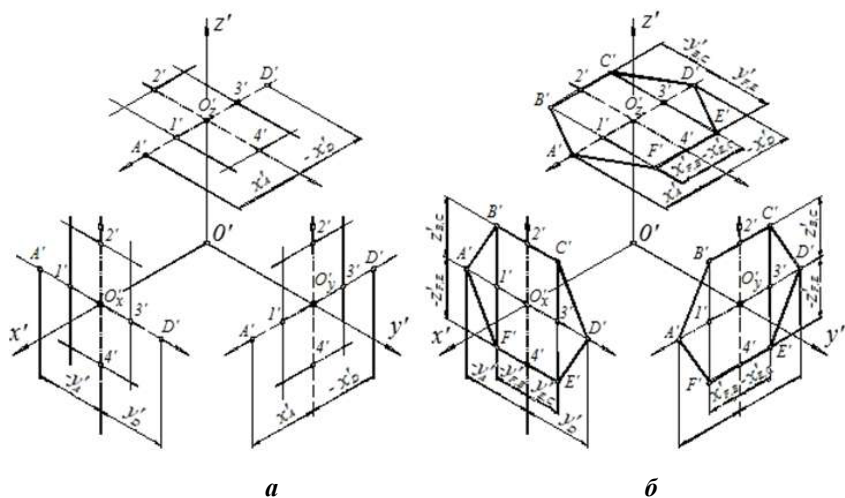


Рис. 6.26

Аксонометрію довільного кола можна побудувати як сукупність аксонометричних проекцій певного числа його точок. Для побудови прямокутної ізометрії кола (рис. 6.27, *а*), яке лежить у координатній площині (або в площині рівня), спочатку необхідно побудувати аксонометрію його центра (точ-

ки O_x , O_y , O_z , див. рис. 6.22), провести через отриману точку прямі, паралельні відповідним двом аксонометричним осям (відрізки $1 - 2 = D$ (діаметр кола в площині) та $3 - 4 = D$). Потім будемо малу вісь еліпса (відрізок $CD = 0,71 \times D$ (штрихпунктирна лінія)), що розташується паралельно аксонометричній осі, відсутній у даній площині, а також велику вісь (відрізок $AB = 1,22 \times D$), яка буде перпендикулярна до неї (див. рис. 6.27,б). По одержаних восьми точках за допомогою лекала викреслюється шуканий еліпс (див. рис. 6.27,в).

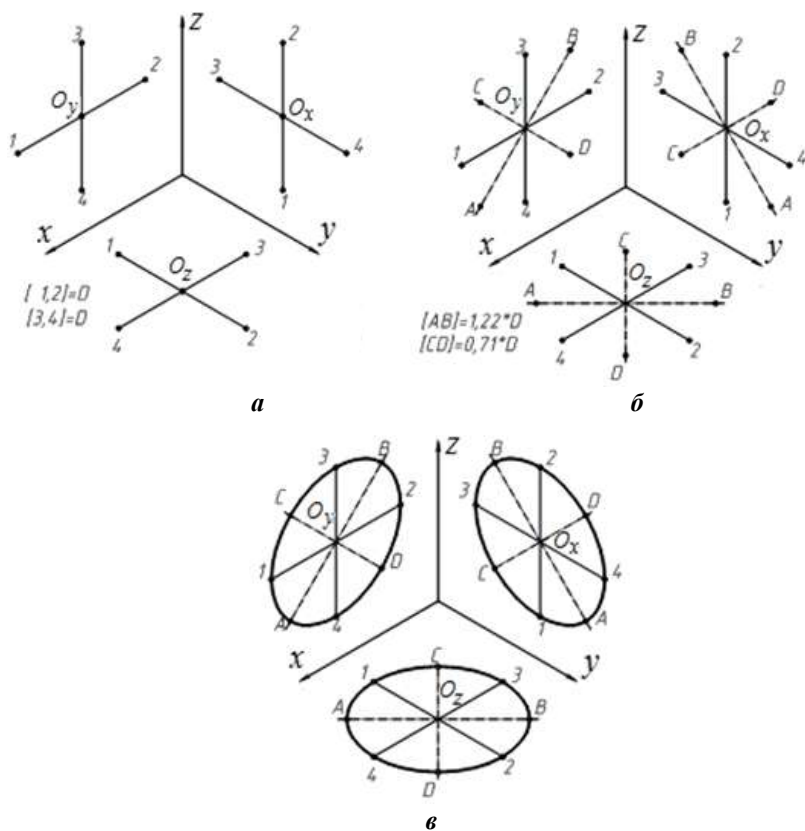


Рис. 6.27

Розглянемо побудову прямокутної диметрії плоскої фігури, яка лежить у площині проєкцій (або в площині рівня). Нагадаємо, що це аксонометрична проєкція з однаковими показниками спотворення по двох осях x і z .

На рис. 6.28 зображено квадрат, який розташований: ***a*** – паралельно горизонтальній площині; ***б*** – паралельно фронтальній площині проєкцій; ***в*** – паралельно профільній площині проєкцій. Разом узяті квадрати є проєкцією куба на ортогональні площини проєкцій. У прямокутній диметрії цей куб зображено на рис. 6.11, з якого видно, що довжина грані по напрямку осі вдвічі менша.

Скористаємось ще раз уже відомим положенням: аксонометричні проєкції паралельних прямих паралельні між собою.

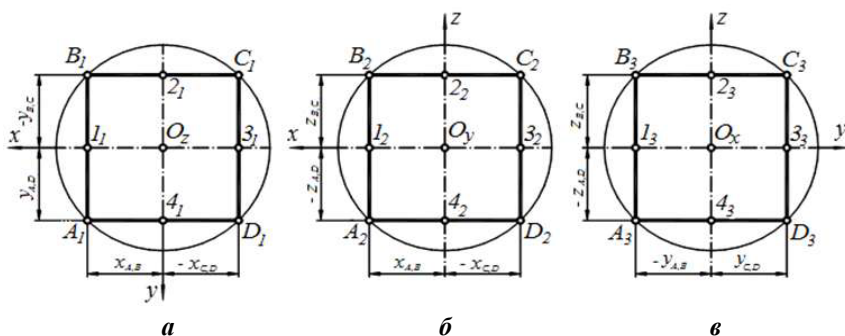


Рис. 6.28

Через допоміжні точки $I, 2, 3, 4$, які знаходяться на аксонометричних осях, проводимо паралельні відповідним аксонометричним осям (рис. 6.29, ***a***), і на їхньому перетині позначимо точки B', C', E', F' . Точки A', D' також знаходимо на відповідних аксонометричних осях. З'єднавши всі аксонометричні проєкції точок, одержимо аксонометричну проєкцію фігури (див. рис. 6.29, ***б***).

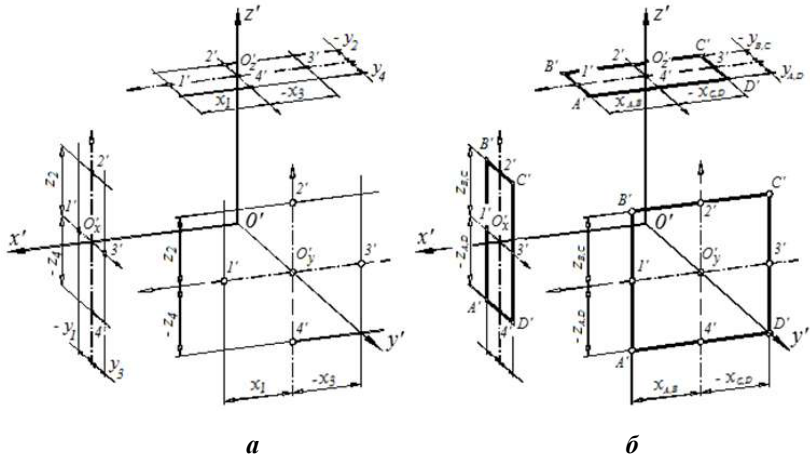
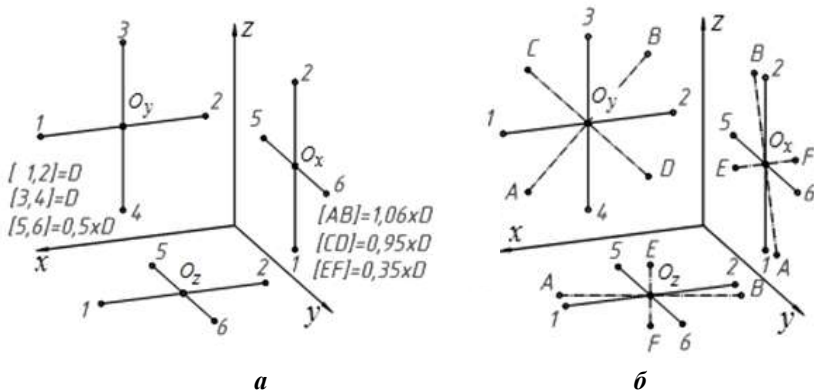


Рис. 6.29

Для побудови прямокутної диметрії кола (рис. 6.30,*а*), яке лежить у координатній площині (або в площині рівня), спочатку необхідно побудувати аксонометрію його центра (точки O_x , O_y , O_z , див. рис. 6.22), провести через отриману точку прямі, паралельні відповідним двом аксонометричним осям (відрізки $1-2=D$; $3-4=D$; $5-6=0,5 \times D$).



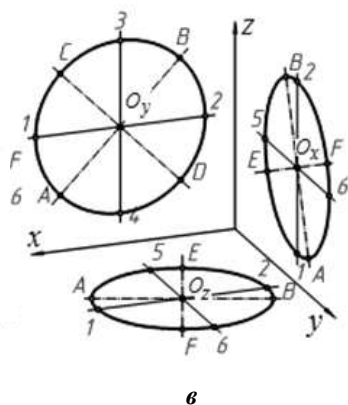


Рис. 6.30

Далі будемо малу вісь еліпса (відрізок $CD = 0,95 \times D$ (штрихпунктирна лінія) або $EF = 0,35 \times D$), що розташується паралельно аксонометричній осі, відсутній у даній площині, а також велику вісь (відрізок $AB = 1,06 \times D$), яка буде перпендикулярна до неї (див. рис. 6.30,б). По одержаних восьми точках по лекалу викреслюється шуканий еліпс (див. рис. 6.30,в).

6.5. Приклади побудови ізометричних проєкцій простих фігур

6.5.1. Побудова прямокутної ізометрії піраміди

Для наведеної на рис. 6.31 піраміди осі координат проводимо так, щоб вони співпадали з її осями симетрії, причому початок координат – 0 буде знаходитися в центрі основи піраміди – α .

Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови основи піраміди (рис. 6.32,а). Основа піраміди – плоска фігура, яка будується згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 6.29). З проєкційного креслення визначаємо

необхідні координати точок та розташування вершини піраміди S (див. рис. 6.32,б).

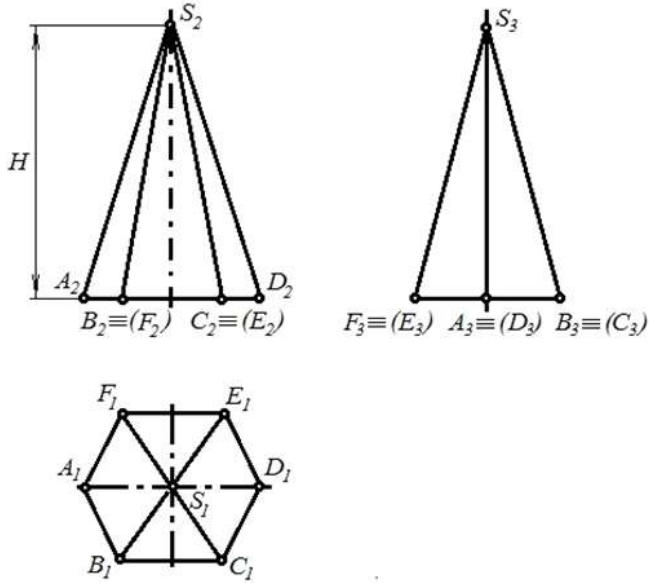
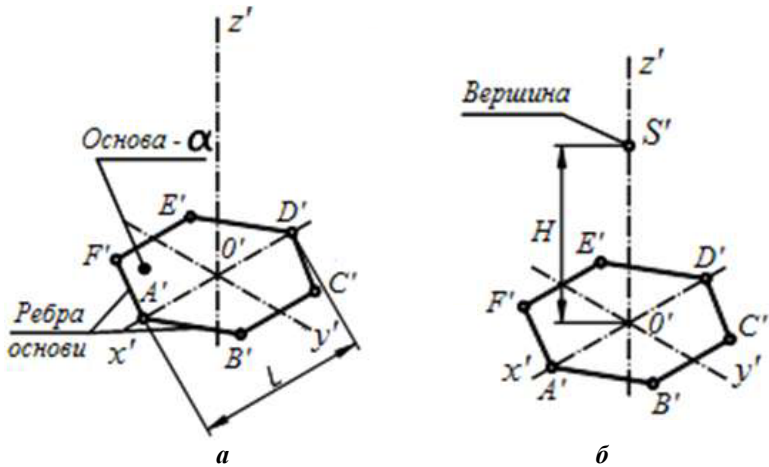
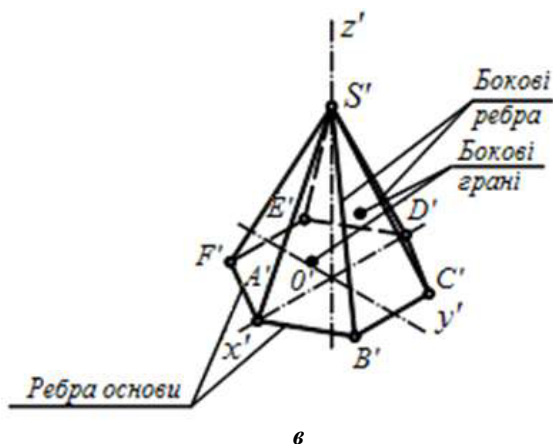


Рис. 6.31





в

Рис. 6.32

Відрізками сполучаємо вершину піраміди з точками в основі, утворюючи бокові ребра та бокові грані (див. рис. 6.32,в).

6.5.2. Побудова прямокутної ізометрії призми

Для наведеної на рис. 6.33 призми осі координат проводимо так, щоб вони співпадали з її осями симетрії, причому початок координат – 0 буде знаходитися в центрі нижньої основи призми – α .

Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови основи призми (рис. 6.34,а). Верхня та нижня основи призми – плоска фігура, яка будується згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 6.26). З проекційного креслення визначаємо необхідні координати точок та розташування верхньої основи призми β (див. рис. 6.34,б). Відрізками сполучаємо точки на верхній та нижній основі, утворюючи бокові ребра та бокові грані – γ (див. рис. 6.34,в).

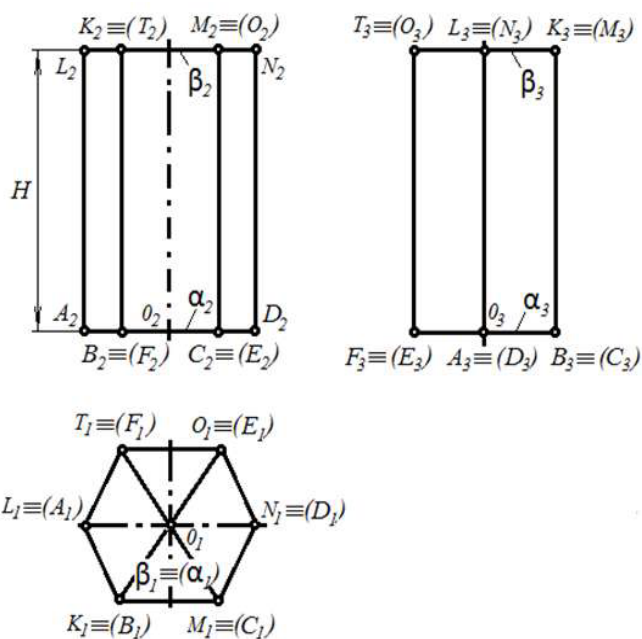


Рис. 6.33

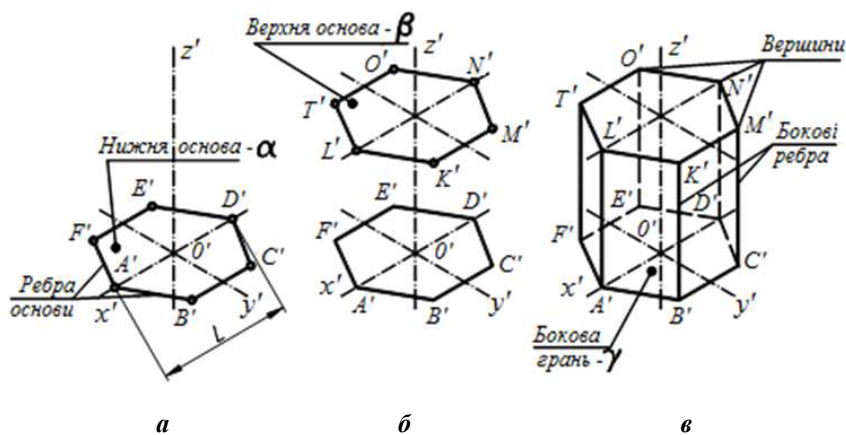


Рис. 6.34

6.5.3. Побудова прямокутної ізометрії конуса

Для прямого конуса (рис. 6.35) осі координат проводимо так, щоб вони співпадали з центром кола в основі, причому початок координат O буде знаходитися в центрі кола.

Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови основи конуса (рис. 6.36, а). Основа конуса – коло, яке будується в ізометрії згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 6.27). З проекційного креслення визначаємо розташування вершини (див. рис. 6.36, б). Сполучаємо вершину конуса відрізками твірних, дотичних до еліптичної кривої (див. рис. 6.36, в).

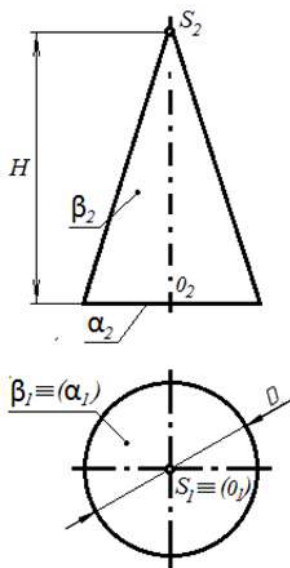


Рис. 6.35

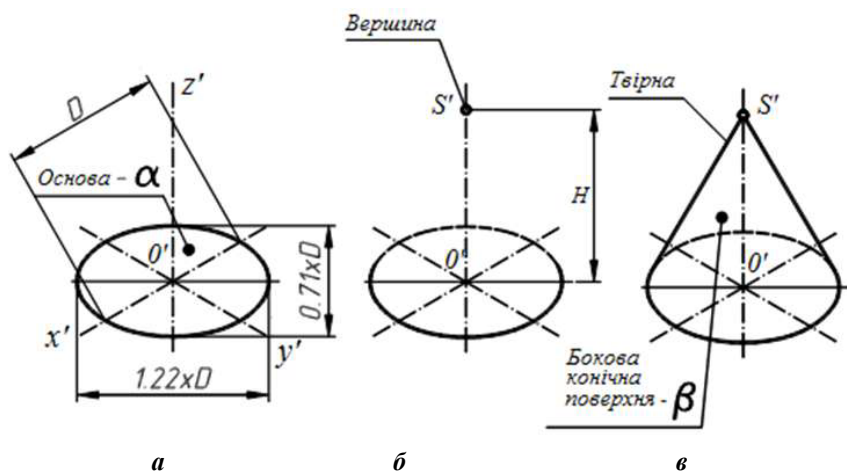


Рис. 6.36

6.5.4. Побудова прямокутної ізометрії циліндра

Для прямого циліндра (рис. 6.37) осі координат проводимо так, щоб вони співпадали з центром кола в основі, причому початок координат O буде знаходитися в центрі кола. Спочатку викреслюємо ізометричні осі для побудови нижньої основи циліндра – β (рис. 6.38,а). Основа циліндра – коло, яке будується в ізометрії згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 6.27). З проекційного креслення визначаємо розташування верхньої основи циліндра α (див. рис. 6.38,б). Сполучаємо верхню та нижню основи відрізками твірних, дотичних до еліптичних кривих (див. рис. 6.38,в).

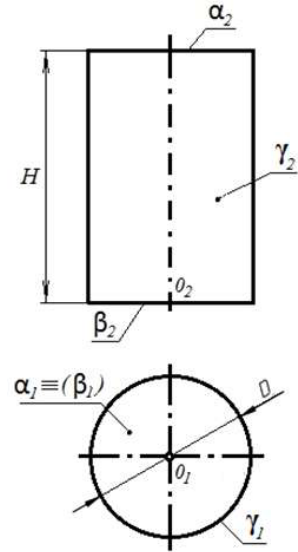


Рис. 6.37

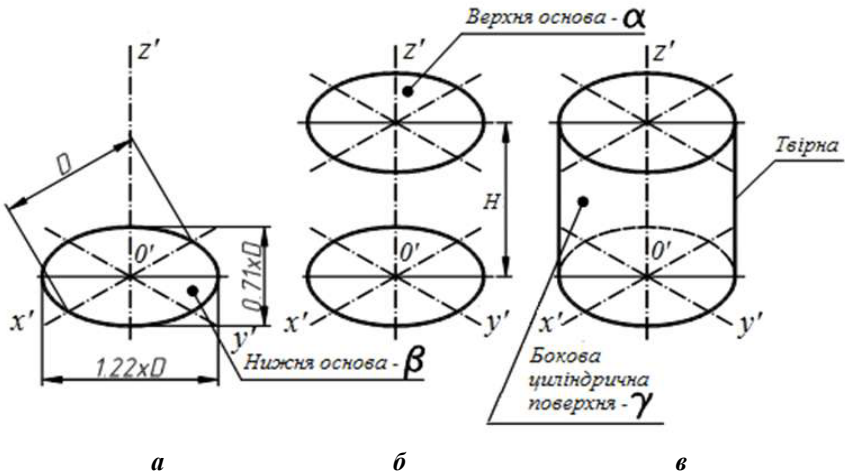


Рис. 6.38

6.5.5. Побудова прямокутної ізометрії сфери

Для побудови прямокутної ізометрії сфери (рис. 6.39,*а*) спочатку необхідно побудувати аксонометрію її центра O . Осі координат сфери перетинаються в її центрі. Спочатку викреслюємо ізометричні осі та приведений діаметр сфери $D_{\Pi} = 1,22 \times D$ (див. рис. 6.39,*б*). При необхідності виконання зрізаних площин в ізометрії кола, яке лежить у координатній площині (або в площині рівня), будується в ізометрії згідно з описом, зробленим раніше (див. рис. 6.28).

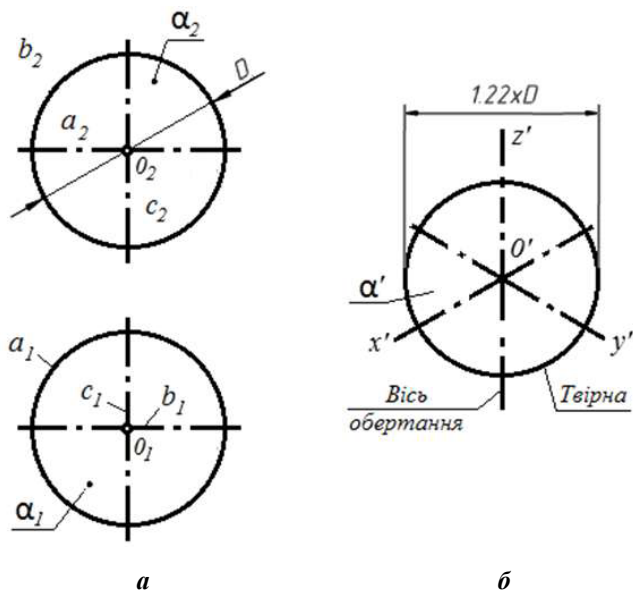


Рис. 6.39

Вигляд півсфери зрізаної горизонтальною, фронтальною, профільною площинами наведено на рис. 6.40,*а–в*. На рис. 6.40,*г* зображена сфера з вирізом у першому октанті простору.

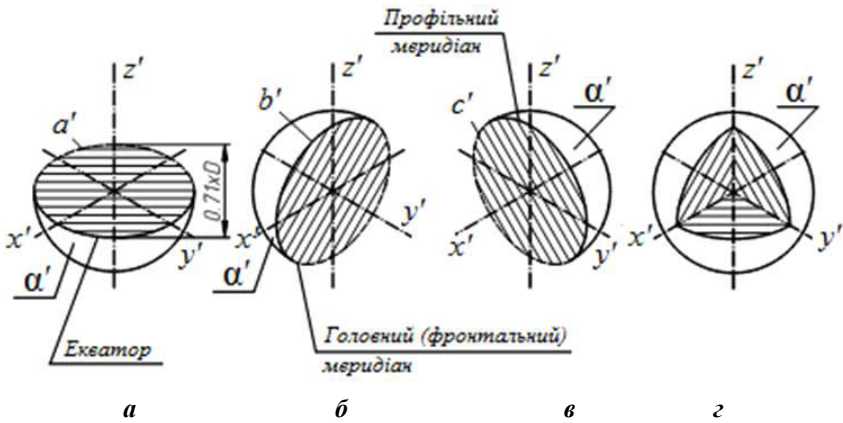


Рис. 6.40

6.6. Приклади побудови ізометричних проєкцій складних фігур

Розглянемо декілька прикладів, на основі яких стане зрозумілим принцип креслення складних фігур з вирізами у прямокутній ізометрії.

Приклад 1. Побудова ізометрії сфери з вирізом.

Побудова прямокутної ізометрії циліндра β та сфери α була розглянута вище (див. рис. 6.37–6.40).

Розглянемо поетапну побудову вирізу на півсфері гранною поверхнею – γ . Для побудови аксонометричного зображення достатньо двох проєкцій півсфери, зображеної на рис. 6.41, *а*.

На висоті від центра півсфери будуюмо осі в площині зрізу гранною поверхнею – γ'_1 .

Знаходимо вісім опорних точок (див. рис. 6.27) для побудови ізометричної проєкції кола горизонтального зрізу радіусом R_1 (див. рис. 6.41, *б*).

На відстані x від центра півсфери будуюмо осі в площині зрізу гранною поверхнею – γ'_2 .

Знаходимо вісім опорних точок для побудови ізометричної проекції кола профільного зрізу радіусом R_2 .

Позначаємо опорні точки $1'$ та $2'$ в перетині еліпсів у площинах γ'_1 та γ'_2 , а також опорні точки $3'$ та $4'$ на екваторі сфери (див. рис. 6.41, *б*).

Усуваємо зайві лінії на ізометричній проекції півсфери (див. рис. 6.41, *з*).

Доцільно перевірити ізометричні проекції точок координатним способом (див. рис. 6.22). Наприклад, для побудови точки в ізометрії необхідно із проекційного креслення (див. рис. 6.41, *а*) визначити відстані до точки 1 по осях x , y , z та послідовно відкласти їх на ізометричному зображенні (див. рис. 6.41, *з*).

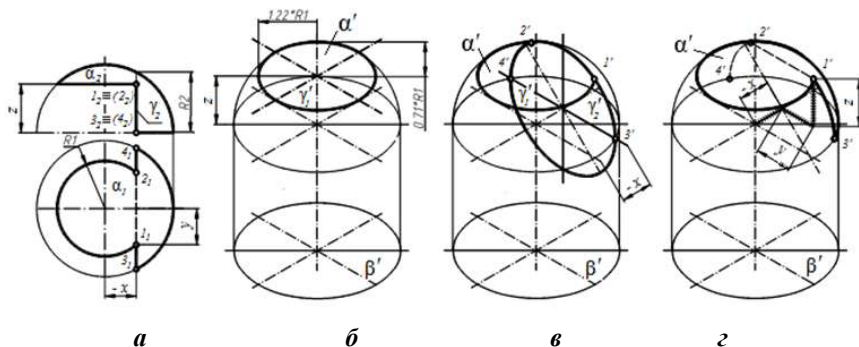


Рис. 6.41

Приклад 2. Побудова ізометрії циліндра з вирізом.

Розглянемо поетапну побудову вирізу на циліндрі гранною поверхнею γ . Для побудови аксонометричного зображення достатньо двох проекцій циліндра, наведеного на рис. 6.42, *а*.

На відстані $(-x, +y, +z)$ та $(-x, -y, +z)$ від центра циліндра знаходимо аксонометричні проекції точок $5'$ та $6'$, що належать лінії перетину площин γ'_2 та γ'_3 (див. рис. 6.42,б).

Аналогічним проекційним способом знаходимо ізометричні проекції точок 7–15 (див. рис. 6.42,в). Усуваємо допоміжні та зайві лінії на ізометричній проекції циліндра (див. рис. 6.42,г).

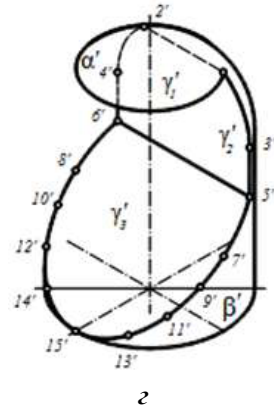
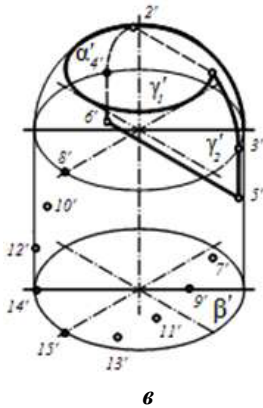
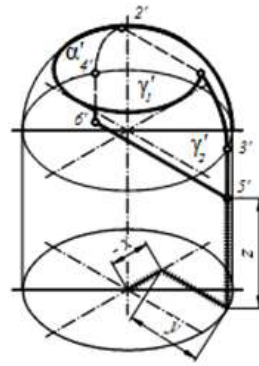
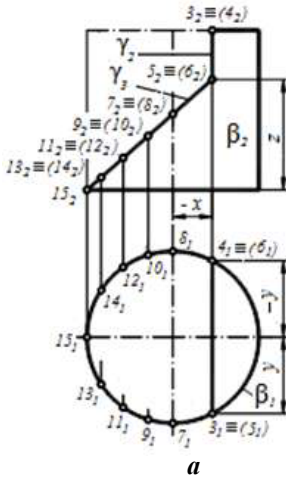


Рис. 6.42

6.7. Завдання "Аксонетричні проєкції"

Завдання. Побудувати аксонометричну проєкцію заданої деталі. Вибрати вид аксонометрії, який є найбільш оптимальним з урахуванням геометричних особливостей заданої деталі.

Завдання "Аксонетричні проєкції" виконується на аркуші формату А3. Приклад його оформлення наведено на рис. 6.43.

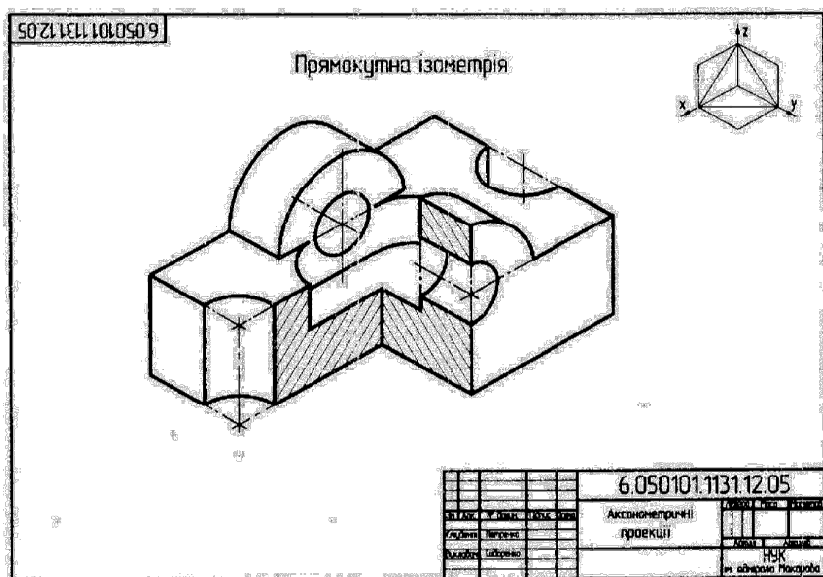


Рис. 6.43

Якщо вид аксонометричної проєкції для виконання наочного зображення деталі не заданий, то потрібно самостійно визначитися з цим питанням, керуючись вище викладеним матеріалом щодо стандартних аксонометричних проєкцій, а також наступним.

Залежно від форми та положення геометричних фігур як складових елементів деталей відносно аксонометричної

площини проєкцій їх зображення можуть набувати більшої чи меншої наочності або недостатньої виразності, чи взагалі бути спотвореними. Тому в кожному конкретному випадку вдалий вибір виду аксонометричної проєкції відіграє далеко не останню роль.

На жаль, чітких рекомендацій з цього приводу немає. Але практика свідчить, що прямокутну ізометрію краще використовувати у тих випадках, коли сторони предмета, які обрані для висвітлення, мають приблизно однакову кількість і складність елементів. Косокутна горизонтальна ізометрія особливо зручна для зображення верхньої сторони деталі. У випадках коли найбільша складність елементів зосереджена на якійсь одній бічній стороні деталі, доцільно використовувати диметричні проєкції.

Фронтальну диметрію бажано застосовувати у тих випадках, коли кола або інші криві лінії розташовані в площинах, паралельних фронтальній площині проєкцій. При цьому кола та криві лінії відображаються в натуральну величину, тобто без спотворення.

При виборі виду аксонометрії необхідно також слідкувати за тим, щоб елементи, які підлягають висвітленню, не опинилися у потоці проєкціювальних променів. У цьому випадку прямі, наприклад, будуть зображені точками, а площини – прямими лініями.

Отже, для того щоб виконати завдання з побудови аксонометричної проєкції деталі, потрібно досконало ознайомитися з особливостями всіх п'яти видів стандартних аксонометрій.

У більшості випадків аксонометричні проєкції деталей виконуються за ортогональним кресленням. Правильно побудована аксонометрія є свідченням того, що студент з'ясував геометричну форму деталі і правильно її відобразив на аксонометричній площині проєкцій.

Рекомендується наступний порядок побудови аксонометричних проєкцій технічних деталей.

1. Спочатку треба ретельно вивчити ортогональне креслення заданої деталі з метою виявлення її устрою і вибору виду аксонометричної проєкції. З урахуванням геометричних особливостей деталі визначити вид аксонометричної проєкції, який є найбільш наочним для кращого уявлення про форму деталі та є оптимальним для виконання її зображення.

Наприклад, для виконання аксонометричної проєкції задано деталь, яка подана в ортогональних проєкціях на рис. 6.44. Оскільки кола або їх дуги у формах цієї деталі розташовані в різних площинах рівня, то застосовувати косокутну аксонометрію недоцільно. Із прямокутних аксонометрій застосуємо прямокутну ізометрію.

2. Деталь пов'язують з прямокутною системою координат. Початок координат раціонально розташувати в центрі нижньої основи деталі (точка O на рис. 6.44).

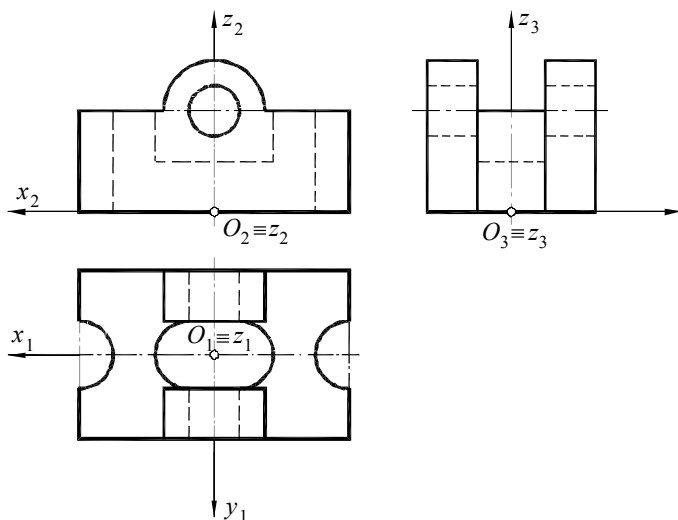


Рис. 6.44

3. Умовно розбивають деталь на більш прості елементи, креслять аксонометричні осі прямокутної ізометрії, будують у тонких лініях зображення нижньої частини деталі, що має форму паралелепіпеда, і намічають напівовали для майбутніх циліндричних поверхонь (рис. 6.45). На першому етапі побудови аксонометрії доцільно показувати як видимі, так і невидимі ребра паралелепіпеда. Якщо просторове уявлення є достатнім, то можна невидимі елементи не креслити.

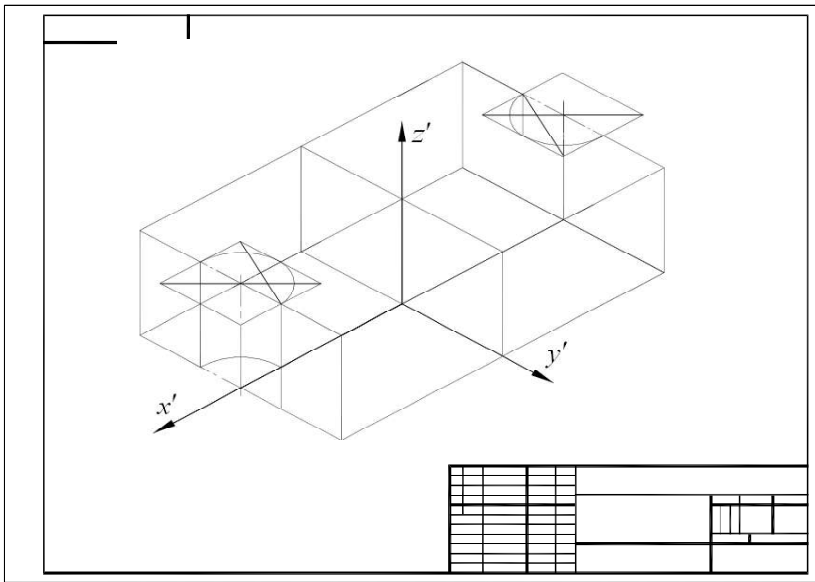


Рис. 6.45

4. Зверху над паралелепіпедом додають напівциліндричні форми деталі і показують у них овали, які далі будуть крізним горизонтально розташованим отвором. Гумкою вилучають проміжні елементи побудов овалів, побудованих на попередньому етапі, та невидимі лінії основи деталі, тобто паралелепіпеда (рис. 6.46).

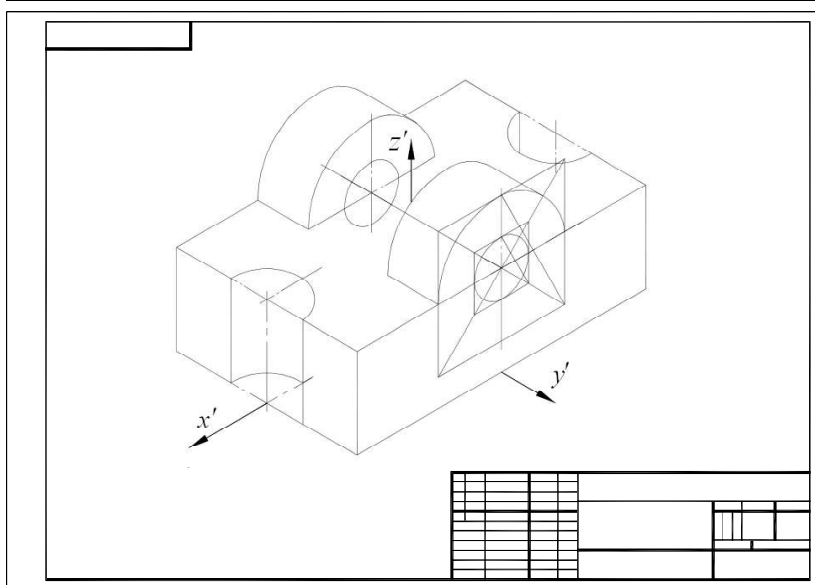


Рис. 6.46

5. На верхній грані паралелепіпеда відтворюють форму поглиблення, яке складається з двох половинок овалів, з'єднаних між собою відрізками двох паралельних прямих (рис. 6.47).

6. Для з'ясування внутрішнього устрою виконують умовний розріз деталі координатними площинами рівня xOz і zOy . Частину деталі, що вилучається, видаляють гумкою і отримують аксонометричну проекцію (рис. 6.48).

7. Площі перерізів в умовних вирізах, де січні площини перетинають матеріал деталі, заштриховують (рис. 6.49). Штриховку виконують за правилами, викладеними вище. Схему штриховки рекомендується виконувати в правому верхньому куті формату (див. рис. 6.43).

8. Вилучають усі зайві лінії та обводять тільки видимі контури суцільною основною лінією. Центри кіл позначають перетином діаметрів, паралельних аксонометричним осям.

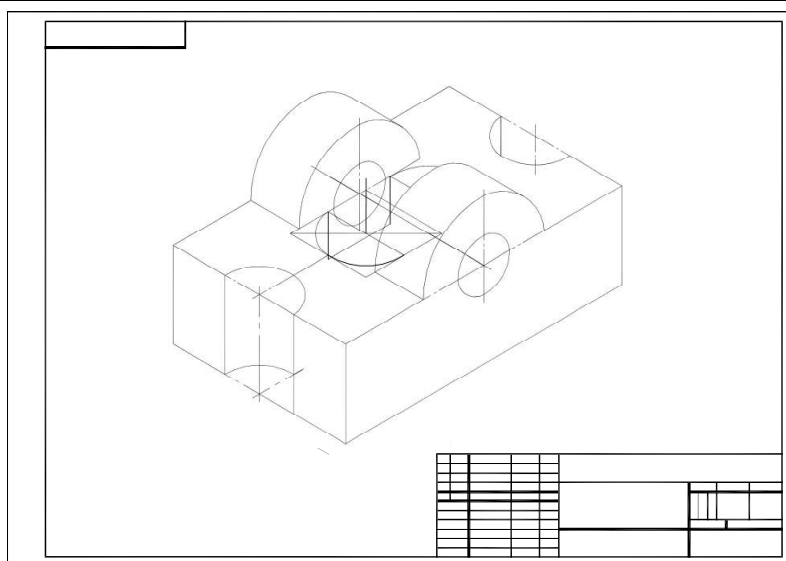


Рис. 6.47

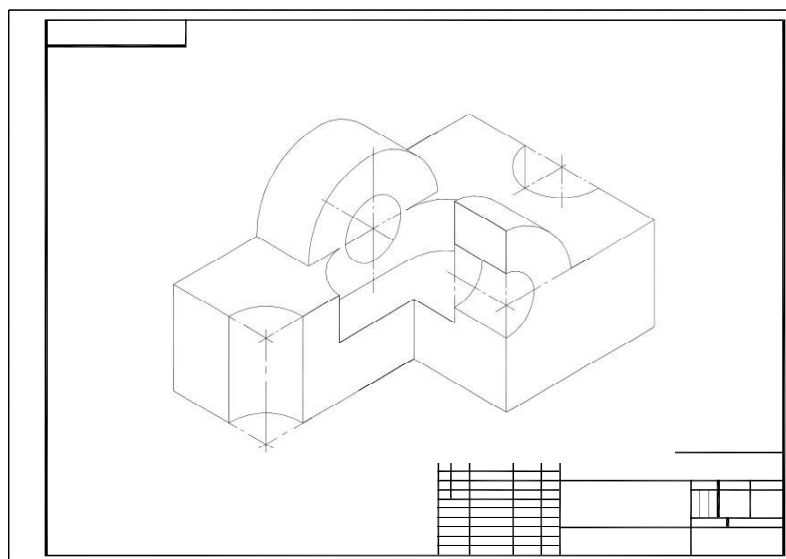


Рис. 6.48

9. На вільному полі креслення (бажано над зображенням) виконують напис назви аксонометричної проекції, в якій виконано зображення, стандартним креслярським шрифтом розміру 10. Заповнюють основний напис і додаткову графу до нього. Остаточного завдання "Аксонометричні проекції" набуває вигляду, показаного на рис. 6.43.

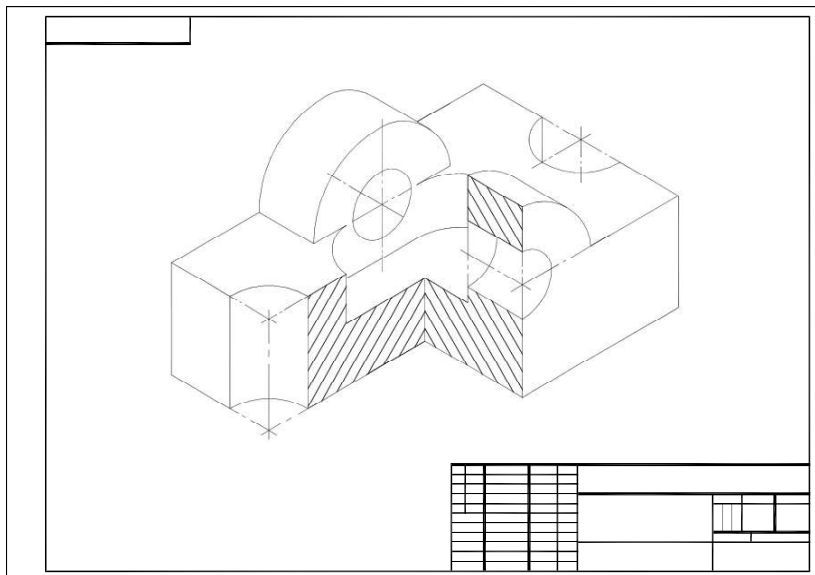


Рис. 6.49



7. ПЕРСПЕКТИВА

7.1. Основні поняття та визначення

Перспективні проекції, які отримуються шляхом центрального проєкціювання, є науковою базою реалістичного рисунка, тому що дають можливість отримувати зображення предметів, наближені до їх зорового образу. Крім цього, цей вид проєкцій використовується також і для побудови наочних зображень різних технічних об'єктів. Такі зображення, як і метод їх побудови, називають "перспективою".

Перспектива – наука про зображення предметів у просторі на площині або будь-якій поверхні відповідно до тих уявних скорочень їх розмірів, змін обрисів форми і світлотіньових відношень, які мають місце в натурі.

Назва "перспектива" походить від латинського слова *perspicere*, що у перекладі означає "дивитись наскрізь".

Перспектива може бути побудована різними способами і на різних поверхнях: на нахилений і вертикальній площинах, на поверхні циліндра, сфери тощо. Перспективні побудови мають виконуватися з високою точністю і акуратністю за допомогою креслярських інструментів.

Лінійна перспектива вивчає способи побудови перспективних зображень на площині. Задача лінійної перспективи – побудова обрису різних тіл таким чином, щоб уявлення про

форми і характер предметів при огляді їх в натурі та на рисунку були тотожними. Побудова зображень складних технічних об'єктів на основі зорової перспективи дуже складна і може досить легко призвести до неточностей при передачі їх форми і розмірів, побудова ж рисунків за відомими розмірами або ортогональними проекціями таких об'єктів взагалі неможлива.

Основний закон лінійної перспективи полягає в тому, що предмети, які мають однакові розміри і віддалені від спостерігача на різну відстань, на картині зображуються неоднаковими: чим далі знаходиться предмет, тим менше на картині буде його зображення.

В основі побудови перспективних зображень лежить метод центрального проєкціювання, який достатньо повно відповідає властивостям зору людини. Сутність цього методу полягає в тому, що сукупність точок зображення предмета на площині отримується в результаті перетину з цією площиною проєкціювальних прямих, які проведені через точки предмета з деякої точки простору, яка має назву *центр проєкції* (точка S на рис. 7.1).

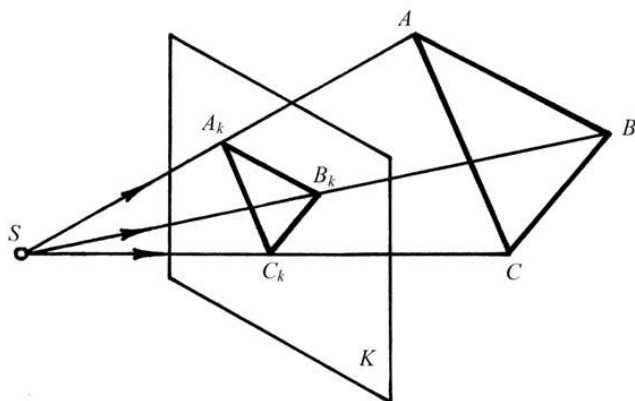


Рис. 7.1

Для того щоб отримати центральну проекцію відрізка $A'B'$ на заданій площині K та із центром проєкцій у точці S , необхідно провести з точки зору промені, які направлені в кінці відрізка (точки A' та B'), до перетину цих променів із площиною K (рис. 7.2). Після поєднання за допомогою прямої отриманих на площині точок A і B будемо мати перспективу заданого відрізка, або його центральну проекцію.

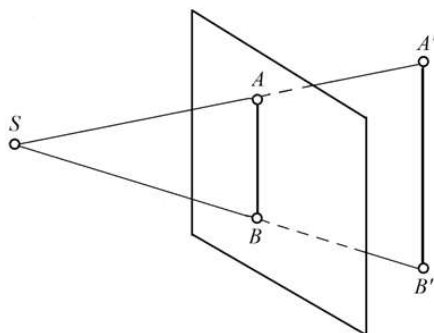


Рис. 7.2

Залежно від того, де буде розташовано відрізок (перед площиною або за нею), його перспектива може бути менше самого відрізка (див. рис. 7.2) або більше за нього (рис. 7.3).

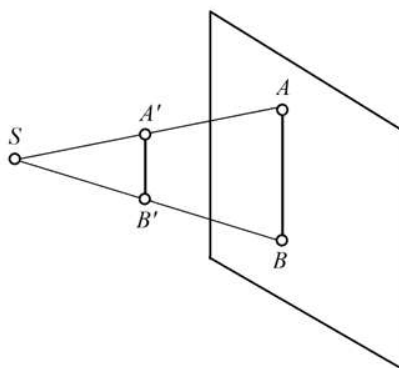


Рис. 7.3

На принципі центральної проекції ґрунтується отримання фотографічних зображень.

Центральна проекція предмета – це його зображення, яке отримано за допомогою прямих (або проекціювальних променів), що проведені з однієї точки.

Якщо проекціювальні промені направити з точки S не на площину, а на внутрішню поверхню циліндра, то отримане зображення буде мати назву *панорамна перспектива*. При проекціюванні предмета на внутрішню поверхню сфери отримуємо *купольну перспективу*.

Вивчення побудови перспективних зображень краще всього розглядати за допомогою проекціювального апарату, який складається з системи площин, ліній і точок (рис. 7.4).

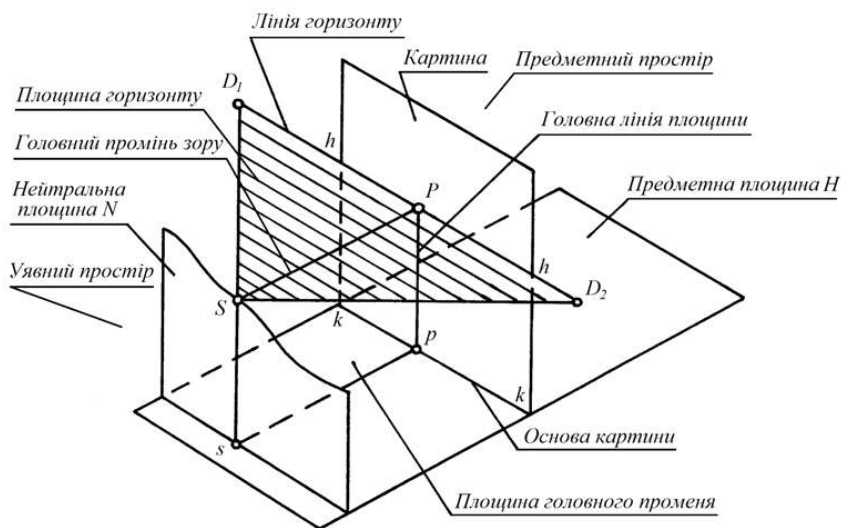


Рис. 7.4

При побудові перспективних зображень на площині використовують допоміжну систему площин, ліній і точок, яка

називається системою перспективних координат. Розглянемо основні елементи цієї системи (див. рис. 7.4):

1. Горизонтальна предметна площина H , на якій розташований предмет для зображення, глядач та картинна площина.

2. Картинна площина або просто картина K , на якій будується перспективне зображення предмета.

3. Лінія перетину картини з предметною площиною, що називається *лінією основи картини* і визначає положення останньої відносно предметної площини $k-k$.

4. Центр проєкцій, або точка зору S , яка визначає положення очей глядача відносно картинної та предметної площин. Ортогональна проєкція точки зору s на предметну площину називається точкою стояння, а величина перпендикуляра Ss – висотою точки зору.

5. Головна точка картини P , що є ортогональною проєкцією точки зору на картинну площину. Відрізок перпендикуляра SP визначає відстань від глядача до картини, яка має назву головної відстані. Сам перпендикуляр називається головним променем зору.

6. Лінія $h-h$ перетину з картиною горизонтальної площини, що проходить через точку зору, має назву *лінія горизонту*, або просто *горизонт*. Вона завжди проходить через головну точку картини паралельно лінії основи картини. Відрізок перпендикуляра, який опущено з будь-якої точки лінії горизонту на основу картини, наприклад Pp , визначає на картині висоту точки зору (висоту горизонту).

7. Дистанційні точки D_1, D_2 розташовуються на лінії горизонту, праворуч і ліворуч від головної точки картини P , на відстані, яка дорівнює головній відстані картини.

8. Площина N , що проходить через точку зору паралельно картинній площині, називається *нейтральною площиною*.

Простір, в якому зазвичай розташовують предмети і який знаходиться перед глядачем за картиною, називається *предметним*. Простір, що знаходиться між картиною і нейтраль-

ною площиною, називається *нейтральним*, а простір за нейтральною площиною позаду глядача – *уявним*.

Крім предметного простору, іноді об'єкти для зображення розташовують також і в нейтральному просторі. В уявному просторі розглядаються, як правило, тільки деякі нескінченно віддалені точки.

7.2. Перспектива точки

Центральна проекція, або перспектива точки A , яку розташовано в предметному просторі, отримується як точка перетину з картинною площиною проекціювального променя, який проведено з точки зору S у точку простору A (рис. 7.5).

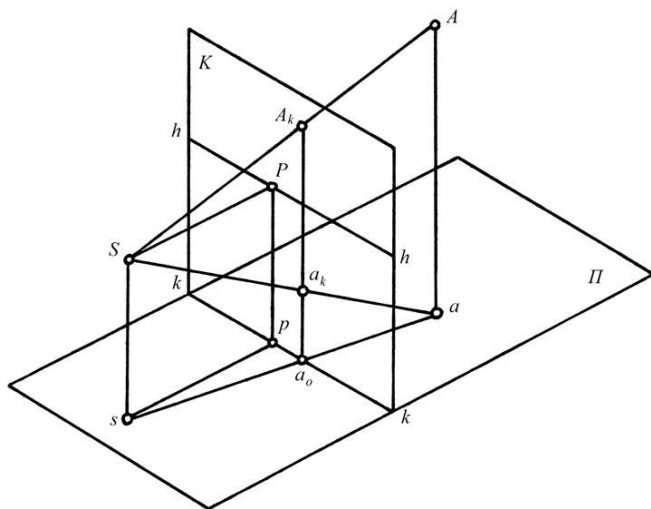


Рис. 7.5

Як відомо, одна проекція точки не визначає її положення у просторі. Рішення зворотної задачі проекціювання, тобто визначення розмірів і форми предметів за їх проекціями

у найбільш поширених видах проєкцій – ортогональних і аксонометричних, здійснюється за допомогою двох проєкцій кожної точки предмета.

Так само за допомогою двох проєкцій однієї і тієї ж точки розв'язується зворотна задача проєкціювання і в перспективних проєкціях. Другою проєкцією точки A на картині є a_k – перспектива основи точки, яку отримано шляхом центрального проєкціювання (див. рис. 7.5). При цьому перспектива точки і перспектива її основи розташовуються на одному перпендикулярі до лінії основи картини.

Перспективи самих точок та їх основ для будь-яких точок предметного простору завжди розташовуються на картині вище лінії її основи $k-k$. Нижче лінії $k-k$ можуть розташовуватися лише перспективи точок, що знаходяться у нейтральному й уявному просторах.

Основа точки M , що знаходиться у предметній площині, співпадає з самою точкою. Також співпадають на картині перспектива цієї точки і перспектива її основи (рис. 7.6).

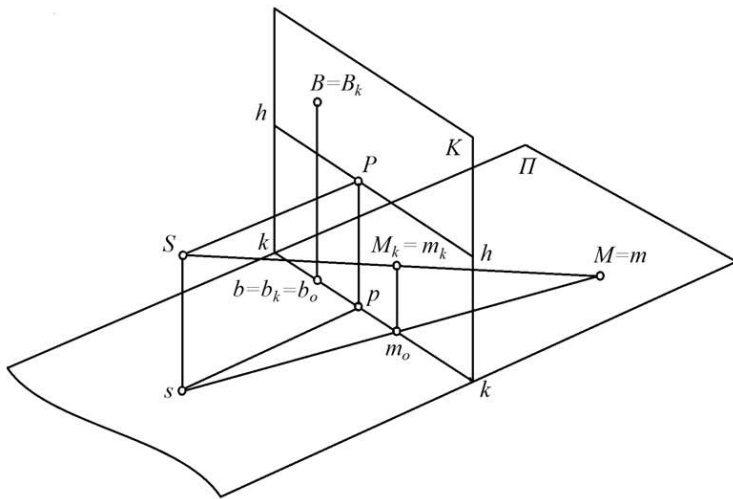


Рис. 7.6

Перспектива точки B , яку розташовано в картинній площині, співпадає з самою точкою.

7.3. Перспектива прямої лінії

Перспектива прямої лінії, яка довільно розташована у просторі, отримується на проєкціювальному апараті як сукупність точок перетину з картинною площиною зорових променів, що проведені в кожній точці цієї прямої. Ці промені утворюють площину, яка має назву *променевої*. Таким чином, перспектива прямої на площину є прямою лінією, оскільки є результатом перетину двох площин – картинної та променевої. Із цього випливає, що для побудови перспективи прямої достатньо побудувати перспективу двох її точок, тоді пряма, яка проведена через знайдені точки, буде перспективою заданої прямої.

Оскільки перспектива будь-якої точки простору визначається двома її проєкціями, то перспектива прямої AB на картинній площині буде задана центральними проєкціями цієї прямої та її основи (рис. 7.7).

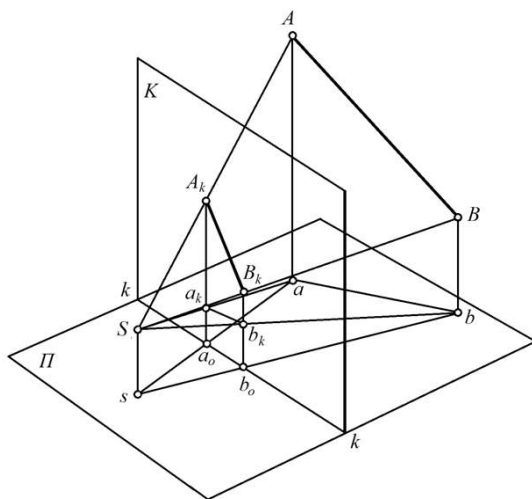


Рис. 7.7

7.4. Гранична точка прямої. Лінія горизонту

Для побудови зображення нескінченно віддаленої точки F прямої AB необхідно провести зоровий промінь через цю точку (рис. 7.8). Але тоді промінь зору стане паралельним самій прямій, а точка його перетину з картинною площиною буде служити центральною проекцією нескінченно віддаленої точки цієї прямої. Із побудови випливає, що проекція прямої AB не може бути продовжена на картині далі точки $F_{\infty k}$, яка називається – *гранична точка прямої*. З побудови помітно, що для будь-якої прямої, яка розташована в предметній площині, гранична точка розташована від основи картини на відстані, яка дорівнює висоті точки зору.

Таким чином, сукупність граничних точок усіх прямих, які розташовані в предметній площині, є на картині прямою, що розташована паралельно основі картини і розташована від неї на відстані, яка дорівнює висоті точки зору. Ця пряма є граничною прямою предметної площини. Вона є перспективою нескінченно віддаленої прямої предметної площини і обмежує на картині зображення предметної площини з усіма точками і лініями, що їй належать. Гранична пряма предметної площини на картині є лінією горизонту $h-h$. Положення початкової і граничної точок прямої наведено на рис. 7.8.

Лінія горизонту, головна точка картини і основа картини є основними елементами перспективного зображення, які служать опорою для правильної побудови зображення на картинній площині.

На рис. 7.9 зображена окремо від проекціювального апарату площина картини K з нанесеними на ній основою картини, лінією горизонту та головною точкою P .

Наявність на картині вказаних елементів дає можливість отримати основні відомості про взаємне розташування елементів проекціювального апарату. Лінії горизонту та основи обмежують частину картинної площини, на яку проекціюють-

ся точки предметної площини, а також точки предметного простору, що розташовані нижче площини горизонту.

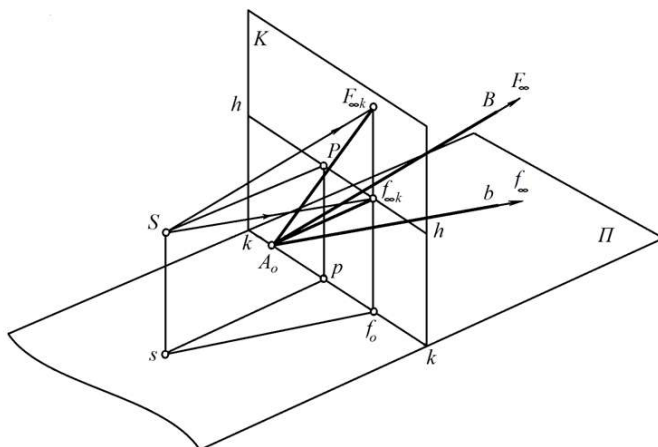


Рис. 7.8

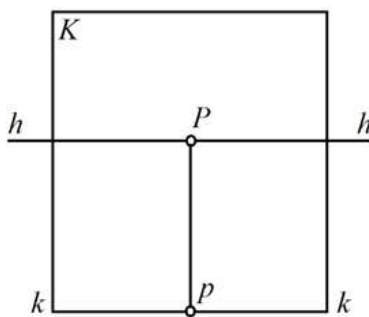


Рис. 7.9

7.5. Побудова перспективи точки за її ортогональними проекціями

На рис. 7.10 задані ортогональні проекції точки A , яка представлена в системі двох взаємно перпендикулярних

площин проєкцій. На цьому ж кресленні зображена проєкція картинної площини K , яка розташована перпендикулярно до горизонтальної площини проєкцій H , що задана своїм слідом $k-k$, а також проєкції точки зору S . Центральні проєкції точки A можуть бути отримані, як точки перетину зорових променів, що проведені з точки зору через точку A та її основу, з горизонтально-проєкціовальною картинною площиною K .

На рис. 7.11 зображено задану окремо картинну площину K з побудованою на ній перспективою точки A . Положення центральних проєкцій точки A відносно основи картини визначено за фронтальною проєкцією на рис. 7.10. Положення лінії зв'язку визначено по відношенню до головної точки картини P . Перспектива прямої лінії за її заданими ортогональними проєкціями може бути визначена за перспективами двох точок, кінців її відрізка, так, як це показано на рис. 7.10.

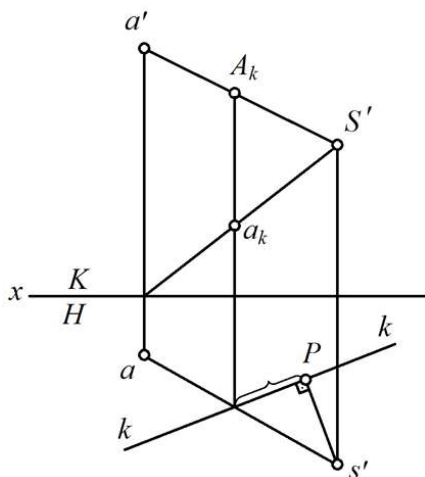


Рис. 7.10

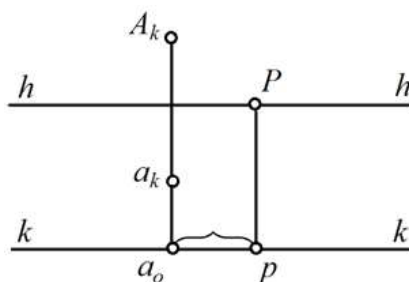


Рис. 7.11

7.6. Перспектива пучка паралельних прямих. Точка сходу

Розглянемо на проєкціювальному апараті побудову центральних проєкцій групи паралельних прямих, які розташовані в предметній площині та зовні. Перспектива кожної із заданих прямих визначена на кресленні її картинним слідом та граничною точкою. Для побудови граничних точок були проведені проєкціювальні промені, які паралельні напрямку прямих і напрямку їх основи. З побудови випливає, що перспективи прямих мають спільну граничну точку F_{ok} . Таким чином, розглянута група паралельних прямих зобразиться на картині у вигляді пучка прямих, які сходяться в одній точці. Ця спільна гранична точка F_{ok} має назву точки сходу паралельних прямих (рис. 7.12). Перспективу пучка паралельних прямих наведено на рис. 7.13.

Оскільки паралельні лінії можуть займати різне положення по відношенню до предметної та картинної площин, точки сходу їх перспективних проєкцій також будуть займати різне положення відносно основних елементів картини – лінії горизонту, головної точки та ін. Установимо розташування на картині точок сходу перспектив найбільш характерних напрямків паралельних прямих.

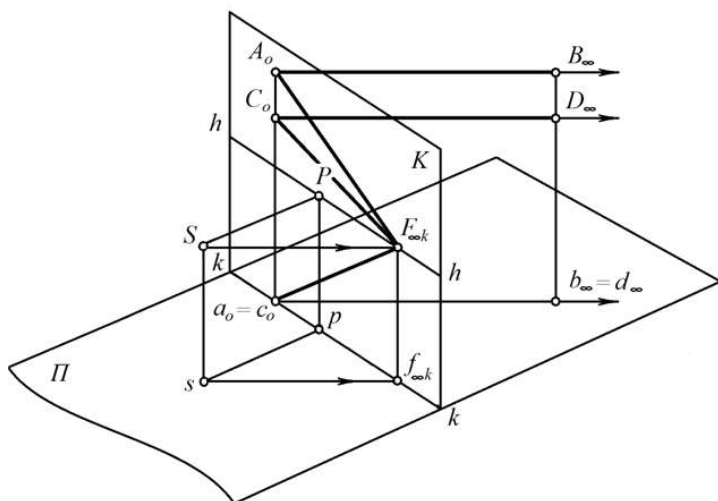


Рис. 7.12

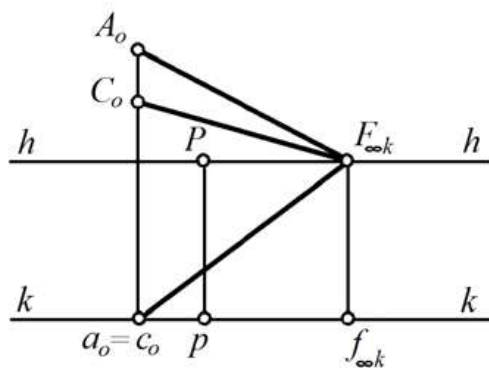


Рис. 7.13

Для побудови перспектив прямих, перпендикулярних до картини, з точки зору S проводимо промінь, паралельний заданим прямим (рис. 7.14).

Він перетне картинну площину в головній точці картини. Відповідно, точкою сходу перспектив прямих, перпендикулярних до картинної площини, виступає головна точка картини.

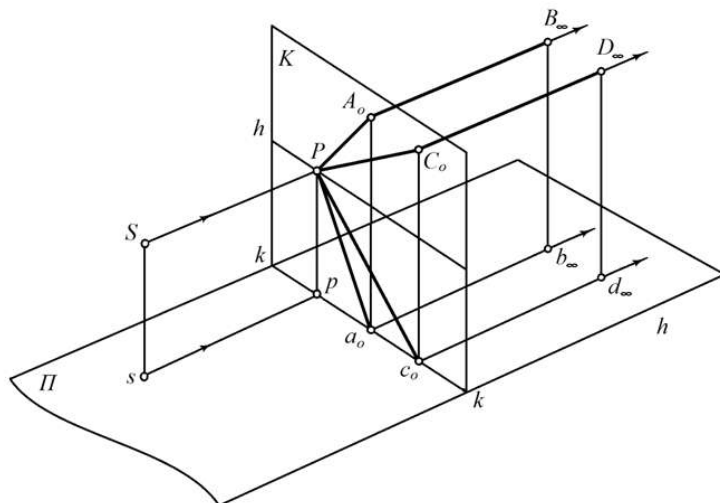


Рис. 7.14

При побудові та читанні перспективних зображень велике значення має визначення точок сходу перспектив основ заданих паралельних прямих. У прямих, перпендикулярних до картинної площини, їх основи також перпендикулярні до картини, як і вони самі. Тому точкою сходу перспектив їх основ буде також головна точка картини P (рис. 7.15).

При побудові перспектив найрізноманітніших об'єктів майже завжди виникає необхідність у зображенні прямих, які розташовані в горизонтальних площинах і нахилені до картини під різними кутами. Розглянемо випадок, коли задані прямі (рис. 7.16) паралельні предметній площині та нахилені до картинної площини під кутом 45° . З точки зору S проводимо проєкціювальні промені, які паралельні заданим

прямим. Точка сходу прямих D_1 буде розташована на лінії горизонту, тому що проєкціовальні промені, які паралельні горизонтальним прямим, розташовані у площині горизонту. Відрізки DP та SP рівні між собою як сторони рівнобедреного прямокутного трикутника SPD . З цього випливає, що отримана точка сходу D_2 співпала з дистанційною точкою картини.

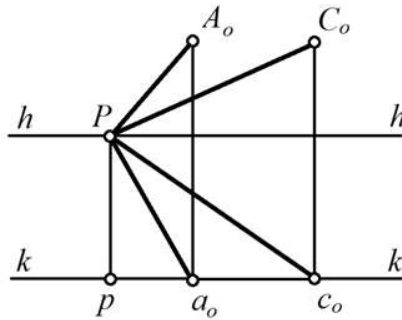


Рис. 7.15

Таким чином, точкою сходу перспектив горизонтальних прямих, які складають з картиною кут 45° , є одна з дистанційних точок D_1, D_2 (рис. 7.17, див. рис. 7.16).

Якщо горизонтальні прямі будуть нахилені до картинної площини під будь-якими іншими кутами, що відрізняються від прямого і кута 45° , то точки сходу таких прямих також завжди будуть розташовані на лінії горизонту. Оскільки горизонтальні прямі паралельні предметній площині, то вони будуть паралельні й своїм основам.

Перспективи основ таких прямих будуть спрямовані в точки сходу їх перспектив (див. рис. 7.12 і 7.13). Останній розглянутий випадок розташування горизонтальних прямих є найбільш поширеним і називається кутовою перспективою. Перспективне зображення, основою якого є прямі,

що перпендикулярні до картини, називається *фронтальною перспективою*.

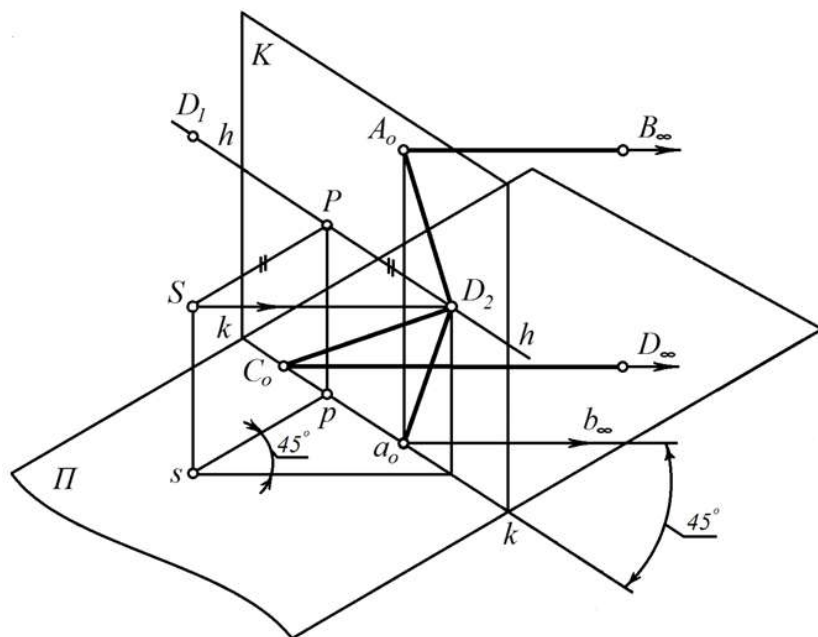


Рис. 7.16

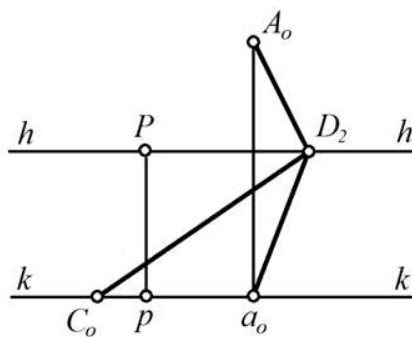


Рис. 7.17

Усі прямі, які розташовані паралельно картинній площині, можна поділити на три види: вертикальні прямі; прямі, які нахилені до предметної площини; прямі, які паралельні предметній площині. Для побудови перспективної проекції нескінченно віддаленої точки цих прямих паралельно їм проведемо проєкціювальний промінь з точки зору (рис. 7.18).

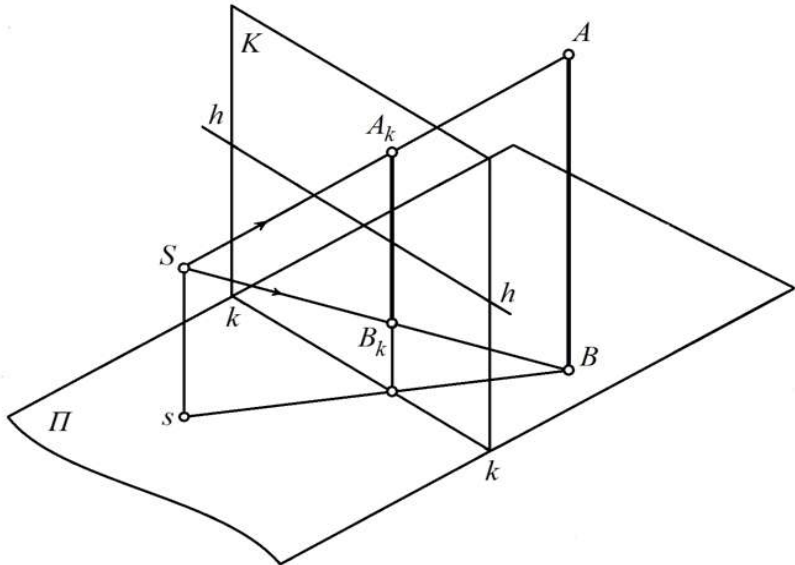


Рис. 7.18

Тоді зображення вертикальних прямих на картині будуть вертикальними, а перспективи прямих, які паралельні картині, будуть паралельні самим прямим (рис. 7.19).

До прямих загального положення відносяться прямі, які нахилені і до картинної, і до предметної площини. По відношенню до глядача прямі загального положення прийнято поділяти на два види: висхідні прямі та спадні прямі.

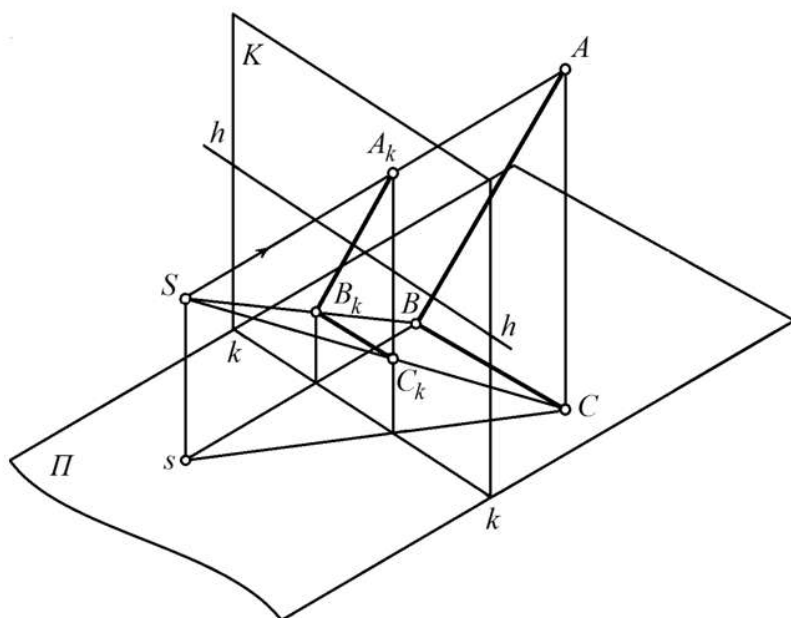


Рис. 7.19

Якщо точки сходу перспектив горизонтальних прямих розташовуються на лінії горизонту, то для зображення сукупності паралельних прямих загального положення існує наступне загальне правило: точки сходу перспектив висхідних прямих розташовуються вище лінії горизонту (рис. 7.20), а спадних прямих – нижче.

Точки сходу перспектив основ як висхідних прямих, так і спадних завжди будуть розташовуватися на лінії горизонту, а точки сходу самих перспектив таких прямих – на перпендикулярі до лінії горизонту, який встановлено з точки сходу перспектив основ (рис. 7.21).

7.7. Особливості перспектив прямих

Прямі окремого положення горизонтальні, вертикальні, паралельні та перпендикулярні до картинної площини найбільш часто обмежують контури об'ємних об'єктів – інженерних та архітектурних споруд. Крім цього, вони часто використовуються як допоміжні при визначенні перспективних зображень предметів складних форм, наприклад автомобіля. Тому зупинимось більш детально на побудові такого виду прямих.

1. Горизонтальна пряма – перспектива і вторинна проекція сходяться в одній точці на горизонті (рис. 7.22).

2. Пряма, що перпендикулярна до картинної площини – перспектива і вторинна проекція сходяться в головній точці картини P (рис. 7.23).

3. Горизонтальна пряма, що розташована під кутом 45° до картини – перспектива і вторинна проекція сходяться в дистанційній точці D (рис. 7.24).

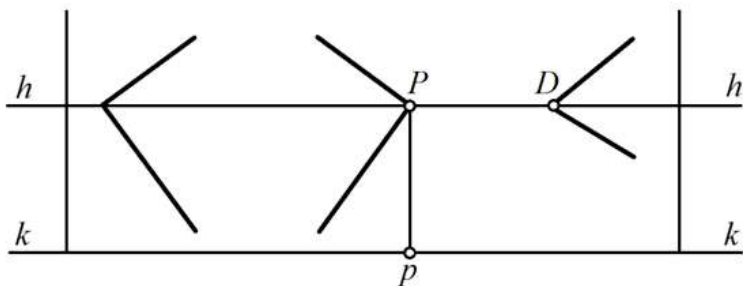


Рис. 7.22

Рис. 7.23

Рис. 7.24

4. Пряма, що паралельна картині – перспектива паралельна самій прямій, а її вторинна проекція – основі картини. Взаємно паралельні прямі, які паралельні картині, паралельні й у перспективі (рис. 7.25).

5. Вертикальні прямі в перспективі також вертикальні, а вторинні їх проекції – точки. Чим далі від картинної площини

розташований відрізок вертикальної прямої, тим він коротший у перспективі (рис. 7.26).

6. Прямі, які паралельні горизонту або основі картини, і в перспективі є паралельними горизонту або основі картини. Відрізки таких прямих і в перспективі тим коротші, чим далі від картинної площини вони розташовані (рис. 7.27).

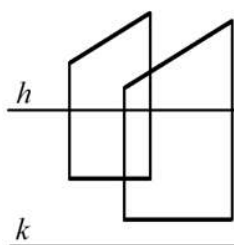


Рис. 7.25

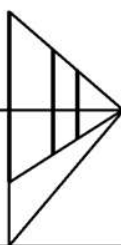


Рис. 7.26

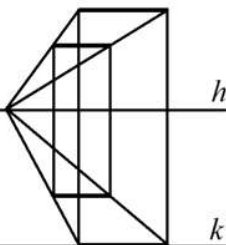


Рис. 7.27

7. Прямая, которая принадлежит предметной плоскости – перспектива і вторинна проекція співпадають (рис. 7.28).

8. Прямая, которая принадлежит предметной плоскости та проходит через точку зору S – радіальна пряма, що в перспективі перпендикулярна до основи картини (рис. 7.29).

9. Прямая, которая проходит через точку S – перспектива є точкою, а вторинна проекція, згідно з попереднім пунктом, буде перпендикулярна до основи картини (рис. 7.30).

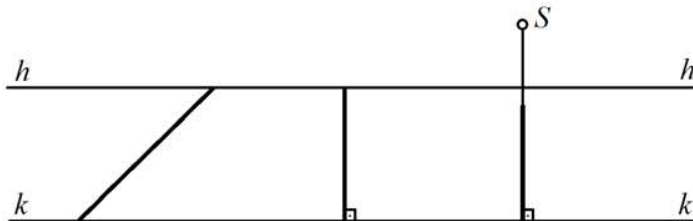


Рис. 7.28

Рис. 7.29

Рис. 7.30

7.8. Розподіл відрізка прямої на рівні та пропорційні частини

Розподіл відрізка прямої на рівні або пропорційні частини базується на відомій з елементарної геометрії теоремі: сторони кута поділяються паралельними прямими на пропорційні відрізки (рис. 7.31).

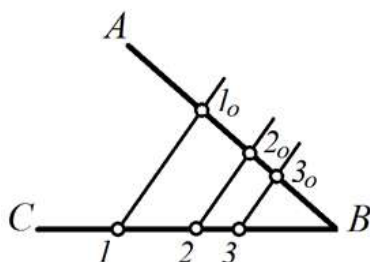


Рис. 7.31

На рис. 7.32 показано розподіл відрізка прямої загального положення на три рівні частини. При цьому спочатку було виконано розподіл на три рівні частини основи відрізка прямої AB . Перспектива основи була прийнята за одну із сторін кута, а друга сторона кута проведена паралельно основі картини. На останній були відкладені три довільних, але рівних відрізків. Враховуючи те, що паралельні прямі, які відсікають на сторонах кута рівні відрізки, розташовані у предметній площині, точка їх сходу знаходиться на горизонті.

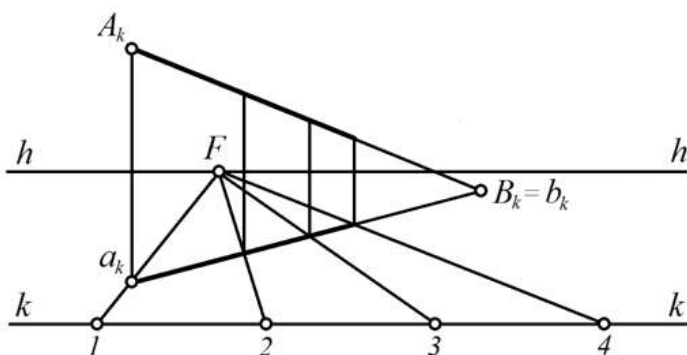


Рис. 7.32

На рис. 7.33 та 7.34 зображено, як можна поділити або збільшити кратно двом відрізкам горизонтальну та нахилену прямі відповідно.

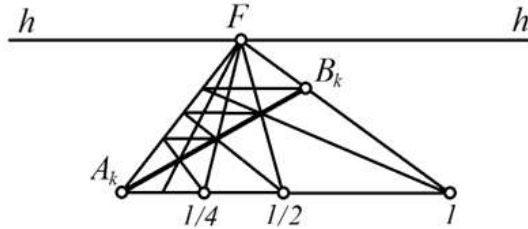


Рис. 7.33

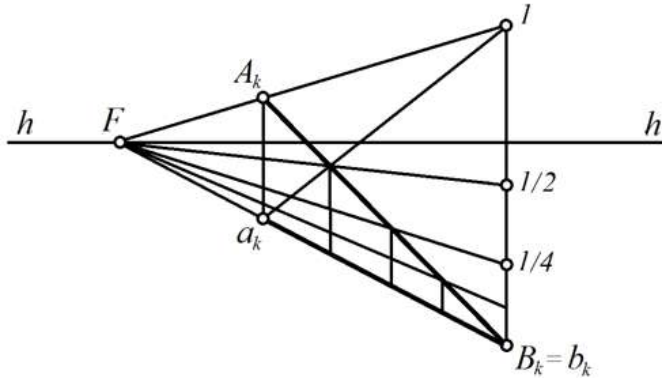


Рис. 7.34

7.9. Побудова перспективи паралельних прямих при недосяжній точці сходу

Переважна більшість інженерних об'єктів з геометричної точки зору є паралелепіпедами, тобто сукупністю паралельних ліній. Тому дуже важливо оволодіти навичками побудови сукупності паралельних прямих, особливо горизонталь-

них. Як правило, побудова сукупності паралельних прямих з досяжною точкою сходу не викликає будь-яких труднощів. Нагадаємо лише, що для сукупності паралельних прямих, які спрямовані паралельно предметній площині, точка сходу розташовується на лінії горизонту. Непаралельні предметній площині прямі мають точку сходу вище або нижче лінії горизонту залежно від того, підвищуються або знижуються точки над предметною площиною по мірі їх віддалення від площини картини. Найбільші труднощі викликають побудови сукупності паралельних прямих з недосяжною у межах картини точкою сходу. У зв'язку з цим розглянемо приклади розв'язання окремих задач такого виду.

На рис. 7.35 через точку A_k проведена пряма, що паралельна прямій, яка розташована у предметній площині. При цьому розподіл допоміжних вертикальних відрізків у заданому відношенні здійснюється обов'язково відносно точок, які розташовані на лінії горизонту.

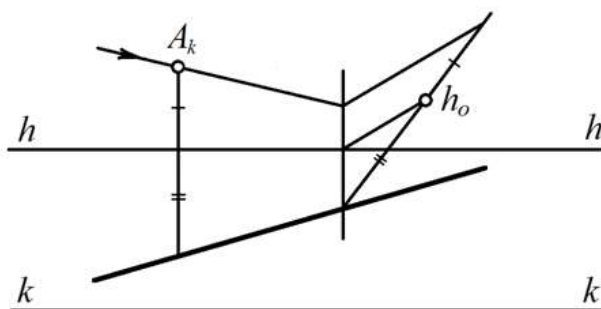


Рис. 7.35

Ряд горизонтальних ліній, які паралельні заданій, також можна провести через точки допоміжної вертикальної прямої (рис. 7.36).

Як і в попередньому випадку, слід мати на увазі, що відповідність встановлюється між точками, розташованими на лінії горизонту.

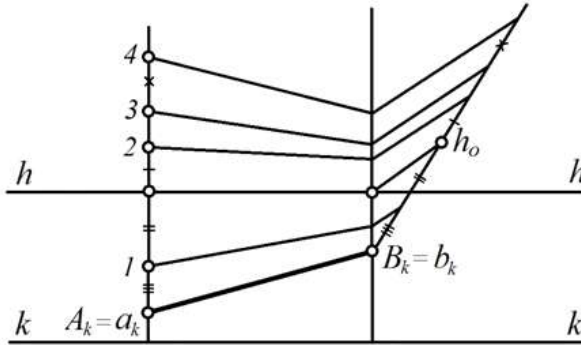


Рис. 7.36

Провести через точку A пряму, яка паралельна заданим, можна скориставшись точками перетину діагоналей двох трапецій зі спільною боковою стороною на лінії горизонту (рис. 7.37).

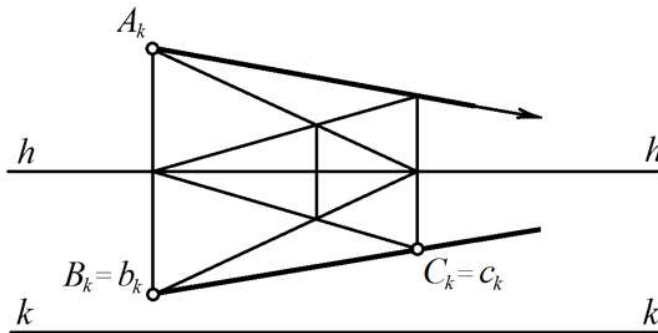


Рис. 7.37

На рис. 7.38 показано, як можна провести пряму, що паралельна заданій, через задану точку за допомогою паралельних прямих із досяжною точкою сходу.

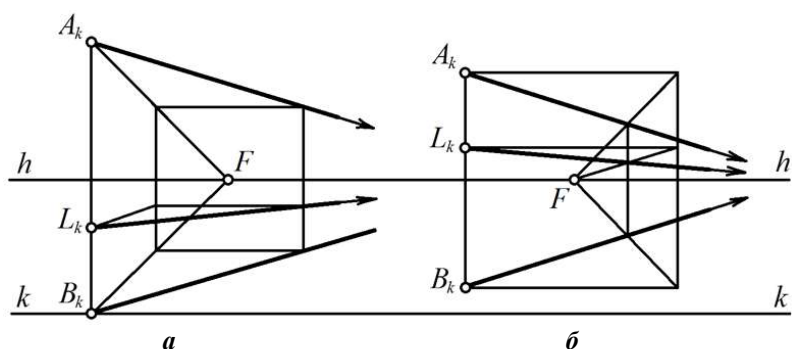


Рис. 7.38

Для проведення ряду паралельних ліній через точки вертикальної прямої у недосяжну точку сходу доцільно скористатися допоміжною вертикальною площиною, горизонталі якої сходяться у досяжній точці на горизонті. Допоміжну площину можна побудувати так, щоб вона мала з основною площиною спільне ближнє (рис. 7.39) або дальнє (рис. 7.40) ребро.

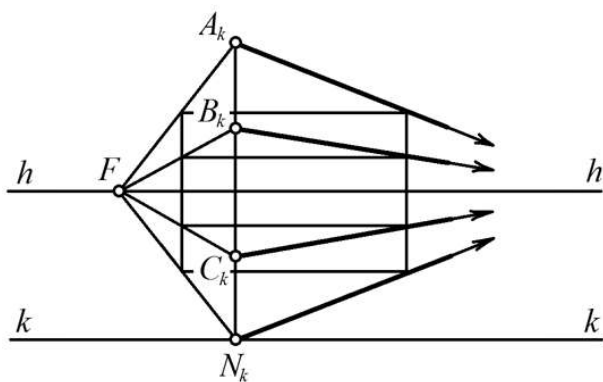


Рис. 7.39

Розглянуті прийоми побудови паралельних прямих зручно використовувати при перевірці правильності перспективних

зображень інженерних конструкцій. Як це можна зробити, показано на рис. 7.41 і рис. 7.42, де видно, що отримано неправильне напрямки верхніх сторін прaviх граней.

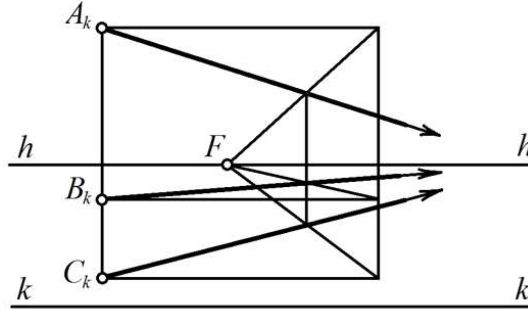


Рис. 7.40

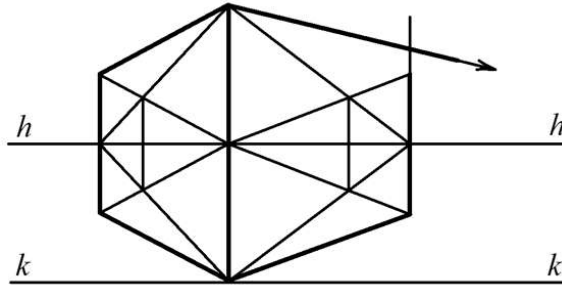


Рис. 7.41

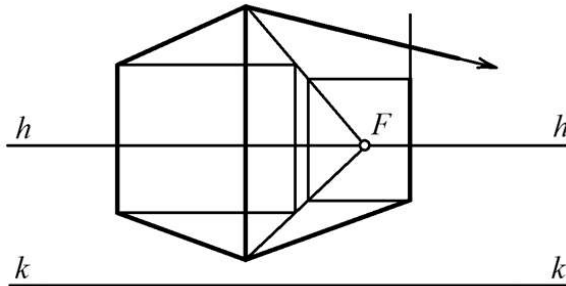


Рис. 7.42

7.10. Перспективний масштаб. Дистанційна точка

При побудові перспективних зображень необхідно не тільки надати уявлення про форму кожного предмета, але й правильно передати розмірні співвідношення як між його частинами, так і між окремими предметами, що зображені на картині. Одним із шляхів розв'язання такого роду задач є використання масштабу, який дозволив би встановлювати співвідношення між натуральними і перспективними лінійними розмірами зображення.

Одиниця довжини заданого в натурі лінійного масштабу є на картині змінною величиною. Вона змінюється залежно від кута нахилу до площини картини, а також від відстані від картини кінців відрізка, який необхідно виміряти.

Розглянемо побудову масштабів для вимірювання відрізків, розташованих у трьох головних напрямках предметного простору. Для цього сумістимо координатну площину xOz з площиною картини, а площину xOy з предметною площиною. Тоді відповідно осі координат розташуються: Ox – по основі картини, Oy – перпендикулярно до картини, Oz – вертикально. Перспективи осей Ox і Oz співпадуть із самими натуральними осями разом із їх масштабами, тому що розташовані у самій площині картини, а перспектива осі Oy буде спрямована в головну точку P .

Перспективні масштаби, побудовані у зазначених напрямках, прийнято називати *масштабами широт, висот та глибин* відповідно (рис. 7.43).

Для визначення масштабних одиниць вздовж осі Oy у перспективі користуються дистанційними точками. У практиці побудови перспективних зображень відстань від картини по своїй довжині, як правило, значно перевищує лінійні розміри картини, внаслідок чого дистанційна точка виходить за межі

аркуша, на якому виконується зображення. В такому випадку для побудови масштабу глибин використовують так звану дробову дистанційну точку. Позначивши відповідну дробову дистанційну точку, її можна використовувати як точку сходження ліній переносу позначок натурального масштабу. При такій побудові кожна позначка натурального масштабу при переносі на перспективний масштаб буде позначати відрізок, який відповідає n одиницям натурального масштабу.

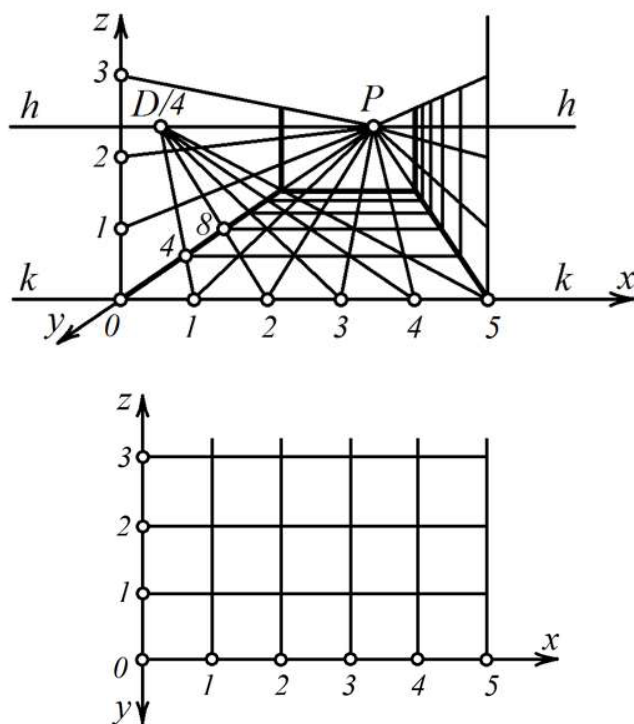


Рис. 7.43

На рис. 7.43 за допомогою перспективного масштабу побудована перспективна сітка. Для її побудови використана

дробова дистанційна точка $D/4$. На такій перспективній сітці координати x і z на одній глибині рівні одна одній, а координата y тим менша, чим глибше точка віддалена від картинної площини.

При визначенні довжин великої кількості вертикально розташованих відрізків дуже зручно є масштабна стінка, яка представляє собою вертикальну площину, яку поділено горизонтальними лініями через одиницю висоти, не обов'язково перпендикулярними до картинної площини (рис. 7.44).

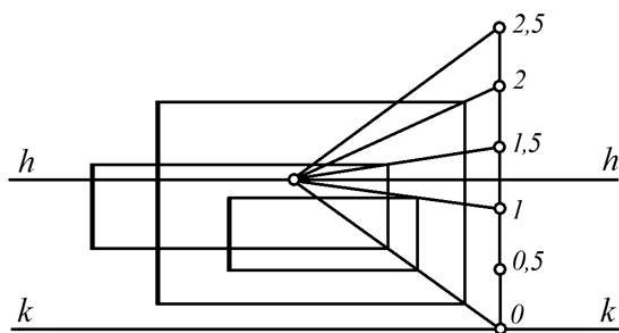


Рис. 7.44

У певних випадках при виконанні перспективних зображень виникає необхідність задавати перспективний масштаб у довільному напрямку. Побудову перспективного масштабу на прямій, що розташована у предметній площині та не перпендикулярна площині картини, зображено на рис. 7.45.

Суміщена точка зору побудована по заданим головній і дистанційній точкам. Позначки перспективного масштабу на прямій, розташованій у предметній площині, нанесено за допомогою ліній переносу, які проведені через точку F – точку сходу ліній переносу, яка має назву *точки виміру*, або *масштабної точки*.

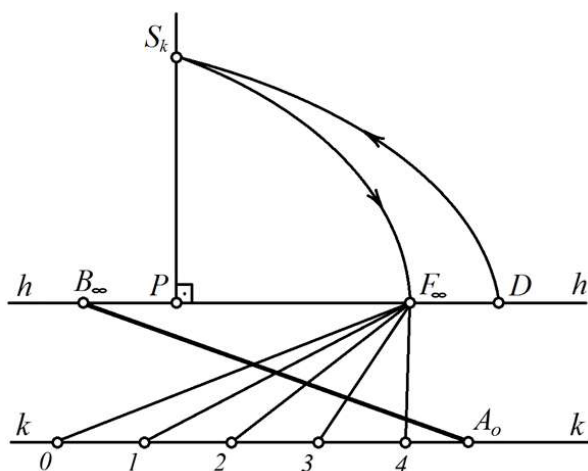


Рис. 7.45

7.11. Побудова перспектив кривих ліній. Перспектива кола

Побудова перспективи інженерних та архітектурних об'єктів і споруд круглої форми пов'язана з визначенням перспективи кола. Перспективою кола може бути коло, пряма, еліпс, парабола або гіпербола. Однак при виконанні перспективних зображень, найбільш часто виникає необхідність побудови перспективи кола у формі еліпса. У зв'язку з цим розглянемо побудову перспективного зображення кола такого виду.

Для зображення горизонтального та вертикального кола найбільш простим є використання описаного квадрата, сторони якого зручно орієнтувати паралельно і перпендикулярно до площини картини. Перспективи діагоналей тоді визначаються по дистанційним точкам (рис. 7.46).

Якщо дистанційна точка опиниться розташованою за межами картини, то можна скористатися дробовими дистанційними точками. Тоді на основі картини відкладається частина відрізка, який підлягає виміру і відповідає частині дистанційної або головної відстані, яку було використано при побудові. Для спрощення побудови можна задати половину або чверть суміщеного квадрата та відповідно половину або чверть кола.

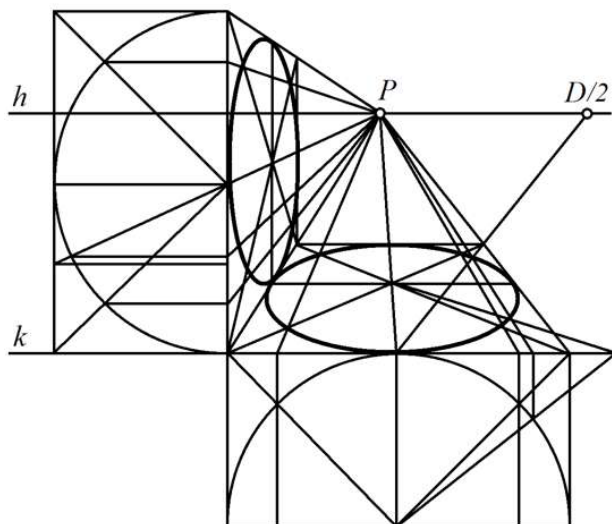


Рис. 7.46

У випадку якщо восьми точок для зображення кола більшого радіуса буде замало, додаткові точки визначають у місцях найбільшої кривизни. На рис. 7.46 така точка визначена як перетин радіальної прямої з лінією, паралельною стороні описаного квадрата.

Якщо засвоїти закономірності, що лежать в основі побудови перспективи кола, то можна легко перейти до побудови на картині сімейства кіл (рис. 7.47).

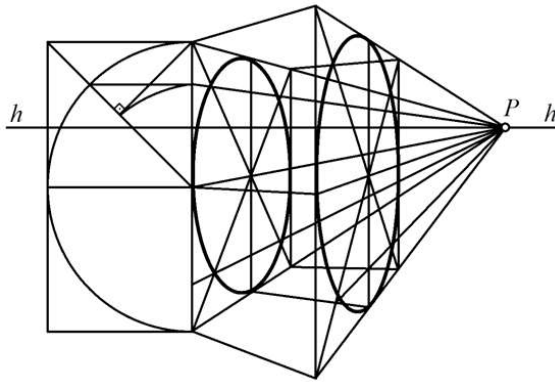


Рис. 7.47

7.12. Побудова перспективи кута заданої величини

Побудова будівлі в перспективі, а також побудова перспективи інтер'єру та їх зовнішнього вигляду часто пов'язана з необхідністю побудови перспективи кута заданої величини і, в першу чергу, розташованого у предметній площині або у площині, якій вона паралельна.

Для побудови на картині кута заданої величини сумістимо площину горизонту з картинною площиною. Побудуємо при суміщенні точки зору S заданий кут у натуральну величину та позначимо точки зустрічі його сторін з лінією горизонту. Тоді будь-який кут на картині з довільною вершиною A і сторонами, які спрямовані у визначені точки C та B , відобразить кут, розташований у предметній площині або у площині, що їй паралельна, і рівний за величиною заданому куту (рис. 7.48).

Якщо величина дистанційної або головної відстані не дозволяє розташувати суміщену точку зору в межах картини, то в цьому випадку, так само як і у попередньому, можна за-

дати будь-яку дистанційну точку і відповідно дробову суміщену точку зору (рис. 7.49).

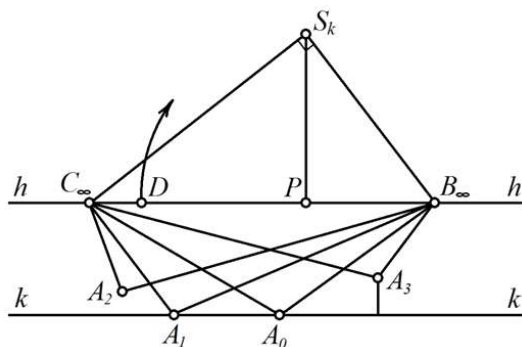


Рис. 7.48

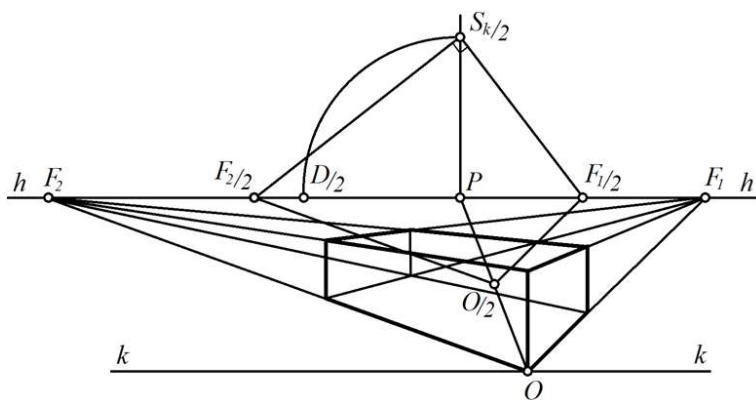


Рис. 7.49

7.13. Перспектива площини

Площина у перспективі може бути задана за допомогою проєкцій тих самих геометричних елементів, якими її визначають у просторі: трьома точками, які не розташовані на одній

Лінія сходу і картинний слід площини взаємно паралельні, як прямі, що отримані у результаті перетину двох паралельних площин третьою площиною – площиною картини (рис. 7.51).

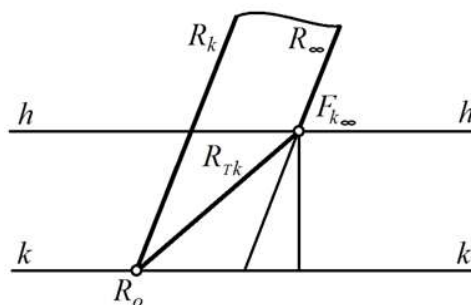


Рис. 7.51

7.14. Побудова перспективи за заданими ортогональними проекціями. Метод архітекторів

Як уже зазначалося, побудова перспективи різних будівель та інженерних споруд пов'язана із завданням великої кількості паралельних прямих. Тому для зображення такого типу об'єктів доцільно скористатися методом, який у технічній літературі називається *методом архітекторів* і ґрунтується на побудові точок сходу сукупності домінуючих паралельних прямих.

На рис. 7.52 задані дві ортогональні проекції умовного об'єкта. Крім цього, на кресленні відображено положення основи картини, основи головної точки, висота горизонту і проекції точки зору. На основі картини знайдені проекції точок сходу двох сукупностей паралельних прямих I і II. На основі картини визначено початки прямих – 1, 2, 3, 4.

На рис. 7.53 наведено побудову перспективного зображення основи заданої геометричної форми, а на рис. 7.54 –

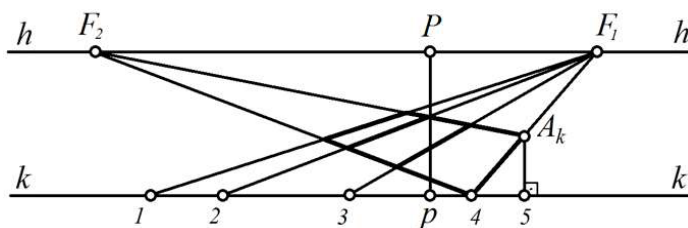


Рис. 7.53

При побудові перспективи у цілому треба мати на увазі, що висотні розміри ребер будуть проєкціюватися у натуральну величину тільки якщо вони розташовані у картинній площині або суміщені з нею. На рис. 7.54 висоти ребер, які розташовані в глибині картинної площини, визначені за допомогою сукупності домінуючих паралельних прямих з точками сходу F_1 і F_2 .

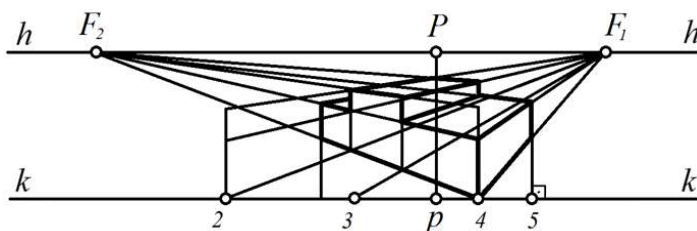


Рис. 7.54

Побудова перспективи, як правило, починається із завдання перспективи плану зображуваного предмета. Для того щоб не загромождувати поле основного зображення і забезпечити більш високу точність графічних операцій, доцільно скористатися додатковим планом, який побудовано у горизонтальній площині, що розташована на деякій глибині від предметної площини (рис. 7.55). Тоді основа картини переміститься униз на деяку величину разом із позначеними на ній точками. Точки нового та заданого плану при цьому розташуються

на вертикальних лініях зв'язку, а точки сходу однойменних прямих двох планів будуть розташовані на лінії горизонту. Перспективи вертикальних ребер будують при цьому із точок заданого плану або основи предмета, а їх висоти, які суміщені з картиною, відкладають від заданої основи картини.

Якщо неможливо винести план униз, то з таким же успіхом його можна підняти над перспективою. Це особливо зручно, якщо найбільш складною і насиченою деталлю є верхня сторона зображуваного предмета.

Розглянуті додаткові побудови прийнято називати *додатковим*, або *опущеним планом*.

Ще одною формою допоміжної побудови, яку широко застосовують при побудові перспективи, є так звана бокова стіна. Її вводять для того, щоб при зображенні чисельних висот сітка допоміжних ліній не накладалася на основне зображення. На рис. 7.55 висоти умовного об'єкта побудовані за допомогою бокової стіни з точкою сходу горизонталей V_k . Допоміжні проєкції перспектив основ ребер із заниженого плану винесено на основу допоміжної бокової площини, далі по вертикальних лініях зв'язку в перетині з відповідними горизонталями позначені верхні точки ребер, а потім зворотним переміщенням, паралельним картинній площині, визначені перспективи ребер на потрібних глибинах.

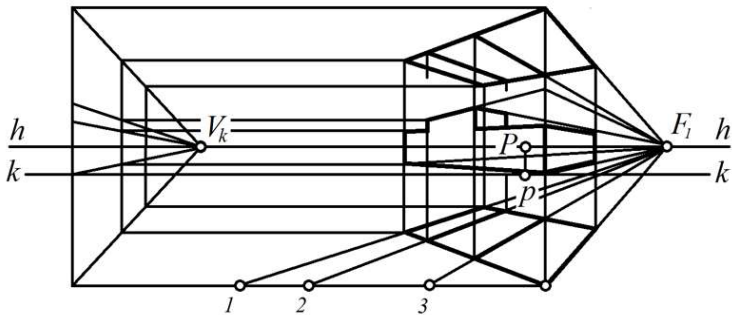


Рис. 7.55

7.15. Вибір точки і кута зору

Зображення, яке побудоване за законами лінійної перспективи, відповідає зоровому уявленню предмета одним оком при нерухомому його положенні перед предметом. Для того щоб контур предмета на картині відповідав звичному уявленню, яке отримується при нормальному розгляді предмета в натурі, мають бути виконані наступні умови:

1. Кут зору треба обирати близьким до 30° . Для різних людей він коливається у межах від 18° до 53° . При цьому напрям головного променя зору повинен співпадати з бісектрисою кута зору (рис. 7.56).

2. Відстань точки зору від картини можна приймати рівним і більшим за подвійну діагональ рамки картини, якщо вважати, що остання має форму прямокутника, який вписано у коло поля ясного зору.

3. Площину картини слід орієнтувати по відношенню до найбільш виразної сторони об'єкта під кутом $20^\circ \dots 45^\circ$. Зручно суміщувати картинну площину з ближнім ребром зображуваного предмета.

4. Висоту точки зору часто обирають на рівні очей людини, яка стоїть. У цьому випадку, якщо найбільш виразним уявляється зображення предмета при погляді на нього знизу або зверху, то точку зору можна відповідним образом пересувати по висоті (див. рис. 7.52). Точкам зору S_1, S_2, S_3, S_4 відповідають зображення на рис. 7.33, 7.37, 7.34, 7.36.

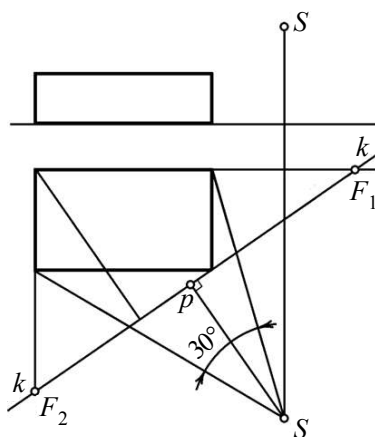


Рис. 7.56

8. ТІНІ

8.1. Світлотінь та способи нанесення її на кресленні

Малювання в основному зводиться до уміння зображувати на площині аркуша паперу об'ємно-просторові предмети та передавати їх форму.

У природі форма предмета виявляється за допомогою світла. Якщо предмет помістити в зовсім темне середовище, то він не буде сприйматися як форма. Промінь світла, який падає на предмет, виявляє його форму.

Кожна форма обмежується площинами (гранями) або кривими поверхнями, що знаходяться у різних світлових умовах. Одні поверхні отримують перпендикулярні промені світла, другі – ковзні, а треті не отримують променів світла і висвітлюються тільки відбитими променями.

Задача того, хто малює, – знайти поверхні, що обмежують форму предмета, визначити їх світлотіні (щоб на папері олівцем нанести відповідний тон), а також визначити поступовий або різкий перехід однієї поверхні в іншу, суміжну.

Світлотінь – розподіл світла на поверхні предмета. Вона надає зображуваному предмету об'ємність (опуклість).

Розрізняють наступні елементи світлотіні: світло, напівтінь, власна тінь та падаюча тінь. Крім того, на висвітленій частині поверхні є відблиск, а на затіненій частині – рефлекс.

Рефлекс – це світло, відбите від оточуючих предметів. Рефлекс зазвичай темніше поверхні світла та напівтіні.

Тінь на невисвітленій частині поверхні предмета називається *власною*, а відбита одним предметом на інший предмет або площину – *падаючою*.

Форма власної тіні предмета залежить від форми предмета та його положення по відношенню до джерела світла. На силу тіні впливає рефлекс.

Форма падаючої тіні залежить від контуру предмета та виду джерела світла (рис. 8.1). Тінь може з'являтися від штучного (факельного) джерела світла (див. рис. 8.1,*а*) та від природного (див. рис. 8.1,*б*).

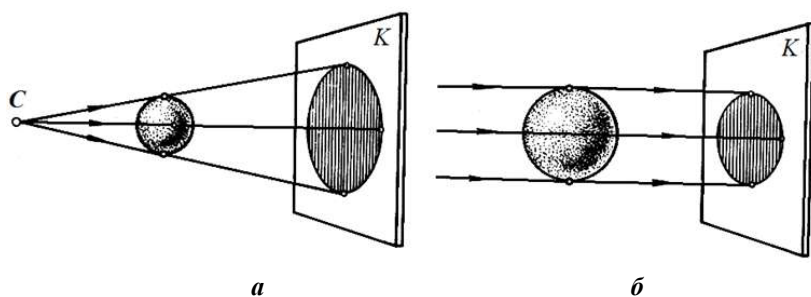


Рис. 8.1

Основні характеристики падаючої тіні:

- контур падаючої тіні не переривається, за виключенням тих випадків, коли її перетинає освітлена поверхня;
- контур падаючої тіні змінюється з кожною зміною форми того предмета, на який вона падає;
- падаюча тінь поєднує об'єкт з поверхнею, на якій він знаходиться;
- падаючі тіні показують відстань між об'єктом та поверхнею, на яку падає тінь;
- тінь виявляє форму поверхні, на яку вона падає.

У практиці технічного малювання світлотінь наносять головним чином для рельєфу форми предмета, тому падаючі тіні, як правило, не показують. Малюнки без падаючих тіней можна назвати умовними, але й технічне малювання має прикладне значення в техніці. Отже, у малюванні, як і в кресленні, можна застосовувати умовності – спрощені зображення.

Загалом не буває такої тіні, куди б зовсім не проникали відбиті світлові промені. Рефлекс, або висвітлення власної тіні, виникає завдяки відбитим променям світла. Виразність рефлексу залежить від характеру поверхні та ступеня освітленості предмета. На предметах, що мають матову поверхню, рефлекси мало помітні, а на блискучих поверхнях чітко видні. В технічних кресленнях при нанесенні світлотіні рекомендується затінені частини висвітлювати, а освітлені – затемнювати. Освітлена частина поверхні предмета називається *світлом*, яскравість її неоднакова.

Світло, яке відбите від гладкої блискучої поверхні, утворює на ній виблискуючі світлі плями – *відблиски* (найбільш освітлені місця на поверхні). Яскравість і положення відблиску залежить від напрямку променів світла, виду поверхні та характеру її обробки.

Півтіні (помірно освітлені місця) розташовані на поверхні, яка освітлена ковзним світлом, від межі власної тіні у напрямку джерела світла.

Виявлення форми предмета за допомогою світлотіні безпосередньо пов'язане з використанням тонування різної сили.

Тон (грец. "tonos") – напруження, фізична характеристика світла. Цим терміном характеризують кількість та якість світла на поверхні предмета залежно від джерела світла та забарвлення як самого предмета, так і світла.

Змінення світлосили окремих частин поверхні предмета залежить від їх положення у просторі відносно джерела світла.

Витримати рисунок у тоні – означає передати на ньому колірну гаму (характер колірних співвідношень у живописі) – від темного тону через відтінки сірого до світлого, зведені в гармонію тональних співвідношень. Найсвітлішим тоном на рисунку буде білий аркуш паперу, а найтемнішим – лінія, проведена графітом олівця з повним натисканням.

При нанесенні світлотіні на зображеннях предметів багатогранної форми напрям штриховки має підкреслювати положення площин (граней) у просторі, а при нанесенні на зображеннях предметів циліндричної, конічної та сферичної форми – криволінійну форму цих предметів.

З метою передачі фактури, тобто якості поверхні матеріалу (шорсткості, матовості, оксамитості, глянцеватості та ін.), на технічному малюнку наносять світлотіні. Розрізняють декілька способів її нанесення:

1. *Паралельна штриховка*. Її наносять по формі предмета, який зображується. Цим способом передають чисто оброблені поверхні різних матеріалів, особливо металевих. Рельєф форми позначають не частою штриховкою, а поступовим потовщенням штрихів від напівтіней до власної тіні та від власної тіні до рефлексів.

2. *Штриховка сіткою – шраффіровка* (нім. "schraffieren" – штрихувати). Застосовується в основному для зображення штрихами на плані нерівностей місцевості.

3. *Точкова штриховка*. Використовують для технічних малюнків необроблених деталей (литих, кованих та ін.), а також неметалевих (м'яких, пористих, сипучих та ін.). Загальний тон і його градація досягаються за допомогою точок, які розташовані на відповідних інтервалах. Цей спосіб потребує великих витрат часу та не дає чітких зображень.

Щоб спростити роботу, на затінені поверхні наносять штриховку. Сильно затінені поверхні штрихують частіше та

більш товстими лініями, ніж менш затінені (напівтіньові). Освітлені поверхні штрихувати не рекомендується.

Густота штрихування (відстань між сусідніми штрихами та їх інтенсивність) залежить від насиченості тону. Перехід від лінії відблиску до межі власної тіні показують за допомогою згущення ліній штрихування. Попередньо необхідно встановити положення лінії відблиску, межі власної тіні та рефлексу.

Залежно від положення поверхні предмета обирають напрям ліній штрихування. Вертикальні поверхні слід штрихувати у вертикальному напрямку, горизонтальні – у горизонтальному, тобто паралельно аксонометричним осям, нахилені – у нахиленому, а криволінійні поверхні, як правило, у напрямку, що співпадає з напрямком твірних поверхні.

8.2. Поверхні багатогранників

Явища освітленості краще всього спостерігати на прикладі розташованих поруч моделей куба та циліндра. Аналізуючи ці моделі зі сторони світлотіні, легко помітити, що характер їх освітленості відрізняється. Перехід від світла до тіні на гранях куба різкий та визначений, тоді як перехід освітленої поверхні циліндра до тіньової – м'який і поступовий. На рис. 8.2 показано розподіл світла та тіні на поверхні куба.

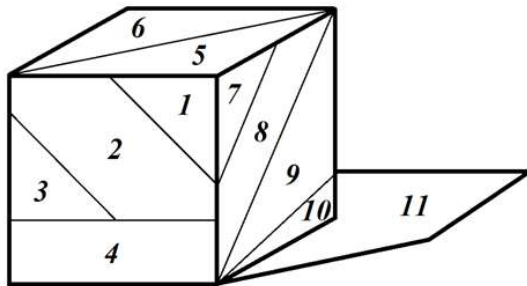


Рис. 8.2

Ліва вертикальна грань (на рисунку не видна) – вся у світлі. Передня, верхня і права грані умовно розподілені на десять зон. Падаюча тінь позначена зоною *11*. Найсвітлішим місцем на передній грані здається зона *1*. Насправді зони *1–3* освітлені однаково, але через контраст із розташованою поруч власною тінню на правій грані куба зона *1* здається більш світлою, ніж зона *3*. У зоні *4* освітлення знову посилюється. Це рефлекс у світлі, отриманий предметом від поверхні, на якій він стоїть.

Видима горизонтальна грань куба освітлена рівномірно, але зона *5* внаслідок того, що вона межує з найсильнішим світлом, здається більш темною.

У власній тіні зони *7* та *8* найтемніші. Не слід остерігатися зробити їх ще більш темними. Така помилка цілком прийнятна, тому що підсилює рельєфність куба. У зоні *9* і особливо *10* можна спостерігати яскраво виражений рефлекс. Зона *10* пом'якшує перехід від власної тіні до падаючої. Варіанти нанесення світлотіні на поверхні куба шраффірованою наведени на рис. 8.3,*а,з*, а штриховкою – на рис. 8.3,*б,в,д,е*. Падаючі тіні не враховуються.

Для спрощення лінії штриховки розташовані паралельно ребрам куба відповідно до форм цього багатогранника. Подальші спрощення дозволяють перейти до прийому, який показано на рис. 8.3,*в,е*, де усі освітлені поверхні білі.

При нанесенні світлотіні на зображення плоских поверхонь необхідно більш затемнювати найближчу до спостерігача частину грані у порівнянні з віддаленою (тіньові поверхні при віддаленні стають світлішими, а освітлені темнішими). На цьому базується принцип обробки форми зображення предмета.

На рис. 8.4 наведені варіанти нанесення світлотіні на поверхню піраміди при різних напрямках ліній штриховки: паралельно ребрам, що йдуть від вершини (див. рис. 8.4,*а,б,в*), паралельно медіанам трикутних граней (див. рис. 8.4,*з*), паралельно ребрам основи (див. рис. 8.4,*д*) і шраффірованою (див. рис. 8.4,*е*).

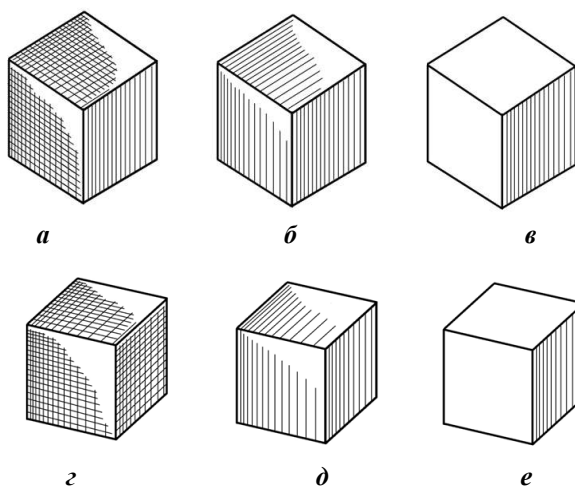


Рис. 8.3

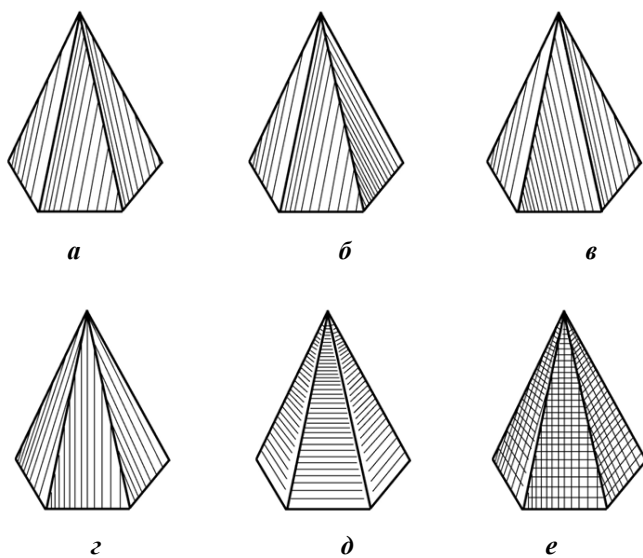


Рис. 8.4

На рис. 8.5 наведено шість варіантів розташування усіченої піраміди вздовж аксонометричних осей прямокутної ізометрії та розподіл світлотіні на її поверхні.

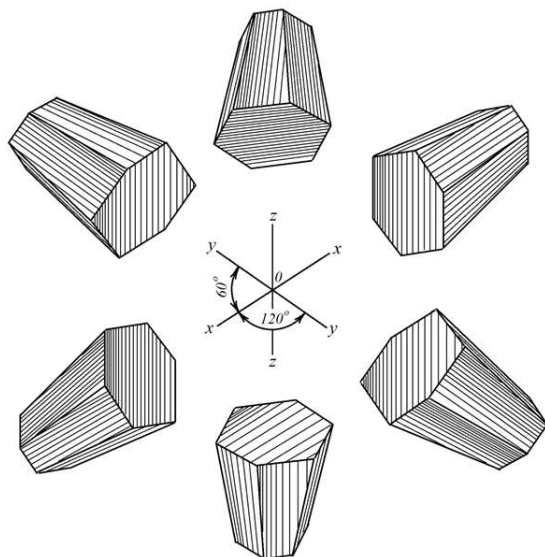


Рис. 8.5

При виконанні штриховки або шраффіровки необхідно пам'ятати, що головне не кількість нанесених штрихів, а їх уміле розташування та правильний нахил.

8.3. Циліндричні поверхні

Точне зображення елементів світлотіні на поверхнях тіл обертання визначають рідко, тому їх градацію рекомендується виконувати умовно.

Якщо розглядати циліндр, який стоїть на горизонтальній площині, то можна побачити по-різному освітлені частини його поверхні (рис. 8.6).

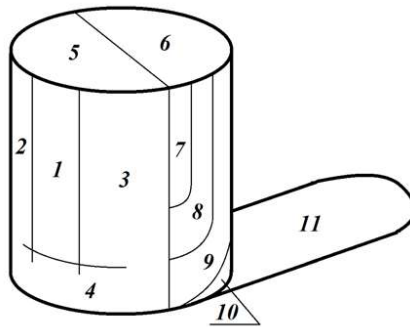


Рис. 8.6

Найяскравіше світло в зоні 1. Зони 2 і 3 освітлені слабкіше, тому що промені падають на них під більш гострим кутом. Але вся світлова сторона з напівтонами у нижній зоні 4 отримує рефлекс від площини, на якій стоїть циліндр. Це явище гадане, той хто креслить, має його враховувати (див. зони 5 і 6). Найтемніше місце – зона 7. Не слід остерігатися зробити її ще більш темною. По напрямку до низу та правому краю підсилюється рефлекс (зони 8, 9 і 10). У практиці технічного креслення падаючу тінь (зона 11) не враховують.

На поверхнях обертання найбільш світлі та темні місця дещо відсунуті від краю. Не застосовуючи рефлекси у світлі та напівтіні верхньої основи, практично можна зовнішню поверхню циліндра умовно поділити на шість зон (рис. 8.7). Зона II є відблиском. Зону V покривають більш частою штриховкою. Зони I, III та IV є напівтонами – поступовий перехід від світла до тіні. Зона VI закінчується рефлексом.

Переходи від світла до напівтіні та від напівтіні до тіні на кресленнях тіл обертання необхідно робити якомога непомітнішими.

На рис. 8.7 наведені порожні циліндри, які розташовані вздовж аксонометричних осей у прямокутній ізометрії. Зовнішні та внутрішні поверхні цих циліндрів умовно розпо-

ділені на шість рівних зон (відблиск, напівтони, власна тінь та рефлекс).

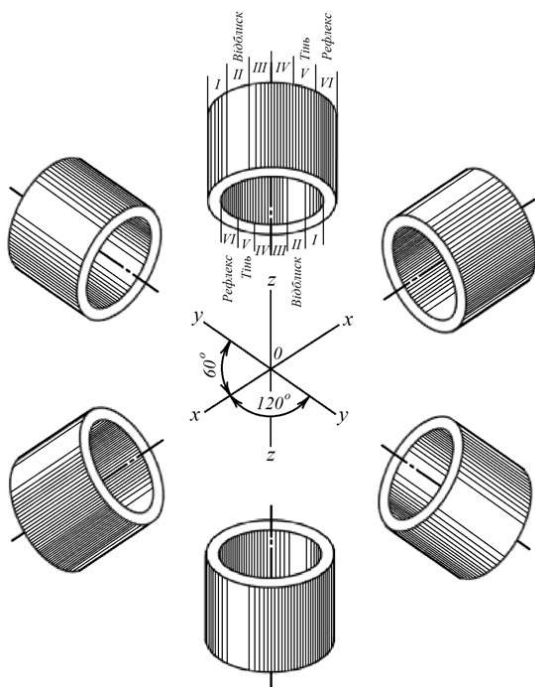


Рис. 8.7

На рисунках видно, що затінені площини основ циліндрів штрихують лініями, паралельними відповідним осям координат.

8.4. Конічні поверхні

Якщо розглядати конічну поверхню в натурі при умові, що світло падає зверху та ліворуч, можна помітити такі ж зони різної освітленості, як і на циліндричній поверхні.

На рис. 8.8 наведено шість варіантів розташування порожнистого конуса вздовж аксонометричних осей у прямокутній

ізометрії та показано розподіл елементів світлотіні на внутрішній і зовнішній поверхнях. Лінії штриховки при цьому проводять по твірних конуса у напрямку від основи до його вершини. Оскільки твірні конуса сходяться в одній точці – вершині, то всі елементи світлотіні (відблиски, напівтони, власна тінь та рефлекс) перетворюються у гострі трикутники з однією спільною вершиною. Тому при обробці форми конуса необхідно стежити за нанесенням світлотіні та одночасно за поступовим стисканням форми. Відстані між лініями штриховки змінюються (по дузі кола основи) з потовщенням ліній при переході від освітленої до затіненої частини поверхні. На невеликій частині поверхні конуса, що розташована напроти найбільш освітленої, трохи збільшують відстані між лініями штриховки внаслідок рефлексу.

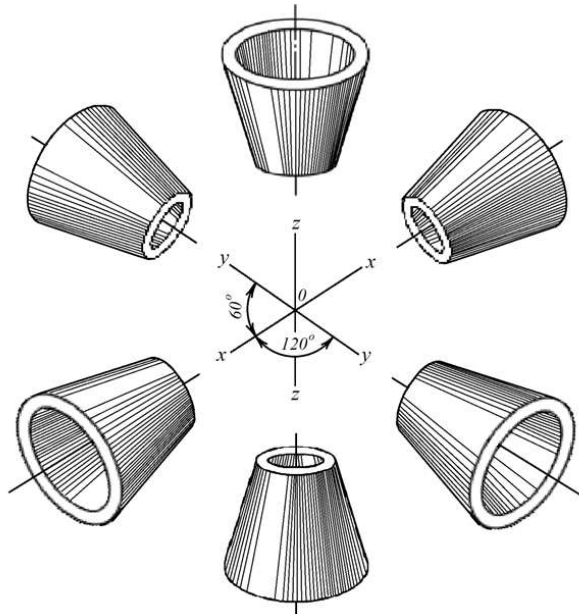


Рис. 8.8

Такий розподіл елементів світлотіні є прийнятним у тому випадку, коли висота повного конусу H не менше двох радіусів R його основи ($H \geq 2R$). При малій висоті конуса ($H < 0,5R$) краще залишати висвітленою трохи більше половини поверхні конуса.

Нанесення тону на зображення рекомендується виконувати від більш темного до більш світлого. Переходи від тіні до світла мають бути непомітними. Необхідно зв'язати тональний взаємозв'язок, порівнюючи отриманий тон із крайніми тонами (світлим і темним).

8.5. Поверхня кулі

Розглядаючи кулю в натурі, можна помітити в її освітленості деякі особливості: білік, в якому відображається джерело світла (рис. 8.9, *в*); два рефлекси у тіньовій частині – один зверху справа (повітряний рефлекс), а другий знизу, відбитий від площини, на якій розташована куля; контур власної тіні, який має форму кола (еліпса) та отримується, якщо кулю перетнути площиною, що проходить через його центр та яка перпендикулярна до променів світла.

Виконати штриховку кулі достатньо складно: для цього потрібно зробити допоміжні побудови та витратити багато часу. Розподіл елементів світлотіні показано на рис. 8.9, *а*. Допоміжні побудови полягають у наступному.

В обрисі кола (кулі) проводять два взаємно перпендикулярних діаметра, нахилених до горизонтальної лінії під кутом 45° . Верхню половину діаметра AB поділяють на вісім рівних частин, а нижню – на три. Через точки розподілу проводять прямі, паралельні діаметру CD . Після цього будують п'ять еліпсів. Розміри малих осей цих еліпсів визначаються відстанями між точками A і 3 , A і 5 , A і O , 4 і 6 , O і 7 . Розміри великих

осей двох найменших еліпсів приймають у співвідношенні 2:1, а інші еліпси будують (від руки) так, щоб вони були вписані в контур кола – в обрис кулі. В результаті отримують шість зон розподілу елементів світлотіні. Три з них (блік, рефлекс та власна тінь) показані відповідними надписами на рис. 8.9,*а*. Світлотіньовий ефект на поверхні отримують паралелями кулі, які поступово наближаються одна до одної і потовщуються до затіненої частини (див. рис. 8.9,*б*). Необхідно уважно слідкувати за світлотіньовими переходами при остаточній обробці форми кулі. Рефлексу в нижній частині кулі треба досягати поступовим затемненням суміжної частки.

На практиці в технічних рисунках використовують різні способи нанесення світлотіні на поверхні кулі: способом штриховки (див. рис. 8.9,*б*) і точковим способом (див. рис. 8.9,*в*)

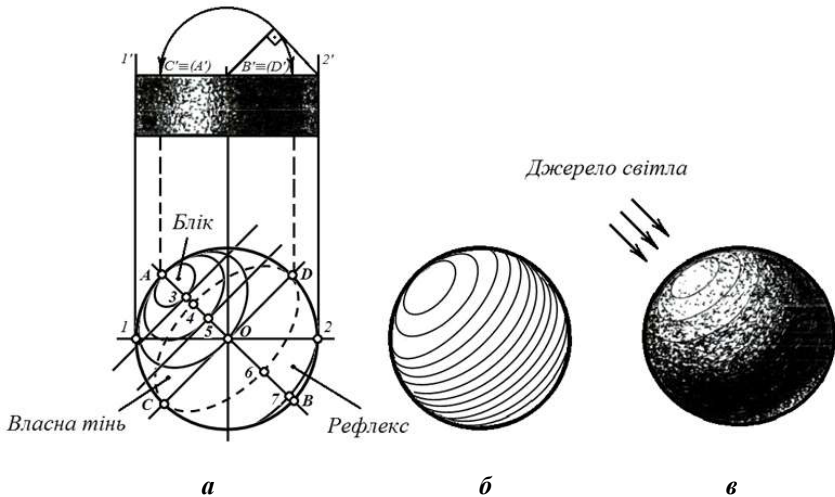


Рис. 8.9

8.6. Тіні на комплексному кресленні

Перед тим як починати будувати тіні в аксонометрії та перспективі, необхідно засвоїти основи побудови тіней в ортогональних проекціях. При побудові тіні в ортогональних проекціях, коли джерелом світла є сонце, треба пам'ятати:

1. Напрямок променів світла зазвичай приймають паралельним діагоналі куба, грані якого паралельні площині проєкцій. Завдяки цьому проєкції променів світла l_1 і l_2 утворюють з осями проєкцій кути 45° (рис. 8.10).

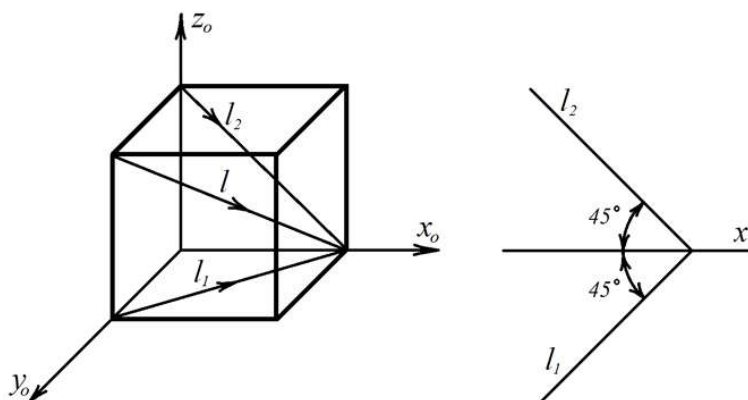


Рис. 8.10

2. Тінь від точки на поверхню є точкою перетину з цією поверхню променя світла, який проведено через цю точку.

3. Тінь від прямої на поверхню є лінією перетину променів площини (сукупність променів світла, що проходять через пряму) з поверхню.

4. Тінь від вертикальних прямих на горизонтальну площину паралельна горизонтальній: проєкції променів світла (пряма AB на рис. 8.11). Тінь від прямих, перпендикулярних

до площини Π_2 , на фронтальну площину – паралельна фронтальній проекції променя світла (пряма CD на рис. 8.11).

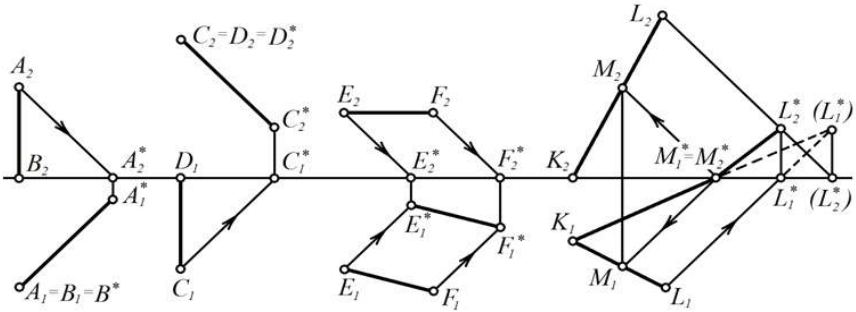


Рис. 8.11

5. Якщо відрізок прямої розташований паралельно будь-якій площині, то тінь від нього на цю площину дорівнює і паралельна відрізку (відрізок EP на рис. 8.11). На цьому ж кресленні показана тінь від прямої загального положення KL . Довжина тіні відрізка залежить від напрямку променів світла і положення відрізка відносно площини, на яку падає тінь.

6. Коли плоска фігура паралельна будь-якій площині, то тінь від неї на цю площину розташована подібно самій плоскій фігурі та дорівнює їй по величині.

7. Межа падаючої тіні є тінню від межі власної тіні тієї ж фігури, тому за межею падаючої тіні можна визначити межу власної тіні і навпаки (рис. 8.12).

8. При побудові падаючих тіней від одного тіла на інші можна користуватися способом зворотного променя: якщо на площині Π_1 і Π_2 або на будь-якій іншій площині перетинаються падаючі тіні від двох прямих, то через точку їх перетину необхідно провести промінь світла у напрямку джерела світла до перетину з відповідними прямими. Перша точка у напрямку зворотного променя буде падаючою тінню від другої точки (рис. 8.13).

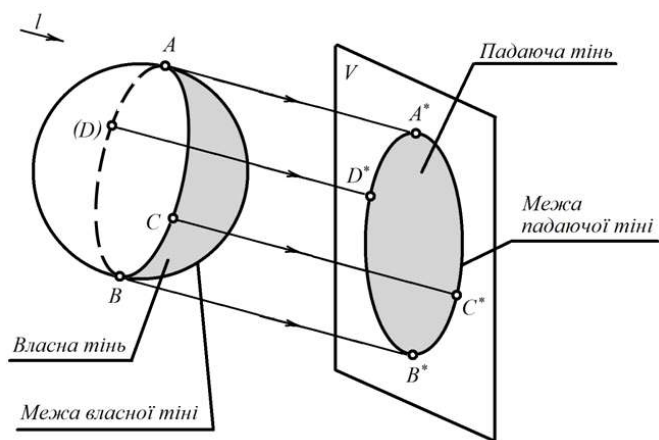


Рис. 8.12

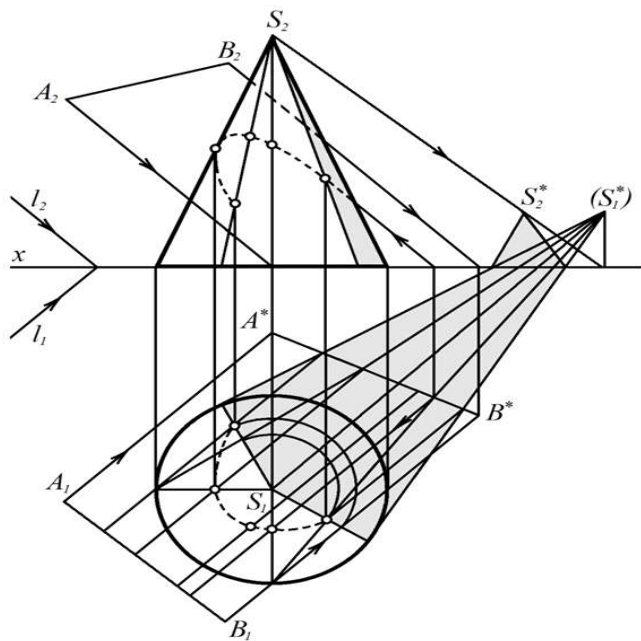


Рис. 8.13

8.7. Тіні в аксонометрії та перспективі

Перед тим як розпочати побудову тіней в аксонометрії, задають напрям променів світла та їх вторинні проекції. Позитивний результат буде отримано, коли головний фасад освітлений, а боковий фасад розташовується у власній тіні будівлі. При цьому напрям вторинних проекцій променів не повинен співпадати з напрямом однієї з аксонометричних осей. Можна розташувати промені світла паралельно до площини аксонометричних проекцій (їх вторинні проекції горизонтальні відносно рамки креслення). Нахил променів горизонтальної площини треба обрати у межах від 40° до 60° .

Побудову тіней, що спадають від виступаючих частин будівлі на стіну або дах, можна будувати способом зворотного променя або допоміжних перетинів. У другому випадку необхідно відповідний промінь помістити у вертикальну площину. Вона може бути задана променем і його вторинною проекцією. Після цього будується лінія перетину у допоміжній площині з цією площиною (поверхнею), на якій будується тінь. Перетин цієї лінії з променем світла визначає шукану точку.

Розташування тіней від прямих на площини підкоряється тим самим закономірностям, що і в ортогональних проекціях.

8.8. Завдання "Паралельна штриховка в аксонометрії"

Графічне завдання "Паралельна штриховка в аксонометрії" виконується на основі натуральних моделей технічних деталей, які є сукупністю різним чином поєднаних гранних, конічних, циліндричних та сферичних поверхонь.

Якщо вид аксонометричної проекції для виконання наочного зображення деталі не заданий, то потрібно самостійно визначитися із цим питанням, керуючись теоретичним мате-

ріалом щодо стандартних аксонометричних проекцій. Виріз чверті деталі робити не потрібно.

Залежно від форми та положення геометричних поверхонь по відношенню до аксонометричних осей проекцій необхідно нанести власні тіні на аксонометричному зображенні технічної деталі способом паралельної штриховки з урахуванням існуючих особливостей розподілу елементів світлотіні. На горизонтальних поверхнях технічної деталі паралельну штриховку не наносять.

Зразок оформлення графічного завдання "Паралельна штриховка в аксонометрії" наведено на рис. 8.14.

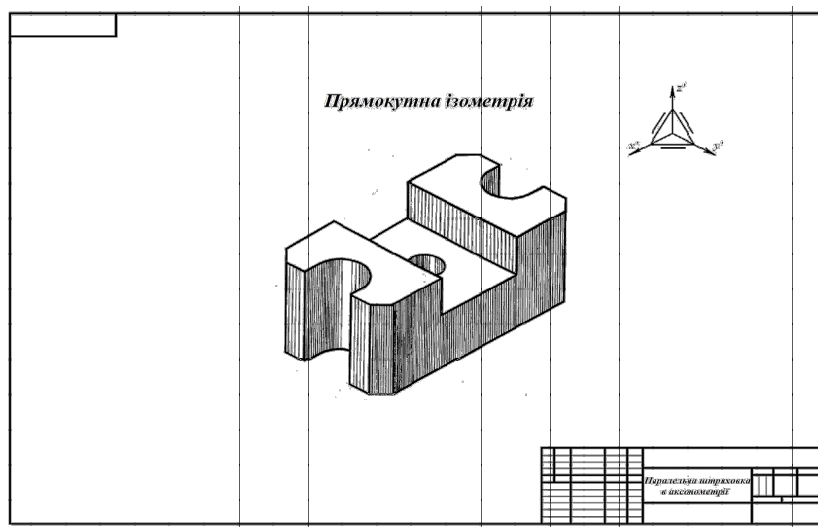


Рис. 8.14

8.9. Завдання "Власні тіні в аксонометрії"

Графічне завдання "Власні тіні в аксонометрії" виконується за варіантами, наведеними у кінці розділу (ст. 249–254).

Необхідно побудувати аксонометричне зображення (ізометрію або диметрію) складної технічної деталі, заданої двома ортогональними проекціями за вказаними розмірами.

Якщо вид аксонометричної проекції для виконання начального зображення деталі не заданий, то потрібно самостійно визначитися із цим питанням, керуючись теоретичним матеріалом щодо стандартних аксонометричних проекцій. Виріз чверті деталі робити не треба.

Власні тіні окремих складових аксонометрії зафарбовують олівцем з дотриманням особливостей розподілу елементів світлотіні на поверхнях деталі.

Зразок оформлення графічного завдання "Власні тіні в аксонометрії" наведено на рис. 8.15.



Рис. 8.15

8.10. Завдання "Аксометрія будівлі з тінями"

Графічне завдання "Аксометрія будівлі з тінями" виконується за варіантами, наведеними наприкінці розділу (ст. 255–256).

Необхідно побудувати прямокутну аксфометрію (ізометрію або диметрію) схематизованого каскаду будівельних споруд, заданих двома ортогональними проекціями – фасадом і планом. Розміри табличного зображення схематичної будівлі необхідно збільшити у 10 разів. На аксфометричному зображенні нанести власні і падаючі тіні на будівлі та від будівлі.

Для спрощення побудов в аксфометрії можна прийняти систему прямокутних координат, до яких віднесено будівлю, так, щоб початок координат був розташований у лівому верхньому куті плану будівлі. Вісь x треба спрямувати паралельно поздовжній стіні будівлі, а вісь y – паралельно їй поперечній стіні.

Вторинну проекцію будівлі (аксфометрію плану) накреслити повністю, тому що вона необхідна не тільки для побудови аксфометрії, але й для побудови тіней.

У верхньому лівому куті креслення необхідно розташувати умовний об'єкт, який виконано в ортогональних проекціях, із зазначенням масштабу зображення і основних розмірів. На зображенні об'єкта в ортогональних проекціях задається положення картинної площини і точки зору, які обираються відповідно до поставленої задачі і розглянутих раніше рекомендацій.

Безпосередньо на плані на основі картинної площини визначають проекції основних опорних точок: головної точки картини, дистанційних точок, а також точок сходу сукупності домінуючих паралельних прямих та початкових точок цих прямих.

Після того як допоміжні побудови на площині позначені, картина виноситься окремо, при цьому задані розміри збільшують у 2...5 рази. Побудови починаються із завдання

перспективи основи об'єкта. При розподілі перспективи основи мають бути застосовані наступні побудови: завдання сукупності паралельних прямих з досяжною і недосяжною у межах креслення точкою сходу, побудова перспективи прямого кута, перспективні масштаби, розподіл відрізка в заданому відношенні.

Для уточнення елементів плану треба використовувати допоміжний опущений або піднятий план.

При виконанні перспективи об'єкта для визначення висоти на різних глибинах треба використовувати бокову стіну (рис. 8.16). Тільки після побудови всієї конструкції будівлі можна приступати до опрацювання деталей конструкції.

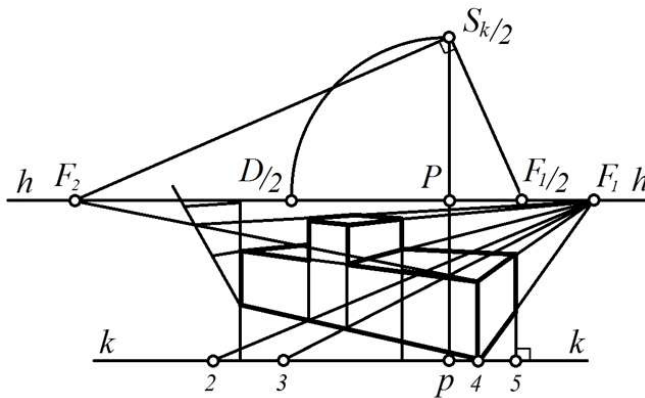


Рис. 8.16

Після закінчення побудови треба перевірити виконану картину на відповідність форми та пропорцій, обвести видимі контури при збереженні усіх ліній побудов. Завершується робота над перспективою побудовою тіні.

Зразок оформлення графічного завдання "Аксонометрія будівлі з тіннями" наведено на рис. 8.17.

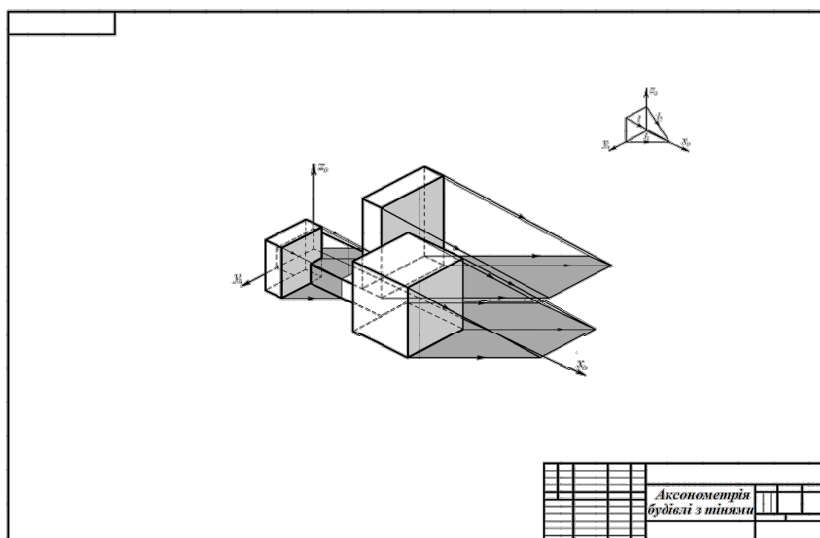


Рис. 8.17

8.11. Завдання "Тіні в перспективі"

Графічне завдання "Тіні в перспективі" виконується за варіантами, наведеними наприкінці розділу (ст. 255–256).

Висоту горизонту задано, положення картинної площини і точки зору треба визначити самостійно. Точка зору для непарних варіантів повинна розташовуватися ліворуч, а для парних варіантів – праворуч. Усю підготовчу роботу і побудову перспектив точок треба проводити методом архітекторів, використовуючи ортогональні проекції схематизованої будівлі, які викреслюються у лівому верхньому куті аркуша зі збільшенням у 2 рази, а при побудові перспективи всі розміри треба ще раз збільшити в 4 рази. При цьому треба пам'ятати такі умови:

1. Кут між горизонтальними проекціями крайніх проєкціювальних прямих при нормальному горизонті не повинен

перевищувати 30° . Картинна площина розташовується перпендикулярно до бісектриси цього кута.

2. Перспектива точки розташована у перетині перспектив двох прямих, які проходять через точку у просторі.

3. Перспективи прямих ліній, що паралельні картинній площині, паралельні самим прямим. Перспективи вертикальних прямих – вертикальні (при вертикальній картинній площині).

4. Прямі загального положення проєкціюються в прямі, положення яких на картинній площині може бути задано двома точками – точкою сходу (перспективою нескінченно віддаленої точки прямої) та перспективою будь-якої точки, яка належить до прямої, в тому числі і точки перетину прямої з картинною площиною.

5. Для того щоб побудувати точку сходу прямої, треба провести проєкціювальну пряму, паралельну заданій, до перетину з картинною площиною.

6. Паралельні прямі мають спільну точку сходу. Точка сходу горизонтальних прямих ліній розташована на горизонті, точка сходу спадних прямих – нижче горизонту, висхідних прямих – вище горизонту.

7. Головна точка картини є точкою перетину головної проєкціюючої прямої (перпендикулярної до картинної площини) з картинною площиною. Головна точка картини є точкою сходу прямих ліній, які перпендикулярні до картинної площини.

8. Перспективою кола більшою частиною є еліпс, осі якого нахилені до горизонту.

Перспективу архітектурного каскаду, який розташовано у предметній площині, зображено на рис. 8.18. Поєднання будь-якої пари ліній може бути використано для побудови перспективи точки, що належить предметній площині. Якщо точка розташована над предметною площиною або під нею, то можна ввести нову предметну площину, що проходить через дану точку. Пряма на рис. 8.18 перпендикулярна до картинної площини, її перспектива проходить через головну точку P .

Перспектива прямої, що проходить через горизонтальну проєкцію точки зору S_1 , перпендикулярна до лінії горизонту та основи картини.

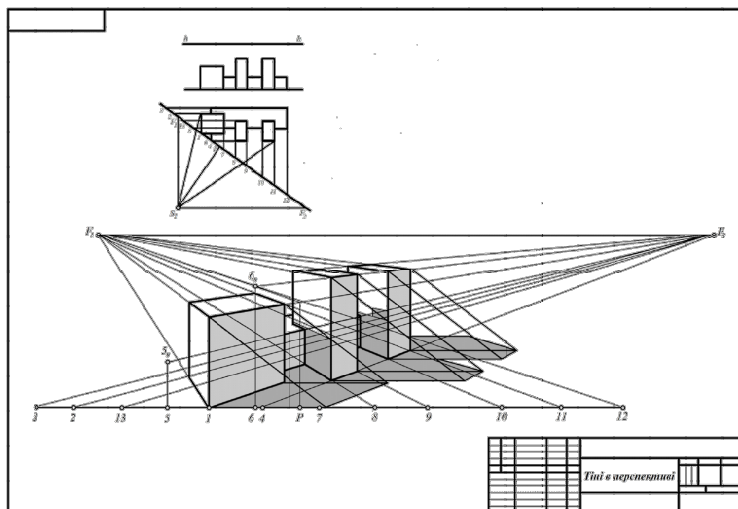


Рис. 8.18

Перспективи паралельних прямих перетинаються в точці сходу F , яка розташована на горизонті. Для побудови цієї точки проведена пряма S_1F_1 .

Графічне завдання "Тіні в перспективі" виконують у такій послідовності:

1. Намічають положення точки S_1 так, щоб вдало проєкціювалися як головний, так і боковий фасади будівлі.

2. Проводять крайні проєкціювальні прямі і перевіряють величину кута між ними. Якщо цей кут перевищує 30° , то по бісектрисі кута віддаляють точку S_1 . Якщо він менше 30° , то наближають до проєкції будівлі. Коли кут буде дорівнювати або близьким до 30° , проводять основу картини – пряму, яка перпендикулярна до бісектриси кута. Відстань від точки S_1 до

основи картини визначає ширину перспективного зображення. Якщо вона велика, треба основу картини наблизити до точки S_1 , якщо мала, то віддалити.

3. Визначають положення точок сходу, домінуючих напрямів паралельних ліній, тобто у даному випадку поздовжніх та поперечних прямих ліній будівлі, і головну точку картини P у перетині бісектриси кута між крайніми проєкціювальними прямими і горизонтом. Точки сходу можуть бути розташовані за межами аркуша. Перспективу будівлі починають виконувати з побудови вторинної проєкції будівлі на горизонтальній площині.

Відстань між предметною площиною і площиною опущеного плану може бути довільною. Її треба враховувати, коли відкладаються висоти окремих точок і ліній перспективи будівлі. Усі розміри, необхідні для побудови перспективи і визначені з ортогональних проєкцій допоміжного креслення будівлі, треба збільшити у чотири рази.

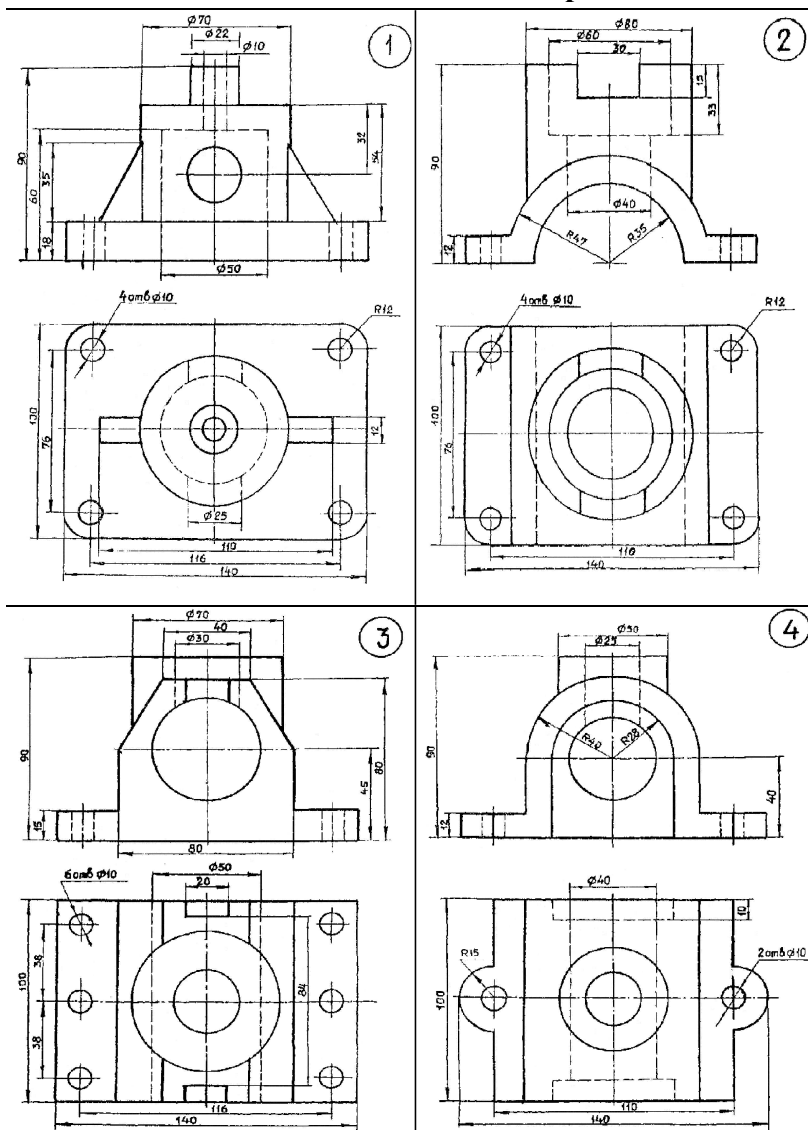
4. Закінчивши побудову перспективи будівлі, будують власні і падаючі тіні, прийнявши таке розташування джерела світла, при якому тіні краще виявляють форму будівлі та її окремих частин. Падаючі тіні, як правило, роблять трохи темнішими, ніж власні тіні.

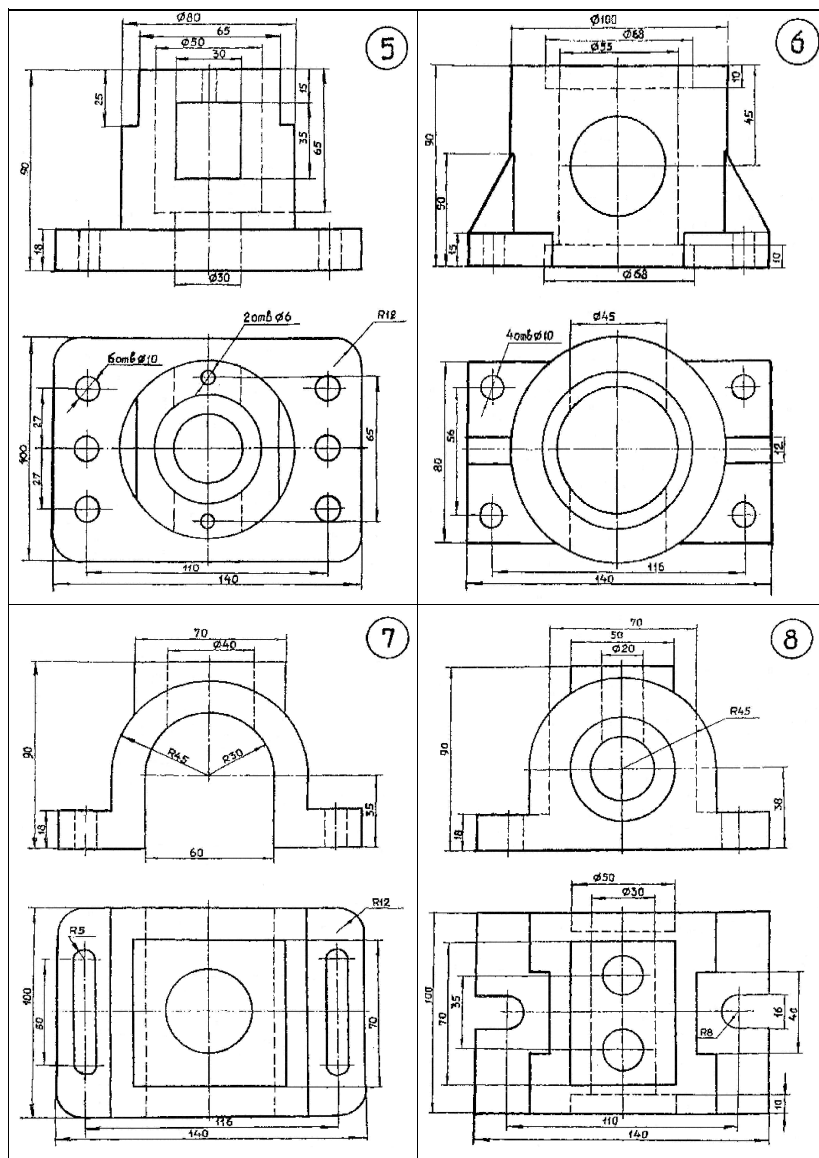
Необхідно враховувати, що закономірності побудови тіней в ортогональних проєкціях та аксонометрії поширюються і на перспективу, але вони мають деякі особливості. Наприклад, тінь від горизонтальної лінії на горизонтальну площину паралельна самій прямій, тому в перспективі і тінь, і пряма мають бути спрямовані в точку сходу, яка розташована на горизонті. Точка сходу сонячних променів і точка сходу їх вторинних проєкцій розташовані у проєкційному зв'язку.

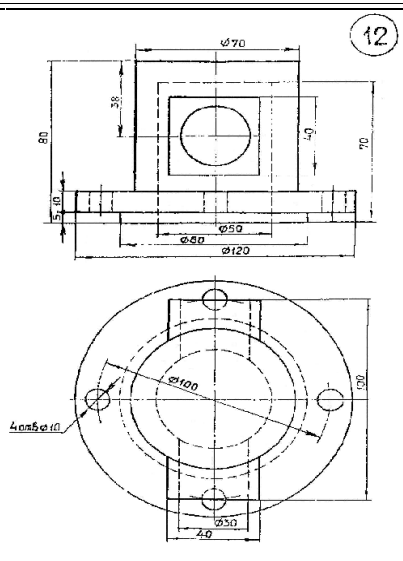
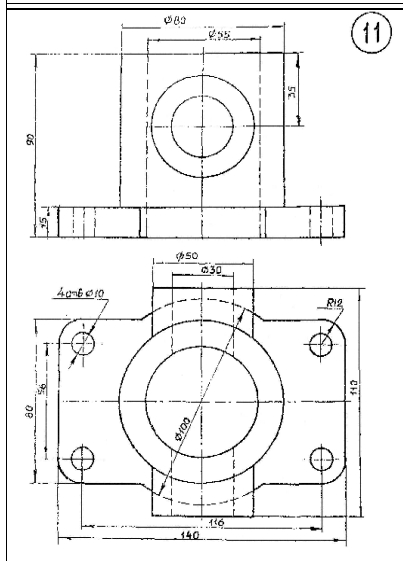
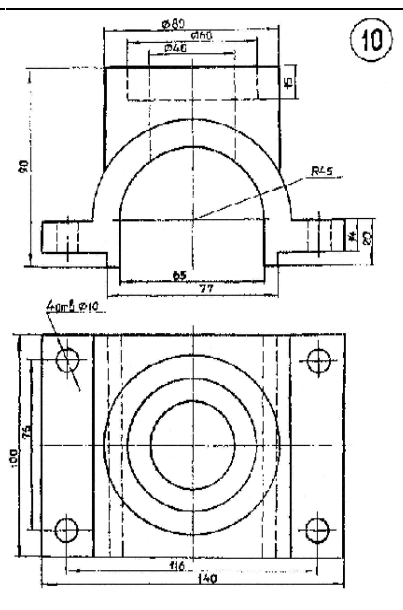
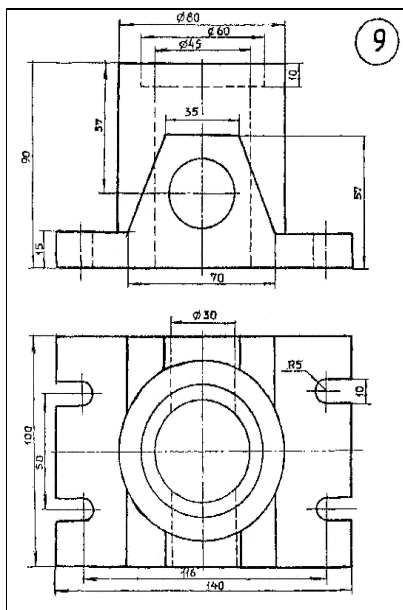
5. Лінії побудови перспективи і межі власних і падаючих тіней обводять дуже тонкими лініями. Лінії невидимого контуру не обводять, якщо вони не потрібні для побудови.

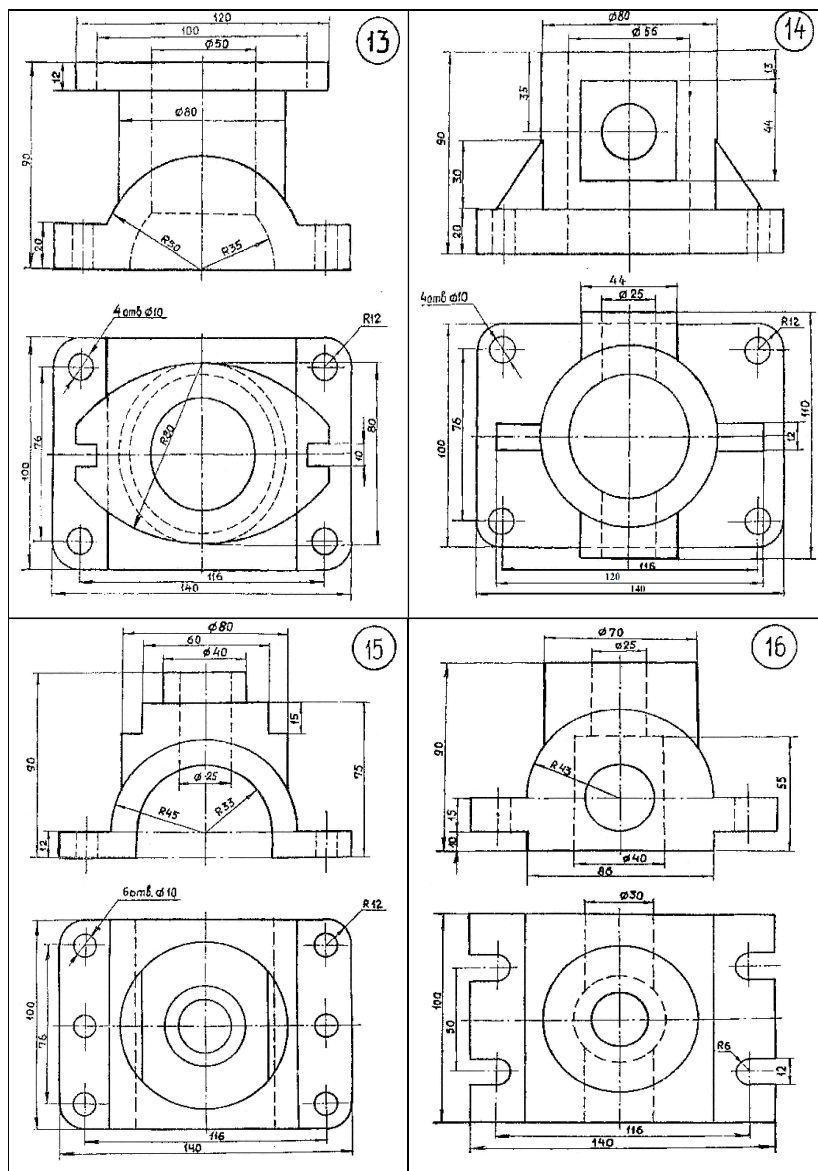
Зразок оформлення графічного завдання "Тіні в перспективі" наведено на рис. 8.18.

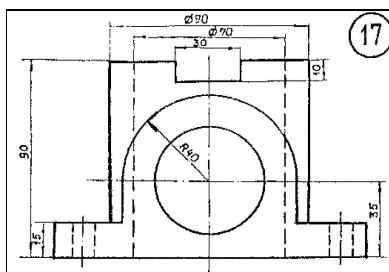
Варіанти індивідуальних завдань "Власні тіні в аксонометрії"



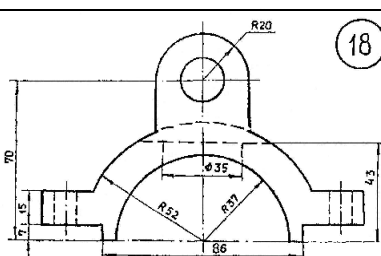




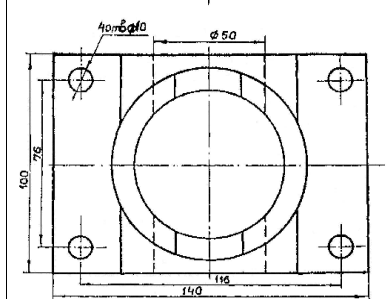




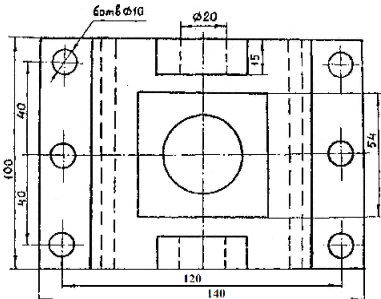
17



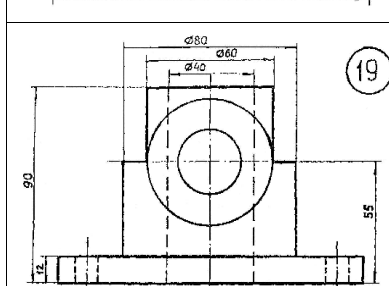
18



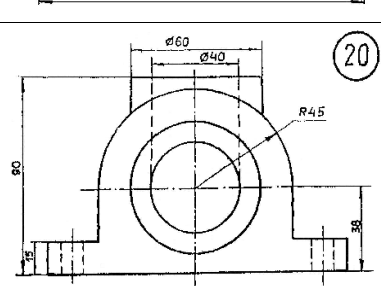
19



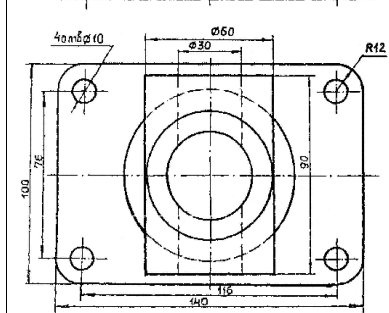
20



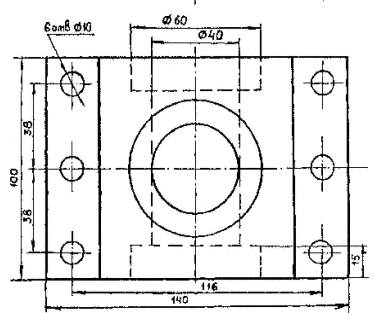
21



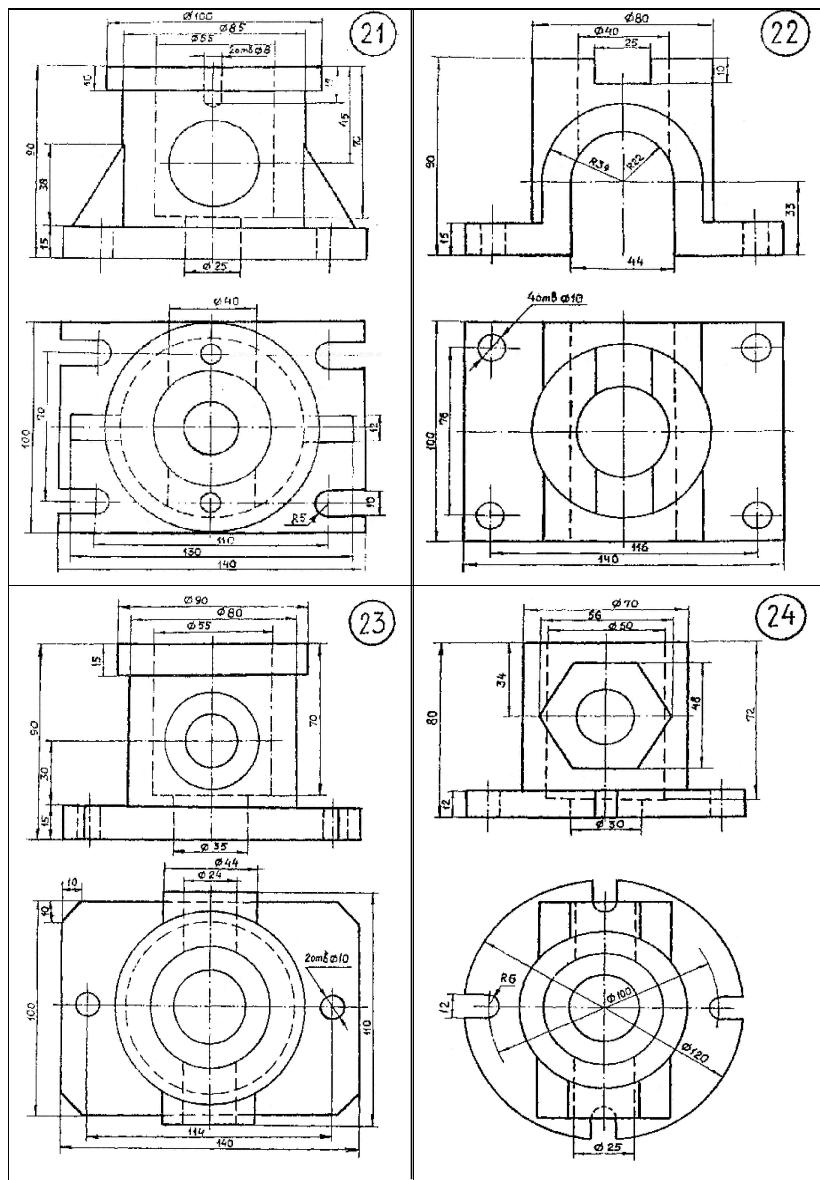
22



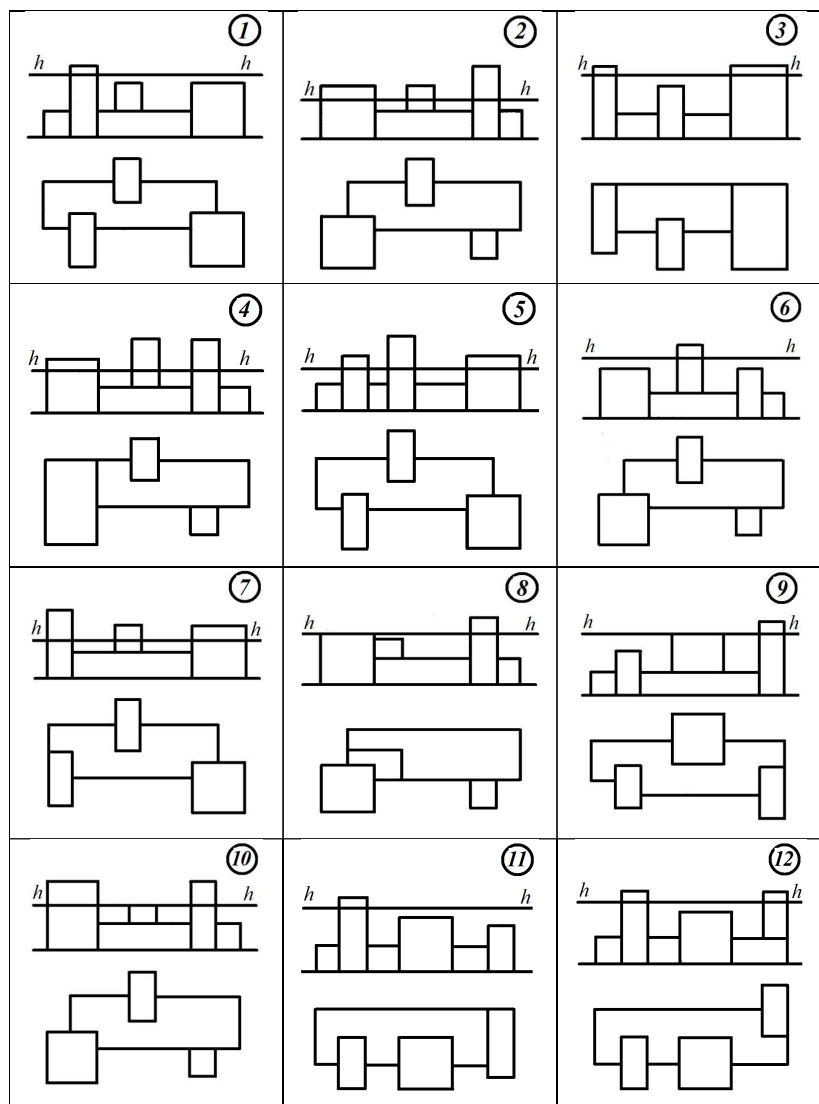
23

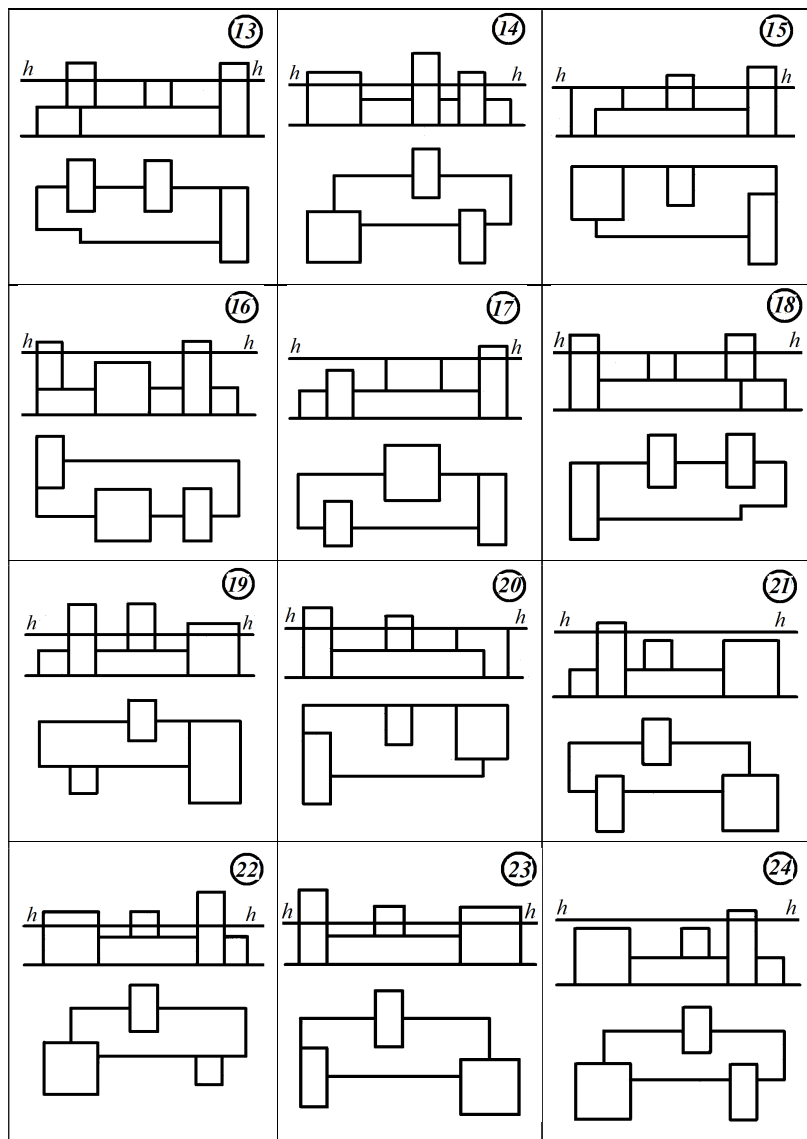


24



Варіанти індивідуальних завдань
"Тіні в перспективі" і "Аксонетрія будівлі з тінями"





СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. **Антонов, Е. К.** Комплексный чертеж в судостроении : учебное пособие [Текст] / Е. К. Антонов. – Николаев : НКИ. – Ч. 1, 1988 г., 86 с. ; Ч. 2, 1989 г., 84 с.
2. **Бідніченко, О. Г.** Добірка домашніх завдань з нарисної геометрії : навчальний посібник [Текст] / О. Г. Бідніченко, С. О. Слободян. – Миколаїв : НУК, 2017. – 48 с.
3. **Борисенко, В. Д.** Нарисна геометрія : навчальний посібник [Текст] / В. Д. Борисенко, О. Г. Бідніченко, В. Ю. Кремсал. – Миколаїв : Видавництво "Дизайн і поліграфія", 2007. – 192 с.
4. **Борисенко, В. Д.** Аксонометричні проекції : навч. посіб. [Текст] / В. Д. Борисенко, О. Г. Бідніченко. – Миколаїв : НУК, 2009. – 56 с.
5. **Браилов, А. Ю.** Инженерная геометрия : учебник [Текст] / А. Ю. Браилов. – К. : Каравелла, 2013. – 456 с.
6. **Бубенников, А. В.** Начертательная геометрия [Текст] / А. В. Бубенников. – М. : Высшая школа, 1985. – 288 с.
7. **Винницкий, И. Г.** Начертательная геометрия [Текст] / И. Г. Винницкий. – М. : Высшая школа, 1975.
8. Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник [Текст] / В. Є. Михайленко, В. М. Найдіш, А. М. Підкоритов, І. А. Скидан ; за ред. В.Є. Михайленка. – К. : Видавничий Дім "Слово", 2011. – 352 с.

9. **Кириллов, А. Ф.** Черчение и рисование : учеб. для строит. техникумов [Текст] / А. Ф. Кириллов. – М. : Высшая школа, 1987. – 352 с.

10. **Кириченко, А. Ф.** Теоретичні основи інженерної графіки : підручник для вищих технічних навчальних закладів [Текст] / А. Ф. Кириченко. – К. : ВД "Професіонал", 2004. – 496 с.

11. **Климухин, А. Г.** Тени и перспектива [Текст] / А. Г. Климухин. – М. : Стройиздат, 1967.

12. **Локтев, О. В.** Краткий курс начертательной геометрии [Текст] / О. В. Локтев. – М. : Высшая школа, 1985. – 136 с.

13. **Михайленко, В. Е.** Инженерная графика : учебник для вузов [Текст] / В. Е. Михайленко, А. М. Пономарев. – К. : Высшая школа, 1990. – 303 с.

14. Нарисна геометрія : навчальний посібник [Текст] / В. Є. Михайленко, М. Ф. Євстифєєв, С. М. Ковальов, О. В. Кащенко ; за ред. В. Є. Михайленка. – К. : Видавничий Дім "Слово", 2013. – 304 с.

15. **Посвянский, А. Д.** Краткий курс начертательной геометрии [Текст] / А. Д. Посвянский. – М. : Высшая школа, 1974. – 191 с.

16. **Ратничин, В. М.** Перспектива [Текст] / В. М. Ратничин. – К. : Вища школа, 1982. – 232 с.

17. **Фролов, С. А.** Начертательная геометрия [Текст] / С. А. Фролов. – М. : Машиностроение, 1978. – 239 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ	7
1. ПОБУДОВА ПІРАМІДИ	9
1.1. Побудова проєкцій точок	9
1.2. Визначення видимості конкуруючих точок	11
1.3. Побудова горизонталі та фронталі в площині основи піраміди	14
1.4. Побудова перпендикуляра до площини	17
1.5. Визначення точки перетину прямої з площиною	19
1.6. Визначення натуральної величини відрізка	22
1.7. Завдання "Побудова піраміди"	25
2. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ	36
2.1. Основні задачі перетворення комплексного креслення	36
2.2. Чотири основні задачі перетворення проєкцій	37
2.3. Способи перетворення комплексного креслення	38
2.4. Спосіб заміни площин проєкцій	45
2.5. Завдання "Заміна площин проєкцій"	62
3. ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ ПЛОЩИНАМИ	68
3.1. Перетин поверхні з проєкціовальною площиною	68
3.2. Перетин поверхонь із площиною загального положення	72
3.3. Завдання "Перетин поверхні площиною"	76
4. ВЗАСМНИЙ ПЕРЕТИН ПОВЕРХОНЬ	85
4.1. Загальні підходи до побудови лінії перетину двох поверхонь	85
	259

4.2. Перетин поверхонь, одна з яких проєкціювальна	87
4.3. Спосіб допоміжних січних площин-посередників	92
4.4. Спосіб допоміжних січних сфер-посередників	97
4.5. Особливий випадок взаємного перетину поверхонь обертання другого порядку	103
4.6. Завдання "Побудова лінії взаємного перетину поверхонь"	107
5. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ	118
5.1. Загальні поняття про розгортні поверхні	118
5.2. Розгортки пірамідальних поверхонь	119
5.3. Розгортки призматичних поверхонь	121
5.4. Розгортки конічних поверхонь	124
5.5. Розгортки циліндричних поверхонь	127
5.6. Умовні розгортки поверхонь	130
5.7. Завдання "Побудова розгортки поверхні"	134
6. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ	137
6.1. Загальні відомості про аксонометричні проєкції	137
6.2. Види аксонометричних проєкцій	142
6.3. Стандартні аксонометричні проєкції	144
6.4. Аксонометричні проєкції плоских фігур	160
6.5. Приклади побудови ізометричних проєкцій простих фігур	167
6.6. Приклади побудови ізометричних проєкцій складних фігур	174
6.7. Завдання "Аксонометричні проєкції"	177
7. ПЕРСПЕКТИВА	184
7.1. Основні поняття та визначення	184
7.2. Перспектива точки	189
7.3. Перспектива прямої лінії	191
7.4. Гранична точка прямої. Лінія горизонту	192
7.5. Побудова перспективи точки за її ортогональними проєкціями	193
7.6. Перспектива пучка паралельних прямих. Точка сходу	195

7.7. Особливості перспектив прямих	203
7.8. Розподіл відрізка прямої на рівні та пропорційні частини	205
7.9. Побудова перспективи паралельних прямих при недосяжній точці сходу	206
7.10. Перспективний масштаб. Дистанційна точка	211
7.11. Побудова перспектив кривих ліній. Перспектива кола	214
7.12. Побудова перспективи кута заданої величини	216
7.13. Перспектива площини	217
7.14. Побудова перспективи за заданими ортогональними проекціями. Метод архітекторів	219
7.15. Вибір точки і кута зору	223
8. ТІНІ	224
8.1. Світлотінь та способи нанесення її на кресленні	224
8.2. Поверхні багатогранників	228
8.3. Циліндричні поверхні	231
8.4. Конічні поверхні	233
8.5. Поверхня кулі	235
8.6. Тіні на комплексному кресленні	237
8.7. Тіні в аксонометрії та перспективі	240
8.8. Завдання "Паралельна штриховка в аксонометрії"	240
8.9. Завдання "Власні тіні в аксонометрії"	241
8.10. Завдання "Аксонометрія будівлі з тінями"	243
8.11. Завдання "Тіні в перспективі"	245
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	257

Навчальне видання

БІДНІЧЕНКО Олена Галіківна
СЛОБОДЯН Сергій Олегович

**АТЛАС ЗАВДАНЬ
З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
З ТЕОРЕТИЧНИМИ ОСНОВАМИ**

Навчальний посібник

Редактор *А. О. Максименко*
Комп'ютерне верстання *А. В. Платонова*
Коректор *М. О. Паненко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 15,3. Тираж 100 прим. Вид. № 15. Зам. № 29.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.